

# SAŽETAK

---

## 1. Uvod

Svaki laser se sastoji od 3 glavna dijela:

1. Optičko pojačalo
2. Optički rezonator
3. Energijska pobuda sustava

## 2. Interakcija elektromagnetskog zračenja i materije

### Bohrov model atoma

- netočna slika atoma
- protivi se relacijama neodređenosti

### 2.1 Kvantna mehanika – Schrödingerova jednačba

#### Heisenbergove relacije neodređenosti:

U kvantnoj fizici čestica ne može istovremeno imati točno određen položaj i količinu gibanja.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

#### De Broglie - poveznica čestičnih i valnih svojstava:

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

De Broglie: čestice se mogu shvatiti kao valovi materije.

Amplituda vala naziva se valna funkcija  $\psi$ .

Intenzitet vala određen je s  $\psi^2 = \psi \cdot \psi^* \rightarrow$  gustoća vjerojatnosti nalaženja čestice u nekom dijelu prostora.

Čestica će najvjerojatnije biti tamo gdje je  $\psi^2$  znatan.

Ako se čestica giba u potencijalu  $E_p$ , valnu funkciju nalazimo rješavajući Schrödingerovu jednačbu:

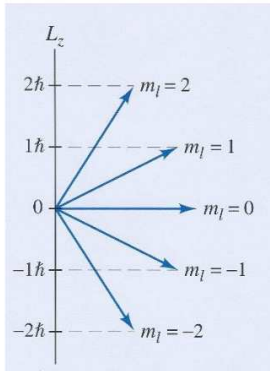
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + E_p \psi = E \psi$$

Rješavanje jednačbe  $\rightarrow$  valna funkcija  $\psi_{n,l,m}$  ovisi o kvantnim brojevima  $n, l, m \rightarrow$  opisuju stanje elektrona u atomu.

- $n$  - glavni kvantni broj - određuje energiju stanja
  - elektroni istog kvantnog broja  $n$  pripadaju istoj ljusci ( $K(n=1), L(n=2), M(n=3)$  itd.)
- $l$  - orbitalni kvantni broj - iznos momenta kutne količine gibanja elektrona
  - $L = \hbar \sqrt{l(l+1)}$

Vrijednost $\ell$	Oznaka stanja	Maksimalan broj elektrona
0	$s$	2
1	$p$	6
1	$d$	10
3	$f$	14
4 Itđ.	$g$	18

- $m$  magnetski kvantni broj - projekciju momenta vrtnje  $\vec{L}$  na os vanjskog magnetskog polja:  $L_z = m \cdot \hbar$ .



- $m_s$  - spinski kvantni broj - projekcija spina elektrona na os kvantizacije

Kvantni brojevi elektrona		
Naziv	Simbol	Moguće vrijednosti
glavni	$n$	1, 2, 3, ..., $\infty$
orbitalni	$l$	Za dani $n$ : $l$ može biti 0, 1, 2, ..., $n-1$
magnetski	$m$	Za dani $n$ i $l$ : $m$ može biti $l, l-1, \dots, 0, \dots, -l$
spin	$m_s$	Za dani skup $n, l$ , i $m$ : $m_s$ može biti $\frac{1}{2}$ ili $-\frac{1}{2}$

**Paulijev princip:** u izoliranom atomu ne mogu biti dva elektrona koji bi imali identične kvantne brojeve  $n, l, m, m_s$ .

## 2.2 Atomi s više elektrona

- Uzajamna djelovanja orbitalnih i spinskih momenata međusobno neovisna ( $L - S$  vezanje) - laki elementi

- Ukupni moment količine gibanja za  $i$  elektrona:  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 
  - $\vec{L} = \sum \vec{l}_i$  - ukupni orbitalni moment
  - $\vec{S} = \sum \vec{s}_i$  - ukupni spinski moment
- Stanje atoma se označava:  $^{2S+1}X_J$  -  $X$  predstavlja neko stanje npr.  $S, P, D, F \rightarrow$  npr.  $^3S_1$  znači  $S = 1, L = 0, J = 1$

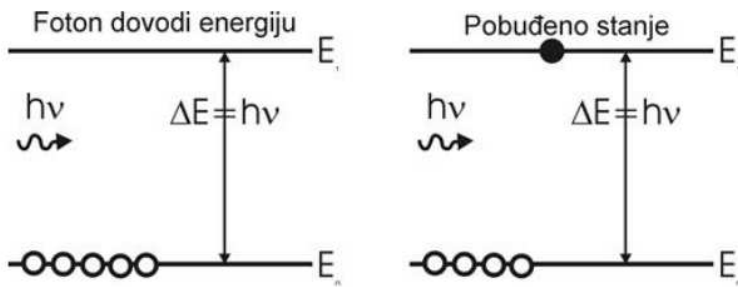
- Prevladava međusobno vezanje orbitalnog i spinskog momenta svakog elektrona ( $J - J$  vezanje) - teški elementi

- $\vec{J} = \sum \vec{j}_i \quad \vec{j}_i = \sum (\vec{l}_i + \vec{s}_i)$

### 3. Apsorpcija i emisija svjetlosti

#### 3.1 Einsteinovi koeficijenti

##### Apsorpcija



Vjerojatnost za proces apsorpcije:

$$\frac{dP_{12}^{aps}}{dt} = B_{12} \cdot u(\nu) \rightarrow B_{12} \text{ Einsteinov koeficijent za apsorpciju}$$

##### Spontana emisija

Ako je broj atoma u stanju više energije  $E_2$  jednak  $N_2$ , tada se taj broj atoma smanjuje zbog spontane emisije prema zakonu:

$$dN_2 = -A_{21} N_2 dt$$

što daje:  $N_2(t) = N_2(0) \cdot e^{-A_{21}t}$

Srednje vrijeme života pobuđenog stanja energije  $E_2$  je:  $\tau = \frac{1}{A_{21}}$

Vjerojatnost za proces spontane emisije:

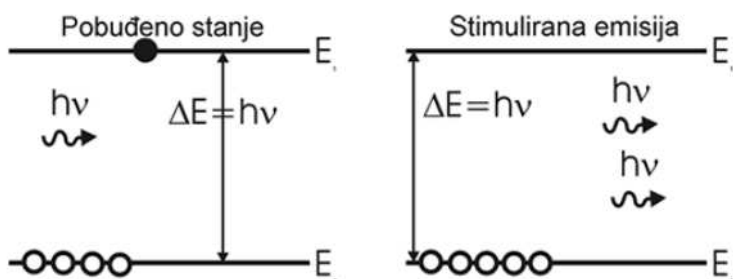
$$\frac{dP_{21}^{se}}{dt} = A_{21} \rightarrow A_{21} \text{ Einsteinov koeficijent za spontanu emisiju}$$

**Spontana emisija nije koherentna, tj. emitirani valovi nisu u fazi.**

##### Stimulirana emisija

Na izlazu imamo dva identična fotona koji putuju u istom smjeru  $\rightarrow$  svjetlost je pojačana i anizotropna.

Električno polje upadnog (vanjskog) i emitiranog zračenja su **u fazi** - dobiveno zračenje ima *visok stupanj koherencije*.



Vjerojatnost za proces stimulirane emisije:

$$\frac{dP_{21}^{ste}}{dt} = B_{21} \cdot u(\nu) \rightarrow B_{21} \text{ Einsteinov koeficijent za stimuliranu emisiju}$$

$N_1 \cdot B_{12} \cdot u(\nu)$  - broj atoma koji apsorpcijom prelaze u pobuđeno stanje energije  $E_2$

$N_2 \cdot (A_{21} + B_{21} \cdot u(\nu))$  - broj atoma koji prelaze u stanje niže energije  $E_1$

U ravnoteži je broj prijelaza jednak:

$$N_1 \cdot B_{12} \cdot u(\nu) = N_2 \cdot (A_{21} + B_{21} \cdot u(\nu))$$

Boltzmannova raspodijela atoma po energijama:

$$\frac{N_2}{g_2} = \frac{N_1}{g_1} \cdot e^{\frac{-h\nu}{kT}}$$

Statistička težina energijskog nivoa  $g = 2J + 1$  ( $J$  vrijednost ukupnog momenta vrtnje elektrona) daje *ukupan broj mogućih orijentacija vektora  $J$  u magnetskom polju*. Uzmemo  $g_1 = g_2$ :

$$B_{12} \cdot u(\nu) = e^{\frac{-h\nu}{kT}} (A_{21} + B_{21} \cdot u(\nu))$$

$$\text{Dobijemo: } u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{12} e^{\frac{h\nu}{kT}} - B_{21}}$$

Pošto je gustoća energije dana Planckovim zakonom zračenja:  $u(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

vidimo da je  $B_{12} = B_{21}$

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

$$u(\nu) = \frac{A_{21}}{B_{21} (e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1)}$$

### **3.2 Izborna pravila za apsorpciju i emisiju**

Srednja vrijednost dipolnog momenta atoma:

$$\langle \vec{p} \rangle = e \cdot \langle \vec{r} \rangle = e \cdot \int \psi_i^* \cdot \vec{r} \cdot \psi_i \cdot dV$$

Pri prijelazu iz energijskog stanja  $E_i$  u  $E_k$ , definira se prijelazni dipolni moment:

$$\langle \vec{M}_{ik} \rangle = e \cdot \langle \vec{r} \rangle = e \cdot \int \psi_i^* \cdot \vec{r} \cdot \psi_k \cdot dV$$

Einsteinove vjerojatnosti za apsorpciju i emisiju proporcionalne su sa  $\langle \vec{M}_{ik} \rangle^2$

**Dozvoljeni su oni prijelazi za koje je:  $\langle \vec{M}_{ik} \rangle \neq 0$**

### **IZBORNA PRAVILA**

1. Promjena orbitalnog kvantnog broja  $\Delta L = \pm 1$
2. Promjena spina  $\Delta S = 0$  (za  $L - S$  vezanje)
3. Promjena magnetskog kvantnog broja  $\Delta M = 0$  za linearno polariziranu svjetlost i  $\Delta M = 1$  za kružno polariziranu svjetlost.

Izborna pravila određuju koji će prijelazi biti dozvoljeni, a koji ne. Postoje dvije mogućnosti:

1. U slučaju LS vezanja (atomi lakih elemenata) kada su međusobna djelovanja orbitalnih momenata  $\vec{L}$  i spinskih momenata  $\vec{S}$  elektrona međusobno nezavisna ( $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ ) vrijedi:  $\Delta L = \pm 1, \Delta S = 0$ .
2. U slučaju JJ vezanja kada prevladava međusobno vezanje orbitalnog i spinskog momenta svakog elektrona ( $j_1 = l_1 + s_1, J = j_1 + j_2$ ) izborna pravila glase:  $\Delta J = 0, \pm 1$  i  $\Delta M = 0, \pm 1$

### 3.3 Koeficijent apsorpcije

#### **IZVOD**

### 3.4 Inverzija naseljenosti

Postoje brojni načini kojima postizemo inverziju naseljenosti.

1. Optičko pumpanje (pogodno kod lasera čvrstog stanja)
2. Pobuda elektronima - sraz prve vrste ( $Ar^+$  laser)
3. Pobuda srazom drugog reda (plinske smjese koje imaju dvije komponente - He-Ne laser)
  1.  $A + e \rightarrow A^*$
  2.  $A^* + B \rightarrow A + B^*$

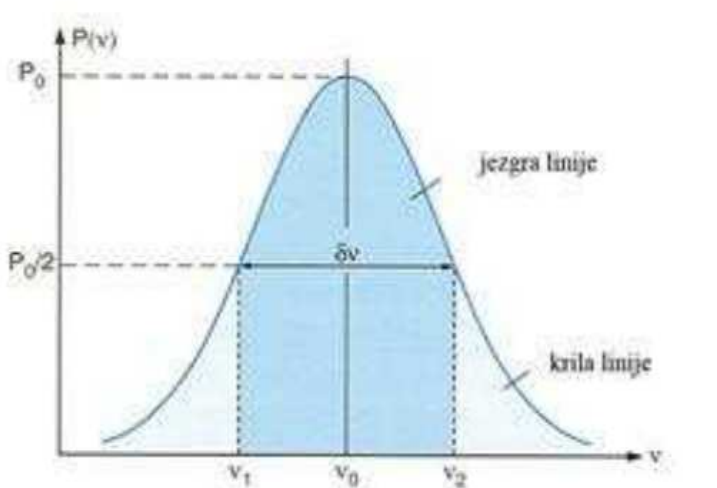
## **4. Oblik i širina spektralnih linija**

Spektralne linije u diskretnim emisijskim ili apsorpcijskim spektrima *nikad nisu strogo monokromatske*.

Funkcija  $I(\nu)$  vjerojatnost emisije fotona s frekvencijom između  $\nu$  i  $\nu + \Delta\nu$  i naziva se **oblik** ili **profil linije**.

Širina linije (ili poluširina) je frekvencijski interval  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  oko središnje frekvencije  $\nu_0$  za koji vrijedi:  $I(\nu_2) = I(\nu_1) = \frac{I(\nu_0)}{2}$ .

Frekvencijsko područje unutar poluširine zove se **jezgra linije**, a područje izvan su **krila linije**.



