TEORIJA PROMETA

Skripta auditornih vježbi

Zagreb 2001

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Svaki put kada počinjemo proučavati neki kolegij na našem studiju, pitamo se koji je smisao kolegija i zašto baš tu materiju moramo učiti? Na sreću, Teorija prometa kao i većina drugih kolegija na našem studiju ima smisla. Na žalost, smisao uočimo tek dugo vremena nakon što položimo ispit. Smisao ovog uvodnog poglavlja je unaprijed definirati cilj kako ne bismo besciljno lutali brojnim stranicama ove skripte. Za početak ćemo se podsjetiti nekih osnovnih pojmova koje smo upoznali tijekom protekla dva semestra. Kasnije ćemo se upoznati s aktualnim načinima (tehnikama) prijenosa informacije, te s osnovnim mehanizmima za kontrolu prometa u mreži.

1.1 Promet i teorija prometa

Jedan od ciljeva ovog kolegija je ne pretvoriti ga u filozofiju. Stoga ćemo za sve pojmove s kojima ćemo se susretati davati intuitivne definicije. Jedna od prvih nepoznanica s kojom se susrećemo je pojam prometa. *Promet* (*traffic*) možemo jednostavno definirati kao kretanje informacije određenim komunikacijskim kanalima. Prometom se naziva i kvantitativna mjera kretanja informacije. Ta je mjera često izražena prosječnom količinom informacije koja "prostruji" određenim prijenosnim kanalom u jedinici vremena ili prosječnim zauzećem komunikacijskog kanala.

Teorija prometa (*TeleTraffic Theory*) je znanstvena disciplina koja proučava promet. Ona pronalazi matematičke modele koji najvjernije opisuju promet u telekomunikacijskim mrežama. Promet se ne proučava iz puke znatiželje. Proučavanje za cilj ima pronalaženje metoda za *dimenzioniranje* telekomunikacijske opreme i upravljanje prometom. Pošto još ne znamo ništa o prometu u mreži, ovdje možemo povući paralelu s cestovnim prometom. Tu vrstu prometa proučavamo kako bismo mogli planirati kapacitete pojedinih cestovnih dionica u cilju smanjenja prometnih gužvi, odnosno minimiziranja vremena potrebnog za putovanje. Slični modeli koje koristimo u analizi prometa u telekomunikacijskim mrežama koriste se u analizi cestovnog prometa.

Teorija prometa koristi znanja teorije vjerojatnosti i stohastičkih procesa, te ih primjenjuje ih na različite tehnike prijenosa informacije. Cilj je dvojak: dimenzioniranje opreme i odabir metoda za upravljanje prometom.

Jedan tipičan primjer dimenzioniranja je problem određivanja kapaciteta pristupnog voda za udaljeni pretplatnički stupanj (RSS - *Remote Subscriber System*):
Neko udaljeno mjesto ima N telefonskih pretplatnika. Pretpostavimo da znamo prosječni intenzitet dolazaka zahtjeva za uspostavu poziva i prosječno vrijeme trajanja telefonskog poziva. Postavlja se pitanje koliko kanala nam je potrebno (koliki kapacitet) na pristupnom vodu tako da samo 1% svih pokušaja uspostave poziva bude odbačeno zbog nedostatka kapaciteta? Ovaj problem rješavamo poznatom Erlang-B formulom o kojoj ćemo kasnije dosta govoriti.

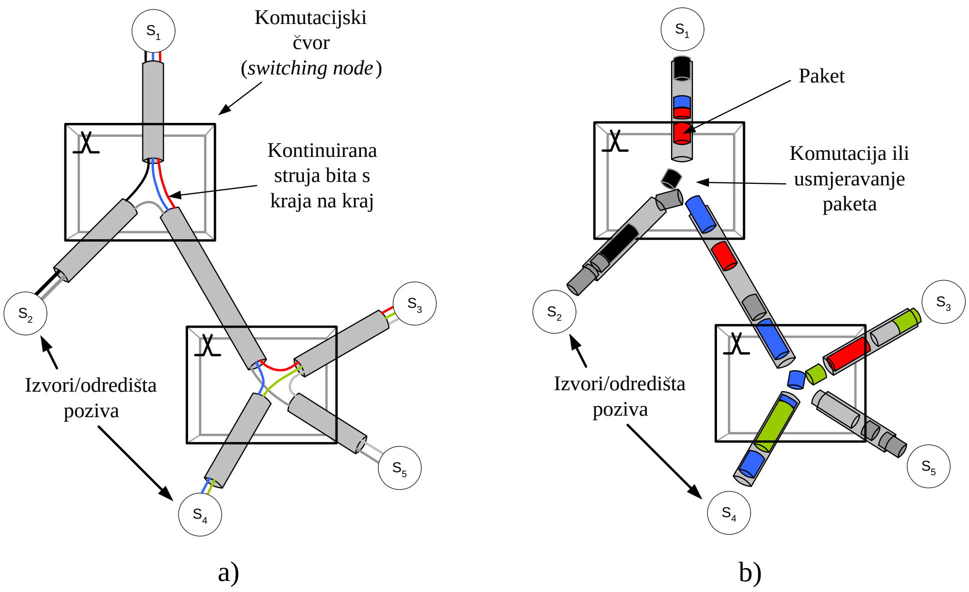
Upravljanje prometom je korištenje mehanizama kontrole protočnosti i usmjeravanja informacije s ciljem minimiziranja opterećenosti svih dionica u mreži, kašnjenja prijenosa i gubitka informacije u mreži. Bitna komponenta upravljanja prometom je usmjeravanje i razvrstavanje prometa. U cestovnom prometu se u vrijeme prometnih gužvi spora teretna vozila usmjeravaju na alternativne putove i tako se olakšava promet putničkih vozila. Slično se događa i u telekomunikacijskim mrežama. Promet visokog prioriteta koji ne trpi veliko kašnjenje (glas, video) se usmjerava kraćim rutama, dok se Internet promet, koji je nižeg prioriteta, usmjerava duljim rutama jer vrijeme dostave te informacije nije kritičan parametar.

Druga bitna komponenta upravljanja prometom je i odabir protokola koji kontroliraju promet. Ti protokoli se najvećim dijelom bave niskoprioritetnim prometom poput WWW Internet prometa. Ova vrsta prometa nema garancija na vrijeme dostave i protočnost. Za kontrolu te vrste prometa se koristi *Transmission Control Protocol* (TCP). Taj protokol pokušava slati informaciju u mrežu točno onim intenzitetom kojeg u tom trenutku mreža može primiti. Na taj način se izbjegava zagušenje u mreži i veliki gubitak informacije. O ovim problemima će biti dosta govora pri kraju skripte.

1.2 Mreže s komutacijom kanala i paketske mreže

PSTN (*Public Switched Telephone Network*), telefonska mreža, je primjer *mreže s komutacijom kanala* (*circuit switched network*). Prilikom uspostave poziva u takvoj se mreži rezervira fiksan prijenosni kapacitet s kraja na kraj (*end-to-end*) uzduž unaprijed utvrđene rute (slika 1.1 - a). Taj prijenosni kapacitet ostaje zauzet cijelo vrijeme trajanja poziva, bez obzira da li se šalje informacija (netko govori) ili ne. U digitalnoj telefonskoj mreži se za jedan poziv rezervira fiksan kapacitet od 64 Kb/s - glas se uzorkuje frekvencijom 8 kHz, i svaki uzorak se kodira s 8 bita. Kašnjenje informacije s kraja na kraj u takvoj mreži je fiksno i određeno vremenom prospajanja u komutacijskim čvorovima i propagacijskim kašnjenjem signala.

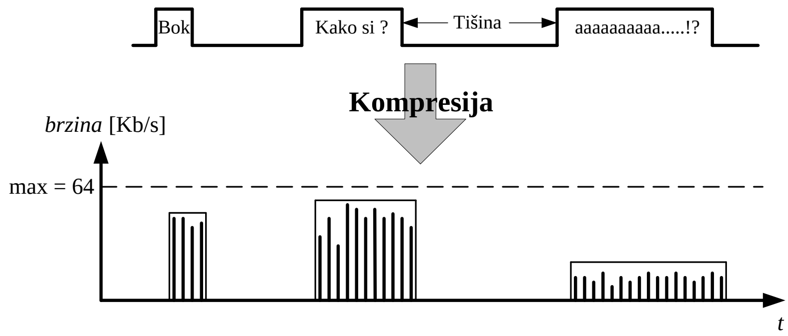
Paketska mreža (*packet network*) zauzima prijenosni kapacitet samo kada ima informacije. Za vrijeme dok izvor informacije generira određeni sadržaj ta se informacija u obliku podatka (zapisa) sprema u podatkovnu jedinicu koju općenito zovemo *paket* (1.1 - b). Paket putuje mrežom do odredišta (po unaprijed poznatoj ili nepoznatoj ruti) skupa s ostalim paketima. Kada stigne na odredište iz njega se ekstrahira poslana informacija.



Slika 1.1: Komutacija kanala (a) i paketska mreža (b)

Jedan od nedostataka mreže s komutacijom kanala je taj što je prijenosni kapacitet zauzet (i popunjen) cijelo vrijeme trajanja poziva. Iz mjerenja je poznato da telefonski razgovor ima veliki broj praznina (tišina). Za vrijeme tišine svi su uzorci glasa jednaki 0 i ne nose nikakvu informaciju. Stoga ih ne bi trebalo niti prenositi jer samo bespotrebno zauzimaju prijenosni kapacitet kanala. Na žalost, klasična telefonska mreža ne raspoznaje ove periode tišine i cijelo vrijeme prenosi beskorisne nule. Jedini način da uklonimo ovaj nedostatak je korištenje paketske mreže.

Internet telefonija je primjer usluge koja se temelji na paketskoj mreži - Internetu. Budući da paketi prenose samo korisnu informaciju (a ne nule) potreban nam je izvor koji će generirati podatkovni tok (niz bitova) samo onda kada je u govoru prisutna informacija. Kao izvor nam služi određeni hardverski ili softverski modul kojeg zovemo kompresor. On će govornu informaciju kodirati na taj način da minimalnom količinom bita kvalitetno opiše glasovnu informaciju. To znači da će zanemarivati nevažne detalje koje optimalni koder ili koder koji se koristi u klasičnoj telefoniji nikako ne bi zanemarili. [1]



Slika 1.2: Kompresija glasovne informacije

Ukoliko imamo ovakav izvor bitovnog toka, onda se generiraju paketi samo onda kada korisnik nešto govori. U vrijeme tišine nema potrebe za generiranjem paketa, pa se ne generiraju. Možemo pretpostaviti da se za vrijeme aktivnog govornog perioda paketi formiraju u pravilnim vremenskim intervalima. Zbog prirode glasa i korištenog kompresora neki od paketa bit će dulji, a neki kraći. To prikazuje slika 1.2.

Na njoj je kvalitativno prikazan efekt kompresije glasovne informacije. Kompresor generira bitovni zapis samo u periodima kada netko nešto govori. Od bitovnog niza se formiraju paketi koji su prikazani okomitim crtama različitih duljina. Duljina crte odgovara duljini paketa. Visina pravokutnog "impulsa" odgovara **prosječnoj** brzini kojom bitovni niz izlazi iz kompresora (u bitovima u sekundi) za vrijeme aktivnog perioda. Jasno je da u slučaju kada govorna informacija ima veći sadržaj (entropiju) kompresor generira više bitova u jedinici vremena (kao u slučaju "Bok" i "Kako si?"), a manje bitova u jedinici vremena za vrijeme trajanja govora koji ne nosi veliki sadržaj ("aaaaaaaaaa...?!"). U svakom slučaju su prosječne brzine koje stvara ovaj izvor prometa manje od one koja bi bila potrebna u slučaju da koristimo jednostavan μ zakon kodiranja govorne informacije (64 Kb/s).

Promatrajmo sada veliki broj ovakvih izvora. Pretpostavimo da njihove pakete moramo prenositi preko jednog zajedničkog kanala. Paketi se u paketskoj mreži prenose na taj način što se u jednom trenutku može prenositi samo jedan paket i to brzinom koja je jednaka kapacitetu kanala. Kapacitet mjerimo brojem prenesenih bitova u sekundi. Što je paket dulji to će se dulje prenositi.

To je i jedna od suštinskih razlika između mreže komutiranih kanala i paketske mreže. Kod komutacije kanala se svi informacijski tokovi prenose "paralelno", dok se kod komutacije paketa u jednom trenutku može prenositi informacija samo jednog izvora, dok svi ostali moraju čekati.

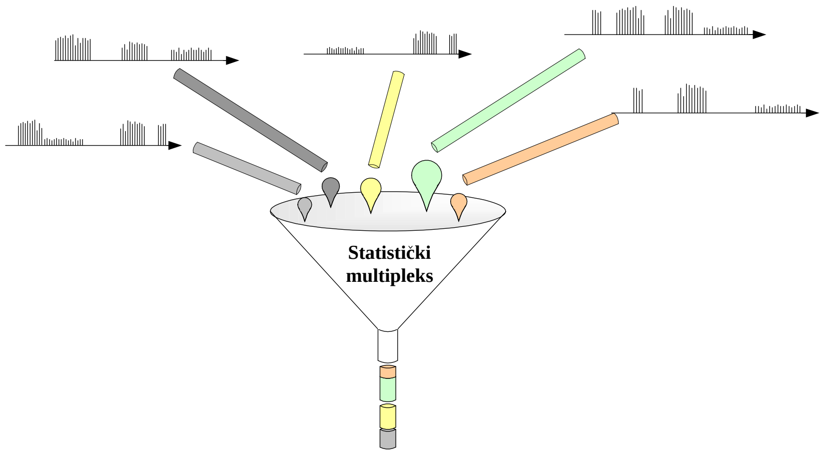
Kako bismo uspjeli poslati različite pakete preko istog kanala paketske mreže, potreban nam je uređaj kojeg zovemo multipleksor. U paketskoj mreži se ovaj uređaj može zamisliti kao lijevak. Pakete možemo zamisliti kao (krupnije i sitnije) kapljice vode koje padaju u lijevak. Kroz odvod izlazi voda točno određenom brzinom ("C kubičnih centimetara u sekundi"), ali samo kada je u lijevku ima. To prikazuje slika 1.3.

Način na koji se kapljice smještaju u spremnik lijevka ovdje ne analiziramo, iako će nam ovaj problem kasnije postati glavna preokupacija. U ovom trenutku nas zanima jedino izlazna brzina iz lijevka. Očigledno je da je ta brzina jednaka zbroju brzina pritoka (*tributarija*) u multipleksor/lijevak. Tu brzinu jasno možemo izraziti u broju paketa u sekundi ili broju bitova u sekundi.

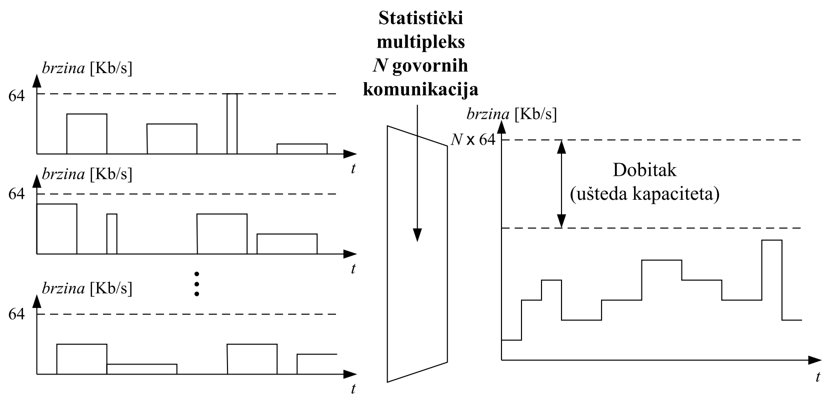
Brzina izražena u broju paketa u sekundi nam ne govori mnogo ukoliko svaki paket može imati proizvoljnu duljinu. Brzina od 100 malih paketa u sekundi zasigurno nije jednaka brzini od 100 velikih paketa u sekundi. Stoga najčešće brzinu izražavamo u bitovima u sekundi. Tek na osnovu tog podatka možemo dobiti osjećaj koliko paketi opterećuju naš komunikacijski kanal kapaciteta C. Slika 1.4 opisuje izlaznu brzinu informacijskog toka iz našeg multipleksora/lijevka .

Izlazna brzina u bitovima u sekundi varira, no (gotovo) nikada ne postiže punu prosječnu brzinu od $N \cdot$ 64 Kb/s, koliko bi zauzele veze u mreži komutiranih kanala. "Višak" kapaciteta koji nam je

[1] Suštinska razlika između optimalnog kodiranja i kompresije je u tome što se kompresijom gubi određeni dio izvorne informacije (npr. oštrina slike), dok optimalnim kodiranjem informacija ostaje očuvana.



Slika 1.3: Multipleksiranje paketa - statistički multipleks



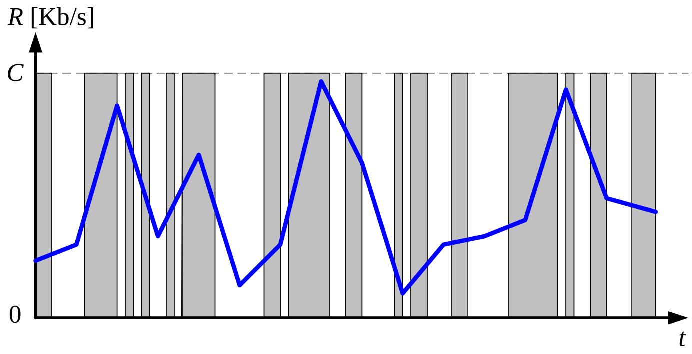
Slika 1.4: Dobitak statističkog multipleksa

ostao možemo iskoristiti za prijenos neke druge informacije, za uspostavu dodatnih govornih veza ili taj kapacitet možemo jednostavno ukinuti i smanjiti cijenu kanala. Upravo je ovo bitna značajka komutacije paketa. Efekt uštede koji smo postigli zovemo *dobitak statističkog multipleksiranja* (*statistical multiplexing gain*). U skladu s tim multipleksor zovemo *statistički multipleksor* (*statistical multiplexor*).

Još je jednu stvar potrebno do kraja razjasniti. Promatramo komunikacijski kanal koji pakete prenosi bit po bit brzinom C b/s. Kada se paket prenosi kanalom (vodom), on se prenosi punom brzinom od C b/s. Prema tome, ako mjerimo brzinu na nekom kanalu, možemo uočiti samo dvije brzine C b/s i 0 b/s. Stoga se postavlja pitanje kako uopće možemo pričati o međubrzinama kao na slici 1.4? Naime, možemo govoriti samo o srednjim brzinama. Te srednje brzine možemo izračunati na mnogo načina. Najčešće brojimo broj bita prenesenih preko kanala u određenom periodu T i taj broj dijelimo s T. Postoje i druge metode (slika 1.5).

Bitno je shvatiti da i u slučaju paketske mreže prijenosni kapacitet nije konstantno popunjen. Postoje periodi kada se ništa ne prenosi i cilj je postići stanje u kojem je udio tih perioda u ukupnom vremenu što manji.

Iako se veliki dio današnje telekomunikacijske infrastrukture temelji na mreži s komutacijom kanala, trend u telekomunikacijama je paketska mreža. Zbog svojstava koje smo gore opisali, buduća širokopojasna mreža integriranih usluga (B-ISDN) temeljit će se na komutiranoj paketskoj mreži.



Slika 1.5: Određivanje trenutne brzine u b/s

1.3 Spojno i nespojno orijentirane paketske mreže

U paketskim mrežama razlikujemo dva koncepta: spojno i nespojno orijentirane mreže. Tipičan primjer spojno orijentirane paketske mreže je ATM. U ATM-u se prije početka komunikacije uspostavlja virtualni kanal s kraja na kraj (od izvorišta do odredišta). Virtualnom kanalu je na svakoj dionici puta kroz mrežu dodijeljen jedinstven identifikator koji određuje vezu (spoj). Svi ATM paketi (ATM ćelije) u zaglavlju nose ovaj identifikator i ATM komutacijski čvorovi ih na osnovu identifikatora upućuju kroz mrežu. Na kraju komunikacije se virtualni kanal raskida.

U nespojno orijentiranim (datagramskim) mrežama ne postoji uspostava veze prije početka komunikacije. Budući da ne postoji identifikator veze, paket kroz mrežu putuje na osnovu izvorišne i odredišne adrese koju nosi u svom zaglavlju. Izvor ubacuje pakete u mrežu bez prethodne najave ili rezervacije i očekuje da mreža dostavi paket na odredište. Tipičan primjer je Internet mreža. Kako bi paketi putovali mrežom, svaki čvor u mreži mora znati kamo uputiti paket dalje do sljedećeg čvora, sve dok paket ne dođe na odredište. Budući da nije bilo prethodne uspostave veze, čvorovi ne znaju unaprijed da je otpočela komunikacija u mreži. Zbog toga se odluka o tome kamo dalje uputiti paket u čvoru donosi isključivo na osnovu adrese izvorišta i odredišta u zaglavlju paketa.

1.4 Komutacija, prosljeđivanje, usmjeravanje (*switching, forwarding, routing*)

Svaka mreža može se predstaviti kao skup čvorova povezanih granama. Čvorovi u stvarnosti predstavljaju mrežne uređaje, a grane predstavljaju veze između tih uređaja. Neki čvorovi se nazivaju krajnjim čvorovima (npr. telefonski uređaj, PC, mobitel, ...) jer predstavljaju početnu ili odredišnu točku komunikacije[2]. Svi ostali čvorovi služe kao posrednici u komunikaciji među krajnjim čvorovima. Čvorovi na koje se spajaju krajnji čvorovi zovemo pristupni čvorovi.

Svaki čvor u mreži ima jedinstvenu mrežnu adresu (npr. telefon ima jedinstven telefonski broj, Internet PC ima jedinstvenu IP adresu). Adrese su najčešće dodijeljene tako da krajnji čvorovi spojeni na isti pristupni čvor imaju određeni zajednički dio adresa. Taj zajednički dio odražava pripadnost zajedničkoj grupi čvorova.

Mreža po definiciji prenosi informacijske jedinice. U slučaju mreže s komutacijom kanala informacijska jedinica je poziv (npr. telefonski poziv), a u slučaju paketske mreže informacijska jedinica je paket (npr. IP paket ili ATM ćelija). Osnovna funkcija koju čvorište obavlja nad informacijskim jedinicama je komutacija. **Komutacija je prospajanje informacijske jedinice kroz čvorišta na putu od izvorišta do odredišta.**

U telefonskoj mreži se komutacija obavlja u čvorovima prospajanjem kanala u prostornoj, frekvencijskoj, valnoj ili vremenskoj domeni. U paketskim mrežama se komutacija svodi na prebacivanje paketa iz

[2]Komunikacija je izmjena informacije između entiteta poštivajući uspostavljena načela i pravila.

ulaznih portova u izlazne portove čvorova. Prebacivanje fizički najčešće obavlja brza sabirnica ili nekakav drugi sustav.

Kada korisnici u mreži žele komunicirati, mreža mora nekako odrediti put kojim će putovati informacijska jedinica(e) koje prenose informaciju. Mreža neprestano "računa" putove između svih parova čvorova. Kod komunikacije se na osnovu izvorišne i odredišne adrese izabire jedan od unaprijed "izračunatih" putova za informaciju koja se razmjenjuje i komutacija se obavlja po izabranom putu. Izbor puta može biti uvjetovan trenutnom prometnom stanju u mreži.

Proces prikupljanja informacije o topologiji mreže, "računanje" putova (ruta) u mreži zove se usmjeravanje. To je jedan od osnovnih upravljačkih mehanizama u mreži, budući da se pravilnim usmjeravanjem postiže balansiranje prometa u mreži i optimalno korištenje resursa mreže. Mehanizam kojim je u mreži implementirano usmjeravanje zove se protokol usmjeravanja (*routing protocol*). Taj protokol pripada upravljačkom sloju mreže. Usmjeravanje kao postupak određivanja putova u mreži ne mora se zasnivati nužno samo na poznavanju para izvorište-odredište. Putovi mogu ovisiti i o vrsti informacije koja se prenosi (podaci ili video). Iako ne postoji jedinstveno prihvaćena definicija usmjeravanja, može se izreći sljedeća definicija: **Usmeravanje je proces određivanja putova kojim će se odvijati komunikacija između entiteta s poznatim imenima (adresama) te svojstvima same komunikacije.**

Različite vrste mreža se koriste usmjeravanjem na različite načine. U nepaketskim mrežama (npr. telefonska) se protokol usmjeravanja koristi kakao bi se saznao put po kojem će se uspostaviti kanal prilikom uspostave poziva. Nakon što je poznat put, na svim čvorovima i granama se vrši rezervacija kanala i započinje komunikacija.

U paketskim mrežama razlikujemo dva slučaja. Mreže mogu biti spojno orijentirane (ATM) ili nespojno (datagramski) orijentirane (tradicionalni Internet). U ATM mreži svaki komunikacijski uređaj ima svoju jedinstvenu adresu (NSAP), a paketi (ATM ćelije) u zaglavlju nose jedino identifikaciju virtualne veze kojoj pripadaju. ATM mreža se u pogledu usmjeravanja ponaša identično kao mreža s komutacijom kanala. Prilikom uspostave poziva na osnovu izvorišne i odredišne adrese saznaje se put kojeg je odredilo usmjeravanje za dotični par čvorova i svi paketi putuju istim putom.

U datagramski orijentiranoj paketskoj mreži (npr. Internetu) ne postoji koncept veze. Paketi u zaglavlju nose adresu izvorišta i odredišta. Da bi paketi uopće mogli putovati mrežom, čvorovi mreže moraju znati usmjeriti svaki paket s ulaznog na izlazni port na osnovu adresa izvorišta i odredišta. Svaki čvor održava određenu strukturu podataka pomoću koje se na osnovu dijela adresa u zaglavlju paketa može odrediti sljedeći čvor na putu paketa. Ta struktura se naziva tablica usmjeravanja. Usmjeravanje u datagramskoj mreži je upravo postupak izgradnje tablice usmjeravanja u svim čvorovima mreže. Svaki čvor izgrađuje vlastitu tablicu usmjeravanja na osnovu informacije koju izmjenjuje s drugim čvorovima u mreži. Prospajanje IP paketa s ulaznog na izlazni port na osnovu tablice usmjeravanje je komutacija IP paketa.

Ovdje je važno ukazati na jednu vrlo važnu činjenicu. U Internet terminologiji vlada određena zbrka u pogledu pojmova. Naime, često se može pročitati da IP čvorovi usmjeravaju IP pakete. IP čvorovi se čak i zovu IP usmjeritelji. Ovakvi nazivi u Internetu očigledno proizlaze iz drugačijeg ili krivog shvaćanja koncepta usmjeravanja i komutacije. Razlog zašto se komutiranje na IP sloju zove usmjeravanje leži vjerojatno u činjenici da se komutiranje na podatkovnom sloju Etherneta u lokalnim mrežama zove komutacija. U Internet praksi je dovoljno reći *switch* i *router* pa da se zna da se radi o Ethernet komutacijskom čvoru i IP komutacijskom čvoru. Iako je ova terminologija uvriježena, ne smije se brkati sa stvarnim značenjem pojmova komutacija i usmjeravanje.

Uz pojam komutacije usko je povezan i pojam prosljeđivanja. U paketskim mrežama često je pojedinim paketima potrebno dati veći prioritet nego drugim. Na primjer, u izlaznom portu Internet čvora (usmjeritelja) paketima koji nose glasovnu informaciju potrebno je dati veći prioritet odlaska do sljedećeg čvora (stavljanja na link do sljedećeg čvora) nego onima koji nose WEB promet. Time se osigurava da paketi koji prenose vremenski kritičnu informaciju dođu na vrijeme do odredišta. Davanje prioriteta je samo jedna tehnika čekanja i posluživanja u spremnicima portova. Primjenjuju se i druge tehnike posluživanja, npr. one koje pojedinim tokovima osiguravaju minimalnu brzinu prijenosa itd. Kompletan tretman paketa u nekom čvoru od dolaska u neki čvor do trenutka kada napušta čvor zovemo prosljeđivanje: **Prosljeđivanje objedinjuje komutaciju i posluživanje informacijske jedinice na sučelju (portu).**

1.5 Pojam usluge i vrste usluga u paketskoj mreži

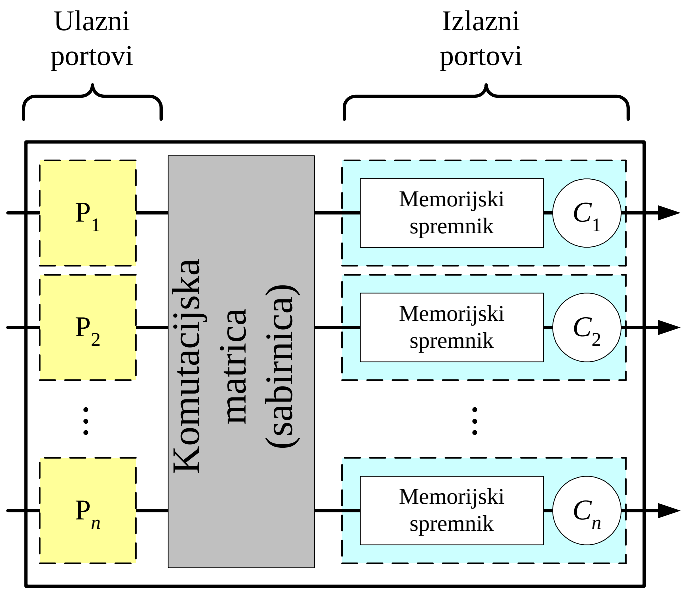
Paketska mreža se korisniku predstavlja kao poslužitelj koji nudi određene usluge, npr. telefonsku uslugu, uslugu prijenosa elektronske pošte, uslugu prijenosa velike količine podataka itd. Usluga je definirana vrstom informacije koja se prenosi i kvalitetom dostave informacije na odredište.

Pretpostavimo da želimo uspostaviti videokonferencijsku vezu s udaljenim multimedijskim uređajem. Naš uređaj komprimira pokretnu sliku tako da prenosimo bitovni tok promjenljive brzine. Pakirajući taj tok u pakete dobivamo paketski tok u kojem paketi imaju različite veličine. Kako bismo dobili kvalitetnu pokretnu sliku na odredištu, pakete moramo slati u pravilnim vremenskim intervalima. Putovanje paketa do odredišta mora biti relativno kratko. To vrijeme zovemo kašnjenje paketa. Kašnjenja paketa moraju biti približno jednaka. Ukoliko neki paket previše zakasni za prethodnim, dekoder na odredištu neće moći rekonstruirati djelić pokretne slike na vrijeme. Isto tako, ako se kašnjenja paketa naglo smanje, odredište će biti zasuto paketima koje možda neće uspjeti spremiti za kasniju rekonstrukciju pokretne slike. To će uzrokovati gubitak informacije. Nadalje, mreža ne smije ispuštati (gubiti) pakete. Točnije, mreži je dopušteno da izgubi tek mali dio ukupne poslane količine paketa. Kako bi se ovaj zahtjev ispunio, mreža pakete mora prenositi određenom brzinom ("X paketa u sekundi"). Ta brzina prijenosa paketa mora biti raspoloživa cijelo vrijeme trajanja veze.

Čini se da je prijenos videa kroz paketsku mrežu doista složen proces. Mreža se mora poprilično brinuti o paketima koje prenosi. Postavlja se pitanje kako uopće uspijeva pakete prenositi točno definiranom brzinom? Da bismo odgovorili na to pitanje moramo detaljnije objasniti pojam statističkog multipleksora.

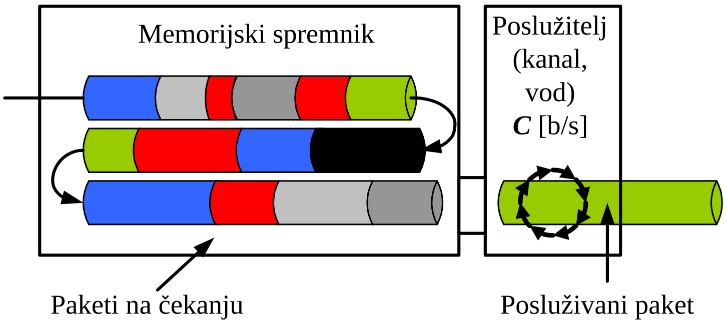
Multipleksiranje paketa se događa u svakom čvoru paketske mreže, i to na svakom izlaznom portu čvora. Port je na jednoj strani spojen na prijenosni vod kapaciteta C b/s, a na drugoj strani na unutrašnju sabirnicu čvora visoke propusnosti. Paketi koji pristižu u čvor ne mogu se istog trenutka prebaciti na izlazni vod. Vod poslužuje pakete bit po bit, pa je za prijenos jednog paketa potrebno određeno vrijeme. Dakako, u jednom trenutku postoji više paketa koji bi trebali biti preneseni (posluženi) preko istog voda. Budući da se u jednom trenutku može posluživati samo jedan paket, i moraju se prenijeti svi bitovi paketa odjednom, ostali paketi moraju čekati. Čekanje je osnovno svojstvo svih paketskih sustava. Zbog toga je osnovni gradivni element svakog čvora u paketskoj mreži memorijski spremnik.

Postoji više arhitektura čvorova s obzirom na to gdje i kada se paketi spremaju u memoriju. Mi promatramo arhitekturu u kojoj se paket pri dolasku u čvor odmah prebacuje (komutira) na izlazni port i tamo sprema u memoriju gdje čeka svoj red na izlazak. Takvu arhitekturu prikazuje slika 1.6.



Slika 1.6: Čvor paketske mreže s izlaznim čekanjem

U našoj analizi pretpostavljamo da komutacijska matrica ima beskonačnu brzinu, tako da izlazni port možemo promatrati kao kombinaciju spremnika i poslužitelja (kanala, voda) u koju pristižu paketi kojima je taj port sljedeći korak u putovanju do odredišta (slika 1.7).



Slika 1.7: Jednostavan statistički multipleksor

Postoje različiti načini posluživanja paketa u portu. Na primjer, paketi se mogu posluživati istim redom kojim su došli u spremnik. To je tzv. FIFO (*First In First Out*) disciplina posluživanja paketa. Ona je najjednostavnija disciplina i za problem posluživanja paketa naše video veze uopće nije dobra. Razlog je taj što nema načina da se paketima koji pripadaju video vezi osigura garantirana brzina posluživanja paketa. Pretpostavimo da naš port multipleksira dvije veze, našu video vezu i neku drugu vezu koja pakete šalje daleko većom brzinom. Agresivnija veza će potisnuti pakete video veze i propusnost paketa video veze kroz port koju ćemo izmjeriti bit će u potpunosti određena intenzitetom agresivne veze. FIFO disciplina posluživanja definitivno nije dobra za našu primjenu.

Potreban nam je određeni način odabira paketa koji se ima sljedeći poslužiti tako da svaka veza bude poslužena svojom brzinom. Postoji veliki broj algoritama za odabir paketa, no najčešće spominjani je *Worst-case Weighted Fair Queuing* - W^{2}FQ. Njega ćemo analizirati kasnije, no bitno je znati da taj algoritam osigurava svim paketima pojedinih veza posluživanje onom brzinom koja je zatražena. Na taj način se svakoj vezi čini da ima svoj vlastiti kanal i da ga nitko drugi ne ometa. Ovaj efekt je poznat pod nazivom *emulacija kanala* (*circuit emulation*).

Ovdje je bitno primijetiti da W^{2}FQ algoritam može funkcionirati samo ako port zna koje veze prolaze kroz njega i ako zna brzine kojima ti paketi moraju biti posluživani. Očigledno je da se radi o spojno orijentiranoj (komutirnoj) mreži. Čvorovi održavaju interna stanja o vezama koje su uspostavljene u mreži. No, postavlja se pitanje kako osigurati brzinu posluživanja za veze u nespojno orijentiranim (datagramskim) paketskim mrežama?

IP usmjeritelji ne raspolažu podacima o tome koje su veze uspostavljene u mreži. Jedini način različitog tretiranja (diferencijacije) prometa u portovima (i u mreži) je prioritetno čekanje (*priority queuing*). Budući da portovi ništa ne znaju o vezama, paketi sami nose podatak o tome kako očekuju da ih usmjeritelj tretira. Najčešće je taj podatak prioritet (*precedence*). Paketi se u spremniku sortiraju po njihovom prioritetu i poslužuju po padajućem prioritetu.

Iako nije moguće garantirati nikakvu brzinu posluživanja za bilo koju vezu u usmjeravanoj mreži, moguće je garantirati zajedničku brzinu posluživanja za sve pakete s istim prioritetom ili nekim drugim parametrom. Tako se na primjer svi paketi telefonskih veza mogu posluživati jednom brzinom, a svi WWW IP paketi mogu posluživati nekom drugom brzinom. Ovaj mehanizam je temelj DiffServ Internet arhitekture s kojom ćemo se upoznati nešto kasnije.

1.5.1 Garantirane usluge

Garantirane usluge postoje samo u mrežama s komutacijom paketa, odnosno u mrežama u kojima je moguće postići emulaciju kanala. Postoje dvije kategorije garantiranih usluga: usluge konstantne brzine i usluge promjenljive brzine.

Usluge konstantne brzine su namijenjene prometnim izvorima koji stvaraju kontinuiran bitovni tok konstantne brzine. Takav bitovni tok se najčešće pakira u pakete jednake veličine u pravilnim vremenskim razmacima. Posluživanje takvih paketa u mreži krajnje je jednostavno. Pri uspostavi veze potrebno je rezervirati prijenosnu brzinu koja je jednaka brzini slanja paketa u mrežu. Kašnjenje paketa za takve usluge ima malu varijaciju i malu količinu izgubljenih paketa.

Usluge promjenljive brzine su namijenjene prometnim izvorima koji stvaraju bitovni tok promjenljive brzine. Takav izvor je kompresor glasa kojeg smo razmatrali u 1.2. Ovakav prometni izvor stvara pakete različitih veličina i ne nužno s pravilnim vremenskim razmacima. Zahtjevi na uslugu su određeni maksimalnim kašnjenjem s kraja na kraj, maksimalnom varijacijom kašnjenja i maksimalnim udjelom gubitka paketa. Ovi zahtjevi se ispunjavaju rezervacijom određene brzine posluživanja paketa na svim čvorovima kuda prolazi veza. Jedini problem koji se postavlja je određivanje brzine kojom paketi moraju biti posluživani. Ta brzina može biti maksimalna trenutna brzina na izvoru (vršna brzina). Međutim, rezervacija takve brzine rezultira slabim iskorištenjem resursa. Zato se rezervira brzina koja je između srednje brzine za cijelu vezu i vršne brzine. Vidjet ćemo da je problem određivanja ove brzine vrlo složen.

Usluge s garancijama na određene parametre moguće je ostvariti samo u mrežama s komutacijom paketa, tj. u spojno-orijentiranim mrežama. Primjeri takvih mreža su MPLS i ATM. U ATM-u su specificirane dvije kategorije garantiranih usluga. Usluga stalne brzine se zove CBR (*Constant Bit Rate*), a usluga promjenljive brzine se zove VBR (*Variable Bit Rate*).

1.5.2 Usluga raspoložive brzine prijenosa

Usluga raspoložive brzine prijenosa se koristi za prijenos podataka u mreži s komutacijom paketa. Ova usluga zahtijeva uspostavu veze. Mreža neprestano mjeri trenutnu iskorištenost mrežnih kapaciteta i izvještava izvorište o tome kolikom brzinom može slati pakete u mrežu, a da ne uzrokuje zagušenje. Konkretna implementacija ove vrste usluge postoji u ATM-u. U ATM terminologiji se ta usluga zove ABR (*Available Bit Rate*).

Veza se uspostavlja u trenutku kada neka aplikacija (izvorište) želi poslati određenu količinu podataka (npr. datoteku) određenoj odredišnoj aplikaciji. Izvorište upućuje zahtjev mreži za uspostavu veze, no taj zahtjev ne sadržava nikakve zahtjeve na kvalitetu usluge. Mreža uspostavlja vezu, no ne rezervira nikakav kapacitet u mreži. Odmah nakon uspostave poziva mreža putem određene signalizacije (posebnim paketima) informira izvor kolikom brzinom može slati pakete u mrežu. Ta brzina jednaka je trenutno raspoloživoj brzini prijenosa u mreži. Dakako, način proračunavanja raspoložive brzine u mreži i informiranja izvora o raspoloživoj brzini ovisi o konkretnoj implementaciji. Razvijen je veliki broj algoritama za proračun raspoložive brzine i veliki broj mehanizama za informiranje izvora o izračunatoj raspoloživoj brzini. Neki od tih mehanizama su i standardizirani.

1.5.3 Usluga neodređene brzine prijenosa (*Best-effort*)

U slučaju veze neodređene brzine prijenosa (*Best-effort service*) mreža se uopće ne brine o kvaliteti prijenosa paketa do odredišta. Mreža jedino garantira da će učiniti sve da svaki paket dođe do svog odredišta. Ako se paketi izgube, mreža nije odgovorna. Ova usluga tipična je i za spojno i nespojno orijentirane paketske mreže. U slučaju spojno orijentiranih mreža uspostavlja se veza. Uspostava rezultira određivanjem puta kojim će putovati paketi. Kod datagramske mreže čvorovi ne znaju da je veza uspostavljena. To znaju samo aplikacije na izvorištu i odredištu veze. U datagramskoj mreži paketi iste veze mogu putovati različitim putovima. Čak ne postoji garancija da paketi neće stići obrnutim redoslijedom na odredište od onog kojim su poslani.

Jedino je nejasno na koji način izvorište uopće zna kojom brzinom slati pakete u mrežu. Budući da se ova veza koristi za prijenos podataka, viši protokoli moraju osigurati retransmisiju izgubljenih paketa ukoliko dođe do gubitaka. Gubici će biti veliki ukoliko će izvor pakete slati prevelikom brzinom zbog toga što će paketi zagušiti mrežu. To će rezultirati retransmisijom već poslanih podataka, a to će uzrokovati još veće zagušenje. Zbog toga izvori moraju imati protokole pomoću kojih će "osjetiti" kolikom brzinom mogu slati pakete u mrežu, a da pri tome gubici paketa ne budu preveliki. Primjer ovakvog protokola u Internet mreži je TCP (*Transmission Control Protocol*).

1.6 Vrste prometa u paketskoj mreži

Svakoj spomenutoj usluzi odgovara određena vrsta prometa u mreži. Osnovna podjela prometa je na garantirani i negarantirani promet. Ova podjela ne ovisi o tome da li se radi o spojno ili nespojno orijentiranoj mreži. Garantirani promet u spojno orijentiranoj mreži je promet koji odgovara uslugama stalne ili promjenljive brzine. U datagramskoj mreži garantiranim prometom možemo zvati samo promet paketa istog indeksa (prioriteta) za koji mreža osigurava određenu brzinu prijenosa. Garantirani promet dijelimo na promet konstantne i promjenljive brzine.

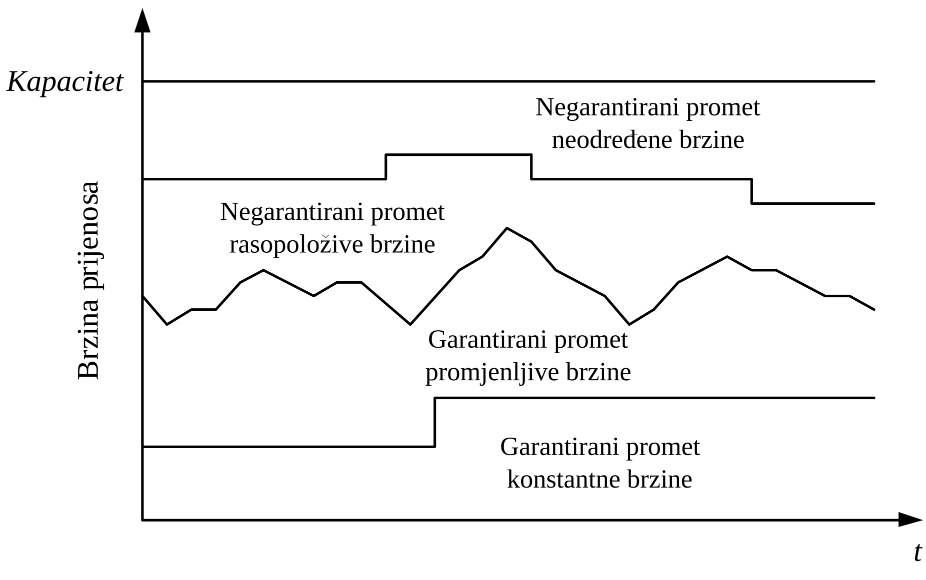
Negarantirani promet je promet kojeg stvaraju usluge raspoložive i neodređene brzine prijenosa. Promet raspoložive brzine prijenosa tipičan je samo za spojno orijentirane mreže. Negarantirani promet ima niži prioritet od garantiranog. On pokušava maksimalno iskoristiti onaj dio kapaciteta mreže koji je ostao neiskorišten od strane garantiranog prometa. Ova podjela je prikazana u tablici 1.1.

Tablica 1.1: Vrste prometa

Garantirani promet	**Negarantirani promet**
konstantne brzine	raspoložive brzine
promjenljive brzine	neodređene brzine

Ovdje je važno napomenuti da je kapacitet maksimalna brzina prijenosa na promatranom kanalu. Ta je brzina najčešće izražena brojem okteta ili bita koje je moguće prenjeti u jedinici vremena. U slučaju ATM-a ta se brzina može izraziti brojem ćelija u sekundi. Pojedine vrste prometa se mogu tretirati na različite načine (dobivati različite prioritete pri posluživanju), pa time ostvaruju i različite brzine prijenosa. U engleskoj literaturi se za brzinu prijenosa koristi termin *bandwidth*, koji se u našoj literaturi često prevodi izrazom širina pojasa. Ovaj termin treba izbjegavati jer je termin brzina prijenosa dovoljan i bliži duhu našeg jezika.

Uobičajeno je da se garantiranom prometu garantira brzina prijenosa kroz mrežu. Brzina prijenosa koja ostaje neiskorištena ili nerezervirana od strane garantiranog prometa se pokušava popuniti negarantiranim prometom. To prikazuje slika 1.8.



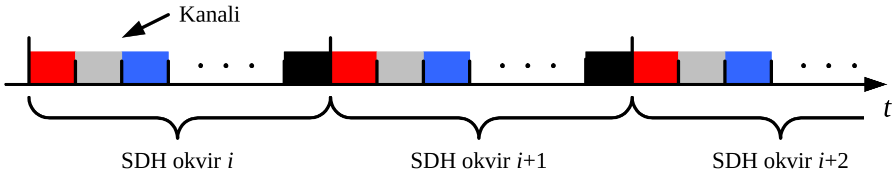
Slika 1.8: Raspodjela kapaciteta

1.7 Osnovni prijenosni načini u digitalnim mrežama

Način ili mod prijenosa (*Transfer Mode*) je pojam koji označava način pakiranja i prijenosa podataka izvorne informacije do njihovog odredišta. Postoje dva načina prijenosa: sinkroni (*Synchronous*) i asinkroni (*Asynchronous*). U oba slučaja se razmatraju fiksni odsječci vremena. Svakom fiksnom odsječku vremena odgovara podatkovna jedinica koja sadrži (i prenosi) određenu fiksnu količinu bitova. U nekim slučajevima se ta podatkovna jedinica zove okvir (*frame*), u drugim *kanal*, a u slučaju ATM-a se ta jedinica zove ćelija.[3]

1.7.1 Sinkroni način prijenosa

Digitalna telefonska mreža za prijenos telefonskih kanala koristi okvire SDH (*Synchronous Digital Hierarchy*) mreže[4]. SDH okvir je podijeljen u fiksan broj 8-bitnih grupa koje zovemo kanali. Svaka telefonska veza zauzima uvijek isti kanal u SDH okviru. To znači da je udaljenost kanala neke telefonske veze od početka svakog okvira uvijek ista. Svi SDH okviri su jednake veličine i ponavljaju se u jednakim vremenskim intervalima. Na slici 1.9 svi pravokutnici iste boje odgovaraju istom kanalu.



Slika 1.9: Kanali u sinkronom načinu prijenosa

Ovaj način prijenosa zovemo *sinkroni način prijenosa* - STM (*Synchronous Transfer Mode*). Jasno je da se svaki kanal u pravilnim vremenskim razmacima pojavljuje u bitovnom nizu bez obzira na stanje ostalih kanala. No, bitno je primijetiti da pojam sinkronosti nije povezan s periodičkim ponavljanjem kanala u bitovnom toku, nego sa sinkroniziranošću umetanja informacije koja dolazi od izvora na mjesto koje je za tu informaciju predviđeno. Periodičnost je samo preduvjet za sinkroniziranost.

Proces umetanja kanala na odgovarajuće mjesto zovemo *vremenski multipleks* - TDM (*Time-Division Multiplexing*). To je proces kod kojeg se više simultanih struja bita ujedinjuje u jednu, ali na taj način da je očuvana vremenska (slijedna) podjela bitova. Na osnovu vremenske (slijedne) podjele se vremenskim demultipleksiranjem ekstrahiraju originalni (multipleksirani) tokovi bita. Vremenski multipleks, a time i sinkroni podatkovni tok se stvara u vremenskom multipleksoru.

1.7.2 Asinkroni način prijenosa - ATM

Zamislimo bitovni tok u kojem su bitovi grupirani u odsječke jednake duljine. Jedan ili više izvora želi svoju informaciju poslati ovim tokom. Izvor pakira podatke dobivene kodiranjem u pakete fiksne veličine. Veličina paketa odgovara veličini odsječka bitovnog toka. Ukoliko dopustimo da svaki izvor može svoj paket staviti u *bilo koji* slobodan odsječak bitovnog toka i ukoliko dopustimo natjecanje izvora za odsječke, dobili smo asinkroni način prijenosa - ATM (*Asynchronous Transfer Mode*).

Dakle, u ATM-u svaki izvor generira svoje pakete i pokušava ih poslati nosećim bitovnim tokom na taj način što ih stavi u prvi slobodan odsječak tog toka. ATM je konkretna tehnologija, standardizirana od strane ITU-T-a[5] i ATM Foruma[6]. Prema preporukama koje su donesene, paket u ATM-u ima veličinu 53 okteta (424 bita). 5 prvih okteta (40 bita) predstavlja zaglavlje, a ostalih 48 prenosi korisnu informaciju. Taj paket zovemo *ćelija* (*cell*).

ATM je definiran u preporuci ITU-T-a I.150 [1] na sljedeći način: "ATM je specifičan paketski orijentiran način prijenosa koji koristi tehnike asinkronog vremenskog multipleksa. Multipleksirani informacijski tok je organiziran u blokove fiksne duljine zvane ćelije..."

Ova definicija uvodi jedan novi pojam - asinkroni vremenski multipleks (*Asynchronous Time-Division Multiplexing*). Sinkroni vremenski multipleksor multipleksira simultane (sinkrone) tokove. Takav multi-

[3] Svaki sloj OSI modela ima svoju podatkovnu jedinicu. Podatkovna jedinica sloja podatkovne veze (DLL) se zove *okvir*, a mrežnog sloja se zove *paket*

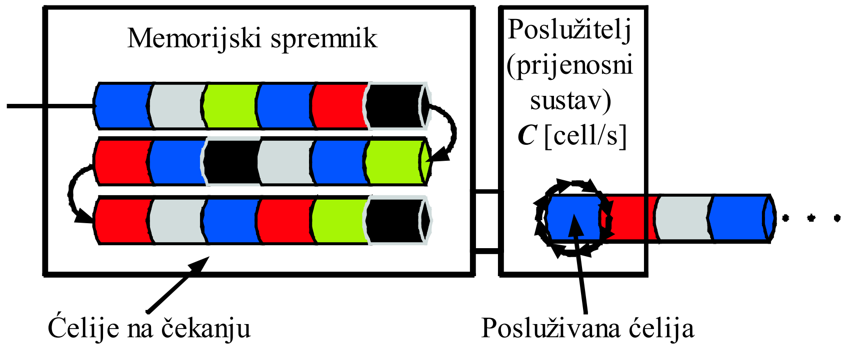
[4] Sloj podatkovne veze OSI modela

[5] *International Telecommunication Union for Telecommunications* - bivši CCITT

[6] ATM Forum je standardizacijska organizacija specijalizirana za ATM

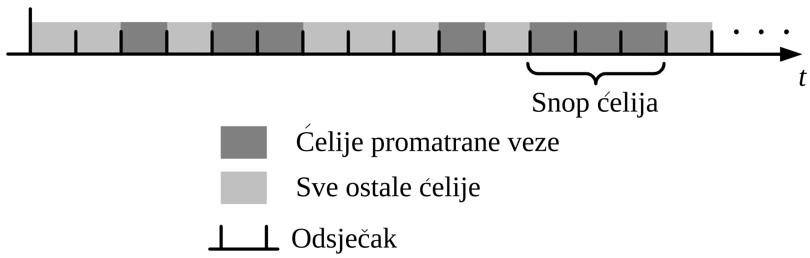
pleksor kružno (*round-robin*) uzima oktete sinkronih dolaznih tokova i ujedinjuje ih u jedinstven bitovni tok. Asinkroni multipleksor to ne može raditi jer dolazni tokovi nisu sinkroni.

Asinkroni vremenski multipleksor je statistički multipleksor kojeg smo razmatrali u 1.5. No asinkroni multipleksor je specifičan po tome što su svi paketi fiksne duljine i odlazni tok iz multipleksora može početi posluživati ćeliju samo u određenom vremenskom trenutku, na početku vremenskog odsječka (slika 1.10).



Slika 1.10: Asinkroni vremenski multipleksor ATM-a

Slika 1.11 prikazuje pozicije ćelija koje odgovaraju jednoj vezi u ukupnom multipleksiranom toku. Udaljenosti među ćelijama jedne veze su promjenljive. Ukoliko nekoliko ćelija jedne veze slijede neposredno jedna iza druge, govorimo o snopu ćelija.



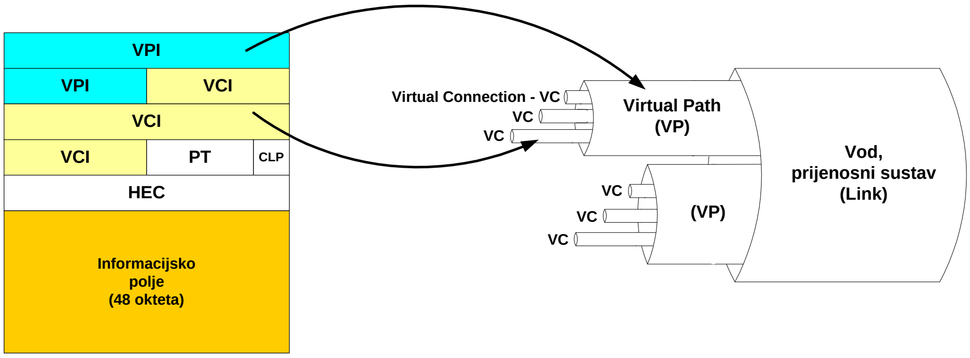
Slika 1.11: Snop ćelija i toku ATM ćelija

Asinkronom multipleksiranju ćemo se vratiti još jednom u ovom poglavlju.

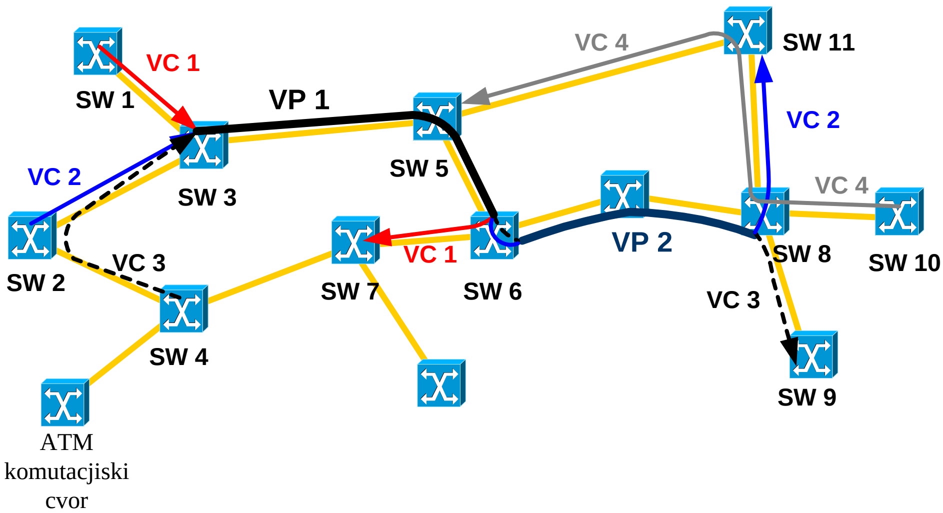
1.7.3 Spojna orijentiranost ATM mreže

U definiciji ATM-a se kaže da je ATM spojno orijentirana tehnika. To znači da je pri uspostavi poziva potrebno uspostaviti vezu rezervirajući prijenosni put kroz mrežu. Ovisno o vrsti prometa, svi čvorovi kroz koje će prolaziti veza se obavješćuju o tipu i parametrima veze. U terminologiji ATM-a, veza se zove *virtualna veza* - VC (*virtual connection*). Budući da su ATM čvorovi komutacijski, ćelije prenose indentifikator veze kojoj pripadaju. U zaglavlju ATM ćelije rezervirana su dva polja za oznaku veze. Polja se zovu VCI (*Virtual Connection Identifier*) i VPI (*Virtual Path Identifier*). Jedna virtualna veza između dva susjedna čvora je jednoznačno određena vrijednošću oba polja (1.12).

Virtualne veze se u ATM-u grupiraju u virtualne putove - VP (*Virtual Path*). VPI određuje indeks virtualnog puta kojem pripada ćelija, a VCI određuje indeks virtualne veze unutar virtualnog puta. Razlog uvođenja pojma virtualnog puta je pojednostavljenje upravljanja prometom unutar ATM mreže. Ukoliko određena grupa veza ima jednake ili slične prometne zahtjeve onda ih je lakše promatrati kao jedan kanal. Pri tome nema degradacije kvalitete prijenosa ćelija tih veza kroz mrežu. Na slici 1.13 je prikazana mreža s dva VP-a i nekoliko VC-ova. Svi VC-ovi osim VC-4 su grupirani u VP-ove. VC-4 ima zaseban VP pa ga nema potrebe crtati. Sa slike je jasno da VC-ovi nekoliko puta mogu primijeniti VP u koji su smješteni. Tu promjenu vrše VC-2 i VC-3 koji na ATM komutacijskom čvoru SW 6 mijenjaju



Slika 1.12: Virtualni putovi i virtualne veze



Slika 1.13: Primjer ATM mreže s uspostavljenim VP-ovima i VC-ovima

izlaze iz VP-1 i ulaze u VP-2. Dijelovi VC-ova koji su nacrtani tanjom linijom imaju vlastiti VP koji ne dijele s drugim VP-ovima.

Razlikujemo dvije vrste VC-ova i VP-ova: trajno uspostavljene (*permanent*) i komutirane (*switched*). Komutirani su oni koji se uspostavljaju pri uspostavi poziva i raskidaju pri raskidu poziva. U skladu s tim komutirane VC-ove zovemo SVC (*Switched VC*), a trajne PVC (*Permanent VC*). Trajne VP-ove označavamo s PVP, a komutirane obično s VP jer takvi VP-ovi samo obuhvaćaju komutirane VC-ove.

Prilikom uspostave veze, korisnički terminal započinje proceduru pregovaranja o kvaliteti veze (*negotiation*). Terminal traži od mreže da mu osigura odgovarajući prijenosni put do odredišta s određenom brzinom prijenosa ćelija, kašnjenjem itd. Nakon toga mreža provjerava stanje svojih resursa i donosi odluku o tome da li može uspostaviti vezu prema zadanim parametrima ili ne. U slučaju da može, veza se uspostavlja. To rezultira rezervacijom prijenosnog puta i rezervacijom određenih resursa u mreži. Ukoliko se ne može udovoljiti zahtjevima izvora, mreža predlaže druge, prihvatljive parametre veze. Izvor takve uvjete može prihvatiti ili odbaciti.

1.7.4 Vrste prometa i prometni parametri u ATM mreži

Kao i u svakoj paketskoj mreži, u ATM mreži razlikujemo četiri glavne kategorije usluga i prometa: uslugu konstantne brzine prijenosa - CBR (*Constant Bit Rate*), uslugu promjenljive brzine prijenosa - VBR (*Variable Bit Rate*), uslugu raspoložive brzine prijenosa - ABR (*Available Bit Rate*) i uslugu neodređene brzine prijenosa - UBR (*Unspecified Bit Rate*). Definirane su u preporuci ATM Foruma [2]

CBR usluga se koristi za prijenos ćelijskog toka konstantne brzine. Takav tok najčešće stvaraju nekomprimirani audio i video, no mogu ga stvoriti i drugi izvori. Za opis veze se koristi brzina izražena u broju prenesenih ćelija u sekundi, maksimalno vrijeme prijenosa ćelije do odredišta (maksimalno kašnjenje), varijacija kašnjenja ćelija na odredištu i dopušteni udio izgubljenih ćelija. Kvaliteta usluge se garantira rezervacijom prijenosnog pojasa širine jednake brzini slanja ćelija.

VBR usluga se koristi za prijenos komprimiranog audia i videa u realnom vremenu. Pri uspostavi veze izvor specificira vršnu i srednju brzinu toka kojeg će uputiti u mrežu. Vršna brzina jednaka je inverzu najkraćeg intervala između bilo koje dvije ćelije poslane u mrežu tijekom veze. Niz ćelija koje slijede jedna iza druge vršnom brzinom zovemo *snop* (*burst*). Snop ćelija u nekim slučajevima može odgovarati snopu ćelija u bitovnom toku prijenosnog kanala. Srednja brzina jednaka je omjeru ukupnog broja ćelija poslanih za vrijeme trajanja veze i vremena trajanja veze.

VBR usluga ima dvije potkategorije: stvarno-vremenski VBR - rt-VBR (*real-time VBR*) i ne-stvarno-vremenski VBR - nrt-VBR (*non-real-time VBR*). rt-VBR služi za prijenos videa i audia u stvarnom vremenu, što znači da je dvosmjernom rt-VBR vezom moguće ostvariti konverzaciju dviju strana u realnom vremenu (npr. videokonferenciju). nrt-VBR usluga služi za prijenos videa i audia bez ograničenja na vrijeme dostave informacije na odredište. Primjer korištenja takve usluge je multimedijski e-mail ili bilo koji oblik datoteke koja stvara varijabilan ćelijski tok, ali nema ograničenja na vrijeme dostave informacije na odredište ili varijaciju kašnjenja na odredištu.

U skladu s razlikom u definiciji rt i nrt VBR-a, rt-VBR specificira maksimalno vrijeme prijenosa ćelija do odredišta i maksimalnu varijaciju tog kašnjenja na odredištu. nrt-VBR te parametre ne specificira, jer po definiciji ta usluga nije osjetljiva na kašnjenje ćelija. Obje usluge specificiraju maksimalan udio izgubljenih ćelija.

ABR usluga služi za prijenos podataka komunikacijskim protokolom koji se ne prilagođuje uvjetima u mreži. Izvor koji koristi ABR uslugu prilagođuje brzinu slanja podataka u mrežu stanju u mreži. Informaciju o stanju u mreži[7] izvor dobiva neposredno od mreže putom posebnih ćelija koje se zovu RM ćelije (*Resource Management Cell*). Pojednostavljeno govoreći, kontrola brzine slanja ćelija funkcionira na taj način što izvor periodički u ćelijski tok kojeg šalje umeće RM ćelije koje sam stvori. Svaki mrežni element (svaki ATM čvor u mreži) eksplicitno ili implicitno može u RM ćeliju upisati stanje u mreži (kako ga vidi taj element). Odredište prima ćelijski tok, iz njega ekstrahira RM ćelije koje je poslao izvor i istom ih rutom vraća natrag izvorištu. Izvorište čita stanje koje je upisano u RM ćelije i prilagođuje brzinu slanja ćelija u mrežu. Informacija u RM ćelijama može biti eksplicitna, tj. u RM ćeliji može eksplicitno pisati kojom brzinom bi izvor trebao slati ćelije u mrežu. Također, informacija u RM ćelijama može biti implicitna, tj. sadržavati podatak o tome da li je u mreži stanje zagušenja ili ne. U tom slučaju je na izvoru da pomoću određenog algoritma procijeni brzinu slanja ćelija u mrežu. Algoritam koji ima najbolje performanse je ERICA [3].

Kako bi čvorovi u mreži uopće mogli upisivati informaciju o zagušenju u RM ćelije, izvor mora specificirati određene parametre veze. To su redom: vršna brzina, minimalna zahtijevana brzina i udio izgubljenih ćelija.

UBR usluga se koristi za prijenos podataka bez ikakvih garancija na kvalitetu dostave. Jedini parametar kojeg izvor predaje mreži je vršna brzina kojom izvor može slati podatke u mrežu. U osnovi, izvor je sam odgovoran za brzinu slanja ćelija u mrežu i sve posljedice. Mreža jednostavno nije odgovorna ni za vrijeme dostave niti za izgubljene ćelije. Kako bi izvor uopće znao kojom brzinom slati ćelije u mrežu, mora raspolagati mehanizmima za kontrolu zagušenja. Gotovo svim izvorima u tu svrhu služi TCP (*Transmission Control Protocol*). No, čisti TCP nije najbolje rješenje, nego se koristi njegova nadograđena verzija[8]. Kasnije ćemo vidjeti da postoje brojni problemi u prijenosu TCP paketa preko ATM-a i da ATM komutacijski čvorovi moraju implementirati određene dodatne mehanizme za UBR promet poput EPD-a (*Early Packet Discard*) [4].

Tablica 1.2 sažeto prikazuje osnovne kategorije usluga u ATM mreži i osnovne parametre prometa koji služe za opis pojedinih prometnih tokova. Tablica nije precizna i služi samo shvaćanju prirode vrsti prometa u ATM-u.

[7] zagušenje, predstojeće zagušenje, umjereno zagušenje

[8] ECN (*explicit congestion notification*) mehanizmi

Tablica 1.2: Vrste prometa

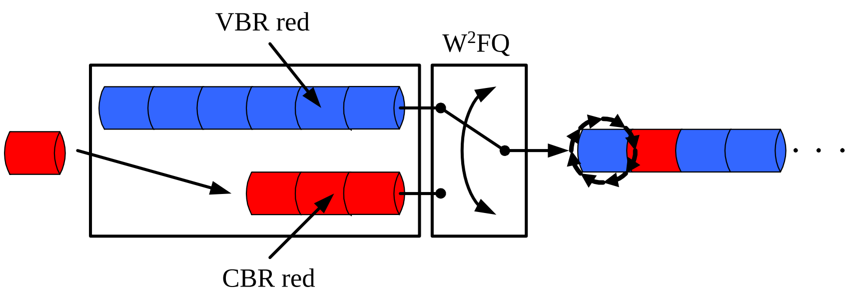
<table>
<tr><th rowspan="2">Atributi</th><th colspan="5">Kategorija usluge ATM sloja</th></tr>
<tr><th>CBR</th><th>rt-VBR</th><th>nrt-VBR</th><th>UBR</th><th>ABR</th></tr>
<tr><td>Prometni parametri:</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Vršna brzina</td><td colspan="3">specificirana</td><td>specificiran</td><td>specificirana</td></tr>
<tr><td>Prosječna brzina</td><td>/</td><td colspan="2">specificirana</td><td colspan="2">/</td></tr>
<tr><td>Minimalna brzina</td><td colspan="3">/</td><td>/</td><td>specificirana</td></tr>
<tr><td>Parametri kvalitete usluge:</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Maksimalna varijacija kašnjenja</td><td colspan="2">specificirana</td><td colspan="3">nije specificirana</td></tr>
<tr><td>Maksimalno kašnjenje</td><td colspan="2">specificirao</td><td colspan="3">nije specificirano</td></tr>
<tr><td>Udio izgubljenih ćelija</td><td colspan="3">specificiran</td><td>nije specificiran</td><td>specificiran</td></tr>
</table>

1.7.5 Osiguravanje kvalitete usluge za garantirane usluge

Jasno je da mreža mora osiguravati kvalitetu usluge, no ostaje nejasno na koji način mreža uspijeva osigurati zatraženu kvalitetu usluge. Odgovor je već djelomično dan u 1.5. Sada ćemo objasniti nekoliko detalja koji će nam do kraja pojasniti što je to rezervacija prijenosnog pojasa i osiguravanje brzine posluživanja ćelija u čvoru.

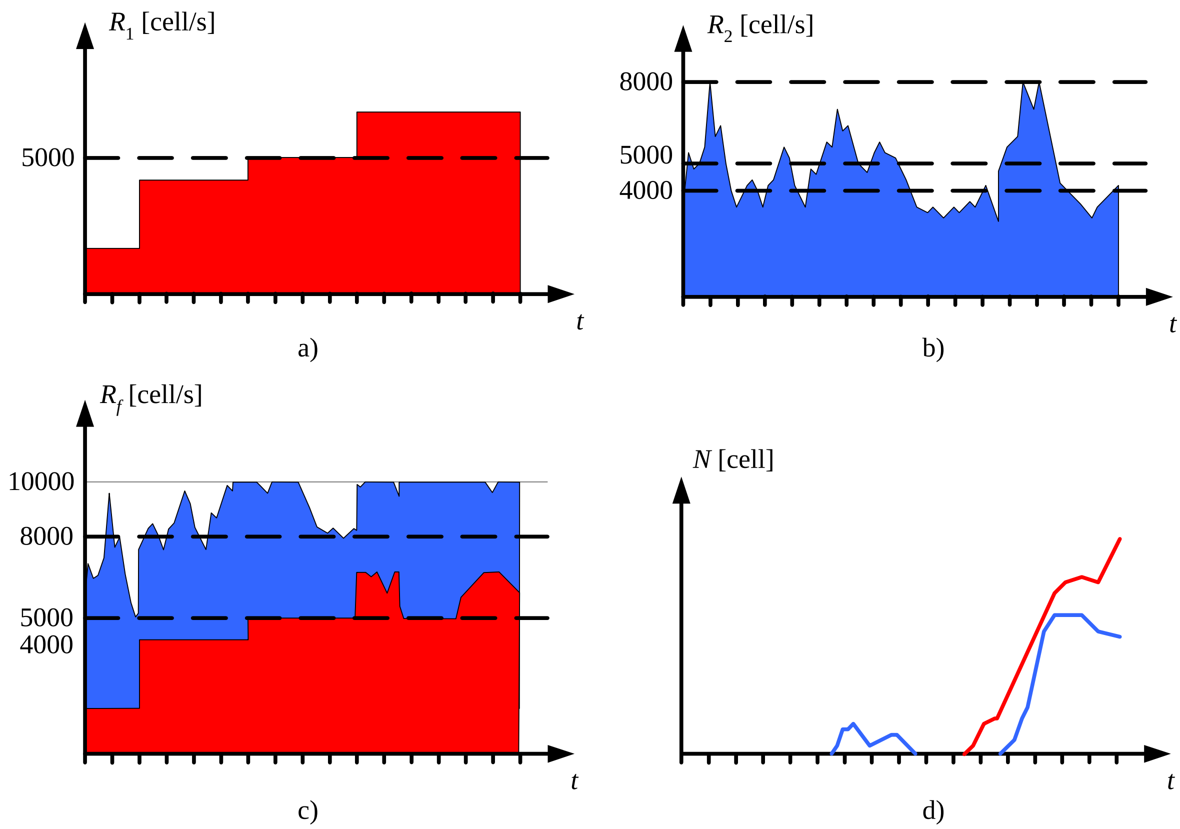
Promatrajmo određeni ATM komutacijski čvor i jedan njegov izlazni port. Kroz taj port prolaze dvije veze, jedna CBR i jedna VBR veza. Kapacitet prijenosnog sustava spojenog na port je 10000 cell/s. CBR veza ima vršnu brzinu 5000 cell/s pa je za nju toliko prijenosnog pojasa i rezervirano. VBR veza ima vršnu brzinu 8000 cell/s i srednju 4000 cell/s. Mreža je proračunala da je uz uvjete varijacije kašnjenja, maksimalnog kašnjenja i udjela izgubljenih ćelija za VBR vezu dovoljno rezervirati 5000 cell/s. Na taj način je kapacitet porta popunjen i kroz njega prolaze samo dvije veze.

