INFORMACIJSKE MREŽE
Ak. god. 2011./2012.

Završni ispit - rješenja

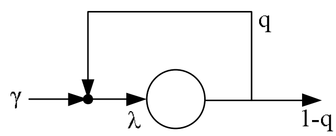
23. siječnja 2012.

Ime i prezime: ______________________________ *JMBAG:* ______________________________

Vlastoručni potpis: ______________________________

Trajanje ispita: 120 minuta
Maksimalan broj bodova: 100
Postupak i rješenje uredno napišite na odvojene papire.

1. **[10]** Jednostavna netrivijalna mreža redova sastoji se od jednog čvora s povratnom vezom (vidi sliku). (a) Napišite prometnu jednadžbu za ukupnu ulaznu brzinu (tok) λ? (b) Ako je b (= $1/\mu$) srednje trajanje posluživanja odredite brzine prometa (tokova) u povratnoj grani i izlazu iz mreže. Koji uvjet mora biti ispunjen da bi mreža bila stabilna?



Rješenje:

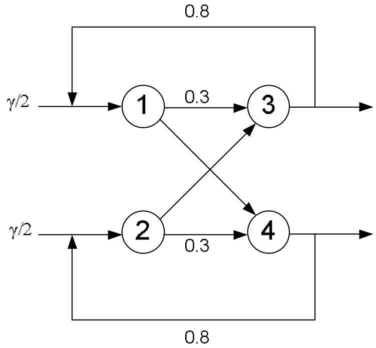
$(a)\ \lambda = \gamma + \lambda q \Rightarrow \lambda = \gamma/(1-q)$

(b) Uvjet za stabilnost sustava: $\rho = \lambda b < 1 \Rightarrow \gamma b < (1-q)$

Prometni tok u povratnoj grani: $\lambda q = \gamma q/(1-q)$

Brzina odlaska iz mreže: $\lambda(1-q) \equiv \gamma$

2. **[10]** Analizirajte mrežu od četiri čvora prikazanu na slici. Paketi ulaze u mrežu u čvorovima 1 i 2 s jednakim brzinama $\gamma/2$. Usmjeravanje je sljedeće: iz čvora 1 paketi ide u čvor 3 s vjerojatnosti 0.3 a u čvor 4 s vjerojatnosti 0.7; iz čvora 2 u čvor 3 ili 4 s vjerojatnosti 0.7 odnosno 0.3. Iz čvora 3 pakeketi se vraćaju u čvor 1 s vjerojatnosti 0.8 a napuštaju mrežu s vjerojatnosti 0.2. Slično je i za čvor 4. Napišite prometne jednadžbe za tu mrežu te odredite ulazne brzine λ_i za sve čvorove i = 1,...,4. Koji uvjet mora biti ispunjen da bi mreža bila stabilna?



Rješenje:

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{2} + 0.8\lambda_3;\quad \lambda_2 = \frac{\gamma}{2} + 0.8\lambda_4;\quad \lambda_3 = 0.3\lambda_1 + 0.7\lambda_2;\quad \lambda_4 = 0.7\lambda_1 + 0.3\lambda_2 \quad \Rightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = 5\gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2.5\gamma$$

Srednja vremena posluživanja $\tau_i = 1/\mu_i$ mogu biti različita, ali sva moraju biti manja od $1/(2.5\gamma)$, tj. $2.5\gamma < \mu_i, i = 1,...,4.$

3. **[10]** Za mrežu iz Zadatka 2 srednja trajanja posluživanja $b_i = 1/\mu_i$ su redom: $b_1 = b_2 = 1$, $b_3 = b_4 = 2$. (a) Kolika je najveća donja granica prosječnog vremena odziva T (tj. prosječnog vremena boravka paketa u mreži)? (b) Koje ograničenje treba postaviti na vanjsku dolaznu brzinu γ pa da vrijeme boravka bude $T < 20$?