1. Ako atomi miruju (odnosno gibanje atoma nije veliko npr. u kristalima) linija se naziva **prirodna** ili **Lorentzova**.
2. Ako se atomi gibaju, kao npr. u plinovima, javlja se proširenje linije zbog Dopplerovog efekta. Oblik linije opisan je **Gaussovom funkcijom**. Liniju je tada uobičajeno nazivati Gaussovom ili **Dopplerovom**.

#### 4.1 Prirodna širina linije

Srednje vrijeme života pobuđenog stanja energije  $E_2$  je  $\tau = \frac{1}{A_{21}}$ .

Spontana emisija traje određeno vrijeme. Kada bi emisija trajala beskonačno dugo emitirao bi se *monokromatski val*, međutim val ima određeno trajanje i zbog toga emitirani **val nije monokromatski** već postoji ovisnost intenziteta o frekvenciji  $I(\nu)$ .

Neodređenost energijske razine  $E_2$ :  $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$

$$E = h \cdot \nu$$

$$\Delta E = h \cdot \Delta \nu$$

$$\Delta \nu = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \Delta t}$$

Ako se prijelazi elektrona odvijaju između dviju pobuđenih energijskih razina širini linije pridonose neodređenosti u frekvenciji obje energijske razine:  $\Delta \nu = \Delta \nu_1 + \Delta \nu_2$

#### 4.2 Oblik linije kod spontane emisije

$$I(\omega) = I_0 \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \gamma - \text{poluširina linije}$$

#### 4.3 Oblik linije pri apsorpciji

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2 \pi}{4c\epsilon_0 m} \frac{\frac{\gamma}{2\pi}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad \text{Koeficijent apsorpcije ima **Lorentzov oblik** .}$$

$$n' = 1 + \frac{Ne^2}{4\epsilon_0 m \omega_0} \frac{\omega_0 - \omega}{(\omega_0 - \omega)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

Ukupni intenzitet Lorenzove linije:  $I = \frac{\pi}{2} I_0 \gamma$

#### 4.4 Dopplerov oblik linije

$$I(\omega) = I_0 \cdot e^{-\left[\frac{1}{v_P} \cdot \frac{(\omega - \omega_0)c}{\omega_0}\right]^2} \quad \text{- **Gaussov oblik linije**}$$

#### 4.5 Širenje spektralnih linija u sudarima

Ako u atomu ili molekuli A postoje energijske razine s energijama  $E_i$  i  $E_k$  tada se u slučaju sudara s atomom ili molekulom B te energijske razine malo **pomiču** zbog interakcije atoma.

Širina linije se može povećati ili smanjiti ovisno o tome da li je interakcija privlačna ili odbojna, no **oblik linije se ne mijenja**.

- *Elastičan sudar* može doći i do pomicanja frekvencije središta linije  $\omega_0$
- *Neelastičan sudar*: ne dolazi do pomicanja središta linije već samo do proširenja

### 5. Gustoća modova u šupljini

Unutar šupljine sa stranicama  $A$ ,  $B$  i  $C$  postoji mnoštvo valova koji putuju pa su mogući interferencijski efekti.

Zanima nas slučaj kada su *reflektirani valovi u fazi s upadnim valom* i nastupa **interferencija**. Šupljina se tada ponaša kao rezonator.

Električno polje elektromagnetskog vala unutar šupljine je:  $\vec{E} = \sum A_p \cdot e^{i(\omega_p t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

Valovi s valnim vektorom  $\vec{K}$  se reflektiraju što vodi na 8 mogućih kombinacija  $(\pm K_x, \pm K_y, \pm K_z)$  valova koji mogu interferirati.

Na zidu šupljine se stvara *stojni val* ( $E = 0$ )  $\rightarrow$  duljina stranice šupljine mora biti višekratnik od  $\lambda/2$ .

$$A = p \cdot \frac{\lambda}{2} = p \cdot \frac{\pi}{K_x}; \quad K_x = p \cdot \frac{\pi}{A} \text{ jer je } \lambda = \frac{2\pi}{K}$$

$$K_y = q \cdot \frac{\pi}{B} \quad K_z = r \cdot \frac{\pi}{C}$$

Valni vektor je:  $\vec{K} = K_x \vec{i} + K_y \vec{j} + K_z \vec{k}$

$$K^2 = K_x^2 + K_y^2 + K_z^2 = \pi^2 \left( \frac{p^2}{A^2} + \frac{q^2}{B^2} + \frac{r^2}{C^2} \right)$$

*Stojni valovi* opisani s  $(p, q, r)$  nazivaju se **modovi u šupljini**.

Imamo koordinatni sustav  $x, y, z$  tako da na koordinatnim osima odredimo jedinične odsječke:  $1/A$ ,  $1/B$  i  $1/C$ . U tom sustavu svakoj točki odgovarat će određena vrijednost valnog broja  $K$ , a sve točke će formirati jediničnu kocku.

Broj valova unutar kugle volumena  $V = (4/3)R^3 \pi$  bit će proporcionalan broju točaka u volumenu kugle kojima odgovara neka vrijednost valnog broja  $K$ . Kako se kocka periodičnosti nalazi samo u *pozitivnom djelu*, znači imamo samo  $1/8$  volumena.

Svaki mod u šupljini opisan valnim vektorom može imati *dvije polarizacije*.

$$\text{Broj modova u volumenu } 1/ABC \text{ je: } N = \frac{2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3}{\frac{1}{A} \frac{1}{B} \frac{1}{C}} \quad R = \frac{K}{\pi}$$

$$\text{Broj modova u jedinici volumena je: } n = \frac{K^3}{3\pi^2} = \frac{\omega^3}{3\pi^2 c^3}$$

Broj modova u intervalu frekvencija  $d\omega$  dobijemo derifiranjem po  $\omega$ :

$$n(\omega)d\omega = \frac{K^3}{3\pi^2} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} d\omega$$

Najniži mod u rezonatoru je  $TEM_{00r}$ .

Najniža vrsta transverzalnih el. magn. stojnih valova u rezonatoru se opisuje s  $TEM_{00} \rightarrow$  longitudinalni modovi.

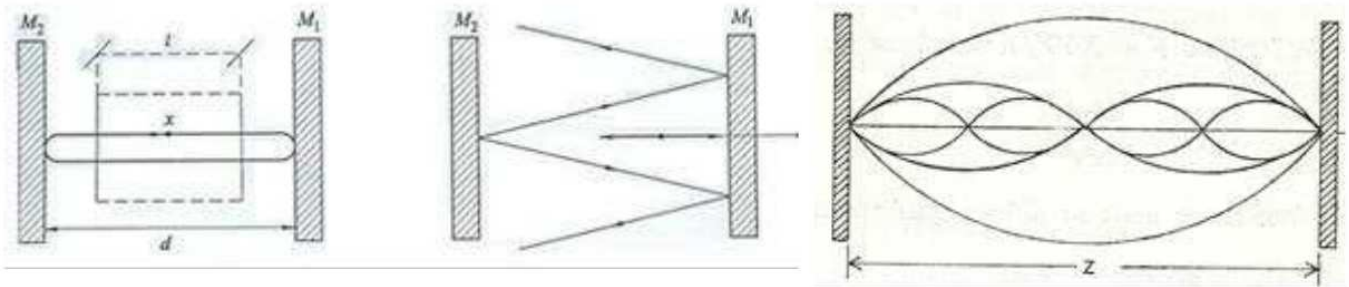
- *Longitudinalni modovi* - spektralna karakteristika lasera kao npr. širina linije i koherencija emitirane svjetlosti
- *Transverzalni modovi* - promjer, usmjerenost (divergencija) laserskog snopa i raspodjela energije u ravnini okomitoj na smjer širenja snopa

## 6. Laserski rezonatori

Rezonator koji koncentrira energiju zračenja aktivnog medija u nekoliko modova može se realizirati pomoću otvorene šupljine koja se sastoji od dva ravna ili zakrivljena zrcala. Iz rezonatora se izgube modovi koji nisu paralelni s optičkom osi.

### 6.1 Fabry-Perot rezonator

Šupljina s planparalelnim zrcalima.



U Fabry-Perot rezonatoru nastaju stojni valovi ako je:  $2nl = m\lambda$

- $l$  - duljina rezonatora
- $n$  - indeks loma sredstva u rezonatoru
- $m$  - cijeli broj

Stojni valovi nastali duž osi u smjeru duljine rezonatora su longitudinalni modovi.

Frekvencije longitudinalnih valova (modova) u rezonatoru su:  $\nu = \frac{mc}{2l}$ .

Razlika u frekvenciji između dva susjedna moda je:  $\Delta\nu = \frac{c}{2l}$

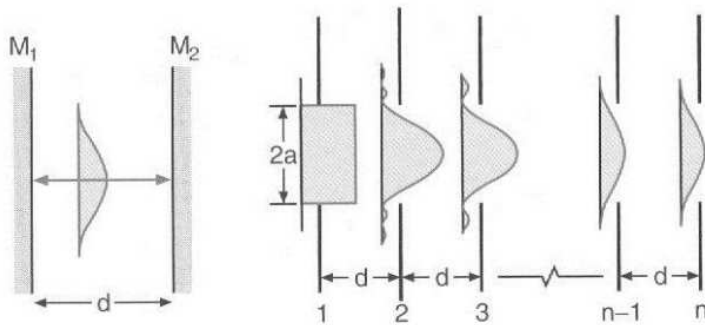
### 6.2 Modovi u otvorenim rezonatorima

Amplitude i faze valova se mijenjaju zbog difrakcijskih gubitaka i zakrivljenosti valne fronte.

Raspodjela amplitude  $A(x, y)$  i faze  $\phi(x, y)$  u otvorenom rezonatoru u kojem se val širi u  $z$  smjeru može se odrediti na slijedeći način.

Svjetlosni val koji se višestruko reflektira između dva zrcala u rezonatoru, ako se gledaju efekti difrakcije, ekvivalentan je prolasku vala kroz  $n$  ekvidistantnih pukotina širine  $2a$  i iste veličine kao zrcala (*Babinetov teorem*).





Raspodjela intenziteta osnovnog moda ima **Gaussov oblik**:  $I(r, z) = I_0 e^{-2 \cdot \left(\frac{r}{z}\right)^2}$

### 6.3 Prag laserske akcije

Ako se u rezonatoru nalazi aktivno sredstvo (optičko pojačalo), prolaskom el.mag. vala u rezonatoru dolazi do **gubitaka** zbog *apsorpcije u sredstvu*, *apsorpcije na zrcalima*, *raspršenja* i drugih gubitaka.

Ako je na ulazu u rezonator intenzitet vala  $I_0$ , dio intenziteta  $I_0$  upadnog vala će atomi (ili molekule) u sredstvu *apsorbirati* pa vrijedi:  $I(\nu) = I_0 \cdot e^{-\alpha x}$

Dio intenziteta  $I_0$  će se izgubiti zbog *apsorpcije na zrcalima*, *raspršenja*, *zagrijavanja* sredstva i to opisujemo izrazom  $I(\nu) = I_0 \cdot e^{-\gamma}$   $\gamma$  - koeficijent gubitaka

Pri **jednom prolasku kroz rezonator** tj. na putu  $2l$  intenzitet vala (zbog apsorpcije i gubitaka) je:

$$I(\nu) = I_0 \cdot e^{-2\alpha l - \gamma}$$

Inverzna naseljenost -  $\alpha$  je **negativan** (koeficijent pojačanja)

Elektromagnestki val će pri jednom prolasku kroz rezonator biti **pojačan** ako je:  $G(\nu) = \frac{I(\nu, 2l)}{I_0} = e^{-2\alpha l - \gamma} \geq 1$

Granični slulaj je  $2\alpha l = \gamma$  - **prag laserske akcije**

Inverzija naseljenosti  $\rightarrow \alpha$  koji daje pojačanje snopa ima **oblik kao i linija prijelaza u sredstvu**:

$$\alpha(\nu) = \Delta N \cdot \frac{h\nu}{c} \cdot B_{ik} \cdot I(\nu)$$

Krivulja pojačanja  $G(\nu)$  ima oblik linije  $I(\nu)$ .

Val se reflektira na zrcalima pa treba uzeti u obzir i **koeficijente refleksije zrcala**  $R_1$  i  $R_2$  te **gubitke zbog refleksije**.

Nakon  $n$  prolaza kroz rezonator (na putu  $2l$ ), krivulja pojačanja je:

$$G(\nu) = (R_1 R_2)^n \cdot e^{-2n\alpha l - n\gamma} \geq 1$$

Ukupan broj modova u rezonatoru ovisi o širini linije pri stimuliranoj emisiji.

$$2\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1, \quad \lambda_2 = \lambda_0 - \Delta\lambda, \quad \lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$$

$\lambda_0$  - valna duljina u središtu linije

Ukupan broj modova unutar širine linije  $2\Delta\lambda$ : 
$$N = n_{max} - n_{min} = \frac{4l\Delta\lambda}{\lambda_0^2 - \Delta\lambda^2}$$

Što je šira linija i dulji rezonator više će se modova stvarati u rezonatoru.