Disciplina posluživanja ćelija u portu je specifična. Sastoji se od dva elementa. Prvi element je W^2FQ disciplina posluživanja koja ćelije iz spremnika poslužuje na taj način da svakoj vezi osigurava *minimalno* onoliku brzinu posluživanja koliko je rezervirala. Drugi element je spremnik sa spremanjem po vezi, tzv. *per-VC queuing*. Taj pojam označava da svaka veza koja prolazi kroz port ima svoj red čekanja (svoj red ćelija). To je preduvjet da W^2FQ disciplina posluživanja uopće može raditi. Ova dva elementa su prikazana na slici 1.14.



Slika 1.14: Elementi ATM multipleksora s W^2FQ disciplinom posluživanja

Kada određeni izvor specificira parametre svoje veze, on se ne obavezuje da će ih poštivati. Na primjer, CBR izvor može slati ćelije brzinom manjom od 5000 ćelija, a onda naglo početi slati većom brzinom. Međutim, ako prekorači 5000 cell/s, mreža mu garantira brzinu prijenosa od samo 5000 cell/s, a više eventualno ako tim viškom ne ugrozi kvalitetu ostalih veza. Isto vrijedi i za VBR uslugu. Ako srednja ili vršna brzina budu veće nego dogovorene, povećat će se udio izgubljenih ćelija. Slika 1.15 prikazuje ponašanje veza i tretmana kojeg primaju od W^{2}FQ discipline posluživanja.



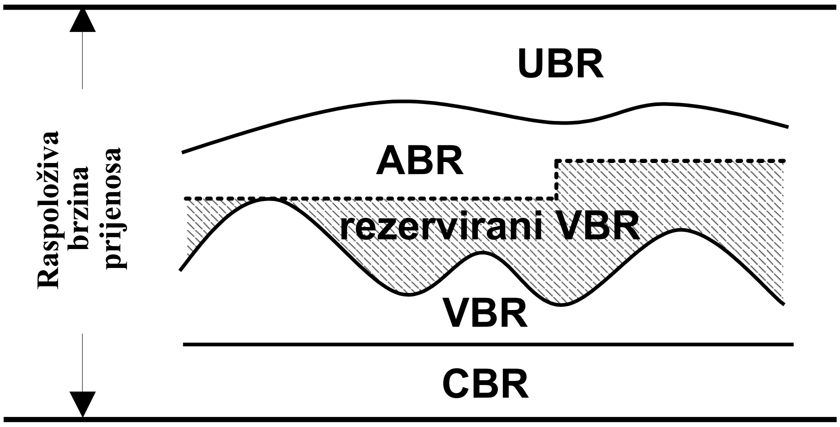
Slika 1.15: Ponašanje W^{2}FQ discipline posluživanja

Jasno je da u svakom trenutku svaka veza ima na raspolaganju minimalno onoliko koliko je rezervirala. Ukoliko obje veze u isto vrijeme šalju ćelije većom brzinom od rezervirane, povećava se broj ćelija koje čekaju u spremniku (1.15 - d). Budući da svaka ćelija u redu čekanja mora čekati posluživanje svih prethodnih, slijedi da se povećava kašnjenje ćelija u portu i kašnjenje s kraja na kraj.

W^{2}FQ disciplina posluživanja osigurava rezerviranu širinu pojasa prijenosa za svaku vezu s *garantiranom uslugom* (CBR, VBR). Međutim, postavlja se pitanje kako se tretiraju ABR i UBR veze? Različiti proizvođači imaju različita rješenja za ovaj problem. Jedno logično rješenje je da se cijeli ABR i UBR tok smatra jednom jedinstvenom vezom s garantiranom širinom pojasa prijenosa koja je jednaka širini pojasa prijenosa prijenosnog sustava umanjena za ukupnu širinu pojasa prijenosa rezerviranog za veze garantiranih usluga. Drugo rješenje je da se ćelijama UBR i ABR veza jednostavno da niži prioritet od ćelija koje pripadaju CBR i VBR vezama. Ova rješenja su bolja ili lošija ovisno od slučaja do slučaja. Ukoliko mrežni operator želi zagarantirati svojim korisnicima UBR i ABR usluga određenu protočnost bez obzira na to kako se ponašali CBR i VBR korisnici, onda je prvo rješenje zasigurno bolje.

Uz ovakav tretman pojedinih vrsti prometa u portovima ATM mreže postiže se razdioba ukupnog pojasa prijenosa prijenosnog sustava kao na slici 1.16. Primijetite da rezervirani prijenosni pojas VBR-a ne mora biti popunjen cijelo vrijeme. Nepopunjeni dio pojasa popunjavaju ABR i UBR veze.

O ATM-u su napisane brojne knjige. Temeljne knjige su pisane u periodu od 1994-1997, dok novije češće obrađuju povezanost ATM-a i drugih tehnologija. Za početnika u ovom području preporučamo knjige [5], [6], [7]. Kasnije ćemo dati reference na knjige koje se isključivo bave prometnim problemima u ATM-u.



Slika 1.16: Raspodjela prijenosnog pojasa u ATM-u

1.8 IntServ i DiffServ arhitekture Interneta

Današnji klasični Internet je datagramska mreža. Temelji se na IP-u (*Internet Protocol*), protokolu koji obavlja funkcije mrežnog sloja OSI modela (*Network Layer*). S prometne točke gledišta, Internet čine IP usmjeritelji i IP izvori/odredišta, koje ćemo nadalje jednostavno zvati terminali. Terminali stvaraju informaciju (ili ih dobivaju od drugih uređaja) i pakiraju u IP pakete. Ovdje nećemo razmatrati *multicast* ili *broadcast* pakete, nego pakete s točno određenim izvorištem i odredištem (*unicast* paketi). Svaki izvor/odredište određen je vlastitom IP adresom. Kako bi se IP paket prenosio Internetom, IP paket nosi i adresu izvorišta i adresu odredišta. Odluka o prolasku paketa kroz mrežu donosi se u usmjeritelju. On na osnovu polazne i odredišne adrese paketa određuje koji sljedeći usmjeritelj treba primiti paket. Odluka o sljedećem čvoru na putu paketa se donosi na osnovu pronalaska zapisa u tablici usmjeravanja na osnovu adresa izvorišta i odredišta u zaglavlju paketa. Kompleksnost pronalaska zapisa u tablici usmjeravanja je općenito velika, pa su i procesori u usmjeriteljima znatno opterećeni.

Algoritam usmjeravanja u usmjeriteljima stalno osvježava i nadograđuje tablicu usmjeravanja. Budući da se odluka o usmjeravanju paketa može izmijeniti u svakom trenutku, paketi koji pripadaju istoj vezi mogu putovati različitim putovima (rutama).

Usmjeritelji u klasičnom Internetu ne znaju koje su veze uspostavljene i kakvu uslugu (kvalitetu prijenosa) zahtijevaju. Korisnik ne može rezervirati potrebnu širinu pojasa za prijenos svojih podataka. Jedino se može nadati da će u danom trenutku biti dovoljno prijenosnog pojasa tako da u razumnom vremenu prenese određenu količinu podataka.

Internet ispušta IP pakete bez znanja korisnika. Kada god dođe do zagušenja u mreži, vjerojatnost ispuštanja paketa u nekom od spremnika portova usmjeritelja je jako velika. Stoga se korisnik pri prijenosu podataka mora koristiti TCP transportnim protokolom koji osigurava da će svi podaci biti preneseni na odredišnu stranu. TCP to radi na način da ponovno šalje sve pakete koje su ispušteni u mreži. Osim toga, TCP posjeduje niz mehanizama koji mogu otkriti predstojeće zagušenje u mreži i smanjiti brzinu slanja podataka u mrežu tako smanjujući količinu prometa u mreži, a tako i mogućnost zagušenja.

Internet danas nudi samo jednu uslugu - uslugu neodređene brzine prijenosa podataka (*best-effort service*). Ta usluga odgovara usluzi neodređene brzine, a nadalje ćemo je jednostavno zvati *usluga prijenosa podataka*. Razlog je taj što je Internet izvorno i osmišljen za prijenos podataka.

Za stvarnovremenske aplikacije, poput IP telefonije, koristi se UDP protokol. Taj protokol ne obavlja funkciju ponovnog slanja izgubljenih paketa jer bi ti paketi prekasno stizali na odredište. UDP također nema niti mogućnost kontrole brzine slanja paketa u mrežu jer nju diktira aplikacija koja stvara promet. Drugim riječima stvarnovremenske aplikacije mogu se samo nadati najboljemu i eventualno povećavati razinu kompresije izvorne informacije u slučaju velikog broja izgubljenih paketa.

Klasični (današnji) Internet je tako iznimno dobro sredstvo za prijenos podataka, ali loše sredstvo za stvarnovremenske usluge (*real-time service*) poput prijenosa glasa ili videa. S druge strane, ATM je potpuno zrela tehnologija i izvrsno podržava stvarnovremenske usluge, no postoje problemi u prijenosu podataka u slučaju kada se na višim slojevima koristi TCP protokol. Vjerojatno bi se mogli izgraditi transportni protokoli koji bi imali bolje ponašanje nego TCP preko ATM-a, no to nije ekonomski isplatno budući da TCP koristi većina današnjih aplikacija.

Kad je ATM osmišljen, pretpostavljalo se da će ATM poslužiti kao tehnologija koja će integrirati stvarnovremenske usluge i klasični prijenos podataka kakav susrećemo u današnjem Internetu. IP usmjeritelje je u novoj mreži trebalo zamijeniti ATM komutacijskim čvorovima koji bi posjedovali softver IP usmjeritelja i radili na poseban način. Jedna od zanimljivosti je bila ta da će se za svaki tok IP paketa sa zajedničkim izvorištem i odredištem formirati UBR veza. Na taj način bi usmjeritelji u takvoj mreži bili minimalno opterećeni. Takav koncept se zvao *Y switching*. Ta tehnologija danas više nije aktualna, iako je bila bitan korak prema koncepciji integracije IP i ATM tehnologija.

Jedan od razloga za napuštanje ideje potpune preobrazbe jezgre Interneta u ATM mrežu bila je cijena njegova uvođenja. Logičnije rješenje bi bilo nadograditi postojeću IP mrežu tako da podržava stvarnovremenske usluge. IETF[9] je uložio veliki napor u istraživanje o tome na koji način učiniti Internet spojno orijentiranom mrežom koja bi mogla osigurati kvalitetu prijenosa paketa za stvarnovremenske usluge. IETF je 1994 izdao prvi dokument o integriranim uslugama u Internet arhitekturi - RFC 1633 [8]. IETF je ujedno i najvažnija standardizacijska organizacija po pitanjima integracije usluga u jedinstvenu širokopojasnu mrežu temeljenu na Internetu. Svoje standarde donosi u obliku dokumenata koji se zovu RFC - *Request For Comment*. Ista je organizacija donijela niz dokumenata (RFC-ova) koji neposredno obrađuju temu o kojoj sada govorimo.

1.8.1 Integrirane usluge u Internet arhitekturi - RFC 1633

Ideja integracije usluga s prometne točke gledišta znači pretvaranje Interneta u nešto vrlo slično ATM mreži. Model integriranih usluga u "novom" Internetu zvat ćemo jednostavno **IntServ** (od *Integrated Services*). IntServ ne samo što pokušava integrirati stvarnovremenske usluge i usluge prijenosa podataka (*best-effort service*) u jednoj mreži, nego pokušava i zadovoljiti zahtjeve operatora.

Operatori žele upravljati prometom u svojoj mreži na taj način što mogu kontrolirati dijeljenje prijenosnog pojasa na određenom vodu (kanalu) između različitih *klasa prometa*. Pod klasom prometa se podrazumijeva promet (tok paketa) s istim obilježjem. Na primjer, jedna klasa prometa bi mogla biti cjelokupan promet određene grupe korisnika u mreži (npr. ministarstvo obrane ili zdravstva), ili bi klasu prometa mogao predstavljati promet kojeg stvara određeni protokol u mreži. Operator želi na svakom vodu moći nekoj klasi prometa dodijeliti minimalnu širinu prijenosnog pojasa. To je slično našem primjeru s W^2FQ disciplinom posluživanja i CBR i VBR vezama. Za ilustraciju, u ovom slučaju VBR vezu možemo poistovjetiti s kumulativnim tokom paketa neke video klase prometa, dok CBR vezu možemo poistovjetiti s kumulativnim tokom paketa koji pripadaju IP telefoniji.

Razlog zašto operator uopće želi kontrolirati diobu prijenosnog pojasa je taj što određene administrativne skupine u mreži mogu zakupiti određenu širinu prijenosnog pojasa u mreži. No razlog može biti i taj što operator veću pažnju posvećuje IP telefoniji nego prijenosu videa.

IntServ je naziv za model usluga u Internetu koji uključuje uslugu prijenosa podataka (*best-effort service*), stvarnovremensku uslugu (*real-time service*) i uslugu kontroliranog dijeljenja prijenosnog pojasa (*controlled link sharing*).

Definicija modela usluga u Internetu samo je prvi cilj RFC-a 1633. Drugi cilj je definicija referentnog okvira za implementaciju Interneta s IntServ-om. Taj referentni okvir (ili model) treba poslužiti pri realizaciji IntServ-a. Sastoji se od četiri osnovne komponente:

1. dijela koji implementira disciplinu posluživanja paketa - poslužitelj (*packet scheduler*),
2. rutine za prihvat poziva/veze (*admission control routine*),
3. dijela za klasifikaciju prometa, klasifikator (*classifier*),
4. protokola za rezervaciju resursa (*reservation setup protocol*).

Poslužitelj - *Packet Scheduler*

Osnovni problem današnjeg Interneta je taj što se svi tokovi paketa u usmjeriteljima tretiraju jednako. Najčešća disciplina posluživanja je FIFO. U IntServ-u usmjeritelj mora osigurati određenu kvalitetu usluge

[9] *International Engineer Task Force*, krovna standardizacijska organizacija za Internet

(QoS - *Quality of Service*) svim tokovima u mreži. To postiže određenim načinom posluživanja paketa u portovima. Zadaću posluživanja obavlja poslužitelj - *packet scheduler*[10]. Poslužitelj svoju zadaću obavlja organizirajući dolazeće pakete u redove. Redovi se poslužuju na taj način da se svakom toku osigura tražena kvaliteta usluge.

Klasifikator - *Classifier*

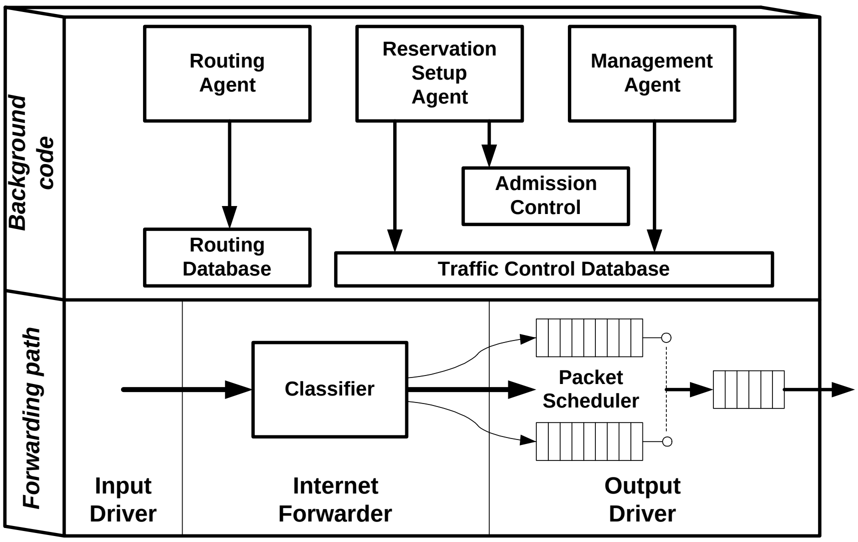
Prije nego što paketi dođu do poslužitelja, netko ih mora razvrstati u klase. Klasa mogu biti sve video veze, sve TCP veze, sve veze koje pripadaju nekoj skupini korisnika, no klasa može biti i samo jedan jedini tok IP paketa koji pripadaju nekoj konkretnoj vezi. Klasifikator obavlja zadatak razvrstavanja IP paketa u klase. Tek nakon što se paketima pridruži klasa, poslužitelj može znati na koji ih način tretirati, tj. kakvu im uslugu pružiti.

Kontrola prihvata - *Admission Control*

Određeni vod ima kapacitet C. Za svaku video vezu se mora rezervirati širina prijenosnog pojasa od $C/10$. To znači da se kroz taj vod može uspostaviti maksimalno 10 video veza. Ukoliko se uspostavi više od 10, poslužitelj neće moći zagarantirati traženu kvalitetu usluge za sve veze. Dakle, usmjeritelj mora moći odbiti neku vezu (tok paketa određene klase) ukoliko bi prihvaćanje ugrozilo kvalitetu usluge već uspostavljenih veza. Ovu funkciju obavlja rutina prihvata poziva (*Admission Control Routine*). Za jedan poziv (vezu) se ova funkcija obavlja u svim usmjeriteljima kroz koje će proći veza. Kapaciteti vodova moraju biti tako isplanirani da vjerojatnost odbijanja određene veze bude ispod određene granice, najčešće 2%.

Rezervacijski protokol - *Reservation Setup Protocol*

Rezervacijski protokol je neophodan za informiranje krajnjih točaka veze i usmjeritelja na ruti veze o parametrima veze. Ti parametri služe za podešavanje stanja internih varijabli usmjeritelja o toku paketa koji će prolaziti kroz njih. IETF je standardizirao rezervacijski protokol koji se zove RSVP (od *Resource ReSerVation Protocol*). Standardiziran je u RFC 2205 [9]. Primjena RSVP-a na IntServ model usluga specificirana je u RFC 2210 [10]. Prilikom uspostave veze, aplikacija specificira niz parametara kvalitete usluge (*QoS parameters*). Rezervacija resursa se vrši na osnovu analize vrijednosti specificiranih parametara.



Slika 1.17: Referentni model za implementaciju IntServ usmjeritelja

[10] Precizniji naziv bi bio rasporeditelj, no u ovoj skripti odustajemo od termina koje ne možemo naći u rječniku

Slika 1.17 prikazuje referentni model za implementaciju usmjeritelja. Ona pokazuje kako bi se spomenute komponente mogle ugraditi u određeni IP usmjeritelj koji bi bio proširen tako da podržava integrirane usluge.

Jasno je da se IntServ usmjeritelj sastoji od dvije skupine funkcionalnosti: puta prosljeđivanja (*Forwarding path*) i pozadinske rutine (*Background code*). *Forwarding path* se izvršava za svaki pojedini paket, dok se pozadinski kôd izvršava prilikom uspostave/raskida poziva.

Bitno je primijetiti da usmjeritelji u IntServ arhitekturi usluga moraju održavati interne podatke o uspostavljenim vezama. To je jedna od osnovnih razlika IntServ usmjeritelja u odnosu na konvencionalni usmjeritelj.

1.8.2 Arhitektura za diferencirane usluge - RFC 2475

IntServ arhitektura usluga zahtijeva da svi usmjeritelji u mreži kroz koje prolazi određena veza održavaju podatak o parametrima kvalitete usluge koje ta veza zahtijeva. Ti parametri se prosljeđuju usmjeritelju koristeći RSVP protokol. Zapravo, Internet koji implementira IntServ arhitekturu gotovo da se ponaša jednako kao i ATM.

Međutim, uspostavljanje veze pomoću RSVP protokola je relativno složen proces. On zahtijeva slanje RSVP paketa do svakog usmjeritelja na putu veze, procesiranje svakog zahtjeva za uspostavu veze itd. Neki usmjeritelji u mreži su jače opterećeni ovim procesiranjem, a neki slabije.

Svaka paketski orijentirana mreža dijeli se na rubnu (*edge*) i temeljnu (*backbone*) mrežu. Rubnu mrežu čine usmjeritelji koji služe kao koncentratori prometa koji dolazi od krajnjih korisnika. Dosta često su rubni usmjeritelji međusobno direktno povezani. No, nelogično je međusobno neposredno vezati sve rubne usmjeritelje. Lakši način njihovog povezivanja je preko usmjeritelja koji služe za usmjeravanje samo onog prometa kojeg primaju od drugih usmjeritelja. Takvi usmjeritelji grade temeljnu mrežu. Budući da temeljna mreža povezuje rubne dijelove mreže, ona prenosi iznimno veliku količinu prometa. Stoga temeljna mreža ima daleko veći prijenosni kapacitet nego rubna mreža.

U IntServ arhitekturi usmjeritelji rubne mreže primaju zahtjeve za uspostavu veze od korisnika i najčešće taj zahtjev dalje prosljeđuju usmjeriteljima temeljne mreže. To znači da usmjeritelji temeljne mreže zaprimaju daleko veći broj zahtjeva, a time i RSVP paketa, od rubne mreže. Ovo predstavlja veliki problem jer broj veza o kojima se brine usmjeritelj temeljne mreže može biti iznimno velik, što znatno opterećuje njegove procesore. Osim toga, udio prometa RSVP paketa u ukupnom prometu je znatan. Iako je mrežu moguće u cijelosti osmisliti s IntServ arhitekturom, usmjeritelji u takvoj mreži mogu raditi na granici procesnih mogućnosti. Zbog potrebe izgradnje "procesorski jačih" usmjeritelja, njihova cijena je velika, a time i cijena cjelokupne mreže.

Iz ovog razloga se počelo razmišljati o mreži u kojoj usmjeritelji ne bi trebali održavati stanja o uspostavljenim vezama, a ipak osiguravati kvalitetu prijenosa paketa za pojedine veze. Rezultat istraživanja je arhitektura za diferencirane usluge (*Architecture for Differentiated Services*), ukratko **DiffServ**. Temeljni dokument ove arhitekture je RFC 2475 [11].

Ideja arhitekture diferenciranih usluga je vrlo jednostavna. DiffServ se temelji na modelu u kojem se promet koji ulazi u DiffServ mrežu diferencira (klasificira) i dodatno kontrolira/uvjetuje (*condition*) u rubnim usmjeriteljima DiffServ mreže, te dodjeljuje određenoj agregatnoj klasi - BA (*behavior aggregate*). Agregatna klasa (BA) je podskup ukupnog toka paketa koji se određuje po određenom pravilu. To pravilo može biti administrativno (npr. svi paketi koji pripadaju određenoj administrativnoj domeni) ili se može temeljiti na zahtjevima na kvalitetu prijenosa u mreži.

Svakoj agregatnoj klasi BA se dodjeljuje određeni DS kôd (*Differentiated Services Codepoint*) koji ju jedinstveno opisuje. Svaki paket u određenoj klasi nosi DS kôd svoje klase. Svi usmjeritelji u središnjem dijelu DiffServ mreže čitaju ovaj kôd i paketu daju tretman kakav je definiran za njegovu klasu. Pravilo po kojem se paket određene klase tretira na određenom usmjeritelju se zove PHB (*Per Hop Behavior*). Na primjer, PHB može biti pravilo da se paketi s vrijednošću DS kôda D_1 poslužuju s maksimalnim kašnjenjem na usmjeritelju od $2ms$, a s DS kôdom D_2 s maksimalnim kašnjenjem na usmjeritelju $5ms$. Ovo pravilo u usmjeritelju implementira određena disciplina posluživanja.

Kôd klase zapisan je u zaglavlju IP paketa, u polju koje se zove DS polje (DS *field*). To polje zamjenjuje postojeći TOS oktet u zaglavlju IPv4 paketa i *Traffic Class* oktet u zaglavlju IPv6 paketa. Definicija ovog polja za DiffServ arhitekturu nalazi se u dokumentu RFC 2474 [12].

Dakle, u DiffServ mreži su definirane različite agregatne klase (BA). To su agregatni tokovi paketa koji imaju donekle zajedničko ponašanje. Agregacija označava ujedinjenje paketskih tokova veza koji imaju neke zajedničke zahtjeve na kvalitetu usluge. Usluga se u ovom slučaju odnosi na kvalitetu prijenosa paketa kroz mrežu, a odlikuje se granicama na kašnjenje paketa, varijaciju kašnjenja i udio izgubljenih paketa. Lista parametara i njihovih vrijednosti koji definiraju jednu diferenciranu uslugu zove se SLS (*Service Level Specification*). SLS se dogovara između korisnika usluge i DiffServ mreže.

Postupak dodjele paketa nekoj agregatnoj klasi se zove klasifikacija ili diferencijacija. Klasifikacija se provodi određivanjem parametara paketskog toka i određivanjem klase koja tolerira takve vrijednosti parametara. Nakon što je određeni tok primljen u klasu, mreža ga mora stalno nadzirati. U slučaju da tok želi izaći izvan dozvoljenih parametara svoje klase, mreža ga mora na određeni način oblikovati tako da se vrati u dozvoljene vrijednosti parametara. Taj proces se zove kondicioniranje toka (*conditioning*). Kondicioniranje nije proizvoljan proces nego se i on definira određenim ugovorom između korisnika i mreže. Taj ugovor se naziva TCS (*Traffic Conditioning Specification*). TCS je dio SLS.

PHB (*Per Hop Behavior*) je algoritam implementiran u usmjeriteljima mreže koji paketima određene agregatne klase osigurava kvalitetu usluge (QoS) koja je definirana za tu klasu. Svaka klasa ima svoj PHB pa govorimo o PHB grupi. Načini osiguravanja te kvalitete se temelje na disciplini posluživanja u portovima usmjeritelja.

DiffServ domena

DiffServ (ili DS) domena je skup DiffServ čvorova koji imaju zajedničku politiku pružanja usluge i zajedničku PHB grupu. DiffServ domena ima oštre granice. Razlikujemo rubne čvorove (*boundary node*) i unutarnje čvorove (*interior node*). Svi čvorovi za sve pakete odabiru odgovarajući PHB na osnovu DS polja u zaglavlju paketa. Rubni čvorovi služe za povezivanje DS domene s drugim DS i ne-DS domenama. Osim sposobnosti odabira PHB za određenu klasu oni moraju moći izvršavati kondicioniranje prometa koji ulazi u domenu.

Rubni čvorovi služe i kao *ingress* i *egress* čvorovi. *Ingress* čvor je onaj čvor koji prima promet u mrežu i na bilo koji način ga obrađuje. *Egress* čvor je onaj čvor kroz kojeg prolazi promet koji napušta domenu. I *ingress* i *egress* čvorovi mogu vršiti kondicioniranje prometa.

Bitno je znati da je *ingress* usmjeritelj odgovoran za stvaranje prvog DS koda i stavljanje tog koda u DS polje. Stvaranje prvog koda je rezultat kondicioniranje prometa, a ne klasifikacije.

DiffServ regija

DiffServ regija je skup susjednih DiffServ domena. Sve domene su međusobno ravnopravne (*peer domains*). Svaku domenu odlikuje vlastita politika pružanja usluga i vlastita PHB grupa. Iako različite, domene u regiji mogu osigurati jedinstvenu uslugu tokovima koji se protežu preko nekoliko domena. U tom slučaju domene moraju međusobno sklopiti *peering* SLS koji definira TCS koji diktira kondicioniranje prometa na međudomenskim granicama. U općem slučaju, prilikom prelaska paketa iz jedne u drugu domenu događa se promjena vrijednosti DS polja. Taj proces zovemo preoznačavanje (*re-marking*).

Klasifikacija i kondicioniranje

Ugovor na razini usluge - SLS (*Service Level Specification*) definira pravila za klasifikaciju, prometne profile (granične vrijednosti prometnih parametara) i akcije koje treba primijeniti na promet koji je u i izvan prometnog profila. SLS tako implicitno ili eksplicitno uključuje definiciju TCS (*Traffic Conditioning Specification*).

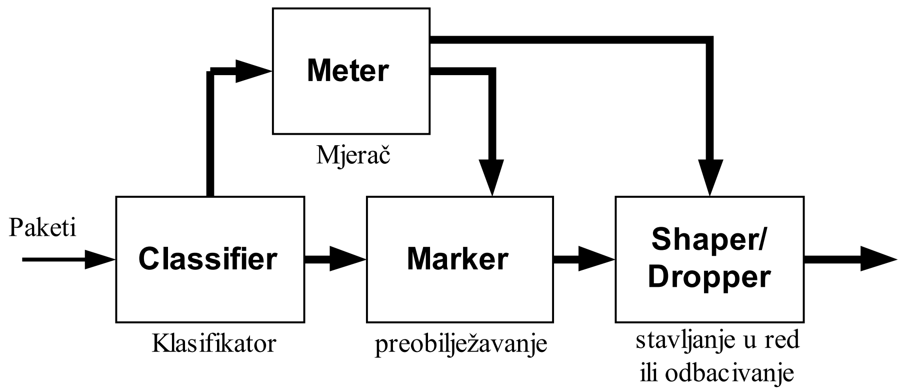
Kada neki paket ulazi u DiffServ domenu potrebno ga je na osnovu SLS pridružiti određenoj BA i dati mu DS kôd. Ovaj postupak se odvija u *ingress* usmjeritelju. Dodatno je potrebno izvršiti postupak uvjetovanja.

Prvi korak u uvjetovanju je klasifikacija. Ona sortira pakete prema uvjetima definiranim u SLS. Klasifikacija je proces identifikacije dijela prometa koji se uvjetovanjem može pridružiti jednoj ili više agregatnih klasa unutar DiffServ domene. Zadatak klasifikacije obavljaju klasifikatori (*classifiers*) na osnovu sadržaja određenog dijela zaglavlja paketa.

Postoje dvije vrste klasifikatora: *Behavior Aggregate* (BA) i *Multi-Field* (MF). BA (*Behavior Aggregate*) klasifikator vrši klasifikaciju samo na osnovu DS polja u zaglavlju IP paketa. MF (*Multi-Field*) klasifikatori vrše klasifikaciju na osnovu DS polja i jednog ili više drugih polja u zaglavlju poput izvorišne i odredišne adrese. Budući da svaka klasa ima svoje pravilo uvjetovanja koje je definirano s TCS, zadatak klasifikatora je usmjeriti paket odgovarajućem elementu rutine za uvjetovanje prometa.

Primijetimo da u DiffServ mrežu paketi mogu pristizati iz drugih DiffServ domena ili iz ne-DeffServ Interneta. Kako bi klasifikatori ispunjavali svoj zadatak oni moraju analizirati DS polje, što znači da DS polje mora već unaprijed biti postavljeno. U slučaju paketa koji stižu iz konvencionalne IP mreže analizira se sadržaj TOS polja.

Uvjetovanje na osnovu TCS se izvršava za svaku klasu posebno. Uvjetovanje ima zadatak provjeriti da li određena klasa prometa odgovara profilu koji je propisan za tu diferenciranu uslugu. Ukoliko određeni paket odgovara propisanom profilu prometa (*in-profile packet*), on se prosljeđuje dalje u DS domenu. Svi paketi koji ne odgovaraju propisanom profilu (*out-of-profile packets*) mogu biti odbačeni (*dropped*) ili stavljeni u red čekanja u spremniku (*shaped*). Trenutni prometni profil mjeri mjerač. On izmjerene prometne parametre uspoređuje s onima specificiranim u TCS i paket obilježava kao *in-profile* ili *out-of-profile*. Slika 1.18 prikazuje međusobni odnos navedenih komponenti.



Slika 1.18: Klasifikator i uvjetovanje u DiffServ arhitekturi

Rezultat uvjetovanja je označavanje uvjetovanih paketa (*marking*). *Marking* je proces stvaranja DS koda za paket koji ulazi u mrežu. Dakle ovaj postupak se događa u rubnom usmjeritelju DiffServ mreže - *ingress*u. Usmjeravanje u DiffServ usmjeriteljima se vrši isključivo na osnovu DS polja.

PHB i rezervacija mrežnih resursa

Po definiciji je *Per Hop Behavior* opis ponašanja prosljeđivanja paketa koje se može zamijetiti izvana na nekom DiffServ čvoru (usmjeritelju). Primjeri ponašanja prosljeđivanja (*forwarding behavior*) su kašnjenje, gubitak paketa ili *jitter*. PHB je sredstvo kojim čvor osigurava resurse za agregatnu klasu. RFC 2475 navodi primjer PHB-a koji osigurava minimalnu rezervaciju širine pojasa od $X\%$ ukupnog kapaciteta voda na kojem se PHB primjenjuje. To upravo odgovara dobro poznatom načinu rada W^2FQ-a - konkretne discipline posluživanja paketa.

Rezervacija mrežnih resursa dijelom je implementirana PHB grupom. No, PHB grupa mora pored toga biti dobro konfigurirana i administrirana tako da efektivno dijeli raspoloživi prijenosni kapacitet između čvorova, a sve u skladu s politikom pružanja usluga u danoj domeni.

U ovom dijelu nećemo dalje govoriti o IntServ i DiffServ arhitekturama jer je to gradivo uistinu opširno. Definiran je niz RFC-ova koji pobliže opisuju ove arhitekture i okvire u kojima bi trebale biti implementirane. IETF pokušava sve precizno definirati. Na primjer RFC 3086 [13] definira DiffServ PHB-ove i pravila za njihovu specifikaciju. Sličan RFC se može ili će se moći naći za bilo koji značajan segment arhitektura koje su iznesene u dva spomenuta temeljna dokumenta. Izuzetno je zanimljivo pročitati RFC 2998 [14] koji govori o okviru rada IntServ-a preko DiffServ mreže.

1.9 MPLS - Multiprotocol Label Switching

Bez obzira da li se govori o Intserv ili Diffserv arhitekturi usluga, usmjeritelji rade na isti način. Svaki usmjeritelj u mreži analizira složeno zaglavlje svakog IP paketa i neovisno donosi odluku kamo ga uputiti. Odluku donosi na osnovu zapisa u zaglavlju paketa. Komutacija IP paketa je proces koji se odvija u dva koraka. Za svaki se paket određuje njegova pripadna "klasa ekvivalentnog prosljeđivanja" - FEC (*Forwarding Equivalence Class*). U sljedećem koraku se za svaku FEC klasu određuje sljedeći skok (*hop*) - sljedeći usmjeritelj i vod (port) do tog usmjeritelja.

FEC (*Forwarding Equivalence Class*) je podskup svih paketa koje odlikuje jednak način tretiranja u mreži i zajednički put kroz mrežu. Pravilo za određivanje zajedničkih odlika je proizvoljno. Stoga može biti puno različitih FEC-ova. Konvencionalni usmjeritelji smatraju da neka dva paketa pripadaju istom FEC-u ako u tabeli usmjeravanja postoji prefiks IP adrese koji najbolje odgovara odredišnim adresama paketâ. Dakle istom FEC-u pripadaju oni paketi koji će se jednako komutirati. Tako se u klasičnom IP-u gubi razlika između klasificiranja i komutiranja paketa klase.

Već je rečeno da je komutacija u IP čvorovima komplicirana procedura i da se obavlja posebno i neovisno za svaki paket. To jako opterećuje usmjeritelje tako da su potrebne snažne i skupe komponente kako bi sve radilo besprijekorno. To je manji problem konvencionalne IP mreže. Veći problem je nemogućnost da operator unutar svoje mreže po želji može usmjeravati promet i pojedinim tokovima u mreži davati poseban tretman. Ruta kojom se usmjeravaju paketi u mreži određuje protokol usmjeravanja (*routing protocol*), poput OSPF-a. Operatori bi htjeli usmjeravati dio prometa bez utjecaja protokola usmjeravanja. Oba problema rješava MPLS.

1.9.1 Osnove MPLS-a

MPLS je tehnika komutacije paketa u paketskoj mreži. Specificirana je u dokumentu RFC 3031 [15]. Obično govorimo što neki pojam jest, a ne što nije, no u ovom slučaju moramo napraviti iznimku. MPLS nije nikakva koncepcija, niti arhitektura usluga poput Intserv-a ili Diffserv-a. MPLS je samo posebna vrsta tehnike komutiranja paketa u mreži. MPLS dolazi od *Multiprotocol Label Switching* - višeprotokolno komutiranje labela[11]. Ova tehnika ne pripada ni mrežnom sloju niti sloju podatkovne veze (DLL) OSI modela. MPLS je po funkcionalnosti između ta dva sloja. Riječ *multiprotocol* dolazi od mogućnosti MPLS-a da radi s bilo kojim protokolom mrežnog sloja. Ovdje se prvenstveno koncentriramo na Internet protokol, no vidjet ćemo da se ATM, pa čak i Frame Relay mogu uklopiti u koncept MPLS-a.

MPLS mreža sastoji se od rubnih i unutarnjih čvorova. Kada neki paket ulazi u MPLS mrežu, njemu se u rubnom čvoru dodjeljuje određena labela. Labela je oznaka paketa. Rubni čvor je za paket *ingress* čvor. U slučaju IP paketa, ta se labela "nalijepi" ispred zaglavlja. Kada je paketu dodijeljena labela on je označen ("laberiran"). Označeni paket se **komutira** kroz MPLS mrežu po unaprijed određenom putu dok ne dođe do odredišnog rubnog čvora - *egress* čvora. U *egress* čvoru se skida labela s pakta i paket napušta MPLS mrežu. Put od *ingress* do *egress* čvora se zove LSP - *Label Switched Path.* Budući da čvorovi u MPLS mreži obavljaju i komutaciju i operacije usmjeravanja, zbog kompatibilnosti s konvencionalnim usmjeriteljima, nazivaju se *Label Switching Router* - LSR.

Ključna riječ je komutacija. Svaki čvor u MPLS mreži komutira paket samo na osnovu njegove labele, ne analizirajući sadržaj zaglavlja paketa. Zaglavlje paketa se analizira samo u *ingress* čvoru mreže. Tamo se svaki paket pridružuje određenoj klasi ekvivalentnog prosljeđivanja - FEC-u. FEC-u je na tom čvoru pridružena labela - jedinstven kôd FEC-a. Ukoliko zaglavlje paketa ima rezervirano polje za labelu, onda se kôd upisuje u to polje. Primjer je ATM ćelija koja ima VPI i VCI polja koja jedinstveno opisuju vezu kojoj pripada ćelija. U slučaju IP-a ne postoji polje za identifikaciju veze kojoj pripada paket, pa se ispred zaglavlja paketa dodaju dodatni bitovi bitova koji nose labelu. Ti dodatni bitovi se u MPLS terminologiji zove *shim* (klin). Kada je paketu jednom dodijeljena labela na *ingress* čvoru, paket se upućuje prema sljedećem čvoru. Na svakom unutarnjem čvoru se događa proces komutacije pomoću labele (*label switching*).

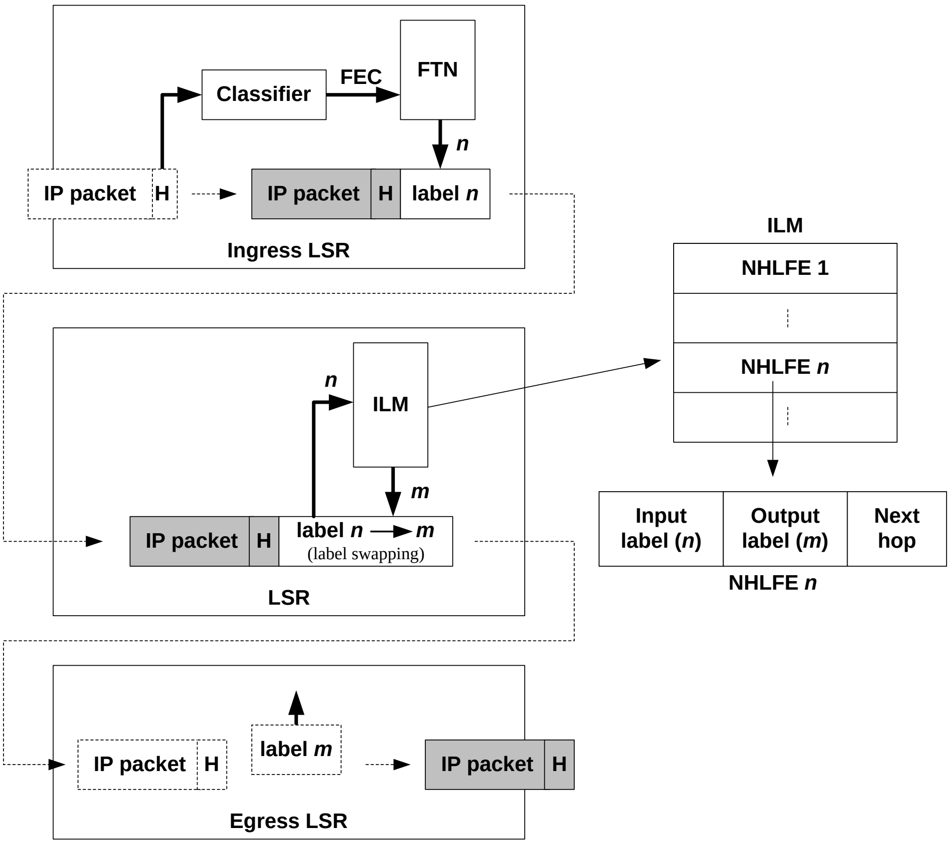
Kada neki LSR primi označeni paket, on koristi labelu kao *indeks* u tabeli dolaznih labela. Ta tabela se naziva *Incoming Label Map* ili ILM. Svaki zapis u toj labeli je oblika:

$$\langle \text{ulazna labela, izlazna labela, izlazni port} \rangle$$

[11] Engleski pojam *label* ovdje ćemo prevoditi posuđenicom labela zbog njene sličnosti s originalnim nazivom

Ovaj zapis se zove *Next Hop Label Forwarding Entry* ili NHLFE. Dolazna labela se zamjenjuje (*swap*) s izlaznom labelom, a paket se upućuje na izlazni port. Iako je vrijednost labele promijenjena, ona još uvijek označava isti FEC! To znači da je vrijednost labele samo lokalnog značenja za dotični LSR i svaki LSR može imati različit kôd za isti FEC. MPLS paket na ovaj način nastavlja svoj put (LSP) dok ne dođe do *egress* LSR-a. On skida labelu s paketa i paket napušta mrežu.

Rezimirajmo! LSP je niz LSR-ova <R_1, R_2, ... , R_n>. R_1 je *ingress* LSR. Njegova zadaća je određivanje FEC-a kojem pripada paket. To radi pomoću FEC-to-NHLFE (FTN) tabele. U toj tabeli piše koji neoznačeni paket koji ulazi u MPLS mrežu pripada kojem FEC-u. Nakon što je određen FEC paketa, on stavlja labelu na paket. R_1 koristi vrijednost labele kao indeks u ILM-u i pronalazi port putem kojeg će označeni paket stići do R_2. R_2 koristi istu labelu kao indeks za pronalaženje NHLFE. Potom mijenja trenutnu labelu s izlaznom labelom i upućuje paket na izlazni port kojim će paket stići do R_3. Postupak se nastavlja dok paket ne stigne do R_n - *egress* LSR. R_n skida labelu s paketa i paket napušta MPLS mrežu. Ovaj proces opisuje slika 1.19 za LSP kojeg čine tri LSR-a: *ingress*, središnji i *egress* LSR.



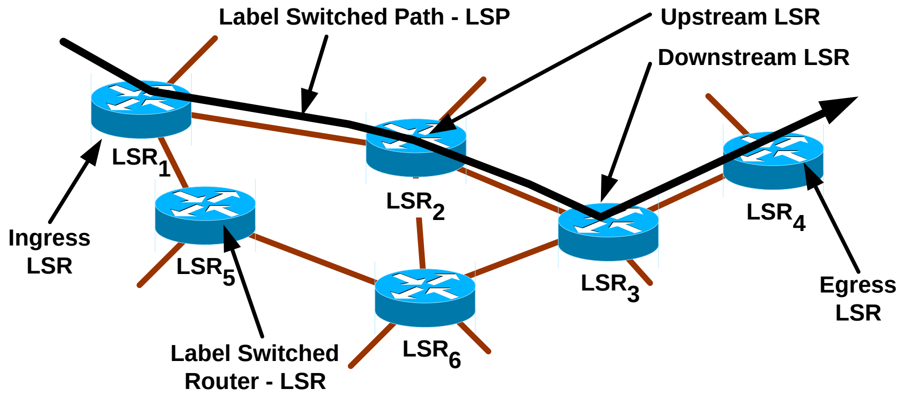
Slika 1.19: Komutacija labela u MPLS mreži (*Label Switching*)

Bitno je primijetiti da je složenost algoritma za traženje zapisa u ILM tabeli (NHLFE) $O(1)$. Vrijednost labele sama po sebi predstavlja adresu NHLFE-a u ILM-u. *Label switching* je stoga izuzetno brza operacija i zahtijeva relativno malo procesiranja u odnosu na komutaciju u konvencionalnim usmjeriteljima.

1.9.2 Uspostava LSP-a

Slika 1.20 prikazuje MPLS mrežu i jedan LSP. LSP je vrlo sličan jednosmjernom VC-u u ATM-u. Da bi LSP postojao u mreži, mora se uspostaviti. To znači da svi čvorovi kroz koje prolazi LSP održavaju zapis o njegovu prisustvu. To se ogleda u NHLFE zapisu i zapisima u FTN tabeli.

LSP se uspostavlja tako što se svi čvorovi kroz koje će prolaziti LSP dogovore koje labele će se primjenjivati za dati FEC na ruti LSP-a. Drugim riječima, susjedni parovi čvorova se moraju dogovoriti



Slika 1.20: MPLS mreža: LSR, *ingress* LSR, *egress* LSR, LSP

o tome kojom labelom će se označavati FEC na dionici između para čvorova. Promatrajući jedan takav par, npr. LSR_2 i LSR_3, zaključujemo da će paketi LSP-a strujati od LSR_2 i LSR_3. U skladu s tim LSR_2 se naziva *upstream* LSR (Ru), a LSR_3 se naziva *downstream* LSR (Rd).

Dva su pristupa u pridruživanju labele FEC-u: *Downstream-on-Demand* pristup i *Unsolicited Downstream* pristup. U *Downstream-on-Demand* pristupu *upstream* čvor inicira pridruživanje. On šalje zahtjev *downstream* LSR-u da za određeni novi FEC izvrši pridruživanje. Nakon pridruživanja, *downstream* LSR obavještava *upstream* LSR o tome koju labelu L je pridružio FEC-u F. Jednaku proceduru će napraviti *downstream* LSR sa svojim *downstream* LSR-om i *upstream* LSR sa svojim *upstream* LSR-om. Rezultat ove procedure je izgradnja novih NHLFE-ova u ILM-ovima čvorova. Proces slanja informacije o pridruženoj labeli zove se distribucija labele (*label distribution*).

U *Unsolicited Downstream* pristupu *downstream* LSR distribuira labelu bez da je *upstream* LSR eksplicitno zatražio pridruživanje.

Kako bi se uspostavio LSP potrebno je prenositi signalizacijsku informaciju između LSR-ova. Protokol za prijenos ove informacije općenito se naziva protokol distribucije labela (*label distribution protocol*). Budući da MPLS nije do kraja standardiziran, trenutno postoje dvije opcije za implementaciju ovog protokola u MPLS mrežama. Prva opcija je korištenje protokola koji se zove LDP (*Label Distribution Protocol*)[12]. Specificiran je u dokumentu RFC 3036 [16]. Druga opcija je korištenje već spomenutog RSVP protokola [9].

1.9.3 MPLS i ATM

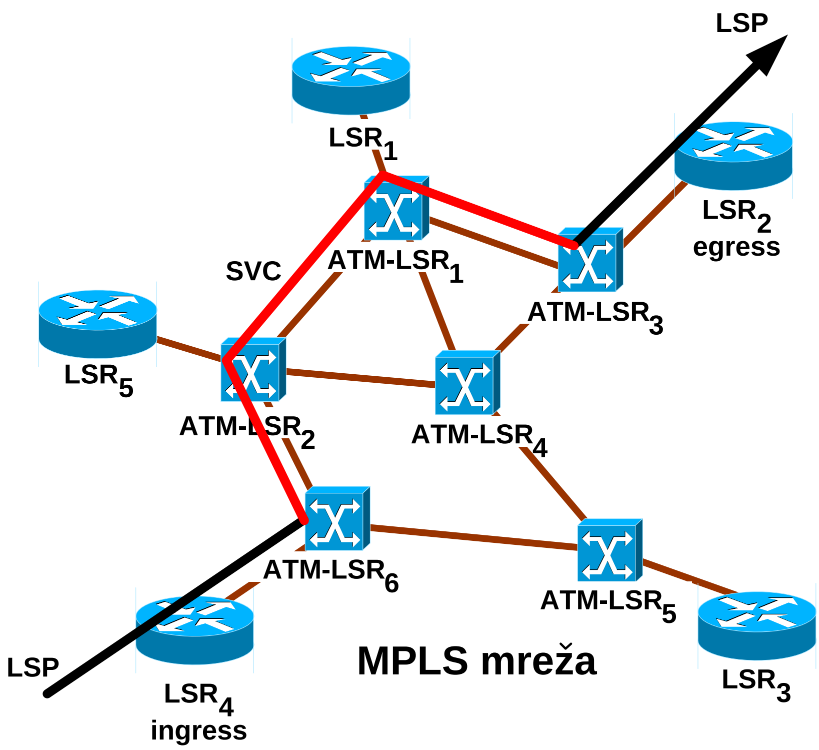
MPLS i ATM imaju gotovo identične tehnike komutiranja. Jedina razlika je ta što ATM svoju "labelu" zapisuje u zaglavlje ćelije, točnije u VPI i VCI polju u zaglavlju. Ukoliko labeli iz MPLS mreže pridružimo kombinaciju VPI/VCI i uspijemo IP pakete "ugurati" u ATM ćelije, ATM mrežu smo uspjeli integrirati u MPLS arhitekturu. Jedina promjena koju moramo izvršiti na ATM komutacijskim čvorovima je nadograditi njihov softver tako da mogu surađivati s IP MPLS mrežom. Tako nadograđen ATM komutacijski čvor zovemo ATM-LSR.

ATM mreža se na taj način može integrirati u MPLS mrežu. Zapravo, MPLS mreža se može sastojati od temeljne ATM mreže sastavljene od ATM-LSR-ova i rubne mreže sastavljene od LSR-ova. To je prikazano na slici 1.21.

LSP u IP domeni se preslikava u ATM komutiranu virtualnu vezu (SVC - *Switched Virtual Connection*), a pri izlasku iz ATM mreže se SVC ponovno preslikava u LSP. Jedini problem koji ostaje je način preslikavanja paketa iz IP domene u ATM ćelije.

ATM ima tri protokolna sloja koji su pandan OSI složaju. Najniži sloj je fizički koji se bavi fizičkim prijenosom ćelija između dva neposredno povezana ATM čvora. Prvi viši sloj je ATM sloj koji se bavi komutacijom ćelija u mreži, uređivanjem zaglavlja ćelija i nekim drugim funkcijama. Najviši sloj je adaptacijski (prilagodni) ATM sloj (AAL - ATM *Adaptation Layer*). Taj sloj se bavi prilagodbom

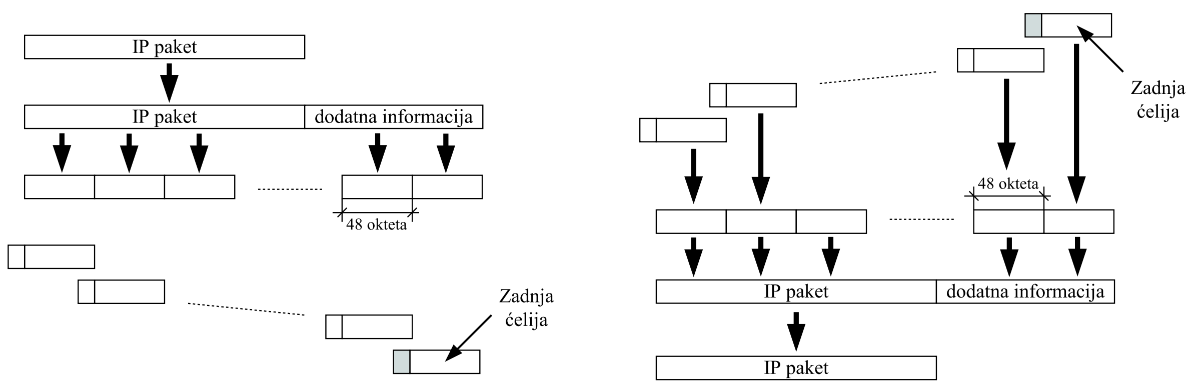
[12]Opći naziv za protokol distribucije labela i naziv ovog konkretnog protokola koincidiraju



Slika 1.21: MPLS mreža s ATM temeljnom mrežom

informacijskog toka s viših slojeva za prijenos ATM ćelijama. Postoji nekoliko vrsta tih slojeva, no u MPLS-u će se koristiti AAL 5.

AAL 5 ima za zadatak primljeni paket "rascjepkati" u komadiće koji mogu stati u ATM ćelije i iz ATM ćelija spajanjem ponovno rekonstruirati originalni paket. Ovaj postupak opisan je na slici 1.22. IP paket,



(a) Segmentacija (segmentation) (b) Združivanje (reassembly)

Slika 1.22: Princip preslikavanja IP paketa u ATM ćelije

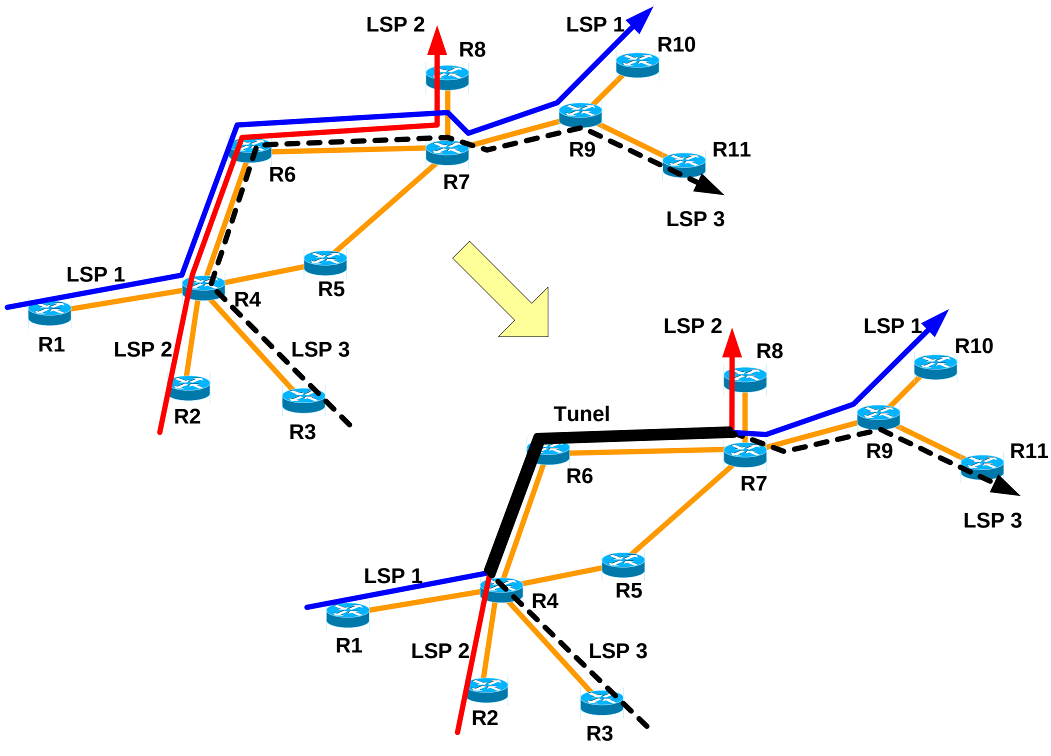
ili bilo koji drugi paket ulazi u AAL 5 sloj. Prvo mu se dodaje kontrolna informacija u kojoj je zapisana duljina paketa, zaštitna sekvenca za paket i neki drugi parametri. Duljina dodatne informacije tako je podešena da je ukupna duljina paketa plus dodatka višekratnik od 48 okteta, koliko je dug informacijski dio ćelije. Nakon dodavanja kontrolne informacije, novi paket se segmentira u segmente duljine 48 okteta. Ovaj postupak se zove segmentacija (*segmentation*).

Nakon segmentacije dobiveni segmenti se predaju ATM sloju koji dodaje zaglavlja i formira ćelije. U slučaju MPLS-a, zaglavlje ATM ćelije u svom VPI/VCI polju nosi labelu koja korespondira adresi SVC-a. Još se nešto važno zbiva pri dodavanju zaglavlja. ATM sloj mora na neki način indicirati koja je zadnja ćelija u grupi ćelija koje nose paket. To se radi na taj način što se u poseban bit (AUU bit - ATM *user to user indication*) u svih ćelija osim zadnje upisuje 0, a u AUU bit zadnje ćelije se upisuje 1.

Kada ove ćelije dođu na odredišni ATM čvor, zbiva se obrnuti postupak. Odredišna aplikacija koja prima ćelije promatranog SVC-a prima ćelije sve dok ne naiđe ćelija s AUU bitom jednakim 1. Nakon toga se skidaju zaglavlja ćelija i informacijski dijelovi formiraju početnu jedinicu (paket plus dodatna informacija). Kontrolna informacija provjerava zaštitni kod kako bi vidjela da li je došlo do pogrešnog prijenosa bitova i provjerava da li duljina paketa odgovara indiciranoj. U slučaju pogreške u prijenosu cijeli se paket odbacuje. Ukoliko je sve u redu, iz jedinice se ekstrahira originalni (IP) paket i prosljeđuje se višim slojevima. U ovom slučaju prosljeđuje se MPLS-u koji će na paket ponovno dodati labelu ili će omogućiti paketu da napusti MPLS mrežu.

1.9.4 Tuneliranje i stavljanje labela na stog

Prije smo rekli da LSP u MPLS-u odgovara VC-u u ATM-u. No, LSP je i mnogo više. Pogledajmo sliku 1.23. U gornjem lijevom kutu prikazana je MPLS mreža s tri uspostavljena LSP-a. Lako je vidjeti da



Slika 1.23: Tuneliranje u MPLS-u

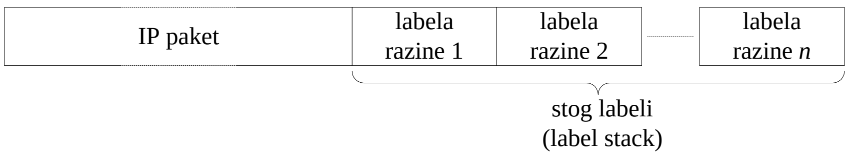
ta tri LSP-a imaju dio puta koji im je zajednički: <R4, R6, R7>. Naravno, broj LSP-ova sa dijelom zajedničke rute može biti velik. Ukoliko takvi LSP-ovi prenose pakete koji zahtijevaju jednaku uslugu, npr. paketi IP telefonije, logično ih je pokušati administrirati kao grupu. Na primjer, umjesto da na dijelu rute <R4, R6, R7> rezerviramo prijenosni pojas za svaki od n LSP-ova, možemo rezervirati dovoljno prijenosnog pojasa za sve pakete i prenositi ih kao da pripadaju jednom LSP-u.

MPLS ovu sposobnost implementira pojmom LSP tunela (*LSP Tunnel*). U primjeru na slici 1.23 možemo uspostaviti LSR <R4, R6, R7>. Sve označene (laberirane) pakete koji pripadaju LSP-ovima

LSP 1, LSP 2 i LSP 3 možemo smatrati paketima koji pripadaju istom FEC-u. Pakete promatramo zajedno s pripadajućim labelama. Pošto je R4 prvi LSP na ruti, on je ujedno i *ingress* LSR za sva tri toka. R4 dodaje novu labelu na paket i ne dira onu koja je već nalijepljena na zaglavlje IP paketa. Dakle, IP paket sada ima dvije labele: labelu razine 1 koja opisuje njegov originalni FEC, i labelu druge razine koja opisuje njegovu pripadnost FEC-u LSP-a <R4, R6, R7>. Ovaj LSP se zove LSP tunel.

U LSP tunelu se komutacija vrši samo na osnovu labele najvišeg stupnja. Vrijednost labele prvog nižeg stupnja se mijenja samo na *egress* LSR-u tunela, tj. LSR-u R7. LSR R7 uklanja labelu druge razine i paket nastavlja put izvornog LSP-a. Na taj način tunel smanjuje broj LSR-ova na kojima se vrši komutacija. LSP 2 tako ima rutu <R2, R4/R7, R9, R11>, iako paketi prelaze put <R2, R4, R6, R7, R9, R11>.

U općem slučaju, više tunela se može udružiti u jedan zajednički tunel. Pri svakom dodatnom združivanju stvara se novi LSP i dodaje se nova labela na već postojeće. Labele formiraju svojevrstan stog jer se nova labela dodaje uvijek na vrh i skida s vrha. Stog je prikazan na slici 1.24. Stvaranje stoga kod ATM-a nije predviđeno iako postoje ideje da bi se labela prve razine mogla stavljati u VCI polje, a labela druge razine u VPI polje zaglavlja ATM ćelije.



Slika 1.24: Stog labela (*label stack*)

1.9.5 Primjena MPLS-a

Glavna primjena MPLS-a je prometni inženjering - TE (*Traffic Engineering*) [17]. TE se bavi optimizacijom rada već instaliranih radnih mreža. TE kombinira znanja iz različitih disciplina Teorije prometa kako bi pomogao operatorima da optimalno koriste resurse svoje mreže i da poboljšaju kvalitetu usluga koje nude. Nastojanja TE-a mogu biti orijentirani poboljšanju prometnih parametara usluga i tokova ili poboljšanju iskorištenja resursa mreže.

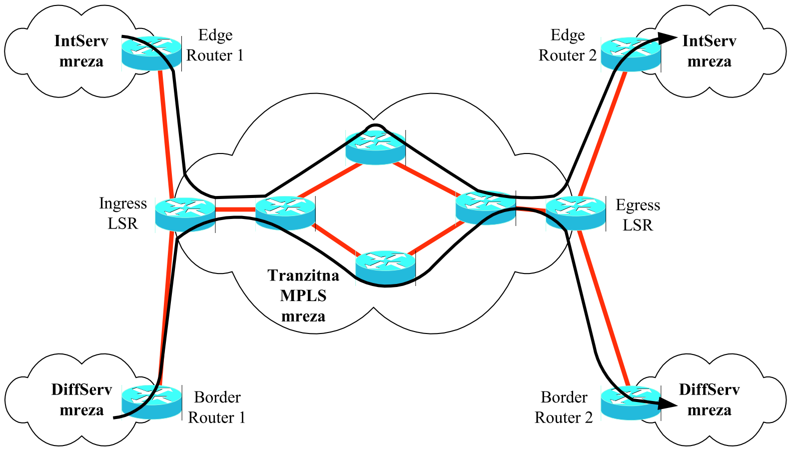
Jedna od primjena MPLS mreže je implementacija usluge virtualne privatne mreže - VPN (*Virtual Private Network*). VPN je usluga koju jedan operator nudi organizaciji koja posjeduje fizički udaljene mreže koje bi htjela povezati u jednu jedinstvenu mrežu. Pogledajmo sliku 1.25. Na njoj su prikazane mreže dviju organizacija. Jedna organizacija ima IntServ mreže, a druga DiffServ mreže. Mreže obiju organizacija su fizički udaljene. Jedan operator posjeduje MPLS mrežu i nudi uslugu VPN-a organizacijama. MPLS mreža mora ostvariti tunel koji povezuje udaljene dijelove, ali na taj način da se osigura određena kvaliteta prijenosa paketa kroz MPLS mrežu. VPN usluga koju nudi MPLS operator će omogućiti organizacijama da svoje mreže vide kao da su povezane u jedinstvenu mrežu preko virtualnih vodova.

Kako bi MPLS mreža ovo omogućila, LSR-ovi moraju implementirati mehanizme posluživanja paketa kakvi su implementirani u usmjeriteljima IntServ i DiffServ arhitekture. Paketima se tretman može davati prema cijeloj labeli ili prema dijelu labele. U drugom slučaju nije potrebno rezervirati resurse i ovaj model izvrsno odgovara DiffServ modelu usluga.

MPLS je relativno nova tehnologija. O tome svjedoči i datum izdavanja RFC-a 3031 [15]. Na sreću, već postoje dobre knjige o MPLS-u. Jedna od često citiranih referenci je [18].

1.10 Smjernice

MPLS je tehnologija koja je u fazi sazrijevanja. ATM je zrela tehnologija. Ovaj površni sažetak gradiva pokušava studentu ugrubo približiti ove tehnologije s prometne točke gledišta. To smo napravili kako



Slika 1.25: IntServ i DiffServ preko MPLS-a

bismo se kasnije mogli koristiti pojmovima koje smo spomenuli bez straha da ih nećemo razumjeti. Studentima se preporuča da čitaju literaturu koja je navedena u bibliografiji. To je samo osnovna literatura. Izabrana je po kriteriju njene dostupnosti na ZZT-u. Ukoliko čitatelj želi saznati više, mora pogledati reference koje su navedene u članku/specifikaciji i u toj literaturi pronaći više.

Studentima se preporuča da posjete stranice IETF-a **http://www.ietf.org** na kojima će moći pronaći sve RFC-ove na temu MPLS-a, IntServ-a, DiffServ-a, pa čak i ATM-a. Naročitu pažnju treba posvetiti RFC-ovima u pripremi - draftovima. Na stranici ćete moći pretraživati draftove po ključnim riječima i shvatiti što je trenutno aktualan problem. Oni koje zanima MPLS upućuju se na adresu: **http://www.mplsrc.com** na kojoj će pronaći brojne korisne sadržaje. Preporuke ATM Foruma možete besplatno dobiti na službenim stranicama ATM Foruma **http://www.atmforum.com**.

Bez obzira na svu literaturu raspoloživu na Internetu, najbolji početak ipak su knjige iz ovog područja. Ovdje odmah slijedi upozorenje. Većina ovih knjiga objasnit će koncepte, način rada, protokole i mnoge druge stvari, no malo njih sadržava korisne matematičke alate pomoću kojih možete izvršiti projektiranje mrežnih kapaciteta.

Naš cilj je naučiti metode projektiranja mreže. Zanima nas model kojim možemo opisati promet u mreži; način na koji možemo izračunati potrebnu veličinu spremnika u čvorovima i kapacitete vodova. Zanima nas i na koji način usmjeravati promet u mreži. Koja mrežna topologija je najjeftinija, a da ujedno zadovoljava određene zahtjeve. Veliki dio ovoga nećemo stići obraditi, no upoznat ćemo se s matematičkim aparatom pomoću kojeg se možemo upustiti u projektiranje mreže.

Bitno je istaknuti veliku povezanost ovog predmeta s predmetom Algoritmi i metode optimizacije. Za projektiranje mreže potrebno je znanje iz oba područja koja obrađuju ovi predmeti.

U prvom dijelu skripte ponovit ćemo Teoriju vjerojatnosti, Stohastičke procese i Laplaceovu transformaciju. U drugom dijelu ćemo primijeniti ova znanja na osnovne modele posluživanja temeljenih na Markovljevim procesima. Kasnije ćemo se upoznati s osnovnim disciplinama posluživanja i vidjeti način definicije, kontrole i oblikovanja prometa u ATM-u. Na kraju ćemo se upoznati s osnovnim metodama projektiranja kapaciteta u višeuslužnim mrežama.

Bibliografija

[1] "B-ISDN asynchronous transfer mode functional characteristcs." ITU-T, Reccomendation I.150, 1995.

[2] "Traffic Management Specification Version 4.0." ATM Forum, technical specification af-tm-0056.000, April 1996.

[3] R. Jain, S. Kalyanaraman, R. Goyal, *et al.*, "ERICA Switch Algorithm: A Complete Description." ATM Forum, document 96-1172, 44 pages, 1996.

[4] A. Romanow and S. Floyd, "Dynamics of TCP Traffic over ATM Networks," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications (JSAC)*, vol. 13, 4, pp. 633–641, May 1995.

[5] M. DePricker, *Asynchronous Transfer Mode: Solution for Broadband ISDN.* Prentice Hall Int., 1995.

[6] R. Händel, M. Huber, and S. Schröder, *ATM Networks: concepts, protocols, applications*, vol. 1. Addison-Wesley Ltd., 1994.

[7] W. Stallings, *High-Speed Networks: TCP/IP and ATM Design Principles.* Prentice Hall, 1998.

[8] R. Braden, D. Clark, and S. Shenker, "Integrated Services in the Internet Architecture: an Overview." IETF, RFC 1633, June 1994.

[9] R. Braden, L. Zhang, S. Berson, S. Herzog, and S. Jamin, "Resource ReSerVation Protocol (RSVP) – Version 1, Functional Specification." IETF, RFC 2205, September 1997.

[10] J. Wroclawski, "The Use of RSVP with IETF Integrated Services." IETF, RFC 2210, September 1997.

[11] S. Blake, D. Black, M. Carlson, E. Davies, Z. Wang, and W. Weiss, "An Architecture for Differentiated Services." IETF, RFC 2475, December 1998.

[12] K. Nichols, S. Blake, F. Baker, and D. Black, "Definition of the Differentiated Services Field (DS Field) in the IPv4 and IPv6 Headers." IETF, RFC 2474, December 1998.

[13] K. Nichols, "Definition of Differentiated Services Per Domain Behaviors and Rules for their Specification." IETF, RFC 3086, April 2001.

[14] Y. Bernet, P. Ford, R. Yavatkar, F. Baker, L. Zhang, S. M., R. Braden, B. Davie, J. Wroclawski, and E. Felstaine, "A Framework for Integrated Services Operation over Diffserv Networks." IETF, RFC 2998, November 2000.

