

## ZADACI

1. Poslužiteljski sustav od 2 poslužitelja. Broj korisnika  $n$  varira od 2-4 u stacionarnom stanju.

vjerojatnosti:

$$p_0 = \frac{1}{16}, \quad p_1 = \frac{4}{16}, \quad p_2 = \frac{6}{16}, \quad p_3 = \frac{4}{16}, \quad p_4 = \frac{1}{16}$$

- a) Odredite očekivani broj  $n$  korisnika u sustavu,

$$N = \sum_{n=0}^4 n p_n = 0 \cdot \frac{1}{16} + 1 \cdot \frac{4}{16} + \dots = 2$$

- b) Odredite očekivani broj korisnika  $N_q$  u redu čekanja

$$N_q = \sum_{n=3}^4 (n-2) \cdot p_n = 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 = \frac{3}{8}$$

- c) Odredite očekivani br. korisnika na poslužitelju,

$$E \{ \text{br. kor. na posl.} \} = 1 \cdot p_1 + 2 \cdot (p_2 + p_3 + p_4) = \frac{13}{16}$$

- d) Ako je srednja dolazna brzina 2 korisnika po satu odredite očekivani br kor u sustavu i vrijeme čekanja u redu čekanja i kašnjenje.  $\lambda = 2 \text{ k/h}$

$$T = \frac{N}{\lambda} = 1, \quad W = \frac{N_q}{\lambda} = \frac{3}{16}$$

- e) Ako dva posl. imaju jednako vrijeme posluživanja odredite ga pomoću d.

$$T - W = \frac{13}{16}$$

- ② Razmotrite jednoposlužiteljski sustav s proizvoljnom razdiobom ....?  $G1/G1/1$

Dokazati:

a)  $N = N_q + 1 - p_0$

$$N = \begin{cases} N_q, & n=0 \\ N_q+1, & n \geq 1 \end{cases}$$

nema nikog

$$N = p_0 N_q + (1-p_0)(N_q+1) = N_q + 1 - p_0$$

b)  $N = N_q + \rho$  ( $\rightarrow$  intenzitet prometa)

$$N - \lambda T = \lambda \left( W + \frac{1}{\mu} \right) = \lambda W + \rho = N + \rho \quad (\text{po Littleu})$$

c)  $p_0 = 1 - \rho$

$$N = N_q + \rho = N_q + 1 - p_0$$

$$\boxed{\rho = 1 - p_0} \rightarrow \text{uvijek vrijedi}$$

- ③. Ako je  $c$  broj poslužitelja, a  $p_n$  vjerojatnost konslika u sustavu, dokazati koristeći statističke definicije:

$$N = \sum_{n=0}^{c-1} n \cdot p_n + c \left( 1 - \sum_{n=0}^{c-1} p_n \right) + N_q$$

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=0}^{c-1} n \cdot p_n + \sum_{n=c}^{\infty} n \cdot p_n =$$

$$= \sum_{n=0}^{c-1} n \cdot p_n + \sum_{n=c}^{\infty} (n-c) p_n + \sum_{n=c}^{\infty} c p_n$$

$N_q$



- ④ Vrijeme između dolaska autobusa slijedi eksponencijalnu razdiobu sa srednjom vrij. 60 min. Kolika je vjerojatnost da će 4 autobusa doći u iduća 2 sata?

$$\lambda = 1 \text{ dolazak/h}$$

a)  $t = 2$

$$\lambda t = 2$$

$$k = 4$$

$$P(N=4) = \frac{\lambda t \cdot e^{-\lambda t}}{k!} = \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} \approx 0.9$$

- b) Kolika je vj. da će barem 2 autobusa doći u iduća 2h?

$$k = 2$$

$$P(N \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - e^{-2} - 2$$

c)  $k = 0$

$$P(0) = e^{-2} = 0.14$$

- d) Ako je upravo došao 1 autobus, kolika je p da je on došao između 30 i 90 min prije nego će doći idući?