## 6.6 Faktor dobrote – kvalitete laserskog rezonatora

Laserska šupljina se opisuje faktorom kvalitete  $Q$  koji se definira kao:

$$Q = 2\pi\nu \frac{W}{\frac{dW}{dt}}$$

- $W$  - ukupna energija u rezonatoru
- $\frac{dW}{dt}$  - gubitak energije u jednom krugu u rezonatoru (put  $2l$ )

$$Q \frac{dW}{dt} = 2\pi\nu W$$

$$\frac{dW}{W} = \frac{2\pi\nu}{Q} dt$$

$$W = W_0 e^{-\frac{2\pi\nu}{Q} t}$$

Nakon jednog kruga u vremenu  $t = 2L/c$  energija se smanji:

$$W = W_0 e^{-\gamma} = W_0 e^{-\frac{2\pi\nu}{Q} \cdot \frac{2L}{c}}$$

$$Q = \frac{4\pi \cdot \nu \cdot L}{\gamma \cdot c}$$

Širina linije pojedinog moda: 
$$\Delta_{mod} = 2\pi\gamma = \pi \frac{\omega_0}{Q}$$

## 7. Eksperimentalna realizacija jednomodnih lasera

### Longitudinalni modovi:

Longitudinalni modovi su u rezonatoru razmaknuti po frekvenciji za  $c/2L$ .

Mod koji oscilira najbliže maksimumu krivulje pojačanja izvlači najviše energije iz sredstva.

Izdvajanje jedne linije:

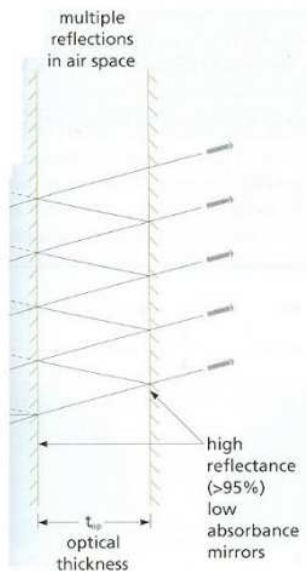
1. ako je udaljenost modova veća od širine linije tada selektivna reflektivnost zrcala može izdvojiti jednu liniju (mod)

Duljina rezonatora bi trebala biti prikladna za izdvajanje samo jednog moda. Primjer He-Ne lasera s širinom linije od 1500 MHz daje  $c/2L = 1,5 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ . U tom slučaju da bi laser radio u jednom modu trebalo bi biti  $L < 10 \text{ cm}$  no tako mala dimenzija rezonatora nije pogodna jer se dobiva mala izlazna snaga.

2. ako su linije bliske za izdvajanje jedne koristi se neki optički element (prizma, rešetka i sl.)

Izdvajanje pomoću prizme: prizma može biti unutar ili izvan rezonatora.

## FABRY-PEROT ETALON



Planparalelni sloj napravljen od stakla ili kvarca. Indeks loma FP etalona je  $n$ , a sredstva izvan etalona  $n'$  (zrak).

Val koji dolazi na prvu plohu FP etalona djelom se reflektira, a djelom ulazi u FP. Val reflektiran na prvoj plohi reflektira se na gušćem sredstvu pa je faza reflektiranog vala pomaknuta za  $\pi$ . Dio vala koji prođe kroz etalon i reflektira se na drugoj plohi (na njoj nema promjene u fazi) i vraća se na prvu plohu.

Val reflektiran na drugoj plohi se od upadnog razlikuje u fazi za:

$$\Delta\Phi = k \cdot \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = 2\pi \frac{n(d+d)}{\lambda} = \frac{4\pi nd}{\lambda} = \frac{4\pi nd}{c} \nu$$

Prvi i drugi reflektirani val se razlikuju u fazi za  $\pi$ , pa je **ukupna razlika u fazi**:

$$\Delta\Phi' = \frac{4\pi nd}{c} \nu - \pi = 2\pi \left( \frac{2\nu nd}{c} - \frac{1}{2} \right)$$

Da bi prolazni val kroz FP etalona imao najveću vrijednost *intenzitet reflektiranog vala mora biti što manji*. To znači da bi dva vala koji se reflektiraju (na prvoj i drugoj plohi FP) trebali **destruktivno interferirati**. Uvjet za destruktivnu interferenciju:  $\Delta\Phi' = (2m + 1)\pi$

Zadovoljen je za frekvencije  $\nu_m = m \cdot \frac{c}{2nd}$   $m=1,2,\dots$

**Transmisija kroz FP etalon:**

- $T$  - faktor transmisije
- $R$  - faktor refleksije
- $I_0$  - upadni intenzitet

$$I_1 = R \cdot I_0$$

Nakon  $n$  refleksija, ukupan transmitirani intenzitet:

$$I_T = I_0 \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2 + 4R \sin^2(\frac{\phi}{2})}$$

**FINESA:** omjer razmaka između susjednih pruga i poluširine transmitiranog moda.

$$F^* = \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$$

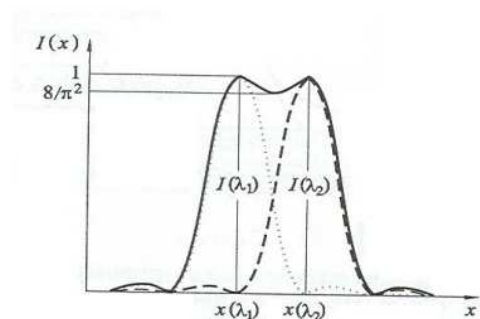
$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

**Spektralna moć razlučivanja**

$$R = \left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \left| \frac{\nu}{\Delta\nu} \right|$$

$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  - najmanja razlika dviju bliskih linija koje su razlučene kao dvije.

**Rayleighjev kriterij:** Linije su razlučene ako središte ogibnog maksimuma jedne linije pada u prvi minimum druge linije.



## 8. Uklanjanje transverzalnih modova višeg reda

U rezonatoru postoje viši transverzalni modovi  $TEM_{p,q,r}$  - većinom **nepoželjni** pa se mogu ukloniti odgovarajućom geometrijom rezonatora (odgovarajući presjek i duljina).

Transverzalni modovi u rezonatoru imaju velike **gubitke pri difrakciji**. Gubitci ovise o *polumjeru aperture rezonatora*  $a$ , *udaljenosti između zrcala*  $L$ , što se izražava tzv. **Fresnelovim brojem**  $N$ :

$$N = \frac{a^2}{L\lambda}$$

**Apertura** u rezonatoru - ploča s kružnim otvorom promjera  $2a$  kojom se može postići propuštanje jednog moda uz istovremeno nepropuštanje (blokiranje) drugog moda.

**Dakle, umetanjem aperture određenog promjera u rezonator transverzalni modovi višeg reda mogu se ukloniti.**

## 9. Karakteristike laserske svjetlosti

### 9.1 Monokromatska – širina linije emitiranog vala $\Delta\nu$ je mala

Spektralna širina linije  $\Delta\nu$  dobivena stimuliranom emisijom kod laserskog svjetla može biti u području MHz do  $\mu\text{Hz}$ .

Za ravni val (sinusoida) koji se širi prostorom čija se amplituda i frekvencija u vremenu  $\Delta t$  ne mijenja kažemo da je **koherentan** u vremenu. Vrijeme koherencije je  $\Delta t$ . Što je  **$\Delta t$  veći** širina linije emitiranog vala  **$\Delta\nu$  je manja** jer vrijedi:  $\Delta\nu \propto 1/\Delta t$ .

### 9.2 Usmjerena

Ako želimo svjetlost iz izvora svjetlosti dimenzije  $2h$  usmjeriti (kolimirati) upotrijebit ćemo **leću** žarišne daljine  $f$ .

Kut difrakcije snopa nakon leće:  $\theta = h/f$

Da bi  $\theta$  bio mali, žarišna daljina leće treba biti velika ili dimenzija izvora mora biti mala.

Za laserski snop promjera  $D$ :  $\theta = \lambda/D$

Pomoću leće žarišne daljine  $f$  laserski snop se može **fokusirati**.

Promjer mrlje (spota) fokusiranog snopa:  $d = \lambda f/D$

Najbolje fokusiranje se postiže za  $f = D$ , tada je  $d = \lambda$

### 9.3 Velikog sjaja

**Spektralni sjaj** je optičko svojstvo koje je ujedno mjera *monokromatičnosti* i *usmjerenosti* izvora svjetlosti.

Definiran je kao svjetlosna snaga izračena u jedinični prostorni kut u jedinični valni interval po jediničnoj površini.

### 9.4 Visoke koherencije

Ako svjetlost iz dvaju izvora  $S_1$  i  $S_2$  istovremeno (u času  $t$ ) dolazi u neku točku  $P$  tada će u toj točki ukupno električno polje biti jednako zbroju el. polja koje u tu točku dolaze iz svakog od izvora:

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_1(P, t) + \vec{E}_2(P, t)$$

Funkcija međusobne koherencije električnih polja:

$$\Gamma(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \langle E^*(\vec{r}_1, t_1) \cdot E(\vec{r}_2, t_2) \rangle$$

Izvor zračenja stacionaran  $\rightarrow \Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$   $\tau = t_1 - t_2$

$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$  opisuje stupanj do kojeg su polja u točkama  $(\vec{r}_1, t_1)$  i  $(\vec{r}_2, t_2)$  sposobna interferirati.

Intenzitet svjetlosti u točki  $P$  je tada:  $\langle I(P, t) \rangle = \frac{c \cdot \epsilon_0}{2} \Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$

Stupanj koherencije se definira kao:

$$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \cdot \Gamma(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}$$

Najveća i najmanja vrijednost intenziteta u točki P mogu se napisati pomoću stupnja koherencije:

$$I_{max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot |\gamma|$$

$$I_{min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot |\gamma|$$

Kao mjeru koherencije svjetlosti može se definirati **vidljivost** tj. **oštrina** interferencijskih pruga:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

$$V = \frac{2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot |\gamma|}{I_1 + I_2}$$

- $I_{min} = 0$ ,  $V = 1 \rightarrow$  potpuna destruktivna interferencija u točki  $P$  - polje je **koherentno**.
- $I_{min} = I_{max}$ ,  $V = 0 \rightarrow$  polje je **nekoherentno**.

$|\gamma|$  - direktna mjera vidljivosti pruga ( $0 \leq |\gamma| \leq 1$ )

- **Potpuno koherentno polje** -  $|\gamma| = 1$
- **Potpuno некоherentno polje** -  $|\gamma| = 0$
- **Djelomično koherentno polje** -  $0 < |\gamma| < 1$

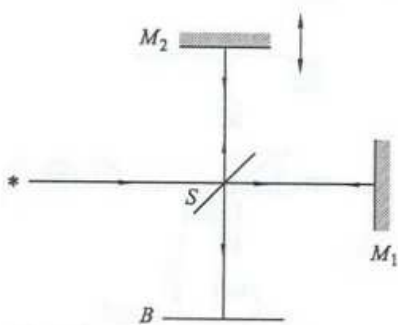
## VREMENSKA KOHERENCIJA

**Vremenski koherentan val**  $\rightarrow$  ako je razlika faza valova koji stižu u točku P u vremenima  $t_1$  i  $t_2$  ista za sve valove.

**Vrijeme koherencije**  $\rightarrow$  vremenski interval  $\Delta t$  za koji je  $\Delta\Phi < \pi$

**Koherentna duljina**  $\rightarrow$  put koji prođe val u tom vremenu:  $\Delta s_C = \Delta t \cdot c$

Vremenska koherencija se mjeri **Michelsonovim interferometrom**



Snop dolazi do djelitelja snopa  $S$  i podjeli se na dva snopa. Jedan dio prolazi prema zrcalu  $M_1$ , drugi dio snopa je zakrenuta za  $90^\circ$  i ide prema zrcalu  $M_2$ . Snopovi se reflektiraju i nakon ponovnog prolaska kroz  $S$  sastaju na zastoru  $B$ . Zrcalo  $M_2$  se može pomicati vertikalno.

Na zastoru  $B$  se promatra za koji najveći pomak zrcala  $M_2$  dva snopa više neće interferirati, odnosno pruge interferencije više neće biti vidljive. Mjenjanjem udaljenosti zrcala  $M_2$  mijenja se vrijeme potrebno da svjetlost stigne do zastora  $B$ .

Kada je **razlika u putu dvaju snopova veća od koherentne duljine lasera** snopovi **neće interferirati**. Na taj se način može mjeriti vidljivost pruga interferencije na zastoru i odrediti vrijeme koherencije i koherentna duljina.

Vrijeme koherencije i koherentna duljina ovise o širini  $\Delta\nu$  spektralne linije svjetlosti koja izlazi iz izvora:  
 $\Delta t \cdot \Delta\nu \approx 1$

## PROSTORNA KOHERENCIJA

**Vremenski koherentan val** → ako je razlika faza valova u točki P konstantna u vremenu.

Prostorna koherencija se analizira pomoću **Youngovog pokusa**.

