

FM Dipl. st. domaća zadaća, tip D
17. lipnja 2016., ljet. sem. ak. god. 2015./16.

ZADACI

- ✧ 1. Londonova dubina (duljina) prodiranja λ magnetskog polja B u supravodič žive iznosi 75 nm na temperaturi 3,5 K. Izračunajte vrijednost duljine prodiranja u živinu supravodiču ako je on podvrgnut nižim temperaturama (ako T teži prema nuli). Koliki je broj supravodljivih elektrona n_s u tome slučaju? Kritična temperatura jest $T_k(\text{Hg}) = 4,15$ K, dok se ovisnost

duljine prodiranja o temperaturi ravna po zakonu:
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_k}\right)^4}}.$$

(2 boda)

2. Izračunajte valnu duljinu λ Cooperovih parova u supravodiču, pretpostavivši da se 30% elektrona kondenzira u parove. Gustoća struje u supravodiču je 10^8 Am^{-2} , a broj supravodljivih elektrona $8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$.

(2 boda)

- ✧ 3. Koliki je β_e za elektronski snop ukupne energije elektrona $E_e = 2 \text{ GeV}$ u sinkrotronskome spremniku akceleratora za nanofiziku?

(2 boda)

- ✧ 4. Objasnite (*fenomenološki*) proces ili mehanizam uparivanja elektrona u Cooperove parove. Što je BCS – širina zabranjenog pojasa u supravodiču?

(2 boda)

(TIF D)

1.

$$\lambda = 75 \text{ nm}$$

$$T = 2,5 \text{ V} \quad (p_{im} T = 0)$$

$$\lambda_D / \lambda_{D0} = 4,15 \text{ V}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\lambda_0 = ?$$

$$v = ?$$

$$\lambda_0 = \lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

$$\lambda_0^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \rightarrow n_s = \frac{m}{\lambda_0^2 \cdot \mu_0 \cdot e^2} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31}}{52,72 \cdot 10^{-18} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ m}^{-3}$$

$$n_s = 1,02 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\text{Bei } T \geq 0, \lambda \rightarrow \lambda_0$$

$$\lambda \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \lambda_0$$

$$\lambda_0 = 75 \cdot \text{nm} \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{2,5}{4,15}\right)^2} \right) = 52,72 \text{ nm}$$

2.

$$p = 30\%$$

$$j = 10^8 \text{ A m}^{-2}$$

$$n_s = 8 \cdot 10^{28} \frac{1}{\text{m}^3}$$

$$\lambda = ?$$

$$|\vec{j}| = \frac{n_s \cdot 2eV \cdot p}{2}$$

$$V = \frac{2j}{n_s \cdot 2e \cdot p} = \frac{10^8}{8 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,3} = 0,026 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

2a (2e) u Cooper pair, inamo:

$$\lambda = \frac{h}{2mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 0,026} = 13,99 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda = \lambda(2e) \approx 14 \text{ nm}$$

3. $E_e = 2 \text{ GeV} = 2000 \text{ MeV}$
 $\beta_e = 2$

$$E_e = T_e + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} = m_e \gamma_e c^2 = \frac{E_{0e}}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$$

$$\frac{E_e}{E_{0e}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} \rightarrow E_{0e}^2 (1 - \beta_e^2) = E_{0e}^2$$

$$\beta_e^2 = \frac{E_e^2 - E_{0e}^2}{E_e^2} = \frac{p_e^2 c^2 + E_{0e}^2 - E_{0e}^2}{E_e^2} = c^2 \frac{p_e^2}{E_e^2}$$

$$\beta_e = 0,9999998 \approx 1 //$$

4.

Elektron koji se gibao blizu pozitivnom ionu rešetke u danom trenutku blago privuče ion prema sebi. Time je trendno na tragu elektrona stvoren višak pozitivnog naelektrisanja koji može privući drugi elektron u blizini. Čisti učinak ove dvije interakcije je kratkotrajna pozitivna sila između 2 elektrona. Par elektrona zovemo COOPEROVIM PAROM, a čine ga elektroni suprotnih spinova i jednakih, ali međusobno suprotno orijentiranih valnih vektora \vec{k} .

Par elektrona ima nižu energiju nego 2 pojedinačna elektrona, tako da se pojavljuje "zastarjeli par" između paronice i pojedinačnih elektrona stanja.

U BCS teoriji, dopuštena su samo ona stanja koja zauzimaju parovi elektrona, gdje jedno osnovno stanje

FM Dipl. st. domaća zadaća, tip F
17. lipnja 2016., ljet. sem. ak. god. 2015./16.