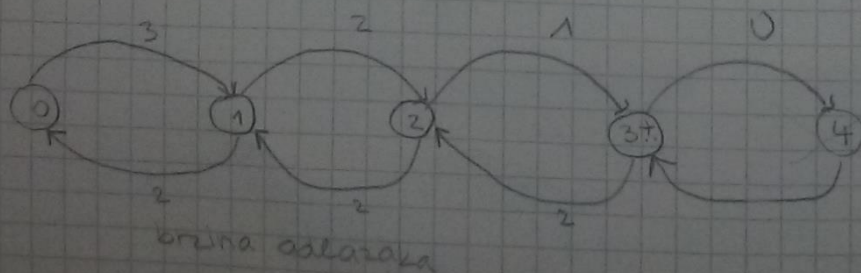
$$P(0.5 \leq X \leq 1.5) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-0.5} - e^{-1.5} \approx 0.38$$

- ⑤ Životni proces rađanja i umiranja sa idućim param.:

$$\mu_n = 2 \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\lambda_0 = 3, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_n = 0 \text{ za } n=3, 4, \dots$$

- a) Skicirati dijagram stanja.



b)  $p_0, p_1, \dots = ?$

$$p_1 \cdot 2 = p_0 \cdot 3 \rightarrow p_1 = \frac{3}{2} p_0$$

$$p_2 = \frac{3}{2} p_1$$

$$p_3 = \frac{1}{2} p_2$$

$$p_3 = \frac{3}{4} p_0$$

$$p_4 = p_5 = \dots = 0$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$p_0 = \frac{4}{19}, p_1 = \frac{6}{19}, p_2 = \frac{6}{19}, p_3 = \frac{3}{19}$$

c)  $N, N_a, T, W = ?$

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{27}{19} = 1.421$$

$$N_a = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 \rightarrow \text{jedno u redu, jedno na posl.} \\ = \frac{12}{19}$$

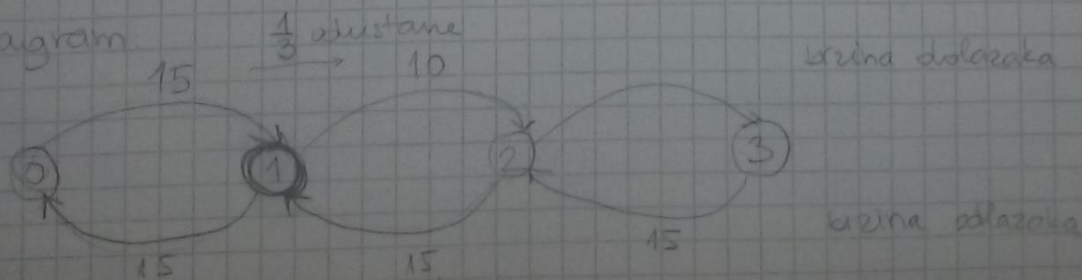
$$\bar{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot p_n = 3 \cdot p_0 + 2 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 = \frac{30}{19}$$

$$T = \frac{N}{\bar{\lambda}} = \frac{9}{10} \quad W = \frac{N_a}{\bar{\lambda}} = \frac{4}{10}$$

⑥ Benzinska postaja ima samo jednu pumpu Poissonova razdioba dolazaka vozila, brzina dolazaka  $\lambda = 15$  vozila/h.  
... Vozilo može odustati ili stati u red.

Ako postoji  $n$  vozila na postaji, vjerovatnost da će odustati je  $\frac{n}{3}$ . Trajanje posluživanja  $\rightarrow$  eksp razdioba; 4 min/vozilo  
prosek.

a) dijagram





b) jednadžbe globalne ravnoteže

čvor "1"  $15p_0 + 15p_2 = 15p_1 + 10p_1$

čvor "0"  $15p_1 = 15p_0 \Rightarrow p_0 = p_1$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

c) JLR:  $15p_0 = 15p_1$

$$10p_1 = 15p_2$$

$$5p_2 = 15p_3$$

d)  $p_2 = \frac{2}{3}p_0$        $p_1 = p_0$

$$p_3 = \frac{2}{9}p_0$$

$$p_0 = \frac{9}{26}$$

e)  $N = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = \frac{27}{26} \approx 1,04$