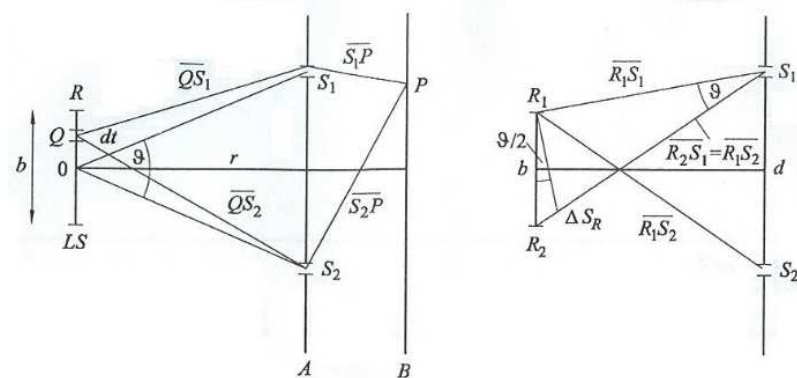
Mjeri se vidljivost pruga interferencije na zastoru u ravnini  $B$  tako da se povećava  $|r_1 - r_2|$ :

- $r_1$  - udaljenost koju prođe zraka svjetlosti od  $S_1$  do točke na zastoru  $P$
- $r_2$  - udaljenost od  $S_2$  do iste točke  $P$  na zastoru

Višemodni rad lasera smanjuje prostornu koherenciju.

**Youngov pokus:** određivanje prostorne koherencije jednodimenzionalnog izvora svjetlosti duljine  $b$ .

Svaka točka na izvoru emitira valove koji prolaze kroz pukotine  $S_1$  i  $S_2$  i njihova superpozicija određuje raspodjelu intenziteta u ravnini  $B$ , tj. u nekoj točki  $P$  te ravnine:



- U proizvoljnoj točki  $P$  ravnine  $B$  rezultatni intenzitet će ovisiti o razlici faza  $\Delta\phi = \phi(S_1) - \phi(S_2)$  i o razlici optičkih puteva  $S_1P - S_2P$ .

Ako je duljina izvora svjetlosti  $b$  vrlo mala u usporedbi s njegovom udaljenosti od zastora  $r$ :

- razlika puteva se približno može napisati kao:  $\Delta s \approx b \cdot \sin(\frac{\theta}{2})$

Uvjet prostorne koherencije za jednodimenzionalni izvor:  $\frac{b \cdot d}{r} \leq \lambda$

Za **dvodimenzionalni izvor** u obliku kvadrata stranice  $b$  i površine  $A_S = b^2$  prostornu koherenciju će određivati **koherentna površina**  $A_C = d^2$

Uvjet koherencije:  $\frac{b^2 \cdot d^2}{r^2} \leq \lambda^2$  ili  $\frac{A_S \cdot A_C}{r^2} \leq \lambda^2$

**Koherentna površina** - najveća vrijednost površine  $A_C = d^2 \rightarrow S_C = \frac{\lambda^2 \cdot r^2}{A_S}$

**Koherentni volumen:**  $V_C = \Delta s_C \cdot S_C$

## 10. Vrste lasera

Podjela:

1. prema načinu rada: **kontinuirani** i **pulsni**
2. prema agregatnom stanju optičkog pojačala: **plinski**, **tekući**, **laseri čvrstog stanja**
3. prema načinu pobude: **optički**, **sudarima elektrona i atoma** u plinskom izboju, **ozračivanjem snopovima česticama visoke energije**, **kemijskim reakcijama**.

Npr. pobuđivanje sudarima s elektronima pogodno je u plinskom laseru, dok je optička pobuda pogodna kod lasera čvrstog stanja.

Pobuđivanje kemijskom reakcijom je pogodno kod plinskih lasera kod kojih se optičko pojačalo sastoji od više kemijski aktivnih komponenata.

### 10.1 Laseri s kontinuiranim izlazom i impulsni laseri

#### 10.1.1 Laseri s kontinuiranim izlazom

Kod lasera s kontinuiranim valom optičko pojačalo se nalazi između dva paralelno postavljena zrcala (**rezonator**).

Snop se unutar rezonatora reflektira, raste gustoća energije zračenja i nakon postizanja uvjeta za **lasersku akciju** snop izlazi iz laserske šupljine kroz zrcalo koje je djelomično propusno.

#### 10.1.2. Impulsni laseri

##### 1. Impulsni laseri s Q-prekidanjem

U početku procesa optičke pobude Q vrijednost (faktor kvalitete) je mala (tj. gubici su veliki) i nije moguće dostići prag laserske akcije.

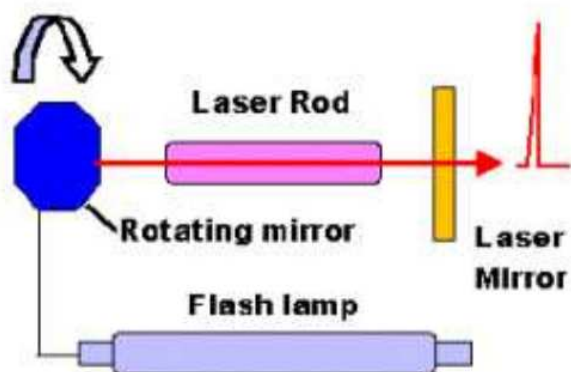
Porastom snage pobude inverzija naseljenosti u mediju raste i u jednom času ( $t_0$ ) Q iznenada dosegne maksimalnu vrijednost. U tom času su gubici u rezonatoru mali i pojačanje stimuliranom emisijom naglo naraste dajući snažan impuls svjetlosti. Inverzija naseljenosti pada na nulu, impuls završava i cijeli proces kreće ponovno.

Dvije moguće eksperimentalne realizacije Q-prekidanja:

##### **Q – prekidanje pomoću rotirajućeg zrcala**

Unutar rezonatora zrcalo koje ima koeficijent refleksije 1 **neprekidno rotira**. U času kada zrcalo postaje okomito na optičku os rezonatora snop se reflektira kroz rezonator i kroz djelomično propusno zrcalo (drugo zrcalo) izlazi laserski impuls.





## Q – prekidanje – elektrooptičko prekidanje

Unutar rezonatora nalazi se **Pockelsova ćelija** - anizotropni kristal koji zakreće ravninu polarizacije narinutog vanjskog el. polja.

Kada na ćeliju dolazi el. polje zakreće se ravnina polarizacije za  $90^\circ$  i polarizator  $P_2$  propušta laserski impuls.

## 2. Impulsni laseri sa sprežanjem modova (mode-locking).

Slobodan režim rada u laseru - transverzalni i longitudinalni modovi s **nasumičnom faznom razlikom** koja se mijenja u vremenu.

Svaki mod **titra neovisno** o drugom modu, intenzitet snopa rezultat je zbrajanja modova s nasumičnom faznom razlikom.

## **Sprezanje modova** - valovi imaju **stalnu razliku u fazi**

Kod spregnutih modova laserski izlaz daje periodično ponavljanje valnih impulsa koji su rezultat konstruktivne interferencije modova.

Trajanje impulsa je  $\Delta t = 2L/cN$  ( $L$  duljina rezonatora,  $N$  broj modova u rezonatoru).

Prema relacijama neodređenosti,  $\Delta\nu \cdot \Delta t \geq 1$ . trajanje impulsa je to kraće što je širina linije veća

**Vidljivo je da što je frekvencijski pojas širi (što je veći broj modova), to je trajanje impulsa kraće!**

Impulsni laseri imaju veliku izlaznu snagu iako je u prosjeku relativno niska sveukupna energija.

Postoji više različitih načina kako postići sprezanje modova u laserskom rezonatoru, no princip je uvijek isti: **periodička modulacija parametara rezonatora** (amplitude ili frekvencije) s frekvencijom koja je jednaka razmaku frekvencija u rezonatoru tj,  $c/2L$ .

*Aktivna modulacija:*

- akustičko-optički modulator proizvodi zvučni val koji modulira intenzitet zrake koja prolazi rezonatorom
- elektro-optički modulator koji radi na frekvenciji  $c/2L$

*Pasivna modulacija:*

- apsorber koji modulira pojačnje u aktivnom mediju

Ako se neki mod frekvencije  $\nu$  modulira frekvencijom  $\Omega$  pojavit će se dodatne komponente s frekvencijama  $\nu \pm n\Omega$ . Ako je u rezonatoru frekvencija modulacije  $\Omega = c/2L$  dodatne komponente poklopit će se sa susjednim modom u rezonatoru i ti modovi će biti spregnuti i poklopit će se u fazi.

### 3. Prekidanje pojačanjem

Najčešće se upotrebljava poluvodički aktivni medij u koji se injektiraju elektroni. Kada gustoća elektrona dosegne prag laserske akcije nastaje impuls. Stimulirana emisija je brža od injekcije elektrona pa se impuls prekida nakon otprilike 50 ps.

Nakon emitiranja impulsa gustoća elektrona se opet povećava i nakon što dosegne prag proces počinje iznova.

## 10.2 Laseri prema agregatnom stanju optičkog pojačala

### 10.2.1. Plinski laseri

Podjela:

1. atomski: He-Ne, Cs...
2. ionski: Ar, Kr...
3. molekulski:  $CO_2$ ,  $N_2$
4. kemijski
5. excimerski

**Plinski izboj:** Za pobudu plinovitog sredstva vrlo pogodan način pobude su **sudari s elektronima** u plinskom izboju. Prolaskom struje dovoljne jakosti kroz plin dolazi do sudara elektrona s atomima ili molekulama.

Svaki takav elektron može izazvati ionizaciju atoma pa se takav izboj zove **samostalan izboj**.

Prema gustoći struje koja prolazi kroz cjev samostalni izboj može biti:

1. tamni izboj
2. tinjavi izboj
3. lučni izboj

### CIJEVI

Stavljanjem cijevi između dva zrcala dobiva se optički rezonator. Emitirana svjetlost iz ovakvog rezonatora nije polarizirana. Da bi dobili **polariziranu svjetlost** na krajeve cijevi postavljaju se prozori pod tzv. **Brewsterovim kutom**.

Jedan od načina polarizacije el. mag. vala je **polarizacija refleksijom**. Kada val pada na granicu dvaju sredstava on se djelomično lomi, a djelomično reflektira.

Ako je kut upada  $\alpha$ , kut loma  $\beta$ , a  $n$  indeks loma sredstva vrijedi Snellov zakon loma:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$$

Kod određenog upadnog kuta  $\alpha$  vrijedi  $\alpha + \beta = \pi/2$ . Tada vrijedi **Brewsterov zakon**  $\boxed{\operatorname{tg} \alpha = n}$

Koeficijenti refleksije dani su izrazima:

$$\boxed{R_p = \frac{I_{Rp}}{I_{0p}} = \left[ \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \right]^2}$$

$$\boxed{R_n = \frac{I_{Rn}}{I_{0n}} = \left[ \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right]^2}$$

- $p$  - paralelna polarizacija
- $n$  - okomita polarizacija
- $I_0$  - intenzitet upadne svjetlosti

Kod upadnog kuta  $\alpha$  za koji vrijedi Brewsterov zakon uvrštavanje u gornje izraze daje:

$$\boxed{R_p = 0} \text{ - neće se reflektirati}$$

$$\boxed{R_n = \sin^2(\alpha - \beta)} \text{ - reflektirat će se}$$

Dakle, Brewsterovi prozori postavljeni na cijev lasera **okomito polariziranu svjetlost zadržavaju unutar rezonatora**, a **paralelno polariziranu propuštaju**.

## 10.2.2 Atomski laseri

### He-Ne LASER

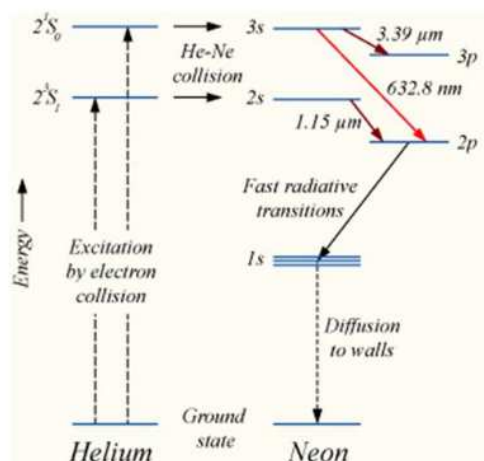
Aktivno sredstvo je mješavina plina He i Ne (uobičajeno 10:1).

Atomi He pobuđuju se u sudaru s elektronima i zatim u sudaru s atomima Ne predaju energiju (sudari 2. vrste) te na taj način atomi Ne dolaze u stanje inverzne naseljenosti.

U atomima Ne je moguće postići nekoliko laserskih prijelaza.

He-Ne laseri najčešće emitiraju liniju na **632,8 nm** (crveno).

Mogući su i laserski prijelazi u IC području na 1523.5 nm i 3392 nm, no takvi laseri su skuplji zbog visoke cijene optičkih komponenata koje se koriste u IC području.



Na kraju izbojne cijevi su **Brewsterovi prozori**.

He-Ne laseri rade u **kontinuiranom načinu**, rade u **osnovnom Gaussovom modu**, snaga im je do nekoliko desetaka mW. Izlazni snop je visokokoherentan i dobro usmjeren (male divergenije).

### $Ar^+$ ION LASER

Optičko sredstvo je plazma koja se sastoji od iona i elektrona dobivenih električnim izbojem.

**Inverzija naseljenosti** se postiže u dva koraka: neutralni se atom najprije ionizira u direktnom sudaru s elektronom i nakon toga se tako dobiveni pozitivni ion u sudarima s elektronima pobuđuje na više energijske razine.

**Laserski prijelazi** se odvijaju između elektronskih razina pobuđenog  $Ar^+$  iona.

Laserska akcija se zbiva na 8 vidljivih linija **između 457.9 nm i 514,5 nm** u plavo-zelenom dijelu spektra.