[15] E. Rosen, A. Viswanathan, and R. Callon, "Multiprotocol Label Switching Architecture." IETF, RFC 3031, January 2001.

[16] L. Andersson, P. Doolan, N. Feldman, A. Fredette, and B. Thomas, "LDP Specification." IETF, RFC 3036, January 2001.

[17] D. Awduche, J. Malcolm, J. Agogbua, M. O'Dell, and J. McManus, "Requirements for Traffic Engineering Over MPLS." IETF, RFC 2702, September 1999.

[18] B. Davie and Y. Rekhter, *MPLS: Technology and Applications.* Morgen Kaufmann Publishers, May 2000.

Dio I

Repetitorij teorije vjerojatnosti i stohastičkih procesa

Poglavlje 2

Osnove teorije vjerojatnosti

Cilj teorije prometa je pronalaženje matematičkih modela za opis prometa u mreži. Pomoću tih modela se mora moći vršiti analiza performansi mreže i vršiti njeno dimenzioniranje. Procesi koji se odvijaju u mreži su slučajnog karaktera. Teorija prometa (*Teletraffic Theory*) se stoga prvenstveno oslanja na teoriju stohastičkih procesa (*Stochastic Processes*). Osnova stohastičkih procesa je teorija vjerojatnosti (*Probability theory*). To je fundamentalna grana matematike. U ovom poglavlju ćemo dati samo pregled osnovnih pojmova iz teorije vjerojatnosti. Studenti bi već trebali biti načelno upoznati s osnovnim pojmovima iz teorije vjerojatnosti, poput slučajnog događaja, njegove (ne)ovisnosti o ostalim događajima, vjerojatnosti događaja, razdiobe slučajne veličine i nekim drugim.

Mnogim studentima ovo poglavlje neće biti dovoljno za cjelovito shvaćanje teorije vjerojatnosti. Stoga predlažemo izvrsne knjige na hrvatskom od Prof. Dr.Sc.Željko Pauše [3] i Prof. Dr.Sc. Dimitrija Ugrina-Šparca [2]. Već duže vrijeme je u pripremi i kniga Prof. Dr.Sc. Nevena Elezovića [1], koja je sada u obliku skripte. Nju zasigurno imaju studenti koji su slušali predmet Stohastički procesi. Izvrstan uvod u teoriju vjerojatnosti je i knjiga A. Papoulisa [2], na engleskom jeziku.

2.1 Slučajni događaj i algebra događaja

Teorija vjerojatnosti nastala je iz potrebe matematičkog opisa slučajne naravi fizičkog svijeta. U svakom fizikalnom procesu pronalazimo veličinu koja mijenja svoju vrijednost na slučajan način. Banalan primjer ovakvog procesa je uzastopno bacanje kocke. Takav proces nazivamo *slučajnim (stohastičkim) eksperimentom.* Jedno bacanje kocke je *realizacija eksperimenta*, a rezultat realizacije je *slučajni događaj.*

Rezultate realizacija često analiziramo, npr. određujemo njihovu relativnu frekvenciju. Kako bi uopće bilo smisla uspoređivati slučajne događaje, oni moraju potjecati od eksperimenta koji ne mijenja fizikalne uvjete izvođenja u vremenu ili nekoj drugoj dimenziji. Nad svakim eksperimentom tako utvrđujemo skup čvrstih fizikalnih preduvjeta. Taj skup zovemo *slogom uvjeta* σ stohastičkog eksperimenta. Slog uvjeta za eksperiment bacanja kocke može biti ovakav: kocka je ravnomjerne gustoće, a baca se na ravnu horizontalnu površinu.

Slučajni događaji koji se mogu pojaviti pri realizaciji eksperimenta bacanja kocke su: ispalo je 1, ispalo je 2, ..., ispalo je 6. Svakom mogućem slučajnom događaju možemo pridružiti određenu vrijednost suda. Na primjer, kada bacimo kocku možemo tvrditi ispalo je 6 ili nije ispalo 6. Svakom slučajnom događaju možemo tako pridružiti određenu logičku varijablu. Ta logička varijabla prilikom realizacije eksperimenta poprima jednu od dvije moguće vrijednosti - istina ($\top$) ili laž ($\perp$).

Gore spomenutim mogućim događajima tako možemo pridružiti logičke varijable E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6. Zbog jednostavnosti, te ćemo varijable nadalje zvati slučajni događaji, misleći dakako na logičke varijable koje su im pridjeljene.

Ukoliko primijenimo Booleovu algebru na ove varijable, onda možemo definirati i neke druge događaje. Na primjer, slučajni događaj "ispao je paran broj" možemo napisati kao $E_2+E_4+E_6$. Plus (+) označava logički *ili.* Svaki događaj ima i suprotan događaj. Suprotan događaj događaja E_2 je $\overline{E_2} = E_1 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6$.

Za svaki eksperiment može se definirati siguran i nemoguć događaj. Siguran događaj je "ispast će neki broj u intervalu od 1 do 6". Njega označavamo s $U = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6$. Nemoguć događaj označavamo s V. On odgovara tvrdnji "ispast će broj koji nije u intervalu od 1 do 6". Pri svakoj realizaciji eksperimenta vrijednost sigurnog događaja je istina ($\top$), a nemogućeg laž ($\bot$). Vrijedi: $\overline{U} = V$.

Promatrajući logičke odnose među slučajnim događajima, lako dolazimo do definicije Booleove algebre događaja kako je definirano u definiciji 2.1.

Definicija 2.1 (Booleova algebra događaja)
Neka je zadan skup događaja $\mathbf{S}$. *Neka su* A *i* B *događaji iz tog skupa i neka je za svaki takav par definiran zbroj (logički* ili*)* $A + B$ *i umnožak (logički* i*)* $A \cdot B$ *koji također pripadaju skupu* $\mathbf{S}$. *Neka na istom skupu* $\mathbf{S}$ *vrijede sljedeći aksiomi:*

a) *(Svojstvo komutativnosti): za svaki* A *i* B *iz* $\mathbf{S}$ *vrijedi:*

$$A + B = B + A, \tag{2.1}$$
$$A \cdot B = B \cdot A \tag{2.2}$$

b) *(Svojstvo asocijativnosti): za svaki* A, B *i* C *iz* $\mathbf{S}$ *vrijedi:*

$$(A + B) + C = A + (B + C), \tag{2.3}$$
$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \tag{2.4}$$

c) *(Egzistencija* U *i* V*): u skupu* $\mathbf{S}$ *postoji siguran događaj* U *i nemoguć događaj* V *tako da vrijedi:*

$$V + A = A, \tag{2.5}$$
$$U \cdot A = A \tag{2.6}$$

za svaki A *iz* $\mathbf{S}$

d) *(Svojstvo distributivnosti): za svaki* A, B *i* C *iz* $\mathbf{S}$ *vrijedi:*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \tag{2.7}$$
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C) \tag{2.8}$$

e) *(Egzistencija suprotnog događaja iz* $\mathbf{S}$*): za svaki* A *iz* $\mathbf{S}$ *postoji suprotan događaj* $\overline{A}$ *tako da*

$$A + \overline{A} = U,$$
$$A \cdot \overline{A} = V \tag{2.9}$$

Dobivenu algebarsku strukturu definiramo kao Booleovu algebru događaja.

Da bi na nekom skupu događaja $\mathbf{S}$ bila definirana Booleova algebra događaja, nije dovoljno imati samo jednostavne događaje koji nastupaju realizacijom eksperimenta, nego i složene događaje, te siguran i nemoguć događaj. Postoji određena distinkcija između ovih jednostavnih i složenih događaja. Jednostavne događaje koji nastupaju realizacijom eksperimenta nazivamo *elementarnim događajima*, a skup elementarnih događaja *prostorom elementarnih događaja* (definicija 2.2).

Definicija 2.2 (Prostor elementarnih događaja - $\mathbf{\Omega}$)
Svaki ishod stohastičkog eksperimenta sa strogim slogom uvjeta σ *nazivamo* elementarnim događajem. *Skup svih mogućih ishoda stohastičkog eksperimenta nazivamo* prostorom elementarnih događaja *tog eksperimenta i označavamo ga s* $\mathbf{\Omega}$. *Elementarni događaji su u parovima disjunktni - realizacijom eksperimenta ne mogu se istovremeno realizirati dva različita elementarna događaja.*

PRIMJER 2.1 Pronađimo prostor elementarnih događaja za eksperiment bacanja novčića jedanput (a) i dva puta gdje razlikujemo prvo i drugo bacanje (b).

a) Moguća su dva međusobno isključiva ishoda: pismo (P) i glava (G)

$$\mathbf{\Omega} = \{P, G\}$$

(b) Moguća su četiri ishoda:

$$\mathbf{\Omega} = \{P_1P_2, P_1G_2, G_1P_2, G_1G_2\}$$

Indeksi 1 i 2 označavaju bacanje.

PRIMJER 2.2 Pronađimo prostor elementarnih događaja eksperimenta bacanja novčića dok ne ispadne glava. Glava može ispasti iz prvog pokušaja, drugog, a možemo čekati jako dugo. Prostor elementarnih događaja je u ovom slučaju beskonačan, ali prebrojiv.

$$\mathbf{\Omega} = \{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$$

PRIMJER 2.3 Pronađimo prostor elementarnih događaja eksperimenta mjerenja duljine trajanja telefonskih poziva. Mogućih ishoda je beskonačno mnogo kao i u prethodnom primjeru, ali je prostor elementarnih događaja neprebrojiv.

$$\mathbf{\Omega} = \{t : 0 < t < \infty\}$$

Kao što je jasno iz gore navedenih primjera, mogući su različiti prostori elementarnih događaja. Oni ovise o eksperimentu i području zanimanja.

DEFINICIJA 2.3 (DISKRETAN I KONTINUIRAN PROSTOR ELEMENTARNIH DOGAĐAJA)
Prostor elementarnih događaja je diskretan *ako se sastoji od konačnog skupa elementarnih događaja ili prebrojivo beskonačnog skupa elementarnih događaja. Nekakav skup je prebrojiv ako se njegovi elementi mogu staviti u jedan-na-jedan odnos s pozitivnim cijelim brojevima.*

Prostor elementarnih događaja je kontinuiran *ako se njegovi elementi čine kontinuum, tj. ako prostor elementarnih događaja* nije prebrojiv.

Iz definicija 2.1 i 2.2 je jasno da se na skupu elementarnih događaja ne može definirati Booleova algebra događaja. To je i više nego očigledno. Elementi prostora elementarnih događaja su disjunktni i zbrajanjem ili množenjem ovih događaja ne možemo ni na kakav način dobiti novi elementarni događaj. No, promotrimo *partitativni skup* nekog prostora elementarnih događaja. Sjetimo se da je partitativni skup nekog skupa skup svih podskupova tog skupa. Promotrimo $\mathbf{\Omega}$ iz primjera 2.1:

$$\mathbf{\Omega} = \{P, G\}$$

Partitativni skup od $\mathbf{\Omega}$ označimo s $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$:

$$\mathcal{P}(\mathbf{\Omega}) = \{P, G, U, V\}$$

P i G su trivijalni podskupovi od $\mathbf{\Omega}$. $U = P + G$ i $V = P \cdot G$ su također podskupovi jer su dobiveni kombiniranjem elemenata od $\mathbf{\Omega}$.

Na skupu $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ možemo definirati Booleovu algebru događaja. To možemo provjeriti prolazeći kroz sve aksiome Booleove algebre događaja. Općenito, Booleovu algebru događaja možemo uvijek generirati na partitativnom skupu prostora elementarnih događaja.

DEFINICIJA 2.4 (ALGEBRA $\mathcal{A}$ GENERIRANA NA PROSTORU ELEMENTARNIH DOGAĐAJA)
Za algebru događaja koja je definirana na partitativnom skupu $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ *prostora elementarnih događaja* $\mathbf{\Omega}$ *kažemo da je* Booleova algebra $\mathcal{A}$ generirana događajima iz prostora elementarnih događaja $\mathbf{\Omega}$.

Kardinalni broj nekog skupa elemenata predstavlja broj elemenata u skupu. Oznaka za kardinalni broj nekog skupa **S** je #**S**. Dobro je znati jednostavno pravilo određivanja kardinalnog broja partitativnog skupa. To pravilo vrijedi samo za konačne partitativne skupove:

$$\#\left[\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})\right] = 2^{\#\mathbf{\Omega}} \tag{2.10}$$

Pojmovi koje smo upravo upoznali će nam pomoći dalje pri definiranju pojma vjerojatnosti.

2.2 Pojam i aksiomi vjerojatnosti

Za svaki događaj (elementaran ili neelementaran) nekog stohastičkog eksperimenta možemo imati osjećaj vjerojatnosti njegovog ispunjenja. No s osjećajima baš i ne možemo računati, pa stoga svakom događaju pokušavamo odrediti mjeru (numeričku vrijednost) vjerojatnosti njegova ispunjenja.

Klasičnu definiciju vjerojatnosti dao je Laplace 1812. To je intuitivna definicija vjerojatnosti i danas je prihvaćamo više kao način izračunavanje vjerojatnosti za jedan konkretan slučaj:

Definicija 2.5 (Klasična definicija vjerojatnosti)
Neka je zadan slog uvjeta σ stohastičkog eksperimenta i neka je pripadni prostor elementarnih događaja $\mathbf{\Omega} = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$. Neka su svi događaji $E_1, \ldots, E_n$ ***jednako vjerojatni*** *i neka je događaj A element partitativnog skupa $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$ takav da je:*

$$A = E_{i1} + E_{i2} + \ldots + E_{im}$$

Vjerojatnost događaja A s oznakom $P(A)$ se definira kao omjer broja elementarnih događaja na koje se raspada događaj A (m) i ukupnog broja elementarnih događaja $\#\mathbf{\Omega}$:

$$P\left(A\right) = \frac{m}{\#\mathbf{\Omega}} \tag{2.11}$$

S ovom definicijom treba biti oprezan. Ona vrijedi samo u specijalnom slučaju: *kada je broj elementarnih događaja konačan i kada su svi elementarni događaji jednako vjerojatni.* Tipičan slučaj je eksperiment bacanja kocke.

Primjer 2.4 Promatrajmo eksperiment bacanja kocke. $\mathbf{\Omega} = \{E_1, E_2, \ldots, E_6\}$. Svi elementarni događaji su jednako vjerojatni. Izračunajmo vjerojatnost događaja “ispao je broj manji od 3”. Tom događaju dodijelimo logičku varijablu $A = E_1 + E_2$. $A \in \mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$. Pošto se događaj A raspada na dva elementarna događaja, to je prema definiciji 2.5, $m = 2$. Vjerojatnost događaja A je:

$$P\left(A\right) = \frac{m}{\#\mathbf{\Omega}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vjerojatnost često intuitivno povezujemo s udjelom promatranog događaja u ukupnom broju zapaženih događaja. Taj udio zovemo relativnom frekvencijom. Ona je definirana definicijom 2.6.

Definicija 2.6 (Relativna frekvencija)
Neka je zadan slučajni eksperiment koji se realizira n puta. Ako se neki događaj A dogodi $n(A)$ puta, onda je relativna frekvencija tog događaja:

$$W\left(A\right) = \frac{n\left(A\right)}{n} \tag{2.12}$$

Za relativnu frekvenciju vrijede sljedeća pravila:
a) $0 \leq W(A) \leq 1$ *za svaki događaj A*
b) $W(U) = 1,$ *gdje je U siguran događaj*
c) $W(A + B) = W(A) + W(B)$ *za svaka dva disjunktna događaja.*

Iz iskustva je poznato da relativna frekvencija nekog događaja postaje jako bliska vjerojatnosti ako broj realizacija stohastičkog eksperimenta raste u beskonačnost. Iako se strogo matematički ne može prihvatiti konvergencija niza $W_n(A)$ k vrijednosti vjerojatnosti, relativna frekvencija se može iskoristiti za provjeru ispravnosti proračuna vjerojatnosti realnim eksperimentom. Odstupanjem relativne frekvencije od matematičke vjerojatnosti se bavi statistika.

Kako bi se klasična definicija vjerojatnosti oslobodila ograničenja da svi elementarni događaji moraju biti jednako vjerojatni, moderna matematika definira vjerojatnost na sljedeći način:

Definicija 2.7 (Aksiomatska definicija vjerojatnosti)
Vjerojatnost P na Booleovoj algebri $\mathcal{A}$ podskupova od $\mathbf{\Omega}$ je preslikavanje Booleove algebre $\mathcal{A}$ u skup realnih brojeva, koje zadovoljava sljedeće ***aksiome:***

1: $\forall A \in \mathcal{A},\ P(A) \geq 0$

2: $P(\mathbf{\Omega}) = 1$

3: Ako je $\mathbf{\Omega}$ konačan onda $\forall A, B \in \mathcal{A}$, takve da je $A \cdot B = \emptyset$, vrijedi:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) \tag{2.13}$$

3': Ako je $\mathbf{\Omega}$ beskonačan i ako je $A_1, A_2, \ldots$ beskonačan niz međusobno isključivih ***(disjunktnih)*** *događaja u $\mathbf{\Omega}$:*
$A_i \cdot A_j = \emptyset$ za $i \neq j$, onda vrijedi:

$$P\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \tag{2.14}$$

Definicija 2.8 (Prostor vjerojatnosti $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, P)$)
Neka $\mathbf{\Omega}$ označava skup elementarnih događaja nekog stohastičkog eksperimenta. Neka je $\mathcal{A}$ bilo koja Booleova algebra generirana nad $\mathbf{\Omega}$, a P pripadna vjerojatnost po definiciji 2.7. Trojka $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, P)$ se naziva prostorom vjerojatnosti *(*Probability System*).*

Ovi aksiomi jasno zadovoljavaju intuitivno shvaćanje pojma mjere vjerojatnosti koja se može dobiti shvaćajući pojam relativne frekvencije. Iz te definicije slijede neka jednostavna pravila koja će nam kasnije pomoći u zadacima. Ova pravila lakše ćete zapamtiti ukoliko pogledate sliku 2.1. Pravokutnik $\mathbf{\Omega}$ označava univerzalan (siguran) događaj. Zamislite da je pravokutnik površine 1. Površina bilo kojeg događaja kojeg možete omeđiti u pravokutniku $\mathbf{\Omega}$ jednaka je njegovoj vjerojatnosti.

1.
$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \tag{2.15}$$

2.
$$P(V) = 0 \tag{2.16}$$

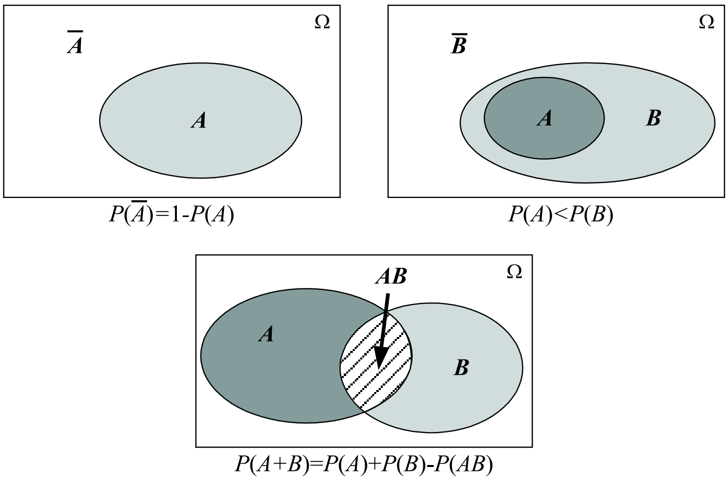
3.
$$P(A) \leq P(B), \text{ako je } A \subset B \tag{2.17}$$

4.
$$P(A) \leq 1 \tag{2.18}$$

5.
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \tag{2.19}$$

6. Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n proizvoljnih događaja iz $\mathbf{\Omega}$, onda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cdot A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cdot A_j \cdot A_k) - \\ \ldots (-1)^{n-1} \cdot P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) \tag{2.20}$$



Slika 2.1: Osnovna pravila za računanje vjerojatnosti

Pogledajmo sada dva primjera:

Primjer 2.5 Promatrajmo eksperiment bacanja kocke. Neka događaj A bude "ispao je broj veći od 1", a B "ispao je broj manji od 3". Izračunajmo vjerojatnost da se u realizaciji eksperimenta ostvare oba događaja:

$$\begin{aligned}
P(A \cdot B) &= P[(E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6) \cdot (E_1 + E_2)] = |\text{prema (2.7)}| = \\
&= P[E_1 \cdot (E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6) + E_2 \cdot (E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6)] = \\
&= P[(E_2 \cdot E_1) + (E_2 \cdot E_2) + (E_3 \cdot E_1) + (E_3 \cdot E_2) + (E_4 \cdot E_1) + \\
&\quad +(E_4 \cdot E_2) + (E_5 \cdot E_1) + (E_5 \cdot E_2) + (E_6 \cdot E_1) + (E_6 \cdot E_2)] = \\
&= |\text{ svi elementarni događaji su međusobno disjunktni }| = \\
&= P[E_2 \cdot E_2] = P[E_2] = \frac{1}{\#\mathbf{\Omega}} = 1/6.
\end{aligned}$$

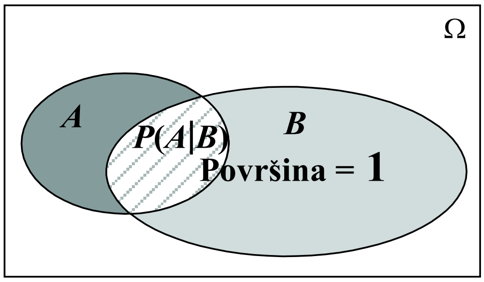
Primjer 2.6 Promatrajmo ponovno stohastički eksperiment i događaje A i B iz prethodnog primjera. Izračunajmo sada vjerojatnost da se dogodi ili događaj A ili događaj B. Dakako, jasno je da je to siguran događaj i da je vjerojatnost 1. No iskoristimo to saznanje kako bismo provjerili izraz za $P(A+B)$ događaja koji nisu disjunktni (2.19):

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 5/6 + 2/6 - 1/6 = 1,$$

a to smo i tražili.

2.3 Uvjetna i totalna vjerojatnost

Dosta često smo suočeni s problemom izračunavanja vjerojatnosti nekog događaja, ali uz uvjet da je se dogodio neki drugi događaj. Vjerojatnost da je se dogodio događaj A uz uvjet da je se dogodio događaj B označavamo $P(A|B)$. Pogledajmo sliku 2.2 i razmišljajmo intuitivno. Realizaciju eksperimenta možemo



Slika 2.2: Uvjetna vjerojatnost

zamisliti kao bacanje kamenčića na pravokutnik $\mathbf{\Omega}$. Kamenčić može pasti na svaku točku pravokutnika s jednakom vjerojatnošću. Kada kamenčić upadne na zatvorenu površinu B, realizirao se događaj B. Vjerojatnost da se to dogodi jednaka je površini skupa B[1].

Kada razmatramo uvjetnu vjerojatnost, već znamo da se realizirao događaj B. Kamenčić je zasigurno pao u područje B. Pitamo se kolika je vjerojatnost da je upao i u područje od događaja A. Praktički gledano, definirali smo potpuno novi eksperiment. Bacamo kamenčić i on redovito pada u B. Dakle B sada predstavlja svojevrstan $\mathbf{\Omega}$, a dio skupa A koji je u B-u predstavlja razmatrani događaj. Dakle, možemo zamisliti da B ima površinu 1 i pitati se kolika je površina od $A \cap B$. Ta je se površina smanjila razmjerno smanjenju površine s 1 na površinu od B. Dakle, možemo postaviti omjer:

$$1 : P(B) = P(A|B) : P(A \cdot B)$$

Kada riješimo ovaj omjer dobivamo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Sada znamo izračunati uvjetnu vjerojatnost i proračun moramo formalizirati sljedećom definicijom:

Definicija 2.9 (Uvjetna vjerojatnost (*Conditional Probability*))
Uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da je se dogodio događaj B, s oznakom $P(A|B)$, definira se na sljedeći način:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 \tag{2.21}$$

gdje je $P(A \cdot B)$ vjerojatnost da su se dogodili i događaj A i događaj B. Iz ovoga slijedi da je

$$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

Za izračunavanje uvjetnih vjerojatnosti često koristimo i poznatu Bayesovu formulu:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \tag{2.22}$$

---

[1] Ovakvo razmišljanje bi za strogog matematičara zasigurno bilo neprihvatljivo

PRIMJER 2.7 Neka se eksperiment sastoji od bacanja dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da su ispale dvije dvojke ako znamo da je zbroj jednak 4 ?

Događaj A je "ispale su dvije dvojke", a događaj B "zbroj je 4". Jasno je da se B ispunjava uvijek kad se ispuni A, ali ne vrijedi i obrnuto. Uvjetna vjerojatnost P(B|A) = 1 (ako se dogodio A, nužno se dogodio i B). Uočimo da je A pravi podskup od B: $A \subset B$, tj. $A \cdot B = A$. Prema definiciji uvjetne vjerojatnosti slijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Izračunajmo sada $P(A)$ i $P(B)$. $B = E_{13} + E_{22} + E_{31}$. Ukupan broj elementarnih događaja je 36 i svaki je jednako vjerojatan, pa je po klasičnoj definiciji vjerojatnosti $P(B) = 3/36$. $A = E_{22}$, pa slijedi $P(A) = 1/36$. Uvrštavanjem u gornju formulu dobivamo:

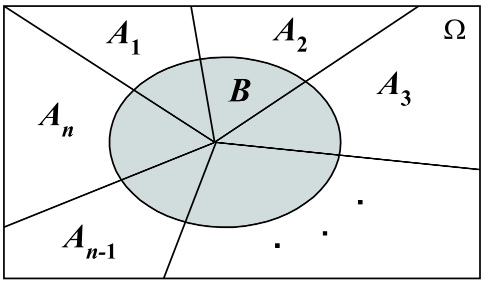
$$P(A|B) = 1/3.$$

Provjerimo Bayesovu formulu:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{36}}{\frac{1}{36}} = 1$$

što smo i očekivali.

Za izračunavanje uvjetnih vjerojatnosti često se koristimo i totalnom vjerojatnošću određene varijable. Totalna vjerojatnost nekog događaja B je vjerojatnost događaja B, no izračunata preko njenih uvjetnih vjerojatnosti. Pogledamo sliku 2.3. Pretpostavimo da su nam na raspolaganju uvjetne vjerojat-



Slika 2.3: Totalna vjerojatnost

nosti $P(B|A_1), P(B|A_2), \ldots, P(B|A_n)$. Neka su događaji $B|A_1, B|A_2, \ldots, B|A_n$ međusobno disjunktni. Pokušajmo izračunati vjerojatnost događaja B. Ponovno promatrajmo površine. Površina od B jednaka je zbroju površina koje dobivamo presijecanjem $B \cap A_i$ za $i = 1, \ldots, n$. Možemo napisati:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cdot A_i)$$

Iz (2.21) slijedi:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cdot A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

Dajmo prvo formalnu definiciju totalne vjerojatnosti, a onda ćemo vidjeti primjer u kojem će nam pomoći totalna vjerojatnost.

DEFINICIJA 2.10 (TOTALNA VJEROJATNOST (*Total Probability*))
Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se zovu međusobno isključivi ako vrijedi:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + ... + A_n = \mathbf{S}$$

i

$$A_i \cdot A_j = \emptyset, \quad i \neq j$$

Neka je B događaj iz **S**. *Onda je*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cdot A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i) \tag{2.23}$$

totalna vjerojatnost događaja B. *Nadalje slijedi da je:*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} \tag{2.24}$$

Primjer 2.8 U nekom laboratoriju testira se ispravnost mikroprocesora. Definirana su dva događaja:

A - testirani mikroprocesor je neispravan

B - rezultat testa je pozitivan

Poznate su sljedeće statistike:

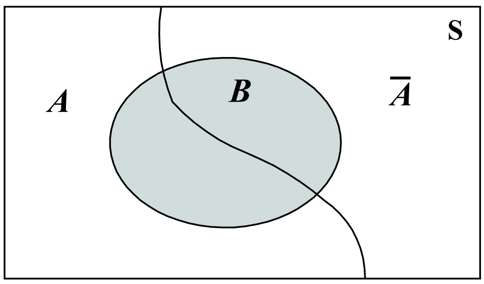
$$P(B|A) = 0.99 \text{ i } P(B|\overline{A}) = 0.005$$

i 0.0001 ukupnog broja mikroprocesora uistinu ima kvar. Kolika je vjerojatnost da neki mikroprocesor uistinu ima kvar ako je rezultat testa pozitivan?

Jasno je da se traži $P(A|B) = ?$ Vjerojatnost da je mikroprocesor uistinu pokvaren je $P(A) = 10^{-4}$. Pošto nam je poznata vjerojatnost $P(B|A)$ logično je iskoristiti Bayesovu formulu:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Jedina nepoznanica je $P(B)$. Pogledajmo sliku 2.4:



Slika 2.4: Primjer 2.8

Svaka točka koja padne na površinu **S** predstavlja realizaciju događaja. Ukoliko padne u područje A, mikroprocesor ima kvar. Ako padne u područje A i B, onda je test ispravno indicirao kvar mikroprocesora. Jasno je da je par A i $\overline{A}$ međusobno isključiv, da $A + \overline{A} = \mathbf{S}$ i da je $B \subset \mathbf{S}$. Stoga možemo izračunati totalnu vjerojatnost događaja B kao:

$$P(B) = P(B \cdot A) + P(B \cdot \overline{A}) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

Sve vrijednosti su poznate pa možemo izračunati traženu vjerojatnost:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P\left(B|\overline{A}\right) \cdot P\left(\overline{A}\right)} = 0.0194$$

U ovom odjeljku smo se često koristili pojmom disjunktnih događaja. Ljudi dosta često brkaju pojam disjunktnosti s pojmom neovisnosti dva događaja. Prije nego pređemo na važan dio teorije vjerojatnosti, definirajmo precizno pojam neovisnosti:

DEFINICIJA 2.11 (NEOVISNI DOGAĐAJI (*Independent Events*))

1. ***Događaj** A **neovisan o** B*
   Događaj A je neovisan o B ako je

$$P(B) > 0 \quad i \quad P(A|B) = P(A).$$

2. ***U cijelosti neovisni događaji** (Statistically Independent Events)*
   *Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su **u cijelosti neovisni** ako za svaki izbor $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{im}$, $1 \leq m \leq n$ vrijedi*

$$P(A_{i1} \cdot A_{i2} \cdot \ldots \cdot A_{im}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{im})$$

Disjunktni su oni događaji koji se međusobno isključuju. Događaji "ispala je glava" i "ispalo je pismo" su **međusobno isključivi**, no samo ako se promatra eksperiment bacanja jednog novčića. Ako odjednom bacamo dva novčića, onda su događaji "ispala je glava na prvom novčiću" i "ispalo je pismo na drugom novčiću" **u cijelosti neovisni** jer realizacija jednog događaja ne mijenja vjerojatnost ispunjenja drugoga. Ovi događaji su i **međusobno neovisni** jer je uvjetna vjerojatnost jednaka vjerojatnosti samog događaja.

2.4 Slučajne varijable

Zamislimo jednostavan stohastički eksperiment u kojem se slučajno izvlači jedan od tri broja: 1, 2 ili 3. Skup elementarnih događaja je $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Vjerojatnost svakog od elementarnih događaja je jednaka: $P(\omega_i) = 1/3, \quad i = 1, 2, 3$.

Stvorimo prostor vjerojatnosti za ovaj stohastički eksperiment. $\mathbf{\Omega}$ je poznat. Potrebno je još pronaći Booleovu algebru $\mathcal{A}$ i pripadnu vjerojatnost $P(\cdot)$. $\mathcal{A}$ se može definirati jedino na partitativnom skupu od $\mathbf{\Omega}$, $\mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$. Elementi tog skupa prikazani su na slici 2.5.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \;=\; & \{V, A_1 = \{\omega_1\}, A_2 = \{\omega_2\}, A_3 = \{\omega_3\}, \\ & A_4 = \{\omega_2, \omega_3\}, A_5 = \{\omega_1, \omega_2\}, A_6 = \{\omega_1, \omega_3\}, U\} \end{aligned}$$

Skup $\mathcal{A}$ zasigurno je Booleova algebra. Za svaki element postoji suprotan element, npr. $\overline{A_1} = A_4$. I i ili operacijama između elemenata dobivamo elemente koji su već u skupu $\mathcal{A}$, npr. $A_1 + A_3 = A_6 \in \mathbb{R}$ ili $A_4 \cdot A_5 = A_2 \in \mathbb{R}$. Dokaz da je $\mathcal{A}$ Booleova algebra dobivamo provjerom svih aksioma iz definicije 2.1.

Vjerojatnost $P(\cdot)$ je funkcija koja preslikava $\mathcal{A}$ u $\mathbb{R}$, zadovoljavajući definiciju 2.7. Vjerojatnost $P(\cdot)$ je:

$$\begin{array}{llll} P(V) = 0, & P(A_1) = 1/3, & P(A_3) = 1/3, & P(A_5) = 2/3 \\ P(U) = 1, & P(A_2) = 1/3, & P(A_4) = 2/3, & P(A_6) = 2/3 \end{array}$$

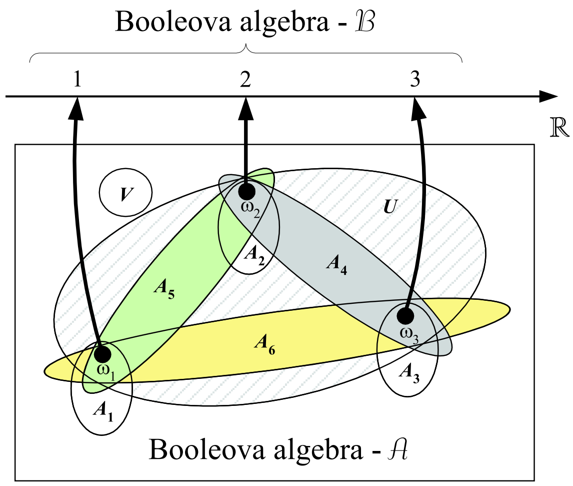
Ona zadovoljava sve aksiome iz definicije 2.7 i konačno imamo formuliran prostor vjerojatnosti $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, P)$.

Definirajmo sada funkciju $X(\xi)$, gdje je $\xi \in \mathbf{\Omega}$. Ta funkcija je zadana na skupu elementarnih događaja $\mathbf{\Omega}$ (domena), a vrijednosti su joj u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ (kodomena):

$$X : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$$

Njene vrijednosti su:

$$X(\omega_1) = 1, \quad X(\omega_2) = 2, \quad X(\omega_3) = 3$$



Slika 2.5: Slučajna varijabla

Funkcija X poprima neku vrijednost u $\mathbb{R}$ svaki put kada se dogodi neki od slučajnih događaja $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathbf{\Omega}$, odnosno jedan od događaja $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, U \in \mathcal{A}$. Dogodi li se događaj "izvučen je 1", logička varijabla ω_1 dobiva vrijednost $\top$, ostala dva elementarna događaja dobiju vrijednost $\perp$, a slučajna varijabla X dobiva vrijednost $X = 1$ na realnoj osi $\mathbb{R}$. To je prikazano na slici 2.5.

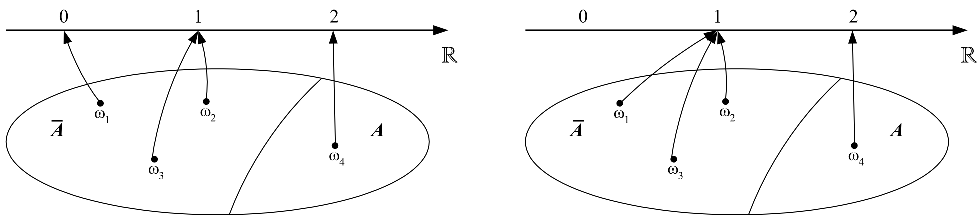
Promatrajmo sada podskupove od $\mathbb{R}$. Možemo primijetiti da svakom događaju A iz $\mathcal{A}$ odgovara barem jedan podskup $B \subseteq \mathbb{R}$. Na primjer, događaju A_2 odgovara $B = \langle 1, 2] \subseteq \mathbb{R}$, a događaju A_5 odgovara skup $B = [1, 2] \subseteq \mathbb{R}$. Da bi neki interval B odgovarao nekom događaju $A \in \mathcal{A}$, interval B mora obuhvaćati **samo** vrijednosti funkcije X elementarnih događaja ω iz događaja A. To zapisujemo ovako:

$$\{\omega : \omega \in \mathbf{\Omega}, X(\omega) \in B\} = A \in \mathcal{A} \tag{2.25}$$

Intervali B su nam iznimno zanimljivi jer možemo računati vjerojatnost da X poprimi vrijednost koja se nalazi u intervalu B. Ako je zadovoljen (2.25) za neki interval B, onda je vjerojatnost $P(X \in B)$ jednaka vjerojatnosti odgovarajućeg događaja $A \in \mathcal{A}$. Ona nam je poznata jer je definirana u prostoru vjerojatnosti.

Promatrajmo sada sve intervale $B \subseteq \mathbb{R}$ koji zadovoljavaju (2.25). U primjeru na slici 2.5 svaki interval koji možemo zamisliti odgovara nekom događaju $A \in \mathcal{A}$. Dakle, možemo izračunati vjerojatnost da X upadne u svaki zamisliv interval iz $\mathbb{R}$. Osim ovoga, možemo izračunati i vjerojatnost kombinacije intervala. Na primjer, za $B = \{\langle -\infty, 1] \cup \langle 2, \infty \rangle\}$, $P(B) = P(A_6) = 2/3$.

Mogli bismo dobiti dojam da i u općem slučaju možemo izračunati vjerojatnost bilo kojeg intervala. Na žalost, to nije istina. Pogledajmo primjer na slici 2.6 - a. Zadan je $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathcal{A} = \{V, A, \overline{A}, U\}$ i $P(A) = 1/4, P(\overline{A}) = 3/4$. Intervalu $\langle 0, 2]$ ne odgovara niti jedan događaj. Jednostavno, ne postoji odgovarajući događaj u $\mathcal{A}$ i ne možemo izračunati vjerojatnost da X upadne u interval $\langle 0, 2]$.



(a) ne-$\mathcal{B}$ (b) Booleova algebra $\mathcal{B}$

Slika 2.6: Primjer ne-slučajne i slučajne varijable

Što je problem s ovim primjerom? Iako to sada nije očigledno, problem je u tome da je X potpuno krivo definiran. X je tako definiran da nam onemogućuje da proizvoljno izaberemo bilo koji interval ili skup intervala i za takav skup odredimo odgovarajući događaj $A \in \mathcal{A}$. Ako znamo kojem događaju $A \in \mathcal{A}$ odgovara interval B, onda znamo i $P(B) = P(A)$. Ukoliko želimo koristiti realne funkcije u analizi vjerojatnosti, moramo zahtijevati takvo preslikavanje $X : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ koje će na realnoj osi omogućiti izračunavanje vjerojatnosti za **bilo koji interval** B. Postavlja se pitanje kakav uvjet mora zadovoljiti funkcija X tako da ispunimo ovaj zahtjev?

Pretpostavimo da postoji funkcija X takva da za bilo koji podskup $B \subseteq \mathbb{R}$ postoji odgovarajući $A \in \mathcal{A}$. Onda je skup

$$\mathcal{B} = \{B : B \subseteq \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}\} \tag{2.26}$$

Booleova algebra. To lako provjeravamo provjeravajući sve aksiome iz definicije 2.1. Pošto je $\mathcal{B}$ skup svih podskupova od $\mathbb{R}$, onda se može pokazati da je sve elemente skupa $\mathcal{B}$ moguće dobiti presjecima i unijama elemenata skupa

$$\{\langle -\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$$

Na primjer:

$$[1,2] = \langle -\infty, 2] \cap [1, +\infty\rangle = \langle -\infty, 2] \cap \overline{\langle -\infty, 1\rangle} = \lim_{\epsilon \to 0} \langle -\infty, 2] \cap \overline{\langle -\infty, 1-\epsilon]}$$

Pošto svakom elementu iz $\mathcal{B}$ odgovara jedan događaj $A \in \mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ po pretpostavci sadržava sve intervale iz $\mathbb{R}$, onda je dovoljan uvjet koji moramo postaviti na X je da vrši preslikavanje na taj način da svakom periodu $\langle -\infty, x]$ odgovara točno jedan događaj $A \in \mathcal{A}$. Funkciju X koja zadovoljava ovaj kriterij zovemo **slučajna varijabla** (*Random Variable*).

DEFINICIJA 2.12 (SLUČAJNA VARIJABLA (*Random variable*))
Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, P)$ promatrani prostor vjerojatnosti. Funkcija X definirana na skupu elementarnih događaja $\mathbf{\Omega}$ sa vrijednostima u skupu realnih brojeva $\mathbb{R}$ naziva se slučajna varijabla *nad prostorom vjerojatnosti $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{A}, P)$ ako za svaki proizvoljan broj $x \in \mathbb{R}$, skup*

$$A(x) = \{\omega \in \mathbf{\Omega} : X(\omega) \leq x\}$$

pripada Booleovoj algebri događaja $\mathcal{A}$: $A(x) \in \mathcal{A}$.[2]

Slučajnu varijablu nazivamo diskretnom *ako je područje njenih vrijednosti prebrojivi skup realnih brojeva. Ako je područje njenih vrijednosti neprebrojiv skup, onda slučajnu varijablu nazivamo* kontinuiranom. *Slučajna varijabla je diskretna onda kada je $\mathbf{\Omega}$ diskretan i obrnuto.*

Ovu definiciju odmah možemo primijeniti na primjeru sa slike 2.6 - a. Naime, X na toj slici nije slučajna varijabla jer interval $\langle -\infty, 1]$ nema odgovarajući događaj $A \in \mathcal{A}$. Korekcijom funkcije X na slici 2.6 - b, X postaje slučajna varijabla.

Definicija vjerojatnosti i slučajne varijable su dosta slične. Obje funkcije preslikavaju slučajne događaje u skup realnih brojeva. No, te dvije definicije ne treba brkati. Točnije, to su dva potpuno različita pojma. Vjerojatnost preslikava nekakav događaj u skup realnih vrijednosti kako bi tom događaju dala mjeru vjerojatnosti ostvarenja. Slučajna varijabla preslikava događaj u bilo kakav realan broj kako bi pojednostavnila zapis takvog događaja.

Proučimo sljedeći, izuzetno važan primjer 2.9!

PRIMJER 2.9 Promatrajmo stohastički eksperiment bacanja kocke. Neka je zadan događaj A "ispao je paran broj". Definirajmo slučajnu varijablu X za ovakav eksperiment, pronađimo interval $B \in \mathcal{B}$ koji odgovara događaju $A \in \mathcal{A}$ i odredimo mu vjerojatnost.

Skup elementarnih događaja je $\mathbf{\Omega} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Pripadna Booleova algebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbf{\Omega})$. Vjerojatnosti elementarnih događaja $\omega_i = 1/6, \quad i = 1, \ldots, 6$. Vjerojatnost P za svaki događaj $A \in \mathcal{A}$ pronalazimo preko izraza (2.15) do (2.19).

Definirajmo funkciju X na sljedeći način:

[2] U literaturi se Booleova algebra događaja zove još i σ-algebra događaja

$$\begin{array}{lll} X(\omega_1)=1, & X(\omega_2)=2, & X(\omega_3)=3 \\ X(\omega_4)=4, & X(\omega_5)=5, & X(\omega_6)=6 \end{array}$$

Provjerimo da li je X slučajna varijabla:

$$\begin{array}{ll} B_0=(X\le t_0)\leftrightarrow V\in\mathcal{A}, & t_0<1, \\ B_1=(X\le t_1)\leftrightarrow A^{(1)}=\{\omega_1\}\in\mathcal{A}, & t_1<2, \\ B_2=(X\le t_2)\leftrightarrow A^{(2)}=\{\omega_1,\omega_2\}\in\mathcal{A}, & t_2<3, \\ B_3=(X\le t_3)\leftrightarrow A^{(3)}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}\in\mathcal{A}, & t_3<4, \\ B_4=(X\le t_4)\leftrightarrow A^{(4)}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}\in\mathcal{A}, & t_4<5, \\ B_5=(X\le t_5)\leftrightarrow A^{(5)}=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5\}\in\mathcal{A}, & t_5<6 \\ B_6=(X\le t_6)\leftrightarrow U=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}\in\mathcal{A}, & t_6\ge 6 \end{array}$$

X zadovoljava definiciju 2.12 i X je slučajna varijabla.

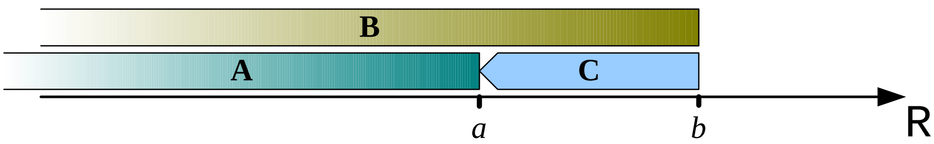
Zapišimo sada događaj $A\in\mathcal{A}$ pomoću intervala $B\subseteq\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} A\leftrightarrow B &= \langle 1,2]\cup\langle 3,4]\cup\langle 5,6] \\ &= \langle-\infty,2]\cap\overline{\langle-\infty,1]}\cup\langle-\infty,4]\cap\overline{\langle-\infty,3]}\cup\langle-\infty,6]\cap\overline{\langle-\infty,5]} \end{aligned}$$

Sva tri intervala koji opisuju zadani događaj A su međusobno disjunktni. To je trivijalno, jer se slučajna varijabla odjednom može realizirati samo u jednom od navedenih intervala. U skladu s tim možemo iskoristiti pravilo (2.14):

$$P\{\langle 1,2]\cup\langle 3,4]\cup\langle 5,6]\}=P\{\langle 1,2]\}+P\{\langle 3,4]\}+P\{\langle 5,6]\}$$

Dakle moramo izračunati vjerojatnosti pojedinih intervala iz $\mathbb{R}$ i zbrojiti ih. Jedna od mogućnosti je pronalaženje događaja u algebri događaja $\mathcal{A}$ za svaki od promatranih intervala i korištenje vjerojatnosti P iz prostora vjerojatnosti. No, taj pristup je kompliciran kada se promatra veliki broj elementarnih događaja. U modernoj teoriji vjerojatnosti se u ovu svrhu koriste vjerojatnosti oblika $P(X\le x)$. Ukoliko poznajemo ove vjerojatnosti onda možemo izračunati vjerojatnost bilo koje kombinacije podintervala u $\mathbb{R}$.



Slika 2.7: $P(C)=P(B)-P(A)$

Pogledajmo sliku 2.7. Pokušajmo izračunati vjerojatnost intervala $C=\langle a,b]$ pomoću intervala $A=\langle-\infty,a]$ i $B=\langle-\infty,b]$. Možemo napisati sljedeće:

$$B=A+C$$

Intervali A i C su disjunktni pa možemo napisati:

$$P(B)=P(A)+P(C)$$

Slijedi:

$$P(C)=P(B)-P(A)$$

Dakle, vjerojatnost nekog intervala $\langle a,b]$ računamo na sljedeći način:

$$P\{\langle a,b]\}=P\{\langle-\infty,b]\}-P\{\langle-\infty,a]\} \tag{2.27}$$

Ovo pravilo vrijedi i za kontinuirane i za diskretne slučajne varijable.

Izračunajmo vjerojatnosti intervala oblika $\langle-\infty,x]$ za promatrani eksperiment. Koristeći se izrazima (2.15) do (2.19) dolazimo do sljedećih vjerojatnosti:

$$\begin{array}{llll} P(B_0) = 0, & P(B_1) = 1/6, & P(B_2) = 1/3, & P(B_3) = 1/2, \\ P(B_4) = 2/3, & P(B_5) = 5/6, & P(B_6) = 1 & \end{array}$$

Koristeći se izrazom (2.27) dobivamo sljedeće rješenje:

$$\begin{aligned} P\{\langle 1,2] \cup \langle 3,4] \cup \langle 5,6]\} &= P\{\langle 1,2]\} + P\{\langle 3,4]\} + P\{\langle 5,6]\} \\ &= P(B_2) - P(B_1) + P(B_4) - P(B_3) + P(B_6) - P(B_5) \\ &= \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + \frac{4}{6} - \frac{3}{6} + \frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Provjerimo ovo rješenje. Vjerojatnost događaja $X \in B$ jednaka je vjerojatnosti događaja A:

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(A^{(2)} \cdot \overline{A^{(1)}} + A^{(4)} \cdot \overline{A^{(3)}} + A^{(6)} \cdot \overline{A^{(5)}}\right) \quad |\text{disjunktnost}| \\ &= P\left(A^{(2)} \cdot \overline{A^{(1)}}\right) + P\left(A^{(4)} \cdot \overline{A^{(3)}}\right) + P\left(A^{(6)} \cdot \overline{A^{(5)}}\right) \\ &= P(A_2 = \{\omega_2\}) + P(A_4 = \{\omega_4\}) + P(A_6 = \{\omega_6\}) \\ &= 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2 \end{aligned}$$

Dakle, rezultat je jednak, iako je način računanja u prvom slučaju daleko jednostavniji. Naime, u općem slučaju je uvijek poznata funkcija $F(x) = P(X \leq x)$. Zovemo je funkcija razdiobe. Pomoću njenog analitičkog izraza lako izračunavamo vjerojatnost realizacije slučajne varijable X u bilo kojem intervalu $\langle a, b]$.

2.5 Funkcija razdiobe, funkcija vjerojatnosti i funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti

---

DEFINICIJA 2.13 (FUNKCIJA RAZDIOBE (*Cumulative Distribution Function - CDF*))
Funkcija razdiobe (ili kumulativna funkcija razdiobe) slučajne varijable X je funkcija definirana izrazom:

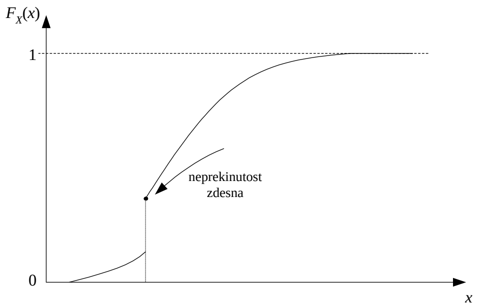
$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{2.28}$$

Funkcija razdiobe ima sljedeća svojstva:

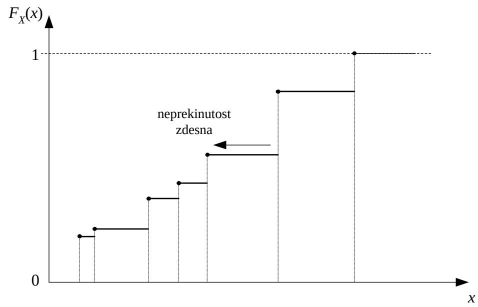
1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, *ako* $x_1 < x_2$ *(funkcija razdiobe je neopadajuća funkcija)*
3. $\lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
5. $\lim\limits_{x \to a^+} F_X(x) = F_X(a), \quad a^+ = \lim\limits_{0<\varepsilon \to 0} a + \varepsilon$ *(funkcija razdiobe je neprekinuta zdesna)*

Svojstva koja su navedena u definiciji 2.13 se inače uvode kao teorem i mogu se dokazati. Ovdje ih uvodimo kroz definiciju zbog jednostavnosti. Svojstvo 1 je jasno samo po sebi budući da je funkcija razdiobe vjerojatnost, a vjerojatnost ne može biti negativa i veća od 1. Svojstvo 2 je jasno ako se ponovno promotri slika 2.7. $P(C) > 0$ za bilo koji izbor intervala A i B. Budući da je $P(B) = F_X(b)$ i $P(A) = F_X(a)$ i $b > a$, slijedi svojstvo 2. Svojstva 3 i 4 mogu se pokazati na način da se pokaže da interval $\lim\limits_{n\to\infty} B_{-n} = \langle -\infty, -n]$ odgovara nemogućem događaju V, a interval $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \langle -\infty, n]$ odgovara sigurnom događaju U. Svojstva slijede iz aksioma $P(V) = 0$ i $P(U) = 1$. Svojstvo neprekinutosti zdesna nije trivijalno, no izuzetno je važno u slučaju funkcije razdiobe diskretne slučajne varijable.

Slika 2.8 prikazuje primjere grafova funkcije razdiobe za diskretnu i kontinuiranu slučajnu varijablu. Funkciju razdiobe diskretne slučajne varijable lako uočavamo po njenom stepenastom izgledu. Objašnjenje ovakvog izgleda vidjet ćemo nakon što definiramo funkciju vjerojatnosti. Kontinuirana funkcija razdiobe može imati neuklonjive prekide, no mora biti neprekinuta zdesna.



(a) kontinuirana slučajna varijabla



(b) diskretna slučajna varijabla

Slika 2.8: Primjeri funkcije razdiobe kontinuirane i diskretne slučajne varijable

---

DEFINICIJA 2.14 (FUNKCIJA VJEROJATNOSTI (*Probability mass function - PMF*))
Neka je zadana diskretna slučajna varijabla X i neka je zadan proizvoljan broj $x \in R$. S obzirom na taj broj, neka je zadan događaj $B(x)$ takav da je:

$$B(x) = \{\omega : \omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

$B(x)$ ima sljedeće svojstvo:

$$B(x) = \begin{cases} \emptyset & x \neq x_k \\ B(x_k) & x = x_k \end{cases}, k = 1, 2, 3, ...$$

Realna funkcija $p(x)$ takva da je:

$$p(x) = P\{B(x)\}$$

definirana za svaki realni broj x, naziva se funkcijom vjerojatnosti. Funkcija vjerojatnosti definira se isključivo za diskretne slučajne varijable.

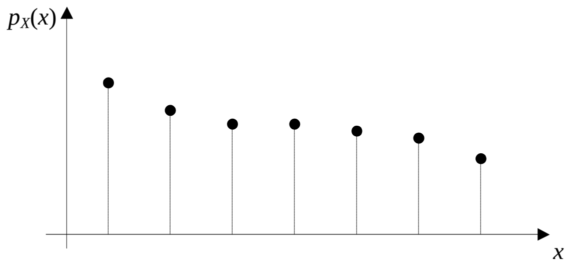
Funkcija vjerojatnosti poprima vrijednost različitu od nula samo u određenim (diskretnim) točkama na $\mathbb{R}$. Ona jednostavno kaže kolika je vjerojatnost nekog događaja iz diskretnog skupa Ω. Skup Ω nužno mora biti diskretan, ali može biti i konačan i beskonačan. Razlog ovog ograničenja je činjenica da ne možemo odrediti vjerojatnost nekog elementarnog događaja iz Ω koji je kontinuiran. Na primjer, vjerojatnost $P(X = 3)$ u eksperimentu iz primjera 2.9 je $1/6$. No, ako zamislimo eksperiment mjerenja napona u utičnici, nema načina da izračunamo kolika je vjerojatnost događaja "napon je točno 100 V". Točnije, možemo reći da vjerojatnost ostvarenja takvog događaja teži k nuli. Koliko god mjerenja izvršili, ne možemo čak ni zabilježiti sve elementarne događaje, a pogotovo reći kolika je njihova relativna frekvencija. Iz ovog razloga ne definiramo funkciju vjerojatnosti za kontinuirane slučajne varijable.

Funkcija vjerojatnosti diskretne slučajne varijable X se obično zapisuje na sljedeći način:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... \\ p_1 & p_2 & p_3 & ... \end{pmatrix}$$

Iz ovakvog zapisa lako očitavamo da je $p(x_i) = p_i$. Kada nam je na raspolaganju ovakav zapis, onda često kažemo da je zadana razdioba slučajne varijable X. Slika 2.9 grafički prikazuje jednu funkciju vjerojatnosti.

Elementarni događaji su međusobno disjunktni, pa ako je slučajna varijabla X ispravno definirana, onda su i diskretne vrijednosti slučajne varijable međusobno disjunktne. Zbog ovog svojstva se iz funkcije vjerojatnosti lako dobiva funkcija razdiobe $F_X(x)$ na sljedeći način:



Slika 2.9: Primjer funkcije vjerojatnosti

Vrijednost funkcije razdiobe $F_X(x)$ u točki x se dobiva zbrajanjem vrijednosti funkcije vjerojatnosti za sve x_k za koje je $x_k \leq x$.

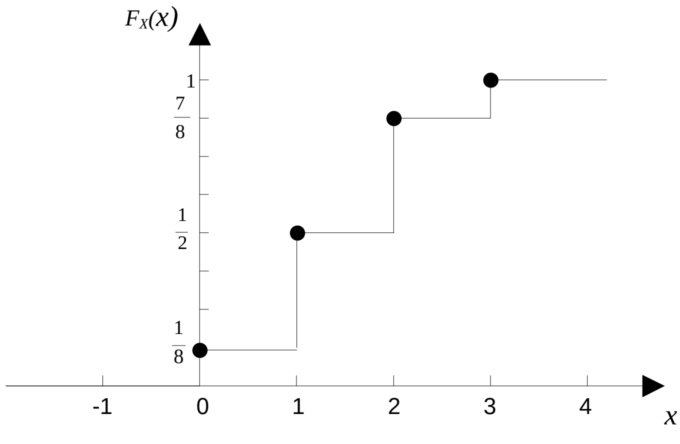
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{k, x_k \leq x} P(X = x_k) \tag{2.29}$$

PRIMJER 2.10 Promatrajmo eksperiment bacanja novčića tri puta. Prostor elementarnih događaja Ω sastoji se od $2^3 = 8$ jednako vjerojatnih događaja $\Omega = \{PPP, \ldots, GGG\}$. Neka slučajna varijabla X svojom vrijednošću odgovara broju pisama. Dobivamo sljedeću funkciju vjerojatnosti:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Izračunajmo funkciju razdiobe $F_X(x) = P(X \leq x)$. Budući da su događaji koje opisuje varijabla X disjunktni, $F_X(x)$ izračunavamo na sljedeći način:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=-1,\ i \in \mathbb{Z}}^{x} P(i = X)$$



Slika 2.10: Funkcija razdiobe diskretne slučajne varijable

Graf na slici 2.10 pokazuje funkciju razdiobe. Lako je primijetiti da je funkcija razdiobe neuklonjivo prekinuta u točkama koje odgovaraju vrijednosti slučajne varijable za promatrani eksperiment. Ona je pozitivna funkcija i monotono raste. Ovakav stepeničasti oblik funkcije razdiobe karakterističan je samo za diskretne slučajne varijable.

Za kontinuirane slučajne varijable funkcija razdiobe je u općem slučaju po dijelovima neprekinuta. Ona je najčešće u cijelosti neprekinuta. Kod kontinuiranih varijabli ne promatramo funkciju vjerojatnosti iz već obrazloženih razloga. Kako bi dobili osjećaj vjerojatnosti pojedinih područja vrijednosti slučajne varijable, uvodi se nova funkcija koju zovemo *gustoća razdiobe vjerojatnosti.*

DEFINICIJA 2.15 (GUSTOĆA RAZDIOBE VJEROJATNOSTI (*Probability density functionn - PDF*)) *Neka $f_X(x)$ označava derivaciju funkcije razdiobe $F_X(x)$ po vrijednostima slučajne varijable X:*

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

Funkcija $f_X(x)$ se zove gustoća razdiobe vjerojatnosti *kontinuirane slučajne varijable X i ima sljedeća svojstva:*

1. $$f_X(x) \geq 0$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1 \tag{2.30}$$

3. *$f_X(x)$ je na dijelovima neprekinuta*

4. $$P(a < X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)\, dx \tag{2.31}$$

Veza između funkcije razdiobe slučajne varijable X, $F_X(x)$ i gustoće razdiobe $f_X(x)$ je dana sljedećim izrazom:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\, d\xi$$

PRIMJER 2.11 Kako bismo dobili osjećaj o tome kakav je odnos funkcije gustoće razdiobe i funkcije razdiobe, pogledajmo primjer gdje je gustoća razdiobe zadana sljedećim analitičkim izrazom:

$$f_X(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x}{10\sqrt{2}}\right)^2}$$

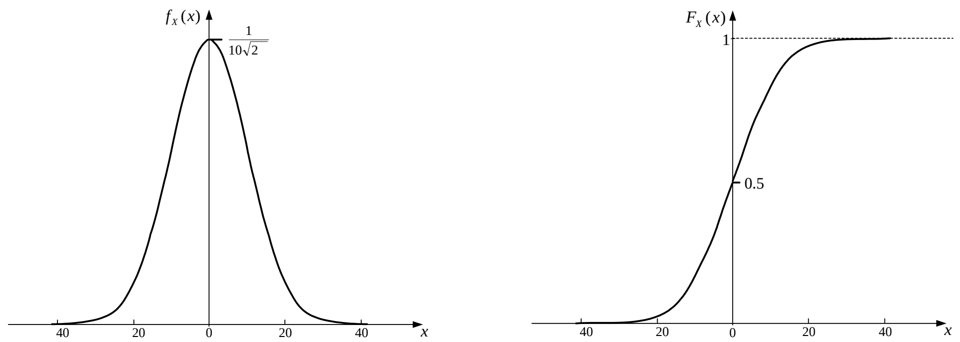
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) dx$$

Funkcija nije analitički integrabilna, pa je integracija provedena numeričkim metodama. Grafovi obiju funkcija prikazani su na slici 2.11.

Slika 2.11-a prikazuje funkciju gustoće razdiobe vjerojatnosti. Funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti je pozitivna funkcija. Površina ispod krivulje funkcije gustoće vjerojatnosti jednaka je 1. Pošto predstavlja prvu derivaciju funkcije razdiobe kontinuirane slučajne varijable, funkcija razdiobe je pozitivna monotono rastuća funkcija neprekidna u svim točkama. Funkcija razdiobe za funkciju gustoće razdiobe dana je na slici 2.11-b.

U općem slučaju, funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti je pozitivna funkcija, na dijelovima neprekinuta. Površina ispod krivulje gustoće vjerojatnosti svake razdiobe mora biti točno jednaka 1.

U praksi se češće susreće funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti nego funkcija razdiobe. Razlog tome je činjenica da sve funkcije razdiobe nisu analitički prikazive, kao u prethodnom primjeru. Funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti se neposredno koristi za izračunavanje vjerojatnosti ostvarenja slučajne varijable u različitim intervalima na realnoj osi $\mathbb{R}$. Svi proračuni se temelje na izrazu (2.31).



(a) Gustoća razdiobe vjerojatnosti

(b) Funkcija razdiobe

Slika 2.11: Primjer funkcije gustoće razdiobe vjerojatnosti i funkcije razdiobe za kontinuiranu slučajnu varijablu

PRIMJER 2.12 Neka je zadana funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Kolika je vjerojatnost događaja $Q =$ slučajna varijabla X poprimila je vrijednost **ili** u intervalu $[0, 6]$ **ili** u intervalu $\langle 3, \infty\rangle$?

Iskusan matematičar odmah može odgovoriti da je vjerojatnost događaja A jednaka 1. No, mi do tog rezultata moramo doći analitički.

Ova dva intervala se preklapaju, što znači da nisu disjunktni. Dakle, ne možemo jednostavno izračunati vjerojatnost realizacije oba intervala i zbrojiti dobivene vjerojatnosti. Uočimo dva događaja: $A = \{X \in [0, 6]\}$ i $B = \{X \in \langle 3, \infty\rangle\}$. Prisjetimo se izraza (2.19):

$$P(Q) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Kako bismo izračunali $P(Q)$, moramo izračunati vjerojatnosti $P(A)$, $P(B)$ i $P(A \cdot B)$. A i B su ovisni događaji pa $P(A \cdot B)$ računamo kao vjerojatnost događaja $X \in \langle 3, 6]$. Obratite pozornost na značenje određenog integrala pomoću kojeg računamo vjerojatnosti.

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

Dakle, integral je valjan samo ukoliko se traži vjerojatnost u poluotvorenom intervalu $\langle a, b]$. U svim ostalim slučajevima vjerojatnosti tražimo preko kombinacija vjerojatnosti ovakvih područja. Tako na primjer ukoliko imamo problem računanja vjerojatnosti otvorenog područja $\langle a, b\rangle$, onda vjerojatnost događaja $X \in \langle a, b\rangle$ računamo tražeći sljedeći limes:

$$P\left(X \in \langle a, b\rangle\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f_X(x)dx$$

Na ovaj način bilo koju zatvorenu granicu pretvaramo u otvorenu. Ovaj postupak može biti izuzetno bitan u slučajevima kada imamo funkciju gustoće razdiobe vjerojatnosti koja ima prekide. Primjer takve je funkcija gustoće koja je zadana za ovaj primjer.

Izračunajmo vjerojatnosti:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(X \in [0,6]) = F_X(6) - \lim_{\epsilon \to 0} F_X(0-\epsilon) \\
&= \int_{-\infty}^{6} f_X(x)dx - \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{0-\epsilon} f_X(x)dx = \\
&= \int_{0}^{6} \lambda\, e^{-\lambda x} dx - 0 = \left| \begin{array}{c} u = -\lambda x \\ du = -\lambda dx \\ dx = -\frac{du}{\lambda} \end{array} \right| = \\
&= -\lambda \frac{1}{\lambda} \int_{0}^{-6\lambda} e^{u}\, du = -e^{u}\big|_{0}^{-6\lambda} = -[e^{-6\lambda} - e^{0}] = \\
P(A) &= 1 - e^{-6\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(X \in \langle 3, \infty]) = 1 - P(X \in \langle -\infty, 3]) = \\
&= 1 - \int_{-\infty}^{3} f_X(x)dx = 1 - \int_{0}^{3} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \\
&= 1 + e^{u}\big|_{0}^{-3\lambda} = 1 + e^{-3\lambda} - e^{0} \\
P(B) &= e^{-3\lambda}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(A \cdot B) &= P(X \in \langle 3, 6]) = \int_{3}^{6} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = \\
&= -e^{u}\big|_{-3\lambda}^{-6\lambda} = -\left[e^{-6\lambda} - e^{-3\lambda}\right] \\
P(A \cdot B) &= e^{-3\lambda} - e^{-6\lambda}
\end{aligned}$$

Konačno je:

$$\begin{aligned}
P(Q) &= P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \\
&= 1 - e^{-6\lambda} + e^{-3\lambda} - e^{-3\lambda} + e^{-6\lambda} = \\
&= 1
\end{aligned}$$

što smo i očekivali. Slika 2.12 prikazuje grafove funkcije gustoće razdiobe vjerojatnosti i funkcije razdiobe za promatranu razdiobu. Ovu razdiobu zovemo eksponencijalna razdioba.

Često se računaju razdiobe uvjetovanih slučajnih varijabli. Ovdje dajemo samo definiciju, a primijenit ćemo je nešto kasnije.

Definicija 2.16 (Uvjetna razdioba (*Conditional Distribution*))
Uvjetna funkcija razdiobe vjerojatnosti $F_X(x|B)$ se definira na sljedeći način:

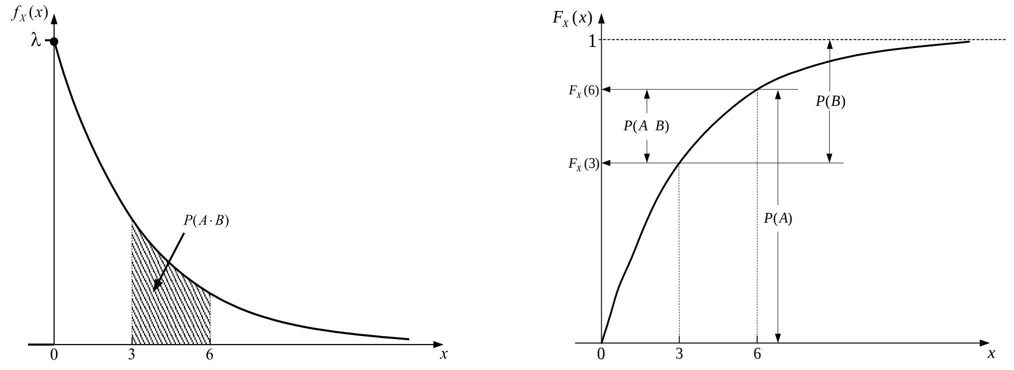
$$\begin{aligned}
F_X(x|B) &= P(X \leq x|B) \\
&= \frac{P(X \leq x \cdot B)}{P(B)}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Uvjetna funkcija razdiobe vjerojatnosti ima jednaka svojstva kao i normalna funkcija razdiobe vjerojatnosti. Za diskretan slučaj, uvjetna funkcija vjerojatnosti je:

$$\begin{aligned}
p_X(x_k|B) &= P(X = x_k|B) \\
&= \frac{P\{(X = x_k) \cdot B\}}{P(B)}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Za kontinuiranu slučajnu varijablu, gustoća razdiobe vjerojatnosti se računa kao:

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx} \tag{2.34}$$



(a) Gustoća razdiobe vjerojatnosti

(b) Funkcija razdiobe

Slika 2.12: Eskponencijalna razdioba uz primjer 2.12

2.6 Očekivanje, varijanca, momenti

Za slučajne varijable definiramo parametre koji opisuju neka važna svojstva njihovih razdioba. Najvažniji parametar neke razdiobe je očekivanje, koje možemo shvatiti kao srednju vrijednost svih realizacija neke slučajne varijable. U ovom poglavlju samo navodimo definicije pojedinih veličina. Konkretne razdiobe i proračune pojedinih parametara ćemo upoznati u sljedećem odsječku.

Definicija 2.17 (Očekivanje slučajne varijable (*Mean, Expectation*))
Srednju vrijednost ili očekivanje slučajne varijable X, s oznakom μ_X ili $E[X]$ definiramo izrazom:

$$\mu_X = E\left[X\right] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k \cdot P\left(x_k\right) & \textit{za diskretne } X \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X\left(x\right) dx & \textit{za kontinuirane } X \end{cases} \tag{2.35}$$

Definicija 2.18 (Moment (*Moment*))
n-ti moment slučajne varijable X: $m_n(x)$ definiran je izrazom:

$$m_n\left(X\right) = E\left[X^n\right] = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^n \cdot P\left(x_k\right) & \textit{za diskretne } X \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^n \cdot f_X\left(x\right) dx & \textit{za kontinuirane } X \end{cases} \tag{2.36}$$

Definicija 2.19 (Centralni Moment (*Central moment*))
Neka je c proizvoljni realan broj, a X diskretna ili kontinuirana slučajna varijabla. n-ti centralni moment slučajne varijable X s obzirom na c definiran je izrazom:

$$M_n^c(X) = E[(X-c)^n] \tag{2.37}$$

Ako je $c = 0$, onda moment nazivamo ishodišnim momentom ili samo momentom u skladu s definicijom 2.18.