Rješenje:

(a) Rješavanjem Zadatka 2 dobivene su ukupne dolazne brzine $\lambda_i = 2.5\gamma$, $i = 1,2,3,4$. Intenziteti prometa su $\rho_1 = \rho_2 = 2.5\gamma$, $\rho_3 = \rho_4 = 5\gamma$. Uvjet za stabilnost je $\gamma < 0.2$.
Ukupni prosječan broj paketa u mreži i prosječno vrijeme boravka paketa iznose:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \frac{5\gamma}{1-2.5\gamma} + \frac{10\gamma}{1-5\gamma}$$

$$T = \frac{N}{\gamma} = \frac{5}{1-2.5\gamma} + \frac{10}{1-5\gamma}$$

T je rastuća funkcija od γ pa se najveća donja granica dobiva uz $\gamma = 0$ i ona je $T > 15$.
Drugi način određivanja granice: srednji broj posjeta svakom čvoru je $v_i = \lambda_i/\gamma = 2.5$, a ukupno potrebno prosječno trajanje posluživanja paketa u čvoru i tijekom njegovog boravka u mreži je $v_i b_i = (\lambda_i b_i)/\gamma = \rho_i/\gamma$. Potrebno ukupno srednje vrijeme posluživanja paketa u svim čvorovima tijekom njegovog boravka u mreži ($N = 4$):

$$\overline{T} = \sum_{i=1}^{N} v_i b_i = \frac{1}{\gamma}\sum_{i=1}^{N} \rho_i = 2.5 + 2.5 + 5 + 5 = 15.$$

(b) Zahtjev $T < 20$ vodi u kvadratnu jednadžbu:

$$50\gamma^2 - 20\gamma + 1 > 0$$

Koja uz uvjet stabilnosti implicira

$$\gamma < \frac{2-\sqrt{2}}{10} \approx 0.0586$$

4. **[15]** Paketi prosječne duljine L [bit/paket] dolaze u komutacijski čvor sukladno Poissonovom procesu sa srednjom brzinom λ [paket/s]. Jedna izlazna linija komutacijskog čvora ima brzinu C [bit/s]. Usporedite slučaj (a) kad su duljine paketa eksponencijalno raspodjeljene sa slučajem (b) kad su duljine paketa fiksne. Kao mjeru usporedbe ovih slučajeva uzmite srednje vrijeme tranzita paketa kroz komutacijski čvor i srednji broj paketa u ulaznom spremniku komutacijskog čvora. Koji od slučajeva daje bolje performanse?

Rješenje:

(a) Kad se duljine paketa ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi (model M/M/1), uz prijenosno vrijeme $\tau = 1/\mu = L/C$, dobivamo:

$$N_{\text{exp}} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda(L/C)}{1-\lambda(L/C)}$$

$$T_{\text{exp}} = \frac{N}{\lambda} = \frac{(L/C)}{1-\lambda(L/C)}$$

(b) Kad su paketi stalne duljine sustav modeliramo kao M/D/1 model. Prijenosno vrijeme je $\tau = 1/\mu = L/C$ a $\sigma^2 = 0$ je u modelu M/G/1:

$$N_{\text{fix}} = N_Q + \rho = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} + \rho = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} =$$

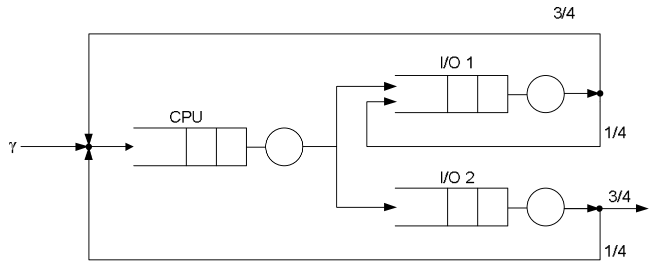
$$= \frac{\lambda(L/C)}{1-\lambda(L/C)} - \frac{\lambda^2(L/C)^2}{2(1-\lambda L/C)} = N_{\text{exp}} - \frac{\lambda^2(L/C)^2}{2(1-\lambda L/C)}$$

$$T_{\text{fix}} = \frac{N}{\lambda} = \frac{\lambda/\mu^2}{2(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} =$$

$$= \frac{(L/C)}{1-\lambda(L/C)} - \frac{\lambda(L/C)^2}{2(1-\lambda L/C)} = T_{\text{exp}} - \frac{\lambda(L/C)^2}{2(1-\lambda L/C)}$$