Najjača individualna laserska emisija dobivena je na **514,5 i 488 nm**.

Da bi se spriječilo da ioni oštete cijev primjenjuje se *longitudinalno magnetsko polje* koje zakreće elektrone. Sudari iona sa stjenkom kapilare **zagrijavaju cijev** pa ju je **potrebno hladiti**.

### 10.2.3 Molekulski laseri

Kod molekulskih lasera laserska akcija počinje izbojem u plinu, elektroni visokih energija sudaraju se s molekulama plina i pobuđuju ih na viša energijska stanja.

Energija koju molekula primi može biti raspodjeljena na:

- **elektronsku** - promjene u raspodjeli elektrona između atoma u molekuli
  - vidljivo u UV područje
- **vibracijsku** - mijenja se titranje atoma u molekuli
  - IC područje
- **rotacijsku** - rotacija cijele molekule (pobude su nižih energija)
  - mikrovalno područje
- **translacijsku** - povezano s toplinom

**Ukupna valna funkcija molekule je umnožak triju valnih funkcija: elektronske ( $\Psi_e$ ), vibracijske ( $\Psi_v$ ) i rotacijske ( $\Psi_r$ ).**

Može se smatrati da za vrijeme elektronskih prijelaza jezgre atoma miruju (**Frank-Condonov princip**).

### Elektronska stanja molekula

Elektronsko stanje molekule opisuje se ukupnim orbitalnim  $\vec{L}$  i spinskim momentom  $\vec{S}$  količine gibanja.

Projekcije orbitalnog momenta  $\vec{L}$  na os vanjskog magnetskog polja su  $L_z = \Lambda \hbar$  pri čemu je  $\Lambda$  **orbitalni kvantni broj**.

Vrijednost $\Lambda$	Oznaka stanja
0	$\Sigma$
1	$\Pi$
2	$\Delta$
3	$\Phi$

Pored orbitalnog kvantnog broja svako elektronsko stanje molekule karakterizirano je spinskim kvantnim brojem  $S$ .

**Ako je ukupni spin  $S=0$  stanje se naziva singletno, ako je  $S=1$  stanje se naziva tripletno.**

### Vibracijska stanja molekula

Svaki atom u molekuli može titrati oko ravnotežnog položaja u tri smjera:  $x$ ,  $y$  i  $z$ . Za molekulu koja ima  **$N$  atoma** broj stupnjeva slobode je  **$3N$** .

### Rotacijska stanja molekula

#### $CO_2$ LASER

$CO_2$  je simetrična molekula koja može titrati na 3 osnovna načina:

- simetrično istezanje -  $E_1 = h\nu(V_1 + \frac{1}{2})$   $V_1 = 0, 1, 2, 3...$
- asimetrično istezanje -  $E_2 = h\nu(V_2 + \frac{1}{2})$   $V_2 = 0, 1, 2, 3...$
- savijanje -  $E_3 = h\nu(V_3 + \frac{1}{2})$   $V_3 = 0, 1, 2, 3...$

$V_1, V_2, V_3$  - vibracijski kvantni brojevi

Pobuđeno stanje - linearna kombinacija triju navedenih osnovnih načina titranja.

#### **Pobuda** - sudari s elektronima

Za ostvarenje laserske akcije molekule bi trebalo pobuditi u energijsko stanje  $(001)$  → dodavanjem molekula dušika  $N_2$

Dušik može titrati samo na jedan način (jedan vibracijski kvantni broj  $V$ ).

U sudaru s elektronima molekula dušika će biti pobuđena iz stanja s vibracijskim kvantnim brojem  $V = 0$  u stanje s  $V = 1$ . Energija dušika u pobuđenom stanju ( $V = 1$ ) gotovo je jednaka energiji  $CO_2$  molekule u stanju  $(001)$ .

Sudarom pobuđene molekule dušika s molekulom  $CO_2$  u osnovnom stanju  $(000)$  dolazi do predaje energije pri čemu molekula  $CO_2$  prelazi u pobuđeno stanje  $(001)$ , a dušik se vraća u osnovno stanje ( $V = 0$ ).

Laserski prijelazi - između vibracijskih stanja  $(001)$  i  $(100)$  na valnoj duljini  **$10,6 \mu m$**  i između vibracijskih stanja  $(001)$  i  $(020)$  na valnoj duljini  **$9,6 \mu m$** .

Nakon laserske emisije molekula treba prijeći u osnovno stanje  $(000)$ . Sudarom s  $CO_2$  molekulom u osnovnom stanju ona predaje energiju i prelazi u stanje  $(010)$ .

(010)  $\rightarrow$  (000) - **zabranjen prijelaz** pa se dodaje neka druga molekula ( $He$ ,  $O_2$ ).

U sudaru molekula  $CO_2$  u stanju (010) predaje energiju drugoj molekuli npr.  $He$ , nakon čega prelazi u osnovno stanje (000).

Najčešće se koristi valna duljina **10,6  $\mu m$** , dakle emisija je u **infracrvenom području** (toplinsko).

$CO_2$  laser može raditi u **kontinuiranom** načinu kao i u **impulsnom** načinu koristeći **Q-prekidanje**.

### **DUŠIKOV $N_2$ LASER**

U spektru se pojavljuju 24 linije s valnim duljinama između **337,044 nm** i **337,144 nm**.

Koriste se prijelazi u **UV području** i laser radi u **impulsnom** načinu rada.

Dušikov laser se razlikuje od ostalih lasera upravo po tome što je **gornja laserska razina kratkoživaća** dok je kod ostalih lasera ona dugoživaća.

Nema rezonatora - umjesto rezonatora koristi se jedno zrcalo koje usmjerava zračenje na drugi kraj cijevi, odnosno na izlaz lasera.

Emisija iz dušikovog lasera ima manju koherenciju u odnosu na lasere s optičkim rezonatorom i ima nešto veću divergenciju snopa.

#### **10.2.4 Excimerski laseri**

Excimerske molekule **postoje samo u pobuđenom stanju**, u osnovnom stanju su nestabilne.

**Laserska akcija** u excimerskoj molekuli događa se zbog toga što molekula ima vezano pobuđeno stanje, ali nevezano osnovno stanje. Ovo se događa zbog toga što su plemeniti plinovi, kao što su kripton i ksenon, visoko inertni i obično ne tvore kemijske veze.

Excimerski laseri emitiraju u **ultraljubičastom području**, u **impulsnom** načinu rada.

Zbog **kratke valne duljine** koriste se za vrlo precizne operacije.

#### **10.2.5 Kemijski laseri**

Kemijski laseri su plinski jer su komponente koje reagiraju u plinovitom stanju. Molekule plina mogu se dovesti u pobuđeno stanje pomoću određenih **kemijskih reakcija**.

Prednost kemijskog lasera je da se pobuda dobiva samom kemijskom reakcijom **bez ikakvog vanjskog djelovanja**.

Energijski kvantni prijelazi su između rotacijsko vibracijskih razina pa emitiraju u dalekom infracrvenom i **infracrvenom području (1.3–11  $\mu m$ )**.

#### **10.2.6 Laseri s bojom**

Aktivna sredstva su organske molekule boja otopljene u kapljevinama.

Kada se pobude svjetlom ili ultraljubičastim zračenjem organske boje imaju jaki fluorescentni spektar.

Promjenom boje ili otapala može se promijeniti valna duljina izlaznog zračenja pa takvi laseri pripadaju vrsti lasera s **ugodljivim valnim duljinama**.

Moguće je kontinuirano ugađati laserski izlaz kroz dio spektra od **300 nm do 1,2  $\mu m$** .

Mogu raditi **impulsno** ili **kontinuirano**.

Apsorpcija i emisija zračenja odvija se između različitih rotacijsko-vibracijskih stanja. Molekule se nalaze u osnovnom  $S_0$  rotacijsko – vibracijskom stanju, **ozračivanjem svjetlošću ili ultraljubičastim zračenjem** naseljavaju se prva pobuđena singletna stanja  $S_1$  (singletno stanje - ukupan elektronski spinski kvantni broj je nula). **Srazovima sa molekulama otapala** pobuđene molekule boja prelaze u najniže vibracijsko stanje  $\nu_0$  u  $S_1$  stanju u vremenu od  $10^{-11} - 10^{-12}$  s. Iz tog stanja molekule mogu spontanom emisijom prijeći u jedno od stanja  $S_0$  ili bez zračenja u niže tripletno stanje  $T_1$  (tripletno stanje- stanje u kojemu je ukupni elektronski spinski kvantni broj jednak jedan).

Primjećuje se da se svjetlost apsorbirana na danoj valnoj duljini, **re-emitira (fluorescencija)** na većoj valnoj duljini (valna duljina emitirane svjetlosti veća je od pobudne). Sposobnost da **upija svjetlost kratkih valnih duljina i fluorescencira** ili **re-emitira svjetlost dulje valne duljine** je jedno od *najkorisnijih svojstava organskih boja*. Pritom određene boje djeluju kao sredstva za posvjetljivanje, apsorbirajući UV i emitirajući u plavom dijelu spektra.

### Načini izvedbe lasera s bojom

#### 1. Laseri s bojom pobuđeni bljeskalicama

Da bi se dobila uska spektralna linija ugrađuju se prizme, optičke rešetke, interferencijski filteri i FP interferometri.

#### 2. Laseri s bojom pobuđeni impulsnim laserima

Za pobudu se najčešće se koristi **dušikov laser** s valnom duljinom 337nm koji pobuđuje boje koje imaju fluorescentni spektar od bliskog ultraljubičastog do bliskog infracrvenog dijela spektra. Koriste se još i excimerski laseri, Nd:YAG ili Nd:staklo laseri, te laseri sa Cu parama.

#### 3. Laseri s bojom kontinuiranog vala (CW)

Za pobudu se gotovo uvijek koristi **argon ionski laser**. Mogu biti realizirani pomoću rezonatora sa stojnim valom ili kao “kružni” laseri s bojom kod kojih se dobiva veća snaga u ‘single’ – modu rada

### 10.3. Čvrsta tijela

Sile koje povezuju atome čvrstog tijela potječu od **vanjskih elektrona** u atomima. Ovi elektroni određuju električna i optička svojstva čvrstog tijela. Atomi u kristalu su veoma blizu, pa energijski nivoi elektrona nisu diskretni kao kod atoma, već dolazi do njihovog **preklapanja u pojaseve** (vrpce).

Ako se energijski nivoi susjednih atoma prekrivaju tada će zbog Paulijevog principa, od svakog nivoa nastati dva - **cijepanje nivoa** povećava njihovu gustoću i smanjuje razmak između njih pa nivoi nisu više diskretni veću tvore **gotovo kontinuirani pojas**.

Elektroni se mogu nalaziti u dozvoljenim vrpčama (**valentna i vodljiva**) koje su međusobno odvojene **zabranjenim vrpčama**.

#### 10.3.1 . Laseri čvrstog stanja

Kao medij u kojem se pojačava laserska svjetlost pri svakom prolazu koriste se **kristali i stakla** → apsorbiraju svjetlost no najčešće ju **ne emitiraju** (luminisciraju) već **energiju predaju rešetci** (energija prelazi u energiju titranja atoma u rešetci).

Da bi dobili **luminiscenciju** dodaju se primjese iona plemenitih ili prijelaznih metala i to od 0,001% i više (neodimija, kroma, erbija, itd). Luminiscencija potječe od **ugrađenih iona**.

## Energijska pobuda - svjetlosna (fotoni)

Izvori te svjetlosti su:

- bljeskalice ili svijetiljke
- laserske diode

## RUBINSKI LASER

Crvena boja rubina dolazi od iona kroma (0,05%).

**Laserska akcija** se odvija u ionima  $Cr_{3+}$

U emisijskom spektru javljaju se dvije fluorescentne linije na **694.3 nm** i na **692.8 nm** (linije R 1 i R 2 ). Hlađenjem rubina linije se pomiču na kraće valne duljine i postaju uže.

## NdYAG LASER

YAG kristal se dopira ionima neodimija, erbija i sl.

**Laserska akcija** se odvija u **primjesnim ionima**.

NdYAG laser je najčešća vrsta lasera čvrstog stanja kod kojeg se **neodimij** dopira u YAG kristal (do 1% Nd iona).

NdYag je laser s **4 energijske razine**.

NdYAG laser najčešće emitira **infracrveno zračenje** valne duljine **1064 nm** te može raditi u **kontinuiranom** i **pulsnom** načinu rada.

## VIBRONSKI LASERI - Ugodljivi laseri čvrstog stanja

Kod apsorpcijskih i emisijskih prijelaza javlja se **široka vrpca** zbog interakcije između elektronskih i vibracijskih modova kristalne rešetke koja okružuje dopirani ion. Rezultat te interakcije je široka laserska vrpca. **Podešavanjem duljine rezonatora može se izdvojiti željena frekvencija.**

Kod **titan-safir** lasera emisija je u području **670-1070 nm**. Određena linija se može izdvojiti pomoću **optičkih elemenata** (rešetka, FP etalon i sl.).

U medicini se koriste npr. za **uklanjanje tetovaža** jer svaku boju tetovaže treba tretirati svjetlošću druge frekvencije.