DEFINICIJA 2.20 (VARIJANCA (*Variance*))
Varijanca slučajne varijable X, s oznakom σ_X^2 ili $Var(X)$, definirana je izrazom:

$$\sigma_X^2 = Var(X) = \begin{cases} \sum\limits_k (x_k - \mu_X)^2 \cdot P(x_k) & \text{za diskretne } X \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)\, dx & \text{za kontinuirane } X \end{cases} \tag{2.38}$$

DEFINICIJA 2.21 (KOVARIJANCA (*Covariance*))
Kovarijanca dviju slučajnih varijabli X i Y dana je sljedećim izrazom:

$$\sigma_{XY} = Cov(X, Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} \tag{2.39}$$

Općenito vrijedi izraz:

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \tag{2.40}$$

DEFINICIJA 2.22 (KORELACIJA I KORELACIJSKI KOEFICIJENT (*Correlation and Correlation coefficient*))
Korelacija $R(X,Y)$ i korelacijski koeficijent $\rho(X,Y)$ su definirani izrazima:

$$R(X, Y) = E[X \cdot Y] = Cov(X, Y) + E[X] \cdot E[Y] \tag{2.41}$$

$$\rho(X, Y) = \rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} \tag{2.42}$$

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

Očekivanje slučajne varijable X možemo smatrati srednjom vrijednošću beskonačno dugog niza realizacija slučajne varijable. Bitno je znati osnovna pravila (teoreme) za računanje očekivanja složenih varijabli:

1. $$E[c] = c \tag{2.43}$$
   gdje je c konstanta

2. $$E[c \cdot X] = c \cdot E[X] \tag{2.44}$$

3. $$E[c + X] = E[c] + E[X] = E[X] + c \tag{2.45}$$

4. $$E[c_1 X_1 + \ldots + c_n X_n] = c_1 E[X_1] + \ldots + c_n E[X_n] \tag{2.46}$$

5. $$E[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = E[X_1] \cdot E[X_2] \cdot \ldots \cdot E[X_n] \tag{2.47}$$
   ako su svi X_i **u cijelosti neovisni**, tj. ako je $P(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = P(X_1) \cdot P(X_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n)$.

Smisao varijance je srednje kvadratno odstupanje slučajne varijable od njene srednje vrijednosti. Ona odgovara drugom centralnom momentu. Varijanca je parametar koji pokazuje razinu raspršenja slučajne varijable oko njene srednje vrijednosti. Do vrijednosti varijance dolazimo neposredno koristeći izraz (2.38), no do njene vrijednosti možemo doći i preko pravila računanja očekivanja. Pogledajmo sljedeći primjer.

PRIMJER 2.13 Izrazimo varijancu preko momenata slučajne varijable. Možemo zapisati da je:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\{[X-E(X)]^2\} = E\{X^2 - 2\cdot X\cdot E(X) + E(X)^2\} = \\ &= E[X^2] - 2\cdot E\{X\cdot E[X]\} + (E[X])^2 = \\ &= E[X^2] - 2\cdot E[X]\cdot E[X] + (E[X])^2 = E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Dobili smo alternativnu formulu za računanje varijance slučajne varijable X:

$$Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 \tag{2.48}$$

Ova jednadžba znatno olakšava računanje varijance i često ćemo je koristiti u daljnjim proračunima. Primjere izračunavanja očekivanja i varijanci za različite vrste slučajnih varijabli vidjet ćemo u sljedećem poglavlju.

Vezano uz definicije momenata važno je reći na koji način se definira očekivanje funkcije slučajne varijable. Neka je zadana slučajna varijabla $Y = h(X)$ i neka se računa n-ti moment slučajne varijable Y. Tada je po definiciji

$$E[Y] = E\left[h(X)\right] = \begin{cases} \displaystyle\sum_i h(i)p_i & \text{za diskretne varijable} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x)dx & \text{za kontinuirane varijable.} \end{cases} \tag{2.49}$$

Ovu definiciju treba dobro zapamtiti budući da se korisiti kod izračunavanja korelacijskih i autokorelacijskih funkcija s kojima ćemo se susresti kasnije.

2.7 Važnije razdiobe

Svakoj slučajnoj varijabli X jednoznačno je pridružena funkcija razdiobe $F_X(x)$. Kraće rečeno, svaka slučajna varijabla ima svoju razdiobu. Analitički izraz za funkciju razdiobe ovisi o fizikalnoj pozadini procesa kojeg opisuje slučajna varijabla. Neki analitički izrazi za funkciju razdiobe se često pojavljuju u praksi. Različite su samo vrijednosti parametara tih izraza. U ovom odsječku opisat ćemo nekoliko najpoznatijih razdiobi. Podijelili smo ih prema tome da li je slučajna varijabla diskretna ili kontinuirana.

2.7.1 Diskretne slučajne varijable

Jednolika razdioba (*Uniform Distribution*)

Za diskretnu slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s vjerojatnostima

$$p_k = P\left(X = x_k\right) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \text{ inače } \; p_k = 0 \tag{2.50}$$

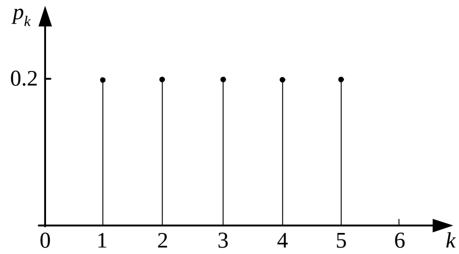
kažemo da ima jednoliku razdiobu. p_m predstavlja *funkciju vjerojatnosti* slučajne varijable X i najčešće uzimamo da je $x_m = m$. Funkciju razdiobe vjerojatnosti dobivamo prema definiciji (2.28).

$$F_X\left(x\right) = \sum_{m=-\infty}^{k} p_m, \quad k \le x < k+1$$

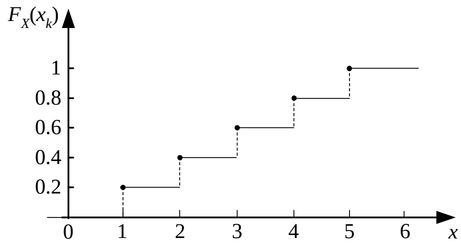
Slika 2.13 prikazuje funkciju vjerojatnosti i funkciju razdiobe vjerojatnosti za $n = 5$.

PRIMJER 2.14 Izračunajmo očekivanje ovakve slučajne varijable za opći slučaj koristeći (2.35) za diskretni slučaj:

$$\mu_X \;=\; E\left(X\right) = \sum_{m=1}^{n} m \cdot p_m = 1\cdot\frac{1}{n} + \ldots + n\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)\cdot\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2} \tag{2.51}$$



(a) Funkcija vjerojatnosti



(b) Funkcija razdiobe

Slika 2.13: Primjer diskretne jednolike razdiobe

Izračunajmo varijancu koristeći (2.38) za diskretni slučaj:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= Var\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = \sum_m m^2 \cdot p_m - \frac{(n+1)^2}{4} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{2\cdot(n+1)\cdot(2n+1) - 3\cdot(n+1)^2}{12} = \dots \\ \dots &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned} \tag{2.52}$$

U izvođenju izraza koristili smo sljedeće jednakosti:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \tag{2.53}$$

Primijetimo da jednolika razdioba ne mora biti nužno definirana na periodu $1\dots n$, nego općenito na periodu $m\dots n, m < n$. U tom slučaju gore izvedeni izrazi ne vrijede.

Bernoullieva razdioba (*Bernoulli Distribution*)

Slučajna varijabla X se zove Bernoullieva slučajna varijabla s parametrom p ako je njena funkcija vjerojatnosti dana sljedećim izrazom:

$$p_k = P(X=k) = p^k \cdot (1-p)^{1-k}, \quad 0 \le p \le 1, \quad k = 0, 1 \tag{2.54}$$

Funkcija razdiobe Bernoullieve slučajne varijable X je

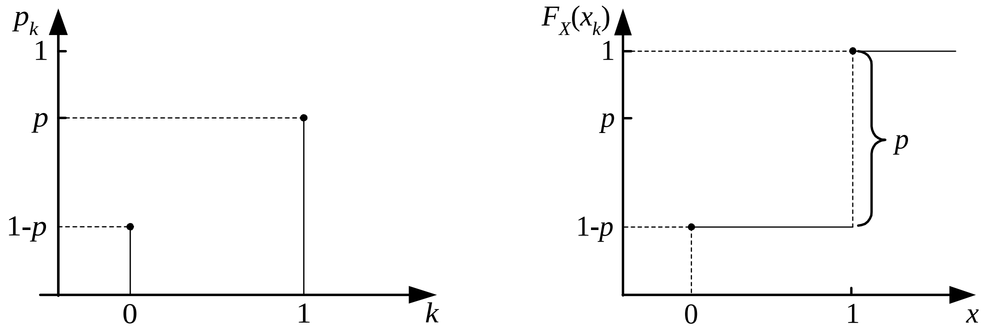
$$F_X\left(x\right) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \tag{2.55}$$

Bernoulieva razdioba nastupa u eksperimentima gdje su moguća dva ishoda, uspjeh i neuspjeh. Ovakav stohastički eksperiment zovemo Bernoulliev eksperiment. Uspjeh, koji odgovara vrijednosti slučajne varijable $X = 1$, događa se s vjerojatnošću p, a neuspjeh ($X = 0$) s vjerojatnošću $1 - p$.

Primjer 2.15 Izračunajmo očekivanje i varijancu za Bernoullievu razdiobu:

$$\mu_X = E\left(X\right) = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= Var\left(X\right) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = \\ &= 0^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p - p^2 = p - p^2 \end{aligned} \tag{2.57}$$



(a) Funkcija vjerojatnosti (b) Funkcija razdiobe

Slika 2.14: Funkcija vjerojatnosti i razdioba vjerojatnosti za Bernoullievu razdiobu

Binomna razdioba (*Binomial Distribution*)

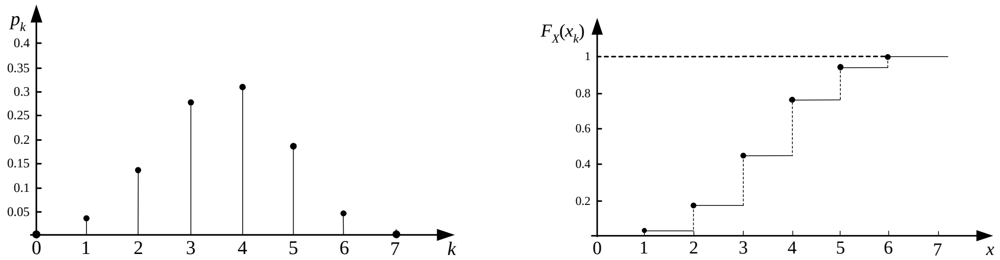
Slučajna varijabla X ima *binomnu razdiobu* s parametrima (n, p) ako je njena funkcija vjerojatnosti dana izrazom:

$$p_k = P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1 - p\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \quad 0 \leq p \leq 1 \tag{2.58}$$

gdje je $\binom{n}{k}$ binomni koeficijent:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Binomna razdioba vezana je uz eksperminet u kojem se n puta uzastopno izvodi Bernoulliev eksperiment. Slučajna varijabla koja ima binomnu razdiobu mjeri broj uspjeha u n izvođenja Bernoullieva eksperimenta, gdje je vjerojatnost uspjeha p. Funkcija razdiobe dana je izrazom:



(a) Funkcija vjerojatnosti (b) Funkcija razdiobe

Slika 2.15: Funkcija vjerojatnosti i razdioba vjerojatnosti za Binomnu razdiobu $(n = 6, p = 0.6)$

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad m \leq x < m + 1 \tag{2.59}$$

Jedna od primjena Binomne razdiobe je opis slučajne varijable koja mjeri broj aktivnih telefonskih pretplatnika. Neka je broj telefonskih pretplatnika koji su spojeni na neku telefonsku centralu N. Neka je p vjerojatnost da je neki od pretplatnika aktivan, tj. da ostvaruje svoj poziv. Ta vjerojatnost jednaka je prosječnom broju aktivnih korisnika podijeljenim sa N. Neka slučajna varijabla X mjeri broj trenutno aktivnih korisnika. Vjerojatnost da je trenutno aktivno točno k korisnika jednaka je vjerojatnosti da ih je aktivno k i neaktivno $N-k$. No takva mogućnost se može ostvariti na ukupno $\binom{N}{k}$ disjunktnih načina pa je funkcija vjerojatnosti ove varijable točno:

$$p_k = P(X=k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Primjer 2.16 Izračunajmo očekivanje i varijancu za binomnu razdiobu:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= E(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} k p^k (1-p)^{n-k} = \left| \begin{array}{c} j = k-1 \\ k = j+1 \end{array} \right| = \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} n \binom{n-1}{j} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} = \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{(n-1)-j} = \\
&= np (p+1-p)^{n-1} = np
\end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= Var(X) = E\left[X - E(X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E(X)^2 = \\
&= E\left[X(X-1)\right] + E(X) - E(X)^2 \\
E(X) &= np \\
E(X)^2 &= n^2 p^2 \\
E\left[X(X-1)\right] &= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \\
&= (1-p)^n \left(\frac{p}{1-p}\right)^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) \left(\frac{p}{1-p}\right)^{k-2} = \\
&= p^2 \frac{(1-p)^n}{(1-p)^2} \frac{d^2}{d\left(\frac{p}{1-p}\right)^2} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k\right] = \\
&= p^2 \frac{(1-p)^n}{(1-p)^2} \frac{d^2}{d\left(\frac{p}{1-p}\right)^2} \left[\left(1 + \frac{p}{1-p}\right)^n\right] = \\
&= p^2 \frac{(1-p)^n}{(1-p)^2} n(n-1) \left(\frac{1}{1-p}\right)^{n-2} = p^2 n(n-1) \\
Var(X) &= p^2 n(n-1) + np - n^2 p^2 = np(1-p)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

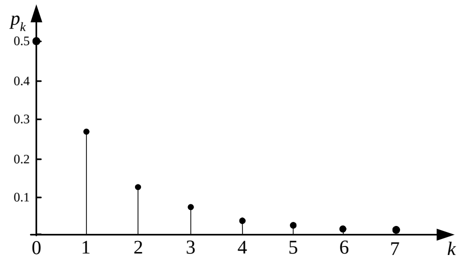
Geometrijska razdioba (*Geometric Distribution*)

Slučajna varijabla X ima *geometrijsku razdiobu* ako joj je funkcija vjerojatnosti zadana sljedećim izrazom:

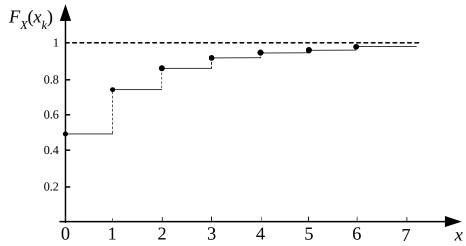
$$p_k = P(X=k) = p(1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N} \bigcup 0 \tag{2.62}$$

Varijabla X mjeri broj neuspješnih izvođenja Bernoullieva eksperimenta (uspjeh - p, neuspjeh - $1-p$) dok se ne pojavi uspjeh. Kada X poprimi vrijednost k, to znači da je $1, 2, \ldots, k$-ti put Bernoulliev eksperiment završio bez uspjeha, a $k-1$-vi s uspjehom. Funkcija razdiobe dana je sljedećim izrazom:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{m} p(1-p)^k, \quad m \leq x < m+1, \quad m \in \mathbb{N} \tag{2.63}$$



(a) Funkcija vjerojatnosti



(b) Funkcija razdiobe

Slika 2.16: Funkcija vjerojatnosti i razdioba vjerojatnosti za geometrijsku razdiobu ($p = 0.5$)

Primjer 2.17 Izračunajmo očekivanje i varijancu za geometrijsku razdiobu:

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot p \cdot q^i = p \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot q^{i-1+1} = pq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot q^{i-1} = \\ &= pq \frac{d}{dq}\left[\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right] = pq \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{1-q}\right) = pq \frac{1}{(1-q)^2} = \\ &= p\frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1 \geq 0 \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= Var(X) = E\left\{[X - E(X)]^2\right\} = E\left[X^2\right] - E(X)^2 = \\ &= E[X(X-1)] + E(X) - E(X)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1-p}{p} = \frac{(1-p)\cdot p}{p^2} \\ E(X)^2 &= \frac{(1-p)^2}{p^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot p \cdot q^i = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot p \cdot q^{i-2+2} = \\ &= p \cdot q^2 \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot q^{i-2} = p \cdot q^2 \cdot \frac{d^2}{dq^2}\left[\sum_{i=0}^{\infty} q^i\right] = \\ &= p \cdot q^2 \cdot \frac{d^2}{dq^2}\left[\frac{1}{1-q}\right] = p \cdot q^2 \cdot \frac{d}{dq}\left[\frac{1}{(1-q)^2}\right] = \left| \begin{array}{c} q = 1-p \\ dq = -dp \end{array} \right| = \\ &= p \cdot (1-p)^2 \cdot \frac{-d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = p \cdot (1-p)^2 \cdot \frac{2 \cdot p}{p^4} = \\ &= \frac{2 \cdot (1-p)^2}{p^2} \end{aligned}$$

$$Var\left(X\right) = \frac{2\cdot\left(1-p\right)^2}{p^2}+\frac{\left(1-p\right)\cdot p}{p^2}-\frac{\left(1-p\right)^2}{p^2}=\frac{1-2p+p^2+p-p^2}{p^2}=\frac{1-p}{p^2} \quad (2.65)$$

Poissonova razdioba (*Poisson Distribution*)

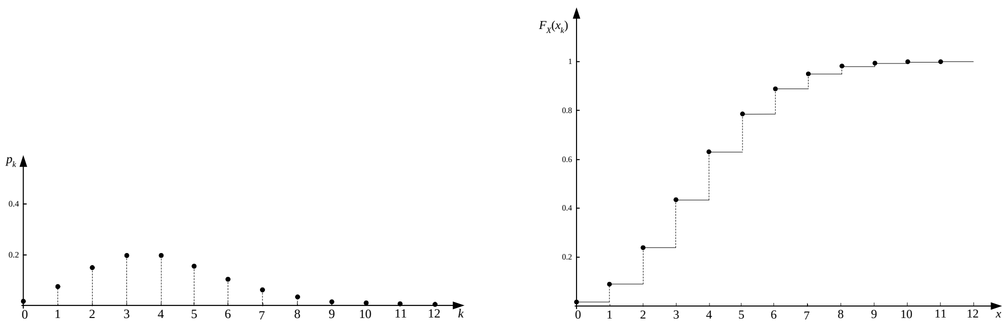
Poissonova razdioba ima vrlo veliku primjenu u modeliranju različitih izvora prometa, ali služi i kao aproksimacija binomne razdiobe u slučaju kada je parametar n binomne razdiobe jako velik (najčešće $n > 30$). Slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu ukoliko je njena funkcija vjerojatnosti

$$p_k = P\left(X=k\right) = e^{-a}\cdot\frac{a^k}{k!}, \qquad k=0,1,\ldots \quad (2.66)$$

Jedan primjer primjene ove razdiobe je primjer broja poziva koji pristižu u centralu u nekom vremenskom intervalu t. Ako je λ intenzitet dolazaka poziva u nekoj jedinici vremena, onda uz $a=\lambda\cdot t$, p_k daje vjerojatnost da je unutar vremena t u centralu pristiglo točno k poziva. Općenito, a predstavlja očekivani broj realizacija određenog događaja u nekom promatranom vremenu, ili nekoj drugoj dimenziji. Funkcija razdiobe definirana je sljedećim izrazom:

$$F_X\left(x\right) = e^{-a}\sum_{k=0}^{m}\frac{a^k}{k!}, m\le x< m+1 \quad (2.67)$$

Slika 2.17 prikazuje funkciju vjerojatnosti i funkciju razdiobe Poissonove slučajne varijable.



(a) Funkcija vjerojatnosti

(b) Funkcija razdiobe

Slika 2.17: Funkcija vjerojatnosti i razdioba vjerojatnosti za Poissonovu razdiobu ($a=4$)

PRIMJER 2.18 Izračunajmo očekivanje i varijancu Poissonove razdiobe:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= E\left(X\right)=\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^i}{i!}=e^{-a}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\frac{a^i}{i!}= \\
&= \left|\begin{array}{c} 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+...=e^x \\ |x|<\infty\end{array}\right| = e^{-a}\cdot\left[0+\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{a^i}{i!}\right]= \\
&= e^{-a}\cdot\left[0+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1+1}}{(i-1)!}\right]=e^{-a}\cdot\left[a\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(i-1)!}\right]= \\
&= e^{-a}\cdot\left[a\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}\right]=a\cdot e^{-a}\cdot e^{a}=a
\end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= Var(X) = E\{\left[X - E(X)^2\right]\} = E\left[X^2\right] - E(X)^2 = \\
&= E\left[X(X-1)\right] + E(X) - E(X)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= a \\
E(X)^2 &= a^2 \\
E\left[X(X-1)\right] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\cdot e^{-a}\cdot\frac{a^i}{i!} = e^{-a}\cdot\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{a^i}{i!} = \\
&= e^{-a}\cdot\sum_{i=1}^{\infty} i(i-1)\cdot\frac{a^i}{i!} = e^{-a}\cdot\sum_{i=2}^{\infty}(i-1)\cdot\frac{a^i}{(i-1)!} = e^{-a}\cdot\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^{i-2+2}}{(i-2)!} = \\
&= e^{-a}\cdot a^2\cdot\sum_{i=2}^{\infty}\frac{a^{i-2}}{(i-2)!} = |k = i-2| = e^{-a}\cdot a^2\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!} = e^{-a}\cdot a^2\cdot e^a
\end{aligned}$$

$$Var(X) = a^2 + a - a^2 = a \tag{2.69}$$

PRIMJER 2.19 (APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE POISSONOVOM) Pretpostavimo da u skupu od 10000 proizvoda ima proizvoda s tvorničkom pogreškom. Vjerojatnost da neki proizvod ima pogrešku je $p = 0.001$. Po kojoj razdiobi se ravna broj proizvoda s pogreškom i kolika je vjerojatnost da je takvih proizvoda točno 10?

Jasno je da se radi o binomnoj razdiobi i da je tražena funkcija vjerojatnosti:

$$p_k = \binom{10000}{k} 0.001^k \cdot (1 - 0.001)^{10000-k} \tag{2.70}$$

Ukoliko pokušamo izračunati vrijednost p_{10}, suočit ćemo se s velikim problemima. Potreban nam je vrlo jak kalkulator ili matematički programski alat poput programskog alata *Mathematica*© kako bismo došli do numeričke vrijednosti izraza. Poteškoće nastupaju pri računanju faktorijela velikih brojeva poput $10000! \approx 2.84626 \cdot 10^{35659}$.

Rješenje je pronaći funkciju kojom možemo dobro aproksimirati funkciju (2.70), odnosno razdiobu koja se asimptotski približava binomnoj za velike vrijednosti parametra n, a da je numerički manje zahtjevna.

Jedna od razdioba koja dobro aproksimira Binomnu je Poissonova razdioba, no uz određene uvjete. Ako je očekivanje Binomne razdiobe puno manje od n, $a = n \cdot p << n$, i ako je vrijednost parametra p puno manja od 1, $p << 1$, onda se može pokazati da se vjerojatnost p_k kad je k relativno malen u odnosu na n može izračunati prema aproksimacijskoj formuli:

$$p_k = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np} \tag{2.71}$$

Prema ovoj formuli prizlazi da je $p_{10} \approx 0.12511$, dok je prava vrijednost računata po pravoj binomnoj funkciji vjerojatnosti $p_{10} = 0.12517$, što je izvrstan rezultat. Odstupanja su veća za veće vrijednosti od k. Tako je po aproksimaciji $p_{1000} \approx 4.864 \cdot 10^{-63}$, a točno je $p_{1000} = 3.25565 \cdot 10^{-63}$.

Hipergeometrijska razdioba (*Hypergeometric Distribution*)

Hipergeometrijska razdioba nastupa u eksperimentu gdje se iz nekog skupa od N elemenata bira n uzoraka. Svaki od elemenata skupa je jednog od dva tipa. M elemenata je tipa A, a N - M elemenata je tipa B. Slučajna varijabla X ima *hipergeometrijsku razdiobu* ukoliko mjeri koliko je elemenata u n uzoraka tipa A.

Tipičan primjer je izabiranje mješovitog muško-ženskog tima od n igrača iz skupa od N studenata u kojem ima M žena i $N-M$ muškaraca. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, k$, gdje je $k = \min\{n, M\}$.

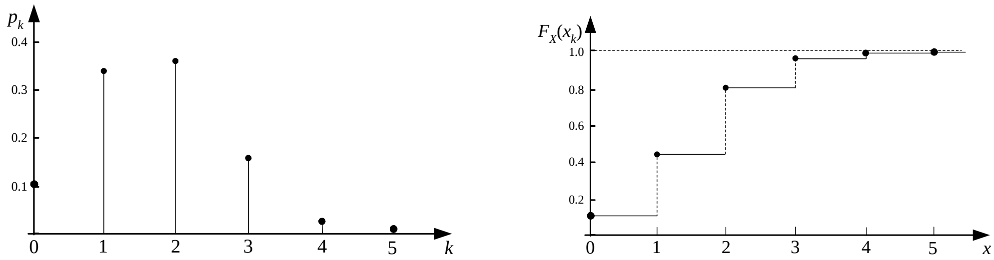
Do funkcije vjerojatnosti dolazimo na sljedeći način. Tražimo vjerojatnost da je u izabranom timu m žena. Zamislimo da svi igrači sjede na stolicama s redim brojevima od 1 do N, a igrači se izabiru prozivanjem slučajnog slijeda rednih brojeva stolica u kojem nema ponavljanja brojeva. Izbor možemo napraviti na ukupno $\binom{N}{n}$ načina. Budući da su svi mogući sljedovi, tj. izbori, jednako vjerojatni, ovdje možemo koristiti klasičnu definiciju vjerojatnosti. Potreban nam je broj mogućih uspješnih ishoda izbora, tj. onih izbora igrača u kojima je bilo točno m žena. Promatrajmo sada samo žene. Od M žena, izabrano ih je m. To se može dogoditi na ukupno $\binom{M}{m}$ načina. Kada je m žena izabrano, ostale ne smiju biti izabrane, tj. ostatak od $m-n$ raspoloživih mjesta mora pripasti muškarcima. Inače izbor tima ne spada u promatrani eksperiment. Za jedan izbor od m žena, može se napraviti $\binom{N-M}{n-m}$ izbora muškaraca.

Funkcija vjerojatnosti je tako:

$$p_m = P(X = m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} \tag{2.72}$$

Dakle, ako u skupu od N elemenata M elemenata ima nekakvo posebno svojstvo, onda je vjerojatnost da u slučajnom podskupu od n elemenata nađemo m takvih elemenata dan s gore navedenom formulom.

Funkcija vjerojatnosti i funkcija razdiobe, koju ne možemo napisati u jednostavnijem obliku od sume, prikazane su na slici 2.18.



(a) Funkcija vjerojatnosti (b) Funkcija razdiobe

Slika 2.18: Funkcija vjerojatnosti i razdioba vjerojatnosti za Hipergeometrijsku razdiobu $(n = 5, M = 10, N = 30)$

Primjer 2.20 Izračunajmo sada očekivanje i varijancu Hipergeometrijske razdiobe. Po prvi put se susrećemo sa sumom kombinacija, pa moramo imati dodatne jednakosti.

$$\begin{aligned}
\mu_X &= E(X) = \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \left| \binom{M}{m} = \frac{M}{m} \cdot \binom{M-1}{m-1} \right| = \\
&= \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{M}{m} \cdot \frac{\binom{M-1}{m-1} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{M}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{m=0}^{n} \binom{M-1}{m-1} \cdot \binom{N-M}{n-m} = \ldots
\end{aligned}$$

Primijetimo da vrijedi:

$$\binom{A}{B} = \sum_{m=0}^{B} \binom{M}{m} \cdot \binom{A-M}{B-m}$$

za sve M[3]. Iskoristimo ovo za izračunavanje gornje sume:

[3]To je jasno ukoliko se pogleda izraz (2.72). Zbroj svih vjerojatnosti mora biti jednaka 1, pa zbrajanjem od 0 do m dolazimo do gornje tvrdnje.

$$\begin{aligned}
\ldots &= E(X) = \frac{M}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{m=0}^{n} \binom{M-1}{m-1} \cdot \binom{N-M}{n-m} = \\
&= \left| \begin{array}{c} v = m-1 \\ C = M-1 \end{array} \right| = \frac{M}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{v=0}^{n-1} \binom{C}{v} \cdot \binom{(N-1)-C}{(n-1)-v} = \\
&= \frac{M}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-1}{n-1} = \frac{M}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N}{n} \cdot \frac{n}{N} = n \cdot \frac{M}{N}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= Var(X) = E\{\left[X - E(X)^2\right]\} = E\left[X^2\right] - E(X)^2 = \\
&= E\left[X(X-1)\right] + E(X) - E(X)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= n \cdot \frac{M}{N} \\
E(X)^2 &= \left(n \cdot \frac{M}{N}\right)^2 \\
E\left[X(X-1)\right] &= \sum_{m=1}^{n} m \cdot (m-1) \cdot \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{M \cdot (M-1)}{\binom{N}{n}} \sum_{m=2}^{n} \binom{M-2}{m-2} \cdot \binom{N-M}{n-m} = \\
&= \left| \begin{array}{c} v = m-2 \\ C = M-2 \end{array} \right| = \frac{M \cdot (M-1)}{\binom{N}{n}} \cdot \sum_{v=0}^{n-2} \binom{C}{v} \cdot \binom{(N-2)-C}{(n-2)-v} = \\
&= \frac{M \cdot (M-1)}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-2}{n-2} = \frac{M \cdot (M-1) \cdot \binom{N}{n}}{\binom{N}{n} \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{N-1}{n-1}} = \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left[\frac{(n-1) \cdot (M-1)}{N-1}\right]
\end{aligned}$$

Konačno je:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left[\frac{(n-1) \cdot (M-1)}{N-1}\right] + n \cdot \frac{M}{N} - n^2 \cdot \frac{M^2}{N^2} = \\
&= n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)
\end{aligned} \tag{2.74}$$

2.7.2 Kontinuirane slučajne varijable

Jednolika razdioba (*Uniform Distribution*)

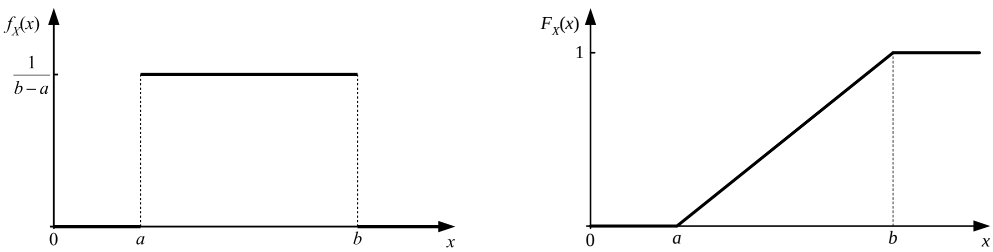
Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na području $[a, b]$ ako je njena funkcija gustoće razdiobe dana izrazom:

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a < x < b \\ \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases} \tag{2.75}$$

Odgovarajuću funkciju razdiobe dobivamo prema definiciji na sljedeći način:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{b-a}\, dx = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ \\ 1 & x \geq b \end{cases} \tag{2.76}$$

Funkcije su prikazane na slici 2.19. Jednoliku razdiobu koristimo u slučajevima kada ne znamo pravu



(a) Funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti (b) Funkcija razdiobe

Slika 2.19: Funkcija vjerojatnosti i razdioba vjerojatnosti za jednoliku razdiobu

funkciju razdiobe i gdje nam se sve vrijednosti iz nekog područja čine jednako vjerojatne.

Primjer 2.21 Izračunajmo očekivanje i varijancu jednoliko raspodijeljene slučajne varijable.

$$\begin{aligned} \mu_X &= E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x)\, dx = \\ &= \int\limits_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\, dx = \left.\frac{x^2}{2 \cdot (b-a)}\right|_a^b = \\ &= \frac{(b-a) \cdot (b+a)}{2 \cdot (b-a)} = \frac{(a+b)}{2} \end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= Var(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \\ &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\, dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3 - a^3}{3 \cdot (b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \\ &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3a^2 - 6ab - 3b^2}{12} = \\ &= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12} \end{aligned} \tag{2.78}$$

Eksponencijalna razdioba (*Exponential Distribution*)

Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu a parametrom λ ($\lambda > 0$), ako je gustoća razdiobe vjerojatnosti zadana izrazom:

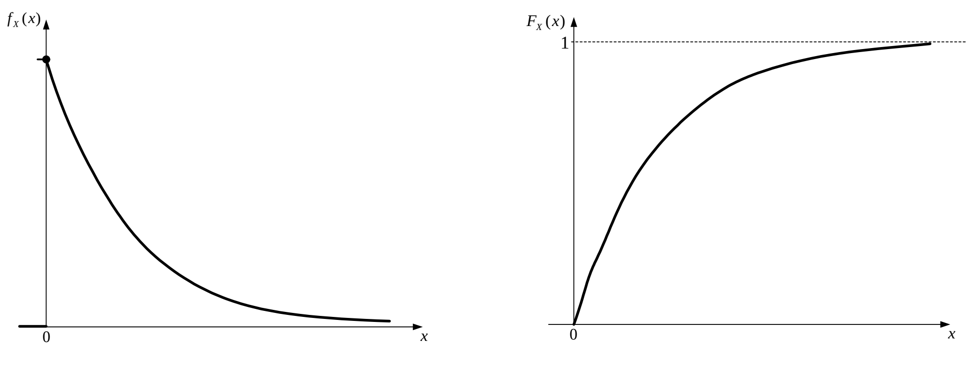
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{2.79}$$

Eksponencijalna slučajna varijabla X u praksi najčešće mjeri vrijeme između dva događaja. Tipičan primjer je duljina trajanja poziva, vrijeme koje proteče između dva uzastopna dolaska zahtjeva za uspostavu poziva itd. Poslije ćemo vidjeti da je eksponencijalna razdioba izuzetno važna u teoriji prometa.

Pronađimo funkciju razdiobe ove slučajne varijable. Prema definiciji slijedi:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\, dx = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda x}\, dx = \\ &= \left| \begin{array}{c} u = -\lambda x \\ dx = \frac{du}{-\lambda} \end{array} \right| = -\int_0^{-\lambda x} e^u\, du = -\left. e^u \right|_0^{-\lambda x} = \\ &= 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Grafovi obiju funkcija su prikazani na slici 2.20.



(a) Funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti

(b) Funkcija razdiobe

Slika 2.20: Funkcija gustoće razdiobe i funkcija razdiobe eksponencijalne razdiobe

PRIMJER 2.22 Izračunajmo očekivanje i varijancu eksponencijalne razdiobe:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\,dx + \int_{0}^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \\
&= \lambda \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = x \\ dv = e^{-\lambda x}\,dx \\ v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{array} \right| = \\
&= \lambda \left[-\frac{x}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx \right] = \\
&= \left| \lim_{x\to\infty} x e^{-\lambda x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0 \right| = \\
&= \lambda \left[0 - 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx \right] = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \\
&= -\frac{1}{\lambda}[0-1] = \frac{1}{\lambda} \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= Var\,(X) = E\left[(X-\mu_X)^2\right] = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx - {\mu_X}^2 = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx - {\mu_X}^2 = \\
&= \left| \begin{array}{cc} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} & dv = e^{-\lambda x}\,dx \end{array} \right| = \\
&= \lambda \left[-\frac{1}{\lambda} x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} + \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-\lambda x}\,dx \right] - {\mu_X}^2 = \\
&= \frac{2}{\lambda} \underbrace{\int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx}_{\mu_X} - {\mu_X}^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (2.82)
\end{aligned}$$

Normalna (Gaussova) razdioba (*Normal or Gaussian Distribution*)

Slučajna varijabla X ima normalnu ili Gaussovu razdiobu ako je gustoća razdiobe vjerojatnosti zadana kao:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (2.83)$$

Normalna razdioba je razdioba koja se najčešće pojavljuje u prirodi. Primjeri su intenzitet šuma u vodiču, razdioba intenziteta uzoraka glasa, različita zračenja u prirodi itd. Normalna razdioba je rezultat djelovanja velikog broja jednostavnih slučajnih varijabli. O tome ćemo nešto kasnije kada budemo govorili o centralnom graničnom teoremu.

Odgovarajuća funkcija razdiobe vjerojatnosti normalne razdiobe je:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du \qquad (2.84)$$

Integral u gornjem izrazu se ne može eksplicitno riješiti, pa ga rješavamo numerički. Kako bismo izbjegli pisanje kompliciranog integrala, često koristimo funkciju $\Phi(z)$ koja je definirana izrazom:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \qquad (2.85)$$

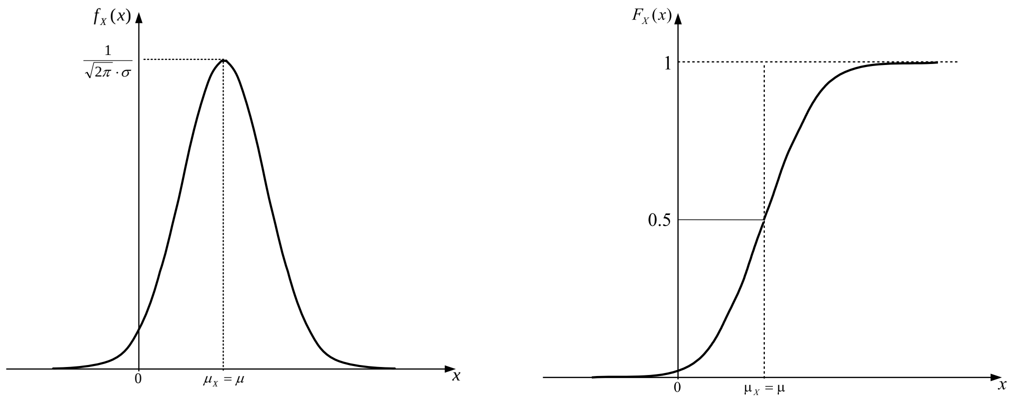
Funkciju razdiobe vjerojatnosti jednostavno izračunavamo kao:

$$F_X(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2.86}$$

Primijetimo da iz simetričnosti (2.85) slijedi:

$$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti i gustoća razdiobe prikazane su na slici 2.21.



(a) Funkcija gustoće razdiobe vjerojatnosti (b) Funkcija razdiobe

Slika 2.21: Funkcija gustoće razdiobe i funkcija razdiobe normalne (Gaussove) razdiobe

Primjer 2.23 Izračunajmo sada očekivanje i varijancu:

$$\begin{aligned}
\mu_X &= E[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{array}{c} u = x-\mu \\ du = dx \end{array}\right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(u+\mu)\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du + \\
&+ \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = 1\right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du + \mu = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\left[\int_{0}^{+\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du + \int_{-\infty}^{0} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right] + \mu =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\left[\int_0^{+\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du - \int_0^{-\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du\right] + \mu = \\
&= \left|\begin{array}{c} z=-u \\ dz=-du \end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot\underbrace{\left[\int_0^{+\infty} u\cdot e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du - \int_0^{+\infty} z\cdot e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz\right]}_{=0} + \mu = \mu \qquad (2.87)
\end{aligned}
$$

Dobro je primijetiti da je $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 0$ zbog toga što je podintegralna funkcija neparna.

Za računanje varijance bit će nam potrebna definicija Γ funkcije i nekih njenih svojstava. Po definiciji je:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}\cdot e^{-t}\,dt, \quad x>0 \tag{2.88}$$

Integral (2.88) zovemo *Eulerov integral*. Osnovna svojstva ovog integrala su sljedeća:

$$
\begin{array}{ll}
\Gamma(x+1) = x\cdot\Gamma(x) & \Gamma(n+1) = n! \\
\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\cdot\Gamma(2x) & \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}
\end{array}
\tag{2.89}
$$

Sada se možemo upustiti u izračunavanje varijance:

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= Var(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \left|\begin{array}{c} u=\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\cdot\sigma} \\ du=\frac{dx}{\sqrt{2}\cdot\sigma}\end{array}\right| = \\
&= \frac{2\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\cdot e^{-u^2}\,du = \frac{4\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} u^2\cdot e^{-u^2}\,du = \left|\begin{array}{c} z=u^2 \\ dz=2\cdot u\cdot du\end{array}\right| = \\
&= \frac{2\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\sqrt{z}\cdot e^{-z}\,dz = \frac{2\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2\cdot\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \\
&= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = \sigma^2 \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

Za normalnu razdiobu ćemo koristiti oznaku $N(\mu,\sigma^2)$, kako bismo označili da je slučajna varijabla X normalna s očekivanjem μ i varijancom σ^2.

Normalna slučajna varijabla Z s očekivanjem 0 i jediničnom varijancom $\sigma^2 = 1$, $Z = N(0,1)$, zove se *standardna normalna* slučajna varijabla, tj. ona ima *standardnu normalnu razdiobu.*

Normalna slučajna varijabla je vjerojatno najvažniji tip kontinuirane slučajne varijable. Ona igra bitnu ulogu u izučavanju slučajnih ponašanja u prirodi. Mnogi slučajni prirodni fenomeni su približno normalni.

Nadalje samo navodimo još neke važnije razdiobe koje bismo mogli susresti u zadacima. Izračunavanje funkcije razdiobe, očekivanja i varijance ostavljamo kao zadatak za vježbu.

Razdioba Studenta (*Student Distribution*)

Slučajna varijabla X ima razdiobu Studenta s n stupnjeva slobode, ako joj je gustoća razdiobe zadana izrazom:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{2.91}$$

X je realan broj iz intervala $(-\infty, \infty)$. Ovu razdiobu prvi je definirao S. Gosset 1908. godine u vrijeme kada je još bio student, pa od tud i naziv za razdiobu.

Gama razdioba (*Gamma Distribution*)

Slučajna varijabla X ima gama razdiobu ako poprima vrijednosti iz intervala $(0, \infty)$, a ima gustoću razdiobe:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\lambda x} \tag{2.92}$$

gdje su α i λ pozitivni realni brojevi.

Hi-kvadrat razdioba (*Chi-Square Distribution*)

Slučajna veličina X koja poprima vrijednosti u intervalu $(0, \infty)$ ima Hi-kvadrat razdiobu ako je njena funkcija gustoće vjerojatnosti

$$f_X(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \tag{2.93}$$

gdje parametar n odgovara broju stupnjeva slobode (prirodan broj). Ova razdioba je poseban slučaj gama razdiobe za parametre $\alpha = n/2$, $\lambda = 1/2$.

Rayleigheva razdioba (*Rayleigh Distribution*)

Slučajna varijabla X koja poprima vrijednosti u području $(0, \infty)$ ima Rayleighevu razdiobu ako je gustoća razdiobe vjerojatnosti

$$f_X(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \tag{2.94}$$

Log-normalna razdioba (*LogNormal Distribution*)

Log-normalna razdioba nastaje kada se stvori slučajna varijabla X koja predstavlja umnožak mnogo neovisnih slučajnih varijabli. Gustoća razdiobe vjerojatnosti varijable X s parametrima (μ, σ) je

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \frac{e^{-\frac{(log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{x} \tag{2.95}$$

Paretova razdioba (*Pareto Distribution*)

Paretovu razdiobu možemo koristiti za opis priljeva prometa, s minimalnim priljevom k. Slučajna varijabla X ima Paretovu razdiobu s parametrima (k, α) ako je gustoća razdiobe vjerojatnosti

$$f_X(x) = \alpha \cdot k^\alpha \cdot x^{-(\alpha+1)} \tag{2.96}$$

2.8 Funkcije slučajne varijable i njihovo očekivanje

Slučajne varijable nikada se ne pojavljuju usamljene. Često promatramo njihove ovisnosti. Ponekad se javlja potreba promatranja neke slučajne varijable koja je funkcija jedne ili više drugih slučajnih varijabli. Tipičan primjer je zbroj slučajnih varijabli. Jedan primjer smo već upoznali: neovisno bacanje dviju kocki. Svakoj kocki možemo pridružiti posebnu slučajnu varijablu koja poprima iznos jednak broju koji je ispao na kocki. Ukoliko promatramo zbroj vrijednosti koje su ispale na kockama u jednom bacanju, dobivamo novu varijablu koja je jednaka zbroju dvije prethodne. Pitamo se na koji se način može izračunati funkcija razdiobe, očekivanje i drugi parametri nove varijable.

Najjednostavnije je početi od funkcija jedne varijable. Neka je zadana slučajna varijabla X i proizvoljna funkcija $g(x)$. Promatrajmo slučajnu varijablu Y zadanu izrazom:

$$Y = g(X).$$

Postoji puno primjera za ovakav odnos slučajnih varijabli. Na primjer, nekakav uređaj vrši kvadriranje napona na ulazu. Ako je na ulazu signal X, na izlazu je signal $Y = X^2$. Ako se X ravna po poznatoj razdiobi, pitanje je po kojoj razdiobi se ravna signal Y?

Uvedimo sljedeće oznake. Neka R_X označava područje vrijednosti od X (*range*). Neka za neku zadanu vrijednost y, D_Y označava podskup od R_X za koji vrijedi da sadržava sve X za koje je ispunjeno:

$$g(x) \leq y.$$

Slijedi da je *skup događaja*:

$$(Y \leq y) = [g(X) \leq y] = (X \in D_Y)$$

gdje je $(X \in D_Y)$ skup svih događaja λ takvih da je $X(\lambda) \in D_Y$, odnosno

$$D_Y = \{X : g(X) \leq y\}$$

Primijenivši funkciju vjerojatnosti na gornji skup dobivamo:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[g(X) < y] = P(X \in D_Y).$$

$F_Y(y)$ je tako jednaka vjerojatnosti da je $X \in D_Y$. Tu vjerojatnost znamo izračunati:

$$F_X(x) = \int_{D_Y} f_x(x)\, dx.$$

Problem gornje jednakosti je taj što su granice integrala funkcije od y i u općem slučaju inegral relativno složen. Međutim za **monotone funcije**, bilo padajuće ili rastuće, može se izvesti određeno pojednostavljenje. Za izračunavanje funkcije razdiobe varijable Y koristi sljedeća metoda:

$$x = g^{-1}(y) = h(y).$$

Gustoća razdiobe vjerojatnosti za **monotonu funkciju** $g(x)$ se izračunava na sljedeći način:

$$f_Y(y) = f_X(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X[h(y)] \cdot \left|\frac{dh(y)}{dy}\right|.$$

Primjer 2.24 Neka je zadana slučajna varijabla koja se vlada po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ. Slučajna varijabla Y funkcijski je povezana s X na sljedeći način:

$$Y = aX + b$$

Pronađimo gustoću razdiobe vjerojatnosti varijable Y. Budući da imamo monotonu funkciju slijedi:

$$y = g(x) = ax + b \quad \rightarrow \quad x = g^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} = h(y)$$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{dh(y)}{dy}\right| = \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{|a|}$$

$$f_Y(y) = f_X[h(y)] \cdot \left|\frac{dh(y)}{dy}\right| = \frac{1}{|a|} \cdot f_X[h(y)] = \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left[\frac{y-b}{a}\right] = \frac{\lambda}{|a|} \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{y-b}{a}}$$

Očekivanje naravno računamo iz novodobivene razdiobe. Očekivanje varijable Y je tako:

$$\begin{aligned} \mu_Y &= E[Y] = \frac{\lambda}{|a|} \int\limits_{b}^{+\infty} e^{-\lambda \frac{y-b}{a}} dy = \\ &= \ldots = Sign(a) \end{aligned}$$

Pri računanju očekivanja dobro je koristiti činjenicu da u slučaju kad su varijable $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u cjelini neovisne, očekivanje umnoška, odnosno zbroja funkcija takvih varijabli računa kao umnožak, odnosno zbroj pojedinačnih očekivanja.

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} g_i(x_i)\right] = \prod_{i=1}^{n} E[g_i(X_i)]$$

Problem određivanja gustoće razdiobe funkcije slučajne varijable je samo jedan od problema s kojima se susrećemo u teoriji vjerojatnosti. Još jedan važan problem je problem određivanja funkcije razdiobe zbroja dviju slučajnih varijabli. Pri rješavanju tog problema nam znatno pomaže pojam karakteristične funkcije.

Definicija 2.23 (Karakteristična funkcija (*Characteristic Function*))
Karakteristična funkcija slučajne varijable X je Fourierov transformat[4] njene gustoće razdiobe vjerojatnosti $f_X(x)$ za kontinuiranu X, odnosno funkcije vjerojatnosti $p_X(x)$ za diskretnu X.

$$\Psi_X(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) = \begin{cases} \sum\limits_i e^{j\omega x_i} \cdot p_X(x_i) \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} f_X(x)\, dx \end{cases} \tag{2.97}$$

Karakteristična funkcija je tako Fourierov transformat funkcije razdiobe definiran izrazom (2.97). Ako nam je zadana karakteristična funkcija, onda originalnu funkciju razdiobe tražimo kao inverzan Fourierov transformat prema formuli:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_X(\omega) \cdot e^{-j\omega x} d\omega \tag{2.98}$$

Relacija (2.98) je rezultat poznatog *Liouvillovog teorema*.

Ako su poznate funkcije gustoća razdioba slučajnih varijabli, onda se može primijeniti sljedeći teorem:

Svojstvo 2.1 (Gustoća razdiobe zbroja varijabli)
Gustoća razdiobe zbroja $Z = X + Y$ dviju nezavisnih slučajnih varijabli X i Y jednaka je konvoluciji njihovih gustoća razdioba:

$$f_Z(z) = f_X(x) * f_y(y) \tag{2.99}$$

[4] Fourierov transformat je ovdje definiran nešto drukčije nego što je uobičajeno, no bilo koja definicija Fourierove transformacije je valjana

Konvolucija dviju funkcija se definira kao integral, odnosno suma:

$$f_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot f_Y(z-t)\, dt$$

odnosno

$$p_Z(h) = \sum_k p_X(k) \cdot p_Y(h-k)$$

Za konvoluciju vrijede standardna pravila komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.

Kao što je poznato iz Fourierove analize, konvolucija funkcija u gornjem području jednaka je umnošku u donjem i obratno. Posljedica toga je sljedeći, vrlo važan teorem:

Svojstvo 2.2 (Karakteristična funkcija zbroja)
Karakteristična funkcija zbroja $Z = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ u cjelini nezavisnih slučajnih varijabli $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jednaka je produktu karakterističnih funkcija pribrojaka:

$$\Psi_Z(\omega) = \prod_{k=1}^{n} \Psi_{X_k}(\omega) \tag{2.100}$$

Pokažimo kako dolazimo do gustoće razdiobe zbroja slučajnih varijabli na konkretnom primjeru:

Primjer 2.25 Neka su X i Y dvije u cijelosti nezavisne slučajne varijable jednoliko raspodijeljene na području $[0, 1]$. Pronađimo gustoću razdiobe slučajne varijable $Z = X + Y$.

Funkcije razdioba se mogu napisati kao zbroj dviju step funkcija:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= S(x) - S(x-1) \\ f_Y(y) &= S(y) - S(y-1) \end{aligned}$$

Upotrijebimo li teorem 2.1 dobivamo:

$$f_Z(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot f_Y(x-t)\, dt = \left\{ \begin{array}{c} x \\ 2-x \\ 0 \end{array} \right.$$

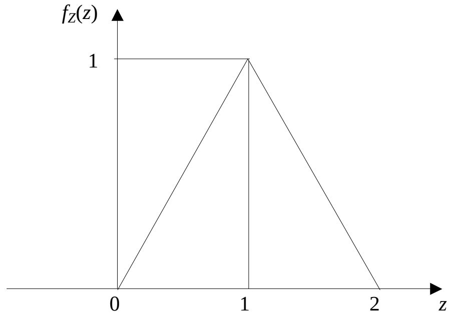
Pri rješavanju ovog problema možemo upotrijebiti i teorem 2.2. Potrebno je pronaći karakteristične funkcije varijabli, pomnožiti ih i naći inverz. To ostavljamo za domaću zadaću.

Nova funkcija razdiobe je prikazana na slici 2.22.

Primjer 2.26 Neka su X_i varijable s Poissonovom razdiobom s parametrima $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$. Pronađimo kakvu razdiobu ima varijabla Z koja je jednaka zbroju ovih varijabli

$$Z = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ako bismo pri rješavanju ovog problema koristili 2.1, zapali bismo u probleme vezane uz beskonačne sume. Stoga je bolje koristiti teorem 2.2 koji kaže da je karakteristična funkcija od Z jednostavno umnožak karakterističnih funkcija varijabli X_i. Pronađimo prvo karakterističnu funkciju od X_i:



Slika 2.22: Funkcija gustoće vjerojatnosti varijable Z

$$\begin{aligned}\Psi_{X_i}(\omega) &= E\left(e^{j\omega x_i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_i} \cdot e^{j\omega k} = e^{-\lambda_i} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda_i \cdot e^{j\omega}\right)^k}{k!} = \\ &= e^{-\lambda_i} \cdot e^{\lambda_i \cdot e^{j\omega}} = e^{\lambda_i \cdot \left(e^{j\omega}-1\right)}\end{aligned}$$

Karakteristična funkcija varijable Z je:

$$\begin{aligned}\Psi_Z(\omega) &= E\left(e^{j\omega z_i}\right) = \prod_{i=0}^{n} \Psi_{X_i}(\omega) = \prod_{i=0}^{n} e^{\lambda_i \cdot \left(e^{j\omega}-1\right)} = \\ &= e^{\left(e^{j\omega}-1\right)\cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i} = \left| \lambda = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \right| = e^{\lambda \cdot \left(e^{j\omega}-1\right)}\end{aligned}$$

Dobivena karakteristična funkcija jednaka je karakterističnoj funkciji od X_i, ali s parametrom λ. Stoga Z ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_n$

DEFINICIJA 2.24 (FUNKCIJA IZVODNICA (z-TRANSFORMACIJA FUNKCIJE VJEROJATNOSTI))
Za diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N} \cup \{\emptyset\}$ definiramo funkciju izvodnicu na sljedeći način:

$$\Psi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = E\left[z^k\right] \tag{2.101}$$

gdje red konvergira za $|z| < 1$.

Original za ovu transformaciju tražimo preko k-te derivacije funkcije izvodnice u točki $z = 0$:

$$p_k = \frac{\Psi^{(k)}(0)}{k!} \tag{2.102}$$

SVOJSTVO 2.3 (FUNKCIJA IZVODNICA ZBROJA NEOVISNIH SLUČAJNIH VARIJABLI)
Funkcija izvodnica zbroja neovisnih diskretnih slučajnih varijabli $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ jednaka je umnošku njihovih funkcija izvodnica:

$$\Psi_{X_1+X_2+\ldots+X_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} \Psi_{X_i}(z) \tag{2.103}$$

Primjer 2.27 Pronađimo funkciju izvodnicu Poissonove razdiobe i razdiobu zbroja n istovjetnih Poissonovih slučajnih varijabli:

$$\Psi_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-a} \frac{a^k}{k!} \cdot z^k = e^{-a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(az)^k}{k!} = e^{-a} \cdot e^{a \cdot z} = e^{a \cdot (z-1)}$$

$$\Psi_{X_1 + \ldots + X_n}(z) = \prod_{i=1}^{n} \Psi_{X_i}(z) = (\Psi_X(z))^n = \left(e^{a \cdot (z-1)}\right)^n = e^{n \cdot a \cdot (z-1)}$$

Funkciju razdiobe dobivamo iz (2.102):

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k \left[e^{n \cdot a \cdot (z-1)}\right]}{dz^k} \right|_{z=0} = \frac{(na)^k}{k!} e^{-na}$$

2.9 Centralni granični teorem *Central limit theorem*

Tijekom studija smo se često susretali s pojmom šuma, električnog signala koji se superponira na originalni signal i uzrokuje njegovo izobličenje. Dobro poznata činjenica je da intenzitet šuma redovito ima normalnu (Gaussovu) razdiobu.

Najpoznatiji je termički šum. Njega možemo izmjeriti na krajevima svakog vodiča. Izvor tog šuma je kretanje elektronâ u rešetki vodiča. Svaki elektron na krajevima inducira maleni napon, a ukupni napon je jednak zbroju svih pojedinačnih napona. Svaki napon ima svoju razdiobu. Ukupni napon doživljavamo kao šum, čiji se napon ravna po normalnoj razdiobi.

Postavlja se pitanje zašto je napon šuma ima baš normalnu razdiobu, a ne neku drugu? Odgovor na ovo pitanje daje *Centralni granični teorem.* U literaturi se navode dva teorema: sa strožim i slabijim uvjetima. Ovdje navodimo oba, ali bez dokaza jer bi nam za njih trebalo jako puno prostora.

Svojstvo 2.4 (Centralni granični teorem za jednako raspodijeljene slučajne varijable) *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ u cjelini nezavisne slučajne varijable s jednakim razdiobama, očekivanjem μ i varijancom σ^2. Neka je slučajna varijabla Y_n jednaka zbroju svih n slučajnih varijabli:*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Razdioba slučajne varijable Y_n ima asimptotski normalnu razdiobu $N(n\mu, n\sigma^2)$ i njena razdioba je sličnija normalnoj razdiobi $N(n\mu, n\sigma^2)$ što je broj n veći:

$$\lim_{n \to \infty} Y_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

Svojstvo 2.5 (Centralni granični teorem za proizvoljno raspodijeljene slučajne varijable) *Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ slučajne varijable s funkcijama razdioba redom $f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), \ldots, f_{X_n}(x)$, očekivanjima $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ i varijancama $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$. Neka je Y_n slučajna varijabla definirana izrazom:*

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Neka su:

$$\begin{aligned} M_n &= E[Y_n] \\ D_n^2 &= Var[Y_n] \\ \hat{\sigma}_i &= \int_{\mu_i - \epsilon D_i}^{\mu_i + \epsilon D_i} (\xi - \mu_i)^2 f_i(x)\, d\xi \\ \hat{D}_n^2 &= \sum_{i=1}^{n} \hat{\sigma}_i^2 \end{aligned}$$

Ako za svaki $\epsilon > 0$ vrijede sljedeći uvjeti:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\hat{D}_n^2}{D_n^2} < \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} D_n^2 = \infty \tag{2.104}$$

onda se razdioba slučajne varijable Y_n asimptotski približava normalnoj razdiobi $N(M_n, D_n^2)$, tj.:

$$\lim_{n\to\infty} Y_n \quad \sim \quad N(M_n, D_n^2)$$

Teorem 2.4 prvi je dokazao ruski matematičar A.A. Markov 1898. godine, a kasnije i ruski matematičar Ljapunov. Uvjete na ovaj teorem oslabili su Lindeberg 1922. godine i Feller 1935. godine, te je formuliran teorem 2.5. Uvjeti (2.104) se zovu Linedebergovi uvjeti.

Primjer 2.28 Pokažimo primjenu centralnog graničnog teorema na jednom konkretnom primjeru. Promatrajmo skupinu od N telefonskih pretplatnika priključenih na neku telefonsku centralu. Vjerojatnost da neki pretplatnik trenutno razgovara je p. Vjerojatnost da razgovara točno k pretplatnika se računa po binomnoj razdiobi:

$$p_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

Ukoliko promatramo jednog pretplatnika, njegovu aktivnost možemo opisati Bernoullievom slučajnom varijablom X, koja poprima vrijednost 1 kada pretplatnik razgovara i 0 kada ne razgovara. Te varijable su sve jednake. Ukupan broj trenutno aktivnih pretplatnika neka je Y. Y je jednak zbroju vrijednosti svih N slučajnih varijabli X:

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

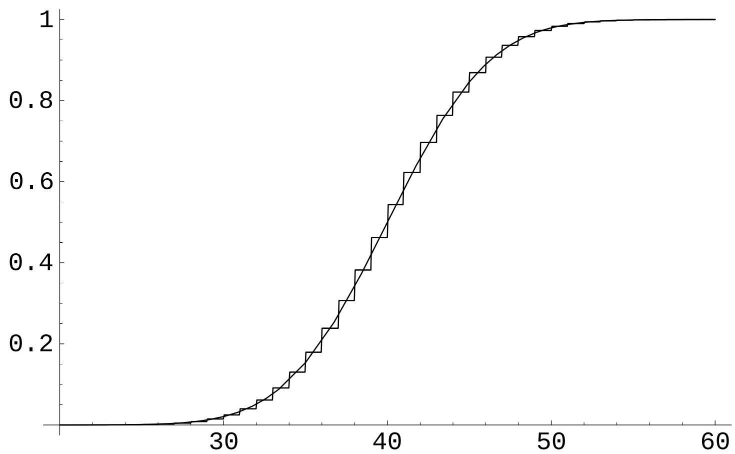
Ukoliko je N dovoljno veliki, po centralnom graničnom teoremu možemo zaključiti da će se Y ravnati po normalnoj razdiobi $N(NE[X], NVar[X])$. Budući da je $E[X] = p$ i $Var[X] = p(1-p)$, to se ukupan broj aktivnih korisnika mora moći asimptotski opisati normalnom razdiobom $N(Np, Np(1-p))$. Slika 2.23 funkcije razdioba normalne razdiobe i binomne razdiobe za $N = 100$ i $p = 0.4$. Vidimo da normalna razdioba uz zadane parametre izvrsno aproksimira binomnu razdiobu. Time smo na konkretnom primjeru pokazali valjanost centralnog graničnog teorema.

Centralni granični teorem ne služi samo kao srestvo za opis slučajnih varijabli, nego kao i izvrsna aproksimacijska metoda. Prisjetimo se primjera 2.19 u kojem je dana relativno komplicirana aproksimacijska metoda. Jasno je vidljivo da normalna razdioba uz dobro odabrane parametre bolje i jednostavnije opisuje binomnu razdiobu od Poissonove razdiobe.

2.10 Generiranje slučajnih varijabli

Teorija prometa nije strogo apstraktna disciplina. Ona se koristi mjerenjima i simulacijama kako bi izvela zaključke o prirodi prometa u mreži. Izuzetno je zanimljiva simulacijska metoda. Kako bi se u simulatoru uspjeli generirati prometi različitih svojstava, izvršni kod mora stvarati slučajne brojeve koji se ravnaju po različitim razdiobama.

Većina programskih jezika ima ugrađen jedino generator jednoliko rapodijenjene slučajne varijable. Taj generator daje vrijednosti koje su približno jednoliko raspodijeljene u intervalu $[0, 1]$. Budući da je ta funkcija jedini izvor slučajnosti u simulacijskom programu, postavlja se pitanje kako pomoću $X \sim U[0, 1]$ dobiti bilo koju drugu razdiobu?



Slika 2.23: Funkcije razdioba binomne i normalne razdiobe po centralnom graničnom teoremu

Promatrajmo dvije slučajne varijable: X koja je jednoliko raspodijeljena na intervalu $[0, 1]$ i Y s funkcijom razdiobe $F_Y(y)$. Ako želimo pomoću X generirati Y, jasno je da moramo pronaći funkciju $Y = g(X)$ koja će dovesti u vezu vrijednosti od X i Y.

Prisjetimo se formule za traženje razdiobe varijable Y ukoliko znamo razdiobu od X i funkciju slučajne varijable $g(x)$.

$$f_Y\left(y\right) = f_X\left(x\right) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = f_X\left[h\left(y\right)\right] \cdot \left|\frac{dh\left(y\right)}{dy}\right|$$

gdje je $h(y) = g^{-1}(y)$. Funkcija gustoće jednolike razdiobe je jednaka 1 samo ako je $0 \leq h(y) \leq 1$, a inače 0. Pretpostavimo da funkcija $h(y)$ ima svojstvo da je $0 \leq h(y) \leq 1$ i da monotono *raste*. Uz ovu pretpostavku možemo napisati:

$$f_Y(y) = \frac{dh(y)}{dy}$$

Prema dobivenoj jednadžbi zaključujemo da je $h(y)$ jednaka funkciji razdiobe od $F_Y(y)$, dakle:

$$h(y) = g^{-1}(y) = F_Y(y)$$

Slijedi da je tražena funkcija $g(x)$ jednaka:

$$g(x) = F_Y^{-1}(x) \tag{2.105}$$

Dakle, ukoliko je funkcija jednoliko raspodijeljene slučajne varijable X jednaka inverznoj funkciji razdiobe $F_Y(y)$, onda varijabla Y ima funkciju razdiobe $F_Y(y)$.

Primjer 2.29 Pogledajmo na koji način generirati eksponencijalno raspodijeljenu slučajnu varijablu. Funkcija razdiobe eksponencijalne razdiobe je:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Inverzna funkcija je jednaka:

$$g(x) = F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$$

Dakle ukoliko za vrijednosti od x budemo unosili vrijednosti jednoliko rapodijeljene slučajne varijable $X \sim U[0, 1]$, varijabla y:

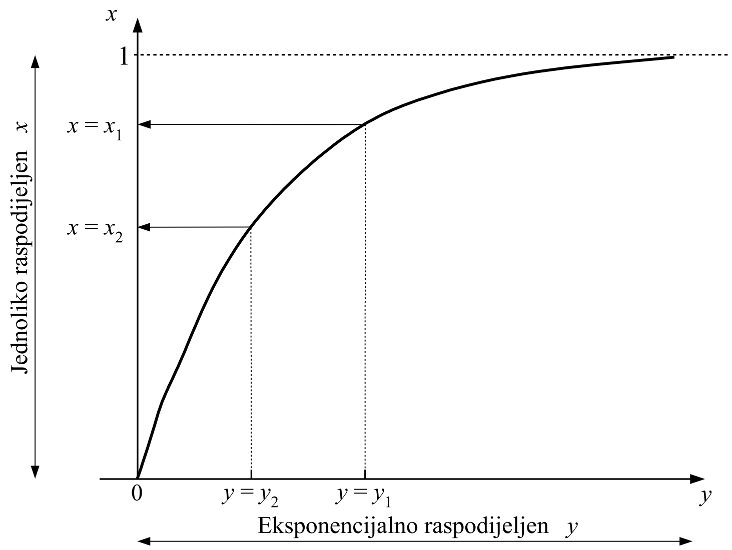
$$y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$$

će postati slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom s parametrom λ. U C-u ćemo funkciju za generiranje eksponencijalne razdiobe napisati na sljedeći način:

```
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
.
.

double ekspvar(double lambda) {
       double x;
       x = (double) (rand()+1)/RAND_MAX;
       return -1./lambda*log(1-x);
}
```

Grafička interpretacija generiranja ove razdiobe dana je na slici 2.24.



Slika 2.24: Generiranje eksponencijalno raspodijeljene slučajne varijable

PRIMJER 2.30 Na prikazani način je moguće generirati slučajne varijable samo ako su njihove funkcije razdioba inverzibilne. U slučaju da funkcija razdiobe nije inverzibilna, koriste se različiti trikovi.

Primjer neinverzibilne funkcije razdiobe je funkcija razdiobe normalne razdiobe. Tu funkciju nije moguće eksplicitno izraziti zbog neintegribilnosti funkcije gustoće vjerojatnosti. Jedan mogući način generiranja normalne razdiobe je sljedeći. Funkciju razdiobe $F_X(x)$ potrebno je izraziti preko tzv. Erfc funkcije. Ova funkcija definirana je izrazom:

$$\mathrm{Erfc}(x) = 1 - \mathrm{Erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt \tag{2.106}$$

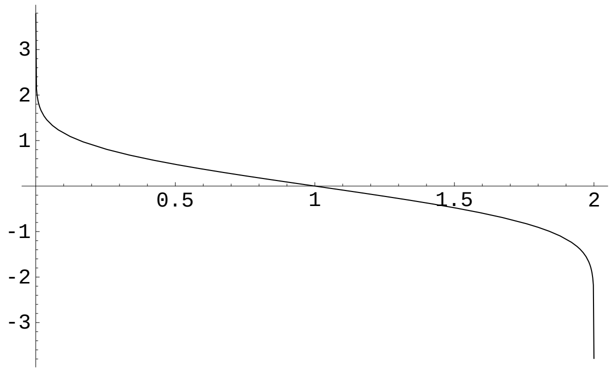
Uz malo računanja je moguće pokazati da je funkcija razdiobe normalne razdiobe $N[\mu, \sigma^2]$:

$$F_X(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Erfc}\left(\frac{\mu - x}{\sqrt{2}\sigma}\right) \tag{2.107}$$

Inverz ove funkcije daje vezu između $X \sim U[0,1]$ i normalne slučajne varijable $Y \sim N[\mu, \sigma^2]$:

$$F^{-1}(x) = \mu - \sqrt{2}\pi\mathrm{Erfc}^{-1}(2 \cdot x) \tag{2.108}$$

Ono što smo postigli ovim proračunom je to da inverz Gaussove funkcije razdiobe opišemo koristeći jednu funkciju - $Erfc^{-1}(x)$. Njen graf je prikazan na slici 2.25. Na sreću postoje brojne dobre aproksimacije ove funkcije. Implementacija jedne od njih u programskom jeziku C je sljedeća:



Slika 2.25: Inverzna funkcija pogreške - $\mathrm{Erfc}^{-1}(x)$

```
double InversErfc(double y) {
    double s, t, u, w, x, z;

    z = y;
    if (y > 1) {
        z = 2 - y;
    }

    w = 0.916461398268964 - log(z);
    u = sqrt(w);
    if (u <= 0.)
        u = 1E-17;
    s = (log(u) + 0.488826640273108) / w;
    t = 1 / (u + 0.231729200323405);
    x = u * (1 - s * (s * 0.124610454613712 + 0.5)) -
        ((((-0.0728846765585675 * t + 0.269999308670029) * t +
        0.150689047360223) * t + 0.116065025341614) * t +
        0.499999303439796) * t;
    t = 3.97886080735226 / (x + 3.97886080735226);
    u = t - 0.5;
    s = (((((((((0.00112648096188977922 * u +
        1.05739299623423047e-4) * u - 0.00351287146129100025) * u -
        7.71708358954120939e-4) * u + 0.00685649426074558612) * u +
        0.00339721910367775861) * u - 0.011274916933250487) * u -
        0.0118598117047771104) * u + 0.0142961988697898018) * u +
        0.0346494207789099922) * u + 0.00220995927012179067;
    s = ((((((((((((s * u - 0.0743424357241784861) * u -
        0.105872177941595488) * u + 0.0147297938331485121) * u +
        0.316847638520135944) * u + 0.713657635868730364) * u +
        1.05375024970847138) * u + 1.21448730779995237) * u +
        1.16374581931560831) * u + 0.956464974744799006) * u +
        0.686265948274097816) * u + 0.434397492331430115) * u +
        0.244044510593190935) * t -
        z * exp(x * x - 0.120782237635245222);
    x += s * (x * s + 1);
    if (y > 1) {
        x = -x;
    }
    return x;
}
```

2.11 Zadaci za vježbu

2.11.1 Prostor elementarnih događaja

ZADATAK 2.1 Promatrajte slučajni eksperiment bacanja novčića četiri puta za redom. Pronađite prostor elementarnih događaja ukoliko promatramo broj glava koji je ispao pri realizaciji eksperimenta. Koliki je kardinalni broj prostora elementarnih događaja, a koliki kardinalni broj partitativnog skupa prostora elementarnih događaja ?