Vidimo da kad se uspoređuju vrijeme tranzita i broj paketa u komutacijskom sustavu tada uz konstantno vrijeme posluživanja dobivamo bolje performanse nego uz eksponencijalno vrijeme posluživanja.

5. **[15]** Na slici je prikazan računarski sustav u čiji CPU dolaze poslovi sukladno Poissonovom procesu s brzinom γ. Posao se izvodi u CPU sukladno eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim vremenom obrade $1/\mu_1$ a zatim odlazi na posluživanje bilo na I/O1 ili na I/O2 s jednakom vjerojatnosti. Vremena obrade na I/O jedinicama ravnaju se po eksponencijalnim razdiobama sa srednjim trajanjima $1/\mu_2$ odnosno $1/\mu_3$. Nakon prolaska kroz neku I/O jedinicu posao se može vratiti ili u CPU ili napustiti sustav s vjerojatnostima označenim na slici. Izračunajte:
(a) Funkciju gustoće vjerojatnosti $p(n_1,n_2,n_3)$ za cijelu mrežu prema Jacksonovom teoremu;
(b) Ako su $\mu_1 = 8\gamma$ i $\mu_2 = \mu_3 = 4\gamma$ odredite srednji broj poslova u svakom redu;
(c) Izračunajte srednji broj poslova u mreži i prosječno vrijeme koje neki posao provede u mreži.



Rješenje:

λ_1, λ_2, λ_3 su efektivne brzine dolazaka u CPU, I/O1 i I/O2. Prometne jednadžbei:

$$\lambda_1 = \gamma + \frac{3}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_1$$

$$\lambda_1 = \frac{8}{3}\gamma, \quad \lambda_2 = \frac{16}{9}\gamma, \quad \lambda_3 = \frac{4}{3}\gamma$$

(a) $$p(n_1, n_2, n_3)\left(1-\frac{8\gamma}{3\mu_1}\right)\left(1-\frac{16\gamma}{9\mu_2}\right)\left(1-\frac{4\gamma}{3\mu_3}\right)\left(\frac{8\gamma}{3\mu_1}\right)^{n_1}\left(\frac{16\gamma}{9\mu_2}\right)^{n_2}\left(\frac{4\gamma}{3\mu_3}\right)^{n_3}$$

(b)

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1}{3}, \quad \rho_2 = \frac{4}{9}, \quad \rho_3 = \frac{1}{3}$$

$$N_{CPU} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}, \quad N_{I/O1} = \frac{4}{5}, \quad N_{I/O2} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$N = N_{CPU} + N_{I/O1} + N_{I/O2} = \frac{9}{5}$$

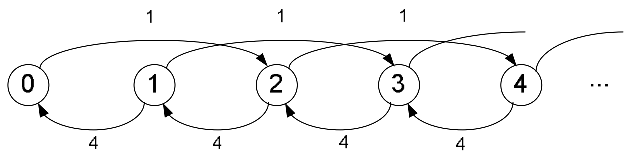
$$T = \frac{N}{\gamma} = \frac{9}{5\gamma}$$

6. **[20]** Sustav posluživanja sastoji se od jednog poslužitelja. Poslovi dolaze u paru (tj. po dva posla) na posluživanje. Njihovi dolasci odgovaraju Poissonovom procesu sa srednjom brzinom 1 par/h, a posluživanje je FIFO. Vrijeme potrebno za posluživanje pojednog para poslova ravna se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 15 minuta.
   (a) Formulirajte model opisanog sustava posluživanja u kojem se pojedini posao (ne par poslova) smatra korisnikom. Skicirajte dijagram stanja i napišite jednadžbe ravnoteže, ali ih ne trebate riješiti.

