34457
Informacijske mreže

1. predavanje: o kolegiju
Ak. god. 2009./2010.
Prof.dr.sc. Mladen Kos

Provjere znanja

- Ukupni broj bodova na provjerama: max. 100 (Domaće zadaće + Dva međuispita + Završni ispit)
- Domaće zadaće: 4-5 zadaća (max. 20 bodova)
- Međuispiti (max. 2×25 bodova)
- Završni ispit (max. 30)
- Prolaz: 50 bodova

Međuispiti i završni ispit

- Tjedni za međuispite:
  - I medjuispit (između 12. i 23.10.2009.)
  - II međuispit (između 23.11. i 4.12.2009)
- Tjedni za završni ispit:
  - Između 18.1. i 22.1.2010.
- Broj zadataka na ispitima: 5
- Dopušteno vrijeme: 90 minuta
- Mogući broj bodova:
  - Na pojedinom međuispitu: 25
  - Na završnom ispitu: 30

Redovitost i bodovni prag

- Nedolazak na međuispite: usmeni ispit kod nastavnika
- Završni ispit je obvezan za sve studente
- Bodovi za pozitivnu ocjenu: 50
  - Postotak za ocjenu 2: 15
  - Postotak za ocjenu 3: 35
  - Postotak za ocjenu 4: 35
  - Postotak za ocjenu 5: 15
- Način raspodjele ocjena: po Gaussu nakon pređenog praga

Teme

- Pregled: teorija vjerojatnosti i stohastički procesi (2 predavanja)
- Markovljevi lanci i teorija redova čekanja (5 predavanja)
- Usmjeravanje i kontrola toka (3 predavanja)
- Prometni inženjering (2 predavanja)
- Osnovne simulacijske tehnike (1 predavanje)
- Odabrani primjeri analize performansi (2 termina)

Performanse sustava

- Određivanje performansi mreža i sustava
- Primjer: računalni sustav
  - Mora obavljati zadatke za koje je projektiran
  - Mora imati adekvatne performanse, tj. obavljati tražene zadatke u razumnom vremenu uz prihvatljive troškove
- Projektanti obično najveću pozornost daju na funkcionalnost sustava a nedovoljno na određivanje njegovih performansi
  - Jednom kad je sustav izgrađen općenito je teško i vrlo skupo poboljšavanje performansi

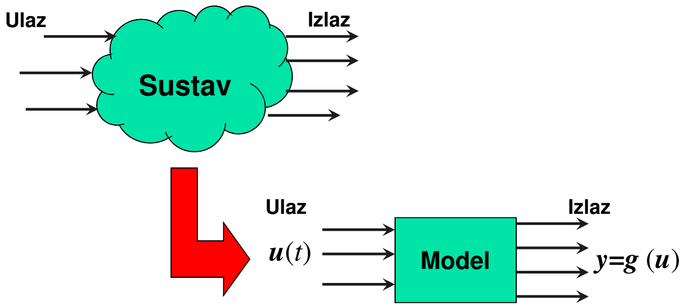
Modeliranje i određivanje performansi

- Jednom kad je sustav izgrađen možemo izmjeriti njegove performanse.
  - Redizajn i reinženjering je gotovo nemoguć ili preskup!
  - Kad sustav ovisi o brojnim parametrima kako ga konfigurirati postavljanjem najboljih parametara?
- Alternativa je u kreiranju modela sustava, njegovoj analizi i određivanju (predviđanju) performansi stvarnog sustava na temelju tog modela.
  - Taj je pristup znatno fleksibilniji jer omogućava redizajn i reinženjering prije investiranja u konačni sustav

Modeliranje

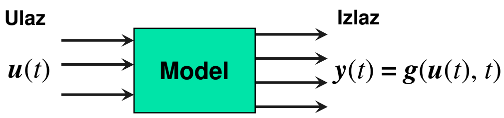
- Model
  - On je najčešće skup jednadžbi ili dijelova softvera (simulator) koji imitiraju ponašanje realnog sustava
  - Može postojati više modela za opis ponašanja nekog sustava
- Modeliranje je gotovo "umjetnost"
  - Ovisno od rješavanog problema modeli mogu biti vrlo detaljni a time i jako složeni za rješavanje, ili pak mogu biti vrlo jednostavni a time i upitne točnosti

Proces modeliranja



- Modelom se predviđa izlaz iz sustava uz zadani ulaz $\boldsymbol{u}(t)$
- Koliko je dobar ulaz toliko je dobar i model: smeće uđe, smeće izađe!

Pojam stanja



- Stanje sustava u trenutku t_0 je informacija koja nam jednoznačno određuje izlaz $y(t)$, za sve $t \geq t_0$, uz zadani $u(t)$, $t \geq t_0$

Modeliranje prostora stanja

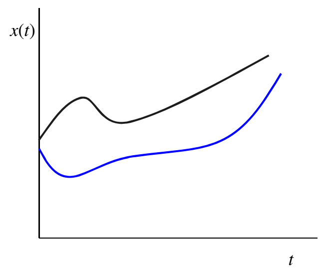
- **Jednadžbe stanja**: Skup jednadžbi potrebnih za specificiranje stanja $x(t)$ za sve $t \geq t_0$ uz poznate $x(t_0)$ i funkciju $u(t)$
- **Prostor stanja X**: Skup svih mogućih vrijednosti koje stanje može poprimiti.
- Primjeri:

$$x(t) = f\left(x(t), u(t), t\right)$$
$$y(t) = g\left(x(t), u(t), t\right)$$
$$x(t_0) = x_0$$

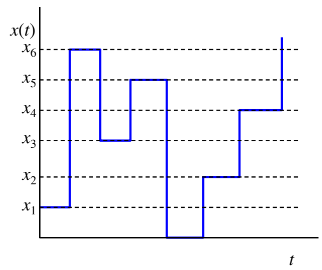
$$x_{k+1} = f\left(x_k, \ldots, x_0, u_k, \ldots, u_0, k\right)$$
$$y_k = g\left(x_k, \ldots, x_0, u_k, \ldots, u_0, k\right)$$

Slučajne trajektorije

- Evolucija sustava (stanja) kroz vrijeme

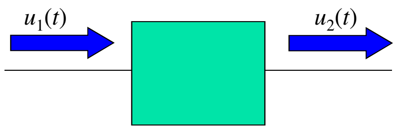


Kontinuirano stanje



Diskretno stanje

Primjer



- Ulaz

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ako paket dođe u } t \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \qquad u_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ako paket ode u } t \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

- Dinamika sustava

$$x(t^+) = \begin{cases} x(t)+1 & \text{za } u_1(t)=1, u_2(t)=0, \\ x(t)-1 & \text{za } u_1(t)=0, u_2(t)=1 \\ x(t) & \text{inače} \end{cases}$$

Primjer

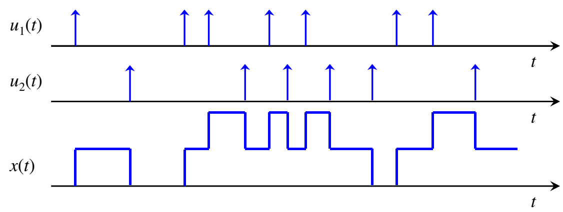
- Ulaz

$$u_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{ako paket dođe u } t \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

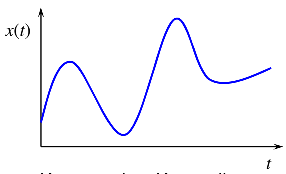
$$u_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{ako paket ode u } t \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

- Dinamika sustava

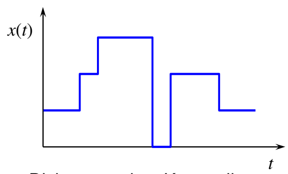
$$x(t^+) = \begin{cases} x(t)+1 & \text{za } u_1(t)=1, u_2(t)=0, \\ x(t)-1 & \text{za } u_1(t)=0, u_2(t)=1 \\ x(t) & \text{inače} \end{cases}$$



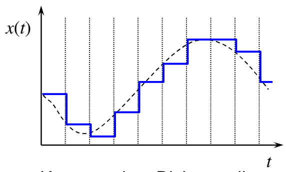
Podjela sustava



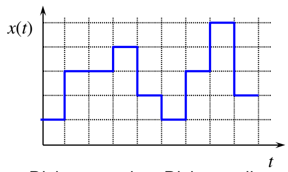
Kont. stanje – Kont. vrijeme



Diskret. stanje – Kont. vrijeme



Kont. stanje – Diskret. vrijeme



Diskret. stanje – Diskret. vrijeme

Deterministički i stohastički sustavi

- U mnogo slučajeva ulazne funkcije $u(t)$ nisu točno poznate pa ih možemo opisati određenim razdiobama vjerojatnosti
  - Signal i šum u mobilnom prijamniku
  - Vrijeme dolaska paketa u usmjerivač (router)
  - ...
- Ako ulazna funkcija nije točno poznata, tada se ni stanje ne može odrediti točno; slučajne varijable
- Sustav je stohastički ako je barem jedna od izlaznih varijabli slučajna varijabla; inače je sustav deterministički
- Općenito, stanja stohastičkog sustava definiraju slučajni (stohastički) proces

Sumarno...

- Ovisno od vrste sustava i/ili ciljeva analize zanimaju nas različite mjere:
  - Prosječni broj korisnika (paketa) u sustavu
  - Broj paketa odbačenih u intervalu $[0,T]$.
  - Prosječno kašnjenje u sustavu
  - ...
- Općeniti alat za dobivanje odgovora na gornja pitanja je računalna simulacija. Međutim, simulacija ne pruža dobro razumijevanje samog problema
- Ne postoji opći analitički postupak za rješavanje problema veće složenosti uz adekvatnu točnost. Analitički postupci pružaju bolje razumijevanje prirode rješavanog problema

Literatura

- Ne postoji jedan udžbenik koji bi pokrivao sve teme ovog kolegija. Otprilike trećina gradiva pokrivena je knjigom:
  - V. Sinković: *Informacijske mreže.* Školska knjiga, 1994.
- Između brojnih knjiga o teoriji vjerojatnosti i stohastičkim procesima, od kojih su neke klasične (Feller, Cinlar, Doob, Parzen,...), preporučaju se knjige od prof. Elezovića te nekoliko standardnih udžbenika pisanih na razini ovog kolegija:
  - N. Elezović: *Vjerojatnost i statistika.* Dio 1.-3., Element, 2007.
  - D.P. Bertsekas & J.N. Tsitsiklis: *Introduction to Probability.* 2nd ed. Athena Scientific, 2008.
  - S.M. Ross: *Stochastic Processes.* 2nd ed. John Wiley, 1996. Također od istog autora: *Introduction to Probability Models.* 9th ed. Academic Press, 2006. i *A First Course in Probability.* 8th ed. Prentice-Hall, 2009.
  - G. Grimmett & D. Stirzaker: *Probability and Random Processes.* 3rd ed. Oxford University Press, 2001. Od istih autora: *One Thousand Exercises in Probability.* Oxford University Press, 2001.
  - R. Goodman: *Introductioin to Stochastic Models.* 2nd ed. Dover, 2006.

34457
Informacijske mreže

2. predavanje
Ak. god. 2009./2010.
Prof.dr.sc. Mladen Kos

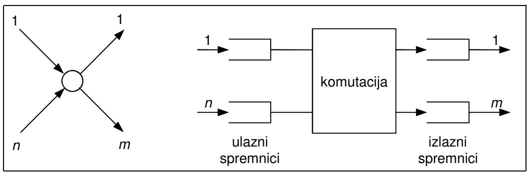
Teme

- Kašnjenje u paketskim mrežama
- Uvod u Teoriju redova čekanja
- Pregled Teorije vjerojatnosti
- Poissonov proces
- Littleov teorem
  - Dokaz i intuitivno objašnjenje
  - Primjene

Uzroci mrežnog kašnjenja

- Kašnjenje u obradi (Processing Delay)
  - Pretpostavljamo da brzina obrade nije ograničenje
- Kašnjenje zbog čekanja (Queueing Delay)
  - Vrijeme čekanja u spremniku prije odašiljanja (prijenosa)
- Prijenosno kašnjenje (Transmission Delay)
- Propagacijsko kašnjenje (Propagation Delay)
  - Vrijeme provedeno na linku – prijenos signala
  - Neovisno od informacija prenošenih linkom
- Fokus: čekanje i prijenosno kašnjenje

Primjer: komutacija/usmjeritelj



- Linijske brzine ulaza/izlaza (I/O portovi)
- Veličina (broj ulaza/izlaza)
- Kašnjenje uz određenu propusnost
- Vrijeme prospajanja
- ...

Primjer: prijenosni link

- Ukupno kašnjenje
  = TRANS + PROP + QD + PROC
- TRANS = (veličina paketa)/(brzina prijenosa)
- PROP = (duljina prijenosnog medija)/(brzina prostiranja signala kroz prijenosni medij)
  - PROP je između 3,3 i 5 μs/km
- QD = kašnjenje (queueing delay) u npr. komutacijskom čvoru
- PROC = trajanje obrade u npr. komutacijskom čvoru
  - Pretpostavka: PROC $\approx$ 0

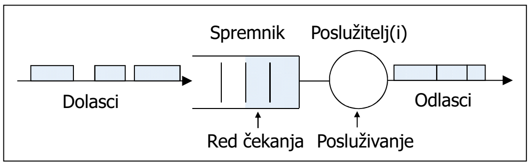
Primjer: golub vs. ATM

- Golub pismonoša nosi USB stick kapaciteta 64 GB pun podataka. Može letjeti srednjom brzinom 54 km/h. Do koje je udaljenosti prijenos informacija golubom brži od ATM linije brzine 155 Mbit/s. (*Napomena*: kod računanja uzmite, radi jednostavnosti, da je 1 GB = 10^9 B; kod memorija je inače točna vrijednost 1GB = 2^{10} MB = 2^{20} KB = 2^{30} B. Dakle, koristite uobičajenu aproksimaciju: $2^{10} \approx 10^3$).
  - Kapacitet sticka: 64 GB = 512 Gb.
  - Brzina goluba: 54 km/h = 54/3600 = 15m/s = 15×10^{-3} km/s.
  - Vrijeme u kojem golub preleti udaljenost x: $x/(15\times10^{-3}) = (200/3)x$ sekundi.
  - 512 Gb/((200/3)x) = 7680/x [Mb/s] $\Rightarrow$ 7680/x $\geq$ 155 [Mb/s] $\Rightarrow$ $x \leq$ 49.55 km, tj. golub je brži od ATM linije do udaljenosti od skoro 50 km!
  - Napomena: autor se ne zalaže za ponovo korištenje glubova u komunikacijama iako ovaj primjer pokazuje i njihovu gospodarsku (troškovnu) učinkovitost!