ZADATAK 2.2 U šeširu se nalaze četiri kartice obilježene brojevima od 1 do 4. Eksperiment se sastoji od izvlačenja dviju kartica. Pronađite prostor elementarnih događaja za
(a) eksperiment u kojem se kartica koja je prva izvučena prije izvlačenja druge ponovno vraća u šešir
(b) eksperiment u kojem se prva izvučena kartica nikada ne vraća natrag u šešir.

ZADATAK 2.3 Promatrajte eksperiment bacanja kocke dok se ne pojavi broj 3. Odredite prostor elementarnih događaja za
(a) eksperiment u kojem su nam bitni svi načini na koje je realiziran 3
(b) eksperiment u kojem nas samo zanima iz kojeg je pokušaja ispao 3.

ZADATAK 2.4 Promatrajte eksperiment bacanja dvije kocke.
(a) pronađite prostor elementarnih događaja, i svaki događaj označite prikladnom logičkom varijablom.
(b) pomoću dobivenih elementarnih događaja opišite događaj A - zbroj brojeva na kockama je 6.
(c) opišite događaj B - zbroj je manji od 5.
(d) pronađite događaj C - zbroj je veći od 12.

ZADATAK 2.5 Stohastički eksperiment se sastoji od mjerenja brzine automobila na autoputu. Pronađite prostor elementarnih događaja ako znamo da su sva vozila koja voze sporije od $60km/h$ i brže od $220km/h$ isključena iz prometa.

ZADATAK 2.6 Pronađite prostor elementarnih događaja za eksperiment mjerenja apsolutnog napona između dviju faza trofaznog sustava ako znamo da vršna vrijednost napona ne može preći 20% nominalne vršne vrijednosti.

ZADATAK 2.7 Navedite sve moguće događaje na prostoru događaja $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Kakva je veza tih događaja s partitativnim skupom od Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$.

2.11.2 Klasična definicija vjerojatnosti i aksiomi vjerojatnosti

ZADATAK 2.8 Binarni izvor generira jedinice i nule. Pojava jedinice je dva puta vjerojatnija nego pojava nule. Kolike su vjerojatnosti pojave jedinice, odnosno nule ?

ZADATAK 2.9 Promatrajte slučajni eksperiment bacanja dvije kocke. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj vrijednosti na kockama veći od 8.

ZADATAK 2.10 U šeširu se nalaze četiri kartice obilježene brojevima od 1 do 4. Eksperiment se sastoji od izvlačenja dviju kartica. Nakon što je izvučena prva kartica, ona se vraća natrag u šešir. Izračunajte vjerojatnost da je izvučena kombinacija kartica čiji je zbroj veći od 5.

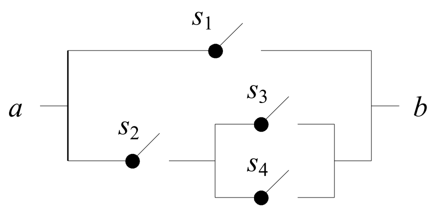
ZADATAK 2.11 Kolika je vjerojatnost da u grupi od n ljudi nađemo bar dvije osobe koje imaju rođendan isti dan? Pretpostavka je da je broj dana u godini je 365 i da su datumi rođena jednako raspodijeljeni.

ZADATAK 2.12 Prostor elementarnih događaja je $S = \{a, b, c, d\}$ s vjerojatnostima: $P(a) = 0.1$, $P(b) = 0.2$, $P(c) = 0.3$, $P(d) = 0.4$. Neka A označava događaj $\{a, b\}$, a B događaj $\{b, c, d\}$. Odredite sljedeće vjerojatnosti: (a) $P(A)$, (b) $P(B)$, (c) $P(\overline{A})$, (d) $P(A \cdot B)$ i (e) $P(A + B)$.

ZADATAK 2.13 Slučajni eksperiment se sastoji od promatranja zbroja brojeva na dvije kocke. Odredite vjerojatnost da je (a) zbroj točno jednak 7, i da je (b) zbroj veći od 10.

ZADATAK 2.14 Izabire se tim od 5 igrača. Na raspolaganju je grupa od 5 muškaraca i 10 žena. Pronađite vjerojatnost da tim ima (a) 2 muškarca i 3 žene i (b) da je tim u potpunosti ženski.

ZADATAK 2.15 Promotrite komutacijsku mrežu na slici 2.26. Ako je vjerojatnost da je svaki od komutatora uključen p, kolika je vjerojatnost da postoji veza između a i b? Stanja uključenosti komutatora su u cijelosti neovisna.



Slika 2.26: Uz zadatak 2.15

ZADATAK 2.16 Eksperiment se sastoji od uzastopnog bacanja novčića dok ne ispadne glava. Kolika je vjerojatnost da (a) glava ispadne u k-tom bacanju, i (b) glava ispadne u parnom pokušaju bacanja.

2.11.3 Uvjetna i totalna vjerojatnost

ZADATAK 2.17 Izračunajte $P(A|B)$ ako je (a) $A \cdot B = \emptyset$, (b) $A \subset B$ i (c) $B \subset A$.

ZADATAK 2.18 Pokažite da ako vrijedi da je $P(A|B) > P(A)$, da onda vrijedi da je i $P(B|A) > P(B)$.

ZADATAK 2.19 Pretpostavimo da ste bacili dvije kocke iza sebe, i da vam netko kaže da zbroj vrijednosti na kockama nije veći od 4.

(a) kolika je vjerojatnost da su vrijednosti na kockama jednake bez informacije o tome koliki je zbroj?

(b) kolika je ista vjerojatnost uz informaciju da zbroj nije veći od 4?

ZADATAK 2.20 Dvije tvornice proizvode slične proizvode. Prva tvornica proizvede 1000 proizvoda od kojih je 100 neispravno, a druga 2000 proizvoda od kojih je 250 neispravno. Proizvodi se stavljaju u isto skladište, i ne može se utvrditi koji je proizvod došao iz koje tvornice. Ako je neki nasumice izabran proizvod neispravan, kolika je vjerojatnost da je došao iz prve, a kolika da je došao iz druge tvornice?

ZADATAK 2.21 Izabran je slučajan broj iz skupa $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Ako je poznato da je broj djeljiv s dva, kolika je vjerojatnost da je on djeljiv s 3 ili 5?

ZADATAK 2.22 Iz špila karata (52 karte) vuku se dvije karte. Kolika je vjerojatnost da su oba kralja ?

ZADATAK 2.23 Pokažite da za bilo koja dva događaja A i B iz $\mathcal{P}(\Omega)$ vrijedi

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})$$

ZADATAK 2.24 Neka tvrtka proizvodi električne releje u tri svoje tvornice koje proizvode $50\%, 30\%$ i 20% proizvoda respektivno. Pretpostavite da su vjerojatnosti da je relej neispravan 0.02, 0.05 i 0.01 respektivno.

(a) Ako netko kupi relej ove tvrtke, kolika je vjerojatnost da je relej neispravan ?

(b) Ako je kupljeni relej neispravan, kolika je vjerojatnost da ga je proizvela tvornica i ?

ZADATAK 2.25 Vade se dva broja iz skupa $\{1, \ldots, 10\}$. Kolika je vjerojatnost da je drugi izabrani broj 5?

2.11.4 Neovisni događaji

ZADATAK 2.26 Neka su A i B događaji iz skupa događaja. Pokažite da ako su A i B u cijelosti neovisni da onda vrijedi:

(a) A i $\overline{B}$ su u cijelosti neovisni

(b) $\overline{A}$ i B su u cijelosti neovisni

(c) $\overline{A}$ i $\overline{B}$ su u cijelosti neovisni

ZADATAK 2.27 Pokažite da ako su A, B i C u cijelosti neovisni, da su i A i $(B+C)$ međusobno neovisni.

ZADATAK 2.28 Razmatrajte eksperiment bacanja dviju jednakih kocki. Neka je A događaj da je zbroj na kockama jednak 7, B događaj da je zbroj 6, a C događaj da je na prvoj kocki ispalo 4. Pokaži da su događaji A i C neovisni, a B i C nisu.

ZADATAK 2.29 Razmatrajte Bernoulliev slučajni eksperiment, ishod kojeg je jedan od dva moguća međusobno isključiva događaja: uspjeh ili neuspjeh. Vjerojatnost uspjeha je p, a neuspjeha $(1-p)$. Izvršava se niz Bernoullievih eksperimenata bez promjene vjerojatnosti p.

(a) Izračunajte vjerojatnost da se barem jedan uspjeh pojavi u n realizacija Bernoullieva eksperimenta.

(b) Izračunajte vjerojatnost da se u n realizacija dogodi k uspjeha

2.11.5 Slučajne varijable

ZADATAK 2.30 Razmatrajte eksperiment bacanja kocke. Neka je X slučajna varijabla koja dobiva vrijednost jedan ako je ispao paran broj, a 0 ako je ispao neparan broj. (a) Odredite područje vrijednosti od X.

(b) Izračunajte vjerojatnost $P(X=1)$ i vjerojatnost $P(X=0)$.

ZADATAK 2.31 Razmatrajte eksperiment bacanja novčića tri puta. Neka je X slučajna varijabla koja je po vrijednosti jednaka broju glava koji ispadne. Pretpostavljamo da su bacanja neovisna i da je vjerojatnost glave p.

(a) Odredite područje vrijednosti od X.

(b) Izračunajte vjerojatnosti $P(X=i), \quad i=0,1,2,3$

ZADATAK 2.32 Informacijski izvor slučajno generira simbole iz skupa $\{a, b, c, d\}$ sa sljedećim vjerojatnostima: $P(a)=1/2, P(b)=1/4, P(c)=P(d)=1/8$. Simboli se kodiraju prema kodnoj shemi navedenoj ispod:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 10 \\ c &= 110 \\ d &= 111 \end{aligned}$$

Neka slučajna varijabla X označava duljinu koda, dakle, broj binarnih simbola.

(a) Odredite područje vrijednosti od X.

(b) Pretpostavljajući da su generiranja simbola neovisna, izračunajte $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$ i $P(X>3)$.

ZADATAK 2.33 Zamislimo da strjelica pada na okruglu površinu radijusa 1, i da ju nikada ne promaši. Vjerojatnost da strelica pogodi bilo koju točku na površini je jednaka. Slučajna varijabla X poprima vrijednost koja je jednaka udaljenosti točke gdje je pala strelica od središta površine. Kolika je vjerojatnost

(a) da strelica padne unutar kruga radijusa $a < 1$?

(b) kolika je vjerojatnost da strelica padne u područje $a \leq X \leq b$, gdje je $a < b \leq 1$?

2.11.6 Razdiobe

ZADATAK 2.34 Neka je X slučajna varijabla iz 2.32. Skicirajte funkciju razdiobe te varijable, te izračunajte vjerojatnosti $P(X \leq 1)$, $P(1 < X \leq 2)$ i $P(X > 1)$.

ZADATAK 2.35 Neka je X slučajna varijabla iz 2.33. Odredite funkciju gustoće razdiobe vjerojatnosti i funkciju razdiobe, te ih skicirajte.

ZADATAK 2.36 Razmatrajte slučajnu varijablu X čija je funkcija razdiobe zadana izrazom:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x + \frac{1}{2} & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & x \geq 1/2 \end{cases}$$

(a) Skicirajte $F_X(x)$ i provjerite da zadovoljava osnovna svojstva funkcije razdiobe.

(b) Izračunajte gustoću razdiobe ove varijable.

ZADATAK 2.37 Razmatrajte slučajni proces uzastopnog bacanja novčića. Slučajna varijabla X je jednaka broju pokušaja potrebnih da ispadne glava. Pronađite funkciju vjerojatnosti i funkciju razdiobe ove varijable. Kolika je vjerojatnost događaja $P(1 < X \leq 4)$?

ZADATAK 2.38 Razmatrajte slijed Bernoullievih eksperimenata s vjerojatnošću uspjeha p. Slučajna varijabla X označava broj pokušaja dok se ne realizira uspjeh. Pronađite funkciju vjerojatnosti slučajne varijable X i njenu funkciju razdiobe.

ZADATAK 2.39 Neka je X binomna slučajna varijabla s parametrima (n, p). Izračunajte vjerojatnost $P(X > 1)$.

ZADATAK 2.40 Neka je λ intenzitet dolazaka automobila na granični prijelaz. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja mjeri broj automobila koji su došli na granični prijelaz u vremenu T. Izračunajte i skicirajte funkciju vjerojatnosti i funkciju razdiobe slučajne varijable X.

ZADATAK 2.41 Gustoća vjerojatnosti kontinuirane slučajne varijable X je zadana kao

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & 0 \leq x < 1 \\ 2/3 & 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Izračunajte i skicirajte funkciju razdiobe varijable X.

ZADATAK 2.42 Neka je X slučajna varijabla s gustoćom funkcije razdiobe

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

(a) Odredite vrijednost od k i skicirajte gustoću razdiobe.

(b) Izračunajte $F_X(x)$ i skicirajte ju.

ZADATAK 2.43 Neka je zadana funkcija $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\left(-x^2+x-a\right)}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Izračunajte parametar a takav da $f(x)$ postane gustoća razdiobe slučajne varijable X.

ZADATAK 2.44 Slučajna varijabla X ima Rayleighovu razdiobu. Izračunajte funkciju razdiobe $F_X(x)$ iz funkcije gustoće razdiobe (2.94).

ZADATAK 2.45 Dokažite da Gamma funkcija Γ (2.88) ima svojstva (2.89).

2.11.7 Očekivanje i varijanca

ZADATAK 2.46 Razmatrajte diskretnu slučajnu varijablu X čija je funkcija vjerojatnosti dana s:

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/3 & x = -1, 0, 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

(a) Skicirajte $p_X(x)$ i izračunajte očekivanje i varijancu.
(b) Skicirajte $p_X(x)$ i izračunajte očekivanje i varijancu ako je $x = -2, 0, 2$

ZADATAK 2.47 Neka je slučajna varijabla X definirana kao vrijednost koja ispada bacanjem igraće kocke. Izračunajte očekivanje i varijancu takve varijable.

ZADATAK 2.48 Pronađite očekivanje i varijancu za Rayleighovu razdiobu (upotrijebite (2.89)).

ZADATAK 2.49 Izračunajte očekivanje i varijancu za slučajnu varijablu iz zadatka 2.42.

ZADATAK 2.50 Ne uvrštavajući u gotov izraz izračunajte očekivanje i varijancu za standardnu normalnu razdiobu $N(0,1)$.

2.11.8 Funkcije slučajne varijable

ZADATAK 2.51 Neka slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $N(\mu, \sigma^2)$. Po kojoj razdiobi se ravna slučajna varijabla $Z = (X - \mu)/\sigma$?

ZADATAK 2.52 Neka je X slučajna varijabla s funkcijom razdiobe $F_X(x)$. Neka je $Y = a \cdot X + b$. Izračunajte funkciju razdiobe i gustoću razdiobe od Y.

ZADATAK 2.53 Neka je X slučajna varijabla jednoliko raspoređena između 0 i 1. Neka je $Y = a \cdot X + b$. Izračunajte funkciju razdiobe i gustoću razdiobe od Y.

ZADATAK 2.54 Neka slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $N(\mu, \sigma^2)$. Izračunajte funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = a \cdot X + b$.

ZADATAK 2.55 Neka je $Y = X^2$. Izračunajte gustoću razdiobe varijable Y ako se X ravna po $N(0,1)$.

ZADATAK 2.56 Neka je $Y = e^x$. Ako je slučajna varijabla X jednoliko raspoređena između 0 i 1, izračunajte gustoću razdiobe od Y.

ZADATAK 2.57 Neka je $Y = e^x$. Ako slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $N(0,1)$, izračunajte gustoću razdiobe od Y.

ZADATAK 2.58 Neka je X kontinuirana slučajna varijabla s funkcijom razdiobe $F_X(x)$ i neka je slučajna varijabla $Y = F_X(x)$. Izračunajte gustoću razdiobe od Y.

2.11.9 Karakteristična funkcija i zbroj varijabli

ZADATAK 2.59 Izračunajte karakterističnu funkciju Poissonove slučajne varijable.

ZADATAK 2.60 Neka su X i Y u cjelini neovisne gamma slučajne varijable s parametrima (α, λ), (β, λ). Pokažite da slučajna varijabla $Z = X + Y$ također ima gamma razdiobu s parametrima $(\alpha + \beta, \lambda)$.

ZADATAK 2.61 Neka su X i Y u cjelini neovisne slučajne varijable ravnomjerno raspodijeljene između 0 i 1. Pronađite i skicirajte funkciju gustoće razdiobe slučajne varijable $Z = X + Y$.

ZADATAK 2.62 Izračunajte karakterističnu funkciju Cauchyeve slučajne varijable X s parametrom a i gustoćom razdiobe

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}, \quad -\infty < x < \infty$$

Napomena: Integral koji se javlja u zadatku može se riješiti direktno, no lakše je iskoristiti Fourierov transformacijski par:

$$e^{-a\cdot|x|} \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

ZADATAK 2.63 Karakteristična funkcija slučajne varijable X dana je s

$$\Psi_X(\omega) = \begin{cases} 1 - |\omega| & |\omega| < 1 \\ 0 & |\omega| > 1 \end{cases}$$

Izračunajte gustoću razdiobe od X.

ZADATAK 2.64 Izračunajte karakterističnu funkciju slučajne varijable $X = N(\mu, \sigma^2)$.

ZADATAK 2.65 Neka je $Y = a \cdot X + b$. Ako je $\Psi_X(\omega)$ karakteristična funkcija od X, izračunajte karakterističnu funkciju od Y.

2.11.10 Funkcija izvodnica

ZADATAK 2.66 Izračunajte funkciju izvodnicu geometrijske razdiobe.

ZADATAK 2.67 Izračunajte funkciju izvodnicu binomne razdiobe.

ZADATAK 2.68 Izračunajte funkciju izvodnicu zbroja slučajne varijable X koja ima geometrijsku razdiobu i slučajne varijable Y koja ima binomnu razdiobu.

* * *

2.12 Rješenja zadataka za vježbu

2.12.1 Prostor elementarnih događaja

Rješenje zadatka 2.1
Ishod eksperimenta je slijed od 4 pojedinačna ishoda bacanja novčića. Jedan mogući ishod je $\{P, P, G, P\}$. Broj glava u ovoj realizaciji je 1. U četiri bacanja može biti od 0 do 4 glave. Ako E_i označava broj glava u četiri bacanja, onda je

$$\Omega = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4\}$$

Kardinalni broj od Ω je $\#\Omega = 5$, a prema (2.10) slijedi da je $\#[\mathcal{P}(\Omega)] = 2^{\#\Omega} = 2^5 = 32$.

Rješenje zadatka 2.2
Kombinacijom elementarnih događaja dobivamo:

(a)

$$\Omega_1 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) \end{array} \right\}$$

(b)

$$\Omega_2 = \left\{ \begin{array}{ccc} (1,2) & (1,3) & (1,4) \\ (2,1) & (2,3) & (2,4) \\ (3,1) & (3,2) & (3,4) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) \end{array} \right\}$$

Rješenje zadatka 2.3
Prostori elementarnih događaja su:

(a)

$$\begin{aligned} \Omega_1 \;=\; & \{E_3, \\ & , E_1 \cdot E_3, \quad E_2 \cdot E_3, \quad E_4 \cdot E_3, \quad E_5 \cdot E_3, \quad E_6 \cdot E_3, \\ & , E_1 \cdot E_1 \cdot E_3, \quad E_1 \cdot E_2 \cdot E_3, \quad E_1 \cdot E_4 \cdot E_3, \quad E_1 \cdot E_5 \cdot E_3, \ldots\} \end{aligned}$$

Elementarni događaji u i-tom retku označavaju da je 3 ispao u i-tom pokušaju. Svi događaji u danom retku opisuju kako je do realizacije došlo.

(b) $\Omega_2 = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Rješenje zadatka 2.4

(a)

$$\begin{aligned} \Omega \;=\; & \{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{16}, \\ & E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{26}, \\ & \ldots \\ & E_{61}, E_{62}, \ldots, E_{66}\} \end{aligned}$$

(b) $A = E_{15} + E_{24} + E_{33} + E_{42} + E_{51}$

(c) $B = E_{11} + E_{12} + E_{13} + E_{21} + E_{22} + E_{31}$

(d) $C = V$ - nemoguć događaj.

Rješenje zadatka 2.5

$$\Omega = \{v : 60 \ \text{ km/h} \leq v \leq 220 \ \text{ km/h}\}$$

Rješenje zadatka 2.6

$$\Omega = \{V : -\left(1.2 \cdot \sqrt{6} \cdot 220\,[V]\right) \leq V \leq \left(1.2 \cdot \sqrt{6} \cdot 220\,[V]\right)\}$$

Rješenje zadatka 2.7
Mogući su sljedeći događaji:

$$\begin{gathered}\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\},\\ \{a,b,c\}, \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}.\end{gathered}$$

Uz oznake $\emptyset = V$ i $\{a,b,c,d\} = U$, svi događaji pripadaju i čine $\mathcal{P}(\Omega)$.

2.12.2 Klasična definicija vjerojatnosti i aksiomi vjerojatnosti

Rješenje zadatka 2.8
S J označimo događaj pojave jedinice, a s N događaj pojave nule. Po pretpostavci zadatka je: $P(J) = 2 \cdot P(N)$. Slijedi:

$$J + N = U, P(U) = 1$$

slijedi

$$P(J + N) = 1$$

Pošto su J i N disjunktni događaji to je

$$P(J + N) = P(J) + P(N) = 1$$

Uvrštavanjem je

$$2 \cdot P(N) + P(N) = 1$$

pa je

$$P(N) = 1/3,$$
$$P(J) = 2/3.$$

Rješenje zadatka 2.9
Bitno je primijetiti da su svi elementarni događaji ovog eksperimenta ($\Omega = \{E_i, j : 1 \leq i, j \leq 6\}$) jednako vjerojatni i da možemo upotrijebiti klasičnu definiciju vjerojatnosti. Kardinalni broj od Ω je 36, a broj događaja takvih da je zbroj na kockama veći od 8 je

$$\#\{(3,6), (4,6), (5,6), (6,6), (4,5), (5,5), (6,5), (5,4), (6,4), (6,3))\} = 10$$

Vjerojatnost događaja A je

$$P(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Rješenje zadatka 2.10

Iz 2.2 znamo da je broj elementarnih događaja 16, i da su svi jednako vjerojatni. Broj povoljnih događaja je

$$\#\{(4,2),(4,3),(4,4),(3,3),(3,4),(2,4)\} = 6$$

pa je vjerojatnost jednaka $6/16 = 3/8$.

Rješenje zadatka 2.11

Ovo je klasičan zadatak iz teorije vjerojatnosti koji se može naći u jako velikom broju zbirki. Događaj A kojeg analiziramo je događaj da neke dvije osobe u skupu od n ljudi imaju rođendan isti dan, ako su im rođendani ravnomjerno raspoređeni kroz godinu koja ima 365 dana. Netko bi mogao početi razmišljati na način da izračuna vjerojatnost da samo dvije osobe imaju rođendan isti dan, pa vjerojatnost da dva para imaju rođendan isti dan, pa vjerojatnost više parova ima rođendan isti dan, pa vjerojatnost da neka trojka ima rođendan isti dan itd. Na kraju bi to zbrojili (ukoliko su događaji disjunktni) i rezultat je tražena vjerojatnost. No, ovaj način je ekstremno kompliciran i treba uzeti u obzir prevelik broj činjenica, pa je izračun dosta kompliciran.

Jednostavnije je, kao i u velikom broju drugih slučajeva, analizirati suprotan događaj $\overline{A}$. Vjerojatnost $P(A)$ dobivamo koristeći jednakost $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. No, kolika je vjerojatnost $P(\overline{A})$? Da bismo odgovorili na to pitanje moramo krenuti od elementarnih događaja. Njih ima točno 365^n. To je zapravo broj varijacija - na koliko načina mogu biti raspoređeni dani rođendana na skupu od n ljudi. Pošto su svi ti događaji jednako vjerojatni ($1/365^n$), možemo iskoristiti klasičnu definiciju vjerojatnosti. Izračunajmo broj povoljnih događaja, tj. broj načina na koji mogu biti raspoređeni rođendani ljudi, ali tako da svatko ima jedinstven rođendan. To je dakako jednako broju permutacija n elemenata u 365 pozicija, dakle

$$\binom{365}{n} \cdot n! = 365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)$$

Stoga je vjerojatnost događaja A jednaka:

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{365}{n} \cdot n!}{365^n} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - n + 1)}{365^n}$$

Rješenje zadatka 2.12

(a)
$$\begin{aligned} P(A) = P(a+b) &= |a \text{ i } b \text{ su disjunktni}| = \\ &= P(a) + P(b) = 0.1 + 0.2 = 0.3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} P(B) = P(b+c+d) &= |\text{b, c i d su međusobno disjunktni}| = \\ &= P(b) + P(c) + P(d) = 0.2 + 0.3 + 0.4 = 0.9 \end{aligned}$$

(c)
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.3 = 0.7$$

(d)
$$P(A \cdot B) = P[(a+b) \cdot (b+c+d)] = P[a \cdot (b+c+d) + b \cdot (b+c+d)] = P(b) = 0.2$$

(e)
$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0.3 + 0.9 - 0.2 = 1$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.13

Skup elementarnih događaja je: $\Omega = \{(i,j) : i,j \in (1,2,\ldots,6)\}$, $\#\Omega = 36$.

(a) A - "zbroj je 7"

$$\begin{aligned} A &= \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} \\ P(A) &= \#A/\#\Omega = 6/36 = 1/6 \end{aligned}$$

(b) B - "zbroj je veći od 10 (ili je 11 ili 12)"

$$\begin{aligned} B &= \{(5,6),(6,5),(6,6)\}, \quad \#B = 3 \\ P(B) &= 3/36 = 1/12 \end{aligned}$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.14

Pogledaj 2.7.1. Radi se o hipergeometrijskoj razdiobi s parametrima: $N = 15$, $M = 5$, $n = 5$.

$$p(m) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

(a)

$$p(2) = \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{10}{3}}{\binom{15}{5}} = \frac{\frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot \frac{10!}{3!\cdot 7!}}{\frac{15!}{5!\cdot 10!}} = 0.3996$$

(b)

$$p(0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{10}{5}}{\binom{15}{5}} = 0.0839$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.15

Neka varijabla s_i označava stanje "kontakt i uključen", a $\overline{s_i}$ "kontakt i isključen", a varijabla A - "postoji veza između a i b".

$$\begin{aligned} A &= s_1 + s_2 \cdot (s_3 + s_4) = s_1 + s_2 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_4 \\ P(A) &= P[s_1 + s_2 \cdot (s_3 + s_4) = s_1 + s_2 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_4] = \\ &= P(s_1) + P[s_2 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_4] - P[s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3 + s_2 \cdot s_4)] = \\ &= P(s_1) + P(s_2 \cdot s_3) + P(s_2 \cdot s_4) - P(s_2 \cdot s_3 \cdot s_4) - \{P[s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 + s_1 \cdot s_2 \cdot s_4]\} = \\ &= P(s_1) + P(s_2) \cdot P(s_3) + P(s_2) \cdot P(s_4) - P(s_2) \cdot P(s_3) \cdot P(s_4) - \\ &\quad - \{P(s_1 \cdot s_2 \cdot s_3) + P(s_1 \cdot s_2 \cdot s_4) - P(s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \cdot s_4)\} = \\ &= P(s_1) + P(s_2) \cdot P(s_3) + P(s_2) \cdot P(s_4) - P(s_2) \cdot P(s_3) \cdot P(s_4) - \\ &\quad - P(s_1) \cdot P(s_2) \cdot P(s_3) - P(s_1) \cdot P(s_2) \cdot P(s_4) + \\ &\quad + P(s_1) \cdot P(s_2) \cdot P(s_3) \cdot P(s_4) = \\ &= p + p^2 + p^2 - p^3 - p^3 - p^3 + p^4 = p + 2p^2 - 3p^3 + p^4 \end{aligned}$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.16

(a) S p označimo vjerojatnost da se pojavi glava

$$p(k) = p \cdot (1-p)^{k-1} = \left| p = \frac{1}{2} \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(b) S B označimo događaj "glava ispala u parnom bacanju"

$$P(B) = p(2) + p(4) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} p(2i) = \sum_{i=1}^{\infty} p \cdot (1-p)^{2i-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{i=1}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^i =$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \left[1 - 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^i\right] = \frac{p}{1-p} \cdot \left[\sum_{i=0}^{\infty} \left[(1-p)^2\right]^i - 1\right] =$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \left[\frac{1}{1-(1-p)^2} - 1\right] = \frac{1-p}{2-p}$$

2.12.3 Uvjetna i totalna vjerojatnost

Rješenje zadatka 2.17

(a)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P(V)}{P(B)} = 0$$

(b)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = |A \subset B| = \frac{P(A)}{P(B)}$$

(c)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = |A \supset B| = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Rješenje zadatka 2.18

Potrebno je pokazati da je $P(B|A) > P(B)$ Koristeći Bayesovu formulu (2.22), slijedi:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)} = |\text{po pretpostavci je} \quad P(A|B) > P(A)| > \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Dakle

$$P(B|A) > P(B)$$

Rješenje zadatka 2.19

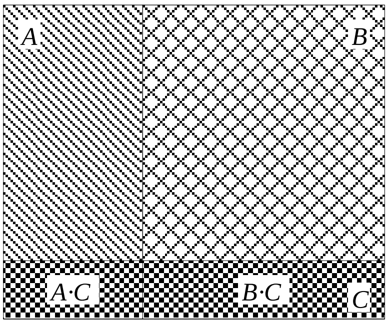
Neka B označava događaj "zbroj nije veći od 4", a A događaj "vrijednosti na kockama su jednake".

(a)

$$P(A) = P[(1,1) + (2,2) + \ldots + (6,6)] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(b)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)} = \frac{P[(1,1) + (2,2)]}{P[(1,1) + (1,2) + (1,3) + (2,1) + (2,2) + (3,1)]} = \frac{1}{3}$$



Slika 2.27: Uz zadatak 2.20

RJEŠENJE ZADATKA 2.20
Neka A označava događaj "proizvod je proizveden u tvornici br. 1", B "proizvod je proizveden u tvornici br. 2", a C proizvod je pokvaren. Pita se vjerojatnost ostvarenja A uz uvjet C. Grafički prikaz problema je na slici 2.27.

$$P(A|C) = \frac{P(A \cdot C)}{P(C)} = ?$$

$$P(C) = \frac{100 + 250}{3000} = \frac{350}{3000} = \frac{35}{300} = 0.11\dot{6}$$

A i C nisu u cjelini neovisni, pa vrijedi:

$$P(A \cdot C) \neq P(A) \cdot P(C)$$

$$P(C) = \frac{100 + 250}{1000 + 2000} = \frac{35}{300}$$

$$P(A \cdot C) = \left| \begin{array}{l} \text{Vjerojatnost da je proizvod neispravan i da je} \\ \text{proizveden u prvoj tvornici. Takvih je 100.} \end{array} \right| = \frac{100}{3000} = \frac{1}{30}$$

Sada je jednostavno

$$P(A|C) = \frac{P(A \cdot C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{35}{300}} = \frac{2}{7}$$

slično je

$$P(B|C) = \frac{P(A \cdot C)}{P(C)} = \frac{\frac{250}{3000}}{\frac{35}{300}} = \frac{5}{7}$$

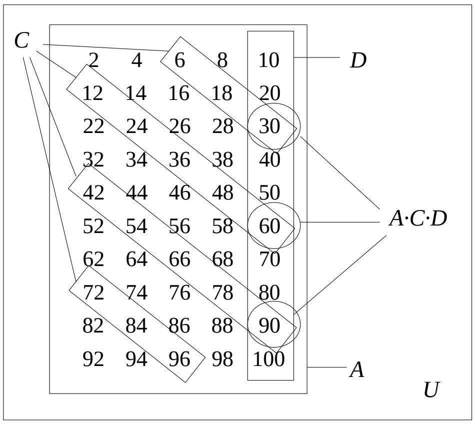
Korisno je primijetiti da je

$$P(A|C) + P(B|C) = 1$$

Pokažite ovu tvrdnju u općem slučaju.

RJEŠENJE ZADATKA 2.21
Definirajmo događaje:
A - broj je djeljiv s 2
B - broj je djeljiv s 3 ili 5
C - broj je djeljiv s 3
D - broj je djeljiv s 5

Njihov međusobni odnos dan je na Vennovom dijagramu na slici 2.28. Prema Vennovom dijagramu



Slika 2.28: Uz zadatak 2.21

neposredno slijedi:

$$\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(A\cdot B)}{P(A)} = \frac{P[A\cdot(C+D)]}{P(A)} = \\
&= \frac{P(A\cdot C + A\cdot D)}{P(A)} = \frac{P(A\cdot C)+P(A\cdot D)-P(ACD)}{P(A)} \\
P(A) &= \frac{50}{100} = 1/2 \\
P(AC) &= \frac{16}{100}, P(AD) = \frac{10}{100}, P(ACD) = \frac{3}{100} \\
P(B|A) &= \frac{\frac{16}{100}+\frac{10}{100}-\frac{3}{100}}{1/2} = 0.46
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 2.22

U špilu karata su četiri kralja. Izvlačenjem prvog kralja, vjerojatnost izvlačenja drugoga se mijenja s 4/52 na 3/51. Definirajmo sljedeće događaje:

A - Prva karta je kralj

B - Druga karta je kralj

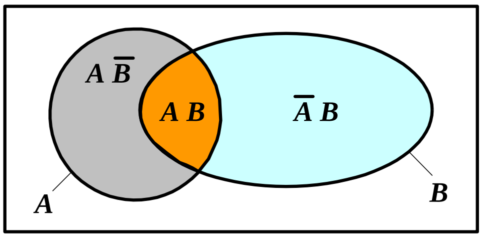
$$P(A) = \frac{4}{52} \quad P(B|A) = \frac{3}{51} \quad P\left(B|\overline{A}\right) = \frac{4}{51}$$

$$P(B|A) = \frac{P(BA)}{P(A)} \Rightarrow P(AB) = P(BA) = P(B|A)\cdot P(A)$$

$$P(A\cdot B) = \frac{3}{51}\cdot\frac{4}{52} = \frac{12}{51\cdot 52}$$

Rješenje zadatka 2.23

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(BU) = P\left[B\left(A+\overline{A}\right)\right] = P\left[BA + B\overline{A}\right] = \\
&= \left|\begin{array}{c} AB \text{ i } \overline{A}B \\ \text{su disjunktni}\end{array}\right| = P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) = \\
&= P(B|A)\cdot P(A) + P\left(B|\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{A}\right)
\end{aligned}$$



Slika 2.29: Uz zadatak 2.23

Rješenje zadatka 2.24
Slično kao 2.20. Definirajmo događaje:

A - kupljeni relej je pokvaren
B_i - kupljeni relej je proizveden u tvornici i
C_i - pokvareni relej potječe iz tvornice i

(a)

$$\begin{aligned}P(A) &= P(AB_1 + AB_2 + AB_3) = |\text{disjunktni}| = \\ &= P(AB_1) + P(AB_2) + P(AB_3) = \\ &= P(A|B_1)\cdot P(B_1) + P(A|B_2)\cdot P(B_2) + P(A|B_3)\cdot P(B_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A|B_1) &= 0.02\\ P(B_1) &= 0.5\\ P(A|B_2) &= 0.05\\ P(B_2) &= 0.3\\ P(A|B_3) &= 0.01\\ P(B_3) &= 0.2\\ P(A) &= 0.027\end{aligned}$$

(b)

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_iA)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{P(A)} \quad i = 1,2,3$$

Rješenje zadatka 2.25
Definirajmo događaje:
A - prvi broj je 5
B - drugi broj je 5

$$P(B) = P[B\cdot U] = P\left[B\cdot\left(A+\overline{A}\right)\right] = P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) = 0 + P\left(\overline{A}B\right) \quad = P\left(B|\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$$

2.12.4 Neovisni događaji

Rješenje zadatka 2.26

(a)

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(AU) = P\left[A\cdot\left(B+\overline{B}\right)\right] = P\left(AB + A\overline{B}\right) = |\text{disj.}| = \\
&= P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \\
P(A) &= P(AB) + P\left(A\overline{B}\right) \qquad (*)
\end{aligned}
$$

Prema $(*)$ slijedi:

$$
\begin{aligned}
P\left(A\overline{B}\right) &= P(A) - P(AB) = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot[1-P(B)] = \\
&= \left|\begin{array}{c}\text{prema}\\ (2.15)\end{array}\right| = P(A)\cdot P\left(\overline{B}\right)
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(BU) = P\left[B\cdot\left(A+\overline{A}\right)\right] = P\left(BA + B\overline{A}\right) = |\text{disj.}| = \\
&= P(AB) + P\left(B\overline{A}\right) \\
P(B) &= P(AB) + P\left(\overline{A}B\right) \qquad (**)
\end{aligned}
$$

Prema $(**)$ slijedi:

$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A}B\right) &= P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)\cdot P(B) = P(B)\cdot[1-P(A)] = \\
&= \left|\begin{array}{c}\text{prema}\\ (2.15)\end{array}\right| = P(B)\cdot P\left(\overline{A}\right)
\end{aligned}
$$

(c)

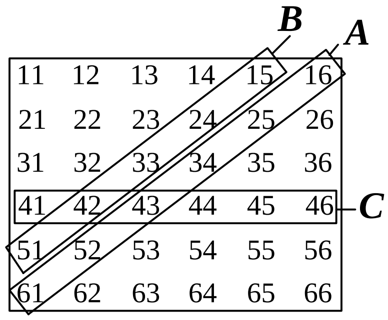
$$
\begin{aligned}
P\left(\overline{A}\right) &= P(AU) = P\left[\overline{A}\cdot\left(B+\overline{B}\right)\right] = P\left(\overline{A}B + \overline{AB}\right) = |\text{disj.}| = \\
&= P\left(\overline{A}B\right) + P\left(\overline{AB}\right) \\
P\left(\overline{AB}\right) &= P\left(\overline{A}\right) - P\left(\overline{A}B\right) = P\left(\overline{A}\right)\cdot[1-P(B)] = P\left(\overline{A}\right)\cdot P\left(\overline{B}\right)
\end{aligned}
$$

Rješenje zadatka 2.27

$$
\begin{aligned}
P(B+C) &= P(B) + P(C) - P(B)\cdot P(C) \\
P[A\cdot(B+C)] &= P[AB+AC] = P(AB) + P(AC) - P(ABC) = \\
&= P(A)\cdot P(B) + P(A)\cdot P(C) - P(A)\cdot P(BC) = \\
&= P(A)\cdot[P(B) + P(C) - P(BC)] = \\
&= P(A)\cdot P(B+C)
\end{aligned}
$$

Rješenje zadatka 2.28

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{6}{36} \quad P(B) = \frac{5}{36} \quad P(C) = \frac{6}{36} \\
P(AC) &= \frac{1}{36} = P(BC) = \frac{1}{36} \\
P(AC) &= P(A)\cdot P(C) = P(A)\cdot P(C) = \frac{6}{36}\cdot\frac{6}{36} = \frac{1}{36} \\
P(BC) &= \frac{1}{36} \neq P(B)\cdot P(C) = \frac{5}{36}\cdot\frac{6}{36}
\end{aligned}
$$



Slika 2.30: Uz zadatak 2.28

RJEŠENJE ZADATKA 2.29

(a) Neka A označava događaj "pojavio se bar jedan uspjeh"

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - (1-p)^n$$

(b)

$$p_k^n = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

To je izraz za funkciju vjerojatnosti binomne razdiobe

2.12.5 Slučajne varijable

RJEŠENJE ZADATKA 2.30

(a) $X = \{0, 1\}$

(b) $P(X = 1) = P(X = 0) = 3/6 = 1/2$

RJEŠENJE ZADATKA 2.31

(a)

$$X = \{0, 1, 2, 3\}$$

(b)

$$P(X = i) = \binom{3}{i} \frac{1}{2}^i \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{3-i} = \binom{3}{i} 0.5^3$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.32

(a)

$$X = \{1, 2, 3\}$$

(b)

$$
\begin{aligned}
&P(X=1) = P(a) = 1/2 \\
&P(X=2) = P(b) = 1/4 \\
&P(X=3) = P(c+d) = P(c) + P(d) = 2/8 = 1/4 \\
&P(X>3) = P(V) = 0
\end{aligned}
$$

Rješenje zadatka 2.33

(a) Budući da su sve točke na površini jednako vjerojatne to je

$$P(X<a) = \frac{a^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = a^2$$

(b)

$$P(a<X\le b) = P(X\le b) - P(X\le a) = \frac{\left(b^2-a^2\right)\cdot \pi}{1^2\pi} = b^2-a^2$$

2.12.6 Razdiobe

Rješenje zadatka 2.34
Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable X je:

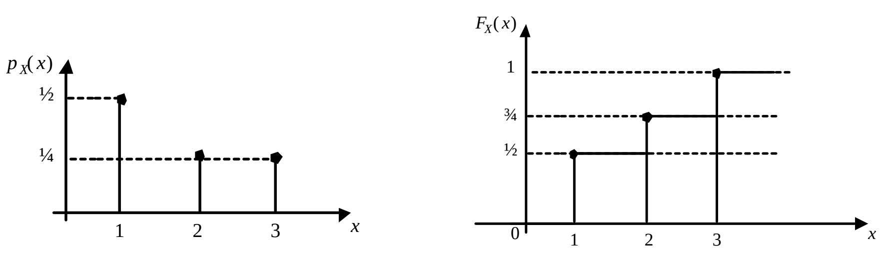
$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Funkcija razdiobe vjerojatnosti je jednaka: $F_X(x) = P[X \le x]$

$$
\begin{array}{lll}
-\infty < x < 1 & \ldots & F_X(x) = 0 \\
1 \le x < 2 & \ldots & F_X(x) = 1/2 \\
2 \le x < 3 & \ldots & F_X(x) = 3/4 \\
3 \le x < \infty & \ldots & F_X(x) = 1
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X\le 1) &= 1/2 \\
P(1<x\le 2) &= -P(X\le 1) + P(X\le 2) = 3/4 - 1/2 = 1/4 \\
P(X>1) &= 1 - P(X\le 1) = 1 - 1/2 = 1/2
\end{aligned}
$$

Grafovi funkcija su prikazani na slici 2.31.



(a) Funkcija vjerojatnosti

(b) Funkcija razdiobe vjerojatnosti

Slika 2.31: Uz zadatak 2.34

Rješenje zadatka 2.35
Potrebno je krenuti od funkcije razdiobe i koristiti klasičnu definiciju vjerojatnosti (tj. njenu geometrijsku interpretaciju).

Neka je X slučajna varijabla koja označava udaljenost pogotka od središta. Neka je $x \leq 1$.

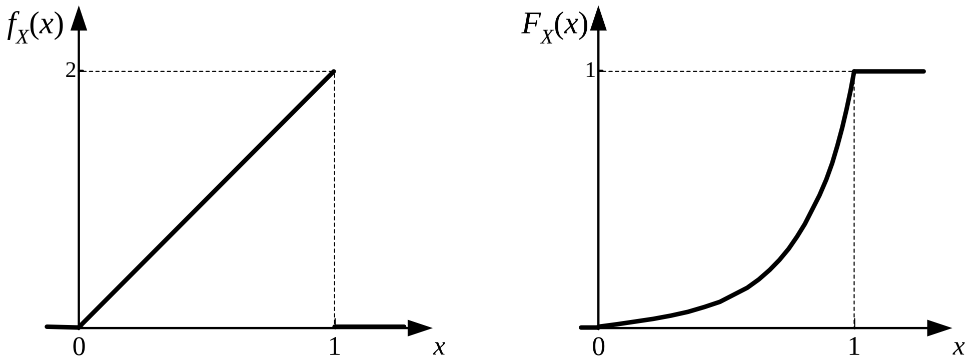
$$F_X(x) = P(X \leq x) = \frac{x^2\pi}{1^2\pi} = x^2.$$

Jasno, $F_X(x) = 1$ za $x > 1$. Stoga se može napisati

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Grafovi funkcija su prikazani na slici 2.32.



(a) Funkcija gustoće razdiobe

(b) Funkcija razdiobe vjerojatnosti

Slika 2.32: Uz zadatak 2.35

Rješenje zadatka 2.36

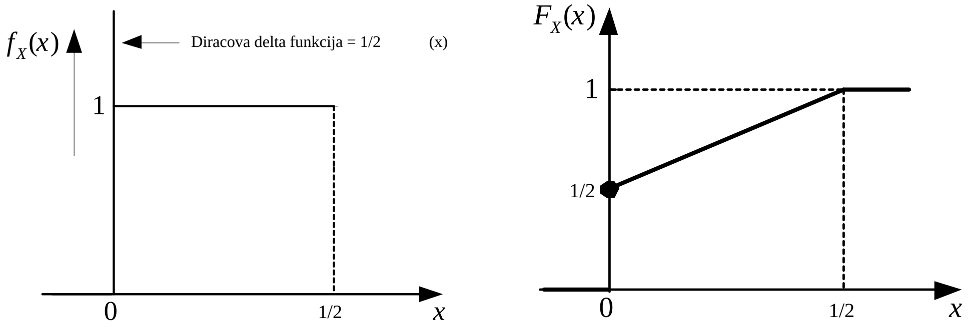
(a) Graf ove funkcije razdiobe je na slici 2.33-b. Sva svojstva iz definicije 2.13 su ispunjena.

$$\lim_{x \to 0^+} F_X(x) = 1/2 = F_X(0)$$

(b)

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{d[0]}{dx} = 0 & \text{za} \quad x < 0 \\ \frac{dF_x(x)}{dx} = 1/2 \cdot \delta(x) & \text{za} \quad 0^- < x < 0^+ \\ \frac{d[x+1/2]}{dx} = 1 & \text{za} \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{d[1]}{dx} = 0 & \text{za} \quad x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Grafovi funkcija su prikazani na slici 2.33.



(a) Funkcija gustoće razdiobe

(b) Funkcija razdiobe vjerojatnosti

Slika 2.33: Uz zadatak 2.36

Rješenje zadatka 2.37

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$F_X(x) = \sum_{m=1}^{k} (1/2)^m, \quad k \le x < k+1$$

$$P(1 < X \le 4) = P(X \le 4) - P(X \le 1) = \sum_{m=1}^{4} (1/2)^m - \sum_{m=1}^{1} (1/2)^m =$$

$$= 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 - 1/2 = \frac{7}{16} = 0.4375$$

Rješenje zadatka 2.38

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p = p_X(n) \quad \text{- funkcija vjerojatnosti}$$

$$F_X(x) = P(X \le x) = \sum_{n=1}^{k} (1-p)^{n-1} \cdot p = p \cdot \sum_{n=1}^{k} (1-p)^{n-1} =$$

$$= p \cdot \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^k, \quad k \le x < k+1$$

Rješenje zadatka 2.39

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$P(X > 1) = P(X \ge 2) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n - \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} =$$

$$= 1 - (1-p)^n - n \cdot p (1-p)^{n-1}$$

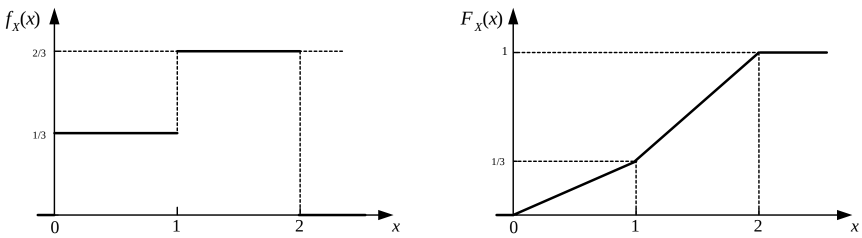
Rješenje zadatka 2.40
Podsjetimo se Poissonove razdiobe. Parametar a ove razdiobe jednak je $a = \lambda \cdot T$. Funkcija vjerojatnosti je:

$$p_X(x) = e^{-\lambda T} \cdot \frac{(\lambda T)^k}{k!}$$

Funkcija razdiobe i skica funkcije vjerojatnosti i funkcije razdiobe su na slici 2.17.

Rješenje zadatka 2.41

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \le x < 1 & \ldots \int_0^x f_X(x)\,dx = \int_0^x \frac{1}{3}\,dx = \frac{x}{3} \\ 1 \le x < 2 & \ldots F_X(1) + \int_1^x f_X(x)\,dx = \frac{1}{3} + \int_1^x \frac{2}{3}\,dx = \frac{1}{3} + \frac{2x}{3} - \frac{2}{3} \\ x < 0 & \ldots 0 \\ x \ge 2 & \ldots 1 \end{cases}$$



(a) Funkcija gustoće razdiobe (b) Funkcija razdiobe vjerojatnosti

Slika 2.34: Uz zadatak 2.41

Rješenje zadatka 2.42
a)

$$f_X(x) = \begin{cases} kx & \text{za} \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Mora vrijediti:

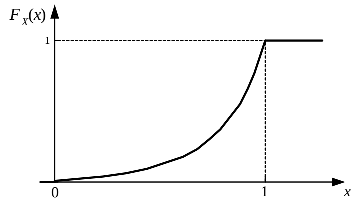
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

Slijedi:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int\limits_0^1 kx dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$$

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{za} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{za} \quad x \ge 1 \end{cases}$$



Slika 2.35: Uz zadatak 2.42

Rješenje zadatka 2.43

Traži se parametar a. Zasigurno vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = 1$$

Svedimo $f_X(x)$ u oblik prikladan za upotrebu gornje jednakosti.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\left(-x^2+x-a\right)} = \left| \begin{array}{c} -\left(x^2-x+a\right) = -\left[(x-1/2)^2+v\right] = \\ = -\left[x^2-x+1/4+v\right] \\ a = 1/4+v \Rightarrow v = 1/4-a \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left[(x-1/2)^2+1/4-a\right]} = e^{1/4-a} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-1/2)^2} = e^{1/4-a} \cdot \frac{\sqrt{2}\cdot z}{\sqrt{2\pi}\cdot z} \cdot e^{-\frac{(x-1/2)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot e^{-\frac{(x-1/2)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}} \cdot e^{1/4-a}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1/\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-1/2)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}} e^{1/4-a}\, dx =$$

$$= e^{1/4-a} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1/\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-1/2)^2}{2(1/\sqrt{2})^2}}\, dx}_{1} = e^{1/4-a} = 1$$

$$a = \frac{1}{4}$$

X uz $a = \frac{1}{4}$ ima normalnu razdiobu $N(1/2; 1/2)$

Rješenje zadatka 2.44

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{za} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{za} \quad x < 0 \end{cases}$$

Za $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \left| \begin{array}{ll} -\frac{x^2}{2\sigma^2} = u & du = -\frac{x}{\sigma^2} dx \\ du = -\frac{2x}{2\sigma^2} dx & dx = -\frac{\sigma^2}{x} du \end{array} \right| =$$

$$= -\int_0^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^u du = -\left[e^u \Big|_0^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] = -\left[e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - 1 \right] = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.45
Gama funkcija je definirana izrazom:

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

1.
$$\Gamma(1/2)=\int\limits_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt=\left|\begin{array}{c} u=t^{1/2} \\ du=\frac{1}{2}t^{-1/2}\,dt \end{array}\right|=2\int\limits_0^\infty t^{-1/2}t^{1/2}e^{-u^2}\,du=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du=\sqrt{2\pi}1/\sqrt{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 1/\sqrt{2}}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du}_{1}=\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\pi}$$

2.
$$\Gamma(x+1)=\int\limits_0^\infty t^xe^{-t}dt=\left|\begin{array}{cc} u=t^x & du=xt^{x-1}\,dt \\ dv=e^{-t}\,dt & v=-e^{-t} \end{array}\right|=\begin{pmatrix}\text{parcijalna}\\ \text{integracija}\end{pmatrix}=$$
$$=-t^xe^{-t}\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty x\cdot t^{x-1}e^{-t}dt=0-\lim_{t\to\infty}\frac{t^x}{e^t}+x\cdot\Gamma(x)=$$
$$=\left|\lim_{t\to\infty}\frac{t^x}{e^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{xt^{x-1}}{e^t}=\ldots=\lim_{t\to\infty}\frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{e^t}=0\right|=x\cdot\Gamma(x)$$

3. Slijedi iz 2.
$$\Gamma(n)=(n-1)\cdot\Gamma(n-1)=\ldots=(n-1)!$$

4. Da bismo pokazali ovo svojstvo, moramo znati definiciju tzv. β funkcije[5]:
$$\beta(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}\cdot(1-t)^{b-1}\,dt$$

Veza β i Γ funkcije je sljedeća:
$$\beta(a,b)=\frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

To možemo pokazati na sljedeći način:
$$\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt=\left|\begin{array}{c} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \end{array}\right|=2\int_0^\infty x^{2a-2}e^{-x^2}x\,dx=2\int_0^\infty x^{2a-1}e^{-x^2}\,dx$$
$$\Gamma(b)=\ldots=2\int_0^\infty x^{2b-1}e^{-y^2}\,dy$$

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)=4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2a-1}\cdot y^{2b-1}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\left|\begin{array}{c} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ dx\,dy=r\,dr\,d\varphi \end{array}\right|=$$
$$=\lim_{R\to\infty}4\int_0^{\pi/2}\int_0^R(r\cos\varphi)^{2a-1}(r\sin\varphi)^{2b-1}e^{-r^2}r\,dr\,d\varphi=$$
$$=\lim_{R\to\infty}4\int_0^{\pi/2}\cos^{2a-1}\varphi\cdot\sin^{2b-1}\varphi\,d\varphi\int_0^R r^{2a-1+2b-1+1}e^{-r^2}\,dr=$$
$$=\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_0^R r^{2a+2b-1}\,dr}_{A}\cdot 4\cdot\underbrace{\int_0^{\pi/2}\frac{(1-\sin^2\varphi)^a}{\cos\varphi}\frac{(\sin^2\varphi)^b}{\sin\varphi}\,d\varphi}_{B}=*$$

[5] Od studenata se ne očekuje da mogu samostalno pokazati ovo svojstvo

$$A = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{2} r^{2a+2b-2} e^{-r^2} 2r\,dr = \left| \begin{array}{c} t = r^2 \\ dt = 2r\,dr \end{array} \right| = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2}\int_0^R \left(t^{1/2}\right)^{2a+2b-2} e^{-t}\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty t^{a+b-1}e^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma(a+b)$$

$$B = \int_0^{\pi/2} \frac{\left(1-\sin^2\varphi\right)^a}{\cos^2\varphi}\frac{\left(\sin^2\varphi\right)^b}{\sin^2\varphi}\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi\cdot\,d\varphi = \left| \begin{array}{c} t = \sin^2\varphi \\ dt = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi\,d\varphi \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^{a-1}\cdot t^{b-1}\,dt = \beta(a,b)$$

Nadalje slijedi:

$$\Gamma(a)\cdot\Gamma(b) = 4\cdot\frac{1}{2}\Gamma(a+b)\cdot\frac{1}{2}\beta(a,b) \quad\Rightarrow\quad \beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\Gamma(2x) = \Gamma(x+x) \quad\Rightarrow\quad \beta(x,x) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(x)}{\Gamma(x+x)} = \frac{\Gamma(x)^2}{\Gamma(2x)}$$

$$\beta(x,x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \frac{1+q}{2} \\ dt = \frac{dq}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1+q}{2}\right)^{x-1}\cdot\left(1-\frac{1+q}{2}\right)^{x-1}\frac{1}{2}\,dq = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{1+q}{2}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{1-q}{2}\right)^{x-1}\,dq =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2^{x-1}}\frac{1}{2^{x-1}}\int_{-1}^1 \left[(1+q)(1-q)\right]^{x-1}\,dq = \frac{1}{2^{2x-1}}\int_{-1}^1 (1-q^2)\,dq =$$
$$= 2\frac{1}{2^{2x-1}}\int_0^1 (1-q^2)^{x-1}\,dq = \left| \begin{array}{c} u = q^2 \\ du = 2q\,dq \end{array} \right| = \frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u}}(1-u)^{x-1}\,du =$$
$$= \frac{1}{2^{2x-2}}\int_0^1 \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{x-1}\,du = \frac{1}{2^{2x-2}}\frac{1}{2}\beta\left(\frac{1}{2},x\right)$$

$$\beta(x,x) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{1}{2^{2x-1}}\beta\left(\frac{1}{2},x\right) = \frac{1}{2^{2x-1}}\frac{\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(x)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)}$$
$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{1}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(x)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\Gamma(2x)$$

2.12.7 Očekivanje i varijanca

Rješenje zadatka 2.46

(a)

$$E(X) = \sum_i p_X(i)\cdot i = -1\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3} = 0$$
$$Var(X) = E\left[X^2\right] - E(X)^2 = \sum_i i^2 p_X(i) = (-1)^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(b)

$$E(X)=\sum_i p_X(i)\cdot i=-2\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{3}=0$$

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-E(X)^2=\sum_i i^2p_X(i)=(-2)^2\cdot\frac{1}{3}+2^2\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$$

Rješenje zadatka 2.47

$$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & 6\\ 1/6 & 1/6 & \dots & 1/6\end{pmatrix}$$

$$E(X)=\sum_i i\cdot p_X(i)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}+\frac{6}{6}=\frac{1+2+3+4+5+6}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

$$Var(X)=\sum_i i^2\cdot p_X(i)-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1+4+9+16+25+36}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

Rješenje zadatka 2.48

$$E(X)=\int_0^\infty\frac{x^2}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx=\left|\begin{array}{ll}u=\frac{x^2}{2\sigma^2} & dx=\frac{\sigma^2}{x}\,du\\ du=\frac{x}{\sigma^2}\,dx & x=\sqrt{2\sigma^2u}\end{array}\right|=\int_0^\infty\sqrt{2\sigma^2u}\cdot e^{-u}\,du=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sigma\int_0^\infty u^{1/2}e^{-u}\,du=\sqrt{2}\cdot\sigma\cdot\Gamma(3/2)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sigma\cdot\Gamma(1/2)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma$$

$$Var(X)=E\left[X^2\right]-E(X)^2=\int_0^\infty\frac{x^3}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx-E(X)^2=\left|\begin{array}{ll}u=\frac{x^2}{2\sigma^2} & dx=\frac{\sigma^2}{x}\,du\\ du=\frac{x}{\sigma^2}\,dx & x=\sqrt{2\sigma^2u}\end{array}\right|=$$

$$=2\sigma^2\int_0^\infty u^1e^{-u}du-E(X)^2=2\sigma^2\Gamma(2)-\frac{2\pi\sigma^2}{4}=2\sigma^2-\frac{\pi\sigma^2}{2}=\sigma^2\left[2-\frac{\pi}{2}\right]$$

Rješenje zadatka 2.49

$$f_X(x)=2x,\qquad 0\le x\le 1$$

$$E(X)=\int_0^1 2x^2\,dx=2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{2}{3}$$

$$Var(X)=\int_0^1 2x^3\,dx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

Rješenje zadatka 2.50

Jednakim postupkom kao u primjeru 2.23.

2.12.8 Funkcije slučajne varijable

RJEŠENJE ZADATKA 2.51

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = h(z) = z \cdot \sigma + \mu, \qquad \frac{dh(z)}{dz} = \sigma$$

$$f_Z(z) = f_X(z \cdot \sigma + \mu) \cdot \left| \frac{dh(z)}{dz} \right| = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z\sigma+\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} X \quad \sim N(0,1)$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.52

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \qquad Y = aX + b \Rightarrow X = \frac{Y-b}{a} \quad \text{odnosno} \quad x = h(y) = \frac{y-b}{a}$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \left| \frac{dh(y)}{dy} \right| = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \cdot \frac{1}{|a|}$$

$$F_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = \left| \begin{array}{c} u = \frac{y-b}{a} \\ du = \frac{dy}{a} \end{array} \right| =$$

$$= \begin{cases} a > 0 & \int\limits_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(u)\,du = F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \\ a < 0 & -\int\limits_{\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(u)\,du = 1 - \int\limits_{-\infty}^{\frac{y-b}{a}} f_X(u)\,du = 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \end{cases}$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.53

Prema zadatku 2.52:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{a} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{za} \quad b \le y < a + b \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-b}{a} & \text{za} \quad b \le y < a + b \\ 0 & \text{za} \quad y \le b \\ 1 & \text{za} \quad y \ge b + a \end{cases}$$

RJEŠENJE ZADATKA 2.54

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot |a| \cdot \sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot |a| \cdot \sigma} e^{-\frac{(y-(b+\mu a))^2}{2\sigma^2 a^2}}$$

$$Y \sim N\left(b + \mu a; (a\sigma)^2\right)$$

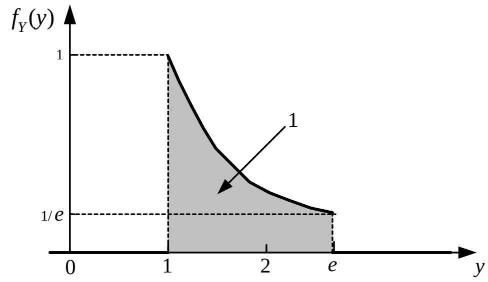
RJEŠENJE ZADATKA 2.55

$$Y = X^2 \qquad X = \pm Y^{1/2} \qquad Y \in [0, +\infty)$$

$$f_Y(y) = f_X(\pm\sqrt{y}) \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{e^{-\frac{y}{2}}}{2\sqrt{2\pi y}}$$

Rješenje zadatka 2.56

$$X \in [0,1] \Rightarrow y \in [1,e]$$
$$Y = e^X \Rightarrow X = ln\,(Y)$$
$$f_Y\,(y) = f_X\,[ln\,(y)] \cdot \left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|} \qquad \text{za} \qquad 1 \le y < e$$



Slika 2.36: Uz zadatak 2.56

Rješenje zadatka 2.57

$$X \in (-\infty,+\infty) \qquad y = e^x \quad \Rightarrow \quad y \in (0,+\infty)$$
$$f_Y\,(y) = f_X\,[ln\,(y)] \cdot \left|\frac{d\,[\ln(y)]}{dy}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot|y|}e^{-\frac{\ln(y)\cdot\ln(y)}{2}} = |\text{uz} \quad y>0| =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{y}\cdot\left(e^{lny}\right)^{-\frac{lny}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{y}\cdot y^{-\frac{\ln(y)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{\ln(y)}{2}-1}$$

Rješenje zadatka 2.58

$$Y = F_X\,(x)$$
$$f_Y\,(y) = f_X\left[F_X^{-1}\,(y)\right] \cdot \left|\frac{d\left[F_X^{-1}\,(y)\right]}{dy}\right| = \left|\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=x^{-1}(y)}}\right| =$$
$$= f_X\left[F_X^{-1}\,(y)\right] \cdot \frac{1}{\left|\left.\frac{dF_X\,[x]}{dx}\right|_{x=F_X^{-1}(y)}\right|} =$$
$$= f_X\left[F_X^{-1}\,(y)\right] \cdot \frac{1}{\left|f_X\left[F_X^{-1}\,(y)\right]\right|} = \left|\begin{array}{l}\text{budući da je}\\ f_X\,(x)>0\end{array}\right| = 1 \qquad za \qquad 0 \le y \le 1$$

2.12.9 Karakteriastična funkcija i zbroj varijabli

Rješenje zadatka 2.59

$$\Psi_X(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega k} \cdot p_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega k} \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left[\lambda \cdot e^{j\omega}\right]^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^{j\omega}} = e^{\lambda\left[e^{j\omega}-1\right]}$$

Rješenje zadatka 2.60

$$\Psi_X(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{j\omega x} e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x(\lambda - j\omega)}\, dx = \left| \begin{array}{c} \gamma = \lambda - j\omega \\ \lambda = \gamma + j\omega \end{array} \right| =$$

$$= \frac{(\gamma + j\omega)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\gamma x}\, dx = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^\alpha$$

$$\Psi_X(\omega) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^\alpha$$

$$Z = X + Y \qquad \Rightarrow$$

$$\Psi_Z(\omega) = \Psi_X(\omega) * \Psi_Y(\omega) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^\beta = \left(\frac{\lambda}{\lambda - j\omega}\right)^{\alpha+\beta}$$

dakle, $\quad Z \sim \Gamma(\alpha + \beta; \lambda)$

Rješenje zadatka 2.61
Pogledaj sliku 2.37!

$$\begin{array}{l} X \sim U[0,1] \\ Y \sim U[0,1] \end{array} \qquad f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \cdot f_Y(z-t)\, dt$$

$$Z = X + Y$$

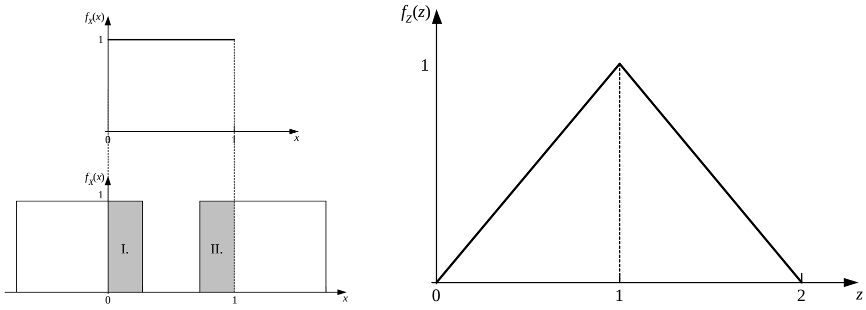
$$f_X(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \qquad f_Y(z-t) = \begin{cases} 1 & z-1 \le t \le z \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

I. $0 \le z \le 1$

$$f_Z(z) = \int_0^z 1 dt = z$$

II. $1 \le z \le 2$

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{1} 1\, dt = t\Big|_{z-1}^{1} = 1 - (z-1) = 2 - z$$



(a) Proces konvoluiranja (b) Funkcija gustoće razdiobe

Slika 2.37: Uz zadatak 2.61

Rješenje zadatka 2.62

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi\left(x^2+a^2\right)}$$

$$\Psi_X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot e^{j\omega x}dx$$

Fourierov transformat dan je izrazom:

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-j\omega x}\, dx, \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega x} d\omega$$

Poznat nam je Fourierov transformacijski par:

$$e^{-a|x|} \leftrightarrow \frac{2a}{\omega^2+a^2}$$

Ukoliko promijenimo oznake ω u x i x u ω, možemo iskoristiti gornji transformacijski par na ovaj način:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{x^2+a^2} e^{j\omega x}\, dx = e^{-a|\omega|} \qquad \Rightarrow \qquad \Psi_X(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\left(x^2+a^2\right)\pi} e^{j\omega x}\, dx = e^{-a|\omega|}$$

Rješenje zadatka 2.63

$$\Psi_X(\omega) = \begin{cases} 1-|\omega| & |\omega|<1 \\ 0 & |\omega|>1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_X(\omega)\, e^{-j\omega x} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-1}^{0} (1+\omega)\, e^{-j\omega x} d\omega + \int\limits_{0}^{1} (1-\omega)\, e^{-j\omega x} d\omega\right] = \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-1}^{1} e^{-j\omega x} dx + \int\limits_{-1}^{0} \omega\cdot e^{-j\omega x} d\omega - \int\limits_{0}^{1} \omega\cdot e^{-j\omega x} d\omega\right] = \ldots \end{aligned}$$

Riješimo integral:

$$\int_a^b \omega \cdot e^{-j\omega x} d\omega = \frac{1}{-jx}\omega \cdot e^{-j\omega x}\Big|_{\omega=a}^{b} - \frac{1}{-jx}\int_a^b e^{-j\omega x} d\omega =$$

$$= \frac{1}{-jx}\left[be^{-jxb} - ae^{-jxa}\right] - \frac{1}{-jx}\int_a^b e^{-j\omega x} d\omega =$$

$$= \frac{be^{-jxb} - ae^{-jxa}}{-jx} + \frac{\left[e^{-jbx} - e^{-jax}\right]}{x^2}$$

Slijedi:

$$\ldots = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-jx}\left[e^{-jx} - e^{jx}\right] + \frac{e^{jx}}{-jx} + \frac{e^0 - e^{jx}}{x^2} - \frac{e^{-jx}}{-jx} - \frac{e^{-jx} - e^0}{x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{x} - \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2jx} + \frac{1 - e^{jx} - e^{-jx} + 1}{2x^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x} + \frac{2 - \left(e^{jx} + e^{-jx}\right)\cdot\frac{2}{2}}{2x^2}\right] = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x} + \frac{2 - 2cos(x)}{2x^2}\right] =$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left[\frac{1 - cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2$$

Rješenje zadatka 2.64

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Psi_X(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}e^{j\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+j\omega x}\,dx$$

Preuredimo izraz u eksponentu podintegralne funkcije:

$$-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + j\omega x = -\frac{x^2 - 2x\mu + \mu^2}{2\sigma^2} - \frac{-2xj\omega\sigma^2}{2\sigma^2} =$$

$$= -\frac{x^2 - 2x\left(\mu + j\omega\sigma^2\right) + \mu^2}{2\sigma^2} = \left|\left(\mu + j\omega\sigma^2\right)^2 = \mu^2 + 2j\omega\mu\sigma^2 - \omega^2\sigma^4\right| =$$

$$= -\frac{x^2 - 2x\left(\mu + j\omega\sigma^2\right) + \left(\mu + j\omega\sigma^2\right)^2 - 2j\omega\mu\sigma^2 + \omega^2\sigma^4}{2\sigma^2} =$$

$$= -\frac{\left[x - \left(\mu + j\omega\sigma^2\right)\right]^2}{2\sigma^2} + \frac{2j\omega\mu\sigma^2 - \omega^2\sigma^4}{2\sigma^2} =$$

$$= -\frac{\left[x - \left(\mu + j\omega\sigma^2\right)\right]^2}{2\sigma^2} + j\omega\mu - \frac{1}{2}\omega^2\sigma^2$$

$$\Psi_X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\left[x-\left(\mu+j\omega\sigma^2\right)\right]^2}{2\sigma^2}}e^{j\omega\mu-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}dx = e^{j\omega\mu-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2}$$

Rješenje zadatka 2.65

$$Y = aX + b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Psi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot e^{j\omega x}\,dx \qquad \Psi_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \cdot e^{j\omega y} dy$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X(x)$$

$$\begin{aligned}\Psi_Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} f_X(x) \cdot e^{j\omega(ax+b)}\,dx = \\ &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot e^{j\omega(ax+b)}\,dx = \\ &= \frac{e^{j\omega b}}{|a|} \Psi_X(a\omega)\end{aligned}$$

2.12.10 Funkcija izvodnica

Rješenje zadatka 2.66

$$X \sim G(p), \quad q = 1-p$$

$$\Psi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^i p \cdot z^i = p \sum_{i=0}^{\infty} (qz)^i = \frac{p}{1-qz}$$

Rješenje zadatka 2.67

$$X \sim B(n,p), q = 1-p$$

$$\Psi(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pz)^k q^{n-k} = [q+pz]^n$$

Rješenje zadatka 2.68

$$X \sim G(p_1), \quad q_1 = 1-p_1 \qquad Y \sim B(n,p_2), \quad q_2 = 1-p_2$$

$$\begin{aligned}&\Psi_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p_1)^i p_1 \cdot z^i = p_1 \sum_{i=0}^{\infty} (q_1 z)^i = \tfrac{p_1}{1-q_1 z} \\ &\Psi_Y(z) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} p_2^k q_2^{n-k} \cdot z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \tbinom{n}{k} (p_2 z)^k q_2^{n-k} = [q_2 + p_2 z]^n \\ &\Psi_{X+Y}(z) = \Psi_X(z) \cdot \Psi_Y(z) = \tfrac{p_1 \cdot [q_2 + p_2 z]^n}{1-q_1 \cdot z}\end{aligned}$$

Bibliografija

[1] Z. Pauše, *Vjerojatnost, informacjia, stohastički procesi.* Školska knjiga, 1974.