$$E[\lambda] = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = 9,81$$

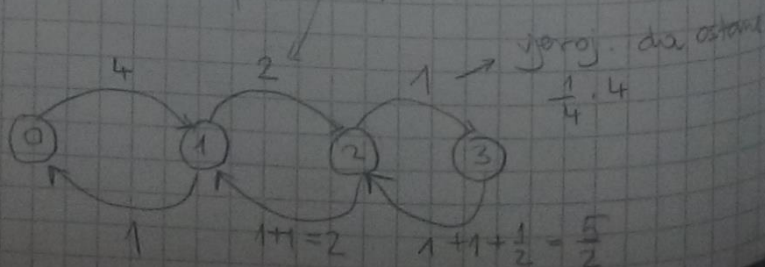
$$T = \frac{N}{E[\lambda]} = 0,106$$

⊕

$p\{ \text{odustajanje } n \text{ korisnika u sust. } \} = \begin{cases} 0, & n=0 \\ 1/2, & n=1 \\ 3/4, & n=2 \\ 1, & n=3 \end{cases}$

Vrijeme posl. eksponencijalna, srednje vrij. posl. 4 kor/h  
 korisnici koji se već poslužuju ne odustaju, ali korisnici u  
 redu čekanja mogu. **BLA BLA prebrzo!**

a)  $\lambda = 4 \text{ kor/h}$



b) JLR

$$p_1 = 4p_0, \quad p_2 = 4p_0, \quad p_3 = \frac{2}{5} p_2$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \rightarrow p_0 = \frac{5}{47}$$

- (Vrijeme koje je korisnik 2. u redu voljan čekati ima eksp. razdiobu sa srednjom vrij. pola sata,

$$c) \frac{1}{2} p_1 + \frac{3}{4} p_2 + 1 \cdot p_3 = \text{očekivani broj izgubljenih}$$

$$L = \frac{27}{47}$$

d)  $N_q, N = ?$

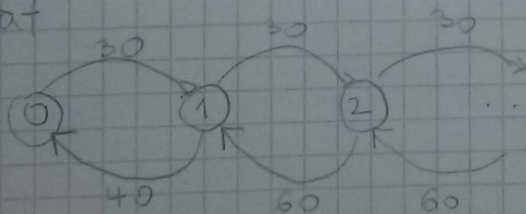
$$N = p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 1,404$$

$$N_q = 1 \cdot p_2 + 2 \cdot p_3 = 0,511$$

↓ jedan u redu p<sub>2</sub> i 2 se poslužuju

- 8) Mala trg mješovite robe ima 1 blagajnu i dogajnicu. Kupci dolaze sukladno Poissonovoj r. srednjom brz. 30 korisnika/h. Kad je na blagajni samo 1 kupac poslužuje ga blag. s očekivanim vremenom  $\frac{1}{\mu} = 1,5 \text{ min}$ . Kad je pred blag. više od 1 kupca, pomoćnica pakira robu i vrijeme posl. se smanjuje na  $\frac{1}{\mu} = 1 \text{ min}$ . Razdioba u oba slučaja je eksponencijalna

a) graf



toliko ih posluži u satu

↳ kad je samo jedan, 1,5 min posluživanje, posluži ih 40 u satu

↳ više od 1, 60 posluži u satu.

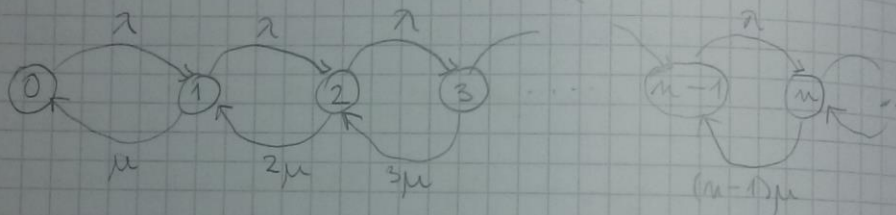
$$b) p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{\mu_1 \cdot \mu_2^{n-1}} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \geq 1$$



9. Analizirajte model samoposluge u kojem je korisnik  
vjedno i poslužitelj. (znači imamo beskonačno zasl.).

a)  $N_a = 0$ ,  $W = 0$  (nema čekanja)

b)



c) jednačbe ravnoteže

$$P_n = \frac{\lambda^n}{n! \mu^n} P_0 = \frac{\rho^n}{n!} P_0$$

d)  $P_0 = e^{-\rho}$

e)  $T = \frac{1}{\mu}$ ,  $N = \lambda T = \rho$