Sustav posluživanja

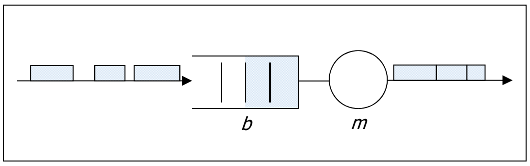
- Sustav posluživanja: korisnici dolaze u slučajnim vremenskim trenucima na posluživanje (service system, queueing system,…)
- Korisnici: paketi odaslani na link za prijenos, aktivni pozivi u telefonskoj mreži (komutacija kanala),…
- Vrijeme posluživanja: trajanje prijenosa paketa = L/C (L-duljina paketa [bit], C-kapacitet prijenosnog linka [bit/s]), trajanje poziva,…

Osnovni model posluživanja



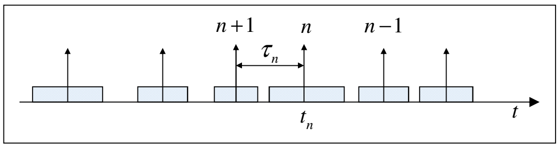
- Model sustava posluživanja:
  - Jedan ili više poslužitelja (servera)
  - Prostor za čekanje (čekaonica) ili spremnik (buffer)
- Korisnici dolaze na posluživanje
- Ako korisnik dođe kad poslužitelj nije slobodan svrstava se u red (rep) čekanja

Svojstva reda čekanja



- Broj poslužitelja m: jedan, više, beskonačno
- Veličina spremnika b
- Disciplina posluživanja (scheduling): FCFS, LCFS, Processor Sharing (PS), itd.
- Dolazni proces
- Proces posluživanja

Dolazni proces

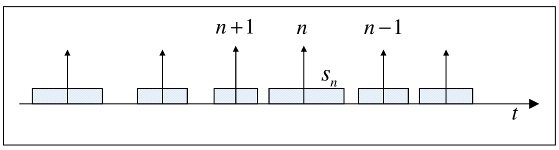


- τ_n: međudolazno vrijeme između korisnika n i $n+1$
- τ_n je slučajna varijabla
- $\{\tau_n,\ n \geq 1\}$ je stohastički proces
- Međudolazna vremena su identično distribuirana i imaju jednaku srednju vrijednost

$$E[\tau_n] = E[\tau] = 1/\lambda$$

- λ je srednja brzina ili intenzitet dolazaka

Proces posluživanja



- s_n: vrijeme (trajanje) posluživanja korisnika n
- $\{s_n,\ n \geq 1\}$ je stohastički proces
- Vremena posluživanja su identično distribuirana i imaju srednju vrijednost

$$E[s_n] = E[s] = 1/\mu$$

- μ je brzina posluživanja

Opis poslužiteljskog sustava

- Kendallova notacija: A/B/m/k
- A označava dolazni proces
  - Npr. za Poissonove dolaske (tj. eksponencijalna razdioba međudolaznih vremena) koristi se M (Markov)
- B označava razdiobu vremena posluživanja
  - M: eksponencijalna razdioba
  - D: determinističko vrijeme posluživanja
  - G: opća (generalna) razdioba
- m je broj poslužitelja
- k je max broj korisnika u sustavu – bilo da su u spremniku ili na posluživanju
  - k se ne piše kad je veličina spremnika neograničena

Opis poslužiteljskog sustava: primjeri

- M/M/1: Poissonovi dolasci, eksponencijalna razdioba vremena posluživanja, jedan poslužitelj, beskonačni spremnik
- M/M/m: sustav jednak prethodnom samo sa m poslužitelja
- M/M/m/m: Poissonovi dolasci, eksponencijalna razdioba vremena posluživanja, m poslužitelja, nema spremnika - sustav s gubicima
- M/G/1: Poissonovi dolasci, identično raspodjeljena vremena posluživanja sukladno općoj razdiobi, jedan poslužitelj, beskonačni spremnik
- */D/∞ : sustav s konstantnim kašnjenjem

Osnovni pojmovi Teorije vjerojatnosti

- Eksponencijalna razdioba
- Markovljevo svojstvo
- Poissonova razdioba
- Poissonov proces
  - Definicija i svojstva
  - Razdioba međudolaznih vremena
  - Modeliranje procesa dolazaka i posluživanje
- Predznanje na razini kolegija Vjerojatnost i statistika

Eksponencijalna razdioba

- N. Elezović (2007), poglavlje 6.
- Kontinuirana slučajna varijabla (s.v.) X opisuje eksponencijalnu razdiobu s parametrom μ ako je njena funkcija gustoće (vjerojatnosti) ili gustoća razdiobe (vjerojatnosti) :

$$f_X(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x} & \text{za } x \geq 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

- Funkcija razdiobe:

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\mu x} & \text{za } x \geq 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

Eksponencijalna razdioba (nast.)

- Očekivanje i varijanca (disperzija):

$$E[X] = \frac{1}{\mu}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\mu^2}$$

- Dokaz:

$$E[X] = \int_0^\infty x f_X(x)\,dx = \int_0^\infty x\mu e^{-\mu x}dx =$$

$$= -xe^{-\mu x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\mu x}dx = \frac{1}{\mu}$$

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \mu e^{-\mu x}dx = -x^2 e^{-\mu x}\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-\mu x}dx = \frac{2}{\mu}E[X] = \frac{2}{\mu^2}$$

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\mu^2} - \frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{\mu^2}$$

Markovljevo svojstvo

- Prošlost nema utjecaja na budućnost (odsustvo pamćenja)

$$P\{X > x + t \mid X > t\} = P\{X > x\}$$

- Dokaz:

$$P\{X > x+t \mid X > t\} = \frac{P\{X > x+t, X > t\}}{P\{X > t\}} = \frac{P\{X > x+t\}}{P\{X > t\}}$$

$$= \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu x} = P\{X > x\}$$

- Eksponencijalna razdioba: jedina kontinuirana razdioba sa svojstvom odsustva pamćenja

Poissonova razdioba

- N. Elezović (2007), poglavlje 4.
- Diskretna s.v. X opisuje Poissonovu razdiobu s parametrom λ ako ima funkciju vjerojatnosti:

$$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

- Široko se primjenjuje kod modeliranja brojnih slučajnih događaja koji se javljaju tijekom zadanog vremenskog intervala – *Poissonov proces*:
  - Broj dolazaka korisnika tijekom dana u npr. poštu, banku,...
  - Modeliranje telefonskog prometa, centrala,...
  - ... paketa koji dolaze u mrežne čvorove,...

Poissonova razdioba (nast.)

- Prosjek i varijanca:

$$E[X]=\lambda, \quad \mathrm{Var}(X)=\lambda$$

- Dokaz:

$$E[X]=\sum_{k=0}^{\infty} kP\{X=k\}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

$$E[X^2]=\sum_{k=0}^{\infty} k^2P\{X=k\}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda\sum_{j=0}^{\infty} je^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}+\lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda^2+\lambda$$

$$\mathrm{Var}(X)=E[X^2]-(E[X])^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

Zbroj Poissonovih slučajnih varijabli

Informacijske mreže

- X_i , $i = 1, 2,..., n$, su nezavisne s.v.
- X_i se ravna po Poissonovoj razdiobi s parametrom λ_i
- Parcijalna suma je definirana kao:

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

- S_n se ravna po Poissonovoj razdiobi s parametrom λ

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$$

Zbroj Poissonovih varijabli (nast.)

Informacijske mreže

- Dokaz:

Za $n = 2$. Poopćenje indukcijom. Diskretna s.v. $S = X_1 + X_2$:

$$P\{S=m\} = \sum_{k=0}^{m} P\{X_1=k, X_2=m-k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} P\{X_1=k\}\, P\{X_2=m-k\} = \sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda_2}$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\frac{\lambda_2^{m-k}}{(m-k)!}e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\lambda_1^k\lambda_2^{m-k}$$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \text{ Poisson s parametrom } \lambda_1+\lambda_2$$

Uzorkovanje Poissonove varijable

Informacijske mreže

- X se ravna po Poissonovoj razdiobi s parametrom λ
- Svaki od dolazaka tipa i javlja se s vjerojatnosti p_i ($i = 1, 2,..., n$) nezavisno jedan od drugog; $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$
- X_i označava s.v. za broj dolazaka tipa i

- $X_1, X_2,..., X_n$ su nezavisni događaji (nezavisne s.v.)
- X_i se ravna po Poissonovoj razdiobi s parametrom $\lambda_i = \lambda p_i$

Uzorkovanje Poissona (nast.)

Informacijske mreže

- Dokaz: Za $n = 2$. Poopćenje indukcijom.

$$P\{X_1=k_1, X_2=k_2\}=P\{X_1=k_1, X_2=k_2 | X=k_1+k_2\}P\{X=k_1+k_2\}$$

$$=\binom{k_1+k_2}{k_1}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k_1+k_2}}{(k_1+k_2)}$$

$$=\frac{1}{k_1!k_2!}(\lambda p_1)^{k_1}(\lambda p_2)^{k_2}\cdot e^{-\lambda(p_1+p_2)}$$

$$=e^{-\lambda p_1}\frac{(\lambda p_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda p_2}\frac{(\lambda p_2)^{k_2}}{k_2!}$$

$$=P\{X_1=k_1\}\cdot P\{X_2=k_2\}$$

- X_1 i X_2 su nezavisni događaji (nezavisne s.v.)
- X_i se ravna po Poissonovoj razdiobi s parametrom λp_i

Aproksimacija: Binomna→Poissonova

Informacijske mreže

- Binomna razdioba s parametrima (n, p)

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

- Kad $n \to \infty$ i $p \to 0$, uz $np=\lambda$ binomna razdioba se približava Poissonovoj s parametrom λ

- Dokaz:

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=\frac{(n-k+1)\ldots(n-1)n}{k!}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$\frac{(n-k+1)\ldots(n-1)n}{n^k}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda}$$

$$\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

$$P\{X=k\}\xrightarrow[n\to\infty]{}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Poissonov proces

- N. Elezović (2007), poglavlje 14.
- $\{A(t): t \geq 0\}$ proces brojanja
  - $A(t)$ je ukupni broj dolazaka od trenutka 0, kad je $A(0) = 0$, do trenutka t
  - $A(t)$ - $A(s)$, broj dolazaka u intervalu $(s, t]$
- Brojevi dolazaka u disjunktnim intervalima su nezavisni
- Broj dolazaka u nekom intervalu $(t, t+\tau]$ duljine τ
  - Ovisi samo o njegovoj duljini τ
  - Slijedi Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda\tau$, tj. za $\tau > 0$:

$$P\{A(t+\tau)-A(t)=n\}=\frac{(\lambda\tau)^n}{n!}e^{-\lambda\tau},\ n=0,1,\ldots$$

  - $\lambda\tau$ je srednji broj dolazaka u intervalu τ; λ je srednja brzina dolazaka u jedinici vremena

Svojstva Poissonovog procesa

- Međudolazna vremena za Poissonov proces su nezavisna i slijede eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ
- t_n: vrijeme n-tog dolaska; $\tau_n = t_{n+1} - t_n$: n-to međudolazno vrijeme

$$P\{\tau_n \leq s\} = 1 - e^{-\lambda s},\ s \geq 0$$

- Dokaz:
- Funkcija

$$P\{\tau_n \leq s\} = 1 - P\{\tau_n > s\} = 1 - P\{A(t_n+s) - A(t_n) = 0\} = 1 - e^{-\lambda s}$$

- Nezavisnost proizlazi iz nezavisnosti broja dolazaka u disjunktnim intervalima
- Gustoća, prosjek, varijanca: $p(\tau_n) = \lambda e^{-\lambda\tau_n}, E[\tau_n] = 1/\lambda, \mathrm{Var}(\tau_n) = 1/\lambda^2$

Svojstva Poissonovog procesa (nast.)

- Interval $(t+\delta, t]$ duljine δ

$$P\{A(t+\delta)-A(t)=0\}=1-\lambda\delta+o(\delta)$$
$$P\{A(t+\delta)-A(t)=1\}=\lambda\delta+o(\delta)$$
$$P\{A(t+\delta)-A(t)\geq 2\}=o(\delta)$$

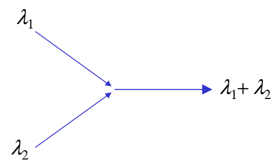
- Dokaz:

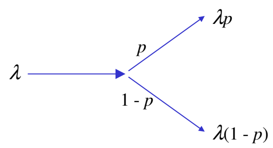
$$P\{A(t+\delta)-A(t)=0\}=e^{-\lambda\delta}=1-\lambda\delta+\frac{(\lambda\delta)^2}{2}=1-\lambda\delta+o(\delta)$$

$$P\{A(t+\delta)-A(t)=1\}=e^{-\lambda\delta}\lambda\delta=\lambda\delta\left(1-\lambda\delta+\frac{(\lambda\delta)^2}{2}\right)=\lambda\delta+o(\delta)$$

$$P\{A(t+\delta)-A(t)\geq 2\}=1-\sum_{k=0}^{1}P\{A(t+\delta)-A(t)=k\}$$
$$=1-(1-\lambda\delta+o(\delta))-(\lambda\delta+o(\delta))=o(\delta)$$

Stapanje i razdvajanje Poissonovih procesa





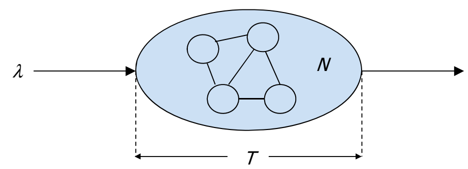
- Superpozicija
- $A_1,\ldots, A_k$ nezavisni Poissonovi procesi brzina $\lambda_1,\ldots, \lambda_k$
- Stapanje u jedan proces $A = A_1+\ldots+ A_k$
- A je Poissonov proces brzine $\lambda = \lambda_1+\ldots+ \lambda_k$

- Dekompozicija
- A: Poissonov proces brzine λ
- Podjela na nezavisne procese A_1 i A_2 uz vjerojatnosti p i $1 - p$
- A_1 Poissonov proces, $\lambda_1 = \lambda p$
  A_2 Poissonov proces $\lambda_2 = \lambda(1\text{-}p)$