[2] D. Ugrin-Šparac, *Teorija vjerojatnosti.* Sveučiliše knjige, 1975.

[3] N. Elezović, *Skripta predavanja iz Stohastičkih procesa.* Knjiga u pripremi.

[4] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes.* McGraw-Hill International Editions, 1987.

Poglavlje 3

Stohastički procesi

Teorija prometa je primijenjena teorija stohastičkih procesa (*Random Processes*). Zbog toga stohastičkim procesima ovdje posvećujemo cijelo poglavlje. Cilj ovog poglavlja je upoznati studente samo s osnovnim pojmovima i opisati osnovni matematički aparat kojim se mogu rješavati složeni problemi iz teorije čekanja i posluživanja. Stohastički procesi su se razvili pri proučavanju fluktuacija i šuma u fizikalnim sustavima. Stohastički proces je matematički model empirijskog procesa čije je ponašanje u skladu sa zakonima teorije vjerojatnosti.

Za potpuno shvaćanje materije ovog poglavlja potrebno je dobro poznavati definicije teorije vjerojatnosti. Također je izuzetno važno poznavati pojedine razdiobe navedene u prethodnom poglavlju i matematički aparat za izračunavanje pojedinih statističkih veličina poput očekivanja i varijance. Literatura iz ovog područja je opsežna. [1], [2], [3], [4], [5] i [6] su primjeri iz velikog izbora knjiga koje je moguće naći u fakultetskoj knjižnici.

3.1 Definicija i karakterizacija stohastičkih procesa

Razmatrajmo prostor vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On se sastoji od prostora elementarnih događaja Ω, Booleove algebre događaja $\mathcal{A}$ i vjerojatnosti P. Svakom $\omega \in \Omega$ je pridružen jedinstven broj u $\mathbb{R}$. Funkciju koja vrši pridruživanje zovemo slučajna varijabla. Svaki put kada se dogodi neki elementarni događaj, slučajna varijabla poprimi vrijednost u $\mathbb{R}$.

Svaki realan stohastički eksperiment se događa u vremenu ili nekoj drugoj dimenziji. Promatrajmo stohastički eksperiment dolaska paketa u MPLS usmjeritelj. Realizacija ovog eksperimenta je dolazak nekog paketa u usmjeritelj. Definirajmo slučajnu varijablu X koja mjeri duljinu paketa. Svaki put kada paket dođe u usmjeritelj, slučajna varijabla X poprimi vrijednost koja odgovara broju okteta u paketu. Prisjetimo se da je slučajna varijabla definirana nad skupom elementarnih događaja Ω. Postavlja se pitanje da li je slučajna varijabla koja mjeri duljine paketa ujutro jednaka onoj koja mjeri duljine paketa popodne? Moguće je da korisnici ujutro šalju pakete prosječno manjih duljina, a popodne pakete prosječno većih duljina. Uzrok može biti administrativni: administrator ne dopušta slanje dugih paketa ujutro. Jasno da "jutarnja" i "popodnevna" slučajna varijabla nisu iste. One uopće ne moraju biti definirane na istom Ω i ne moraju imati jednaku razdiobu.

Iz ovog razloga zaključujemo da se slučajna varijabla može dodijeliti samo određenoj vremenskoj točki. To znači da svaka vremenska točka ima svoju vlastitu slučajnu varijablu. Naravno, ne moramo govoriti nužno o vremenskoj točki. Možemo razmatrati prostorne točke ili neku drugu dimenziju.

Definirajmo indeksni skup T koji sadržava sve vremenske točke koje razmatramo u nekom eksperimentu. Svakom indeksu t iz indeksnog skupa T i elementarnom događaju $\omega \in \Omega$ pridružujemo vremensku funkciju $X(t, \omega)$. To je *slučajna varijabla koja vrijedi samo za **fiksni** indeks (trenutak) t. Familiju* (skup) svih slučajnih varijabli $X(t, \omega)$ koje odgovaraju indeksima iz T zovemo *stohastički proces.* Formalno pojam stohastičkog procesa iskazujemo definicijom 3.1.

DEFINICIJA 3.1 (STOHASTIČKI PROCES (*Random/Stochastic Process*))
Stohastički proces je familija slučajnih varijabli $X(t,\omega)$, $t \in T$, definirana na nekom prostoru vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ i indeksirana parametrom t, gdje t pripada indeksnom skupu T.

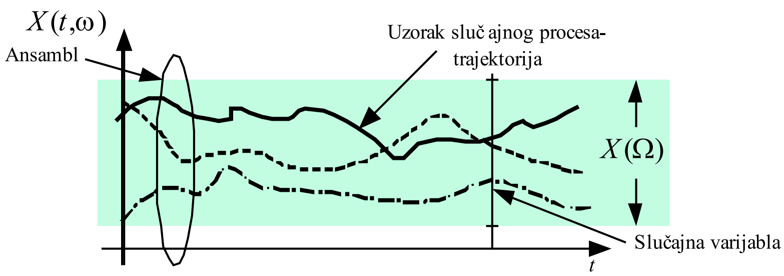
Pojasnimo dodatno gornju definiciju. Podsjetimo se na trenutak definicije slučajne varijable. Ona je definirana na nekom prostoru elementarnih događaja Ω. Slučajna varijabla je tako funkcija jednog argumenta - prostora elementarnih događaja. Stohastički proces je funkcija dvaju argumenata:

$$X(t,\omega), \quad t \in T, \quad \omega \in \Omega$$

Za fiksirani parametar t ($t = t_k$), $X(t_k,\omega) = X_k(\omega)$ je slučajna varijabla s oznakom $X(t_k)$, gdje ω poprima vrijednosti iz Ω. Ukoliko fiksiramo neki realizirani slučajni događaj ω_i iz skupa Ω za svaki indeks t, onda $X(t,\omega_i)$ predstavlja vremensku funkciju koju zovemo uzorkom slučajnog procesa ili *trajektorijom* (*sample function*). Skup svih mogućih realizacija slučajnog procesa se zovemo ansambl (*ensemble*). Ukoliko fiksiramo i t_k i pripadni ω_i, dobivamo konkretan realan broj.

Slučajni proces tako možemo shvatiti kao slijed izvođenja nekog slučajnog eksperimenta s elementarnim događajima ω iz skupa elementarnih događaja Ω. Svakom izvođenju tog slučajnog eksperimenta pridružujemo vrijeme t, tj. indeks iz indeksnog skupa T. Ako promatramo neki fiksan trenutak, onda promatramo nekakvu konkretnu realizaciju eksperimenta kojoj je pridruženo vrijeme (indeks) t. Slučajni proces u danoj vremenskoj točki onda predstavlja slučajnu varijablu tog eksperimenta u vremenu t. Ako za svaki vremenski trenutak t iz indeksnog skupa T odredimo nekakav ishod slučajnog eksperimenta ω_i, onda slučajni proces prelazi u običnu vremensku funkciju koja opisuje *mogući ishod slučajnog eksperimenta.*

Analizirajmo stohastički proces mjerenja napona na nekom analognom uređaju kroz vrijeme T. Napon mjerimo kontinuirano. Vrijednosti koje dobivamo također su kontinuirane. Neka su vrijednosti slučajne varijable u vremenskom trenutku $t_k \in T$ definirane kao vrijednost napona u voltima. Prostor elementarnih događaja je Ω. Pretpostavimo da se napon kreće u vrijednostima od V_{min} do V_{max}. Slika 3.1 nam može pomoći u shvaćanju ovog stohastičkog procesa.



Slika 3.1: Stohastički proces

Trajektorija ovog slučajnog procesa je niz (skup) vrijednosti slučajnih varijabli u svim vremenskim trenucima iz indeksnog skupa T. Budući da je indeksni skup kontinuiran, kao i skup vrijednosti slučajnih varijabli u vremenskim trenucima iz T, to je ansambl trajektorija ovog slučajnog procesa beskonačan.

Pošto ćemo u većini slučajeva analizirati stohastičke procese koji ne mijenjaju Ω u vremenu, stohastički proces ćemo zapisivati s $X(t)$, gdje $X(t_k)$ predstavlja vrijednost procesa u trenutku $t_k \in T$.

U terminologiji stohastičkih procesa indeksni skup T zovemo još i *parametarski skup* stohastičkog procesa. Vrijednosti od $X(t)$ se zovu *stanja* stohastičkog procesa, a skup svih mogućih stanja se zove *prostor stanja* stohastičkog procesa - E. Određivanje prirode navedenih skupova pripada postupku opisa stohastičkog procesa. Osnovni opis stohastičkog procesa podrazumijeva određivanje prirode procesa s obzirom na T i Ω. O tome govori definicija 3.2.

DEFINICIJA 3.2 (OPIS STOHASTIČKOG EKSPERIMENTA S OBZIROM NA T I Ω)

Opis s obzirom na parametarski skup T:

1. *Ako je indeksni skup T stohastičkog procesa diskretan, onda se proces zove stohastički proces s diskretnim parametrom (discrete-parameter) ili diskretan u vremenu (discrete-time). Takav proces se također naziva slučajan slijed s oznakom $\{X_n,\, n = 1,\, 2,\, \ldots\}$.*
2. *Ako je indeksni skup T stohastičkog procesa kontinuiran, onda se proces zove stohastički proces s kontinuiranim parametrom (continuous-parameter) ili kontinuiran u vremenu (continuous time).*

Opis s obzirom na prostor stanja E:

1. *Ako je prostor stanja E stohastičkog procesa diskretan, onda se proces naziva stohastički proces s diskretnim stanjima (discrete-state) ili lanac (chain).*
2. *Ako je prostor stanja E stohastičkog procesa kontinuiran, onda se proces naziva stohastički proces s kontinuiranim stanjima (continuous-state).*

Moguće je uvesti i pojam kompleksnog stohastičkog eksperimenta. To je stohastički proces sa stanjima u kompleksnom skupu $\mathbb{C}$. Takav proces je definiran izrazom:

$$X(t) = X_1(t) + jX_2(t) \tag{3.1}$$

gdje su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ realni stohastički procesi ($X_1(t), X_2(t) \in \mathbb{R}$). Svi procesi koje ćemo proučavati su realni stohastički procesi, osim ako nije drugačije rečeno.

Pored opisa kontinuiranosti ili diskretnosti skupova T i E, bitnu sastavnicu opisa stohastičkog procesa predstavlja vjerojatnosni opis definiran definicijom 3.3

DEFINICIJA 3.3 (VJEROJATNOSTNI OPIS STOHASTIČKOG PROCESA)
Neka je zadan stohastički eksperiment $X(t)$. Za neko fiksno vrijeme t_1, $X(t_1) = X_1$ je slučajna varijabla. Funkcija razdiobe te slučajne varijable s oznakom $F_X(x_1; t_1)$ je definirana izrazom:

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \tag{3.2}$$

$F_X(x_1; t_1)$ se još zove funkcija razdiobe prvog reda od $X(t)$. Slično, ako su zadana dva parametra t_1 i t_2, tako da je $X(t_1) = X_1$ i $X(t_2) = X_2$, onda se njihova združena razdioba zove funkcija razdiobe drugog reda i definirana je izrazom:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \tag{3.3}$$

U općem slučaju, funkciju razdiobe n-tog reda od $X(t)$ definiramo izrazom:

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_n) \leq x_n\} \tag{3.4}$$

Ako je $X(t)$ stohastički proces s diskretnim stanjima, onda je $X(t)$ specificiran svojom združenom funkcijom vjerojatnosti:

$$p_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\} \tag{3.5}$$

Ako je $X(t)$ stohastički proces s kontinuiranim skupom stanja, onda je $X(t)$ specificiran svojom združenom gustoćom razdiobe

$$f_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \tag{3.6}$$

Cjelovita karakterizacija stohastičkog eksperimenta $X(t)$ je dana funkcijom razdiobe n-tog reda kada n teži u beskonačno.

Za stohastički proces definiramo i standardne veličine koje pobliže opisuju statistička svojstva procesa. Te veličine odgovaraju onima koje smo uveli za slučajne varijable. Očekivanje stohastičkog procesa tako odgovara očekivanju slučajne varijable za neki fiksirani indeks $t_k \in T$. Autokorelacija odgovara korelacijskom koeficijentu, a autokovarijanca odgovara varijanci.

Definicija 3.4 (Očekivanje (*Mean*))
Očekivanje stohastičkog procesa $X(t)$ dano je izrazom

$$\mu_X(t) = E[X(t)] \tag{3.7}$$

gdje se $X(t)$ tretira kao slučajna varijabla za fiksnu vrijednost od t. Općenito, očekivanje $\mu_X(t)$ je funkcija vremena i često se naziva srednjom vrijednošću ansambla (ensemble average).

Definicija 3.5 (Autokorelacija (*Autocorrelation*))
Vrijednosti istog slučajnog procesa $X(t)$ u različitim vremenskim trenucima su često statistički povezane. Za određivanje mjere ovisnosti između slučajnih varijabli stohastičkog procesa $X(t)$ definiramo autokorelacijsku funkciju koja se definira izrazom

$$R_X(t, s) = E[X(t) \cdot X(s)] \tag{3.8}$$

Očigledna su sljedeća svojstva:

$$R_X(t, s) = R_X(s, t) \tag{3.9}$$

$$R_X(t, t) = E[X^2(t)] \tag{3.10}$$

Autokorelacija $R_X(t,\, t)$ se još zove i srednja snaga procesa $X(t)$. Riječ autokorelacija označava traženje korelacija između dvije varijable istog stohastičkog procesa. Ukoliko bismo tražili mjeru ovisnosti dvije slučajne varijable $X(t)$ i $Y(s)$ koje pripadaju različitim stohastičkim procesima $R_{X,Y}(t, s)$, onda bismo tu mjeru zvali samo korelacija.

Definicija 3.6 (Autokovarijanca *Autocovariance*)
Autokovarijacijska funkcija od $X(t)$ je definirana izrazom:

$$K_X(t, s) = Cov[X(t), X(s)] = E\{[X(t) - \mu_X(t)] \cdot [X(s) - \mu_X(s)]\} = \tag{3.11}$$

$$= R_X(t, s) - \mu_X(t) \cdot \mu_X(s) \tag{3.12}$$

Ukoliko su vrijednosti indeksa t i s jednaki, onda je

$$K_X(t, t) = E\{[X(t) - \mu_X(t)]^2\} = Var[X(t)] = \sigma_X^2(t) \tag{3.13}$$

***varijanca** stohastičkog procesa $X(t)$. Jasno je da ako je očekivanje slučajnog procesa $\mu_X(t) = 0$, onda $K_X(t, s) = R_X(t, s)$. Tumačenje izraza autokovarijance je slično tumačenju izraza autokorelacije.*

DEFINICIJA 3.7 (KORELACIJSKI KOEFICIJENT *Correlation coefficient*)
Koeficijent korelacije stohastičkog procesa se definira izrazom:

$$r_X(t,s) = \frac{K_X(t,s)}{\sqrt{K_X(t,t) \cdot K_X(s,s)}} \tag{3.14}$$

Koeficijent korelacije pokazuje kolika je linearna ovisnost između vrijednosti slučajnih varijabli X_t i X_s. On pokazuje neka zanimljiva svojstva.

1. Ako je $\sigma_X(t)^2 > 0$ i $\sigma_X(s)^2 > 0$, onda je $r_X(t,s)^2 \leq 1$
2. Ako je $r_X(t,s)^2 = 1$, onda vrijedi da je $X(t) = \alpha X(s) + \beta$, gdje su α i $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

Dakle, što je korelacijski koeficijent bliži jedinici, to se ovisnost dviju varijabli može bolje opisati linearnom funkcijom. Ako je $X(t)$ kompleksan stacionarni proces, onda je

$$R_X(t,s) = E[X(t) \cdot X^*(s)]$$
$$K_X(t,s) = Cov[X(t), X(s)] = E\{[X(t) - \mu_X(t)] \cdot [X(s) - \mu_X(s)]^*\}$$

gdje * označava konjugirano-kompleksnu vrijednost.

3.2 Klasifikacija stohastičkih procesa

U prethodnom poglavlju smo dali definiciju potpune karakterizacije (opisa) nekog stohastičkog procesa. U praksi analiziramo stohastičke procese za koje nam je potreban manji broj parametara opisa. Često nam ne treba funkcija razdiobe stohastičkog procesa svih redova, nego najčešće samo prvog i drugog. U ovom dijelu opisujemo neke česte tipove stohastičkih procesa koji su karakterizirani različitim tipovima ovisnosti između njihovih slučajnih varijabli. Počnimo s definicijom stacionarnog procesa.

DEFINICIJA 3.8 (PROCES STACIONARAN U UŽEM SMISLU (*Strict-Sense Stationary Process*))
Slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ *se zove stacionaran u užem smislu (strict-sense stationary) ako za sve* $n \in \mathbb{N}$ *i za svaki skup vremenskih trenutaka* $(t_i \in T, \quad i = 1, 2, \ldots, n)$ *vrijedi da je:*

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1 + \tau, \ldots, t_n + \tau) \tag{3.15}$$

za bilo koji $\tau \in \mathbb{R}$.

Prema ovoj definiciji, razdioba bilo kojeg reda stacionarnog procesa u užem smislu ostaje nepromijenjena s obzirom na pomak vremenskih indeksa za bilo koji iznos. Slučajne varijable $X(t_i)$ i $X(t_i + \tau)$ tako imaju jednake razdiobe, a funkcija razdiobe stacionarnog procesa za indekse $X(t)$ i $X(t+\tau)$ ostaje nepromijenjena. Jedna posljedica ovog procesa može se matematički opisati ovako:

$$F_X(x;t) = F_X(x; t+\tau) = F_X(x) \tag{3.16}$$
$$f_X(x;t) = f_X(x) \tag{3.17}$$
$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \mu \tag{3.18}$$
$$Var[X(t)] = \sigma^2 \tag{3.19}$$

gdje su μ i σ^2 konstante. Slično, za razdiobe drugog reda vrijedi:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = F_X(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$
$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_2 - t_1)$$

Ukratko, razdiobe slučajnih varijabli procesa koji su stacionarni u užem smislu su međusobno jednake. Dakako, ukoliko se razdioba slučajnih varijabli mijenja, tj. razdioba procesa n-tog reda ovisi o vremenskim indeksima, onda takav proces *nije stacionaran*.

DEFINICIJA 3.9 (PROCES STACIONARAN U ŠIREM SMISLU (*Wide-Sense Stationary Process*))
Ako uvjet (3.15) slučajnog procesa $X(t)$ nije ispunjen za sve $n \in \mathbb{N}$ nego za n-ove takve da je $n \leq k$, onda kažemo da je stohastički proces $X(t)$ stacionaran do reda k (stationary to order k). Ako je $X(t)$ stacionaran do reda 2, onda je $X(t)$ stacionaran u širem smislu (WSS - wide-sense stationary) ili slabo stacionaran proces (weak stationary process).

Ukoliko je proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu, lako je pokazati da vrijedi:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \mu \quad (konstanta) && (3.20)\\ Var[X(t)] &= \sigma^2 && (3.21)\\ R_X(t,s) &= E[X(t)\cdot X(s)] = R_X(|s-t|) && (3.22) \end{aligned}$$

Primijetimo na kraju da je i stacionarni proces u užem smislu također stacionarni proces u širem smislu.

DEFINICIJA 3.10 (NEOVISNI PROCESI (*Independent Processes*))
Neka je zadan stohastički proces $X(t)$. Ako su slučajne varijable $X(t_i)$, $i = 1,\ldots,n$, za proizvoljno izabrane indekse t_i i n u cjelini neovisne slučajne varijable tako da vrijedi

$$F_X(x_1,\ldots,x_n;t_1,\ldots,t_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i;t_i) \tag{3.23}$$

onda $X(t)$ zovemo neovisnim stohastičkim procesom (independent stochastic process).

Neovisni procesi su tako procesi čije su slučajne varijable u potpunosti neovisne. Često se misli da je autokorelacija ovakvih procesa jednaka nuli. To je dakako krivo. Autokorelacija ovih funkcija se samo računa kao umnožak očekivanja varijabli u trenucima t i s, i ništa više.

DEFINICIJA 3.11 (PROCES SA STACIONARNIM NEOVISNIM PRIRASTIMA)
(Process with Stationary Independent Increments)

Stohastički proces $\{X(t), t \geq 0\}$ se zove stohastički proces s neovisnim prirastima ako za bilo koje $t_1, t_2, \ldots, t_n$ takve da je $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ vrijedi da su slučajne varijable:

$$X(0), X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

u cjelini neovisne.

Ako stohastički proces $\{X(t), t \geq 0\}$ ima neovisne priraste i dodatno $X(t)-X(s)$ ima jednaku razdiobu kao i $X(t+h)-X(s+h)$ za sve s, t i $h \geq 0$, $s < t$, onda je proces $X(t)$ stohastički proces sa stacionarnim neovisnim prirastima (process with stationary independent increments).

Iskažimo ovu definiciju drugim riječima. Uzmimo nekakav proces $X(t)$ i konstruirajmo novi proces $X(|t-s|) = X(t) - X(s)$ tako da je $t > s$. To je proces koji mjeri prirast stohastičkog procesa ako se vrijeme promijeni za vrijednost $t-s$. Ako je proces $X(|t-s|)$ neovisan i stacionaran u užem smislu, onda je $X(t)$ proces sa stacionarnim neovisnim prirastima.

DEFINICIJA 3.12 (MARKOVLJEVI PROCESI (*Markov Processes*))
Stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ je Markovljev proces ako je za sve $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ ispunjeno:

$$P\{X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t_{n+1}) \leq x_{n+1} | X(t_n) = x_n\} \tag{3.24}$$

Markovljev proces s diskretnim stanjima se zove Markovljev lanac (Markov chain). U Markovljevu lancu $\{X_n, n \geq 0\}$ za svaki n vrijedi:

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{3.25}$$

Jednakosti (3.24) i (3.25) su poznate pod nazivom Markovljevo svojstvo ili još svojstvo odsutnosti pamćenja (Markov property / memoryless property).

Markovljevi procesi su oni procesi koji nemaju pamćenje. Vjerojatnost događaja koji se ima zbiti u budućnosti ne ovisi o događajima koji su se dogodili u prošlosti, nego samo o sadašnjosti. Markovljevi procesi su izuzetno važni u Teoriji prometa. Posebno njihova podklasa - homogeni markovljevi procesi. Zbog izuzetne važnosti im posvećujemo sljedeće poglavlje.

DEFINICIJA 3.13 (NORMALNI PROCESI (*Normal Processes, Gaussian Processes*))
Za slučajni proces $\{X(t), t \in T\}$ kažemo da je normalan (ili Gaussov) proces, ako za bilo koji cijeli broj n i bilo koji podskup $\{t_1, \ldots, t_n\}$ indeksnog skupa T tog procesa, n slučajnih varijabli $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ imaju normalnu razdiobu n-tog reda.

Definicija 3.13 kaže da je združena razdioba nekih n slučajnih varijabli normalnog procesa (funkcija razdiobe n-tog reda) dana izrazom (3.4) n-dimenzionalna normalna (*Gaussova*) razdioba.

Trebali bismo znati opći oblik n-dimenzionalne normalne razdiobe, no u ovom auditornim vježbama za to nema vremena i mjesta pa ćemo samo dati izraz za razdiobu **neovisnog normalnog procesa**.

Budući da je proces neovisan, njegova združena razdioba (funkcija razdiobe n-tog reda) se može izračunati kao umnožak razdioba njegovih slučajnih varijabli. Dakle, gustoća razdiobe n-tog reda normalnog neovisnog procesa je jednaka:

$$f(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x_n-\mu_n}{\sigma_n}\right)^2} \tag{3.26}$$

DEFINICIJA 3.14 (STACIONARAN ERGODIČKI PROCES (*Stationary ergodic process*))
Neka je zadan stacionaran slučajni proces $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$. Neka je $x(t)$ jedna trajektorija slučajnog procesa (sample function). Neka je srednja vrijednost u vremenu uzorka $x(t)$ dana izrazom

$$\overline{x(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \tag{3.27}$$

Slično, neka je autokorelacijska funkcija $\overline{R}_X(\tau)$ od $x(t)$ definirana izrazom

$$\overline{R}_X(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot x(t+\tau) dt \tag{3.28}$$

Stacionarni slučajni proces $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ je ergodičan ako ima svojstvo da su vremenski prosjeci uzoraka procesa jednaki odgovarajućim statističkim prosjecima trajektorija ili prosjecima ansambla trajektorija, npr. $\overline{x(t)} = \mu_X$, $\overline{R}_X(\tau) = R_X(\tau)$, itd.

Stacionarni ergodički procesi su dakle oni procesi kod kojih na osnovu jedne ili ansambla trajektorija slučajnog procesa možemo izračunati statističke vrijednosti procesa (očekivanje, autokorelaciju i dr.) Opća definicija ergodičkog procesa varira ovisno o autoru i obično se daje za svaku vrstu stohastičkog procesa posebno. U sljedećem poglavlju ćemo definirati ergodičnost Markovljevog procesa na sasvim drugi način.

Budući da je teorija ergodičkih procesa iznimno zahtjevna, u većini primjena pretpostavljamo da su stacionarni procesi ergodični.

Dali smo sve potrebne definicije koje su nam potrebne da u potpunosti opišemo jedan stohastički proces. Opis podrazumijeva karakterizaciju i klasifikaciju slučajnog procesa. Pokažimo kako se to radi na nekoliko konkretnih primjera.

Primjer 3.1 Neka su $X_1, X_2, \ldots$ neovisne Bernoullieve varijable. Neka je funkcija vjerojatnosti svake slučajne varijable dana s $P(X_n = 1) = p$ i $P(X_n = 0) = q = 1 - p$. Familiju ovih slučajnih varijabli definirajmo kao Bernoulliev stohastički proces $\{X_n, n \geq 1\}$. Opišimo Bernoulliev proces i pronađimo tipičnu trajektoriju ovog procesa.

Prvo dajmo opis ovog slučajnog procesa s obzirom na skup indeksa i prostor stanja. Skup indeksa je prebrojiv (diskretan) skup, pa je Bernoulliev proces proces s diskretnim parametrom ili proces diskretan u vremenu. Zadnja tvrdnja vrijedi samo ako shvatimo izvođenje ovog procesa u vremenu. Prostor stanja je diskretan. Proces se može naći samo u dva stanja: u 0 ili u 1. Dakle ovo je proces s diskretnim stanjima - lanac.

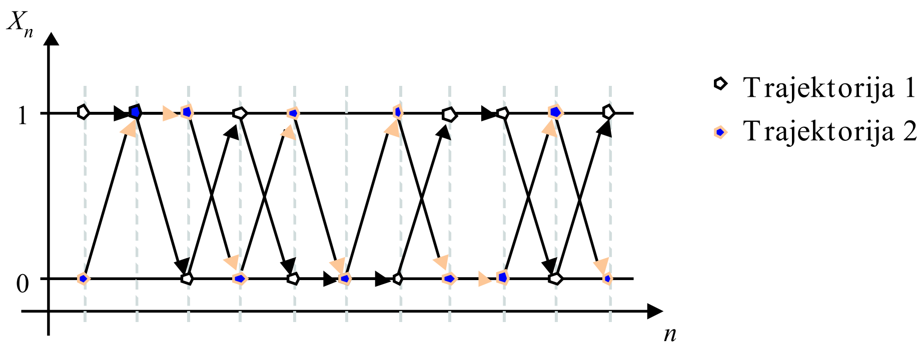
Dajmo sada vjerojatnostni opis ovog procesa. Tražimo funkciju razdiobe n-tog reda - združenu funkciju razdiobe. Budući da smo pretpostavili da su slučajne varijable procesa međusobno u cjelini neovisne, to združenu funkciju vjerojatnosti dobivamo kao umnožak funkcija vjerojatnosti svake pojedine varijable. Dakle:

$$p_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = P\{X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\} = P\{X(t_1) = x_1\} \cdot \ldots \cdot P\{X(t_n) = x_n\}$$

Ako je broj stanja "1" u skupu n varijabli jednak k, onda funkcija vjerojatnosti n-tog reda postaje jednaka binomnoj razdiobi, dakle:

$$p_X[\#(x_i = 1) = k,\ \#(x_i = 0) = n - k;\ t_1, ..., t_n] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Izračunom ove funkcije vjerojatnosti dali smo vjerojatnostni opis ovog stohastičkog procesa. Ostaje nam još samo odrediti neku konkretnu trajektoriju ovog procesa. To može biti bilo koji niz "jedinica" i "nula". Dvije moguće trajektorije su narisane na slici 3.2.



Slika 3.2: Trajektorije Bernoullieva stohastičkog procesa

PRIMJER 3.2 Neka su A i B dvije u cjelini neovisne slučajne varijable s očekivanjima $E[A] = a$, $E[B] = b$ i varijancama $Var[A] = \sigma_A^2$, $Var[B] = \sigma_B^2$. Neka je slučajan proces $X(t)$ definiran izrazom

$$X(t) = A + B \cdot t$$

za $0 \leq t < \infty$. Izračunajmo očekivanje, autokorelacijsku i autokovarijacijsku funkciju ovog procesa. Da li je ovaj proces stacionaran u bilo kojem smislu ?

Očekivanje procesa možemo izračunati po definiciji:

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A + B \cdot t] = E[A] + E[B \cdot t] = a + E[B] \cdot t = a + b \cdot t$$

Podsjetimo se posljedice definicije stacionarnog procesa u užem smislu (definicija 3.8): očekivanje stacionarnog procesa mora biti konstantno u vremenu. Budući da očekivanje ovog procesa nije konstantno u vremenu, onda proces *nije stacionaran* niti u užem niti u širem smislu.

Izračunajmo nadalje autokorelacijsku funkciju:

$$\begin{aligned} R_X(t,s) &= E[X(t) \cdot X(s)] = E[(A + B \cdot t) \cdot (A + B \cdot s)] = \\ &= E[A^2 + A \cdot B \cdot s + A \cdot B \cdot t + B^2 \cdot t \cdot s] = \\ &= E[A^2] + E[A \cdot B] \cdot (t + s) + E[B^2] \cdot t \cdot s = \\ &= \sigma_A^2 + a^2 + a \cdot b \cdot (t + s) + (\sigma_B^2 + b^2) \cdot t \cdot s \end{aligned}$$

Autokovarijacijsku funkciju dobivamo pomoću autokorelacijske funkcije na sljedeći način:

$$\begin{aligned} K_X(t,s) &= Cov[X(t), X(s)] = R_X(t,s) - \mu_X(t) \cdot \mu_X(s) = \\ &= \sigma_A^2 + a^2 + a \cdot b \cdot (t + s) + (\sigma_B^2 + b^2) \cdot t \cdot s - (a + b \cdot t) \cdot (a + b \cdot s) = \\ &= \sigma_A^2 + \sigma_B^2 \cdot t \cdot s \end{aligned}$$

PRIMJER 3.3 Neka su A i B dvije nekorelirane slučajne varijable s očekivanjima $E[A] = E[B] = 0$ i varijancama $\sigma_A^2 = \sigma_B^2 = 1$. Neka je definiran stohastički proces $X(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)$. Pokažimo da je proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

Prisjetimo se da je posljedica definicije procesa stacionarnog u širem smislu:

$$\begin{aligned} &E[X(t)] = \mu \qquad \text{(konstanta)} \\ &R_X(t,s) = E[X(t) \cdot X(s)] = R_X(|s - t|) \end{aligned}$$

Ukoliko pokažemo dva gornja svojstva ovog procesa, pokazali smo da je proces stacionaran u širem smislu. Izračunajmo zato prvo očekivanje i pokažimo da je ono neovisno o argumentu t.

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)] = \sin(\omega \cdot t) \cdot E[A] + \cos(\omega \cdot t) \cdot E[B] = 0$$

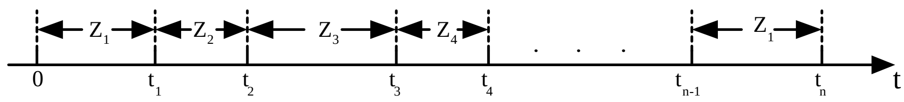
Očekivanje je tako konstanta i prvi uvjet je zadovoljen. Pokažimo sada još da autokorelacija dviju slučajnih varijabli ovog procesa ovisi samo o razlici vrijednosti argumenata procesa. Krećemo od pretpostavke da su A i B nekorelirani, tj. da je $R(A, B) = E[A \cdot B] = 0$. Primijetimo da nekoreliranost varijabli ne povlači i njihovu neovisnost. Neovisnost i nekoreliranost dviju slučajnih varijabli su potpuno različite kategorije. Izračunajmo:

$$\begin{aligned} R[X(t), X(s)] &= E\{[A \cdot \sin(\omega \cdot t) + B \cdot \cos(\omega \cdot t)] \cdot [A \cdot \sin(\omega \cdot s) + B \cdot \cos(\omega \cdot s)]\} = \\ &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot s) \cdot E[A^2] + \sin(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot s) \cdot E[AB] + \\ &+ \cos(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot s) \cdot E[AB] + \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot s) \cdot E[B^2] = |E[AB] = 0| = \\ &= \sin(\omega \cdot t) \cdot \sin(\omega \cdot s) \cdot E[A^2] + \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\omega \cdot s) \cdot E[B^2] = \\ &= \cos[\omega \cdot (t - s)] = R(|t - s|) \end{aligned}$$

Budući da je očekivanje konstantno u vremenu, a autokorelacija ovisi samo o razlici vremena, pokazali smo da je $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

3.3 Poissonov proces

Neka su t i s vremenske varijable iz kontinuiranog indeksnog skupa T. Promatrajmo određeni događaj A. Neka proces u kojem se realizira taj događaj počne u vremenu $t = 0$. Događaj A se slučajno realizira u trenucima t_i, $\quad i = 1, 2, \ldots$. Te trenutke zovemo *točke realizacije događaja* (*points of occurrence*) (Slika 3.3). Neka je svakoj realizaciji događaja A pridružena slučajna varijabla T_i koja mjeri vrijeme od početka izvođenja eksperimenta do trenutka kada se i-ti put realizirao događaj A. Kada se događaj A realizira i-ti put od početka izvođenja eksperimenta, onda varijabla T_i poprimi vrijednosti t_i. Neka je varijabla



Slika 3.3: Točke realizacije događaja A

Z_n definirana kao vrijeme koje protekne između dvije uzastopne realizacije događaja A u trenucima t_n i t_{n-1}.

$$Z_n = T_n - T_{n-1} \tag{3.29}$$

Slijed ovako definiranih slučajnih varijabli $\{Z_n, n \geq 1\}$ čini proces kojeg zovemo *međudolazni proces* (*interarrival process*). Ako su sve varijable Z_n međudolaznog procesa međusobno neovisne i imaju jednaku razdiobu, onda takav proces zovemo *proces obnavljanja* (*renewal process*). Sa slike 3.3 se lako vidi da je

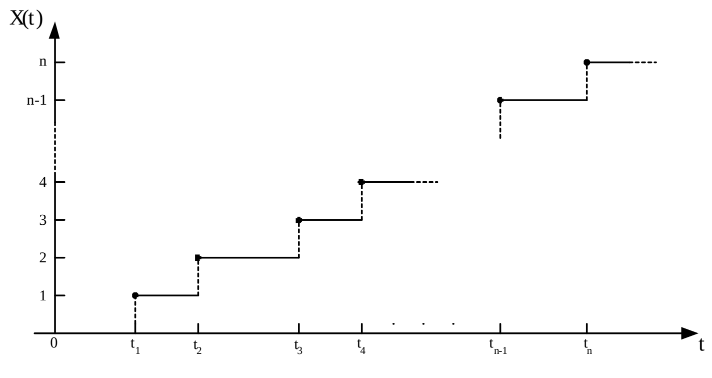
$$T_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n \tag{3.30}$$

Slučajan proces sastavljen od slučajnih varijabli T_i, $\{T_i, i \geq 0\}$ zovemo *dolazni proces* (*arrival process*).

Definicija 3.15 (Proces brojanja (*Counting Processes*))
Slučajni proces $\{X(t), t \geq 0\}$ je proces brojanja ako $X(t)$ predstavlja ukupni broj realizacija promatranog događaja u intervalu $[0, t]$. Da bi neki proces bio proces brojanja, on nužno mora zadovoljiti sljedeće uvjete:

$$\begin{aligned}
&X(t) \geq 0 \quad i \quad X(0) = 0\\
&X(t) \quad \textit{poprima vrijednosti iz skupa } \mathbb{N}\\
&X(s) \leq X(t) \quad za \quad s < t\\
&X(t) - X(s) \quad \textit{je jednak broju realizacija događaja u intervalu } (t, s)
\end{aligned}$$

Tipična trajektorija procesa brojanja prikazana je na slici 3.4.



Slika 3.4: Trajektorija procesa brojanja

Jedan od tipičnih procesa brojanja je *Poissonov proces.* On se javlja u velikom broju primjena. Zakonitosti koje ćemo za ovaj proces ustanoviti će nam kasnije pomoći pri izvodu funkcije vjerojatnosti za M/M/1 sustav posluživanja.

Promatrajmo ponovno događaj A koji se može jednom ili više puta realizirati unutar bilo kojeg vremenskog intervala. Neka je $X(s,t)$, $s < t$ slučajna varijabla koja mjeri broj realizacija događaja A unutar vremenskog perioda $[s,t]$. Dakle, razmatramo jednu slučajnu varijablu koja je funkcija dva parametra - s i t. Zahtijevajmo od slučajne varijable $X(s,t)$ sljedeća svojstva:

A Odsustvo pamćenja (*Memoryless Property*): $X(s,t)$ ne ovisi o broju i načinu događanja događaja A prije vremena s

B Homogenost u vremenu (*Homogeneity*): Slučajna varijabla $X(s,t)$ ovisi samo o duljini intervala $t-s$

C Regularnost (*Regularity*): Promotrimo infinitezimalno kratak vremenski interval h. Neka je vjerojatnost pojave **točno jednog** događaja unutar intervala h jednaka

$$P[X(s,s+h)=1]=\lambda\cdot h+o(h) \tag{3.31}$$

Vjerojatnost pojave više od jednog događaja unutar intervala h je jednaka

$$P[X(s,s+h)>1]=o(h) \tag{3.32}$$

Događaji su regularni, tj. ne mogu se dogoditi dva događaja A u istom trenutku. Parametar λ opisuje srednju učestalost pojavljivanja događaja A. $o(h)$ je *Landauov simbol* definiran sljedećim prijelazom:

$$\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0 \tag{3.33}$$

Fiksirajmo sada parametar s i izjednačimo ga s 0. Dobivamo novu varijablu $X(0,t)$ za neku konkretnu vrijednost od t. To je slučajna varijabla koja je funkcija samo parametra t, dakle $X(t)$. Ukoliko dopustimo da t varira preko nekog indeksnog skupa T, dobivamo familiju slučajnih varijabli koju definiramo kao *Poissonov proces.* Svaka slučajna varijabla $X(t_i)$ tako mjeri broj realizacija događaja A u intervalu duljine t_i.

DEFINICIJA 3.16 (POISSONOV PROCES (*Poisson Process*))
Proces brojanja $X(t)$ se zove Poissonov proces s intenzitetom $\lambda > 0$ ako za njega vrijede svojstva odsustva pamćenja, homogenosti u vremenu i regularnosti.

Primijetimo da zbog svojstva homogenosti u vremenu slijedi da ovaj proces ima sljedeće vrlo važno svojstvo:

$$X(t)-X(s)=X(s,t)=X(s-t). \tag{3.34}$$

Sljedeći teorem nam govori kako izračunati vjerojatnost $P(X(t,s))$

SVOJSTVO 3.1 (RAZDIOBA VARIJABLE POISSONOVA PROCESA)
Neka je proces brojanja $\{X(t), t\geq 0\}$ Poissonov stohastički proces s intenzitetom $\lambda > 0$. Funkcija vjerojatnosti slučajne varijable $X(t)$ dana je izrazom:

$$p_n(t)=P[X(t+s)-X(s)=n]=e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{3.35}$$

Dokaz:[1]

Počnimo od svojstva regularnosti. Ono kaže da je vjerojatnost da se unutar nekog infinitezimalno malog intervala h dogodi točno jedan događaj jednaka:

$$p_1(h) = \lambda \cdot h + o(h)$$

Prema istom svojstvu vjerojatnost da se unutar h dogodi više od jednog događaja jednaka je $o(h)$:

$$\sum_{i=2}^{\infty} p_i(h) = o(h)$$

Budući da vrijedi da je $\sum_{i=0}^{\infty} p_i(h) = 1$, to je

$$p_0(h) = 1 - \lambda \cdot h + o(h).$$

Dakako, iskorišteno je svojstvo Landauovog simbola. Funkcija $o(h)$ označava zanemarivu korekciju, pa je njen predznak nebitan.

Promatrajmo stanje Poissonovog procesa u trenutku $t+h$. Vjerojatnost da se nađe u stanju n jednaka je vjerojatnosti da je u trenutku t bio u stanju n i u periodu h se nije realizirao niti jedan događaj, ili je bio u stanju $n-1$ i u intervalu h se realizirao jedan događaj ili je bio u stanju $n-2$ i u intervalu h su se dogodila dva događaja itd. Primijetimo nadalje da su gore navedeni događaji međusobno disjunktni, a da je stanje procesa u trenutku t u cijelosti neovisno o broju realizacija u intervalu h. To slijedi iz svojstva odsustva pamćenja. Izrečeno možemo zapisati ovako:

$$\begin{aligned}
p_n(t+h) &= p_n(t) \cdot p_0(h) + p_{n-1}(t) \cdot p_1(h) + \sum_{i=2}^{n} p_{n-i}(t) \cdot p_i(h) \\
p_n(t+h) &= p_n(t) \cdot [1 - \lambda \cdot h + o(h)] + p_{n-1}(t) \cdot [\lambda \cdot h + o(h)] + \sum_{i=2}^{n} p_{n-i}(t) \cdot o(h) \\
p_n(t+h) - p_n(t) &= -p_n(t) \cdot \lambda \cdot h + p_{n-1}(t) \cdot \lambda \cdot h + o(h)
\end{aligned}$$

jer je $\sum_{i=2}^{n} p_{n-i}(t) \cdot o(h) + p_n(t) \cdot o(h) + p_{n-1}(t) \cdot o(h) = o(h)$ Podijelimo sada lijevu i desnu stranu s h i pronađimo limes kada h teži k 0. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} &= -p_n(t) \cdot \lambda + p_{n-1}(t) \cdot \lambda + \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} \\
\frac{d[p_n(t)]}{dt} &= -p_n(t) \cdot \lambda + p_{n-1}(t) \cdot \lambda
\end{aligned}$$

Slično možemo napisati i za $p_0(t)$:

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) &= p_0(t) \cdot [1 - \lambda \cdot h + o(h)] \\
p_0(t+h) - p_0(t) &= -p_0(t) \cdot \lambda \cdot h + o(h) \\
\lim_{h \to 0} \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} &= -p_0(t) \cdot \lambda + \lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} \\
\frac{d[p_0(t)]}{dt} &= -p_0(t) \cdot \lambda
\end{aligned}$$

Dobili smo sustav od dvije diferencijalno-rekurzivne jednadžbe. Najlakši način njihova rješavanja je pomoću Laplaceove transformacije. Prisjetimo se nekoliko transformacijskih parova:

$$\begin{aligned}
\frac{df(t)}{dt} &\mapsto -f(0) + s \cdot F(s) \\
\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &\mapsto \frac{1}{s^n} \\
f(t) \cdot e^{-\lambda \cdot t} &= F(s + \lambda)
\end{aligned}$$

[1] Tehnika računanja koja je primijenjena u dokazu bit će korištena u sljedećim poglavljima i zadacima.

Pri rješavanju sustava iskoristit ćemo i ove uvjete: $p_0(0) = 1$ i $p_n(0) = 0$. Transformirajmo:

$$\frac{d[p_n(t)]}{dt} = -p_n(t)\cdot\lambda + p_{n-1}(t)\cdot\lambda \mapsto -p_n(0) + s\cdot P_n(s) = -\lambda\cdot P_n(s) + \lambda\cdot P_{n-1}(s)$$

$$\frac{d[p_0(t)]}{dt} = -p_0(t)\cdot\lambda \mapsto -p_0(0) + s\cdot P_0(s) = -\lambda\cdot P_0(s)$$

Slijedi:

$$-p_0(0) + s\cdot P_0(s) = -\lambda\cdot P_0(s) \Rightarrow P_0(s) = \frac{1}{s+\lambda}$$

$$-p_n(0) + s\cdot P_n(s) = -\lambda\cdot P_n(s) + \lambda\cdot P_{n-1}(s) \Rightarrow P_n(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)\cdot P_{n-1}(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n\cdot P_0(s)$$

Kombiniranjem dobivamo:

$$P_n(s) = \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^n\cdot P_0(s) = \frac{\lambda^n}{(s+\lambda)^{n+1}}$$

Prema drugom i trećem transformacijskom paru slijedi:

$$p_n(t) = \lambda^n\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot\frac{t^n}{n!} = e^{-\lambda\cdot t}\cdot\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Q.E.D.

U literaturi se dosta često daje jednostavnija definicija Poissonova procesa. Možemo je zvati standardnom definicijom Poissonova procesa.

Definicija 3.17 (Standardna definicija Poissonovog procesa)
Proces brojanja $X(t)$ se zove Poissonov proces s intenzitetom λ ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1. $X(0) = 0$,
2. *$X(t)$ ima neovisne priraste,*
3. *Broj realizacija događaja u bilo kojem intervalu $[s,t]$ $X(t,s)$ ima funkciju vjerojatnosti:*

$$P[X(t,s) = n] = e^{-\lambda\cdot(t-s)}\cdot\frac{[\lambda\cdot(t-s)]^n}{n!} \tag{3.36}$$

Primjer 3.4 Opišimo Poissonov proces s obzirom na skup indeksa i prostor stanja. Stanje procesa se može dati za svaki indeks $t \in [0,\infty\rangle$, pa je to proces s kontinuiranim parametrom. Proces se može naći samo u stanjima koja po vrijednosti odgovaraju elementima iz $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Stoga je prostor stanja diskretan, pa proces ima diskretna stanja (lanac).

Dajmo sada vjerojatnostni opis ovog procesa. Tražimo funkciju razdiobe n-tog reda - združenu funkciju razdiobe. Iz svojstva

$$X(t) - X(s) = X(s,t)$$

slijedi da je

$$P[X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2] = P[X(t_1) = k_1, X(t_2) - X(t_1) = k_2 - k_1], \qquad k_1 \le k_2, t_1 \le t_2$$

Funkcija razdiobe n-tog reda za $t_1 \le t_2 \le t_3 \le \ldots \le t_n$ i $k_1 \le k_2 \le k_3 \le \ldots \le k_n$ je

$$\begin{aligned}&P[X(t_1) = k_1, X(t_2) = k_2, \ldots, X(t_n) = k_n] =\\ &= P[X(t_1) = k_1, X(t_2) - X(t_1) = k_2 - k_1, \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1}) = k_n - k_{n-1}] = \ldots\end{aligned}$$

Budući da Poissonov proces ima neovisne priraste, to su gornji događaji u cjelini neovisni pa slijedi:

$$\begin{aligned}
\ldots &= P[X(t_1)=k_1]\cdot P[X(t_2)-X(t_1)=k_2-k_1]\cdot\ldots\cdot P[X(t_n)-X(t_{n-1})=k_n-k_{n-1}]=\\
&= e^{-\lambda\cdot t_1}\cdot\frac{(\lambda\cdot t_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda\cdot(t_2-t_1)}\cdot\frac{[\lambda\cdot(t_2-t_1)]^{(k_2-k_1)}}{(k_2-k_1)!}\cdot\ldots\cdot e^{-\lambda\cdot(t_n-t_{n-1})}\cdot\frac{[\lambda\cdot(t_n-t_{n-1})]^{(k_n-k_{n-1})}}{(k_n-k_{n-1})!}=\\
&= \lambda^{k_n}\cdot e^{-\lambda\cdot t_n}\cdot\frac{t_1^{k_1}\cdot(t_2-t_1)^{(k_2-k_1)}\cdot\ldots\cdot(t_n-t_{n-1})^{(k_n-k_{n-1})}}{k_1!\cdot(k_2-k_1)!\cdot\ldots\cdot(k_n-k_{n-1})!}
\end{aligned}$$

PRIMJER 3.5 Riješimo sada jedan problem koji naočigled nije u neposrednoj vezi s Poissonovim procesom. Odredimo gustoću razdiobe slučajne varijable X koja je jednaka zbroju n kontinuiranih slučajnih varijabli $X_i,\ i=1,2,\ldots,n$ koje se sve ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ. Zbog kompliciranih izraza za karakterističnu funkciju, iskoristit ćemo konvoluciju n gustoća razdioba i utvrditi gustoću razdiobe zbroja varijabli:

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,\quad X_i\sim E[\lambda]$$

Oznaka $X_i\sim E[\lambda]$ označava da se X_i ravna po eksponencijalnoj razdiobi. Izračunajmo gustoću razdiobe zbroja dvije, tri, četiri, $\ldots,n$ varijabli:

$$\begin{aligned}
f_{X_1+X_2}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(z)\cdot f_{X_2}(t-z)dz=\\
&= \int_0^t \lambda\cdot e^{-\lambda\cdot z}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot(t-z)}dz=\lambda^2\cdot e^{-\lambda\cdot t}\int_0^t dz=\\
&= t\cdot\lambda^2\cdot e^{-\lambda\cdot t}\\
f_{(X_1+X_2)+X_3}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1+X_2}(z)\cdot f_{X_3}(t-z)\,dz=\\
&= \int_0^t z\cdot\lambda^2\cdot e^{-\lambda\cdot z}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot(t-z)}\,dz=\\
&= \lambda^3\cdot e^{-\lambda\cdot t}\int_0^t z\,dz=\frac{t^2\cdot\lambda^3\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{1\cdot 2}\\
f_{(X_1+X_2+X_3)+X_4}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1+X_2+X_3}(z)\cdot f_{X_4}(t-z)\,dz=\\
&= \int_0^t \frac{z^2\cdot\lambda^3\cdot e^{-\lambda\cdot z}}{1\cdot 2}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot(t-z)}\,dz=\\
&= \frac{\lambda^4\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{1\cdot 2}\int_0^t z^2\,dz=\\
&= \frac{t^3\cdot\lambda^4\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{1\cdot 2\cdot 3}\\
&\ldots\\
f_{(X_1+\ldots+X_{n-1})+X_n}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1+\ldots+X_{n-1}}(z)\cdot f_{X_n}(t-z)\,dz=\\
&= \int_0^t \frac{z^{n-2}\cdot\lambda^{n-1}\cdot e^{-\lambda\cdot z}}{(n-2)!}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot(t-z)}\,dz=\\
&= \frac{t^{n-1}\cdot\lambda^n\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{\Gamma(n)}
\end{aligned}$$

U općem slučaju vrijedi:

$$f_X(t)=\frac{t^{n-1}\cdot\lambda^n\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{\Gamma(n)}$$

Zaključujemo da slučajna varijabla koja je jednaka zbroju n slučajnih varijabli koje se ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi ima gama razdiobu s parametrima λ i n.

SVOJSTVO 3.2 (KONSTRUKCIJA POISSONOVOG PROCESA)
Neka su intervali Z_i između uzastopnih realizacija nekog događaja A neovisni i raspodijeljeni po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ, $Z_i \sim E[\lambda]$ i neka je $X(t)$ proces brojanja događaja A. $X(t)$ je Poissonov proces s intenzitetom λ.

Dokaz:
Neka je $T_n = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n$ vrijeme čekanja do n-te realizacije događaja A. Vrijedi sljedeće:

$$\tilde{F}_{X(t)}(n) = P[X(t) < n] = P[T_n > t] = 1 - P[T_n \leq t] = 1 - F_{T_n}(t)$$

U primjeru 3.5 smo ustanovili da T_n ima gama razdiobu. Iskoristimo jednakost

$$f_{T_n}(t) = \frac{t^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\Gamma(n)}$$

$$\begin{aligned}
F^{\sim}_{X(t)}(n) &= 1 - \int_0^t \frac{t^{n-1} \cdot \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\Gamma(n)} dt = \left| \begin{array}{c} y = \lambda \cdot t \\ dy = \lambda\, dt \end{array} \right| = 1 - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda t} y^{n-1} \cdot e^{-y} dy = \\
&= \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1} \cdot e^{-y} dy}{\Gamma(n)} - \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\lambda t} y^{n-1} \cdot e^{-y}\, dy = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\lambda t}^{\infty} y^{n-1} \cdot e^{-y}\, dy = \\
&= \left| \begin{array}{c} parcijalno \\ u = y^{n-1} \\ dv = e^{-y}\, dy \end{array} \right| = \frac{\left[-y^{n-1} \cdot e^{-y}\right]\Big|_{\lambda t}^{\infty}}{(n-1)!} + \frac{n-1}{(n-1)!} \int_{\lambda t}^{\infty} y^{n-2} \cdot e^{-y} dy = \\
&= \frac{(\lambda t)^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \int_{\lambda t}^{\infty} y^{n-2} \cdot e^{-y} dy = \\
&= \frac{(\lambda t)^{n-1} \cdot e^{-\lambda t}}{(n-1)!} + \frac{(\lambda t)^{n-2} \cdot e^{-\lambda t}}{(n-2)!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^1 \cdot e^{-\lambda t}}{1!} + \frac{1}{0!} \int_{\lambda t}^{\infty} y^0 \cdot e^{-y}\, dy = \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}}{i!}
\end{aligned}$$

Potražimo sada vjerojatnost da se u intervalu t realiziralo točno n događaja:

$$\begin{aligned}
p_n(t) = P[X(t) = n] &= F^{\sim}_{X(t)}(n+1) - F^{\sim}_{X(t)}(n) = \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}}{i!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^i \cdot e^{-\lambda t}}{i!} = \frac{(\lambda t)^n \cdot e^{-\lambda t}}{n!}
\end{aligned}$$

Q.E.D.

SVOJSTVO 3.3 (IZRAŽENO MARKOVLJEVO SVOJSTVO POISSONOVOG PROCESA)
Vrijeme između dvije uzastopne realizacije događaja u trenucima t_n i t_{n+1} Poissonovog procesa ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Neka je s proizvoljna vrijednost takva da je $s > 0$. Slučajna varijabla koja mjeri vrijeme između trenutaka $(t_n + s)$ i t_{n+1} također ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Ovo je Markovljevo svojstvo Poissonovog procesa.

Prethodni teorem kaže da bez obzira kad se uključili u promatranje nekog Poissonovog procesa, vrijeme do realizacije prvog sljedećeg događaja se ravna po eksponencijalnoj razdiobi. Budući događaji tako ne ovise o onom što se dogodilo u prošlosti nego samo o onome što se događa sada. To je Markovljevo svojstvo.

PRIMJER 3.6 Ribič sjedi na obali rijeke i lovi ribe (*franc.: les poissons*). Želi uloviti 5 riba. Ako je intenzitet ulova riba 3 ribe na sat, kolika je vjerojatnost da će morati čekati više od dva sata da ulovi 5 riba.

$$\lambda = 3 \ \text{ ribe/h}$$

Vrijeme do ulova pete ribe se ravna po gama razdiobi s parametrima $\lambda = 3$ i $n = 5$.

$$T_5 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 \sim \Gamma(3,5)$$

$$f_{T_5}(t) = \frac{t^4 \cdot \lambda^5 \cdot e^{-\lambda t}}{4!} = \frac{81}{8} t^4 e^{-\lambda t}$$

$$P[T_5 > 2] = 1 - P[T_5 \leq 2] = 1 - \int_0^2 f_{T_5}(t)\,dt = 1 - \frac{81}{8}\int_0^2 t^4 \cdot e^{-\lambda t}\,dt = 1 - \frac{81}{8} \cdot I_4$$

$$I_4 = \int_0^2 t^4 \cdot e^{-\lambda t}\,dt = \left| \begin{array}{cc} u = t^4 & dv = e^{-\lambda t}\,dt \\ du = 4t^3 dt & v = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \\ dt = \frac{du}{4t^3} & \end{array} \right| =$$

$$= \left(-t^4 \cdot \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \right) \Bigg|_0^2 + \frac{4}{\lambda} \int_0^2 t^3 e^{-\lambda t} dt = -2^4 \cdot \frac{e^{-3 \cdot 2}}{3} + \frac{4}{3} \cdot I_3$$

$$I_3 = \int_0^2 t^3 \cdot e^{-\lambda t} dt = \ldots = -2^3 \cdot \frac{e^{-3 \cdot 2}}{3} + \frac{3}{3} \cdot I_2$$

$$I_2 = \int_0^2 t^2 \cdot e^{-\lambda t} dt = \ldots = -2^2 \cdot \frac{e^{-3 \cdot 2}}{3} + \frac{2}{3} \cdot I_1$$

$$I_1 = \int_0^2 t^1 \cdot e^{-\lambda t} dt = \ldots = -2^1 \cdot \frac{e^{-3 \cdot 2}}{3} + \frac{1}{3} \cdot I_0$$

$$I_0 = \int_0^2 e^{-\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \Bigg|_0^2 = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\left[e^{-2\lambda}\right] = \frac{1}{3} - \frac{1}{3e^6}$$

$$P[T_5 > 2] = 1 - \frac{81}{8}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{3}{3}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3e^6} \right) - \frac{2}{3e^6} \right) - \frac{4}{3e^6} \right) - \frac{8}{3e^6} \right) - \frac{16}{3e^6} \right) = 0.285$$

Ranije smo pokazali da je zbroj Poissonovih slučajnih varijabli varijabla koja ima Poissonovu razdiobu ali s parametrom λ jednakom zbroju istih parametara svih ostalih varijabli. Sljedeći teorem koji tvrdi i da je zbroj Poissonovih procesa opet Poissonov proces.

SVOJSTVO 3.4 (ZBROJ POISSONOVIH PROCESA)
Zbroj dvaju neovisnih Poissonovih procesa s intenzitetima λ_1, λ_2 je Poissonov proces s intenzitetom $\lambda_1 + \lambda_2$.

Dokaz:
Neka su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ dva neovisna Poissonova procesa s parametrima λ_1 i λ_2. Definirajmo novi proces $X(t)$ koji je jednak zbroju prethodna dva i izračunajmo mu jednodimenzionalnu razdiobu.

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t)$$

$$P(X(t) = n) = \sum_{k=0}^{n} P[X_1(t) = k, X_2(t) = n-k] = \left| \begin{array}{c} \textit{procesi su neovisni} \\ \textit{te vrijedi} \ldots \end{array} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P[X_1(t) = k] \cdot P[X_2(t) = n-k] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^k e^{-\lambda_1 t}}{k!} \cdot \frac{(\lambda_2 t)^{n-k} e^{-\lambda_2 t}}{(n-k)!} =$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} t^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda_1^k \cdot \lambda_2^{n-k} = \frac{[t \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)]^n \cdot e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{n!}$$

Razdioba novog procesa je Poissonova, a to smo i trebali pokazati.

Q.E.D.

DEFINICIJA 3.18 (PROCES S GOMILANJEM (POISSONOV PROCES S GOMILANJEM))
Promatrajmo nekakav događaj A. Neka se A može realizirati više puta u istom trenutku. Proces brojanja koji broji događaje A zove se ***proces s gomilanjem****.*

Ako je zadan Poissonov proces kod kojeg je dopušteno da se više događaja realizira u istom trenutku, onda takav proces nazivamo Poissonov proces s gomilanjem. Vremena između pojavljivanja grupe događaja su raspodijeljena po eksponencijalnoj razdiobi.

Dakle, procesi s gomilanjem su oni procesi brojanja kod kojih je dopušteno da se odjednom realizira više događaja. Vrijeme između realizacija sada postaje vrijeme između realizacija skupina događaja. U slučaju da je to vrijeme raspodijeljeno po eksponencijalnoj razdiobi, takav proces zovemo Poissonov proces s gomilanjem. Postoji dosta primjera ovakvih procesa. Na primjer, proces dolaska kupaca u trgovinu ili broj uništenih automobila u prometnim nezgodama. Kada kupci dolaze u trgovinu, vrijeme između njihova dolaska se može ponašati po eksponencijalnoj razdiobi, ali kupci mogu stizati individualno ili u skupinama. Isto tako, vrijeme između prometnih nezgoda se može ponašati po eksponencijalnoj razdiobi, ali broj vozila koji sudjeluje u nezgodi može biti jednak ili veći od 1.

Sljedeći teorem će nam dati matematičku metodu izračunavanja razdiobe procesa s gomilanjem. Korištenje tog teorema demonstriramo primjerom.

SVOJSTVO 3.5 (RAZDIOBA PROCESA S GOMILANJEM)
Neka je $N(t)$ Poissonov proces s parametrom λ. Neka i-ta realizacija događaja A Poissonovog procesa znači realizaciju točno X_i istovjetnih događaja B u trenutku t_i. Neka slučajna varijabla X_i ima funkciju vjerojatnosti $P\{X_i = k\} = p_k$, za $k = 1, 2, \dots$ Neka brojač $M(t)$ broji sve događaje B koji su se realizirali do trenutka t. Ona je jednaka zbroju svih varijabli X_i kojih u trenutku t ima točno $N(t)$:

$$M(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Funkcija izvodnice slučajne varijable $M(t)$ jednaka je kompoziciji funkcije izvodnice Poissonove slučajne varijable $X(t)$ i funkcije izvodnice slučajne varijable X_i:

$$\Psi_{M(t)}(z) = \Psi_{X(t)}[\Psi_{X_i}(z)]$$

gdje je:

$$\Psi_{M(t)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{M(t)} \cdot z^k$$

$$\Psi_{X(t)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{X(t)} \cdot z^k$$

$$\Psi_{X_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k^{X_i} \cdot z^k$$

PRIMJER 3.7 Studenti elektrotehnike pristižu ujutro na fakultet pojedinačno ili u paru s jednakom vjerojatnošću. Kolika je vjerojatnost da su pristigla 4 studenta u tri minute ako je intenzitet dolazaka skupina $\lambda = 1/3$ skupine u minuti.

U ovom zadatku imamo slučajan broj dolazaka studenata u minuti, a još k tome slučajan broj ljudi po dolasku. To je dobro poznati problem slučajnog zbroja. Prisjetimo se izreke prethodnog teorema. Funkcija vjerojatnosti varijable X_i dana je s

$$p_k = P(X_i = k) = \begin{cases} 1/2 & k = 1, 2 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Izračunajmo funkciju izvodnicu ove slučajne varijable, i funkciju izvodnicu Poissonove slučajne varijable:

$$\Psi_{X_i}(z) = \sum_{k=1}^{2} p_k \cdot z^k = \frac{z+z^2}{2}$$
$$\Psi_{X(t)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot z^k = e^{\lambda t \cdot (z-1)}$$

Izračunajmo kompoziciju ovih funkcija kako bismo dobili funkciju izvodnicu varijable $M(t)$ koja broji ukupan broj studenata koji su pristigli unutar vremena t.

$$\Psi_{M(t)}(z) = \Psi_{X(t)}[\Psi_{X_i}(z)] = e^{\lambda t \cdot \quad \frac{z+z^2}{2} - 1}$$

Derivirajući ovu funkciju 4 puta za redom po z i dijeleći je s 4! dobivamo traženu vjerojatnost:

$$\Psi^{(4)}_{M(t)}(z) = \frac{\left(e^{\lambda t \cdot \quad \frac{z+z^2}{2} - 1}\right)^{(4)}}{4!} =$$
$$= \frac{1}{2^4 4!} (\lambda t)^2 e^{\lambda t \cdot \left[\frac{z+z^2}{2} - 1\right]} \cdot \left[2 \cdot 4! + 24 \cdot \lambda t \cdot (1+2z)^2 + (\lambda t)^2 \cdot (1+2z)^4\right]$$

Uz $t = 3$, $z = 0$ i $\lambda = 1/3$ dobivamo da je: $P[M(3\,\text{min}) = 4] = \dfrac{25}{24e^2} \approx 0.14097$

Za kraj ovog dijela riješimo još jedan poučan problem:

Primjer 3.8 Promatrajmo dva neovisna Poissonova procesa $X_A(t)$ i $X_B(t)$ s intenzitetima a i b respektivno. Neka se $X_A(t)$ sastoji od realizacijâ događaja A, $X_B(t)$ od realizacijâ događaja B. Neka je N slučajna varijabla koja mjeri broj realizacija događaja A između dvije uzastopne realizacije događaja B. Nađimo razdiobu slučajne varijable N.

Sa Z označimo vrijeme koje protekne između dviju uzastopnih realizacija događaja B. Z zasigurno ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom b:

$$f_Z(t) = b \cdot e^{-bt}$$

Ako je varijabla Z poprimila vrijednost t, onda je vjerojatnost da je unutar tog intervala bilo k realizacija događaja A jednaka

$$P[N = k|Z = t] = e^{-at} \cdot \frac{(at)^k}{k!}$$

Vjerojatnost $P[N = k]$ bismo mogli izračunati ovako:

$$P[N = k] = P[(N = k) \cdot U] = P[(N = k) \cdot (Z = t : 0 < t < \infty)]$$

Siguran događaj U razložili smo na "zbroj" svih mogućih vrijednosti od Z. No, problem je što tih vrijednosti ima beskonačno mnogo, a još k tome taj prostor je kontinuiran - nikakvim zbrajanjem ne možemo zbrojiti sve moguće vrijednosti od Z. No, promotrimo sljedeći zbroj:

$$\sum_{i=0}^{\infty} P\left[(N = k) \cdot (t_i \le Z < t_i + \Delta_i)\right] = \sum_{i=0}^{\infty} P\left[N = k|t_i \le Z < t_i + \Delta_i\right] \cdot P\left[t_i \le Z < t_i + \Delta_i\right] =$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} P\left[N = k|t_i \le Z < t_i + \Delta_i\right] \cdot \left[F_Z(t_i + \Delta_i) - F_Z(t_i)\right]$$

gdje je $t_i = \sum_{j=0}^{i-1} \Delta_i$. Neka je k tome još $\Delta = \max_i(\Delta_i, i = 1, 2, ..)$. Zasigurno vrijedi sljedeće:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{F_Z(t_i + \Delta_i) - F_Z(t_i + \Delta_i)}{\Delta_i} = \frac{dF_Z(t)}{dt} = f_Z(t) \Rightarrow dF_Z(t) = f_Z(t) \cdot dt$$

gdje je $t = t_i$ Graničnim prijelazom dalje dobivamo:

$$P(N=k) = \lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=0}^{\infty} P\left[N=k|t_i \le Z < t_i+\Delta_i\right]\cdot\frac{[F_Z(t_i+\Delta_i)-F_Z(t_i)]}{\Delta}\cdot\Delta = \left|\begin{matrix}\text{Riemanov}\\ \text{Integral}\end{matrix}\right| =$$
$$= \int_0^{\infty} P(N=k|Z=t)\cdot f_Z(t)\,dt = \int_0^{\infty}\frac{e^{-at}\cdot(at)^k}{k!}be^{-bt}\,dt =$$
$$= \frac{a^k b}{k!}\int_0^{\infty} t^k e^{-(a+b)t}\,dt = \frac{a^k\cdot b}{(a+b)^{k+1}} = \left(\frac{b}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a}{a+b}\right)^k$$

Vidimo da se broj realizacija jednog Poissonovog procesa u pauzi drugog procesa ravna po geometrijskoj razdiobi.

3.4 Zadaci za vježbu

3.4.1 Opis stohastičkih procesa

Zadatak 3.1 Neka je $S_1, S_2, \ldots$ niz neovisnih identično raspodijeljenih slučajnih varijabli s razdiobom:

$$S \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

za svaki S_i gdje je $q = 1-p$. Neka je slučajna varijabla

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} S_i, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad X_0 = 0$$

Familija varijabli $\{X_i, i \ge 0\}$ je slučajni proces kojeg zovemo jednostavan slučajni hod (*simple random walk*) $X(n)$ u jednoj dimenziji.

(a) Opišite jednostavan slučajni hod $X(n)$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

Zadatak 3.2 Promatrajte stohastički proces definiran u zadatku 3.1. Definirajmo novi proces na sljedeći način:

$$X(t) = X_n, \quad n \le t < n+1$$

(a) Opišite proces $X(t)$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

Zadatak 3.3 Neka je stohastički proces $X(t)$ zadan kao

$$X(t) = Y\sin(\omega t), \quad t \ge 0$$

gdje je Y jednoliko raspodijeljena između 0 i 1.

(a) Opišite proces $X(t)$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Skicirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

ZADATAK 3.4 Stranke dolaze u poštanski ured u slučajnim vremenskim trenucima. Kada stanu u red, moraju čekati određeno vrijeme kako bi došli do šaltera. Neka slučajne varijable X_i mjere vrijeme koje i-ta stranka čeka provede u redu.

(a) Opišite proces $X(i) = \{X_i, \quad i \geq 1\}$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

ZADATAK 3.5 Asistenti jednog fakulteta svaki dan poslije posla idu u omiljeni kafić i piju pivo. Neka slučajna varijabla X_i označava količinu piva kojeg asistenti popiju i-tog dana.

(a) Opišite proces $X(i) = \{X_i, \quad i \geq 1\}$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

ZADATAK 3.6 Broj asistenata na jednom zavodu jednog fakulteta je N. Svaki dan asistenti jedu sendviče. Neka slučajna varijabla X_i označava broj sendviča koji asistenti pojedu i-tog dana.

(a) Opišite proces $X(i) = \{X_i, \quad i \geq 1\}$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

ZADATAK 3.7 Neka su A i B neovisne Bernoullieve slučajne varijable s vrijednostima 0 i 1. Slučajni proces $X(t)$ je zadan izrazom:

$$X(t) = A + B \cdot t, \quad t \geq 0$$

(a) Opišite proces $X(i) = \{X_i, \quad i \geq 1\}$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Skicirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

ZADATAK 3.8 Ribič peca ribu. Z_n je slučajna varijabla koja mjeri vrijeme između ulova n-te i $(n-1)$-ve ribe. Familija ovih slučajnih varijabli čini proces međudolaznih (bolje reći međuulovnih) vremena.