## OPTIČKI LASERI

Optički laseri su laseri koji za medij pojačanja koriste **dopirano optičko vlakno**. Rad optičkih vlakana temelji se na principu **totalne refleksije** - svjetlost će se totalno reflektirati ako je **kut upada veći od graničnog**.

Optičko vlakno se sastoji od **jezgre** i **ovojnice**. Oko jezgre je sloj materijala (silicija) čiji indeks loma je **manji** od indeksa loma jezgre.

Kod optičkog lasera **aktivno sredstvo** je jezgra dopirana s rijetkim zemljinim ionima kao što su erbij , iterbij, neodimij i dr.

Laserski prijelazi se odvijaju u **primjesnim ionima**.

**Optičko pumpanje** postiže se pomoću lasera na lijevoj strani pri čemu svjetlost ulazi u vlakno. Na desnoj strani se pomoću drugog zrcala dobiva laserski signal iz optičkog vlakna.



## Rezonatori u optičkim laserima

Kako bi se formirao rezonator u optičkom laseru, potrebno je **dodati zrcalo** koje će uzrokovati **refleksiju**.

1. **Dielektrično zrcalo** koje se stavlja na kraj optičkog vlakna
2. **Braggova rešetka** zamjenjuje zrcala na način da propušta određene valne duljine, a druge zaustavlja - nalazi se direktno u dopiranom optičkom vlaknu

Optički laseri su često pobuđivani **diodnim laserima**.

Oni mogu raditi u **pulsnom** načinu rada koristeći **Q prekidanje** ili **sprezanje modova**.

## POLUVODIČKI LASERI

Kod poluvodiča se između vodljivog i valentnog pojasa nalazi zabranjeni pojas u kojem ne postoje energijske razine ( $E_g$ ). Elektroni u vodljivom pojasu mogu se gibati po kristalnoj rešetci, dok su u valentnom pojasu vezani uz atom.

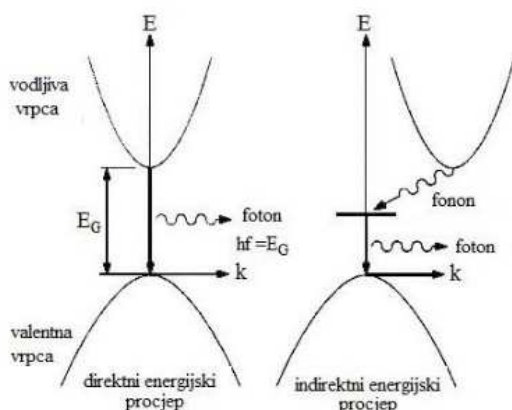
**Protjecanje struje** - elektroni mogu prijeći iz valentnog u vodljivi pojas, a u valentnoj vrpici tada ostaju **šupljine**.

**Generacija**: proces nastanka para elektron šupljina

**Rekombinacija** - proces vraćanja elektrona u valentnu vrpcu → može doći do emisije svjetlosti

Poluvodički materijali:

- direktni energijski procjep - galijev arsenid (GaAs)
  - minimum energije vodljive vrpce i maksimum energije valentne vrpce na istoj vrijednosti valnog broja  $k$
  - rekombinacija se događa bez promjene valnog vektora (količine gibanja elektrona) i popraćena je emisijom fotona → **radijativni prijelaz**
- indirektni energijski procjep - silicij, germanij
  - minimum energije vodljive i maksimum energije valentne vrpce nalaze se na različitim vrijednostima valnog broja
  - elektron pri prijelazu dio energije predaje atomima pri čemu dolazi do zagrijavanja kristala (titranjem atoma kroz materijal se širi val - čestica nazvana *fonon*) → **neradijativni prijelaz**
  - može, ali ne mora generirati vidljivu svjetlost



Za **svjetlosne i laserske diode** koristi se **propusno polarizirani pn-spoj** poluvodičkih materijala s **direktnim energijskim procjepom** u kojem struja generira parove elektron-šupljina koji se rekombiniraju i emitiraju energiju u obliku vidljive svjetlosti.

Frekvencija emitiranog fotona - razlika energija elektrona i šupljine koji se rekombiniraju:  $E_g = h\nu$  (približno)

Galijev arsenid (GaAs) - energija procjeka 1,4 eV emitira u **infracrvenom području** (900 nm) - GaAs + fosfor P  $E_g$  se može mijenjati između 1,4 i 2,3 eV

Za emisiju u vidljivom području treba **promijeniti širinu zabranjenog područja** ( $E_g$ )

Galijev nitrid (GaN) - energija procjeka 3,4 eV emitira u **UV području**

Porastom struje kroz diodu povećava se stvaranje parova i rekombinacija, tj. **intenzitet izlazne svjetlosti ovisi o struji kroz diodu**.

- **Svjetlosna dioda:**

- struja kroz diodu je manja od struje praga ( $I_{th}$ ) → **spontana emisija**

- **Laserska dioda:**

- struja kroz diodu je iznad od struje praga ( $I_{th}$ ) (inverzija naseljenosti) → **stimulirana emisija**

Ako pobudimo diodu malom strujom emisija je nekoherentna, malog intenziteta i nekoherentna (radi kao svjetlosna dioda). Povećanjem struje intenzite svjetlosti raste, emisija je sve koherentnija i snop postaje sve uži (radi kao laserska dioda).

Da bi dioda radila kao **laserska dioda** potreban je **rezonator**. Da bi se dobio laserski rezonator dovoljno je da se strane poluvodiča **poliraju**.

*Najjednostavnija konstrukcija laserske diode:* pn-spoj ostvaren između dva jednaka poluvodiča (npr. GaAs) koji su različito dopirani (**homospoj**) → **homostrukturalna laserska dioda** (visoka struja praga). Kod **heterostrukturalnih** dioda (pn-spoj napravljen između dva različita materijala npr. GaAs i AlGaAs) gustoća struje praga je manja.

Laserske diode se **pobuđuju optički** pomoću svjetlosti čija **energija je veća od širine zabranjenog područja** te **injektiranjem elektrona** tj. dovođenjem elektrona u vodljivu vrpcu.

#### **10.4. Laseri sa slobodnim elektronima (FEL- Free Electron Laser)**

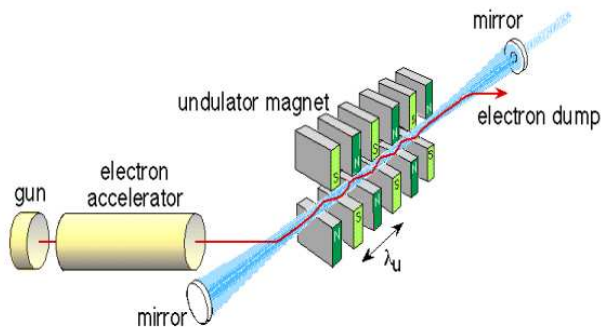
Lasersko zračenje emitiraju **slobodni elektroni**, dakle oni predstavljaju aktivno sredstvo. Slobodni elektron koji se **usporava** zrači energiju, to zračenje se naziva **zakočno zračenje** (*Bremsstrahlung*).

Laser se sastoji od tri glavna dijela:

1. **ubrzivača (akceleratora) elektrona**
2. **optičkog rezonatora**
3. **usporivača (deceleratora) elektrona**

Akcelerator ubrzava snop elektrona koji postižu **relativističke brzine** i takvi ulijeću u rezonator. Rezonator se sastoji od dva zrcala i wiggler-a.

## Wiggler - sustav supravodljivih magneta s promjenljivim magnetskim poljem



Elektroni se pod utjecajem **Lorentzove sile** (u magnetskom polju wigglera) gibaju po **sinusoidi**. Rad Lorentzove sile na elektron je nula jer je sila okomita na brzinu elektrona. Zbog toga se može reći da **elektron titra između magneta**. Titrajući elektron proizvodi zračenje koje se naziva **sinhrotronsko zračenje**.

Elektromagnetsko zračenje relativistički ubrzanog elektrona je u smjeru njegovog gibanja i dano je

$$\text{kutom: } \theta = \left(1 - \frac{v_z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- $v_z$  - brzina gibanja elektrona u  $z$  smjeru (smjer rezonatora)
- $c$  - brzina gibanja vala (fotona)
- $\lambda_w$  - period magneta

Pretpostavimo da se elektron nalazi na mjestu  $z_0$ . Da bi elektron prošao udaljenost  $\lambda_w$  i našao se na mjestu  $z_1 = z_0 + \lambda_w$  potrebno mu je vrijeme  $t = \lambda_w / v_z$ ; foton za to vrijeme prijeđe put  $tc$ . Razlika u putu elektrona i fotona je  $\Delta L = tc - \lambda_w$ .

Zračenja koja istovremeno emitiraju dva elektrona (jedan u  $z_0$ , a drugi u  $z_1$ ) će biti **u fazi i interferirati konstruktivno** ako je:  $\Delta L = m \cdot \lambda_m$  ( $\lambda_m$  - valna duljina emitiranog zračenja,  $m = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\lambda_m = \frac{\Delta L}{m} = \frac{\lambda_w}{m} \left( \frac{c}{v_z} - 1 \right)$$

**Valna duljina kojom će laser zračiti ugađa se promjenom brzine elektrona  $v_z$ .**

FEL je izvor koherentnog zračenja, ostvaruje zračenja spektra **od milimetarskih valnih duljina do ultraljubičastih** (390nm) tj. područje spektra šireg od optičkog. Na izlazu nastaje **puls** velike snage.

### 10.5. Laseri u X području

Emitiraju svjetlost valne duljine reda veličine **2 nm – 30 nm** → **meko zračenje**.

Mala valna duljina ukazuje da laserska zraka mora nastati u **jako ioniziranoj materiji**.

#### **Načini rada X ray lasera:**

Do danas najbolje istraženi način je **pobuda elektronskim sudarima**.

Izvor pobudnog lasera je **oscilator** koji odašilje po **dva snopa infra crvenog zračenja**:

1. Prvi puls (ns) i energije oko 5 J pogađa metu i stvara **ioniziranu plazmu**
2. Drugi puls (ps) i energije oko 5 J **pobuđuje ione**

**Meta** se radi od **metala** i to ovisno o vrsti ionizirane podloge koje želimo postići postoje dvije vrste meta:

1. Ionizirana podloga je slična Neonu (**Ne-like**) - pri ioniziranju npr. titana (N=22) dobivamo Ne-like podlogu
2. Ionizirana podloga je slična Niklu (**Ni-like**) - ioniziranjem paladija (N=46) dobivamo Ni-like podlogu

X zrake - **pulsni laser**

## 11. Detektori elektromagnetskog zračenja

### 11.1 KEMIJSKI DETEKTORI

Kemijski detektori pod utjecajem svjetlosti mijenjaju optička svojstva pomoću kemijske reakcije (*fotografska ploča*).

### 11.2 TERMIČKI DETEKTORI

Termički detektori apsorbiraju elektromagnetsko zračenje pri čemu im se povećava temperatura i na taj način proizvode signal koji se može mjeriti električki.

- **Bolometar** - rad se temelji na promjeni otpora uslijed toplinskog zračenja
  - ovisnost otpora o temperaturi metala:  $R(T) = R(T_0)[1 + \alpha(T - T_0) + \beta(T - T_0)^2]$ 
    - $T$  - temperatura na kojoj se nalazi otpornik,  $T_0$  referentna temperatura,  $\alpha$  i  $\beta$  - temperaturni koeficijenti
  - različite vrste bolometara: metalni (platina, nikal, bakar), poluvodički i supravodljivi
  - može se detektirati zračenje **od vidljivog do mikrovalnog područja** (moguće i meko rendgensko i vakuum UV)
- **Termopar – termoelektrični članak** - detektori koji se dobiju spajanjem dvaju različitih vodiča (*Seebeckov efekt*)
  - jedan spoj vodiča se nalazi na jednoj temperaturi a drugi na drugoj - pojava **električnog polja** unutar vodiča
  - na krajevima vodiča biti će prisutan napon koji predstavlja funkciju razlike temperature između dva kraja vodiča  $\rightarrow U = \alpha(T_1 - T_2)$  ( $\alpha$  - Seebeckov koeficijent)
  - termoparom se mjeri **razlika temperature**  $\rightarrow$  temperatura je proporcionalna intenzitetu elektromagnetskog vala
  - povezivanje termoelemenata na odgovarajući način  $\rightarrow$  **termički stup** (mjerenje valnih duljina od vidljivog područja do 30  $\mu\text{m}$ )
- **Piroelektrički detektori**
  - uslijed **promjene temperature** dolazi do **promjene polarizacije** piroelektričkog materijala i na njegovoj površini se javlja električki naboj
  - jako visoka osjetljivost u **infracrvenom području**

### 11.3 FOTOELEKTRIČKI DETEKTORI

**Fotoelektrički efekt:** fotoni  $E = h\nu$  dolaze na neki materijal. Ako je energija fotona veća od izlaznog rada elektroni će izlaziti iz materijala.