Modeliranje dolaznog procesa

- Poissonov proces se široko koristi kao dobar model dolazaka paketa kod rješavanja brojnih mrežnih problema
- Opravdanost: dobar model za stopljeni (agregirani) promet velikog broja "nezavisnih" korisnika. Primjerice:
  - Imamo n prometnih tokova s "nezavisnim identičnim razdiobama" (iid) $F(s) = P\{\tau \leq s\}$ međudolaznih vremena τ; $F(s)$ nije nužno eksponencijalna razdioba
  - Brzina dolaska svakog toka je λ/n a stopljenog λ
  - Kad $n \to \infty$ stopljeni promet se može dobro aproksimirati Poissonovim procesom uz relativno blage uvjete na $F(s)$ – npr. $F(0) = 0$, $F'(0) > 0$
- ☺ Najvažniji razlog za uporabu Poissonove pretpostavke: analitička rješivost modela sustava posluživanja

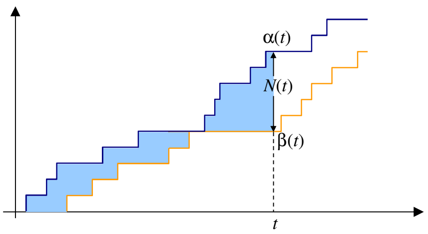
Littleov teorem



- λ: srednja brzina dolazaka korisnika
- N: srednji broj korisnika u sustavu
- T: srednje kašnjenje korisnika u sustavu
- Littleov teorem: sustav je u stacionarnom stanju

$$N = \lambda T$$

Proces brojenja



- $N(t)$: broj korisnika u sustavu u trenutku t
- $\alpha(t)$: broj dolazaka do trenutka t
- $\beta(t)$: broj odlazaka do trenutka t
- T_i : vrijeme boravka i-tog korisnika u sustavu

Vremenski prosjeci

- Vremenski prosjek u intervalu $[0, t]$
- Stacionarni vremenski prosjeci:

$$N_t = \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds \qquad N = \lim_{t\to\infty} N_t$$

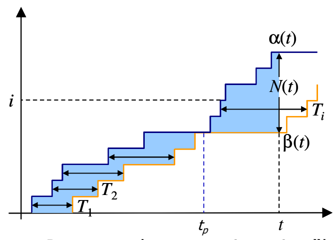
$$\lambda_t = \frac{a(t)}{t} \qquad \lambda = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$$

$$T_t = \frac{1}{a(t)}\sum_{i=1}^{a(t)} T_i \qquad T = \lim_{t\to\infty} T_t$$

$$\delta_t = \frac{\beta(t)}{t} \qquad \delta = \lim_{t\to\infty} \delta_t$$

- Littleov teorem $N=\lambda T$
- Primjena na neki sustav posluživanja:
  - Postoje limiti T, λ, i δ a vrijedi
  - $\lambda = \delta$
  - Jednostavni grafički dokaz Littleovog teorema uz neke pretpostavke

Dokaz Littleovog teorema za FCFS

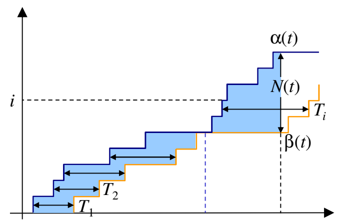


- FCFS sustav, $N(0)=0$
  - $\alpha(t)$ i $\beta(t)$: izlomljeni crte
  - $N(t) = \alpha(t)- \beta(t)$
  - Osjenčano područje $S(t) = \int_0^t N(s)ds$
- Pretpostavka: $N(t)=0$ ispunjen "beskonačno često". Za neki t vrijedi

$$\int_0^t N(s)ds = \sum_{i=1}^{\alpha(t)} T_i \Rightarrow \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds = \frac{\alpha(t)}{t}\frac{\sum_1^{\alpha(t)} T_i}{\alpha(t)} \Rightarrow N_t = \lambda_t T_t$$

  - Ako postoje limiti $N_t \to N$, $T_t \to T$, $\lambda_t \to \lambda$, onda vrijedi Littleova formula
  - Uklonimo pretpostavku da će sustav tijekom proizvoljnog vremena "beskonačno često" biti prazan ($N(t)=0$, npr. u $t = t_p$)

Dokaz Littleovog teorema (nast.)



- Općenito (čak ako nije "beskonačno često" prazan):

$$\sum_{i=1}^{\beta(t)} T_i \le \int_0^t N(s)ds \le \sum_{i=1}^{\alpha(t)} T_i \Rightarrow \frac{\beta(t)}{t}\frac{\sum_1^{\beta(t)} T_i}{\beta(t)} \le \frac{1}{t}\int_0^t N(s)ds \le \frac{\alpha(t)}{t}\frac{\sum_1^{\alpha(t)} T_i}{\alpha(t)}$$

$$\Rightarrow \delta_t T_t \le N_t \le \lambda_t T_t$$

- Resultat slijedi iz pretpostavke da postoje limiti $T_t \to T$, $\lambda_t \to \lambda$, i $\delta_t \to \delta$, te da je $\lambda = \delta$

Stohastički oblik Littleovog teorema

- Do sada smo razmatrali jednu funkciju koja opisuje stohastički proces
- Sada se fokusiramo na vjerojatnosti različitih (ansambla) funkcija stohastičkog procesa
- Vjerojatnost da je n korisnika u sustavu u trenutku t

$$p_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

- Očekivani broj korisnika u sustavu u t

$$E[N(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n(t)$$

Stohastički oblik … (nast.)

- $p_n(t)$, $E[N(t)]$ ovise o t i početnoj razdiobi u $t = 0$
- Razmatramo sustav koji konvergira u stacionarno stanje
- Postoji p_n (neovisno od početne razdiobe) za koji vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

- Očekivani broj korisnika u stacionarnom stanju (stohastički prosjek)

$$\bar{N} = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \lim_{t\to\infty} E[N(t)]$$

- Za ergodički proces vremenski prosjek uzorka funkcija jednak je stacionarnom prosjeku s vjerojatnosti 1

$$N = \lim_{t\to\infty} N_t = \lim_{t\to\infty} E[N(t)] = \bar{N}$$

Stohastički oblik … (nast.)

Informacijske mreže

- Možemo odrediti razdiobu kašnjenja T_i korisnika i, te zatim prosječno kašnjenje $E[T_i]$ koje konvergira u stacionarnom stanju u vrijednost

$$\bar{T} = \lim_{i\to\infty} E[T_i]$$

- Za ergodički sustav vrijedi

$$T = \lim_{i\to\infty} \frac{\sum_{1}^{\infty} T_i}{i} = \lim_{i\to\infty} E[T_i] = \bar{T}$$

- Stohastički oblik Littleove formule: $\bar{N} = \lambda \bar{T}$
- Brzina dolazaka definirana je kao

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{E[\alpha(t)]}{t}$$

Vremenski vs. stohastički prosjeci

Informacijske mreže

- "Vremenski prosjeci = Stohastički prosjeci" za sve sustave izučavane u ovom kolegiju
- To je ispunjeno ako jedna funkcija uzorka stohastičkog procesa sadrži sve moguće realizacije procesa za $t\to\infty$
- Opravdanje: na temelju općih svojstava Markovljevih lanaca

Littleov teorem: primjer 1.

Informacijske mreže

$N_s(t)$ je broj posluživanih korisnika u t, a τ trajanje posluživanja. Prema Littleovom teoremu je $E[N_s] = \lambda E[\tau]$; $E[N_s]$ je srednji broj zauzetih poslužitelja kad je sustav u stacionarnom stanju.

Za sustav s jednim poslužiteljem: $N_s(t)$ može biti 0 ili 1, pa $E[N_s]$ predstavlja dio vremena zauzeća poslužitelja. Ako s $p_0 = P[N(t) = 0]$ označimo stacionarnu vjerojatnost da je sustav prazan, tada vrijedi

$$1 - p_0 = E[N_s] = \lambda E[\tau] \quad\Rightarrow\quad p_0 = 1 - \lambda E[\tau]$$

$1 - p_0$ je udio zauzeća poslužitelja. Zato je iskoristivost sustava s jednim poslužiteljem:

$$\rho = \lambda E[\tau]$$

Slično je iskoristivost sustava s m poslužitelja

$$\rho = \frac{\lambda E[\tau]}{m}$$

Littleov teorem: primjer 2.

Informacijske mreže

Zadana je mreža prijenosnih linija. Paketi dolaze na n različitih čvorova brzinama $\lambda_1,\ldots, \lambda_n$. Ako je N srednji ukupni broj paketa u mreži tada je, bez obzira na razdiobu duljina paketa i metodu njihovog usmjeravanja, srednje kašnjenje paketa iznosi:

$$T = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Prema Littleovom teoremu je $N_i = T_i \lambda_i$, gdje je N_i prosječni broj a T_i prosječno kašnjenje paketa koji dolaze u čvor i.

Littleov teorem: primjer 3.

Informacijske mreže

Paketi dolaze na prijenosnu liniju svakih K sekundi. Prvi paket dođe u trenutku 0. Svi paketi su jednako dugački a njihov prijenos traje αK ($\alpha < 1$) sekundi. Propagacijsko + procesorsko kašnjenje je P sekundi po paketu.

Brzina dolazaka je $\lambda = 1/K$. Paketi dolaze regularno $\Rightarrow$ nema kašnjenja zbog čekanja $\Rightarrow$ vrijeme T koje paket provede u sustavu (uključuje kašnjenje P) je $T = \alpha K + P$. Prema Littleovom teoremu je $N = \lambda T = \alpha + P/K$. Ovdje je $N(t)$ deterministička funkcija vremena.

Za slučaj $K < \alpha K + P < 2K$ (skicirajte $N(t)$ ovisno od t): $N(t)$ ne konvergira nekoj vrijednosti (sustav nikad nije u stacionarnoj ravnoteži). Littleov teorem je ispunjen kad se N tretira kao vremenski prosjek.

Littleov teorem: primjer 4.

Informacijske mreže

Kontrola toka pomoću prozora (window flow control): W je veličina prozora u svakoj sesiji, a λ je brzina paketa u svakoj sesiji. Prema Littleovom teoremu prosječno kašnjenje paketa u svakoj sesiji mora zadovoljiti $W \geq \lambda T$.

Kad mreža ulazi u zagušenje T raste, pa se λ eventualno mora smanjiti.

Ako je mreža zagušena i sposobna prenositi u svakoj sesiji λ paketa u jedinici vremena, tada je $W \cong \lambda T$ (uz pretpostavku da je kašnjenje potvrda (ack paketa) zanemarivo u odnosu na samo kašnjenje isporuke paketa). Sada povećanje veličine prozora W u svakoj sesiji uglavnom povećava kašnjenje T bez osjetnije promjene λ.

Littleov teorem: primjer 5.

Razmotrimo poslužiteljski sustav s M poslužitelja i spremnikom za najviše $N \geq M$ paketa (u spremniku ili u posluživanju). Sustav je uvijek pun: pretpostavljamo da je u njemu N paketa, te da je svaki odlazak paketa odmah zamijenjen novim paketom (tzv. zatvoreni sustav posluživanja). Pretpostavimo da je prosječno trajanje obrade paketa T_p. Želimo odrediti prosječno vrijeme T boravka paketa u sustavu.

Primijenimo Littleov teorem dva puta; prvo na cijeli sustav: $N = \lambda T$, a zatim na poslužiteljski dio: $M = \lambda T_p$ (svi poslužitelji su stalno zauzeti!). Dobivamo: $T = N\,T_p / M$.

Pogledajmo sada isti sustav ali s drugom disciplinom posluživanja: paketi dolaze istom brzinom λ ali su blokirani (i izgubljeni) kad dođu na puni sustav. Broj zauzetih poslužitelja može biti manji od M: neka je $\bar{M}$ srednji broj zauzetih poslužitelja, a β udio paketa blokiranih na ulasku u sustav. Primijenimo Littleov teorem na poslužiteljski dio sustava: $\bar{M} = (1-\beta)\lambda T_p \Rightarrow \beta = 1 - \bar{M} / \lambda T_p$. Budući da je $\bar{M} \leq M \Rightarrow$ donja granica vjerojatnosti blokiranja je:

$$\beta \geq 1 - \frac{M}{\lambda T_p}$$

Transformacije

- Omogućavaju uspješno rješavanje brojnih problema. Temelje se na Fourierovoj i Laplaceovoj transformaciji te vrijede svi njihovi zakoni
- U teoriji vjerojatnosti često se koriste:
  - Karakteristična funkcija: to je u biti Fourierova transformacija (tradicionalni oblik dobije se ako se u zamjeni s $-u$)
  - Funkcija izvodnica momenata: poznata i kao funkcija generatrisa momenata i funkcija generiranja momenata.
  - Ove su funkcije u vezi: $\phi_X(u) = M_X(ju)$, $M_X(u) = \phi_X(-ju)$
- ☺ Lakše je raditi s karakterističnim funkcijama (ne postavlja se pitanje konvergencije), a inverzija se može naći na osnovu pravila koja vrijede za Fourierovu transformaciju. Jedina prednost funkcija izvodnica momenata: to su realne funkcije.

Transformacije (nast.)

- U teoriji posluživanja obično se koriste transformacije definirane nad nenegativnim varijablama:
  - Laplaceova transformacija: za gustoće vjerojatnosti kontinuiranih s.v. Koristi se jednostrana Laplaceova transformacija i to u uobičajenom obliku. Inače je jednaka funkciji izvodnici momenata (ako se e^{v} zamjeni sa e^{-s})
  - z-transformacija: za diskretne vjerojatnosti. Često se zove funkcija izvodnica (vjerojatnosti), funkcija generiranja vjerojatnosti, funkcija generatrisa momenata, geometrijska transformacija.