(a) Opišite proces $Z(i) = \{Z_i, \quad i \geq 1\}$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

ZADATAK 3.9 Avioni slijeću na pistu u slučajnim trenucima dovozeći slučajan broj putnika. Neka je $\{N(t), \quad t \geq 0\}$ slučajni proces koji mjeri broj putnika koji je pristigao s avionom do trenutka t.

(a) Opišite proces $\{N(t), \quad t \geq 0\}$ (bez eksplicitnog računanja vjerojatnosti),

(b) Konstruirajte tipičnu trajektoriju ovog procesa.

3.4.2 Karakterizacija stohastičkih procesa

ZADATAK 3.10 Promatrajmo Bernoulliev proces zadan primjerom 3.1. Neka je nekakva konkretna trajektorija dosegla do realizacije $n = 10$, i iznosi:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X_n	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0

Tablica 3.1: Uz zadatak 3.10

Izračunajte vjerojatnost realizacije zadane trajektorije.

ZADATAK 3.11 Neka je stohastički proces $X(t)$ zadan izrazom:

$$X(t) = Y\cos(\omega \cdot t), \quad t \geq 0$$

gdje je Y slučajna varijabla jednoliko raspodijeljena između 0 i 1. Izračunajte funkciju gustoće razdiobe za $X(t)$ u trenucima $t = 0,\ \frac{\pi}{4\omega},\ \frac{\pi}{2\omega},\ \frac{\pi}{\omega}$. Da li se prostor stanja ovog procesa mijenja ovisno o indeksnom parametru t?

ZADATAK 3.12 Razmatrajte jednostavan slučajan hod definiran u zadatku 3.1. Neka su Bernoullieve slučajne varijable u cijelosti neovisne i raspodijeljene prema funkciji vjerojatnosti:

$$S \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Izračunajte funkciju vjerojatnosti prvog reda stohastičkog procesa X kakav je definiran u zadatku 3.1.

ZADATAK 3.13 Razmatrajte jednostavan slučajan hod definiran u zadatku 3.1. Neka su Bernoullieve slučajne varijable u cijelosti neovisne i raspodijeljene prema funkciji vjerojatnosti:

$$S \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Izračunajte vjerojatnost da je $X(n) = -2$ nakon četiri koraka za X kakav je definiran u 3.1.

ZADATAK 3.14 Razmatrajte jednostavan slučajan hod definiran u zadatku 3.1. Neka su Bernoullieve slučajne varijable u cijelosti neovisne i raspodijeljene prema funkciji vjerojatnosti:

$$S \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Izračunajte očekivanje i varijancu stohastičkog procesa $\{X(n),\ n \geq 1\}$.

ZADATAK 3.15 Razmatrajte jednostavan slučajan hod definiran u zadatku 3.1. Neka su Bernoullieve slučajne varijable u cijelosti neovisne i raspodijeljene prema funkciji vjerojatnosti:

$$S \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$$

Izračunajte autokorelacijsku funkciju $R_X(m, n)$ i varijancu stohastičkog procesa $\{X(n),\ n \geq 1\}$.

ZADATAK 3.16 Razmatrajte stohastički proces definiran u zadatku 3.3, dakle:

$$X(t) = Y \sin(\omega \cdot t), \quad t \geq 0$$

gdje je Y jednoliko raspodijeljena između 0 i 1. Izračunajte očekivanje $E[X(t)]$, autokorelacijsku $R_X(t,s)$ i autokovarijacijsku $K_X(t,s)$ funkciju ovog procesa.

ZADATAK 3.17 Razmatrajte stohastički proces s diskretnim parametrom $X(n) = \{X_n,\ n \geq 1\}$ gdje su X_n u cijelosti neovisne slučajne varijable jednako raspodijeljene s funkcijom razdiobe $F_X(x)$, očekivanjem μ i varijancom σ^2. Izračunajte:

(a) Združenu funkciju vjerojatnosti n-tog reda od $X(n)$,

(b) Očekivanje od $X(n)$,

(c) Autokorelacijsku funkciju $R_X(n,m)$ od $X(n)$,

(d) Autokovarijacijsku funkciju $K_X(n,m)$ od $X(n)$.

ZADATAK 3.18 Razmatrajte proces kontinuiranog praćenja napona uređaja koji generira sinusoidalni signal $U(t)$ amplitude A. U uređaju postoji izvor šuma koji generira dodatni napon $X(t)$, a koji se ravna po normalnoj razdiobi s očekivanjem $E[X] = 0$ i varijancom $Var[X] = \sigma^2$. Mjereni napon je proces $Y(t)$, gdje je $Y(t)$ definiran izrazom:

$$Y(t) = U(t) + X(t), U(t) = A \sin(\omega \cdot t), \quad X(t) \sim N[0, \sigma^2]$$

Izračunajte funkciju razdiobe prvog reda ovog slučajnog procesa.

3.4.3 Klasifikacija stohastičkih procesa

ZADATAK 3.19 Pokažite da je stohastički proces koji je stacionaran do reda n također stacionaran do svih stupnjeva nižih od n. (naputak: razmotrite što se događa s vjerojatnošću $P(X < x)$ kada x teži k ∞).

ZADATAK 3.20 Neka je $\{X_n,\ n \geq 0\}$ niz u cjelini neovisnih jednako raspodijeljenih slučajnih varijabli takvih da je $E[X_n] = 0$ i $Var[X_n] = 1$. Pokažite da je $\{X_n,\ n \geq 0\}$ stohastički proces stacionaran u širem smislu (WSS).

ZADATAK 3.21 Promatrajte stohastički proces $X(t)$ koji je definiran kao

$$X(t) = A \cos(\omega \cdot t) + B \sin(\omega \cdot t)$$

gdje su A i B kontinuirane slučajne varijable, a ω je konstanta. Koji uvjeti moraju biti zadovoljeni da $X(t)$ bude stohastički proces stacionaran u širem smislu (WSS).
(Napomena: morate dati uvjete na očekivanje, varijancu i autokorelaciju varijabli A i B).

ZADATAK 3.22 Neka je $X(t)$ stohastički proces definiran kao

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos(u_k t) + B_k \sin(u_k t)]$$

gdje su A_k i B_k nekorelirane slučajne varijable s očekivanjem 0 i varijancom σ^2. Računanjem očekivanja i varijance pokažite da je ovaj proces stacionaran u širem smislu (WSS).

ZADATAK 3.23 Neka je $X(t)$ stohastički proces definiran kao

$$X(t) = A \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

gdje su A i ω konstante, a φ slučajna varijabla jednoliko raspodijeljena u području $[-\pi, \pi]$. Pokažite da je ovaj proces stacionaran u širem smislu (WSS).

ZADATAK 3.24 Neka je $\{X(t),\ t \geq 0\}$ stohastički proces sa stacionarnim neovisnim prirastima. Uz pretpostavku da je $X(0) = 0$, pokažite da vrijedi:

$$E[X(t)] = E[X(1)] \cdot t$$

(Napomena: Počnite izračunavajući $E[X(t+s)] = E[X(t+s) - X(0)]$. Imajte na umu da svi prirasti imaju jednako očekivanje. Jedino rješenje funkcijske jednadžbe $f(t+s) = f(t) + f(s)$ je $f(t) = c \cdot t$).

ZADATAK 3.25 Neka je $\{X(t), t \geq 0\}$ stohastički proces sa stacionarnim neovisnim prirastima. Uz pretpostavku da je $X(0) = 0$, pokažite da vrijedi:

$$Var[X(t)] = Var[X(1)] \cdot t$$

(Napomena: Počnite izračunavajući $Var[X(t+s)] = Var[X(t+s) - X(0)]$. Imajte na umu da svi prirasti imaju jednako očekivanje. Jedino rješenje funkcijske jednadžbe $f(t+s) = f(t) + f(s)$ je $f(t) = c \cdot t$).

ZADATAK 3.26 Pokažite da je jednostavan slučajan hod Markovljev lanac. Definiciju jednostavnog slučajnog hoda pogledajte u zadatku 3.1.

3.4.4 Poissonov proces

ZADATAK 3.27 Izračunajte očekivanje i varijancu Poissonovog procesa $X(t)$ intenziteta λ.

ZADATAK 3.28 Izračunajte autokorelacijsku funkciju $R_X(t, s)$ Poissonova procesa $X(t)$ intenziteta λ.

ZADATAK 3.29 Izračunajte autokovarijacijsku funkciju $K_X(t, s)$ Poissonova procesa $X(t)$ intenziteta λ.

ZADATAK 3.30 Neka je $X(t)$ Poissonov proces intenziteta λ. Pokažite da se vrijeme između dviju uzastopnih realizacija događaja Poissonova procesa ravna po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ.

ZADATAK 3.31 Neka T_n označava vrijeme n-te relalizacije događaja Poissonova procesa $X(t)$ intenziteta λ. Pokažite da se slučajna varijabla T_n ravna po gama razdiobi i izračunajte parametre gama razdiobe.

ZADATAK 3.32 Neka T_n označava vrijeme n-te relalizacije događaja Poissonova procesa $X(t)$ intenziteta λ. Izračunajte razdiobu slučajne varijable T_1 uz uvjet da se u intervalu $[0, t]$ realizirao točno jedan događaj.

ZADATAK 3.33 Pretpostavimo da neki promatrač počne promatrati Poissonov proces intenziteta λ u trenutku t. Poissonov proces se odvija već neko vrijeme i prebrojao je određeni broj realizacija. Pretpostavimo da se u trenutku početka promatranja t nije realizirao niti jedan događaj. Pokažite da se vrijeme od trenutka t do trenutka realizacije prvog sljedećeg događaja ravna po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ.
(Napomena: treba poći od pretpostavke da se međudolazna vremena Poissonova procesa ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ i pokazati da jednako vrijedi i ako se promatra vrijeme između nekog fiksnog perioda poslije $(n-1)$-ve realizacije i n-te realizacije).

ZADATAK 3.34 Putnici na aerodromu nakon carinske kontrole odlaze u prostoriju gdje se nalazi njihova prtljaga kako bi ju uzeli. Pet je carinskih kontrolnih točki i na svakoj je vrijeme obrade jednog putnika raspodijeljeno eksponencijalno s parametrom $\lambda = 1/3$ 1/min. Koliki prosječan broj putnika se očekuje u prostoriji za prtljagu u jednom satu?

ZADATAK 3.35 Razmatrajte Poissonov proces $X(t)$ intenziteta λ koji broji ljude koji dolaze u neku trgovinu. Vjerojatnost da je kupac žensko je p, a vjerojatnost da je kupac muško q. Proces brojanja žena koje dolaze u trgovinu je također Poissonov i označujemo ga s $X_1(t)$. Izračunajte intenzitet procesa $X_1(t)$.
(Napomena: Ako je do trenutka t izbrojeno k žena, onda je ukupno do tada moglo biti izbrojeno $k, k+1, k+2, \ldots \infty$ ljudi. Ako je izbrojeno n ljudi, onda se broj žena u tom broju ravna po binomnoj razdiobi).

ZADATAK 3.36 Neka su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ neovisni Poissonovi procesi s intenzitetima λ_1 i λ_2. Izračunajte vjerojatnost:

$$P(X_1(t) = k | X_1(t) + X_2(t) = n) = ?$$

ZADATAK 3.37 Neka je $X(t)$ Poissonov proces intenziteta λ, i neka je $t > s$. Izračunajte vjerojatnost:

$$P(X(s) = k | X(t) = n) = ?$$

ZADATAK 3.38 Pretpostavimo da je 8 radnih stanica spojeno na isti segment izolirane LAN mreže. Sve stanice šalju u mrežu kratke pakete (PING) intenzitetom $\lambda = 100$ paketa/s s eksponencijalno raspodijeljenim vremenom između slanja sva uzastopna paketa. Ako su sve stanice spojene na HUB, koju razdiobu i s kojim parametrima ima slučajni proces $X(t)$ koji mjeri broj paketa koji su prošli kroz HUB?

3.5 Rješenja zadataka za vježbu

3.5.1 Opis stohastičkih procesa

RJEŠENJE ZADATKA 3.1

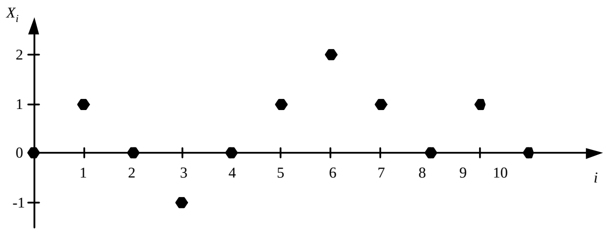
(a) Očigledno je da je slučajan hod diskretan u vremenu. To saznajemo iz same definicije. Proces je definiran kao zbroj konačnog niza slučajnih varijabli. Niz varijabli uvijek je diskretan. Ovo je dakle proces s diskretnim parametrom i diskretnim indeksnim skupom T. Proces je definiran kao zbroj diskretnih slučajnih varijabli S_i. Stoga je i zbroj diskretan, pa je ovo proces s diskretnim stanjima.

(b) Tipičnu trajektoriju ovog procesa dobivamo tako što izgeneriramo slučajan niz vrijednosti slučajne varijable S, i onda stanje u n-tom koraku jednostavno dobivamo kao zbroj vrijednosti varijabli. Evo kako:

Korak i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1
X_i	1	0	-1	0	1	2	1	0	1	0

Tablica 3.2: Uz zadatak 3.10

To možemo prikazati grafički - slika 3.5:

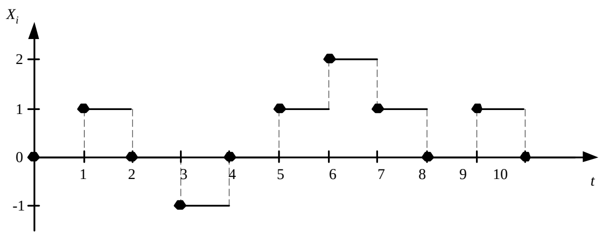


Slika 3.5: Uz rješenje zadatka 3.1

RJEŠENJE ZADATKA 3.2

(a) Proučite zadatak 3.1. U ovom zadatku je proces definiran prema istom nizu slučajnih varijabli S_i kao i u zadatku 3.1, no razlika je u tome da je proces definiran u svakoj točki vremena $X(t)$. Stoga je ovaj proces kontinuiran po parametru. Po stanjima je diskretan, jer je proces definiran kao zbroj diskretnih slučajnih varijabli. Promotrimo jednak niz varijabli kao i u prethodnom zadatku.

(b) Trajektorija sada izgleda kako je prikazano slici 3.6.

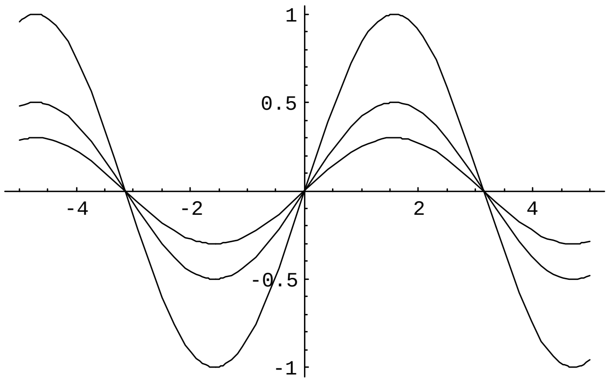


Slika 3.6: Uz rješenje zadatka 3.2

Rješenje zadatka 3.3

(a) Y je kontinuirana slučajna varijabla koja pomnožena s kontinuiranom funkcijom u konačnici daje stohastički proces kontinuiran po vrijednostima (stanjima). Pošto je proces definiran u svakoj vremenskoj točki, ovo je proces s kontinuiranim parametrom.

(b) Tipična trajektorija je sinusoida s amplitudom između 0 i 1, ovisno o realizaciji slučajne varijable Y. Nekoliko tipičnih trajektorija je prikazano na slici 3.7.

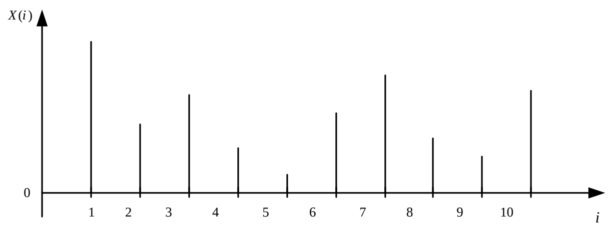


Slika 3.7: Uz rješenje zadatka 3.3

Rješenje zadatka 3.4

(a) Ovaj zadatak može lako prevariti ako nije točno pročitan. Naime, slučajne varijable se odnose na pojedinu stranku koja dolazi u poštanski ured. Budući da je je redni broj stranke diskretna veličina, ovo je proces s diskretnim parametrom. Budući da je vrijeme čekanja $X(i)$ stranke i kontinuirana slučajna varijabla, ovaj proces ima kontinuiran skup stanja.

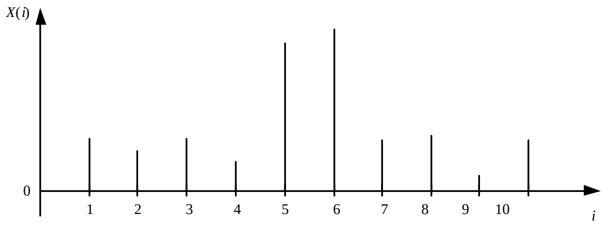
(b) Tipična trajektorija ovog procesa je prikazana na slici 3.8.



Slika 3.8: Uz rješenje zadatka 3.4

Rješenje zadatka 3.5

(a) Slučajna varijabla procesa odnosi se na konkretan dan, pa je proces diskretan s obzirom na parametar. Indeksni skup je diskretan, ali beskonačan. Količina piva kojeg asistenti popiju i-tog dana ovisi o broju asistenata koji su pošli na pivo. Netko bi mogao pretpostaviti da je količina piva na neki način diskretizirana jer su boce piva strogo određene zapremine. To bi moglo biti točno tumačenje, no sigurnije je reći da je količina ispijenog piva kontinuirana jer se ponekad nešto piva prolije, sve boce nisu jednako popunjene, a nekad se pivo i toči pa konobar nikada ne natoči istu količinu piva. Stoga možemo zaključiti da ovaj proces ipak ima kontinuirana stanja.



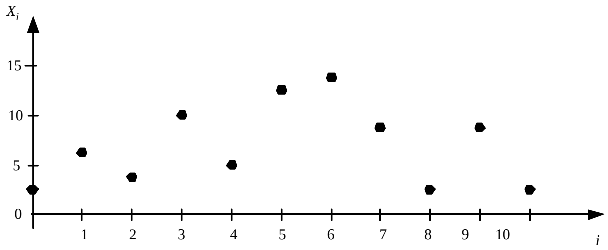
Slika 3.9: Uz rješenje zadatka 3.5

(b) Tipična trajektorija je prikazana na slici. Dan 1 je ponedjeljak. Primjetno je da asistenti piju više piva petkom i subotom - što je razumljivo. Možemo zaključiti da ovaj proces ima veliku autokorelaciju, ali da zasigurno nije stacionaran.

Rješenje zadatka 3.6

(a) Slučajna varijabla procesa odnosi se na konkretan dan, pa je proces diskretan s obzirom na parametar. Indeksni skup je diskretan, ali beskonačan. Stanja ovog procesa su diskretna jer je broj sendviča diskretna slučajna varijabla. Stanja variraju od 0 do broja $N\cdot$(maksimalan broj sendviča koje jedan asistent može pojesti).

(b) Tipična trajektorija prikazana je na slici 3.10.



Slika 3.10: Uz rješenje zadatka 3.6

Rješenje zadatka 3.7

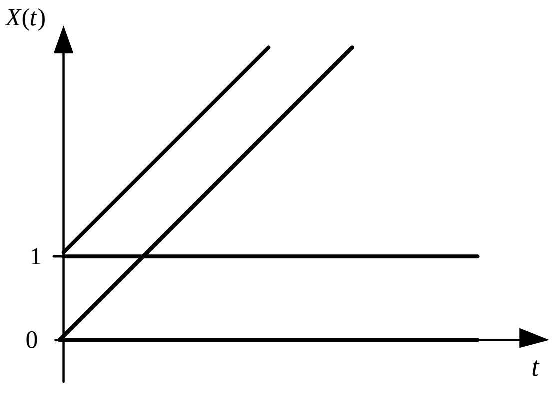
(a) Ovaj proces definiran je u svakoj točki vremena pa je stoga kontinuiran po parametru. Varijable A i B su diskretne i poprimaju stanja 0 ili 1. No, ako diskretnu varijablu pomnožimo s kontinuiranom t, opet dobivamo kontinuiranu varijablu. Stoga ovaj proces ima kontinuiran skup stanja.

(b) Ovaj proces ima samo četiri moguće trajektorije. Njih dobivamo za četiri moguće kombinacije varijabli A i B.

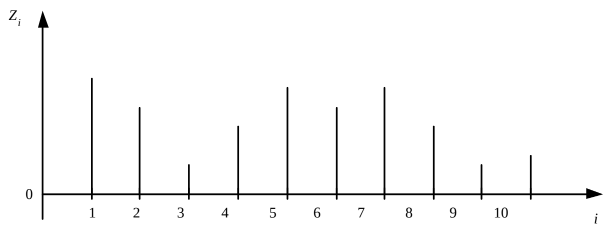
Rješenje zadatka 3.8

(a) Varijabla stohastičkog procesa mjeri vrijeme između ulova riba. Pošto se svakoj ulovljenoj ribi može pridružiti takvo vrijeme, to je ovo proces s diskretnim parametrom. Vrijeme između dva događaja je kontinuirana slučajna varijabla, pa slijedi da proces ima kontinuiran skup stanja.

(b) Tipična trajektorija je prikazana na slici 3.12



Slika 3.11: Uz rješenje zadatka 3.7

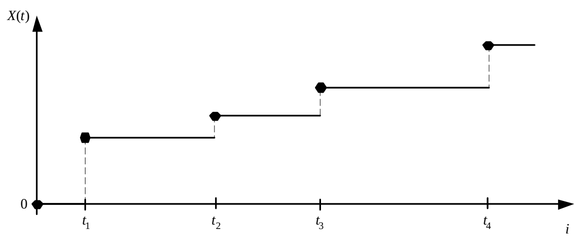


Slika 3.12: Uz rješenje zadatka 3.8

Rješenje zadatka 3.9

a) Ovo je očigledno proces brojanja. On je kontinuiran u vremenu, tj. proces s kontinuiranim parametrom. Po vrijednostima je diskretan, tj. proces s diskretnim stanjima, jer broji broj putnika koji su pristigli do trenutka t. Pošto u jednom trenutku stiže više od jednog putnika, prirast procesa u malim vremenskim razmacima može biti znatno veći od 1. Ovakve procese inače zovemo procesi s gomilanjem.

b) Trajektorija je slična tipičnoj trajektoriji za Poissonov proces, no razlika je u tome da je prirast veći ili jednak 1. Jednu trajektoriju prikazuje slika 3.13.



Slika 3.13: Uz rješenje zadatka 3.9

3.5.2 Karakterizacija stohastičkih procesa

Rješenje zadatka 3.10

Vjerojatnost realizacije ove trajektorije jednaka je vjerojatnosti realizacije pojedinih varijabli. Događaj "dogodila se upravo ova trajektorija" jednak je događaju "prva varijabla poprimila je vrijednost 0, druga vrijednost $1, \ldots$, a deseta 0". To možemo zapisati ovako:

$$P\left(X_1=0, X_2=1, X_3=1, X_4=0, X_5=1, X_6=0, X_7=0, X_8=1, X_9=1, X_{10}=0\right)$$

Bernoullieve varijable koje čine ovaj proces su u cjelini neovisne, tj. ovaj proces je neovisan. Stoga se gornja vjerojatnost raspada na umnožak vjerojatnosti realizacije pojedine varijable pa slijedi:

$$\begin{aligned}
&P\left(X_1=0, X_2=1, X_3=1, X_4=0, X_5=1, X_6=0, X_7=0, X_8=1, X_9=1, X_{10}=0\right)= \\
&=P\left(X_1=0\right) \cdot P\left(X_2=1\right) \cdot P\left(X_3=1\right) \cdot P\left(X_4=0\right) \cdot P\left(X_5=1\right) \cdot P\left(X_6=0\right) \cdot \\
&\cdot P\left(X_7=0\right) \cdot P\left(X_8=1\right) \cdot P\left(X_9=1\right) \cdot P\left(X_{10}=0\right)=p^5 q^5
\end{aligned}$$

Dobili smo vjerojatnost realizacije zadane trajektorije.

Rješenje zadatka 3.11

Prije izračunavanja gustoće razdiobe, prvo moramo utvrditi što je slučajna varijabla u nekom konkretnom trenutku t. Neka je $u=\cos(\omega t)$. U danom trenutku t varijabla u poprima vrijednost između -1 i 1, a slučajna varijabla procesa poprima vrijednost $Y \cdot u$. Tražimo razdiobu nove slučajne varijable $X(t)=Y \cdot u$. Bez nepotrebnog kompliciranja možemo reći da će varijabla $X(t)$ biti jednoliko raspodijeljena između 0 i u ako je $u>0$ ili između u i 0 ako je u negativno. Gustoća razdiobe jednaka je $1/|u|$ u području $(0, u)$ odnosno $(u, 0)$, a izvan tog područja jednaka je 0. Sada možemo jednostavno izračunati razdiobu varijable za zadane vremenske točke.

(a) $t=0, \quad u=\cos(0)=1, \quad X(0)=Y, \quad Y \sim U(0,1)$

$$f_{X(0)}(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1 \\ 0 & \text{inače}\end{cases}$$

(b) $t=\pi/4\omega, \quad u=\cos(\omega \cdot \pi/4\omega)=1/\sqrt{2}, \quad X(\pi/4\omega)=Y/\sqrt{2}, \quad Y \sim U\left(0,1/\sqrt{2}\right)$

$$f_{X(\pi/4\omega)}(x)=\begin{cases}\sqrt{2} & 0<x<1/\sqrt{2} \\ 0 & \text{inače}\end{cases}$$

(c) $t=\pi/2\omega, \quad u=\cos(\omega \cdot \pi/2\omega)=0, \quad X(\pi/2\omega)=0$ Varijabla je uvijek jednaka 0. Ta varijabla ima gustoću razdiobe koja je opisana Diracovom delta funkcijom. Dakle:

$$f_{X(\pi/2\omega)}(x)=\delta(x)$$

(d) $t=\pi/\omega, \quad u=\cos(\omega \cdot \pi/\omega)=-1, \quad X(\pi)=-Y$

$$f_{X(\pi)}(x)=\begin{cases}1 & -1<x<0 \\ 0 & \text{inače}\end{cases}$$

Rješenje zadatka 3.12

Slučajna varijabla $X(n)$ jednaka je zbroju slučajnih varijabli S_1 do S_n. Tražimo vjerojatnost da je $X(n)$ poprimila vrijednost k. Neka je A broj varijabli S_i koje su poprimile vrijednost 1, a B broj varijabli koje su poprimile vrijednost -1. Razlika $A-B$ jednaka je k, a njihov zbroj $A+B$ jednak je n. Ove dvije jednakosti predstavljaju sustav linearnih jednadžbi. Riješimo ih.

$$\begin{gathered}
A+B=n \Rightarrow B=n-A \\
A-B=k \Rightarrow A=k+B \Rightarrow A=k+n-A \\
A=\frac{n+k}{2}, \quad B=\frac{n-k}{2}
\end{gathered}$$

Vjerojatnost da je varijabla $X(n)$ na jedan način poprimila vrijednost k je $p^A q^B$. Broj mogućih načina ostvarenja jednak je broju kombinacija n povrh A. Stoga je vjerojatnost da X(n) poprimi vrijednost k, tj. funkcija vjerojatnosti prvog reda jednaka

$$p_n\left(k\right) = \binom{n}{\left(n+k\right)/2} p^{(n+k)/2} q^{(n-k)/2}$$

Ova funkcija vrijedi samo ukoliko su oba n i k parni ili neparni, a $n > |k|$.

Rješenje zadatka 3.13

Pažljivo proučite rješenje zadatka 3.12. Uvrštavanjem u izvedeni izraz dobivamo:

$$p_4\left(-2\right) = \binom{4}{(4-2)/2} p^{(4-2)/2} q^{(4+2)/2} = 4pq^3$$

Rješenje zadatka 3.14

Ne proučavajte rješenje zadatka 3.12 jer će vas navesti na teži način rješavanja ovog zadatka. Lakši put do očekivanja je sjetiti se da je $X(n)$ dan kao zbroj varijabli $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$. Pogledajmo čemu je jednako očekivanje ove slučajne varijable.

$$\begin{aligned} X\left(n\right) &= S_1 + S_2 + \ldots + S_n \\ E\left[X\left(n\right)\right] &= E\left[S_1 + S_2 + \ldots + S_n\right] = E\left[S_1\right] + E\left[S_2\right] + \ldots + E\left[S_n\right] \end{aligned}$$

Svaka varijabla S_i ima jednaku razdiobu. Očekivanje svake od varijabli S_i jednako je

$$E\left[S_i\right] = p \cdot 1 + q \cdot (-1) = p - q$$

$$E\left[X\left(n\right)\right] = E\left[S_1\right] + E\left[S_2\right] + \ldots + E\left[S_n\right] = n \cdot E\left[S\right] = n\left(p-q\right)$$

Za varijancu zbroja dviju u cjelini neovisnih slučajnih varijabli A i B vrijedi $Var[A+B] = Var[A] + Var[B]$. Varijanca svake varijable S_i je jednaka

$$Var\left[S_i\right] = p \cdot 1 + q \cdot (-1)^2 - (p-q)^2 = 1 - (p-q)^2 = 4pq$$

Dakle

$$Var\left[X\left(n\right)\right] = n \cdot Var\left[S_i\right] = 4npq$$

Rješenje zadatka 3.15

Autokorelacijska funkcija $R_X(m,n)$ definirana je kao očekivanje umnoška slučajnih varijabli $X(m)$ i $X(n)$. Ne znamo ništa o neovisnosti $X(n)$ i $X(m)$, ali znamo da su varijable S_i međusobno neovisne. Pretpostavimo radi jednostavnosti da je $m < n$. Idemo računati:

$$\begin{aligned} E\left[X\left(m\right) \cdot X\left(n\right)\right] &= E\left[\left(S_1 + \ldots + S_m\right) \cdot \left(S_1 + \ldots + S_n\right)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{m} E\left[S_i^2\right] + \sum_{i=1}^{m} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} E\left[S_i S_j\right] = \\ &= m\left(q \cdot (-1)^2 + p \cdot 1^2\right) + (m \cdot n - m) \cdot (p-q)^2 = \\ &= m + m \cdot (n-1) \cdot (p-q)^2 = m \cdot \left[1 + (n-1) \cdot (p-q)^2\right] \end{aligned}$$

Dakle, u općem slučaju vrijedi:

$$R_X\left(n,m\right) = min\left(n,m\right) + \left[nm - min\left(n,m\right)\right] \cdot (p-q)^2$$

Rješenje zadatka 3.16
Rješenje je jednostavno ukoliko slijedimo pravila za računanje očekivanja.

$$\begin{aligned}
E\left[X\left(t\right)\right] &= E\left[Y\cdot\sin\left(\omega t\right)\right] = E\left[Y\right]\cdot\sin\left(\omega t\right) = \frac{1}{2}\sin\left(\omega t\right)\\
R_X\left[s,t\right] &= E\left[X\left(s\right)\cdot X\left(t\right)\right] = E\left[Y\cdot\sin\left(\omega s\right)\cdot Y\cdot\sin\left(\omega t\right)\right] =\\
&= E\left[Y^2\right]\sin\left(\omega s\right)\sin\left(\omega t\right) = \frac{1}{3}\sin\left(\omega s\right)\sin\left(\omega t\right)\\
K_X\left[s,t\right] &= R_X\left[s,t\right] - E\left[X\left(s\right)\right]E\left[X\left(t\right)\right] =\\
&= \frac{1}{3}\sin\left(\omega s\right)\sin\left(\omega t\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\omega s\right)\frac{1}{2}\sin\left(\omega t\right) = \frac{1}{12}\sin\left(\omega s\right)\sin\left(\omega t\right)
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 3.17

(a) Neka je funkcija razdiobe jedne slučajne varijable X_n $F_X(x)$. Združena funkcija razdiobe je

$$F_X\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) = P\left(X_1\le x_1;\ldots;X_n\le x_n\right)$$

Budući da su su slučajne varijable $X_1,\ldots X_n$ u cjelini neovisne i sve redom imaju jednaku funkciju razdiobe to gornju vjerojatnost možemo napisati kao

$$\begin{aligned}
F_X\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right) &= P\left(X_1\le x_1;\ldots;X_n\le x_n\right) =\\
&= P\left(X_1\le x_1\right)\cdot P\left(X_2\le x_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(X_n\le x_n\right) =\\
&= F_{X_1}\left(x_1\right)F_{X_2}\left(x_2\right)\cdot\ldots\cdot F_{X_n}\left(x_n\right) = F_X\left(x\right)^n
\end{aligned}$$

(b) Očekivanje stohastičkog procesa nalazimo kao funkciju koja je sastavljena od očekivanja svih slučajnih varijabli koje mu pripadaju. Pošto je očekivanje svih varijabli točno μ, onda je očekivanje procesa konstantno i isto tako iznosi μ.

$$\mu_X\left(n\right) = E\left[X\left(n\right)\right] = \mu$$

(c) Autokorelacijska funkcija jednaka je očekivanju umnoška slučajnih varijabli s različitim vrijednostima parametara. Pošto su slučajne varijable u cjelini neovisne, onda je očekivanje umnoška jednako umnošku očekivanja.

$$\begin{aligned}
R_X\left(n,m\right) &= E\left[X\left(n\right)\cdot X\left(m\right)\right] = E\left[X\left(n\right)\right]\cdot E\left[X\left(m\right)\right] = \mu^2, n\ne m\\
R_X\left(n,n\right) &= E\left[X\left(n\right)^2\right] = Var\left[X\left(n\right)\right] + E\left[X\left(n\right)\right]^2 = \sigma^2+\mu^2
\end{aligned}$$

(d) Autokovarijacijska funkcija se s lakoćom dobiva iz autokorelacijske

$$K_X\left(n,m\right) = R_X\left(n,m\right) - E\left[X\left(n\right)\right]\cdot E\left[X\left(m\right)\right] = \begin{cases} 0 & n\ne m\\ \sigma^2 & n=m\end{cases}$$

Rješenje zadatka 3.18
Ovo je klasičan problem određivanja razdiobe funkcije slučajne varijable. U nekoj konkretnoj vremenskoj točki imamo konstantnu vrijednost napona $U(t)$ na koji se superponira šum $X(t)$ koji se ravna po Gaussovoj razdiobi. Stoga računamo očekivanje slučajne varijable $Y(t) = f[X(t)]$. Trenutnu vrijednost napona označimo s u. Neka je

$$y = g\left(x\right) = x+u \Rightarrow x = y-u \Rightarrow h\left(y\right) = g^{-1}\left(y\right) = y-u \Rightarrow \left|\frac{dh\left(y\right)}{dy}\right| = 1$$

Funkciju razdiobe sada dobivamo kao

$$f_Y(y) = f_X(y-u) \cdot 1 = f_X[y - A\sin(\omega t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{[y-0-A\sin(\omega t)]}{2\sigma^2}}$$

Zaključujemo da se slučajne varijable $Y(t)$ ravnaju po normalnoj razdiobi kojoj se očekivanje mijenja u vremenu, dakle

$$Y(t) \sim N\left(A\sin(\omega t); \sigma^2\right)$$

3.5.3 Klasifikacija stohastičkih procesa

Rješenje zadatka 3.19

Prvo se prisjetimo što znači biti stacionaran do reda n. Ako je nekakav proces stacionaran do reda n onda vrijedi:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) &= P(X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2 \ldots X(t_n) < x_n) = \\ &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = \\ &= P(X(t_1 + \tau) < x_1; X(t_2 + \tau) < x_2; \ldots X(t_n + \tau) < x_n) \end{aligned}$$

Pustimo sada da x_n teži u beskonačnost. Ako nekakav x teži beskonačnosti, onda je vjerojatnost $P(X \le x) = 1$. Ako x_n teži u beskonačnost, onda združena funkcija razdiobe jednostavno postaje

$$\begin{aligned} \lim_{x_n \to \infty} F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) &= P(X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2; \ldots X(t_n) < x_n) = \\ &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_n + \tau) = \\ &= P(X(t_1 + \tau) < x_1; X(t_2 + \tau) < x_2; \ldots X(t_n + \tau) < x_n) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) &= P(X(t_1) < x_1; X(t_2) < x_2; \ldots X(t_{n-1}) < x_{n-1}) = \\ &= F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \ldots, t_{n-1} + \tau) = \\ &= P(X(t_1 + \tau) < x_1; X(t_2 + \tau) < x_2; \ldots X(t_{n-1} + \tau) < x_{n-1}) \end{aligned}$$

Time smo pokazali da ako je proces stacionaran do n-tog reda, da je stacionaran i do reda $n-1$. Induktivno vrijedi i za sve niže redove.

Rješenje zadatka 3.20

Za proces stacionaran u širem smislu (WSS) vrijedi da mu očekivanje mora biti konstantno, a autokorelacijska funkcija smije ovisiti samo o razlici vrijednosti parametara između kojih se mjeri autokorelacija $(m-n)$. Prvi je uvjet ispunjen sam po sebi. To je čak i eksplicitno rečeno u zadatku. Jedino što moramo provjeriti je da li autokorelacija $R_X(n,m)$ ovisi samo o razlici $m-n$. Pogledajmo:

$$\begin{aligned} &\text{Za } n \neq m: \\ &R_X(n,m) = E[X(n) \cdot X(m)] = \left| \begin{array}{c} \text{neovisnost} \\ \text{u cjelini} \end{array} \right| = E[X(n)] \cdot E[X(m)] = 0 \\ &\text{Za } n = m: \\ &R_X(n,m) = E[X(n) \cdot X(m)] = Var[X(n)] = Var[X(m)] = 1 \end{aligned}$$

Jasno da je autokorelacija funkcija razlike m i n pa smo pokazali da je ovaj proces WSS.

Rješenje zadatka 3.21

Da bi proces bio stacionaran u širem smislu, očekivanje mora biti konstantno, a autokorelacijska funkcija razlike vrijednosti parametara $(t-s)$. Izračunajmo očekivanje procesa

$$E[X(t)] = E[A\cos(\omega \cdot t) + B\sin(\omega \cdot t)] = E[A] \cdot \cos(\omega \cdot t) + E[B]\sin(\omega \cdot t)$$

Ako pogledamo dobiveno rješenje jasno nam je da je jedino moguće rješenje da očekivanje bude konstantno da očekivanja varijabli A i B budu jednaka $0 - E[A] = E[B] = 0$. Očekivanje procesa je u tom slučaju jednako $E[X(t)] = 0$.

Ovaj uvjet zasigurno nije dovoljan da promatrani proces bude WSS. Ako je razdioba očuvana kroz vrijeme to onda znači i da varijanca procesa ne smije varirati u vremenu. Promotrimo varijancu u točkama $t = 0$ i $t = \pi/2\omega$.

$$E\left[X^2(0)\right] = E\left[X^2\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\right] = R_X(0) = \sigma_X^2$$

Budući da je $X(0) = A$, a $X(\pi/2\omega) = B$, to znači da mora biti ispunjeno da je $Var[A] = Var[B] = \sigma^2$.

Još je potrebno vidjeti koji uvjeti moraju biti ispunjeni da bi autokorelacija procesa $R_X(t,s)$ bila funkcija razlike t i s. Izračunajmo autokorelacijsku funkciju ali na taj način što tražimo autokorelaciju između t i $t+h$.

$$\begin{aligned}
R_X(t,t+h) &= E\left[X(t)\cdot X(t+h)\right] = \\
&= E\{[A\cos(\omega\cdot t) + B\sin(\omega\cdot t)]\cdot[A\cos(\omega\cdot(t+h)) + B\sin(\omega\cdot(t+h))]\} = \\
&= \ldots = \sigma^2\cos(\omega h) + E[AB]\cdot\sin(2\omega t + \omega h)
\end{aligned}$$

Jasno da korelacija varijabli A i B mora biti 0, tj. mora biti ispunjeno $E[AB] = 0$.

Rješenje zadatka 3.22

Treba obratiti pažnju na podatak da su A_k i B_k nekorelirane, tj. $E[A_k \cdot B_k] = 0$. Izračunajmo prvo očekivanje

$$E[X(t)] = E\left[\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(u_k t) + B_k\sin(u_k t)]\right] = \sum_{k=1}^{\infty}[E[A_k]\cos(u_k t) + E[B_k]\sin(u_k t)] = 0$$

a sada i autokorelaciju. Jasno da je varijanca konstantna.

$$\begin{aligned}
R_X(t,s) &= E\left\{\left[\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(u_k t) + B_k\sin(u_k t)]\right]\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(u_k s) + B_k\sin(u_k s)]\right]\right\} = \\
&= |E[A_k B_k] = 0| = \sum_{k=1}^{\infty}E\left[A_k^2\right]\cdot\cos(u_k t)\cdot\cos(u_k s) + \sum_{k=1}^{\infty}E\left[B_k^2\right]\cdot\sin(u_k t)\cdot\sin(u_k s) = \\
&= \sigma^2\cdot\left\{\sum_{k=1}^{\infty}cos(u_k t)\cdot\cos(u_k s) + \sin(u_k t)\cdot\sin(u_k s)\right\} = \\
&= \sigma^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cos(u_k t)\cdot\cos(u_k s) + \sin(u_k t)\cdot\sin(u_k s) = \\
&= \sigma^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\cos[u_k(t-s)]
\end{aligned}$$

Dakle, pošto su očekivanje i varijanca konstantni, a autokorelacija ovisi o razlici vrijednosti parametara t i s zaključujemo da je ovaj proces WSS.

Rješenje zadatka 3.23

Proces je stacionaran u širem smislu (WSS) ako mu se očekivanje i varijanca ne mijenjaju u vremenu, a autokorelacija ovisi samo o razlici parametara. Izračunajmo očekivanje i varijancu ovog procesa. Očekivanje računamo ovako:

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} 1/2\pi & -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$\mu_X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega t + \varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\varphi = \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t + \varphi)\,d\varphi = 0$$

Autokorelacija je:

$$\begin{aligned}
R_X(t,t+h) &= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t+\varphi)\cdot\cos(\omega t+\omega h+\varphi)\,\frac{A^2}{2\pi}d\varphi = \\
&= \frac{A^2}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[cos(\omega h)+\cos(2\omega t+\omega h+2\varphi)\right]d\varphi = \\
&= \frac{A^2}{4\pi}\cos(\omega h)\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\varphi = \frac{A^2}{4\pi}\cos(\omega h)\cdot 2\pi = \frac{A^2}{2}\cos(\omega h)
\end{aligned}$$

Pošto je očekivanje konstantno, a autokorelacija ovisi samo o razlici vrijednosti parametara, zaključujemo da je proces stacionaran.

RJEŠENJE ZADATKA 3.24
Izračunajmo sljedeće očekivanje

$$\begin{aligned}
E[X(t+s)] &= E[X(t+s)-X(0)] = E[X(t+s)-X(s)+X(s)-X(0)] = \\
&= E[X(t+s)-X(s)]+E[X(s)-X(0)] = E[X(t)]+E[X(s)]
\end{aligned}$$

Označimo sada da je $E[X(u)] = f(u)$. Dobivamo jednadžbu

$$f(t+s) = f(t)+f(s)$$

Jedino rješenje za gornju jednadžbu je $E[X(t)] = f(t) = k\cdot t$. Jedino još moramo odrediti k. To lako određujemo iz uvjeta $E[X(1)] = k$. Dakle:

$$E[X(t)] = E[X(1)]\cdot t$$

RJEŠENJE ZADATKA 3.25
Izračunajmo varijancu od $X(t+s)$

$$\begin{aligned}
Var[X(t+s)] &= Var[X(t+s)-X(0)] = Var[X(t+s)-X(s)+X(s)-X(0)] = \\
&= Var[X(t+s)-X(s)]+Var[X(s)-X(0)] = Var[X(t)]+Var[X(s)]
\end{aligned}$$

Označimo $Var[X(t)] = f(t)$. Dobivamo jednadžbu

$$f(t+s) = f(t)+f(s)$$

Jedino rješenje za gornju jednadžbu je $Var[X(t)] = f(t) = k\cdot t$. Jedino još moramo odrediti k. Ako imamo funkciju tipa $g(x) = c\cdot x$, onda c saznajemo tako što za x uvrstimo 1, $g(1) = c$. Dakle, slijedi da je $Var[X(1)] = k$.

RJEŠENJE ZADATKA 3.26
Slučajan hod je proces s diskretnim parametrom. Varijabla X_n je jednaka

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

Varijabla S_i je raspodijeljena s vjerojatnostima $P(-1) = q$ i $P(1) = p$, $p = 1-q$. Promotrimo događaj $X_{n+1} = i_{n+1}$. Taj događaj možemo zapisati i ovako: $S_{n+1} = i_{n+1}-i_n$. Drugim riječima ova dva događaja su ekvivalentna. Varijable X_{n+1} i X_n zasigurno nisu neovisne, no varijable S_{n+1} i X_n su zasigurno neovisne. To vrijedi i za S_{n+1} i X_{n-1}, S_{n+1} i X_{n-2}, itd. Ako su neke dvije varijable međusobno neovisne, onda vrijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Pogledajmo sljedeću uvjetnu vjerojatnost:

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1)$$

Događaj $X_{n+1} = i_{n+1}$ možemo zamijeniti s $S_{n+1} = i_{n+1} - i_n$. Dakle,

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = \\ &= P(S_{n+1} = i_{n+1} - i_n|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = \ldots \end{aligned}$$

a pošto su S_{n+1} i sve $X_n \ldots X_1$ u cjelini neovisne, onda po pravilu o uvjetnoj vjerojatnosti koje smo gore spomenuli slijedi

$$\begin{aligned} \ldots &= P(S_{n+1} = i_{n+1} - i_n|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = \\ &= P(S_{n+1} = i_{n+1} - i_n) = P(S_{n+1} = i_{n+1} - i_n|X_n = i_n) = \\ &= P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n) \end{aligned}$$

Dakle dobili smo tvrdnju

$$P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = i_{n+1}|X_n = i_n)$$

a to odgovara definiciji Markovljevog stohastičkog procesa. Time smo pokazali ono što je traženo.

3.5.4 Poissonov proces

Rješenje zadatka 3.27
Očekivanje računamo prema definiciji:

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} = e^{-\lambda t} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-1+1}}{(i-1)!} = \begin{vmatrix} j = i-1 \\ i = j+1 \end{vmatrix} \\ &= e^{-\lambda t} \lambda t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t \end{aligned}$$

Varijancu dobivamo na način objašnjen u prvom poglavlju.

$$
\begin{aligned}
Var[X(t)] &= E\left[(X - E[X(t)])^2\right] = E\left[X(t)^2\right] - E\left[X(t)\right]^2 \\
&= E\left[X(t)\left(X(t)-1\right)\right] + E\left[X(t)\right] - E\left[X(t)\right]^2 \\
E\left[X(t)\right] &= \lambda t \\
E\left[X(t)\right]^2 &= (\lambda t)^2 \\
E\left[X(t)\left(X(t)-1\right)\right] &= \sum_{i=0}^{\infty} i\,(i-1) e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{i=1}^{\infty} i\,(i-1)\frac{(\lambda t)^i}{i!} = e^{-\lambda t}\sum_{i=1}^{\infty} i\,(i-1)\frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{i=2}^{\infty} (i-1)\frac{(\lambda t)^i}{(i-1)!} = e^{-\lambda t}\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-2+2}}{(i-2)!} \\
&= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{i=2}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{i-2}}{(i-2)!} = |k = i-2| \\
&= e^{-\lambda t}(\lambda t)^2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{k}}{k!} = e^{-(\lambda t)}(\lambda t)^2 e^{(\lambda t)} = (\lambda t)^2 \\
Var\left[X(t)\right] &= (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t
\end{aligned}
$$

Rješenje zadatka 3.28

Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je $t > s$ i da varijabla j odgovara stanju u trenutku t, a varijabla i stanju u trenutku s. Primijetimo da Poissonov proces ima neovisne priraste, pa vrijedi uvjetna vjerojatnost

$$P(X(t) - X(s) = j - i | X(s) = i) = P(X(t) - X(s) = j - i)$$

Po definiciji autokorelacijske funkcije dobivamo:

$$
\begin{aligned}
R_X(t,s) &= E\left[X(t)X(s)\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} ijP\left[X(t) = j; X(s) = i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} ijP\left[X(t) = j | X(s) = i\right] P\left[X(s) = i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} ijP\left[X(t) - X(s) = j - i | X(s) = i\right] P\left[X(s) = i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} iP\left[X(s) = i\right]\sum_{j=i}^{\infty} jP\left[X(t-s) = j - i\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} iP\left[X(s) = i\right]\sum_{j=i}^{\infty} \left[(j-i) + i\right] P\left[X(t-s) = j - i\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} iP\left[X(s)=i\right]\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} kP\left[X(t-s)=k\right]}_{=\lambda(t-s)}+\underbrace{\sum_{j=i}^{\infty} iP[X(t-s)=j-i]}_{=i}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\lambda(t-s)iP[X(s)=i]+\sum_{i=0}^{\infty} i^2P[X(s)=i] \\
&= \lambda^2(t-s)s+\underbrace{E\left[X(s)^2\right]-E[X(s)]^2}_{Var[X(s)]}+E[X(s)]^2 \\
&= \lambda^2 ts-\lambda^2s^2+\lambda s+\lambda^2s^2=\lambda^2ts+\lambda s
\end{aligned}
$$

U općem slučaju zaključujemo da vrijedi

$$R_X(t,s)=\lambda\min(t,s)+\lambda^2 ts$$

Rješenje zadatka 3.29

Pogledajte rješenje prethodnog zadatka. Vrijedi

$$R_X(t,s)=\lambda\min(t,s)+\lambda^2 ts$$

Budući da je $K_X(t,s)=R_X(t,s)-E[X(t)]E[X(s)]$ rješenje dobivamo direktno.

$$K_X(t,s)=\lambda\min(t,s)+\lambda^2ts-\lambda t\lambda s=\lambda\min(t,s)$$

Rješenje zadatka 3.30

Rješenje je jednostavno ukoliko potražimo funkciju razdiobe varijable Z s vrijednostima z koja mjeri vrijeme koje protekne između dvije uzastopne realizacije događaja koje mjeri Poissonov proces.

Neka je proces u trenutku s poprimio vrijednost i, a u trenutku $s+z$ vrijednost $i+1$. Varijabla Z je poprimila vrijednost z bez obzira na i. Funkcija razdiobe je jednaka

$$
\begin{aligned}
P[Z<z] &= P[X(s+z)\geq i+1; X(s)=i]=1-P[Z\geq z] \\
&= 1-P[X(s+z)=i;X(s)=i]=1-P[X(z)=0]=1-e^{-\lambda z}\frac{(\lambda z)^0}{0!} \\
P[Z<z] &= 1-e^{-\lambda z}
\end{aligned}
$$

Varijabla Z ima tako eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ

Rješenje zadatka 3.31

Prisjetimo se primjera 3.5 Tamo je već pokazano da je zbroj n slučajnih varijabli s parametrom λ raspodijeljen po Gamma razdiobi s parametrima (n,λ). Bez dodatnih dokaza zaključujemo da se i slučajna varijabla T_n ravna po Gamma razdiobi s parametrima (n,λ), gdje je λ parametar odgovarajućeg Poissonova procesa.

RJEŠENJE ZADATKA 3.32

Pitamo se kolika je vjerojatnost da je do relaizacije prvog događaja prošlo manje od τ vremena ako znamo da se do trenutka $t > \tau$ realizirao točno jedan događaj.

$$P[T_1 < \tau | X(t) = 1] = \frac{P[T_1 < \tau; X(t) = 1]}{P[X(t) = 1]}$$

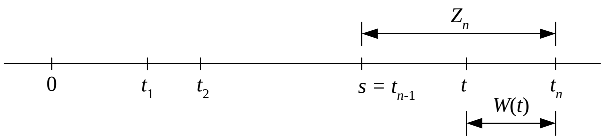
Promotrimo sada događaj $\{T_1 < \tau; X(t) = 1\}$. On se sastoji od dva uvjeta: realizacija događaja se dogodila prije τ i do trenutka t se dogodio samo jedan događaj. Ta dva događaja moramo preformulirati. Naime činjenica da je se do trenutka τ realizirao samo jedan događaj se može zapisati kao $X(\tau) = 1$, a dodatni uvjet da se i do t realizirao samo jedan događaj implicira da se od τ do t realiziralo nula događaja. Budući da Poissonov proces ima neovisne priraste slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{P[T_1 < \tau; X(t) = 1]}{P[X(t) = 1]} &= \frac{P[X(\tau) = 1; X(t-\tau) = 0]}{P[X(t) = 1]} \\
&= \frac{P[X(\tau) = 1]P[X(t-\tau) = 0]}{P[X(t) = 1]} = \frac{e^{-\lambda\tau}\lambda\tau e^{-\lambda(t-\tau)}}{e^{-\lambda t}\lambda t} \\
&= \frac{\tau}{t}
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je varijabla T_1 jednoliko raspodijeljena u području $[0, t]$.

RJEŠENJE ZADATKA 3.33

Neka je s $(0 \leq s < t)$ točka u kojoj se $n-1$ put realizirao promatrani događaj. Promatrana varijabla



je $W(t)$. Za nju moramo pokazati da se ravna po eksponencijalnoj razdiobi. Događaj $\{W(t) > \tau\}$ je ekvivalentan događaju

$$\{Z_n > t - s + \tau | Z_n > t - s\}$$

Tako možemo napisati sljedeće:

$$\begin{aligned}
P[W(t) > \tau] &= P[Z_n > t - s + \tau | Z_n > t - s] \\
&= \frac{P[Z_n > t - s + \tau]}{P[Z_n > t - s]} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t-s+\tau)}}{e^{-\lambda(t-s)}} = e^{-\lambda\tau} \\
P[W(t) \leq \tau] &= 1 - e^{-\lambda\tau}
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je $W(t)$ eksponencijalno raspodijeljena varijabla s parametrom λ.

RJEŠENJE ZADATKA 3.34

Svaka kontrolna točka predstavlja izvorište Poissonova toka realizacija događaja. Realizacija događaja se sastoji od završetka obrade putnika na carinskoj kontroli i njegova dolaska u prostoriju za preuzimanje prtljaga. Ukupni tok dolaska putnika jednak je zbroju pojedinih tokova putnika. Ukupni tok je također Poissonov s parametrom $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = \frac{5}{3}\left[\frac{putnika}{min}\right]$. Očekivani broj putnika u bilo kojem periodu T je λT. U periodu dugom 1 sat očekivani broj putnika je

$$E[X(1h)] = \frac{5}{3}\left[\frac{putnika}{min}\right] 60[min] = 100\, putnika$$

Rješenje zadatka 3.35

Neka je do trenutka t izbrojeno k žena i ukupno i ljudi (muškaraca + žena). Vjerojatnost takva događaja je

$$P[X_1(t) = k | X(t) = i] = \binom{i}{k} p^k q^{i-k}$$

gdje je $q = 1 - p$. Izračunajmo vjerojatnost $P[X_1(t) = k]$, odnosno funkciju vjerojatnosti Poissonova procesa $X_1(t)$.

$$\begin{aligned}
P[X_1(t) = k] &= \sum_{i=k}^{\infty} P[X_1(t) = k; X(t) = i] \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} P[X_1(t) = k | X(t) = i] P[X(t) = i] \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} p^k q^{i-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= \sum_{i=k}^{\infty} \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k q^{i-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^i}{(i-k)!} = \begin{vmatrix} j = i - k \\ i = j + k \end{vmatrix} \\
&= \frac{e^{-\lambda t}}{k!} \left(\frac{p}{q}\right)^k (q\lambda t)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q\lambda t)^j}{j!} \\
&= \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} e^{-\lambda t(p-1)} = e^{-p\lambda t} \frac{(p\lambda t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je proces brojanja žena koje dolaze u trgovinu Poissonov s parametrom $p\lambda$.

Rješenje zadatka 3.36

Bitno je primijetiti da su procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ neovisni. Taj podatak nam pomaže izračunati traženu vjerojatnost na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
P[X_1(t) = k | X_1(t) + X_2(t) = n] &= \frac{P[X_1(t) = k; X_1(t) + X_2(t) = n]}{P[X_1(t) + X_2(t) = n]} \\
&= \frac{P[X_1(t) + X_2(t) = n | X_1(t) = k] P[X_1(t) = k]}{P[X_1(t) + X_2(t) = n]} \\
&= \frac{P[X_2(t) = n - k | X_1(t) = k] P[X_1(t) = k]}{P[X_1(t) + X_2(t) = n]} = \begin{vmatrix} \text{neovisnost} \\ X_1(t) \text{ i } X_2(t) \end{vmatrix} \\
&= \frac{P[X_2(t) = n - k]\, P[X_1(t) = k]}{P[X_1(t) + X_2(t) = n]} \\
&= \frac{e^{-\lambda_2 t} \frac{(\lambda_2 t)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}}{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda_1 t}{(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)^k \left(\frac{\lambda_2 t}{(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 3.37

$$\begin{aligned}
P[X(s)=k|X(t)=n] &= \frac{P[X(s)=k;X(t)=n]}{P[X(t)=n]}= \\
&= \frac{P[X(t-s)=n-k;X(s)=k]}{P[X(t)=n]} \\
&= \frac{P[X(t-s)=n-k]P[X(s)=k]}{P[X(t)=n]} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 3.38
Ovo je tipičan primjer zbroja Poissonovih procesa. Proces koji broji broj paketa koji su prošli kroz HUB jednak je zbroju broja paketa koje su pojedinačno poslale sve stanice u mrežu. Pri tom smo pretpostavili da nije bilo kolizije što je donekle opravdano relativno kratkim paketima, odnosno okvirima koji nose ti paketi.

$$X(t)=X_1(t)+X_2(t)+X_3(t)+X_4(t)+X_5(t)+X_6(t)+X_7(t)+X_8(t)$$

Proces $X(t)$ je Poissonov s parametrom $\lambda=\sum_{i=1}^{8}\lambda_i=800$ paketa/s.

Bibliografija

[1] N. Elezović, *Skripta predavanja iz Stohastičkih procesa.* Knjiga u pripremi.

[2] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes.* McGraw-Hill International Editions, 1987.

[3] Z. Pauše, *Vjerojatnost, informacjia, stohastički procesi.* Školska knjiga, 1974.

[4] L. Kleinrock, *Queuing Systems, Volume I: Theory.* A Wiley-Interscience Publications, John Wiley and Sons, 1996.

[5] L. Kleinrock, *Queuing Systems, Volume II: Problems and Solutions.* A Wiley-Interscience Publications, John Wiley and Sons, 1996.

[6] H. Hsu, *Probability, Random Variables, Random Processes.* McGraw-Hill International Editions, Shaum's outline series, 1996.

Poglavlje 4

Markovljevi lanci

Markovljevi procesi su oni stohastički procesi čije buduće stanje ovisi samo o trenutnom stanju. To svojstvo zovemo svojstvo odsustva pamćenja (*memoryless property*). Isto svojstvo ima i Poissonov proces, pa je Poissonov proces posebna vrsta Markovljevog procesa. Markovljevi procesi mogu imati diskretan ili kontinuiran skup stanja. U ovom poglavlju promatramo procese s diskretnim stanjima - lance. Bez obzira da li su kontinuirani ili diskretni po parametru, lanci mijenjaju stanje u diskretnim točkama u indeksnom skupu T (nekontinuirano).

U ovom poglavlju ćemo se upoznati s osnovnim matematičkim modelima za opis Markovljevih lanaca. Pomoću tih modela ćemo kasnije analizirati sustave posluživanja i mreže repova.

4.1 Markovljevi lanci s diskretnim parametrom

4.1.1 Homogeni Markovljev lanac

Prvo analiziramo Markovljeve lance s diskretnim parametrom. Oni igraju važnu ulogu u opisu informacijskih svojstava izvora informacije, ali i u opisu prometa. Primjer je opis ponašanja binarnog izvora koji u koracima (jednakim vremenskim razmacima) generira 0 ili 1. Ako takvo izvorište promatramo kao Markovljev izvor, onda su 0 i 1 moguća stanja procesa. Ako je izvorište kao n-ti simbol generiralo 1, onda kažemo da je Markovljev lanac u n-tom koraku u stanju 1.

Neka Markovljev lanac $\{X_n, n \geq 0\}$ ima skup diskretnih stanja $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Skup stanja može biti beskonačan ili konačan. Oznaka $X_n = i$ neka znači da se Markovljev lanac u n-tom koraku nalazi u stanju i. n ovdje odgovara rednom broju realizacije nekog realnog procesa kojeg opisujemo Markovljevim lancem. Na primjer, to može biti generator slučajnih cijelih brojeva od 1 do 10. Skup mogućih stanja ovog procesa je $E = \{1, 2, \ldots, 10\}$. Za opći Markovljev lanac vrijedi sljedeće:

$$P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i_n). \tag{4.1}$$

Vjerojatnost $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ zovemo *prijelaznom vjerojatnošću iz stanja i_n u stanje j_{n+1}*. U općem slučaju ta se vjerojatnost mijenja ovisno o vrijednosti parametra n. Ako je broj stanja Markovljevog lanca m, onda u svakom koraku imamo ukupno $m \cdot m$ takvih vjerojatnosti (za svako sadašnje moguće stanje imamo m mogućih budućih stanja). Kako bismo uspijevali odrediti vjerojatnosti stanja lanca u n-tom koraku, definiramo matricu prijelaznih vjerojatnosti.

Definicija 4.1 (Matrica prijelaznih vjerojatnosti (*Transition Probability Matrix*))
Prijelaz iz stanja i u koraku $n-1$ u stanje j u koraku n opisan je prijelaznom vjerojatnošću*:*

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \tag{4.2}$$

Prijelazna vjerojatnosti $p_{ij}^{(n)}$ je član matrice prijelaznih vjerojatnosti *na mjestu (i, j). Matrica prijelaznih vjerojatnosti u n-tom koraku je*

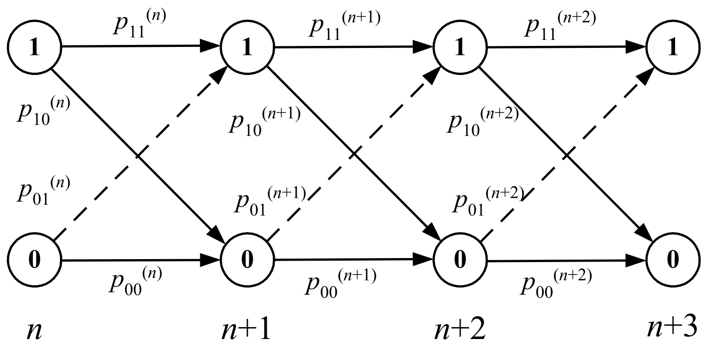
$$\mathbf{P}(n) = \left[p_{ij}^{(n)}\right] \tag{4.3}$$

Zbroj elemenata svakog retka ove matrice jednak je jedan:

$$\sum_j p_{ij}^{(n)} = 1, \quad p_{ij}^{(n)} \geq 0 \tag{4.4}$$

Matrice s ovakvim svojstvom zovemo stohastičkim matricama.

Pogledajmo kakva bi bila matrica prijelaznih vjerojatnosti binarnog izvora o kojem smo govorili na početku. Njega pobliže opisuje slika 4.1. Očito je da u općem slučaju matrica prijelaznih vjerojatnosti



Slika 4.1: Binarni izvor - opis Markovljevim lancem

može ovisiti o koraku n. No, pretpostavimo da je matrica jednaka za svaki korak. Takve Markovljeve lance zovemo *homogenim*. Neka je vjerojatnost da izvor pređe u stanje 1 ako je u stanju 0 jednaka q, a vjerojatnost da pređe u 0 ako je u stanju 1 neka je w. Tada je matrica prijelaznih vjerojatnosti jednaka:

$$\mathbf{P}(n) = \begin{bmatrix} 1-q & q \\ w & 1-w \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

Matrica prijelaznih vjerojatnosti nam omogućuje izračun vjerojatnosti da se Markovljev lanac u n-tom koraku nađe u nekom konkretnom stanju j. Neka $\mathbf{p}(n)$ označava vektor-stupac čiji j-ti element označava vjerojatnost da se lanac u n-tom koraku nalazi u stanju j. Neka elementi tog vektor-stupca redom nose oznake $p_1(n), p_2(n), \ldots$. Možemo napisati

$$\mathbf{p}(n) = [p_1(n), p_2(n), \ldots]^\top \tag{4.6}$$

Ako se proces u n-tom koraku nalazi u stanju j, onda se u $(n-1)$-om koraku nalazio u stanju 1, pa je skočio u stanje j, ili se nalazio u stanju 2 pa je skočio u stanje j itd. Događaj "proces je bio u stanju k i skočio je u stanje j" je disjunktan sa svim drugim događajima tog oblika. Zato možemo napisati:

$$\begin{aligned} p_j(n) &= \sum_i P\{X_n = j, X_{n-1} = i\} = \\ &= \sum_i P\{X_n = j | X_{n-1} = i\} \cdot P\{X_{n-1} = i\} = \sum_i p_{ij}^{(n)} p_i(n-1) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Budući da zbroj u gornjem izrazu odgovara množenju vektor-retka $p_i(i-1)$ s desne strane s matricom prijelaznih vjerojatnosti, dobivamo:

$$\mathbf{p}(n) = \mathbf{P}(n)^\top \cdot \mathbf{p}(n-1) \tag{4.8}$$

Budući da je $A^\top \cdot B^\top = (B \cdot A)^\top$, iterativno dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(n) &= \mathbf{P}(n)^\top \cdot \mathbf{p}(n-1) = [\mathbf{P}(n-1) \cdot \mathbf{P}(n)]^\top \cdot \mathbf{p}(n-2) = \\ &= \ldots = [\mathbf{P}(1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(n)]^\top \cdot \mathbf{p}(0) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Koristeći izraz (4.9) možemo izračunati razdiobu vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca u bilo kojem koraku.

DEFINICIJA 4.2 (HOMOGENI MARKOVLJEV LANAC)
Markovljevi lanci kod kojih matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}(n)$ *ne ovisi o koraku* n *se zovu homogeni Markovljevi lanci. Vrijedi da je* $p_{ij}^{(n)} = p_{ij}, \quad \forall\ n, i, j$. *Tu konstantnu matricu prijelaznih vjerojatnosti označavamo* $\mathbf{P}$.

Ukoliko je neki Markovljev lanac homogen, vektor-stupac vjerojatnosti Markovljevog lanca u n-tom koraku izračunavamo prema izrazu:

$$\mathbf{p}(n) = (\mathbf{P}^n)^\top \cdot \mathbf{p}(0) \tag{4.10}$$

Nadalje ćemo promatrati upravo homogenu klasu Markovljevih lanaca.

Promotrimo matricu $\mathbf{P}^n$. To je matrica čiji element (i, j), kojeg ćemo označiti $p_{ij}(n)$, predstavlja vjerojatnost prijelaza procesa iz stanja i u stanje j nakon n koraka. Ako matrica $\mathbf{P}^n$ konvergira k nekoj matrici $\hat{\mathbf{P}}$ kada n teži u beskonačno i ako su svi elementi te matrice veći od 0, onda Markovljev lanac ima svojstvo prelaska u stacionarno stanje - stanje kada se vjerojatnost da se proces nalazi u nekom stanju i ne mijenja u "vremenu". Ovo svojstvo je izreka *ergodičkog teorema*.

SVOJSTVO 4.1 (ERGODIČKI TEOREM)
Neka matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ *homogenog Markovljevog lanca ima svojstvo da barem jedna njena potencija* $\mathbf{P}^n$ *sadrži elemente koji su svi strogo veći od nule. Ako postoji takva matrica* $\mathbf{P}$, *onda zasigurno postoji matrica* $\hat{\mathbf{P}}$ *jednaka:*

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n \tag{4.11}$$

Reci matrice $\hat{\mathbf{P}}$ *su svi jednaki, tj. postoji* $\hat{p}_j$ *koji ne ovisi o* i *takav da je*

$$\hat{p}_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad \forall i \tag{4.12}$$

$\hat{p}_j$ *se zovu stacionarne vjerojatnosti i one čine vektor-stupac stacionarnih vjerojatnosti* $\hat{\mathbf{p}}$. *Vektor-stupac stacionarnih vjerojatnosti jednak je svakom* ***retku*** *matrice* $\hat{\mathbf{P}}$. *Markovljev lanac za kojeg postoji limes (4.11) zove se regularan ili ergodički Markovljev lanac.*

Ergodički teorem koristimo da bismo saznali da li Markovljev lanac ima stacionarne vjerojatnosti. Dosta često se uvjet postojanja stacionarnih vjerojatnosti uvodi kroz pojam pozitivne rekurentnosti Markovljevog lanca.

DEFINICIJA 4.3 (IREDUCIBILNOST MARKOVLJEVOG LANCA S DISKRETNIM PARAMETROM)
Stanje j *Markovljevog lanca je* dostupno *iz stanja* i, *s oznakom* $i \to j$, *ako vrijedi da je:*

$$p_{ij}^{(n)} > 0, \ \text{za}\ 0 \le n < \infty$$

Ako vrijedi $i \to j$ *i* $j \to i$, *onda stanja* i *i* j *međusobno* komutiraju. *Ako sva stanja Markovljevog lanca međusobno komutiraju, onda je lanac* ***ireducibilan***.

DEFINICIJA 4.4 (ERGODIČKI MARKOVLJEV LANAC S DISKRETNIM PARAMETROM)
Stanje Markovljevog lanca i *je* rekurentno *ako je dostupno iz samog sebe u konačnom broju koraka, tj. ako se u konačnom broju koraka može vratiti u samo sebe. Stanje* i *je* pozitivno rekurentno *ako je očekivani broj koraka do povratka u stanje* i *manji od beskonačno. Inače, stanje je* nul-rekurentno.

Stanje i *ima period* k *ako je* $p_{ii}^n = 0$ *kada god* n *nije djeljiv s* k *i* k *je najveći cijeli broj s takvim svojstvom.*

Ako je $k = 1$, onda je stanje i aperiodično.

Markovljev lanac je pozitivno rekurentan ako je ireducibilan i ako je barem jedno stanje pozitivno rekurentno. Markovljev lanac je aperiodičan ako su mu sva stanja aperiodična.

Pozitivno rekurentan, aperiodičan Markovljev lanac se zove ***ergodički Markovljev lanac****.*

Svojstvo 4.2 (Granični teorem)
Za ireducibilan Markovljev lanac vrijedi

$$\hat{p}_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}, \quad \forall i \tag{4.13}$$

i vektor $\hat{\mathbf{p}} = [\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots]^\top$ je jedinstven.