- **Fotoćelije** - rade na principu fotoefekta
  - katoda i anoda unutar cijevi pod vakuumom
  - fotoni udaraju u katodu energijom  $h\nu$  koja je veća od izlaznog rada elektrona  $\rightarrow$  nastaju fotoelektroni kinetičke energije  $E_{kin} = h\nu - W_a$
  - fotoelektroni ubrzavaju prema anodi  $\rightarrow$  promjena struje (ovisi o broju fotoelektrona)
  - detekcija zračenja **od UV spektra do vidljivog dijela spektra**
- **Fotomultiplikatori** - rad se temelji na **fotoćeliji** i **pojačalu** koje radi na principu sekundarne emisije elektrona
  - detekcija elektromagnetskog zračenja s **vrlo malo upadnih fotona**  $\rightarrow$  jako visoka djelotvornost pojačanja
  - detekcija **od UV do vidljive svjetlosti**
  - Prva katoda služi za detekciju elektromagnetskog zračenja  $\rightarrow$  dolazi do **fotoefekta** kojim nastaju fotoelektroni koji se gibaju prema prvoj **dinodi** koja postaje izvor sekundarnih elektrona
  - Dinode moraju i **usmjeravati elektrone** da udare u sljedeću elektrodu
  - Nakon prve dinode, elektroni se usmjeravaju prema sljedećoj koja sekundarnom emisijom opet povećava broj elektrona
  - Ukupan broj elektrona (struja) na izlazu ovisi o **broju stupnjeva fotomultiplikatora** odnosno o **broju dinoda**

### 11.4 POLUVODIČKI DETEKTORI

Upadno zračenje generira **parove elektron-šupljina** koji se razdvajaju električnim poljem. Rad detektora temelji se na **pn-spoju**.

- Energija upadnog zračenja **manja** od širine zabranjenog pojasa - neće doći do nastanka para elektron-šupljina
- Energija upadnog zračenja **bliska** energiji zabranjenog pojasa (vidljiva svjetlost) - energija potrebna za nastanak para elektron šupljina malo je veća od energije zabranjenog pojasa
- Energija upadnog zračenja **puno veća** od širine zabranjenog pojasa - dio energije troši se na pobuđivanje vibracija kristalne rešetke
- **Fotootpornici** - rad se temelji na **promjeni vodljivosti poluvodiča** uslijed prisustva elektromagnetskog zračenja
  - Zračenje će uzrokovati da elektroni iz valentnog područja prijeđu u vodljivo  $\rightarrow$  vodljivost poluvodiča se povećava
  - **Dodatak dopanada** - unose energijske nivoe u zabranjeni pojas i tako smanjuju energiju zračenja koju je potrebno dovesti izvana da bi se vodljivost povećala (moguća detekcija

zračenja valnih duljina čija energija je **manja od energije zabranjenog pojasa**)

- **Fotodiode**

- pn spoj poluvodiča čiji je  $E_g$  manji od energije fotona svjetlostikoju treba detektirati
- Fotoni prolaze kroz **osiromašeno područje** (samo tu se mogu razdvojiti) u kojem se generiraju parovi elektron-šupljina
- Pod utjecajem električnog polja par elektron-šupljina se razdvaja, elektroni se gibaju prema n području, šupljine prema p području
- Nastala **struja** je proporcionalna brzini stvaranja parova elektron-šupljina tj. **intenzitetu optičkog zračenja** koje pada na fotodiodu

## Primjene lasera

### 13. 1. Holografija

**Holografija** je proces rekonstrukcije valne fronte elektromagnetskog vala (svjetlosti) raspršenog na nekom predmetu.

Elektromagnetski val je određen **amplitudom** i **fazom** vala. Intenzitet vala jednak je kvadratu amplitude vala. **Klasična fotografija** bilježi 2D raspodjelu intenziteta svjetlosnog vala, dok je **podatak o fazi vala izgubljen**.

Holografija bilježi **amplitudu i fazu** svjetlosnog vala i time predstavlja **potpun zapis**.

Holografski se proces odvija u dva koraka:

#### 1. Snimanje holograma

- Snop iz lasera dijeli se djeliteljem snopa na dva snopa:
  - Jedan snop se pomoću zrcala vodi do predmeta na kojem se raspršuje i raspršeni snop predstavlja **predmetni val**
  - Drugi snop je ravni val i naziva se **referentni snop**
- Oba vala se sastaju na fotografskoj ploči i interferiraju ako su koherentni tj. ako je razlika njihovih puteva unutar koherentne duljine lasera → na fotografskoj ploči vidimo interferenciju
- Interferencijom jednog sfernog vala (predmet je točka) i referentnog vala na ploči je zabilježen **niz koncentričnih prstenova**
- Kod realnog predmeta zabilježeno je **mnoštvo prstenova koji se međusobno presjecaju**
  - *Podaci o amplitudi:* promjene u kontrastu prstenova
  - *Podaci o fazi:* različite udaljenosti između prstenova
- Procesom interferencije **svaka točka holograma sadrži podatke o cijelom predmetu**

## 2. Rekonstrukcija holograma

- Obasjavanje holograma referentnim valom - Hologram djeluje kao **nepravilna difrakcijska rešetka**
- Referentni val se **raspršuje na nepravilnostima prstenova** dajući **originalne valne fronte** nastale pri raspršenju vala na predmet
- Kao difrakcijske slike prvog reda dobivaju se **realna i virtualna 3D slika predmeta**

### Matematički opis snimanja i rekonstrukcije holograma:

$A_r(x, y)$  - amplituda referentnog vala,  $A_p(x, y)$  - amplituda predmetnog vala

Ukupna amplituda u ravnini fotografske ploče:  $A(x, y) = A_r(x, y) + A_p(x, y)$

Raspodjela intenziteta je tada:  $I(x, y) = |A(x, y)|^2 = |A_r(x, y) + A_p(x, y)|^2$

Amplituda elektromagnetskog vala je općenito kompleksna veličina pa vrijedi:

$$I(x, y) = |A_r(x, y)|^2 + |A_p(x, y)|^2 + A_r^*(x, y)A_p(x, y) + A_r(x, y)A_p^*(x, y)$$

Intenzitet  $I(x, y)$  zabilježen je na hologramu.

*Pretpostavka:* amplitudna transmitivnost  $t(x, y)$  razvijene fotografske ploče proporcionalna s zabilježenim intenzitetom  $I(x, y)$  u procesu rekonstrukcije holograma tj. obasjavanjem holograma referentnim snopom vrijedi:

### Jednadžba holografije

$$A_r \cdot t = A_r \cdot I = A_r |A_r|^2 + A_r |A_p|^2 + A_r A_r^* A_p + A_r A_r A_p^* = A_r |A_r|^2 + A_r |A_p|^2 + |A_r|^2 A_p + A_r^2 A_p^*$$

- Prva dva člana: difraktirani valovi nultog reda
- Treći član - realna slika predmeta
- Četvrti član: virtualna slika predmeta

### Svojstva holografske slike:

1. 3D slika ima svojstvo **paralakse** - možemo vidjeti predmete ili točke koji su zaklonjeni
2. Svaki dio holograma može **rekonstruirati cijelu sliku predmeta** uz smanjenu rezoluciju - u svakoj točki holograma zabilježena raspršena svjetlost s cijelog predmeta
3. Realna slika je **pseudoskopska** tj. udaljenije točke predmeta nam se čine bližima

## I Međuispit iz Fizike lasera 21. 03. 2011 (trajanje - 60 minuta)

1.1 Izvedite vezu između Einsteinovih vjerojatnosti prijelaza. (3 boda)

1.2. Odredite vrijeme života pobuđene energijske razine atoma žive koji emitira zračenje valne duljine 185 nm. Prirodna širina spektralne linije je  $1,5 \cdot 10^{-14}$  m. Koliko iznose Einsteinovi koeficijenti za spontanu i stimuliranu emisiju? (2 boda)

2.1 Izvedite izraz za koeficijent apsorpcije elektromagnetskog zračenja (3 boda)

2.2 Objasnite inverziju naseljenosti (1 bod)

2.3 Opišite načine dobivanja inverzije naseljenosti (1 bod)

3.1 Kratko objasnite zašto se kod izvoda oblika linije pri emisiji elektromagnetskog zračenja koristi model prigušenog harmoničkog oscilatora, a kod apsorpcije model prisilnog harmoničkog oscilatora. (2 boda)

3.2 Navedite osnovne dijelove od kojih se sastoji svaki laser (1 bod)

3.3 Zaokružite 2 točne tvrdnje: (1 bod)

- a) Koeficijent apsorpcije ovisi o imaginarnom dijelu indeksa loma
- b) Prirodna širina linije posljedica je relacija neodređenosti
- c) Disperziju elektromagnetskog vala opisuje imaginarni dio indeksa loma
- d) Bohrov model atoma može se primijeniti na sve atome u periodnom sustavu elemenata

3.4 Zaokružite netočnu tvrdnju: (1 bod)

- a) Izborna pravila pri prijelazu elektrona u atomu posljedica su zakona sačuvanja energije
- b) Inverzna naseljenost u sustavu atoma može se postići optičkim pumpanjem
- c) dozvoljeni su samo oni prijelazi za koje je prijelazni dipolni moment jednak nuli
- d) kod atoma s LS vezanjem dozvoljeni su samo oni prijelazi kod kojih je promjena spinskog kvantnog broja jednaka nuli



### Konstante:

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

### Formule:

$$\lambda \cdot \nu = c$$

$$\text{Relacije neodredenosti: } \Delta E \cdot \Delta t \cong h/2\pi$$

$$\text{Planckov zakon } u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$\text{Boltzmannova raspodjela } N_1 = N_0 \cdot e^{-\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}}$$

$$\text{Lorentzov oblik linije } I(\omega - \omega_0) = I_0 \frac{(\gamma/2)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2}$$

$$\text{Dopplerov oblik linije } I(\omega) = I_0 \cdot e^{-a \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}} \quad a = \frac{Mc^2}{2kT}$$

## II Međuispit iz Fizike lasera 2. 05. 2011 (trajanje - 60 minuta)

1.1 Izvedite izraz za faktor dobrote laserskog rezonatora. (3 boda)

1.2 Odredite koeficijent gubitaka u rezonatoru duljine 2 m, ako je faktor dobrote  $2 \cdot 10^9$ , a frekvencija elektromagnetskog vala  $5 \cdot 10^{14}$  Hz. (1 bod)

1.3 Odredite relativnu promjenu frekvencije laserskog snopa  $\Delta\nu/\nu$  ako se zbog porasta temperature duljina rezonatora poveća za 0,05 mm. Početna duljina rezonatora je 1 m. (1 bod)

2.1 Navedite i kratko objasnite načine eksperimentalne realizacije jednomodnih lasera. (3 boda)

2.2 Navedite i kratko objasnite 3 načina rada pulsnih lasera (kako dobiti puls?) (2 boda)

3.1 Opišite način rada  $\text{CO}_2$  i  $\text{N}_2$  lasera, navedite razlike. (3 boda)

3.2 Zaokružite 2 točne tvrdnje (1 bod)

- a) U laserima se koriste otvoreni optički rezonatori.
- b) U HeNe laseru laserski prijelazi se odvijaju u He, a Ne služi za pobudu.
- c) Brusterovi prozori se u laseru postavljaju radi podešavanja frekvencije izlaznog zračenja.
- d) Vremensku koherenciju laserskog snopa možemo odrediti Michelsonovim interferometrom.

3.3 Zaokružite netočnu tvrdnju: (1 bod)

- a) Raspodjela intenziteta  $\text{TEM}_{00}$  laserskog moda opisana je Gaussovom funkcijom.
- b) Broj longitudinalnih modova u rezonatoru ovisi o duljini rezonatora.
- c) U Fabry Perot rezonatoru polumjeri zakrivljenosti zrcala moraju biti različiti.
- d) Poželjno je da optički elementi u laserima imaju veliku spektralnu moć razlučivanja.

**Konstante:**  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,

**Formule:**  $\lambda \cdot \nu = c$  ;  $m \lambda = 2 L$

$$L = L_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

**Međuispit iz Fizike lasera 20. 04. 2015 (trajanje - 90 minuta)**

1.1 Odredite prirodnu i Dopplerovu širinu linije ( $\Delta\lambda$ ) valne duljine 632,8 nm koja nastaje u He-Ne laseru prijelazom  $3s_2 \rightarrow 2p_4$  u neonu. Vrijeme života pobuđenog stanja  $3s_2$  je 58 ns, a stanja  $2p_4$  18 ns; temperatura plina je 400 K, realativna atomska masa atoma neona 20,18. (2 boda)

1.2 Odredite relativnu promjenu frekvencije laserskog snopa  $\Delta\nu/\nu$  ako se zbog porasta temperature duljina rezonatora poveća za 0,05 mm. (duljina rezonatora je 1m) (1 bod)

1.3 U spektru laserskog zračenja treba razlučiti dvije bliske linije koje se razlikuju za 0,005 nm ( $\lambda = 500$  nm). Na raspolaganju je:

- a) optička prizma (duljina baze prizme je 2 cm; spektralna disperzija  $1200 \text{ cm}^{-1}$ )
- b) optička rešetka s  $10^4$  zareza
- c) Fabry- Perot etalon (razlika u hodu zraka svjetlosti koje interferiraju na FP etalonu je 1 cm; koeficijent refleksije 0,98).