Karakteristična funkcija

- Definicija: za neki $u \in \mathbb{R}$, $j = \sqrt{-1}$:

$$\phi_X(u) \triangleq E[e^{juX}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{jux} f_X(x)dx, & X \text{ je kontinuirana} \\ \sum_k e^{jux_k} P\{X = x_k\}, & X \text{ je diskretna} \end{cases}$$

- Funkcija razdiobe slučajne varijable X jednoznačno je određena njenom karakterističnom funkcijom $\phi_X(u)$
- Osnovna svojstva:

$$\phi_X(0) = 1, \quad \frac{d^n}{ds^n}\phi_X(u) = j^n E[X^n e^{juX}], \quad \frac{d^n}{ds^n}\phi_X(0) = j^n E[X^n]$$

- Ako su X i Y nezavisne s.v. $\Rightarrow \phi_{X+Y}(u) = \phi_X(u)\,\phi_Y(u)$.
- Ako je $Y = aX + b \Rightarrow \phi_Y(u) = e^{bu}\phi_X(au)$

Funkcija izvodnica momenata

- Definicija: za neki $v \in \mathbb{R}$:

$$M_X(v) \triangleq E[e^{vX}] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} e^{vx} f_X(x)dx, & X \text{ je kontinuirana} \\ \sum_k e^{vx_k} P\{X = x_k\}, & X \text{ je diskretna} \end{cases}$$

- Funkcija razdiobe slučajne varijable X jednoznačno je određena njenom transformacijom $M_X(v)$ ako ona egzistira i ako je konačna u nekom okolišu $v = 0$.
- Osnovna svojstva:

$$M_X(0) = 1, \quad \frac{d^n}{dv^n}M_X(v) = E[X^n e^{vX}], \quad \frac{d^n}{dv^n}M_X(0) = E[X^n]$$

- Ako su X i Y nezavisne s.v. $\Rightarrow M_{X+Y}(v) = M_X(v)\,M_Y(v)$. Obrnuto ne vrijedi.
- Ako je $Y = aX + b \Rightarrow M_Y(v) = e^{bv}M_X(av)$

Laplaceova transformacija gustoće

- Definicija: za neku pozitivnu kontinuiranu s.v. X:

$$F^*(s) \triangleq E[e^{-sX}] = \int_0^{\infty} e^{-sx} f_X(x)dx$$

- Transformacija $M_X(v)$ je u osnovi dvostrana Laplaceova transformacija funkcije gustoće vjerojatnosti. Jedina je razlika s obzirom na uobičajenu formulaciju u predznaku eksponenta: treba zamijeniti $e^{v} \to e^{-s}$.
- U teoriji posluživanja veličine poput kašnjenja, vremena čekanja,..., nisu negativne ⇒ jednostranu Laplaceovu transformaciju. Donja granica integracije zapravo je 0^-.
- Osnovna svojstva:

$$F^*(0) = 1, \quad \frac{d^n}{ds^n}F^*(s) = E[(-X)^n e^{-sX}], \quad (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F^*(0) = E[X^n]$$

z-transformacija

- Definicija: za diskretnu slučajnu varijablu X koja uzima cjelobrojne nenegativne vrijednosti iz skupa {0, 1, 2,…} s vjerojatnostima $p_k = P[X = x_k]$, z je kompleksna varijabla:

$$G_X(z) \triangleq E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k$$

- Ako u transformaciji $M_X(v)$ zamijenimo $e^v \to z$ dobivamo z-transformaciju. Slično: $\phi_X(u) = G_X(e^{ju})$
- Osnovna svojstva:

$$G_X(0) = p_0, \quad G_X(1) = 1, \quad \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k} G_X(0) = p_k, \quad \frac{d}{dz} G_X(1) = E[X]$$

$$\frac{d^2}{dz^2} G_X(1) = E[X(X-1)], \quad \mathrm{Var}[X] = G_X^{'}(1) + G_X^{''}(1) - [G_X^{'}(1)]^2$$

Transformacije - ponovo

- Skraćeno pisanje derivacija: npr. n-tu derivaciju pišemo kraće:

$$\phi_X^{(n)}(0) \triangleq \frac{d^n}{ds^n} \phi_X(0)$$

- Tri funkcije $\phi_X(u)$, $M_X(v)$ i $F^*(s)$ su međusobno u uskoj vezi. Npr.

$$\phi_X(js) = M_X(-s) = F^*(s)$$

- n-ti moment od X može se izračunati pomoću jednog od izraza:

$$E[X^n] = j^{-n}\phi_X^{(n)}(0) = M_X^{(n)}(0) = (-1)^n F^{*(n)}(0)$$

Transformacije – primjer

- Zadana je kontinuirana s.v. X s eksponencijalnom gustoćom i parametrom λ (sve ovo kraće pišemo: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$):

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{za } x \geq 0 \\ 0 & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

Izračunavamo

$$\phi_X(u) = \frac{\lambda}{\lambda - ju}, \quad M_X(v) = \frac{\lambda}{\lambda - v}, \quad F^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Momente možemo odrediti pomoću bilo kojeg od navedena tri izraza za $E[X^n]$:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}, \quad E[X^2] = \frac{1}{\lambda^2}$$

34457 Informacijske mreže

3. predavanje

Ak.god. 2009./2010.

Prof.dr.sc. Mladen Kos

Teme

- Markovljevi lanci
- Vremensko-diskretni Markovljevi lanci
- Izračunavanje stacionarnih razdioba
- Jednadžbe globalne ravnoteže
- Jednadžbe lokalne ravnoteže
- Proces rađanja i umiranja
- Generalizirani Markovljevi lanci

Markovljev lanac

- Predznanje: N. Elezović, poglavlje 13.
- Markovljev lanac je stohastički proces koji poprima vrijednosti u prebrojivom skupu S (prostor stanja)
  - Primjer: prostor stanja $\{0,1,2,\ldots,m\}$ ili $\{0,1,2,\ldots\}$
  - Elementi gornjih skupova predstavljaju moguća "stanja"
  - Lanac prelazi iz stanja u stanje
- Svojstvo odsustva pamćenja (Markov): uz poznato sadašnje stanje, budući prijelazi u lancu ne ovise od prošlosti
- Markovljevi lanci: diskretno ili kontinuirano vrijeme

Vremensko-diskretni Markovljev lanac

- Vremensko-diskretni stohastički proces $\{X_n | n = 0,1,2,\dots\}$ čija s.v. X_n poprimaju vrijednosti iz prostora stanja $S = \{0,1,2,\dots\}$
- Proces je Markovljev lanac ako zadovoljava svojstvo odsustva pamćenja (Markovljevo svojstvo):

$$P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$
$$P_{ij} = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}$$

- Ako je za sve n (vrijeme) i sve $i,j \in S$ zadovoljen zadnji izraz za P_{ij} lanac je vremenski homogen
- Prijelazne vjerojatnosti P_{ij}

$$P_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0,1,\dots$$

- Matrica prijelaznih vjerojatnosti $P=[P_{ij}]$

Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe

- Prijelazna vjerojatnost u n koraka

$$P_{ij}^n = P\{X_{n+m} = j \mid X_m = i\}, \quad n,m \geq 0,\ i,j \geq 0$$

- Chapman-Kolmogorovljeve jednadžbe omogućavaju izračunavanje P_{ij}^n

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m, \quad n,m \geq 0,\ i,j \geq 0$$

  - P_{ij}^n je element (i, j) u matrici P^n (P na n-tu potenciju)
  - Rekurzivno izračunavanje vjerojatnosti stanja

Vjerojatnost stanja, stacionarne razdiobe

- Vjerojatnost stanja (vremenski zavisno)

$$\pi_j^n = P\{X_n = j\}, \qquad \pi^n = (\pi_0^n, \pi_1^n, \dots)$$
$$P\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{\infty} P\{X_{n-1} = i\} P\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} \Rightarrow \pi_j^n = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i^{n-1} P_{ij}$$

Matrični zapis:

$$\pi^n = \pi^{n-1} P = \pi^{n-2} P^2 = \dots = \pi^0 P^n$$

- Ako vremenski zavisna razdioba konvergira granici

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi^n$$

vektor vjerojatnosti stanja π je stacionarna razdioba

$$\pi = \pi P$$

  - Njeno postojanje ovisi od strukture Markovljevog lanca

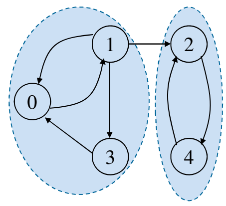
Klasifikacija Markovljevih lanaca

Ireducibilni:

- Stanja i i j komuniciraju ako:

$$\exists n,m:\ P_{ij}^n > 0,\ P_{ji}^m > 0$$

- Ireducibilni Markovljev lanac: sva stanja komuniciraju

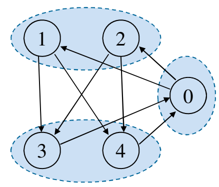


Neperiodički:

- Stanje i je periodičko:

$$\exists\, d > 1:\ P_{ii}^n > 0 \Rightarrow n = \alpha d$$

- Neperiodički Markovljev lanac: nema periodičkog stanja ($d = 1$)



Granični teorem

Teorem 1: Ireducibilni neperiodički Markovljev lanac

- Za svako stanje j egzistira sljedeća granica

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\}, \quad i = 0,1,2,\dots$$

koja ne ovisi od početnog stanja i

- $N_j(k)$: broj dolazaka u stanje j do trenutka k

$$P\left\{\pi_j = \lim_{k\to\infty} \frac{N_j(k)}{k} \mid X_0 = i\right\} = 1$$

- π_j: učestalost dolazaka (posjeta) u stanje j

Egzistencija stacionarne razdiobe

Teorem 2: Za ireducibilni neperiodički Markovljev lanac postoje dvije mogućnosti za skalar

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

1. $\pi_j = 0$, za sva stanja j ➨ Nema stacionarne razdiobe
2. $\pi_j > 0$, za sva stanja j ➨ π je *jedinstvena* stacionarna razdioba

Napomena: Ako je broj stanja konačan, jedino je moguć slučaj 2

Ergodički Markovljev lanac

Informacijske mreže

- Markovljev lanac sa stacionarnom razdiobom

$$\pi_j > 0, \quad j = 0,1,2,\ldots$$

- Stanja su pozitivno rekurentna: proces se vraća u stanje j "beskonačno često"
- Pozitivno rekurentni i neperiodički Markovljev lanac se zove ergodički
- Ergodički lanac ima jedinstvenu stacionarnu razdiobu

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$$

➤ Ergodičnost ⇒ Vremenski prosjeci = Stohastički prosjeci

Izračunavanje stacionarnih razdioba

Informacijske mreže

A. Konačni broj stanja

- Riješiti sustav jednadžbi

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{m} \pi_i P_{ij}, \quad j = 0,1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=0}^{m} \pi_i = 1$$

- Numerički odrediti limes P^n koji konvergira u matricu s retcima jednakim π
- ➧ Prikladno za mali broj stanja

B. Beskonačni broj stanja

- Prethodna metoda se ne može primijeniti na probleme beskonačne dimenzije
- Pokušati riješiti rekurentne jednadžbe:

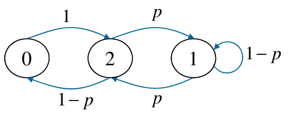
$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \quad j = 0,1,\ldots,$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

Primjer: konačni Markovljev lanac

Informacijske mreže

Zaboravni profesor ima na raspolaganju dva kišobrana kad putuje između stana i ureda. Ako pada kiša on će uzeti kišobran ako ga ima na toj lokaciji (stan ili ured). Ako ne pada kiša on uvijek zaboravi uzeti kišobran. Neka je p vjerojatnost da će padati kiša kad on putuje. Kolika je vjerojatnost da će nekog dana pokisnuti?

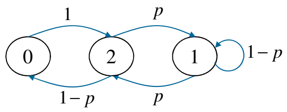


- Markovljev lanac
- i je broj kišobrana na lokaciji na kojoj se trenutno nalazi
- Matrica prijelaza

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

Primjer: konačni lanac (nast.)

Informacijske mreže



$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-p & p \\ 1-p & p & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum_i \pi_i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_0 = (1-p)\pi_2 \\ \pi_1 = (1-p)\pi_1 + p\pi_2 \\ \pi_2 = \pi_0 + p\pi_1 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1-p}{3-p},\ \pi_1 = \frac{1}{3-p},\ \pi_2 = \frac{1}{3-p}$$

$$P\{\text{pokisnuti će}\} = \pi_0 p = p\frac{1-p}{3-p}$$

Primjer: konačni lanac (nast.)

Informacijske mreže

- Uzmimo da je $p = 0.1$:

$$\pi = \left(\frac{1-p}{3-p}, \frac{1}{3-p}, \frac{1}{3-p}\right) = (0.310, 0.345, 0.345)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0.9 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Numerički odredimo limes za P^n

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0.310 & 0.345 & 0.345 \\ 0.310 & 0.345 & 0.345 \\ 0.310 & 0.345 & 0.345 \end{bmatrix} \quad (n \approx 150)$$

- Efektivnost ovisi o strukturi P

Jednadžbe globalne ravnoteže

Informacijske mreže

- Markovljev lanac s beskonačnim brojem stanja
- Jednadžbe globalne ravnoteže (JGR)

$$\pi_j \sum_{i=0}^{\infty} P_{ji} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij} \Leftrightarrow \pi_j \sum_{i \neq j} P_{ji} = \sum_{i \neq j} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0$$

- $\pi_j P_{ji}$ je učestalost prijelaza iz j u i (usp. s prvim Kirchoffovim zakonom)

$$\left(\begin{array}{c}\text{Zbroj učestalosti} \\ \text{prijelaza iz } j\end{array}\right) = \left(\begin{array}{c}\text{Zbroj učestalosti} \\ \text{prijelaza u } j\end{array}\right)$$

- Ostale interpretacije: učestalost, vjerojatnosti, brzine,...
- Intuitivno: stanje j je posjećeno beskonačno puta; za svaki prijelaz iz stanja j mora postojati odgovarajući prijelaz u stanje j s vjerojatnosti 1

Jednadžbe globalne ravnoteže (nast.)