Student:

ZADACI

1. Kritična temperatura za olovo iznosi 7,2 K, a kritična jakost magnetskog polja 64 A/m na 0 K. Izračunajte kritično magnetsko polje na 5 K.

(2 boda)

2. Londonova dubina (duljina) prodiranja λ magnetskog polja B u supravodič žive iznosi 75 nm na temperaturi 3,5 K. Izračunajte vrijednost duljine prodiranja u živinu supravodiču ako je on podvrgnut nižim temperaturama (ako T teži prema nuli). Koliki je broj supravodljivih elektrona n_s u tome slučaju? Kritična temperatura jest T_k (Hg) = 4,15 K, dok se ovisnost

duljine prodiranja o temperaturi ravna po zakonu:
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_k}\right)^4}}.$$

(2 boda)

3. Koliki je β_e za elektronski snop ukupne energije elektrona $E_e = 2$ GeV u sinkrotronskome spremniku akceleratora za nanofiziku?

(2 boda)

4. Objasnite princip operiranja *Josephsonovog* magnetometra (*SQUID*). Čemu služe magnetometri?

(2 boda)

FM domaća zadaća tip F

1) $T_K = 7.2 K$, $T = 5 K$

$H_c = 64 A/m$

$$H_c = H_0 \left(1 - \left(\frac{T}{T_K} \right)^4 \right)$$

$$H_c = 64 A/m \left(1 - \left(\frac{5}{7.2} \right)^4 \right) = \underline{33.14 A/m}$$

2) $T_K = 4.15 K$

$\lambda = 75 nm \rightarrow$ kod $T = 3.5 K$

$\lambda_0 = ?$ $n_s = ?$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_K} \right)^4}}$$

kad T teži 0 nuli $\rightarrow \lambda \rightarrow \lambda_0$

$$\lambda \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_K} \right)^4} = \lambda_0$$

$$\lambda_0 = 75 nm \sqrt{1 - \left(\frac{3.5}{4.15} \right)^4} = \underline{52.72 nm}$$

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \quad , \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

$$\lambda_0^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2} \quad n_s = \frac{m}{\lambda_0^2 \mu_0 e^2}$$

$$n_s = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}}{52.72^2 \cdot 10^{-18} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1.6^2 \cdot 10^{-35}} m^{-3}$$

$$\underline{n_s = 1.02 \cdot 10^{28} m^{-3}}$$

$$3) E_e = 2\text{GeV} = 2000\text{MeV}$$

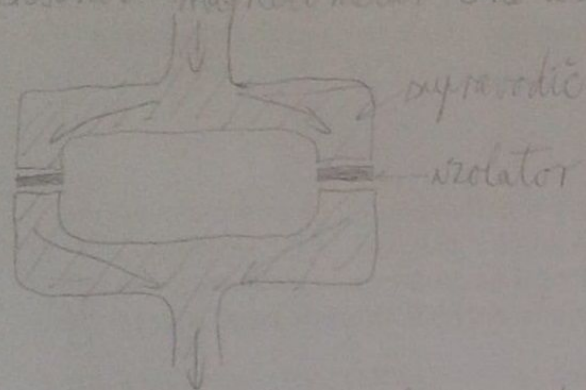
$$E_e = T_e + m_e c^2 = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\beta_e^2}} = m_e \gamma_e c^2 = \frac{E_{ee}}{\sqrt{1-\beta_e^2}}$$

$$\frac{E_e}{E_{ee}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_e^2}} \quad \frac{E_e^2}{E_{ee}^2} = \frac{1}{1-\beta_e^2} \quad E_e^2(1-\beta_e^2) = E_{ee}^2$$

$$\beta_e^2 = \frac{E_e^2 - E_{ee}^2}{E_e^2} = \frac{2000^2 - 0.511^2}{2000^2}$$

$$\beta = 0.999999967 \approx 1$$

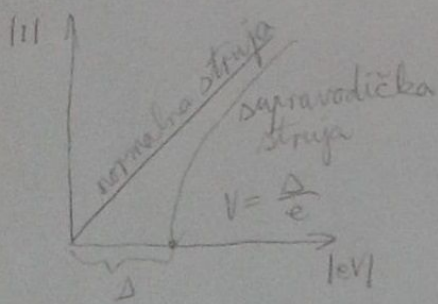
4) Josephsonov magnetometar čine dva paralelno spojena Josephsonova spoja



i služi za mjerenje toka Φ što ga obuhvaća prsten u svojoj supljini pomoću supravodičke struje j koja je ovisna o Φ i ima oblik:

$$j = j_c \cos\left(\frac{\pi \Phi}{\Phi_0}\right) \sin \Delta \Phi \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e}$$

Magnetski tok supravodičke struje, kad ona teče u ravni ravnine, jest Φ dok je Φ_0 flukson (kvant) magnetskog toka supravodičke strujne petlje. Kada na Josephsonovu spoju dvaju supravodica nije primijenjen električni napon, njime teče struja.