Koji uređaj treba upotrijebiti i zašto? (2 boda)

1.4 Za koliko će se promijeniti faktor dobrote laserskog rezonatora  $\text{Ar}^+$ -ion lasera duljine 1m ako se valna duljina emitiranog zračenja promijeni od 515 nm na 488 nm? Gubici u rezonatoru uzrokovani su nepoželjnim refleksijama na zrcalima s koeficijentima refleksije 0,99 i 0,98 (disperzija se zanemaruje). (1 bod)

2.1 Za prirodnu širinu linije emitirane prijelazom elektrona između dvije pobuđene energijske razine u atomu vrijedi: (zaokruži točnu tvrdnju) (1 bod)

- a) širini linije doprinose neodređenosti u energiji obje energijske razine
- b) širini linije doprinosi samo neodređenosti u energiji gornje energijske razine
- c) širina linije ne ovisi o tome da li je donja razina pobuđena ili osnovna (najniža)

2.2 Koeficijent apsorpcije: (zaokruži točnu tvrdnju) (1 bod)

- a) ovisi o imaginarnom dijelu indeksa loma
- b) ovisi o realnom dijelu indeksa loma
- c) ne ovisi o frekvenciji upadnog vala

2.3 Za longitudinalne modove u Fabry Perot rezonatoru vrijedi: (zaokruži točnu tvrdnju) (1 bod)

- a) ukupan broj modova ne ovisi o duljini rezonatora
- b) ukupan broj modova ovisi o širini spektralne linije pri stimuliranoj emisiji
- c) ukupan broj modova ne ovisi o spektralom području u kojem laser emitira

2.4 Osnovni  $\text{TEM}_{00}$  laserski mod: (zaokruži točnu tvrdnju) (1 bod)

- a) je longitudinalni laserski mod s dva čvora u transverzalnoj ravnini rezonatora
- b) ima raspodjelu intenziteta u ravnini okomitoj na smjer širenja laserskog snopa opisanu Gaussovom funkcijom
- c) ima raspodjelu intenziteta u smjeru širenja laserskog snopa opisanu Gaussovom funkcijom

2.5 Za laserske rezonatore vrijedi: (zaokruži točnu tvrdnju) (1 bod)

- a) otvoreni su
- b) moraju biti stabilni
- c) za više transverzne modove parametri zakrivljenosti zrcala moraju biti različiti od nule.

## 2.6 Zaokružite točnu tvrdnju (1 bod)

- a) monokromatska svjetlost ima veliku širinu linije  $\Delta\nu$
- b) za usmjeravanje laserskog snopa pogodno je koristiti leću velike žarišne duljine
- c) najbolje fokusiranje laserskog snopa se postiže lećom žarišne daljine jednake promjeru snopa

3.1 Navedite osnovne dijelove od kojih se sastoji svaki laser te kratko objasnite princip rada lasera. (3 boda)

3.2 Izvedite izraz za koeficijent apsorpcije za sustav atoma s dva energijska nivoa pomoću Einsteinovih vjerojatnosti prijelaza. (3 boda)

4.1 Objasnite prag laserske akcije (2 boda)

4.2 Kratko objasnite zašto inverzija naseljenosti u sustavu s 2 energijska nivoa nije pogodna. (1 bod)

4.3 Izvedite izraz za gustoću modova u šupljini. (4 boda)

5.1 Kratko objasnite zašto se kod izvoda oblika linije pri emisiji elektromagnetskog zračenja koristi model prigušenog harmoničkog oscilatora, a kod apsorpcije model prisilnog harmoničkog oscilatora. (2 boda)

5.2 Navedite načine eksperimentalne realizacije jednomodnih lasera pomoću optičkih elemenata (1 bod)

5.3 Objasnite vremensku i prostornu koherenciju laserskog zračenja (vidljivost pruga interferencije, stupanj koherencije, Michelsonov interferometar, Youngov pokus). (4 boda)

Konstante:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s;  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K;  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js;  $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg

Formule:  $\lambda \cdot \nu = c$ ;  $m\lambda = 2L$ ;  $L = L_0(1 + \alpha \Delta T)$

$$\frac{A_{21}}{B_{12}} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$$

Relacije neodređenosti:  $\Delta E \cdot \Delta t \cong h/2\pi$ , Planckov zakon  $u_\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$

Boltzmannova raspodjela  $N_1 = N_0 \cdot e^{-\frac{h\nu}{kT}}$ , Lorentzov oblik linije  $I(\omega) = \frac{I_0 \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}$

Dopplerov oblik linije  $I(\omega) = I_0 \cdot e^{-a \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}}$   $a = \frac{Mc^2}{2kT}$

Rezonator:  $2nl = m\lambda$ ;  $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$   $Q = \frac{4\pi \cdot \nu \cdot L}{\gamma \cdot c}$

Moć razlučivanja:  $R = \left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \left| \frac{\nu}{\Delta\nu} \right|$ ,  $R = mN$ ,  $R = g \cdot dn/d\lambda$ ,  $R = F^* \Delta s / \lambda$ ,  $F^* = \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$ ,  $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

## **Završni ispit iz Fizike lasera 17. 06. 2011 (trajanje - 90 minuta)**

- 1.1. Opišite princip rada lasera sa slobodnim elektronima. (3 boda)
- 1.2 Energija snopa elektrona u laseru sa slobodnim elektronima (FEL) je 40 MeV. Izračunajte valnu duljinu zračenja ako je prostorni period magneta 3 cm. (energija mirovanja elektrona je 0,511 MeV). (2 boda)
- 1.3 Zaokruži točnu tvrdnju (1 bod)
- a) Rad FEL-a temelji se na procesu spontane emisije fotona.
  - b) FEL se najčešće koristi u industriji
  - c) Rad FEL-a se temelji na zakočnom zračenju
  - d) Kod FEL-a se ne može podešavati valna duljina izlaznog zračenja.
- 1.4 Korisnost nekog lasera je  $10^{-4}$ . Ako laserska cijev radi na naponu od 10 kV i struji 10 A izračunajte izlaznu snagu lasera. (2 boda)
- 2.1 Opišite princip rada poluvodičkih lasera. Objasnite razliku u radu svjetlosne i laserske diode. (4 boda)
- 2.2 Poluvodički GaAS laser emitira zračenje valne duljine 0,86  $\mu\text{m}$ . Odredite širinu zabranjenog područja. (1 bod)
- 2.3 Kratko objasnite princip rada poluvodičkih detektora laserskog zračenja (2 boda)
- 2.4 Zaokruži netočnu tvrdnju (1 bod)
- a) Gustoća struje kroz lasersku diodu ne ovisi o temperaturi.
  - b) Zračenje laserske diode moguće je modulirati vrlo visokim frekvencijama.
  - c) Vanjska zrcala kod poluvodičkog lasera moraju imati visoku reflektivnost.
- 3.1 Izvedite izraz za faktor dobrote laserskog rezonatora. (3 boda)
- 3.2 Izračunajte duljinu Fabry-Perot rezonatora ako je separacija modova 430 MHz. (2 boda)
- 3.3 Napišite uvjet za prag laserske akcije (2 boda).
- 3.4 Zaokruži netočnu tvrdnju (1 bod)
- a) Raspodjela intenziteta  $\text{TEM}_{00}$  laserskog moda opisana je Gaussovom funkcijom
  - b) energijska pobuda rubinskog lasera je svjetlosna (bljeskalice, laserske diode)
  - c) laserski pokazivači snage 1 mW pripadaju klasi IV
  - d) Spektralni sjaj He-Ne lasera snage 1 mW veći je od spektralnog sjaja sunca
- 4.1 Objasnite kako se pomoću višeslojnih dielektričnih površina postiže visoka reflektivnost zrcala. (3 boda)
- 4.2 Objasnite izborna pravila u atomskim spektrima. (2 boda)

4.3 Izračunajte Doplerovu širinu linije  $\Delta\nu$  i  $\Delta\lambda$  za laserski prijelaz  $\lambda=632,8$  nm u HeNe laseru ako je temperatura izboja u plinu 127 °C. Relativna atomska masa atoma Ne je 20,18. (2 boda)

4.4 Zaokružite točnu tvrdnju (1 bod)

Za prirodnu širinu linije emitirane prijelazom elektrona između dvije energijske razine u atomu vrijedi:

- e) Možemo ju opisati Gaussovom funkcijom
- f) Prirodna širina linije posljedica je relacija neodređenosti
- g) Oblik linije izvodi se u analogiji s modelom prisilnog titranja
- d) Ne ovisi o vremenu života pobuđene energijske razine

5.1 Holografija (opišite način snimanja i rekonstrukcije holograma, izvedite jednadžbu holografije). (6 bodova)

5.2 Zaokruži netočnu tvrdnju (1 bod)

- a) Rekonstruirana slika holograma je ortoskopska
- b) Kod snimanja transmisivskih holograma kut između referentnog i predmetnog snopa je manji od 90°.
- c) Hologrami imaju svojstvo paralakse
- d) Na hologramu je zabilježena amplituda i faza predmetnog vala

**Konstante:**  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  J/K  $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$  Js,  $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$  kg

**Formule:**

$$\lambda \cdot \nu = c ; m \lambda = 2 L \quad E = h \cdot \nu$$

**Dopplerov oblik linije**

$$I(\omega) = I_0 \cdot e^{-a \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\omega_0^2}} \quad a = \frac{Mc^2}{2kT}$$

**Relacije neodređenosti:**  $\Delta E \cdot \Delta t \cong h/2\pi$

**Rezonator**  $2nl = m\lambda \quad \Delta\nu = \frac{c}{2L}$

**FEL:**  $\lambda_w = 2\lambda\gamma^2, \quad \gamma = E/E_0$

**Završni ispit iz Fizike lasera 28.6.2016. (trajanje ~ 90 minuta)**

- 1.1 Poluvodički laser ima širinu zabranjenog područja 1,6 eV. Odredite frekvenciju emitiranog zračenja. (2 boda)
- 1.2 Elektron u FEL-u gibajući se brzinom 0,9c kao najniži harmonik emitira zračenje valne duljine 30  $\mu\text{m}$ . Kolika će biti valna duljina emitiranog zračenja na višem harmoniku ( $m = 3$ ) ako mu se brzina poveća za 10%? (2 boda)
- 1.3 Korisnost nekog lasera je  $10^{-4}$ . Ako laserska cijev radi na naponu od 10kV i struji 10A izračunajte izlaznu snagu lasera (2 boda)

2.1 Za HeNe laser vrijedi: (zaokružite točnu tvrdnju, 1 bod)

- a) inverzna naseljenost se postiže sudarima atoma He s elektronima
- b) inverzna naseljenost se postiže sudarima Ne s pobuđenim atomima He
- c) laserski prijelazi se odvijaju u atomima He
- d) efikasnost je veća od 10%

2.2 Za laserske prijelaze u infracrvenom području u CO<sub>2</sub> molekulama vrijedi: (zaokružite točnu tvrdnju, 1 bod)

- a) dozvoljeno su prijelazi kod kojih se vibracijski kvantni broj mijenja za 1
- b) dozvoljeno su prijelazi kod kojih se vibracijski kvantni broj ne mijenja
- c) dozvoljeno su prijelazi kod kojih se orbitalni kvantni broj elektrona mijenja za 2
- d) dozvoljeno su prijelazi kod kojih se orbitalni kvantni broj elektrona ne mijenja

2.3 Koji laser emitira zračenje u UV području? (zaokružite točnu tvrdnju, 1 bod)

- a) CO<sub>2</sub>
- b) Ar<sup>+</sup> ion
- c) Nd YAG
- d) N<sub>2</sub>

2.4 Zaokružite točnu tvrdnju (1 bod)

- a) Kod Nd YAG lasera laserski prijelazi su u ionima Nd
- b) Nd YAG laser sadrži 36% iona Nd
- c) laserski prijelazi u Nd YAG laseru su između 4f i 3d razina
- d) Nd YAG laser emitira UV zračenje

2.5 Pobuda lasera čvrstog stanja odvija se: (zaokružite točnu tvrdnju, 1 bod)

- a) sudarima prve vrste
- b) sudarima druge vrste
- c) fotonima
- d) ubrzanjem elektrona

2.6 Zaokružite točnu tvrdnju (1 bod)

- a) Excimerske molekule postoje samo u pobuđenom stanju
- b) Excimerski laseri rade u vidljivom području
- c) Excimerski laseri nisu prikladni za pobudu lasera s bojom
- d) Excimerski laseri se koriste za čitanje podataka na CD uređajima

3.1 Objasnite načine pulsnog rada lasera. (4 boda)

3.2 Objasniti nastajanje izboja u plinu, nabrojati vrste samostalnog izboja prema gustoći struje u cijevi. (2 boda)

4.1 Objasniti ulogu Brewsterovih prozora na kraju laserske cijevi. (Brewsterov zakon, koeficijenti refleksije, polarizacija) (4 boda)

4.2 Usporedite načine dobivanja inverzne naseljenosti kod HeNe i Ar ion lasera (3 boda)

5.1 Objasni princip poluvodičkih lasera (4 boda)

5.2 Objasni zašto se pri rekonstrukciji holograma dobiva 3D slika (3 boda)

5.3 Definirajte brzinu odziva fotodetektora i kvantnu efikasnost (2 boda)

Konstante

c, k, h, u, m (znaš ih)

Formule

$$\lambda\nu = c, \quad m\lambda = 2L, \quad E = h\nu$$

FEL

$$\lambda_w = 2\lambda\gamma^2, \quad \gamma = \frac{E}{E_0}, \quad E_0 = mc^2, \quad \lambda_m = \frac{\lambda_w}{m} \left( \frac{c}{v} - 1 \right)$$