- Alternativni oblik JGR (usp. s rezom u Teoriji grafova):

$$\sum_{j\in S}\pi_j\sum_{i\notin S}P_{ji}=\sum_{i\notin S}\pi_i\sum_{j\in S}P_{ij},\quad S\subseteq\{0,1,2,\ldots\}$$

- Ako razdioba vjerojatnosti zadovoljava JGR, tada je ona jedinstvena stacionarna razdioba Markovljevog lanca
- Određivanje stacionarne razdiobe:
  - Odrediti razdiobu iz svojstva sustava
  - Provjeriti zadovoljava li JGR
  - ☺ Specijalna struktura Markovljevog lanca pojednostavljuje zadatak

Jednadžbe globalne ravnoteže – dokaz

$$\pi_j=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}\ \text{ i }\ \sum_{i=0}^{\infty}P_{ji}=1\ \Rightarrow$$

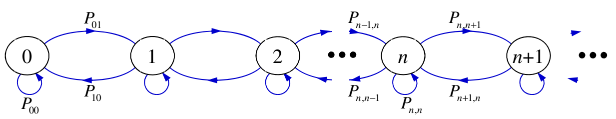
$$\pi_j\sum_{i=0}^{\infty}P_{ji}=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}\ \Leftrightarrow\ \pi_j\sum_{i\neq j}P_{ji}=\sum_{i\neq j}\pi_i P_{ij}$$

$$\pi_j\sum_{i=0}^{\infty}P_{ji}=\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}\ \Rightarrow\ \sum_{j\in S}\pi_j\sum_{i=0}^{\infty}P_{ji}=\sum_{j\in S}\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i P_{ij}\ \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in S}\pi_j\left(\sum_{i\in S}P_{ji}+\sum_{i\notin S}P_{ji}\right)=\sum_{j\in S}\left(\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}+\sum_{i\notin S}\pi_i P_{ij}\right)\ \Rightarrow$$

$$\sum_{j\in S}\pi_j\sum_{i\notin S}P_{ji}=\sum_{i\notin S}\pi_i\sum_{j\in S}P_{ij}$$

Proces rađanja i umiranja



- Jednodimenzionalni Markovljev lanac s prijelazima samo između susjednih stanja: $P_{ij}=0$, ako je $|i-j|>1$
- Jednadžbe lokalne ravnoteže (JLR)

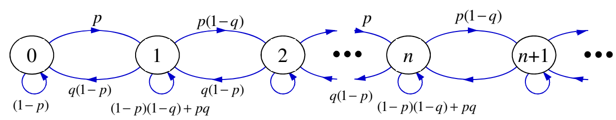
$$\pi_n P_{n,n+1}=\pi_{n+1}P_{n+1,n}\qquad n=0,1,\ldots$$

- Dokaz: JGR sa $S=\{0,1,\ldots,n\}$ daje:

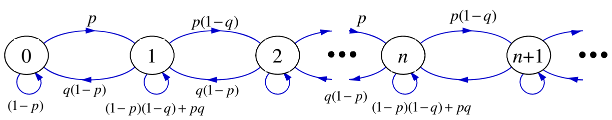
$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\pi_j P_{ji}=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=n+1}^{\infty}\pi_i P_{ij}\Rightarrow\pi_n P_{n,n+1}=\pi_{n+1}P_{n+1,n}$$

Primjer: vremenski diskretni red čekanja

- U jednom vremenskom odsječku (slotu): vjerojatnost jednog dolaska je p a niti jednog dolaska $1-p$
- U jednom vremenskom odsječku: posluživani korisnik odlazi s vjerojatnosti q ili ostaje s vjerojatnosti $1-q$
- Nezavisni dolasci i vremena posluživanja
- Stanje: broj korisnika u sustavu



Primjer: diskretni red čekanja (nast.)



$$\pi_0 p=\pi_1 q(1-p)\Rightarrow\pi_1=\frac{p/q}{1-p}\pi_0$$

$$\pi_n p(1-q)=\pi_{n+1}q(1-p)\Rightarrow\pi_{n+1}=\frac{p(1-q)}{q(1-p)}\pi_n,\ \ n\ge 1$$

Definiramo: $\rho\equiv p/q,\ \ \alpha\equiv\dfrac{p(1-q)}{q(1-p)}$

$$\begin{cases}\pi_1=\dfrac{\rho}{1-p}\pi_0\\ \pi_{n+1}=\alpha\pi_n,\ \ n\ge 1\end{cases}\ \Rightarrow\ \pi_n=\alpha^{n-1}\frac{\rho}{1-p}\pi_0,\ \ n\ge 1$$

Primjer: diskretni red čekanja (nast.)

- Odredimo razdiobu kao funkciju od π_0

$$\pi_n=\alpha^{n-1}\frac{\rho}{1-p}\pi_0,\ \ n\ge 1$$

- Kako izračunati normalizacijsku konstantu π_0?
- Iz osnovnog zakona:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n=1\Rightarrow\pi_0=\left[1+\frac{\rho}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^{n-1}\right]^{-1}=\left[1+\frac{\rho}{(1-p)}\frac{1}{(1-\alpha)}\right]^{-1}$$

- Uočimo da je

$$(1-p)(1-\alpha)=(1-p)\frac{q(1-p)-p(1-q)}{q(1-p)}=\frac{q-p}{q}=1-\rho$$

pa konačno imamo

$$\begin{cases}\pi_0=1-\rho\\ \pi_n=\rho(1-\alpha)\alpha^{n-1},\ \ n\ge 1\end{cases}$$

Jednadžbe lokalne ravnoteže

- Općenito:

$$\pi_j P_{ji} = \pi_i P_{ij} \quad i, j = 0,1,\ldots$$

- Implicira JGR
- Ne mora zadovoljavati dani Markovljev lanac
- Jednostavnije izračunavanje stacionarnih razdioba

Postupak:

- Pretpostavimo da su JLR ispunjene
- Riješiti sustav definiran s JLR i $\sum_i \pi_i = 1$
  - Ako je sustav nekonzistentan: JLR nisu ispunjene
  - Ako sustav ima rješenje $\{\pi_i | i=0,1,\ldots\}$: to je jedinstvena stacionarna razdioba

Generalizirani Markovljevi lanci

- Markovljev lanac sa skupom stanja {0,1,...}, koji se nalazi u stanju i:
  - prelazi u stanje j s vjerojatnosti P_{ij}
  - znajući da će sljedeće stanje biti j, vrijeme koje će on provesti u stanju i prije samog prijelaza je s.v. s razdiobom F_{ij}
- $\{Z(t): t \geq 0\}$ opisuje stanje lanca u vremenu t: *generalizirani Markovljev lanac* (*polu-Markovljev* proces)
- Ne zadovoljava Markovljevo svojstvo: budućnost ovisi o
  - sadašnjem stanju i
  - duljini vremena provedenog u tom stanju

Generalizirani Markovljevi lanci (nast.)

- T_i: vrijeme provedeno u stanju i prije prijelaza, tj. vrijeme zauzeća
- Funkcija razdiobe vjerojatnosti za T_i

$$H_i(t) = P\{T_i \leq t\} = \sum_{j=0}^{\infty} P\{T_i \leq t \mid \text{slijedeće stanje } j\} P_{ij} = \sum_{j=0}^{\infty} F_{ij}(t) P_{ij}$$

$$E[T_i] = \int_0^{\infty} t \, dH_i(t)$$

- T_{ii}: vrijeme između uzastopnih prijelaza u i
- X_n je n-to posjećeno stanje; $\{X_n | n=0,1,\ldots\}$
  - To je Markovljev lanac (homogeni)
  - Prijelazne vjerojatnosti su P_{ij}
- Ireducibilnost polu-Markovljevog procesa: ako je njegov homogeni Markovljev lanac ireducibilni

Granični teorem

Teorem 3: Ireducibilni polu-Markovljev proces; $E[T_{ii}] < \infty$

- Za neko stanje j egzistira sljedeći limit

$$p_j = \lim_{t \to \infty} P\{Z(t) = j \mid Z(0) = i\}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

i ne ovisi od početnog stanja

$$p_j = \frac{E[T_j]}{E[T_{jj}]}$$

- $T_j(t)$: vrijeme provedeno u stanju j do trenutka t

$$P\left\{ p_j = \lim_{t \to \infty} \frac{T_j(t)}{t} \mid Z(0) = i \right\} = 1$$

- p_j je udio (vjerojatnost) vremena provedenog u stanju j

Razdioba zauzeća

Teorem 4: Ireducibilni polu-Markovljev proces; $E[T_{ii}] < \infty$.

- Homogeni Markovljev lanac je ergodičan; stacionarna razdioba π

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i P_{ij}, \ j \geq 0; \quad \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$$

- Razdioba zauzeća za polu-Markovljev proces

$$p_j = \frac{\pi_j E[T_j]}{\sum_i \pi_i E[T_i]}, \quad j = 0,1,\ldots$$

- π_j dio prijelaza u stanje j
- $E[T_j]$ prosječno vrijeme provedeno u j
- Vjerojatnost stanja j je proporcionalna s $\pi_j E[T_j]$

Vremensko-kontinuirani Markovljev lanac

Vremensko-kontinuirani proces $\{X(t) | t \geq 0\}$ poprima vrijednosti u $\{0,1,2,\ldots\}$. Kad je u stanju i

- Vrijeme provedeno u stanju i ravna se po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom ν_i
- Kad napušta stanje i on dolazi u stanje j s vjerojatnosti P_{ij} ($\sum_{j \neq i} P_{ij} = 1$)
- Vremenski kontinuirani (homogeni) Markovljev lanac je polu-Markovljev proces s razdiobom

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-\nu_i t}, \quad i, j = 0,1,\ldots$$

- Eksponencijalno vrijeme zauzeća: kontinuirani Markovljev lanac ima Markovljevo svojstvo

Vremenski kontinuirani Markov…(nast.)

- Kad je u stanju i proces prelazi u stanje $j≠i$ brzinom:

$$q_{ij} \equiv \nu_i P_{ij}$$

- Ukupna brzina prijelaza iz stanja i

$$\sum_{j \neq i} q_{ij} = \nu_i \sum_{j \neq i} P_{ij} = \nu_i$$

- Prosječno vrijeme provedeno u stanju i prije samog prijelaza:

$$E[T_i] = 1/\nu_i$$

Vjerojatnost zauzeća

- Nereducibilni i regularni kontinuirani Markovljev lanac
  - Homogeni Markovljev lanac je nereducibilni
  - Broj prijelaza u nekom konačnom vremenskom intervalu je konačan s vjerojatnosti 1 – takav lanac zovemo regularni
- Iz Teorema 3: za neko stanje j postoji

$$p_j = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}, \quad i = 0,1,2,...$$

i ne ovisi od početnog stanja i

- p_j je stacionarna *vjerojatnost zauzeća* stanja j
- p_j je proporcionalno vremenu provedenom u stanju j

Jednadžbe globalne ravnoteže

- Dvije mogućnosti za vjerojatnosti zauzeća:
  - $p_j = 0$, za sve j
  - $p_j > 0$, za sve j i $\Sigma_j p_j = 1$ (npr. slučaj kad je $\lambda > \mu$)
- Jednadžbe globalne ravnoteže

$$p_j \sum_{i \neq j} q_{ji} = \sum_{i \neq j} p_i q_{ij}, \quad j = 0,1,...$$

- Brzina prijelaza iz stanja j = Brzina prijelaza u stanje j
- Ako razdioba $\{p_j | j = 0,1,\dots\}$ zadovoljava JGR, onda je ona *jedinstvena* razdioba zauzeća Markovljevog lanca
- Alternativni oblik JGR:

$$\sum_{j \in S} p_j \sum_{i \notin S} q_{ji} = \sum_{i \notin S} p_i \sum_{j \in S} q_{ij}, \quad S \subseteq \{0,1,...\}$$

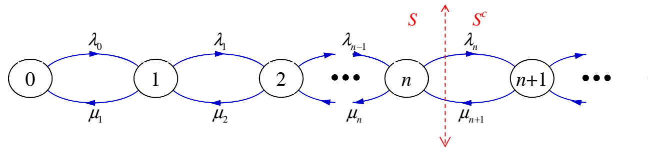
Jednadžbe lokalne ravnoteže

- Jednadžbe lokalne ravnoteže

$$p_j q_{ji} = p_i q_{ij}, \quad i, j = 0,1,...$$

- ☺ Pojednostavljuje izračunavanje stacionarne razdiobe
- ☹ Ne vrijedi za svaki Markovljev lanac
- Primjeri: procesi rađanja i umiranja, reverzibilni Markovljevi lanci

Proces rađanja i umiranja



- Prijelazi samo između susjednih stanja

$$q_{i,i+1} = \lambda_i, \quad q_{i,i-1} = \mu_i, \quad q_{ij} = 0, \ |i-j| > 1$$

- Jednadžbe lokalne ravnoteže

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}, \quad n = 0,1,...$$

- Dokaz: JGR sa $S = \{0,1,\dots,n\}$ daju:

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{\infty} p_j q_{ji} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i q_{ij} \Rightarrow \lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}$$

Proces rađanja i umiranja (nast.)

$$\mu_n p_n = \lambda_{n-1} p_{n-1} \Rightarrow$$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p_{n-1} = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \frac{\lambda_{n-2}}{\mu_{n-1}} p_{n-2} = ... = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1} p_0 = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right] = 1 \Leftrightarrow p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1}, \text{ ako je } \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < \infty$$

- Pomoću JLR odredit vjerojatnosti stanja u ovisnosti od p_0
- Koristiti zakon – (zbroj svih vjerojatnosti = 1) - za određivanje p_0

- Koristiti JLR kod rješavanja problema:
  - Pokazati da su JLR ispunjene, ili
  - Opravdati njihovu ispravnost (npr. reverzibilni proces), ili
  - Pretpostaviti da su ispunjene – "pogoditi" njihov oblik – te riješiti sustav

34457 Informacijske mreže

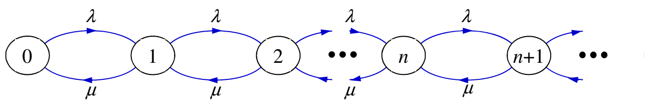
4. predavanje
Ak.god. 2009./2010.
Prof.dr.sc. Mladen Kos

Teme

- Markovljevi lanci
- Red M/M/1
- PASTA
- Redovi M/M/*
- Erlangovi modeli

Red M/M/1

- Dolazni proces: Poisson s parametrom λ
- Vrijeme posluživanja: iid, eksponencijalna razdioba s parametrom μ
- Vremena posluživanja i međudolazna vremena: nezavisni
- Jedan poslužitelj
- Beskonačni prostor čekanja
- $N(t)$: broj korisnika u sustavu u trenutku t (stanje)



Eksponencijalne slučajne varijable

Primjer: Zadane su s.v. X i Y:
- X: eksponencijalna s.v. s parametrom λ
- Y: eksponencijalna s.v. s parametrom μ
- X, Y: nezavisne s.v.