(b) Formulirajte model opisanog sustava posluživanja u kojem se par poslova smatra korisnikom. Izračunajte ukupno očekivano vrijeme obrade para poslova.

Rješenje:

(a)

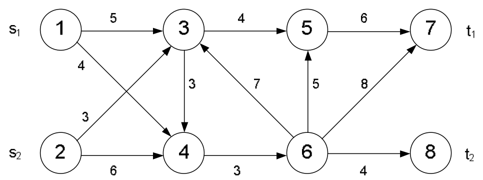


$$\mu p_1 = \lambda p_0,\ \mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1,\ \lambda p_0 + \mu p_3 = (\lambda + \mu)p_2, \ldots, \lambda p_{n\text{-}2} + \mu p_{n+1} = (\lambda + \mu)p_n$$

(b) Model koji odgovara ovom slučaju je $M/E_k/1$, $k = 2$. Dobivamo ga kao specijalni slučaj modela $M/G/1$ u kojem je $\sigma^2 = 1/(k\mu^2)$. Dakle, uz Poissonov ulaz brzine $\lambda = 1$ i Erlangovo posluživanje brzine $\mu = 4/2 = 2$ i $k = 2$ imamo:

$$T = \left(\frac{1+k}{2k}\right)\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{7}{8}$$

7. **[20]** Za mrežu na slici koja ima dva izvorišna i dva odredišna čvora primjenom algoritma Forda i Fulkersona dredite: (a) raspodjelu tokova u svakoj iteraciji, (b) vrijednost maksimalnog toka i (c) grane u minimalnom rezu. [*Uputa*: mrežu treba reducirati na mrežu s jednim izvorištem (odredištem) uvođenjem novog izvorišta (odredišta) koji je povezan s postojećim izvorištem (odredištem).]



Rješenje:

(a) Postoji više mogućih rješenja.
(b) 7
(c) {3,5},{4,6}

Korisne formule:

$\sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$, za svaki $x \neq 1$; $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, za $|x| < 1$

Poissonova razdioba: $P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k = 0,1,2,...$

Erlang-B: $B(c,a) = p_c = \frac{a^c}{c!} \left[\sum_{k=0}^{c} \frac{a^k}{k!} \right]^{-1}$, $a = \frac{\lambda}{\mu}$

Erlang-C: $C(c,a) = P_Q = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \frac{a^c}{(c-1)!(c-a)} p_0$, $p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{(c-1)!(c-a)} \right]^{-1}$, $0 \leq a < c$

M/M/1: $p_n = (1-\rho)\rho^n$, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}, \qquad N_Q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}, \qquad W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P\{T > t\} = e^{-t/T} \ (t \geq 0), \quad P\{W > t\} = \rho e^{-t/T} \ (t \geq 0)$$

M/M/c/K (ne treba u ovoj zadaći!):

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{a}{c}$$

$$1 \leq n \leq c: \quad p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 = \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0$$

$$c < n \leq K: \quad p_n = \frac{c^c}{c!} \left(\frac{\lambda}{c\mu} \right)^n p_0 = \frac{c^c \rho^n}{c!} p_0$$

$$n > K: \quad p_n = 0$$

$$\rho \neq 1: \quad p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \left(\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

$$\rho = 1: \quad p_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} (K-c+1) \right]^{-1}$$

M/G/1 (Pollaczek-Khintchine):

$$N_Q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}; \quad N = N_Q + \rho; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$$

M/D/1: Pollaczek-Khinchinove formule za M/G/1 uz $\sigma^2 = 0$.