Struja će tureliranjem između metala i supravodica poteći tek kad primijenjeni napon nadvisi zabranjeni pojas Δ u supravodici. U doticaju dvaju supravodica $V = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{e}$ i $\frac{\Delta_2 + \Delta_1}{e}$.

$$E_k = \sqrt{(E_i - E_F)^2 + \Delta^2} \quad E_k = E_i - E_F$$

SQUID-ovi su vodiči kojima teku Cooperovi parovi. S druge strane, SQUID-ovi su mjesta gdje se potencijalno može istraživati mikroskopski inducirano narušenje kvantne koherencije.

FM Dipl. st. domaća zadaća, tip H
17. lipnja 2016., ljet. sem. ak. god. 2015./16.

Student: _____

ZADACI

1. Izračunajte, polazeći od Silsbeejeva pravila, kritičnu struju u supravodiču prve vrste, ako je primijenjeno vanjsko magnetsko polje H , paralelno osi supravodiča čiji je promjer $2r$. Izračunajte kritičnu struju u supravodiču kositra promjera 2 mm, ako bi H , dostiglo 25% iznosa kritičnog polja na 3K. Za kositar je kritična temperatura $T_k = 3,72$ K, a kritično polje na 0 K jest $H_0 = 2,45 \cdot 10^4$ A/m.

(2 boda)

2. Londonova dubina (duljina) prodiranja λ magnetskog polja B u supravodič žive iznosi 75 nm na temperaturi 3,5 K. Izračunajte vrijednost duljine prodiranja u živinu supravodiču ako je on podvrgnut nižim temperaturama (ako T teži prema nuli). Koliki je broj supravodljivih elektrona n_s u tome slučaju? Kritična temperatura jest T_k (Hg) = 4,15 K, dok se ovisnost duljine prodiranja o temperaturi ravna po zakonu: $\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_k}\right)^4}}$.

(2 boda)

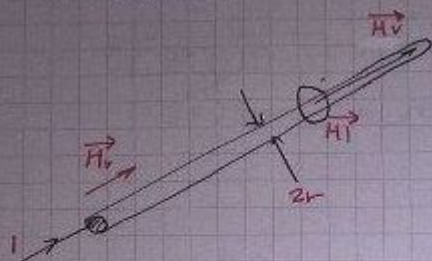
3. Izračunajte valnu duljinu λ Cooperovih parova u supravodiču, pretpostavivši da se 30% elektrona kondenzira u parove. Gustoća struje u supravodiču je 10^8 Am⁻², a broj supravodljivih elektrona $8 \cdot 10^{28}$ m⁻³.

(2 boda)

4. Objasnite kvantiziranje magnetskog toka što ga stvara supravodička struja koja plitko teče po Londonovoj dubini po unutrašnjemu prstenu supravodiča. Što je *flukson* i kako se primjenjuje u kvantnoj metrologiji?

(2 boda)

1. Zadatak



$$2r = 2 \text{ mm}$$

$$r = 1 \text{ mm}$$

$$H_v = 0.25 H_c$$

$$T = 3 \text{ K} \quad T_c = 3.72 \text{ K}$$

$$H_0 = 2.45 \cdot 10^4 \text{ A/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

- prema Silsbetjeru pravilo: postojanost supravodljivog stanja izravno ovisi o ukupnom magnetskom polju na pov. supravodiča

imamo slučaj $\vec{H}_v \parallel$ osi supravodiča:

- ako supravodič je stvar polje koje ga obasja, \vec{H}_v je najost taja polja:

$$H_i = \frac{I}{2\pi r} \quad (1)$$

- kombinacija primjenjivog polja i ono supravodljiva polje

$$\vec{H} = \vec{H}_v + \vec{H}_i \quad (2)$$

$$H^2 = H_v^2 + H_i^2 + 2H_v H_i \cos(\vec{H}_v, \vec{H}_i) = H_v^2 + H_i^2$$

- zapišemo (1) i (2):

$$H^2 = H_v^2 + \frac{I^2}{4\pi^2 r^2} \quad (3)$$

- do kritičnog polja H_c , iznad kojeg je supravodljivost narušena, imamo promjenu kritične struje I_c , koju određujemo iz relacije (3):

$$I_c = 2\pi r \sqrt{H_c^2 - H_v^2} = 2\pi r H_c \sqrt{1 - \left(\frac{H_v}{H_c}\right)^2} \quad (4)$$