Dokazati:
1. $\min\{X, Y\}$: eksponencijalna s.v. s parametrom $\lambda + \mu$
2. $P\{X<Y\} = \lambda/(\lambda + \mu)$

Ovaj rezultat koristimo za opis reda M/M/1 pomoću vremenski-kontinuiranog Markovljevog lanca

- Dokaz:

$$P\{\min\{X,Y\} > t\} = P\{X > t, Y > t\} = \\ = P\{X > t\}P\{Y > t\} = \\ = e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = e^{-(\lambda+\mu)t} \Rightarrow$$
$$P\{\min\{X,Y\} \le t\} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P\{X < Y\} = \int_0^\infty \int_0^y f_{XY}(x,y)\, dx\, dy = \\ = \int_0^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mu e^{-\mu y}\, dx\, dy = \\ = \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} \int_0^y \lambda e^{-\lambda x}\, dx\, dy = \\ = \int_0^\infty \mu e^{-\mu y}(1 - e^{-\lambda y})\, dy = \\ = \int_0^\infty \mu e^{-\mu y} dy - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\int_0^\infty (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)y} dy = \\ = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

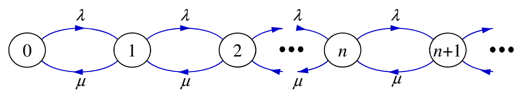
Red M/M/1: Markovljev lanac

- Prijelazi u skupu $\{N(t): t \ge 0\}$ su potaknuti dolascima i odlascima
- $\{N(t): t \ge 0\}$ može skakati samo u susjedna stanja

Pretpostavljamo da je proces u trenutku t u stanju i: $N(t) = i \ge 1$
- X_i: vrijeme do sljedećeg dolaska – eksponencijalno s parametrom λ
- Y_i: vrijeme do sljedećeg odlaska – eksponencijalno s parametrom μ
- $T_i = \min\{X_i, Y_i\}$:vrijeme provedeno u stanju i
- T_i : eksponencijalno s parametrom $\nu = \lambda + \mu$ (prethodna stranica)
- $P_{i,i+1} = P\{X_i < Y_i\} = \lambda/(\lambda+\mu)$, $P_{i,i-1} = P\{Y_i < X_i\} = \mu/(\lambda+\mu)$
- $P_{01}=1$, a T_0 eksponencijalno s parametrom λ
- $\{N(t): t \ge 0\}$ vremensko-kontinuirani Markovljev lanac:

$$q_{i,i+1} = \nu_i P_{i,i+1} = \lambda,\ i \ge 0$$
$$q_{i,i-1} = \nu_i P_{i,i-1} = \mu,\ i \ge 1$$
$$q_{ij} = 0,\ \ |i-j| > 1$$

Red M/M/1: stacionarne razdiobe



- Proces rađanja i umiranja → JLR

$$\mu p_n = \lambda p_{n-1} \Rightarrow$$
$$p_n = \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1} = \rho p_{n-1} = \ldots = \rho^n p_0$$

- Normalizacijska konstanta

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right] = 1 \Leftrightarrow p_0 = 1 - \rho, \text{ za } \rho < 1$$

- Stacionarna razdioba

$$p_n = \rho^n (1-\rho), \quad n = 0, 1, \ldots$$

Red M/M/1 (nast.)

- Prosječni broj korisnika u sustavu

$$N=\sum_{n=0}^{\infty} np_n=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n=(1-\rho)\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}=(1-\rho)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)$$

$$=(1-\rho)\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)=\rho(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2}=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

- Primjenom Littleovog teorema dobivamo prosječno kašnjenje po korisniku (čekanje+posluživanje)

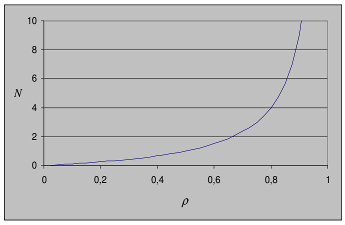
$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

- Prosječno vrijeme čekanja i broj korisnika u redu (nije uključeno posluživanje)

$$W=T-\frac{1}{\mu}=\frac{\rho}{\mu-\lambda}\quad \text{i}\quad N_Q=\lambda W=\frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Red M/M/1 (nast.)

- $\rho = \lambda/\mu$: iskoristivost
- Dugoročno gledajući ρ je udio vremena zauzeća poslužitelja
- $\rho = 1 - p_0$: vrijedi za svaki M/G/1
- Uvjet stabilnosti: $\rho < 1$
- Brzina dolazaka λ mora biti manja od brzine posluživanja μ



Red M/M/1: vremensko-diskretni pristup

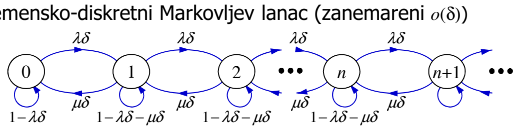
- Promatramo vremenske trenutke 0, δ, 2δ,... (δ je proizvoljno mali)
- Za proces diskretan u vremenu $N_k = N(k\delta)$ stacionarne vjerojatnosti su

$$\lim_{t\to\infty} P\{N(t)=n\}=\lim_{k\to\infty} P\{N_k=n\}$$

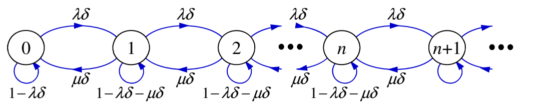
- Prijelazne vjerojatnosti su

$$P_{00}=1-\lambda\delta+o(\delta)$$
$$P_{ii}=1-\lambda\delta-\mu\delta+o(\delta),\quad i\ge 1$$
$$P_{i,i+1}=\lambda\delta+o(\delta),\quad i\ge 0$$
$$P_{i,i-1}=\mu\delta+o(\delta),\quad i\ge 0$$
$$P_{ij}=o(\delta),\quad |i-j|>1$$

- Vremensko-diskretni Markovljev lanac (zanemareni $o(\delta)$)



Red M/M/1: vremensko-diskretni (nast.)



- Vremensko-diskretni proces rađanja i umiranja → JLR:

$$[\mu\delta+o(\delta)]\pi_n=[\lambda\delta+o(\delta)]\pi_{n-1}\Rightarrow$$

$$\pi_n=\frac{\lambda\delta+o(\delta)}{\mu\delta+o(\delta)}\pi_{n-1}=\cdots=\left[\frac{\lambda\delta+o(\delta)}{\mu\delta+o(\delta)}\right]^n\pi_0$$

- Uzmimo limes $\delta\to 0$:

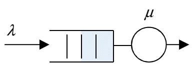
$$\lim_{\delta\to 0}\pi_n=\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{\lambda\delta+o(\delta)}{\mu\delta+o(\delta)}\right]^n\lim_{\delta\to 0}\pi_0\ \Rightarrow\ p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

- Gotovo!

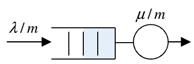
Prijelazne vjerojatnosti

- A_k: broj korisnika došlih u sustav u intervalu $I_k=(k\delta, (k+1)\delta]$
- D_k: broj korisnika otišlih iz sustava u intervalu $I_k=(k\delta, (k+1)\delta]$
- Prijelazne vjerojatnosti P_{ij} ovisne o uvjetnim vjerojatnostima: $Q(a,d\mid n) = P\{A_k=a, D_k=d \mid N_{k-1}=n\}$
- Izračunati $Q(a,d\mid n)$ pomoću statistike dolazaka i odlazaka
- Koristiti Taylorov razvoj: $e^{-\lambda\delta} = 1-\lambda\delta+o(\delta)$ i $e^{-\mu\delta} = 1-\mu\delta+o(\delta)$
- Poissonovi dolasci: $P\{A_k\ge 2\} = o(\delta)$
- Vjerojatnost 0 dolaska i 0 odlaska u I_k je $e^{-\lambda\delta}e^{-\mu\delta} = 1-\lambda\delta-\mu\delta+o(\delta)$
- Vjerojatnost više od 1 dolaska (odlaska) u I_k je $o(\delta)$
- Pokazati: vjerojatnost pojave više od jednog događaja (dolazaka ili odlazaka) u I_k je $o(\delta)$
- ☺ Detaljnije u navedenim knjigama

Primjer: usporavanje



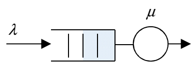
$$N=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$
$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$
$$W=\frac{\rho}{\mu-\lambda}=\frac{\lambda/\mu}{\mu-\lambda}$$

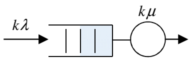


$$N'=\frac{\rho'}{1-\rho'}=\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}=N$$
$$T'=\frac{N'}{\lambda/m}=\frac{m}{\mu-\lambda}=mT$$
$$W'=\frac{\rho'}{\mu/m-\lambda/m}=\frac{m(\lambda/\mu)}{\mu-\lambda}=mW$$

- M/M/1: usporavanje dolazaka i brzine posluživanja za faktor $m > 1$
- Faktori iskoristivosti ρ za oba su sustava isti ⇒ stacionarne razdiobe su jednake, prosječni broj paketa u sustavu ostaje isti
- Kašnjenje u sporijem sustavu je m puta veće
- Iako je prosječni broj paketa u sustavu jednak, paketi se u prvom sustavu brže kreću

Primjer: ubrzavanje



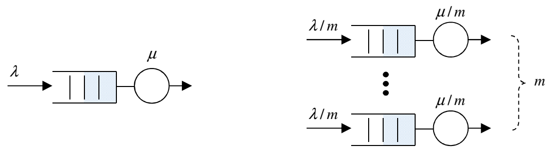


$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$
$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$
$$W = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda/\mu}{\mu-\lambda}$$

$$N' = \frac{\rho'}{1-\rho'} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = N$$
$$T' = \frac{N'}{k\lambda} = \frac{1}{k(\mu-\lambda)} = T/k$$
$$W' = \frac{\rho'}{k\mu-k\lambda} = \frac{\lambda/\mu}{k(\mu-\lambda)} = W/k$$

- M/M/1: ubrzavanje dolazaka i brzine posluživanja za faktor $k > 1$
- Faktori iskoristivosti ρ za oba su sustava isti $\Rightarrow$ stacionarne razdiobe su jednake, prosječni broj paketa u sustavu je jednak
- Kašnjenje u bržem sustavu je k puta manje
- Iako je prosječni broj paketa u sustavu jednak, paketi se u drugom sustavu kreću brže

Primjer: statistički MUX vs. TDM



$$T' = \frac{m}{\mu-\lambda} = mT$$

- Prijenosi se m iid Poissonova toka brzine λ/m; link kapaciteta 1; duljine paketa iid, eksponencijalna razdioba s parametrom (prosječno trajanje prijenosa) $1/\mu$. Kad se tokovi stope u jedan Poissonov tok (stat-mux) brzine λ, prosječno kašnjenje po paketu je $T = 1/(\mu - \lambda)$
- TDM ili FDM: podijeliti link na m kanala svaki kapaciteta $1/m$ i dodijeliti po jedan kanal svakom prometnom toku
- Kašnjenje u svakom "redu" M/M/ 1 postaje m puta veće
- Koje su prednosti TDM ili FDM nad statističkim multipleksiranjem?

Svojstvo PASTA

- Markovljev lanac je "stacionaran" ili je u "stacionarnom stanju":
  - Proces starta uz stacionarnu razdiobu, ili
  - Proces se odvija kroz beskonačno vrijeme $t \to \infty$
- Vjerojatnost da je u nekom trenutku t proces u stanju i jednaka je stacionarnoj vjerojatnosti

$$p_i = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = i\} = \lim_{t\to\infty} \frac{T_i(t)}{t}$$

- Pitanje: Za red M/M/1 zadani t je vrijeme dolaska: kolika je vjerojatnost da je $N(t) = i$?
- Odgovor: PASTA - Poisson Arrivals See Time Averages!
- ☺ PASTA je jedno od najvažnijih svojstava redova čekanja. Akronim PASTA treba pisati velikim, a ne malim slovima; *pasta* (talijanskog porijekla) je posebno važna u kulinarskim znanostima!

Svojstvo PASTA (nast.)

- Stacionarne vjerojatnosti:

$$p_n = \lim_{t\to\infty} P\{N(t) = n\}$$

- Stacionarne vjerojatnosti zauzeća do dolaska:

$$a_n = \lim_{t\to\infty} P\{N(t^-) = n \mid \text{dolazak u } t\}$$

- Trenutak t^- označava trenutak "točno prije t" (neposredno prije t)
- Pretpostavka LAA (Lack of Anticipation Assumption): buduća međudolazna vremena i vremena posluživanja prethodno pristiglih korisnika su neovisna
- Teorem: Sustav posluživanja zadovoljava LAA:
  1. Ako je dolazni proces Poissonov:

$$a_n = p_n, \quad n = 0, 1, \ldots$$

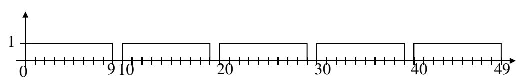
  2. Poissonov proces je jedini proces s tim svojstvom (nužan i dovoljan uvjet)

Svojstvo PASTA (nast.)

Može li se PASTA primijeniti na sve procese?

Primjer:

- Deterministički dolasci svakih 10 s
- Determinističko posluživanja trajanja 9 s
- Do dolaska: sustav je uvijek prazan $a_1 = 0$
- Prosječno vrijeme s jednim korisnikom u sustavu: $p_1 = 0.9$



- "Korisnički" prosjeci nisu jednaki vremenskim prosjecima ($a_1 \neq p_1$)
- Ništa ne pomaže, proces mora biti Poissonov!

Svojstvo PASTA: dokaz

- Definiramo $A(t, t+\delta)$: dolazak se zbio u intervalu $[t, t + \delta)$
- Ako korisnik dolazi u t, vjerojatnost da će naći sustav u stanju n:

$$P\{N(t^-) = n \mid \text{dolazak u } t\} = \lim_{\delta\to 0} P\{N(t^-) = n \mid A(t, t+\delta)\}$$

- $A(t, t+\delta)$ je nezavisan od stanja sustava prije vremena t, $N(t^-)$
  - $N(t^-)$ određen vremenom dolazaka $< t$, i korespondentnim vremenima posluživanja
  - $A(t, t+\delta)$ nezavisan od dolazaka $< t$ [Poisson]
  - $A(t, t+\delta)$ nezavisan od vremena posluživanja pridošlih korisnika $< t$ [LAA]

$$a_n(t) = \lim_{\delta\to 0} P\{N(t^-) = n \mid A(t, t+\delta)\} = \lim_{\delta\to 0} \frac{P\{N(t^-) = n, A(t, t+\delta)\}}{P\{A(t, t+\delta)\}}$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \frac{P\{N(t^-) = n\} P\{A(t, t+\delta)\}}{P\{A(t, t+\delta)\}} = P\{N(t^-) = n\}$$

$$a_n = \lim_{t\to\infty} a_n(t) = \lim_{t\to\infty} P\{N(t^-) = n\} = p_n$$

Svojstvo PASTA: intuitivni dokaz

- t_a i t_r: slučajno odabrano vrijeme dolaska i vrijeme promatranja
- Dolazni procesi prije t_a i t_r su *stohastički* identični procesi
  - Obje razdiobe vjerojatnosti vremena prvog dolaska prije t_a i prije t_r su eksponencijalne s parametrom λ
  - Poopćenjem na ostale dolaske (drugi, treći,...) prije t_a i t_r daje isti rezultat
- Stanje sustava u nekom trenutku t ovisi *samo* o dolascima (i pripadnim vremenima posluživanja) prije t
- Budući da su dolazni procesi prije vremena dolaska t_a i prije slučajnog vremena promatranja t_r identični, oni jednako "vide" stanje sustava

☺Za rigorozni dokaz vidjeti navedenu literaturu!

Svojstvo PASTA nije ispunjeno

Primjer 1: Dolasci nisu Poissonovi
- Međusobno nezavisna (iid) međudolazna vremena, ravnaju se po jednolikoj razdiobi između 2 i 4 s
- Vrijeme posluživanja je determinističko: 1 s
- Neposredno prije dolaska: sustav je uvijek prazan, $a_1 = 0$
- $\lambda = 1/3,\ T = 1 \ \rightarrow\ N = T\lambda = 1/3 \ \rightarrow\ p_1 = 1/3$

Primjer 2: LAA nije zadovoljen
- Poissonovi dolasci, međudolazna vremena T_i
- Vrijeme posluživanja korisnika i: $S_i = \alpha T_{i+1}$, $\alpha < 1$
- Do dolaska: sustav je uvijek prazan, $a_1 = 0$
- Prosječno vrijeme u kojem je u sustavu jedan korisnik: $p_1 = \alpha$

☺ Ovo su primjeri svojstva poznatog pod imenom anti-PASTA. I ovdje, akronim anti-PASTA ne treba miješati s talijanskim izrazom *antipasto* (predjelo) iz kulinarskih znanosti!

Svojstvo PASTA: razdiobe odlaska

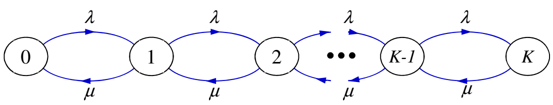
- Stacionarne vjerojatnosti broja korisnika u sustavu neposredno nakon odlaska:

  $d_n = \lim_{t\to\infty} P\{X(t^+) = n \mid \text{odlazak u } t\}$
- Uz vrlo općenite pretpostavke:
  - $N(t)$ se mijenja za jedinične inkremente (to je uvije ispunjeno kod stabilnog reda M/M/1, $\rho < 1$)
  - Postoji limes za a_n i d_n
- $a_n = d_n$, n=0,1,... (npr. jedan ode ⇒ jedan dođe)
- U stacionarnom stanju, sustav izgleda stohastički identičan za dolazećeg i odlazećeg korisnika
- Poissonovi dolasci + LAA: u stacionarnom stanju sustav je stohastički identičan i za dolazećeg i za odlazećeg korisnika, a jednako ga vidi i promatrač koji ga promatra u nekom proizvoljnom vremenu

Redovi M/M/*

- Poissonov dolazni proces
  - Međudolazna vremena: iid, eksponencijalna
- Vremena posluživanja: iid, eksponencijalna
- Vremena posluživanja i međudolazna vremena: nezavisna
- $N(t)$: broj korisnika u sustavu u t (stanje)
- $\{N(t): t \geq 0\}$ može se modelirati kao vremensko-kontinuirani ili vremensko-diskretni Markovljev lanac
- Brzine prijelaza između stanja ovise o svojstvima sustava
- Svojstvo PASTA je uvijek zadovoljeno

Red M/M/1/K: sustav s gubicima



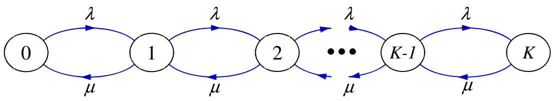
- M/M/1 s konačnim prostorom za čekanje
  - Najviše K korisnika u sustavu
  - Korisnik nakon dolaska nalazi K korisnika u sustavu te je odbačen
- Stacionarna razdioba

$$p_n = \rho^n p_0,\ n = 1,2,\ldots,K$$
$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

- Uvjet stabilnosti: uvijek stabilan – čak i kad je $\rho \geq 1$
- Vjerojatnost gubitka – pomoću svojstva PASTA:

$$P\{\text{gubitak}\} = P\{N(t) = K\} = \frac{\rho^K(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}}$$

Red M/M/1/K (dokaz)



- Isto kao i kod M/M/1:

$$p_n = \rho^n p_0,\ n = 1,2,\ldots,K$$

- Normalizacijska konstanta:

$$\sum_{n=0}^{K} p_n = 1 \Rightarrow p_0 \sum_{n=1}^{K} \rho^n = 1 \Rightarrow p_0 \frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho} = 1$$
$$\Rightarrow p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

- Generalizacija: tzv. *okrnjeni Markovljev lanac*

Okrnjeni Markovljev lanac

- $\{X(t): t \geq 0\}$ vremenski-kontinuirani Markovljev lanac sa stacionarnom razdiobom $\{p_i: i = 0,1,\ldots\}$
- S podskup od $\{0,1,\ldots\}$: skup stanja; promatramo samo proces u S
  - Eliminirati sva stanja koja nisu u S
  - Staviti $\tilde{q}_{ji} = \tilde{q}_{ij} = 0, \quad j \in S, i \notin S$
- $\{Y(t): t \geq 0\}$: resultirajući okrnjeni proces; ako je ireducibilan:
  - Vremensko-kontinuirani Markovljev lanac
  - Stacionarna razdioba

$$\tilde{p}_j = \begin{cases} \dfrac{p_j}{\sum_{i \in S} p_i} & \text{za } j \in S \\ 0 & \text{za } j \notin S \end{cases}$$

- *U nekim slučajevima treba provjeriti ovisnost o sustavu*

Okrnjeni Markovljev lanac (nast.)

- Mogući dovoljni uvjet

$$p_j \sum_{i \notin S} q_{ji} = \sum_{i \notin S} p_i q_{ij}, \quad j \in S$$

- Provjera razdiobe okrnjenog procesa

1. Zadovoljava JGR

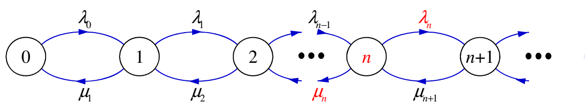
$$p_j \sum_i q_{ji} = \sum_i p_i q_{ij} \Rightarrow p_j \sum_{i \in S} q_{ji} = \sum_{i \in S} p_i q_{ij} \Rightarrow \frac{p_j}{p(S)} \sum_{i \in S} q_{ji} = \sum_{i \in S} \frac{p_i}{p(S)} q_{ij}$$
$$\Rightarrow \tilde{p}_j \sum_{i \in S} q_{ji} = \sum_{i \in S} \tilde{p}_i q_{ij} \Rightarrow \tilde{p}_j \sum_{i \in S} \tilde{q}_{ji} = \sum_{i \in S} \tilde{p}_i \tilde{q}_{ij}, \ \ j \in S$$

2. Zadovoljava normalizacijski zakon:

$$\sum_{i \in S} \tilde{p}_i = \sum_{i \in S} \frac{p_i}{p(S)} = \frac{p(S)}{p(S)} = 1, \quad p(S) \equiv \sum_{i \in S} p_i$$

- Dovoljni uvjet: bolje je koristiti JLR!
- Relacija s pojmom "reverzibilnost"
- Ispunjeno za multidimenzionalne lance

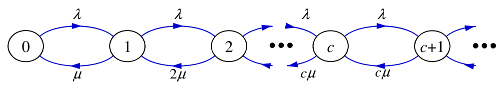
Red M/M/1: sustav s promjenljivim brzina



- Međudolazna vremena: neovisna, eksponencijalna, s parametrom λ_n kad se nalazi u stanju n
- Vremena posluživanja: neovisna, eksponencijalna, s parametrom μ_n kad se nalazi u stanju n
- Vremena posluživanja i međudolazna vremena: neovisna
- $\{N(t): t \geq 0\}$ je proces rađanja i umiranja
- Stacionarna razdioba:

$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}, n \geq 1 \qquad p_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}\right]^{-1}$$

Red M/M/c

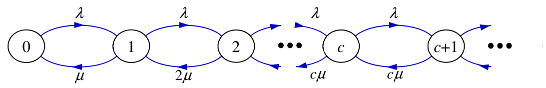


- Poissonovi dolasci brzine λ
- Eksponencijalna vremena posluživanja s parametrom μ
- c poslužitelja (kanala u kontekstu npr. prijenosnih mreža)
- Pridošli korisnik nalazi n korisnika u sustavu, pa vrijedi
  - $n < c$: on se uputi na neki slobodni poslužitelj
  - $n \geq c$: on se uključi u red čekanja – svi poslužitelji su zauzeti
- Proces rađanja i umiranja s brzinom umiranja ovisnom o stanju

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq c \\ c\mu, & n \geq c \end{cases}$$

[Vrijeme provedeno u stanju n prije skoka u stanje n - 1 je minimum od B_n= min$\{n,c\}$, eksponencijalno s parametrom μ]

Red M/M/c (nast.)



- Jednadžbe lokalne ravnoteže

$$1 \leq n \leq c: \quad p_n = \frac{\lambda}{n\mu} p_{n-1} = \cdots = \frac{\lambda}{n\mu} \frac{\lambda}{(n-1)\mu} \cdots \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0, \qquad \rho \equiv \frac{\lambda}{c\mu}$$
$$n > c: \quad p_n = \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c} p_c = \frac{1}{c!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c \left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^{n-c} p_0 = \frac{c^c}{c!}\left(\frac{\lambda}{c\mu}\right)^n p_0 = \frac{c^c \rho^n}{c!} p_0$$

- Normalizacija

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow p_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \sum_{k=c}^{\infty} \rho^{k-c}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

Red M/M/c (nast.)

- Vjerojatnost čekanja – pridošli korisnik nalazi zauzete sve poslužitelje

$$P_Q = P\{\text{čekanje u redu}\} = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = p_0 \frac{(c\rho)^c}{c!} \sum_{n=c}^{\infty} \rho^{n-c} = \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} p_0$$

- Erlang-C formula: koristi se u telefoniji (komutacija kanala)
  - Pozivi dolaze brzinom λ; vrijeme zauzeća (trajanje) poziva je eksponencijalno sa srednjim trajanjem $1/\mu$
  - c raspoloživi broj kanala (npr. prijenosnog sustava)
  - Poziv koji naiđe na zauzeta c kanala, neprestano pokušava pronaći slobodni kanal – "ostaje u redu"
- Red M/M/c/c: sustav s gubicima - kasnije ćemo detaljnije izučavati
  - Poziv koji nalazi zauzeta c kanala je blokiran i odbačen (nema čekanja)
  - Erlang-B formula: koristi se u telefoniji

Red M/M/c (nast.)

- Očekivani broj korisnika u redu čekanja – nisu na posluživanju

$$N_Q = \sum_{n=c}^{\infty}(n-c)p_n = p_0\frac{(c\rho)^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}(n-c)\rho^{n-c} = p_0\frac{(c\rho)^c}{c!}\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$
$$= P_Q(1-\rho)\frac{\rho}{(1-\rho)^2} = P_Q\frac{\rho}{1-\rho}$$

- Prosječno vrijeme čekanja (u redu)

$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = P_Q\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

- Prosječno vrijeme boravka u sustavu (čekanje + posluživanje)

$$T = W + \frac{1}{\mu} = \frac{P_Q}{c\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu} = P_Q\frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$$

- Očekivani broj korisnika u sustavu

$$N = \lambda T = \frac{\lambda P_Q}{c\mu-\lambda} + \frac{\lambda}{\mu} = P_Q\frac{\rho}{(1-\rho)} + c\rho$$

Red M/M/c: primjer – opet stat-MUX

- Komunikacijski link poslužuje c Poissonovih tokova ukupne brzine λ. Link je podijeljen na c odvojenih kanala pri čemu je svakom kanalu pridružen pojedini tok.
- Ako u nekom prometnom toku nema paketa koji čekaju na prijenos, onda se njemu pripadni kanal koristi za prijenos paketa iz nekog drugog toka.
- Prijenosno vrijeme paketa u svakom kanalu ravna se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti $1/\mu$.
- Sustav se može modelirati kao red M/M/c. Prosječno kašnjenje po paketu je

$$T = \frac{P_Q}{c\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

- Pogledajmo sada stat-MUX s jednim kanalom koji ima c puta veći kapacitet. Njega možemo modelirati kao red M/M/1 iste dolazne brzine λ i brzine posluživanja $c\mu$. Prosječno kašnjenje po paketu je sada

Red M/M/c: primjer (nast.)

$$\overline{T} = \frac{\overline{P}_Q}{c\mu-\lambda} + \frac{1}{c\mu}$$

- Kad je ρ puno manji od 1 (slabo opterećen sustav) imamo $P_Q \cong 0, \overline{P}_Q \cong 0$:

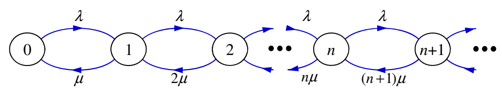
$$\frac{T}{\overline{T}} \cong c$$

- Kad je ρ samo neznatno manji od 1 (jako opterećen sustav) imamo $P_Q \cong 1,\ \overline{P}_Q \cong 1,\ 1/\mu \ll 1/(c\mu-\lambda)$:

$$\frac{T}{\overline{T}} \cong 1$$

- Kod slabog opterećena stat-MUX s c kanal daje gotovo c puta veće kašnjenje od stat-MUX koji kombinira c kanala u jedan veliki (kao kod sustava TDM). Kod velikog opterećenja kašnjenja kod oba sustava su podjednaka.