- prije nego izračunamo I_c izračunamo najprije kritično polje za $T_c = 3.72 \text{ K}$ i kritično polje na OK $H_0 = 2.45 \cdot 10^4 \text{ A/m}$ kritično polje je na temp. 3K

$$H_c = H_0 \left(1 - \frac{T^2}{T_c^2}\right) = 2.45 \cdot 10^4 \left(1 - \frac{3^2}{3.72^2}\right) = 8566.077 \text{ A/m}$$

102. vrstimo u (5):

$$\begin{aligned}
 l &= 2\pi r H_c \sqrt{1 - \left(\frac{H_0}{H_c}\right)^2} = \\
 &= 2 \cdot \pi \cdot 0.02 \cdot 8.56 \cdot 10^3 \sqrt{1 - \left(\frac{0.1546}{H_c}\right)^2} = \\
 &= 2 \cdot \pi \cdot 0.004 \cdot 8.56 \cdot 10^3 \cdot 0.9682 \\
 &= 52.0737 \text{ A}
 \end{aligned}$$

2. Zadatak

$$\lambda = 75 \text{ nm} \rightarrow \text{za } T = 3.5 \text{ K}$$

$$T_k(\text{Hg}) = 4.15 \text{ K}$$

$$\lambda_0 = ? \quad n_s = ?$$

$$\lambda = \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_k}\right)^2}} \quad \text{za } T \rightarrow 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_0$$

$$\lambda_0 = \lambda \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{T}{T_k}\right)^2}} = 75 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{3.5}{4.15}\right)^2}} = 52.72 \text{ nm}$$

12. Londonove dubine prodiranja slijedi ns:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$$

$$\lambda_0^2 = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$$

$$\begin{aligned}
 n_s &= \frac{m}{\mu_0 \lambda_0^2 e^2} = \frac{9.109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} (52.72 \cdot 10^{-9})^2 \cdot 1.602} \\
 &= 1.0187 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}
 \end{aligned}$$

3. Zadatak

$$p = 30\%$$

$$j = 10^9 \text{ A m}^{-2}$$

$$n_s = 8 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$\lambda = ?$$

$$|\vec{v}| = \frac{n_s}{2} \cdot 2 e v \cdot p$$

$$v = \frac{j}{n_s \cdot e \cdot p} = \frac{10^9}{8 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.3} = 0.026 \text{ m s}^{-1}$$

2a (2e) u Cooperov par (m=0)

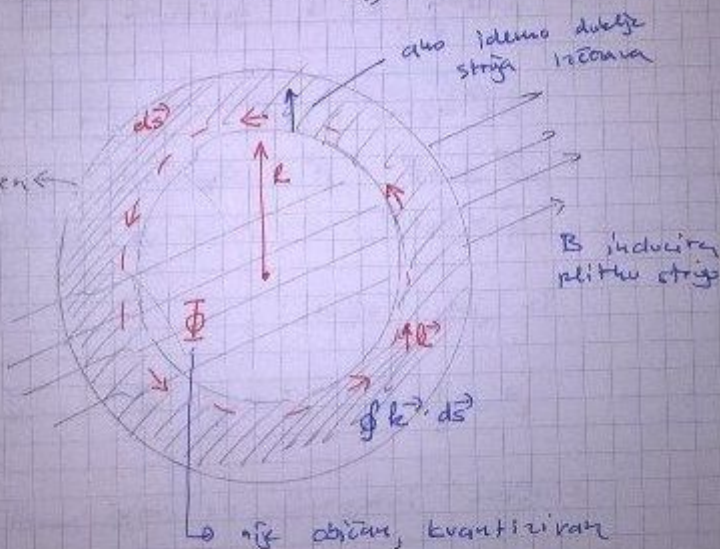
$$\lambda = \frac{h}{2 m v} = \frac{6.626 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 8.11 \cdot 10^{-31} \cdot 0.026} = 13.99 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda = 13.99 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\lambda \approx \lambda_{(2e)} \approx 14 \text{ nm}$$

4. Zadatak

Supravodilni prsten



→ nije običan, kvantiziran

- na čitici supravodljivog prstena polunijera \vec{k} toka Φ .
- strujom prstena prolazi
- Φ strujna struja koja krivi po prstenu
- Supravodilna struja - točna koherencija - Cooperovi parovi.
- koherencija pojedinačnog para - do 10^{-6} m u pojedinih mest
- međutim točna koherencija u cijeloj supravodilnoj struji
- kvalitativno je drugačija
- u normalnom vodiču - valna funkcija - $\psi = e^{ikr}$
- (k - faza)
- dok ele. putuje metalom - valni vektor k - se mijenja
- slučajne promjene faze
- posmatramo faze na jednom mjestu - ne možemo predviđati faze na drugom mjestu