Red M/M/∞



- Beskonačni broj poslužitelja $\Rightarrow$ nema čekanja u redu
- Red M/M/c uz $c = \infty$, $\Rightarrow$ JLR + normalizacija
- Stacionarna razdioba:

$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}e^{-\lambda/\mu}, \quad n = 0,1,\ldots$$

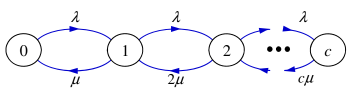
  Poisson brzine λ/μ

- Prosječni broj korisnika i prosječno kašnjenje:

$$N = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

- *Rezultat vrijedi i za red M/G/∞*

Red M/M/c/c



- c poslužitelja, nema prostora za čekanje
- Pridošli korisnik je, kad naiđe na zauzete sve poslužitelje, blokiran (i odbačen)
- Stacionarna razdioba za vjerojatnosti stanja:

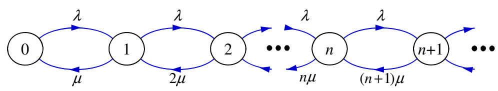
$$p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{c}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right]^{-1}, \quad n = 0,1,\ldots,c$$

- Vjerojatnost blokiranja (svojstvo PASTA) - Erlang-B formula:

$$p_c = \frac{(\lambda/\mu)^c}{c!}\left[\sum_{k=0}^{c}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right]^{-1}$$

- Erlang-B formula se koristi u telefoniji i komutaciji kanala
- *Rezultat vrijedi i za red M/G/c/c*

M/M/∞ i M/M/c/c (dokazi)



- Jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$(n\mu)p_n = \lambda p_{n-1} \Rightarrow p_n = \frac{\lambda}{n\mu}p_{n-1} = \frac{\lambda}{n\mu}\frac{\lambda}{(n-1)\mu}p_{n-2} = \cdots = \frac{\lambda\cdot\lambda\cdots\lambda}{n\mu\cdot(n-1)\mu\cdots\mu}p_0$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}p_0, \quad n = 0,1,\ldots$$

- Normalizacija:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right]^{-1}, \quad \text{za M/M/c/c}$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}\right]^{-1} = e^{-\lambda/\mu}, \quad \text{za M/M/∞}$$

Zbroj eksponencijalnih slučajnih varijabli

- $X_1, X_2,..., X_n$: iid, eksponencijalne s.v. s parametrom λ
- $T = X_1 + X_2 +...+ X_n$
- Funkcija gustoće vjerojatnosti za T:

$$f_T(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$$

[Gama razdioba s parametrima (n, λ)]

- Ako je X_i vrijeme između dolazaka i - 1 i i, tada je T vrijeme do n-tog događaja
- Za proizvoljno mali δ:

$$P\{n\text{-ti dolazak u } [t, t+\delta)\} = \delta f_T(t) = \lambda\delta \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

- (Kumulativna) funkcija razdiobe:

$$P\{t_n \le t\} = \int_0^t \lambda \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda s} ds = 1 - P\{n\text{-ti dolazak nakon } t\}$$

Zbroj eksponencijalnih s.v. (nast.)

Primjer: Poissonovi dolasci brzine λ

- τ_1: vrijeme do dolaska prvog korisnika
- τ_i: i-to međudolazno vrijeme
- $\tau_1, \tau_2,..., \tau_n$: iid, eksponencijalne s.v. s parametrom λ
- $t_n = \tau_1 + \tau_2 +...+ \tau_n$: vrijeme dolaska n-tog korisnika
- t_n se ravna po gama-razdiobi s parametrima (n, λ)

$$f(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0; \quad P\{t_n \le t\} = \int_0^t \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt$$

- Za proizvoljno mali δ:

$$P\{n\text{-ti dolazak u } [t, t+\delta)\} = \delta f_T(t) = \lambda\delta \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}$$

Red M/M/1: vrijeme boravka

- Red M/M/1 – disciplina posluživanja FCFS
- T_i: vrijeme koje korisnik i provede u sustavu (čekanje + posluživanje) – vrijeme boravka ili kašnjenje
- T_i: eksponencijalna razdioba s parametrom μ - λ
- Dokaz 1: direktno izračunavanje funkcije razdiobe vjerojatnosti
- Dokaz 2: korištenjem neke od transformacija (2. predavanje)
- ☺ Dokaz 3: intuitivno – provedite sami!

M/M/1: vrijeme boravka – 1. dokaz

$$P\{T_i > t\} = \sum_{k=0}^{\infty} P\{T_i > t \mid N_i = k\} P\{N_i = k\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P\{D(t_i + t) - D(t_i) \le k\} p_k \quad (1)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{k} e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!} \cdot (1-\rho)\rho^k \quad (2)$$

$$= e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\mu t)^n}{n!} \sum_{k=n}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \quad (3)$$

$$= e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\mu t)^n}{n!} \cdot \rho^n = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \quad (4)$$

$$= e^{-\mu t} e^{\lambda t} = e^{-(\mu - \lambda)t}$$

M/M/1: vrijeme boravka – 1. dokaz

- t_i je vrijeme dolaska i-tog korisnika, a $N_i = N(t_i^-)$ je broj korisnika u sustavu neposredno prije i-tog dolaska
- Jednadžba (1): i-ti korisnik će provesti vrijeme T_i u sustavu, znajući da je dolaskom u sustav naišao na prisutnih k korisnika, samo ako je broj odlazaka u intervalu $(t_i, t_i + t)$ manji od k + 1. $P\{N_i = k\} = p_k$ (PASTA)
- Jednadžba (2): tijekom tog intervala poslužitelj je uvijek zauzet, pa su vremena između odlazaka iid i eksponencijalna s parametrom μ:

$$P\{D(t_i + t) - D(t_i) = n\} = e^{-\mu t} \frac{(\mu t)^n}{n!}, \quad 0 \le n \le k$$

- Jednadžba (3): zamjena redoslijeda sumacija
- Jednadžba (4): koristi se činjenica

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho^k = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k - \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k = \frac{1}{1-\rho} - \frac{1-\rho^n}{1-\rho} = \frac{\rho^n}{1-\rho}$$

M/M/1: vrijeme boravka – 2. dokaz

- N_i je broj korisnika u sustvu neposredno prije i-tog dolaska
- $T_i^{(k)}$ vrijeme boravka u sustavu i-tog korisnika, kad on nalazi k korisnika već u sustavu

$$T_i^{(k)} = S_i + S_{i-1} + ... + S_{i-k+1} + R_{i-k}$$

- $T_i^{(k)}$ je suma od k iid eksponencijalnih s.v.
- S_j je vrijeme posluživanja korisnika j, a $R_{i\text{-}k}$ preostalo vrijeme posluživanja upravo posluživanog korisnika
- $S_i,..., S_{i-k+1}$: iid, eksponencijalne s.v. s parametrom μ
- $R_{i\text{-}k}$: eksponencijalna s.v. s parametrom μ, neovisna od $S_i,..., S_{i-k+1}$
- $T_i = T_i^{(N_i)}$ je suma slučajnih brojeva od iid eksponencijalnih s.v.
- Koristiti funkciju izvodnicu momenata (2. predavanje, str. 2-47)
- ☺ Preporuča se studentu da za vježbu primjeni neku drugu transformaciju

M/M/1: vrijeme boravka – 2. dokaz

$$M_{T_i}(t) = E[e^{tT_i}] = \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{tT_i} \mid N_i = k] P\{N_i = k\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} E[e^{tT_i^{(k)}}] p_k = \sum_{k=0}^{\infty} M_{T_i^{(k)}}(t) p_k$$

- s.v. je eksponencijalna s parametrom μ samo ako je njena funkcija izvodnica momenata $\mu/(\mu - t)$

$$M_{T_i^{(k)}}(t) = M_{S_i}(t) M_{S_{i-1}}(t) \dots M_{S_{i-k+1}}(t) M_{R_{i-k}}(t) = \left(\frac{\mu}{\mu - t}\right)^{k+1}$$

$$M_{T_i}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{\mu - t}\right)^{k+1} (1-\rho)\rho^k = (1-\rho)\frac{\mu}{\mu - t} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu - t}\right)^k$$
$$= \frac{\mu - \lambda}{\mu - t} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}} = \frac{\mu - \lambda}{(\mu - \lambda) - t}$$

O Erlangovim formulama

- Interpretacija u telefoniji (red M/M/c/c):
  - p_n je dio vremena u kojem je n-ti kanal zauzet (stanje n).
  - λ je prosječni broj poziva u jedinici vremena
  - τ (= $1/\mu$) je srednje vrijeme zauzeća kanala.
  - $a = \lambda\tau$ je ponuđeni promet i brojčano se izražava u jedinicama erlang (erl) u čast A.K. Erlanga koji je 1917. prvi izveo formulu za p_n.
- Stacionarne vjerojatnosti - sustav se nalazi u stanju n:

$$p_n = \frac{a^n}{n!}\left[\sum_{k=0}^{c} \frac{a^k}{k!}\right]^{-1}, \quad n = 0, 1, \dots, c$$

- Erlang-B formula - vjerojatnost blokiranja ($n = c$):

$$p_c = \frac{a^c}{c!}\left[\sum_{k=0}^{c} \frac{a^k}{k!}\right]^{-1}$$

O Erlangovim formulama (nast.)

- Erlang-B formula susreće se pod različitim imenima: Erlangova formula gubitaka (ili blokiranja), Erlangova prva formula,...Također se koriste i različite oznake za p_c:
  - U Europi: $E_{1,c}(a)$ ili $E_c(a)$
  - U SAD: $B(c,a)$
- Izraz za p_n zove se i "okrnjena" Poissonova razdioba, Erlangova razdioba gubitaka,...
- a/c je ponuđeni promet po poslužitelju (kanalu) i često se zove intenzitet prometa (= ρ)
- Obavljeni ili preneseni promet a^* je općenito definiran za stacionarno stanje kao srednji broj zauzetih poslužitelja (kanala):

$$a^* = \sum_{n=1}^{c-1} np_n + c\sum_{n=c}^{\infty} p_n$$

- Prva suma odnosi se na korisnike koji se poslužuju ($n < c$), a druga suma govori o činjenici da su svi poslužitelji zauzeti samo ako je najmanje c korisnika u sustavu. (Intuitivno je jasno: $a = a^* + ap_c$ ili $p_c = (a - a^*)/a$, što je i prirodna definicija za p_c).

O Erlangovim formulama (nast.)

- Ako sada uzmemo da je disciplina posluživanja takva da se blokirani korisnici i odbace ($p_n = 0$ za $n > c$), uvrštavanjem izraza za p_n u izraz za a^*, nakon nekih pojednostavljenja (obavite to sami!), dobivamo:

$$a^* = a[1 - p_c]$$

- Dakle, ponuđeni promet a bit će ujedno i obavljeni promet a^* samo ako je broj poslužitelja beskonačan. U stvarnosti je obavljeni promet točno onaj dio ponuđenog prometa koji nije blokiran (izgubljen) od strane sustava
- Zauzetost poslužitelja (faktor iskoristivosti) ρ je definirana kao obavljeni promet po poslužitelju u stacionarnom stanju

$$\rho = \frac{a^*}{c}$$

- U telefoniji je zauzetost ρ mjera stupnja iskorištenja skupine poslužitelja (npr. pretplatničke grupe u komutacijskom sustavu)

O Erlangovim formulama (nast.)

- Vidimo: ako c raste, a a^* raste tako da p_c ostaje konstantan, tada i ρ raste $\Rightarrow$ velike grupe poslužitelja (kanala) su efikasnije od malih. U praksi je taj rezultat obično oslabljen (prvenstveno zbog hardverskih ograničenja): velike jako opterećene grupe poslužitelja su ranjivije na degradaciju posluživanja (tijekom prometnog preopterećenja) od malih grupa poslužitelja s istim blokiranjem p_c ali nižom zauzetosti ρ
- Primjer: slučaj za $c = 1$: poslužitelj alternira između stanja ´zauzet` i ´slobodan`; svako stanje zauzetosti traje prosječno τ (= $1/\mu$), a svaki slobodni interval prosječno $1/\lambda$. Jedan ciklus se sastoji od slobodnog intervala i susjednog zauzetog intervala pa je njegova prosječna duljina $1/\lambda + \tau$, a omjer $\tau/(1/\lambda + \tau) = a/(1 + a)$ je Erlang-B formula za $c = 1$. Dakle, omjer srednjih vrijednosti $\tau/(1/\lambda + \tau)$ pokazuje udio vremena u kojem je poslužitelj zauzet
- Za izračunavanja Erlang-B formule $p_c = E_c(a)$, koristi se rekurzija:

$$E_c(a) = \frac{aE_{c-1}(a)}{c + aE_{c-1}(a)}, \qquad E_0(a) = 1$$

O Erlangovim formulama (nast.)

- Erlang-C formula: pridošli korisnik nalazi zauzete sve poslužitelje i stane u red čekanja, tj. blokirani korisnik je zakašnjen. Vjerojatnost da su svi poslužitelji zauzeti je P_Q (vidi str. 4-27 do 4-31), te ako stavimo $a = c\rho = c\lambda/\mu$ u formule za red M/M/c imamo:

$$P_Q = P\{\text{čekanje u redu}\} = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \frac{a^c}{(c-1)!(c-a)} p_0$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{(c-1)!(c-a)}\right]^{-1}, \qquad 0 \le a < c$$

- Erlang-C formula susreće se pod različitim imenima: Erlangova formula kašnjenja, Erlangova druga formula,...Također se koriste i različite oznake za p_Q:
  - U Europi: $E_{2,c}(a)$
  - U SAD: $C(c,a)$

O Erlangovim formulama (nast.)

- Za razliku od Erlang-B formule, Erlang-C formula ne vrijedi za proizvoljnu funkciju razdiobe vremena posluživanja
- Opet, za razliku od Erlang-B formule, Erlang-C formula vrijedi samo u slučaju kad je ponuđeni promet a manji od broja poslužitelja c (ili ekvivalentno $\rho < 1$)
- Erlang-C formula se ne može primijeniti kad je red čekanja (tj. spremnik) konačan. Naime, u tom slučaju, ako korisnik naiđe na puni red čekanja (puni spremnik) on će biti odbačen i izgubljen
- Na osnovu definicije prenesenog prometa vidimo da je $a^* = a$, ili ekvivalentno: iskoristivost ili zauzetost poslužitelja $\rho = a^*/c$ jednaka je intenzitetu prometa a/c $(= \rho)$: to je intuitivno jasno jer u Erlangovom modelu kašnjenja svi blokirani korisnici idu u red čekanja (koji je beskonačan) i na kraju su svi posluženi
- Za numerička izračunavanja korisna je formula

$$E_{2,c}(a) = \frac{cE_{1,c}(a)}{c - a[1 - E_{1,c}(a)]}$$