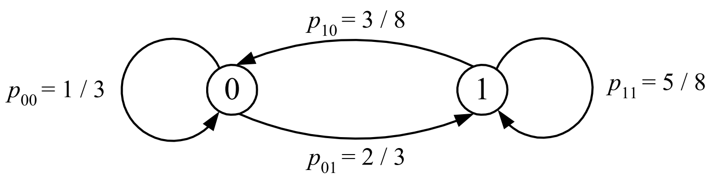
4.1.2 Tehnike računanja stacionarnih vjerojatnosti

Osnovni problem koji se javlja u primjeni Markovljevih lanaca je način računanja stacionarnih vjerojatnosti stanja lanca. Moramo odrediti matricu $\hat{\mathbf{P}}$ i pomoću nje izračunati vjerojatnosti stanja lanca u stacionarnom stanju. Pogledajmo primjer 4.1.

Primjer 4.1 Promatrajmo homogen Markovljev lanac s dva stanja $E = \{0, 1\}$. Pretpostavimo da je matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 3/8 & 5/8 \end{bmatrix}$$

Gornja matrica znači da ako je proces u stanju 0, vjerojatnost da će ostati u istom stanju je 1/3, a da će preći u stanje 1 je 2/3. Isto tako, ako je proces u stanju 1, vjerojatnost da će ostati u istom stanju je 5/8, a vjerojatnost da će preći u stanje 0 je 3/8. Budući da se prijelazne vjerojatnosti ne mijenjaju, opisani proces možemo opisati dijagramom na slici 4.2. Takav dijagram zovemo dijagram stanja Markovljevog lanca. Izračunajmo matricu prijelaznih vjerojatnosti nakon 2 i 3 koraka.



Slika 4.2: Dijagram stanja binarnog izvora

$$\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} 13/36 & 23/36 \\ 23/64 & 41/64 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} \frac{311}{864} & \frac{553}{864} \\ \frac{553}{1536} & \frac{983}{1536} \end{bmatrix}$$

Može se pokazati da je:

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} + \frac{1}{25}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 2^{4-3n} & \frac{16}{25} - \frac{1}{25}\left(-\frac{1}{3}\right)^n 2^{4-3n} \\ \frac{9}{25} - \frac{1}{25}\left(-\frac{1}{8}\right)^n 3^{2-n} & \frac{16}{25} + \frac{1}{25}\left(-\frac{1}{8}\right)^n 3^{2-n} \end{bmatrix}$$

Iz gornje je matrice lako pronaći limes kada n teži u beskonačnost:

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{16}{25} \\ \frac{9}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}$$

Sada iščitamo bilo koji redak ove matrice i dobivamo vektor stacionarnih vjerojatnosti:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix}^\top$$

Objasnimo sada što točno znači dobiveni vektor. Neka je proces u početnom (nultom) koraku bio u bilo kojem stanju. Vjerojatnost da će u nekom sljedećem **dalekom** koraku biti u stanju 0 je 9/25, a u stanju 1 je 16/25.

Ukoliko netko zada konkretne vrijednosti vjerojatnosti stanja u inicijalnom (nultom) koraku s vektorom $\mathbf{p}(0)$, vjerojatnosti stanja u dalekoj (stacionarnoj) budućnosti su jednaka:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}(n=\infty) = \hat{\mathbf{P}}^\top \cdot \mathbf{p}(0) = \text{bilo koji redak matrice } \hat{\mathbf{P}}$$

Drugim riječima, početno stanje ne uvjetuje stacionarne vjerojatnosti procesa.

Primijetimo da je pokazani postupak računanja stacionarnih vjerojatnosti izuzetno složen. Pokušajmo izračunati stacionarne vjerojatnosti ne tražeći opći izraz za n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$. Mogući način traženja ovih vjerojatnosti je korištenje metode dijagonalizacije matrice $\mathbf{P}$. Drugi način je metoda spektralne dekompozicije, a treći je rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Sve metode su objašnjene u sljedećim primjerima.

Primjer 4.2 (Dijagonalizacija) Odredimo prijelazne vjerojatnosti nakon n koraka Markovljevog lanca s dva stanja i matricom prijelaznih vjerojatnosti:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}, \quad (0 < \alpha, \beta < 1)$$

Problem u ovom primjeru je traženje izraza za opće članove matrice $\mathbf{P}^n$. Jedno moguće rješenje je metoda dijagonalizacije. Želimo matricu $\mathbf{P}$ zapisati na sljedeći način:

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

gdje je $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica - matrica koja samo na dijagonali ima ne-nul elemente. Dijagonalna matrica ima sljedeće korisno svojstvo:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_k \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_k^n \end{bmatrix}$$

Izračunajmo $\mathbf{P}^n$:

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^n \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Dakle, ukoliko matricu $\mathbf{P}$ raspišemo kao umnožak $\mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1}$, dobili smo opći oblik za n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$. Sada nam još samo treba metoda raspisivanja. Prisjetimo se sada jednog teorema linearne algebre:

Neka je $\mathbf{P}$ kvadratna matrica dimenzija $k \cdot k$. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ svojstvene vrijednosti (*eigenvalues*) matrice $\mathbf{P}$, a $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k$ svojstveni vektori (*eigenvectors*) (vektor-stupci) matrice $\mathbf{P}$. Onda je dijagonalna matrica $\mathbf{D}$ matrice $\mathbf{P}$ matrica koja na glavnoj dijagonali ima svojstvene vrijednosti, a matrica $\mathbf{S}$ matrica čiji su stupci svojstveni vektori matrice $\mathbf{P}$, tj.:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \dots & \vec{e}_k \end{bmatrix}$$

Bitno je poštivati redoslijed svojstvenih vrijednosti u matrici $\mathbf{D}$ i pripadajućih svojstvenih vektora u matrici $\mathbf{S}$.

Sada još samo treba znati izračunavati svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrica. Prisjetimo se da su svojstvene vrijednosti neke matrice $\mathbf{P}$ one vrijednosti λ koje zadovoljavaju sljedeću matričnu jednadžbu (vektor $\vec{X}$ je vektor-stupac):

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\cdot\vec{X}=\lambda\cdot\vec{X} \quad &\Rightarrow \mathbf{P}\cdot\vec{X}=\lambda\cdot\vec{X}\cdot\mathbf{I}\\ &\Rightarrow \mathbf{P}\cdot\vec{X}-\lambda\cdot\vec{X}\cdot\mathbf{I}=[0]\\ &\Rightarrow [\mathbf{P}-\lambda\cdot\mathbf{I}]\cdot\vec{X}=[0]\end{aligned}$$

Rješenje ove jednadžbe je:

$$\det[\lambda\cdot\mathbf{I}-\mathbf{P}]=0$$

Izračunajmo odmah svojstvene vrijednosti za ovaj primjer:

$$\det(\lambda\cdot I-P)=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & \alpha-1\\ \beta-1 & \lambda-\beta\end{vmatrix}=\lambda^2-(\alpha+\beta)\cdot\lambda-1+\alpha+\beta=0$$

Rješavajući dobivenu kvadratnu jednadžbu dobivamo da su $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\alpha+\beta-1$. Sada trebamo odrediti svojstvene vektore. To su vektori koji zadovoljavaju početnu matričnu jednadžbu. Za prvu svojstvenu vrijednost dobivamo:

$$\begin{bmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\beta & \beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

To je sustav dvije linearne jednadžbe:

$$\alpha\cdot x_1+(1-\alpha)\cdot x_2=x_1,\qquad (1-\beta)\cdot x_1+\beta\cdot x_2=x_2$$

Rješavanjem dobivamo da mora biti ispunjeno $x_1=x_2$. Sustav je homogen pa izabiremo trivijalno rješenje $x_1=x_2=1$.

Slično dobivamo i za drugu svojstvenu vrijednost. Sustav jednadžbi je:

$$\alpha\cdot x_1+(1-\alpha)\cdot x_2=(\alpha+\beta-1)\cdot x_1,\quad (1-\beta)\cdot x_1+\beta\cdot x_2=(\alpha+\beta-1)\cdot x_2$$

Rješavanjem dobivamo:

$$x_2=x_1\cdot\left(\frac{1-\beta}{\alpha-1}\right)$$

Možemo npr. izabrati da je $x_1=\alpha-1$, a iz toga slijedi da je $x_2=1-\beta$. Svojstveni vektori su tako:

$$\vec{e}_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\qquad \vec{e}_2=\begin{bmatrix}\alpha-1\\ 1-\beta\end{bmatrix}$$

Matrice $\mathbf{S}$ i $\mathbf{D}$ su:

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & \alpha-1\\ 1 & 1-\beta\end{bmatrix}\qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \alpha+\beta-1\end{bmatrix}$$

Sada lako izračunavamo n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}^n=\mathbf{S}\cdot\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{S}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & \alpha-1\\ 1 & 1-\beta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (\alpha+\beta-1)^n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & \alpha-1\\ 1 & 1-\beta\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{S}^{-1}=\frac{1}{2-\alpha-\beta}\begin{bmatrix}1-\beta & -1\\ 1-\alpha & 1\end{bmatrix}^\top=\frac{1}{2-\alpha-\beta}\begin{bmatrix}1-\beta & 1-\alpha\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^n=\frac{1}{2-\alpha-\beta}\cdot\begin{bmatrix}(1-\beta)+(1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)-(1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-1)^n\\ (1-\beta)-(1-\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)+(1-\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)^n\end{bmatrix}$$

Ako su α i β vjerojatnosti, onda je $0 \leq |\alpha+\beta-1| \leq 1$, pa je

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2-\alpha-\beta} \cdot \begin{bmatrix} (1-\beta)+(1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)-(1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-1)^n \\ (1-\beta)-(1-\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)+(1-\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)^n \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2-\alpha-\beta} \cdot \begin{bmatrix} (1-\beta) & (1-\alpha) \\ (1-\beta) & (1-\alpha) \end{bmatrix}$$

Stacionarne vjerojatnosti su:

$$\hat{\mathbf{p}}_1 = \frac{1-\beta}{2-\alpha-\beta} \qquad \hat{\mathbf{p}}_2 = \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}$$

Iako ovaj primjer izgleda izuzetno komplicirano, metoda dijagonalizacije je relativno jednostavna za konkretne numeričke primjere, a posebno je korisna u slučaju kada je broj mogućih stanja lanca veći od dva.

Primjer 4.3 (Spektralna dekompozicija) Pravilo spektralne dekompozicije kakvo ga ovdje uvodimo vrijedi **samo za Markovljeve lance s dva stanja - binarne lance**. Spektralna dekompozicija je pojednostavljenje prethodne metode. To je način računanja n-te potencije matrice prijelaznih vjerojatnosti pomoću svojstvenih vrijednosti matrice prijelaznih vjerojatnosti λ_1, λ_2 i konstituirajućih matrica $\mathbf{E}_1$ i $\mathbf{E}_2$ matrice $\mathbf{P}$ na sljedeći način:

$$\mathbf{P}^n = \lambda_1^n \cdot \mathbf{E}_1 + \lambda_2^n \cdot \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \cdot [\mathbf{P} - \lambda_2 \cdot \mathbf{I}] \qquad \mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot [\mathbf{P} - \lambda_1 \cdot \mathbf{I}]$$

Provjerimo odmah ovu metodu na prethodnom primjeru. Matrica $\mathbf{P}$ i svojstvene vrijednosti su redom:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix} \qquad (0 < \alpha, \beta < 1)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = \alpha+\beta-1$$

Nadalje je

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2} \cdot [\mathbf{P} - \lambda_2 \cdot I] = \frac{1}{2-\alpha-\beta} \begin{bmatrix} 1-\beta & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} \cdot [\mathbf{P} - \lambda_1 \cdot I] = \frac{1}{\alpha+\beta-2} \begin{bmatrix} \alpha-1 & 1-\alpha \\ 1-\beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^n &= \frac{1^n}{2-\alpha-\beta} \begin{bmatrix} 1-\beta & 1-\alpha \\ 1-\beta & 1-\alpha \end{bmatrix} + \frac{(\alpha+\beta-1)^n}{\alpha+\beta-2} \begin{bmatrix} \alpha-1 & 1-\alpha \\ 1-\beta & -\alpha \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2-\alpha-\beta} \cdot \begin{bmatrix} (1-\beta)+(1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)-(1-\alpha)\cdot(\alpha+\beta-1)^n \\ (1-\beta)-(1-\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)^n & (1-\alpha)+(1-\beta)\cdot(\alpha+\beta-1)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Traženjem limesa dobivamo stacionarne vjerojatnosti kao i u prethodnom primjeru.

U slučaju kada imamo Markovljev lanac s više od dva stanja, postupak računanja n-te potencije postaje uistinu kompliciran. No, za ergodičke Markovljeve lance, stacionarne vjerojatnosti se mogu nalaziti i direktno iz matrice $\mathbf{P}$ i to rješavajući sustav linearnih jednadžbi:

$$\hat{p}_j = \sum_k \hat{p}_k p_{kj} \qquad \sum_j \hat{p}_j = 1$$

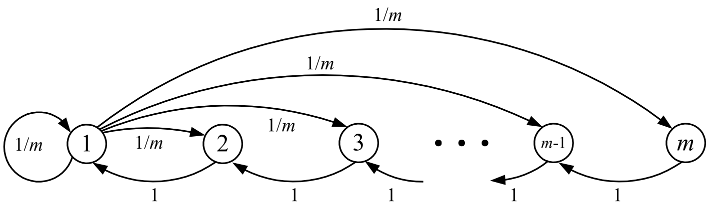
odnosno

$$\hat{\mathbf{P}}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \qquad \sum_j \hat{p}_j = 1 \tag{4.14}$$

Izraz (4.14) se temelji na posljedici ergodičkog teorema da se razdioba vjerojatnosti stanja u stacionarnom stanju ne mijenja s korakom. Dakle, izraz (4.14) jednostavno kaže da je razdioba u sljedećem koraku jednaka razdiobi u sadašnjem koraku. Međutim, taj izraz predstavlja i sustav linearnih jednadžbi. Dakle, ako riješimo ovaj sustav, izračunali smo stacionarne vjerojatnosti.

Primjer 4.4 (Sustav linearnih jednadžbi) Zamislimo da se elektron može naći u ukupno m energetskih stanja: $E = \{1, 2, \dots, m\}$. U više stanje elektron može preći samo kad je u stanju 1. Vjerojatnosti da iz prvog pređe u bilo koje drugo stanje su jednake. Kada se nađe u stanju $i > 1$, u sljedećem koraku može preći jedino u stanje $i-1$. Pronađimo vjerojatnost da je elektron u nekom stanju j pretpostavljajući da je proces ušao u stacionarno stanje.

Za početak, potražimo matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$. Vjerojatnost da iz stanja 1 prijeđe u bilo koje drugo stanje je jednako $1/m$, a vjerojatnost da iz stanja $i > 1$ pređe u stanje $i - 1$ je jednaka 1. Dijagram stanja ovog procesa je prikazan na slici 4.3.



Slika 4.3: Dijagram stanja uz primjer 4.4

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1/m & 1/m & \dots & 1/m & 1/m \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Riješimo sustav linearnih jednadžbi

$$\hat{\mathbf{P}}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \qquad \sum_j \hat{p}_j = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1/m & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/m & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/m & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1/m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_{m-1} \\ \hat{p}_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_{m-1} \\ \hat{p}_{m-1} \end{bmatrix}$$

Dobivamo m jednadžbi, koje rješavamo sukcesivnim uvrštavanjem kako je prikazano ispod.

$$\left.\begin{aligned} \hat{p}_1 &= \frac{1}{m}\hat{p}_1 + \hat{p}_2 \\ \hat{p}_2 &= \frac{1}{m}\hat{p}_1 + \hat{p}_3 \\ &\vdots \\ \hat{p}_{m-1} &= \frac{1}{m}\hat{p}_1 + \hat{p}_m \\ \hat{p}_m &= \frac{1}{m}\hat{p}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \hat{p}_{m-1} &= 2 \cdot \hat{p}_m \\ \hat{p}_{m-2} &= 3 \cdot \hat{p}_m \\ &\vdots \\ \hat{p}_2 &= (m-1) \cdot \hat{p}_m \\ \hat{p}_1 &= m \cdot \hat{p}_m \end{aligned}\right.$$

Primijetimo da jednadžbe možemo također postaviti na sljedeći način. Promatrajmo stanje k našeg procesa. Vjerojatnost da će lanac biti u stanju k u sljedećem koraku je jednaka vjerojatnosti da je lanac trenutno u stanju k i da će ostati u istom stanju ($\hat{p}_k \cdot p_{kk}$) plus zbroj vjerojatnosti vjerojatnosti da se proces nalazi u nekom drugom stanju j i da će proces u sljedećem koraku preći u stanje k ($\sum_{j \neq k} \hat{p}_j p_{jk}$). Takvim razmišljanjem dobivamo jednadžbu:

$$\hat{p}_k = \hat{p}_k 0 + \hat{p}_{k+1} \cdot 1 + \hat{p}_1 \cdot \frac{1}{m}$$

Pošto je zbroj svih stacionarnih vjerojatnosti jednak 1, to slijedi da je:

$$\sum_{i=1}^{m} \hat{\mathbf{p}}_i = [m + (m-1) + ... + 2 + 1] \cdot \hat{p}_m = \frac{m(m+1)}{2} \cdot \hat{p}_m = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_m = \frac{2}{m(m+1)}$$

Iz gornjih jednadžbi i rješenja za $\hat{\mathbf{p}}_m$ slijede sve stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{p}_j = \frac{2(m-j+1)}{m(m+1)}, \quad j = 1, \ldots, m$$

Izuzetno je važno primijetiti da je linearni sustav koji se postavlja homogen i da se rješenje može pronaći jedino tako da se dodatno iskoristi jednadžba:

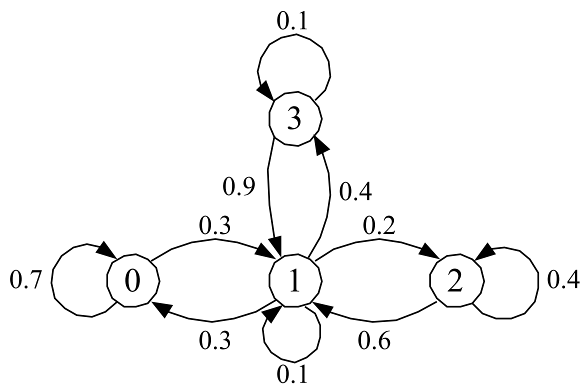
$$\sum_j \hat{p}_j = 1$$

Primjer 4.5 (Postavljanje matrične jednadžbe za stacionarne vjerojatnosti) Većina konkretnih Markovljevih lanaca je teško rješiva ručno i često se za rješavanje koriste određeni matematički programski alati. Primjeri su ©Mathematica i ©MATLAB. Ti alati imaju ugrađene funkcije za rješavanje sustava linearnih jednadžbi (*Solver*). Slične funkcije imaju i neki *PalmTop* kalkulatori, npr. HP-48 GX. Te funkcije rješavaju matričnu jednadžbu

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Pogledajmo na koji način možemo generirati matricu A i vektor $\vec{b}$ koji su ulazni parametri ovakve funkcije.

Neka je zadan dijagram stanja na slici 4.4. Odgovarajuća matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ je:



Slika 4.4: Dijagram stanja Markovljevog lanca uz primjer 4.5

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Da bismo pronašli stacionarne vjerojatnosti, postavljamo dvije jednadžbe:

$$\mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \tag{4.15}$$

$$\sum_i \hat{p}_i = 1 \tag{4.16}$$

Jednadžbu (4.15) možemo transformirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} - \mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{P}^\top - \mathbf{I}\right) \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Dobili smo jednadžbu oblika $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$, ali takav sustav nije jedinstveno rješiv budući da je $\vec{b} = \mathbf{0}$. Da bismo dobili jedinstveno rješiv sustav, moramo uključiti jednadžbu (4.16). To radimo tako što neki od redaka matrice $\mathbf{P}^\top - \mathbf{I}$ (k-ti) zamijenimo s jediničnim retkom, a kao k-ti element nul-vektora upišemo jedinicu. Za k-ti redak odabiremo onaj koji ima najviše nenul elemenata.

$$\mathbf{P}^\top - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0.7-1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.1-1 & 0.6 & 0.9 \\ 0 & 0.2 & 0.4-1 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.1-1 \end{bmatrix}$$

Odabiremo drugi redak i dobivamo sustav:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -0.3 & 0.3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.2 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \hat{p}_3 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

Vrijednosti za $\mathbf{A}$ i $\vec{b}$ unosimo u funkciju za rješavanje sustava linearnih jednadžbi i dobivamo stacionarne vjerojatnosti. Dakako, možemo koristiti i Gauss-Jordanovu metodu ili Cramerovu metodu.

Naravno, sustav $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ možemo riješiti i na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \cdot \vec{x} &= \vec{b} \quad /\mathbf{A}^{-1} \cdot \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b} \\ \vec{x} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

Ovaj pristup je bolji ukoliko pišemo program za traženje stacionarnih vjerojatnosti, budući da je funkciju za invertiranje matrice jednostavno lako napistati. Kako god radili, dobivamo sljedeća rješenja:

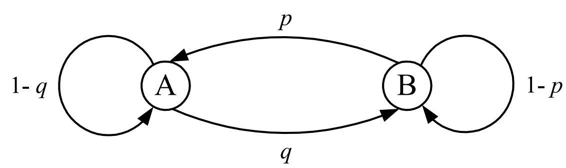
$$\hat{\mathbf{p}}^\top = [\ 0.36 \quad 0.36 \quad 0.12 \quad 0.16\ ]$$

4.1.3 Odnos homogenog Markovljevog lanca i geometrijske razdiobe

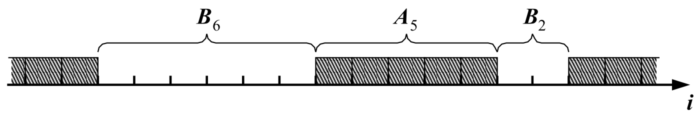
Promotrimo dio slijeda ATM ćelija koje stvara neki izvor. Pretpostavimo da takav izvor možemo opisati Markovljevim lancem s dva stanja: A i B. Dijagram stanja prikazan je na slici 4.5, a uzorak jedne moguće trajektorije prikazan je na slici 4.6.

Izračunajmo stacionarne vjerojatnosti rješavanjem sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{p}_B &= (1-p) \cdot \hat{p}_B + q \cdot \hat{p}_A \\ 1 &= \hat{p}_A + \hat{p}_B \ \Rightarrow \\ \\ \hat{p}_B &= \hat{p}_B - p \cdot \hat{p}_B + q \cdot (1 - \hat{p}_B) \ \Rightarrow \hat{p}_B = \frac{q}{q+p} \\ \hat{p}_A &= 1 - \hat{p}_B = \frac{p}{q+p}\end{aligned}$$



Slika 4.5: Dijagram stanja binarnog Markovljevog lanca



Slika 4.6: Slijed ATM ćelija opisan Markovljevim lancem

Pokušajmo sada izračunati vjerojatnosti događaja A_i i B_i, gdje A_i označava da je proces u stanju A boravio točno i koraka, a B_i da je proces u stanju B boravio točno i koraka.

Do vjerojatnosti $P(A_i)$ možemo doći sljedećim razmišljanjem. Proces se u A zadržao i koraka što znači da je u $i+1$-vom koraku prešao u stanje B. Vjerojatnost da proces pri prijelazu u sljedeći korak ostane u istom stanju (A) je $1-q$. Vjerojatnost da pređe u stanje B je q. Vjerojatnost $P(A_i)$ jednaka je vjerojatnosti da je proces u $i-1$ prijelaza uspio ostati u stanju A i u i-tom prijelazu prešao u stanje B:

$$P(A_i) = (1-q)^{i-1} \cdot q$$

Dobili smo izraz za *geometrijsku razdiobu.* Zaključujemo da je varijabla koja mjeri broj koraka koji Markovljev lanac s diskretnim parametrom ostaje u istom stanju raspoređena po geometrijskoj razdiobi. Slično vrijedi i za vjerojatnost $P(B_i)$:

$$P(B_i) = (1-p)^{i-1} \cdot p$$

Prisjetimo se izraza za očekivanje geometrijske razdiobe. Izračunali smo očekivanje za slučaj kada je funkcija vjerojatnosti bila $P_i = (1-p)^i p$. No u našem slučaju je funkcija vjerojatnosti oblika $P_i = (1-p)^{i-1}p$. Stoga je očekivanje $E[A_i]$ jednako:

$$E[A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} iq(1-q)^{i-1} = \ldots = \frac{1}{q}$$

Dakle, vrijedi:

$$E[A_i] = \frac{1}{q} \qquad E[B_i] = \frac{1}{p}$$

Budući da stacionarne vjerojatnosti odgovaraju udjelima vremena koje lanac provodi u odgovarajućem stanju, moraju vrijediti sljedeće relacije:

$$\hat{p}_A = \frac{E[A_i]}{E[A_i] + E[B_i]}$$
$$\hat{p}_B = \frac{E[B_i]}{E[A_i] + E[B_i]}$$

Provjerimo ovu tvrdnju:

$$\hat{p}_A = \frac{E[A_i]}{E[A_i] + E[B_i]} = \frac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} = \frac{p}{q+p}$$
$$\hat{p}_B = \frac{E[B_i]}{E[A_i] + E[B_i]} = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{p}} = \frac{q}{q+p}$$

Dakle, ako neka varijabla A_i mjeri broj koraka (intervala) u kojima se proces bez prekida nalazi u istom stanju, onda se razdioba te varijable ravna po *geometrijskoj razdiobi.* Omjer očekivanja za neko specifično stanje A i zbroja očekivanja za sva stanja lanca daje stacionarnu vjerojatnost stanja A.

4.2 Markovljevi lanci s kontinuiranim parametrom

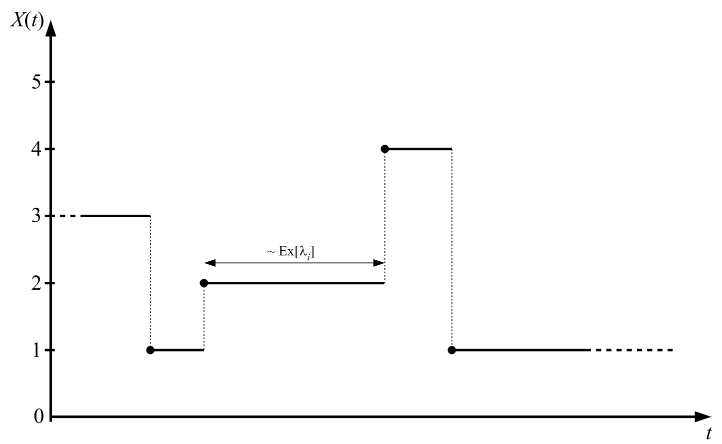
U prethodnom dijelu smo promatrali Markovljeve lance za koje nas nije zanimalo kada i kako često mijenjaju svoja stanja. U ovom ćemo dijelu dodati vremensku dimenziju i promatrati Markovljeve lance kontinuirane u vremenu.

Promatrajmo neki stohastički proces koji ima skup diskretnih stanja E. Dopustimo da proces promijeni svoje stanje u bilo kojem trenutku u vremenu i neka buduće stanje ovisi samo o sadašnjem. Takav proces zovemo Markovljev lanac kontinuiran u vremenu. Primjer ovakvog procesa je trgovački putnik koji putuje između n gradova. Kada se putnik nalazi u gradu i onda je stanje Markovljevog lanca i. Putnik može promijeniti grad u bilo kojem trenutku u vremenu, a time i stanje procesa.

Dajmo sada egzaktnu definiciju Markovljevog lanca s kontinuiranim parametrom:

Definicija 4.5 (Markovljev lanac s kontinuiranim parametrom (kontinuiran u vremenu))
Slučajni proces s diskretnim stanjima $X(t)$ je Markovljev lanac kontinuiran u vremenu ako za sve brojeve $n \in \mathbb{N}$, i svaki slijed $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}$ takav da je $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1}$ vrijedi

$$P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = t_2, ..., X(t_n) = i_n] = P[X(t_{n+1}) = j \mid X(t_n) = i_n] \tag{4.17}$$



Slika 4.7: Trajektorija Markovljevog lanca kontinuiranog u vremenu

Tipična trajektorija Markovljevog lanca kontinuiranog u vremenu prikazana je na slici 4.7. Kontinuiran Markovljev lanac odlikuje svojstvo odsutnosti pamćenja. Takvo svojstvo imaju i procesi s neovisnim prirastima diskretni po vrijednostima i kontinuirani po vremenu. Kod takvih procesa prirast u budućnosti ne ovisi o prirastima u prošlosti. Dakle, ako nekakav proces s diskretnim stanjima ima *neovisne priraste*, onda je on *Markovljev lanac.*

Primjer procesa s neovisnim prirastima je Poissonov proces. On ima kontinuiran parametar, diskretna stanja i svojstvo odsutnosti pamćenja. To ga čini primjerom Markovljevog lanca. Evo dokaza:

$$\begin{aligned}
&P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, ..., X_{t_0} = x_0) = \\
&= P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1} | X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}} = x_{n-1} - x_{n-2}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0} = x_1 - x_0, X_{t_0} = x_0) = \\
&= P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1}) = P(X_{t_n} - X_{t_{n-1}} = x_n - x_{n-1} | X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \\
&= P(X_{t_n} = x_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1})
\end{aligned}$$

Definirajmo prijelaznu vjerojatnost i matricu prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog procesa s kontinuiranim parametrom:

DEFINICIJA 4.6 (MATRICA PRIJELAZNIH VJEROJATNOSTI)
Neka su s i t vremena iz parametarskog skupa Markovljevog lanca kontinuiranog u vremenu. Uvjetna vjerojatnost

$$p_{ij}^{[s,t]} = P(X_t = x_j | X_s = x_i) \tag{4.18}$$

zove se prijelazna vjerojatnost Markovljevog lanca iz stanja x_i u stanje x_j. Matrica $P^{[s,t]}$ sastavljena od elemenata $p_{ij}^{[s,t]}$ se zove matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca.

Proces se u nekom vremenskom trenutku t može nalaziti samo u jednom stanju (konzervativan proces). Zbroj vjerojatnosti prijelaza iz jednog stanja u sva sljedeća moguća stanja jednak je 1, tj.:

$$\sum_j p_{ij}^{[s,t]} = 1 \tag{4.19}$$

Matrice prijelaznih vjerojatnosti imaju sljedeće zanimljivo svojstvo: prijelazna matrica iz trenutka s u trenutak u jednaka je umnošku matrica prijelaza $P^{[s,t]} \cdot P^{[t,u]} = P^{[s,u]}$. To je izreka poznatog Chapman-Kolmogorovljevog teorema:

SVOJSTVO 4.3 (CHAPMAN-KOLMOGOROVLJEV TEOREM)
Neka je $\mathbf{P}^{[s,u]}$ matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog procesa kontinuiranog u vremenu. Tada ona zadovoljava Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu:

$$\mathbf{P}^{[s,u]} = \mathbf{P}^{[s,t]} \cdot \mathbf{P}^{[t,u]}, \quad s \leq t \leq u \tag{4.20}$$

PRIMJER 4.6 Pronađimo matricu prijelaznih vjerojatnosti za Poissonov proces.

Formulirajmo prvo vjerojatnost prijelaza iz stanja i u trenutku s u stanje j u trenutku t. Jasno je da je Poissonov proces zapravo proces brojanja. Kao takav on je progresivan, tj. u vremenu njegovo stanje po vrijednosti nikada ne opada. Stanje stagnira ili raste. Stanje raste za jedan kada se realizira događaj kojeg Poissonov proces broji.

Kolika je vjerojatnost da proces prijeđe iz stanja i u trenutku s u stanje $j = i+1$ u trenutku t ? Jasno je da je ta vjerojatnost jednaka vjerojatnosti da se u vremenu $t-s$ dogodi samo jedan događaj. Isto tako vjerojatnost da iz stanja i prijeđe u stanje $j = i+k$ jednaka je vjerojatnosti da se u periodu $t-s$ dogodi točno k događaja, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ta vjerojatnost je poznata iz definicije Poissonovog procesa:

$$p_{i,j}^{[s,t]} = P[X(t+s) - X(s) = j-i] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Koristeći se ovim izrazom možemo zapisati matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}^{[s,t]}$.

$$\mathbf{P}^{[s,t]} = e^{-\lambda(t-s)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{[\lambda(t-s)]^1}{1!} & \frac{[\lambda(t-s)]^2}{2!} & \frac{[\lambda(t-s)]^3}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{[\lambda(t-s)]^1}{1!} & \frac{[\lambda(t-s)]^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{[\lambda(t-s)]^1}{1!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Svi elementi matrice ispod dijagonale jednaki su 0. Razlog tome je to što je vjerojatnost da proces prijeđe u niže stanje jednaka 0. Ova matrica ima svojstva da joj sve sporedne dijagonale imaju jednake elemente i da ovisi samo o razlici vremena $(t-s)$. Markovljeve lance s ovim svojstvom zovemo *homogeni Markovljevi lanci*. Treba primijetiti da ovaj proces nije stacionaran - očekivanje procesa nije konstanta, tj. stanje raste u vremenu, a s tim i očekivanje.

Najznačajnija klasa Markovljevih lanaca su homogeni procesi. To su oni procesi kod kojih matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}^{[s,t]}$ ne ovisi o vrijednostima t i s, nego isključivo o razlici $t-s$. Homogene Markovljeve lance definiramo na sljedeći način:

Definicija 4.7 (Homogeni Markovljev lanac)
Neka je $\{X_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ Markovljev lanac s kontinuiranim parametrom. Ukoliko sve prijelazne vjerojatnosti matrice $\mathbf{P}^{[s,t]}$, $p_{ij} = P(X_t = x_j | X_s = x_i)$, $i, j = 1, 2, \ldots$ ne ovise pojedinačno o vrijednostima parametara s odnosno t, nego jedino o razlici $\tau = t - s$, tj.:

$$P(X_t = x_j \mid X_s = x_i) = p_{ij}(\tau), \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{4.21}$$

onda je Markovljev lanac $\{X_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ homogeni Markovljev lanac.

4.2.1 Kolmogorovljeve jednadžbe

Kolmogorovljevim jednadžbama približit ćemo se problemu izračunavanja karakterističnih parametara sustava posluživanja M/M/1. Te jednadžbe predstavljaju fizikalnu interpretaciju Markovljevih lanaca.

Nadalje promatramo samo homogene Markovljeve procese. Za njih vrijedi Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba:

$$\mathbf{P}^{[0,s+t]} = \mathbf{P}^{[0,s]} \cdot \mathbf{P}^{[s,t]}$$

Za homogene Markovljeve lance vrijedi da matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}^{[s,t]}$ ovisi samo o razlici $(t-s)$. Možemo kraće zapisati da je $\mathbf{P}^{[0,t]} = \mathbf{P}(t)$. Gornja Chapman-Kolmogorovljeva jednadžba se sada može napisati i jednostavnije:

$$\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(s) \cdot \mathbf{P}(t) \tag{4.22}$$

Član (i, j) matrice $\mathbf{P}(t+s)$ dobivamo zbrajanjem članova matrica $P(s)$ i $P(t)$ na sljedeći način:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_k p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(s) \tag{4.23}$$

$p_{ij}(t)$ je funkcija parametra t. Ustvrdit ćemo (bez dokaza!) da ona zasigurno ima derivaciju u točki $t = 0$. Označimo tu derivaciju po vremenu s q_{ij}:

$$q_{ij} = \left.\frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t}\right|_{t=0} \tag{4.24}$$

Definirajmo matricu $\mathbf{Q}$ kao matricu koja je sastavljena od elemenata q_{ij}. Tu matricu zovemo matrica gustoća prijelaza ili infinitezimalna matrica:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Derivirajmo Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu s lijeve i s desne strane po s. Dobivamo:

$$\frac{\partial p_{ij}(t+s)}{\partial s} = \sum_k p_{ik}(t) \cdot \frac{\partial p_{kj}(s)}{\partial s}$$

Ako uvrstimo da je $s = 0$ dobivamo:

$$\frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t} = \sum_k p_{ik}(t) \cdot \frac{\partial p_{kj}(0)}{\partial s}$$
$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) \cdot q_{kj}$$

U matričnom zapisu je to:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q} \tag{4.25}$$

Dobivena jednadžba se zove *Kolmogorovljeva jednadžba unaprijed* (*forward Chapman equation*). Slično, ako Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu deriviramo po t i stavimo da je $t = 0$, dobivamo *Kolmogorovljevu jednadžbu unazad* (*backward Chapman equation*):

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t) \tag{4.26}$$

Sada kada znamo Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed i unazad, moramo otkriti za što ih možemo iskoristiti. Svrhu ćemo vidjeti tek kada pokažemo još neka zanimljiva svojstva koja slijede iz Kolmogorovljevih jednadžbi i riješimo naš prvi primjer.

Zamislimo da je Markovljev proces u stanju i. Vjerojatnost da u budućem periodu duljine 0 "sekundi" proces ostane u istom stanju je 1, a da promijeni stanje je 0. Dakle, važno je primijetiti da je matrica prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}(0)$ jednaka je

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}, \quad p_{ii}(0) = 1 \quad p_{ij}(0) = 0, \quad \text{za } i \neq j$$

Promatrajmo prijelaznu vjerojatnosti $p_{ij}(t)$ kada je $t > 0$ i $i \neq j$. Vrijedi sljedeće:

$$q_{ij} = \left.\frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Ako uzmemo da Δt ne teži k nuli nego da je Δt relativno mala veličina, onda možemo napisati

$$p_{ij}(\Delta t) = q_{ij} \cdot \Delta t + o(\Delta t) \tag{4.27}$$

gdje je o već spomenuti Landauov simbol[1]. Ako stavimo da je $j = i$, dobivamo

$$q_{ii} = \left.\frac{\partial p_{ii}(t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - p_{ii}(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t}$$

$$p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii} \cdot \Delta t + o(\Delta t) \tag{4.28}$$

Dakle, ukoliko promatramo stanje i nekog lanca, onda za takvo stanje možemo uvijek postaviti jednadžbe (4.27) i (4.28). Ove jednadžbe zovemo svojstvima regularnosti Markovljevog lanca kontinuiranog po parametru ili Kolmogorovljevim diferencijskim jednadžbama. Proces postavljanja jednadžbi možemo olakšati ukoliko nacrtamo dijagram stanja za takav lanac (slika 4.8).

Prisjetimo se načina na koji je bilo definirano svojstvo regularnosti Poissonovog procesa:

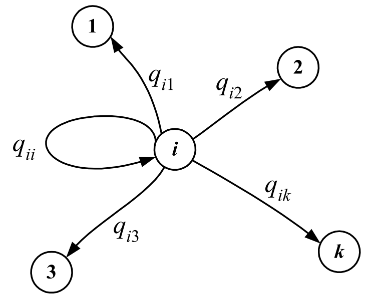
$$p_{n,n+1}(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{n,n}(\Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{n,n+k}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad k > 1$$

Uočavamo da su jednadžbe regularnosti Poissonovog procesa zapravo diferencijske Kolmogorovljeve jednadžbe. Odmah uočavamo da je $q_{ii} = -\lambda$, $q_{i,i+1} = \lambda$, inače $q_{ij} = 0$. Parametar λ je intenzitet pojavljivanja (realiziranja) događaja kojeg broji Poissonov proces. Shodno tome, zaključujemo da *koeficijent q_{ij} predstavlja intenzitet prijelaza iz stanja i u stanje j kada se Markovljev lanac nalazi u stanju i*. Ono što je

[1] o(h) je bilo koja funkcija sa svojstvom $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h}$



Slika 4.8: Segment dijagrama stanja Markovljevog lanca kontinuiranog u vremenu

izuzetno zanimljivo je da ukoliko vrijednost koeficijenta $q_{ij},\ i \neq j$ pomnožimo s jako malim vremenskim intervalom duljine Δt, dobivamo vjerojatnost da lanac u periodu Δt prijeđe iz stanja i u stanje j.

U skladu s ovim opažanjem, elemente matrice $\mathbf{Q}$ shvaćamo kao intenzitete prijelaza. Matricu $\mathbf{Q}$ zovemo matricom intenziteta prijelaza ili još *infinitezimalnom matricom.* Koeficijente q_{ij} još zovemo i *gustoćama prijelaza.*

Pogledajmo kakva pravila vrijede u toj matrici. Analizirajmo izraz (4.27). Budući da vjerojatnost ne smije biti manja od 0, zaključujemo da mora biti ispunjeno:

$$q_{ij} \geq 0, \quad \text{za } i \neq j \tag{4.29}$$

Isto tako, vjerojatnost ne smije biti veća od 1, pa iz (4.28) zaključujemo da mora biti ispunjeno:

$$q_{ii} \leq 0 \tag{4.30}$$

Elementi matrice gustoće prijelaza na dijagonali su tako uvijek negativni, a na sporednim dijagonalama pozitivni. Pored ovoga možemo zaključiti i sljedeće:

$$\begin{aligned}
\sum_j p_{ij}(t) &= 1 \quad \Rightarrow \\
\frac{d}{dt}\sum_j p_{ij}(t) &= \frac{d}{dt}(1) \quad \Rightarrow \\
\sum_j p'_{ij}(t) &= 0, \quad \text{a uz } t=0 \quad \Rightarrow \\
\sum_j q_{ij} &= 0 \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

Zbroj gustoća prijelaza u bilo kojem retku matrice gustoće prijelaza jednak je 0. Stoga mora biti zadovoljeno:

$$q_{ii} = -\sum_{j,\ j\neq i} q_{ij} \tag{4.32}$$

Demonstrirajmo ovaj zaključak na primjeru matrice intenziteta prijelaza Poissonovog procesa.

PRIMJER 4.7 Pronađimo matricu gustoća prijelaza za Poissonov proces. Iz primjera 4.6 nam je poznata matrica prijelaza ovog Markovljevog procesa kontinuiranog u vremenu:

$$\mathbf{P}^{[s,t]} = e^{-\lambda(t-s)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{[\lambda(t-s)]^1}{1!} & \frac{[\lambda(t-s)]^2}{2!} & \frac{[\lambda(t-s)]^3}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{[\lambda(t-s)]^1}{1!} & \frac{[\lambda(t-s)]^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \frac{[\lambda(t-s)]^1}{1!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Opći član te matrice je:

$$p_{ij}^{[s,t]} = P[X(t+s) - X(s) = j - i] = e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Opći član matrice $\mathbf{Q}$ je $q_{ij} = \left.\frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t}\right|_{t=0}$. Dakle opći član matrice gustoće prijelaza je

$$q_{ij} = -\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!} + \left.\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{j-i-1}}{(j-i-1)!}\right|_{t=0}$$

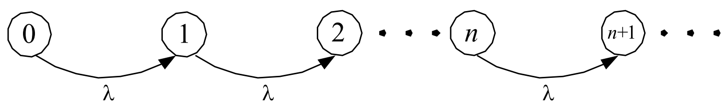
Za $i = j$ dobivamo $q_{ii} = -\lambda$, za $i = j - 1$ dobivamo $q_{i,i+1} = \lambda$, a za $i \neq j$ i $j > i + 1$ dobivamo $q_{ij} = 0$. Matrica gustoće prijelaza je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

U većini zadataka koje ćemo rješavati, matrica $\mathbf{Q}$ je poznata ili se do nje dolazi preko dijagrama stanja. Zadatak je naći matricu prijelaznih vjerojatnosti. Do matrice prijelaznih vjerojatnosti se dolazi rješavanjem Kolmogorovljevih jednadžbi unaprijed i unazad, izravno ili koristeći određene metode. Vjerojatnosti iz ove matrice se mogu shvatiti kao funkcija vjerojatnosti neke slučajne varijable, na primjer varijable duljine repa u redu čekanja. Računanjem očekivanja takve varijable možemo odrediti srednju duljinu repa ili srednje vrijeme čekanja itd.

4.2.2 Dijagram stanja Markovljevog lanca s kontinuiranim parametrom

U primjeru 4.7 smo matricu gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ odredili na osnovu poznate funkcije vjerojatnosti prijelaza iz stanja i u stanje $i+1$. No, u općem slučaju se javlja problem konstruiranja matrice $\mathbf{Q}$ iz definicije samog problema. Kao pomoćno sredstvo za konstruiranje matrice $\mathbf{Q}$ koristimo dijagram stanja. Taj dijagram stanja je sličan dijagramu stanja kod Markovljevih lanaca s diskretnim parametrom, no na strelicama koje predstavljaju prijelaze između stanja pišemo intenzitete prijelaza. Na slici 4.9 je prikazan dijagram stanja Poissonovog procesa.



Slika 4.9: Dijagram stanja Poissonovog procesa

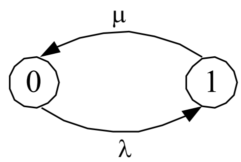
Pri izradi dijagrama stanja se ne crtaju prijelazi čiji je intenzitet 0. Tako je sa slike jasno da je intenzitet vraćanja Poissionovog procesa u neko od "nižih" stanja jednako 0. Time smo definirali da Poissonov proces ne može smanjiti svoje stanje, što je u skladu s definicijom procesa brojanja. Isto tako, iz dijagrama slijedi da Poissonov proces ne može skočiti iz stanja n u stanje $n+i$, $i > 1$. To je u skladu s definicijom da Poissonov proces broji samo pojedinačne realizacije događaja koje promatra. U slučaju Poissonovog procesa s gomilanjem, ovi prijelazi bi imali intenzitet veći od 0.

Važno je uočiti smisao intenziteta koje zapisujemo na strelicama prijelaza. U slučaju Poissonovog procesa, λ predstavlja intenzitet pojavljivanja događaja koji se broje. Jasno da taj intenzitet ne opada s brojem prebrojanih događaja. No, u većini slučajeva intenziteti ovise o trenutnom i ciljanom stanju.

Promatrajmo skupinu od N telefonskih pretplatnika koji su spojeni na grupni stupanj neke centrale. Svaki korisnik može biti u aktivnom stanju, kad razgovara, i u neaktivnom stanju, kad je slušalica spuštena. Pretpostavimo da se svaki korisnik pojedinačno može opisati dijagramom stanja na slici 4.10[2].

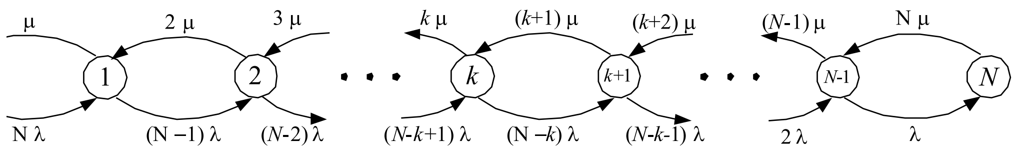
Stanje 0 predstavlja neaktivno stanje pretplatnika, a stanje 1 aktivno stanje. Promatrajmo sada Markovljev lanac čije stanje predstavlja broj aktivnih pretplatnika. Prostor stanja takvog Markovljevog

[2]Ovaj dijagram je aproksimacija dijagrama koji precizno opisuje aktivnost telefonskog pretplatnika



Slika 4.10: Dijagram stanja telefonskog pretplatnika

lanca je konačan $E = \{0, 1, \ldots, N\}$. Kada je takav lanac u stanju k, onda je aktivno k pretplatnika pa je intenzitet pojavljivanja još jednog aktivnog pretplatnika $(N-k)\lambda$. Intenzitet smanjenja broja aktivnih korisnika za 1 je $k\mu$. Na osnovu ovog razmatranja možemo nacrtati dijagram stanja Markovljevog lanca (slika 4.11) [3]. Iz dijagrama stanja neposredno iščitavamo elemente infinitezimalne matrice $\mathbf{Q}$. Matrica



Slika 4.11: Dijagram stanja broja aktivnih pretplatnika

ima dimenziju jednaku broju stanja lanca kojeg smo definirali dijagramom stanja - $N+1$. Element q_{ij}, $i \neq j$ je jednak intenzitetu prijelaza iz stanja i u stanje j s dijagrama. Elemente q_{ii} računamo po formuli (4.31):

$$q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -N\lambda & N\lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -\mu-(N-1)\lambda & (N-1)\lambda & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (N-1)\mu & -(N-1)\mu-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & N\mu & -N\mu \end{bmatrix}$$

4.2.3 Markovljevi lanci s kontinuiranim parametrom i eksponencijalna razdioba

Upoznati smo s činjenicom da su vremena između dva uzastopna nailaska događaja Poissonovog procesa brojanja raspodijeljena eksponencijalno. Pokazat ćemo da je u bilo kojem Markovljevom lancu s kontinuiranim parametrom vrijeme između dvije uzastopne promjene stanja procesa raspodijeljeno eksponencijalno.

[3] Ovaj dijagram je rezultat razmatranja diferencijskih jednadžbi:

$$p_{01}(t+\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t), \quad p_{10}(t+\Delta t) = \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

$$p_{k,k+1}(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{N-k} p_{01}(t+\Delta t), \quad p_{k,k-1}(t+\Delta t) = \sum_{i=1}^{k} p_{10}(t+\Delta t)$$

$$p_{k,k+1}(t+\Delta t) = (N-k)\lambda\Delta t + o(\Delta t), \quad p_{k,k-1}(t+\Delta t) = k\mu\Delta t + o(\Delta t)$$

Svojstvo 4.4 (Razdioba ostanka Markovljevog lanca u istom stanju)
Neka je $\{X_t \mid 0 \leq t < \infty\}$ *homogeni Markovljev lanac s pripadnom matricom gustoća prijelaza* $\mathbf{Q}$. *Neka je* T_i *slučajna varijabla koja mjeri vrijeme ostanka procesa u istom stanju* i*, odnosno varijabla koja mjeri vrijeme između ulaska i izlaska Markovljevog lanca u/iz stanja* i*. Tada slučajna varijabla* T_i *ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom* $\lambda = -q_{ii}$*:*

$$T_i \sim Ex[-q_{ii}] \tag{4.33}$$

gdje je q_{ii} *pripadni dijagonalni element u* i*-tom stupcu matrice* $\mathbf{Q}$.

Dokaz:
Uočimo i*-ti redak matrice* $\mathbf{Q}$*:*

$$\mathbf{q}_i = [q_{i1}, q_{i2}, \ldots, q_{ii}, \ldots]$$

Za svaki element ovog retka možemo napisati:

$$p_{ij}(\Delta\tau) = q_{ij}\Delta\tau + o(\Delta\tau), \quad i \neq j$$

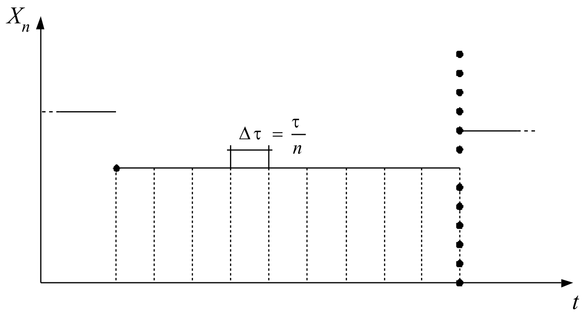
Neka je vjerojatnost $p(\Delta\tau)$ *jednaka:*

$$p(\Delta\tau) = \sum_{j,\ j\neq i} p_{ij}(\Delta\tau) = \sum_{j,\ j\neq i} q_{ij}\Delta\tau + o(\Delta\tau) = -q_{ii}\Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

Promatrajmo vremenski period duljine τ *i izračunajmo vjerojatnost* $P[T_i > \tau]$*. Podijelimo period* τ *na* n *dijelova (slika 4.12), tako da je:*

$$\Delta\tau = \frac{\tau}{n}$$

Funkciju razdiobe slučajne varijable T_i *možemo izračunati na sljedeći način:*



Slika 4.12: Uz dokaz teorema

$$F_{T_i}(\tau) = P[T_i \leq \tau] = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} (1 - p(\Delta\tau))^i \cdot p(\Delta\tau) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - [1 - p(\Delta\tau)]^{n+1}}{1 - 1 + p(\Delta\tau)} p(\Delta\tau)$$
$$= \lim_{n\to\infty} 1 - [1 - p(\Delta\tau)]^{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} [1 - p(\Delta\tau)]^{n+1}$$

Prethodni izraz možemo interpretirati na sljedeći način. Ako smo period τ *podijelili na jako veliki broj jednakih segmenata (*n*), onda je svaka kontinuirana vrijednost* $u < \tau$ *približno jednaka* $i \cdot \tau/n$*, za neki* i*. Ta je vrijednost točnije opisana što je* n *veći. Vjerojatnost da je* $T_i < \tau$ *jednaka je zbroju vjerojatnosti da je* T_i *točno jednaka* $i \cdot \tau/n$ *preko svih* $i = 0, \ldots, n$ *i da je nakon toga proces promijenio stanje.* $p(\Delta\tau)$ *označava vjerojatnost da u budućem trenutku* $\Delta\tau$ *proces prijeđe u novo stanje. Pošto buduće stanje Markovljevog lanca ovisi samo o sadašnjem, to su svi* $p(\Delta\tau)$ *jednaki, pa se jedna realizacija slučajne varijable* T_i *ravna* *po geometrijskoj razdiobi kao i u slučaju Markovljevog procesa s diskretnim parametrom. Sada jedino trebamo još riješiti gornji limes.*

Budući da Landauov simbol teži k nuli brže nego sam parametar, to u limesu zbog jednostavnosti slobodno možemo ispustiti Landauov simbol:

$$F_{T_i}(\tau) = 1 - \lim_{n\to\infty} [1 - p(\Delta\tau)]^{n+1} = 1 - \lim_{n\to\infty} \left[1 + q_{ii}\frac{\tau}{n} + o(\tau/n)\right]^{n+1} =$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left[1 + q_{ii}\frac{\tau}{n}\right]^{n+1} = 1 - e^{q_{ii}\tau}$$

Time smo jednostavno pokazali da slučajna varijabla T_i ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $-q_{ii}$, $T_i \sim Ex[-q_{ii}]$.

Q.E.D.

Dakle, vrijeme koje Markovljev proces provodi u istom stanju je raspodijeljeno eksponencijalno s parametrom koji je jednak zbroju gustoća prijelaza iz promatranog stanja u sva druga moguća stanja osim promatranog. Ovaj rezultat je iznimno važan. On nas upućuje na zaključak da se svi procesi u kojima se pojavljuju eksponencijalno raspodijeljene varijable mogu opisati Markovljevim lancem s kontinuiranim parametrom. Ovaj rezultat se može neposredno primijeniti i pri simulaciji Markovljevih procesa.

4.2.4 Opće rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi

Zamislimo sljedeći model prometnog izvorišta: Nekakav izvor prometa (nekakav telefon) može se nalaziti u dva stanja (proces $X(t)$ se može nalaziti u dva stanja): u stanju u kojem generira promet i u kojem je neaktivan. Neka je vrijeme koje provede u aktivnom stanju raspodijeljeno po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ ($E[\lambda]$), a neka je vrijeme koje provede u neaktivnom stanju također raspodijeljeno po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom μ ($E[\mu]$). Izračunajmo matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}(t)$. Izračunajmo vjerojatnost da se proces u trenutku t nalazi u stanju 0 odnosno 1.

Definirajmo da je proces u stanju 1 kada je izvor aktivan, a u stanju 0 kada je izvor neaktivan. Pretpostavimo da je na početku izvor u stanju 0. Bez obzira kada smo počeli promatrati izvor, možemo pretpostaviti da će se vrijeme koje će izvor provesti u istom stanju ponašati po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ (tvrdnja prethodnog teorema). Budući da je vrijeme do promjene stanja raspodijeljeno po eksponencijalnoj razdiobi, onda se brojač realizacija promjena ponaša kao Poissonov proces. Kolika je vjerojatnost da će se promjena stanja iz 0 u 1 dogoditi u budućnosti u nekom kratkom periodu h? Vjerojatnost je jednaka vjerojatnosti da će se u periodu h dogoditi točno 1 događaj. Koristeći svojstvo regularnosti Poissonovog procesa možemo napisati sljedeće:

$$p_{01}(h) = P(X(h) = 1|X(0) = 0) = \mu h + o(h)$$

Slično, vjerojatnost da se dogodi promjena iz 1 u 0 u budućem periodu h jednaka je vjerojatnosti da se u budućem periodu h realizira točno jedan događaj Poissonovog procesa s intenzitetom λ. Koristeći svojstvo regularnosti dobivamo:

$$p_{10}(h) = P(X(h) = 0|X(0) = 1) = \lambda h + o(h)$$

Prema jednadžbama koje smo dobili izvodeći svojstva matrice gustoće prijelaza iz gornje dvije diferencijske jednadžbe dobivamo matricu gustoće prijelaza:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$$

Do vjerojatnosti prijelaza dolazimo preko Kolmogorovljevih jednadžbi. Riješimo Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}$$

$$\begin{bmatrix} p'_{00}(t) & p'_{01}(t) \\ p'_{10}(t) & p'_{11}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix}$$

Množenjem matrica dobivamo sljedeće četiri jednadžbe:

$$\begin{aligned}
p'_{00}(t) &= -\mu \cdot p_{00}(t) + \lambda \cdot p_{01}(t) \\
p'_{01}(t) &= \mu \cdot p_{00}(t) - \lambda \cdot p_{01}(t) \\
p'_{10}(t) &= -\mu \cdot p_{10}(t) + \lambda \cdot p_{11}(t) \\
p'_{11}(t) &= \mu \cdot p_{10}(t) - \lambda \cdot p_{11}(t)
\end{aligned}$$

Također vrijedi da je:

$$\begin{aligned}
p_{00}(t) + p_{01}(t) &= 1 \\
p_{10}(t) + p_{11}(t) &= 1
\end{aligned}$$

Transformirajući dobivani sustav pomoću Laplaceove transformacije u donje područje i rješavajući dobiveni sustav linearnih jednadžbi u gornjem području dobivamo sljedeća rješenja:

$$\begin{aligned}
p_{00}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \\
p_{10}(t) &= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \\
p_{01}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} \\
p_{11}(t) &= \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}$$

Dobili smo vjerojatnosti prijelaza, tj. elemente matrice $\mathbf{P}(t)$. Sada moramo izračunati vjerojatnost da se proces u nekom trenutku t nalazi u stanju 0, odnosno u stanju 1. Te vjerojatnosti dobivamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
p_1(t) &= P\left[X(t)=1\right] = P\left[X(t)=1|X(0)=0\right] \cdot P\left[X(0)=0\right] + P\left[X(t)=1|X(0)=1\right] \cdot P\left[X(0)=1\right] = \\
&= p_{01}(t) \cdot p_0(0) + p_{11}(t) \cdot p_1(0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_0(t) &= P\left[X(t)=0\right] = P\left[X(t)=0|X(0)=0\right] \cdot P\left[X(0)=0\right] + P\left[X(t)=0|X(0)=1\right] \cdot P\left[X(0)=1\right] = \\
&= p_{00}(t) \cdot p_0(0) + p_{10}(t) \cdot p_1(0)
\end{aligned}$$

Dobivamo:

$$p_1(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{p_1(0)\lambda - p_0(0)\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{p_1(0)\lambda - p_0(0)\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

Dakako, ove vjerojatnosti možemo izračunati samo ako nam netko zada konkretne vrijednosti za vjerojatnosti $p_1(0)$ i $p_0(0)$.

Iz ovog primjera nam je jasno da je postupak dobivanja matrice prijelaza relativno složen, čak i za jednostavne procese s dva stanja. Postupak se sastoji od postavljanja velikog broja diferencijalnih jednadžbi i njihovog rješavanja pomoću Laplaceove transformacije.

Na sreću, postoje određene metode za traženje matrice prijelaznih vjerojatnosti koje se ne temelje na Laplaceovoj metodi, nego na metodi dijagonalizacije infinitezimalne matrice. Prije nego što se upoznamo s ovom metodom moramo dati teorem o općem rješenju Kolmogorovljevih jednadžbi.

Neka je $\mathbf{A}$ kvadratna matrica dimenzije n. Definirajmo specijalnu eksponencijalnu funkciju čiji je argument matrica $\mathbf{A}$ na sljedeći način:

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \tag{4.34}$$

gdje je $\mathbf{A}^k$ k-ta potencija matrice $\mathbf{A}$. Dakle izraz "*e na kvadratnu matricu*" treba shvatiti kao zbroj potencija matrice $\mathbf{A}$ koji odgovara razvoju eksponencijalne funkcije u red. Rezultat potenciranja baze prirodnog logaritma kvadratnom matricom dimenzije n je kvadratna matrica dimenzije n. Uvažavajući ovu definiciju možemo iskazati sljedeći teorem:

SVOJSTVO 4.5 (OPĆE RJEŠENJE KOLMOGOROVLJEVIH JEDNADŽBI)
Neka je zadana Kolmogorovljeva jednadžba unaprijed, odnosno unazad:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q},$$

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t)$$

gdje je $\mathbf{Q}$ matrica gustoća prijelaza, $\mathbf{P}(t)$ matrica prijelaznih vjerojatnosti, a $\mathbf{P}'(t)$ matrica derivacija elemenata matrice $\mathbf{P}(t)$ po parametru t. Neka je zadan i početni uvjet:

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

Opće rješenje Kolmogorovljevih matričnih diferencijalnih jednadžbi je:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q} \cdot t} \tag{4.35}$$

Dokaz:
Pretpostavimo da je rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi uz zadani uvjet:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q} \cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q} \cdot t)^k}{k!}$$

Derivirajmo gornji red po parametru t.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}'(t) &= \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q} \cdot t)^k}{k!}\right\} = \\ &= \frac{d}{dt}\{\mathbf{I}\} + \frac{d}{dt}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{Q} \cdot t)^k}{k!}\right\} \end{aligned}$$

Uočimo da je:

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{(\mathbf{Q} \cdot t)^k}{k!}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\mathbf{Q}^k \cdot t^k}{k!}\right\} = \mathbf{Q}^k \cdot \frac{d}{dt}\left\{\frac{t^k}{k!}\right\} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1!} = \mathbf{Q}^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1!} \cdot \mathbf{Q}$$

Slijedi:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1!} = \mathbf{Q} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1!} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}(t)$$

Slično pokazujemo i za Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{0} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1!} \cdot \mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{Q}^{k-1} \cdot \frac{t^{k-1}}{k-1!} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}$$

Jednadžba zadovoljava početni uvjet problema:

$$\mathbf{P}(0) = \lim_{t \to 0} e^{\mathbf{Q} \cdot t} = e^{\mathbf{0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{0}^k}{k!} = \frac{\mathbf{0}^0}{0!} = \mathbf{I}$$

Q.E.D.

Pogledajmo na koji način možemo iskoristiti ovaj teorem. Pretpostavimo da matrica $\mathbf{Q}$ ima različite svojstvene vrijednosti. Druge slučajeve nećemo razmatrati. Ako matrica $\mathbf{Q}$ ima sve različite svojstvene vrijednosti, onda se ona zasigurno može dijagonalizirati i zapisati u obliku:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Slijedi:

$$e^{\mathbf{Q}\cdot t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^k t^k}{k!} = \mathbf{S} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^k t^k}{k!} \right) \cdot \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S} \cdot e^{\mathbf{D}\cdot t} \cdot \mathbf{S}^{-1}$$

Budući da se $\mathbf{D}^n$ dobiva kao dijagonalna matrica $\mathbf{D}$ kojoj su svi članovi potencirani na n, to slijedi da je:

$$e^{\mathbf{D}\cdot t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix}$$

gdje su λ_i svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{Q}$. Opće rješenje možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}\cdot t} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_k t} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$$

Riješimo prethodni primjer na ovaj novi način.

Primjer 4.8 Pronađimo prijelazne vjerojatnosti Markovljevog lanca kontinuiranog u vremenu s dva stanja čija je matrica gustoća prijelaza:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -b & b \\ a & -a \end{bmatrix}$$

Pronađimo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{Q}$:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{Q}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + b & -b \\ -a & \lambda + a \end{bmatrix} \right) = (\lambda + a)(\lambda + b) - ab = \lambda^2 + \lambda(a+b) = \lambda \cdot [\lambda + a + b] = 0$$

Svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -(a+b)$. Svojstveni vektori su:

Za $\lambda_1 = 0$,

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{e}_1 = 0 \cdot \vec{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Za $\lambda_1 = -(a+b)$,

$$\mathbf{Q} \cdot \vec{e}_2 = -(a+b) \cdot \vec{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

Nadalje slijedi:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}^{-1} = -\frac{a}{a+b} \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(a+b)t} \end{bmatrix}$$

Rješenje je:

$$\mathbf{P}(t) = -\frac{a}{a+b}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(a+b)t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{a}{a+b}\begin{bmatrix} -\frac{b}{a} - e^{-(a+b)\cdot t} & -1 + e^{-(a+b)\cdot t} \\ -\frac{b}{a} + \frac{b}{a}e^{-(a+b)\cdot t} & -1 - \frac{b}{a}e^{-(a+b)\cdot t} \end{bmatrix}$$

4.2.5 Opis Markovljevog lanca diferencijalnim jednadžbama

Razmatrajmo računanje vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca u proizvoljnom trenutku $t > 0$. Jedan način da izračunamo vjerojatnosti stanja u trenutku t je da izračunamo matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}(t)$ i vektor vjerojatnosti stanja $\mathbf{p}(t)$ dobijemo pomoću jednadžbe:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t)^\top \cdot \mathbf{p}(0) \tag{4.36}$$

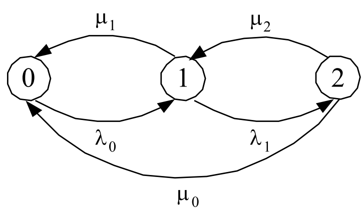
gdje je $\mathbf{p}(0)$ razdioba vjerojatnosti stanja u trenutku $t = 0$. Dobivamo:

$$\mathbf{p}(t) = \left[e^{\mathbf{Q}\cdot t}\right]^\top \cdot \mathbf{p}(0).$$

Ovaj način može biti opravdan ako je moguće dijagonalizirati matricu $\mathbf{Q}$. Međutim, ponekad moramo rješavati Markovljeve lance za opći slučaj i u tom slučaju ne možemo primijeniti nikakve numeričke metode za dijagonalizaciju matrice $\mathbf{Q}$. To je naročito neizvedivo u slučaju beskonačno velike matrice $\mathbf{Q}$. U takvim slučajevima je do razdiobe stanja lanca *nešto* lakše doći postavljanjem i rješavanjem diferencijalnih jednadžbi.

Ovdje želimo samo demonstrirati postupak postavljanja diferencijalnih jednadžbi jer će nam takav postupak biti izuzetno koristan u kasnijem razmatranju, kada budemo promatrali beskonačne i strukturirane Markovljeve lance u stacionarnom stanju. Pogledajmo sljedeći primjer:

PRIMJER 4.9 Pogledajmo dijagram stanja Markovljevog lanca prikazan na slici 4.13. Odredimo vjeroja-



Slika 4.13: Dijagram stanja trinarnog Markovljevog lanca

tnosti stanja ovog lanca u trenutku $t > 0$. Možemo razmišljati na sljedeći način. Ako je u trenutku $t + h$ proces u stanju 0, onda je u trenutku t bio u stanju 0 i nije promijenio stanje, ili je bio u stanju 1 pa je skočio u stanje 0, ili pak bio u stanju 2 pa je skočio u stanje 0. To možemo zapisati ovako:

$$p_0(t+h) = p_0(t)[1 - \lambda_0 h + o_0(h)] + p_1(t)\mu_1 h + o_1(h) + p_2(t)\mu_0 h + o_2(h)$$

Budući da Landauov simbol opada brže od h, to korekcije $o_i(h)$ možemo zamijeniti jednim jedinim $o(h)$, a da time ne izgubimo točnost jednadžbe. Sličnim razmatranjem za ostala stanja dobivamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= p_0(t)(1 - \lambda_0 h) + p_1(t)\mu_1 h + p_2(t)\mu_0 h + o_(h) \\ p_1(t+h) &= p_0(t)\lambda_0 h + p_1(t)[1 - (\lambda_1 + \mu 1)h] + p_2(t)\mu_2 h + o(h) \\ p_2(t+h) &= p_1(t)\lambda_1 h + p_2(t)[1 - (\mu_0 + \mu_2)h] + o(h) \end{aligned}$$

Vidimo da je u svim jednadžbama indeks vjerojatnosti $p_i(t+h)$ s lijeve strane jednak indeksu vjerojatnosti $p_i(t)$ s desne strane koja množi 1. Prebacimo sve takve vjerojatnosti na lijevu stranu, podjelimo sve jednadžbe s h i potražimo limese s lijeve i desne strane kada h teži k nuli:

$$\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} = -p_0(t)\lambda_0 + p_1(t)\mu_1 + p_2(t)\mu_0 + \frac{o_(h)}{h} \quad / \lim_{h\to 0}$$
$$\frac{p_1(t+h)-p_1(t)}{h} = p_0(t)\lambda_0 - p_1(t)(\lambda_1+\mu 1) + p_2(t)\mu_2 + \frac{o(h)}{h} \quad / \lim_{h\to 0}$$
$$\frac{p_2(t+h)-p_2(t)}{h} = p_1(t)\lambda_1 - p_2(t)(\mu_0+\mu_2) + \frac{o(h)}{h} \quad / \lim_{h\to 0}$$

nadalje je:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -p_0(t)\lambda_0 + p_1(t)\mu_1 + p_2(t)\mu_0$$
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = p_0(t)\lambda_0 - p_1(t)(\lambda_1+\mu_1) + p_2(t)\mu_2$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = p_1(t)\lambda_1 - p_2(t)(\mu_0+\mu_2).$$

Tako smo dobili sustav lako rješivih diferencijalnih jednadžbi. Ukoliko pogledamo infinitezimalnu matricu $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_2 & -(\mu_0+\mu_2) \end{bmatrix}$$

zaključujemo da sustav diferencijalnih jednadžbi koji smo dobili zadovoljava matrično-vektorsku jednadžbu:

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{p}(t) \tag{4.37}$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} p_0'(t) \\ p_1'(t) \\ p_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \mu_1 & \mu_0 \\ \lambda_0 & -(\lambda_1+mu_1) & \mu_2 \\ 0 & \lambda_1 & -(\mu_0+\mu_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_0(t) \\ p_1(t) \\ p_2(t) \end{bmatrix}.$$

Jednadžba (4.37) koju smo dobili je rezultat diferenciranja jednadžbe (4.36):

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t)^\top \cdot \mathbf{p}(0) \quad / \frac{d}{dt}$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{P}'(t)^\top \cdot \mathbf{p}(0)$$
$$\mathbf{p}'(t) = [\mathbf{QP}(t)]^\top \cdot \mathbf{p}(0)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{Q}^\top \mathbf{P}(t)^\top \cdot \mathbf{p}(0)$$
$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{p}(t)$$

Za rješavanje dobivenih diferencijalnih jednadžbi trebamo poznavati vektor razdiobe stanja procesa na početku - $\mathbf{p}(0)$. Početno stanje je obično poznato, pa ćemo i u ovom primjeru pretpostaviti da je proces u početku u stanju 0, što implicira $p_0(0) = 1$. Sustav najlakše rješavamo pomoću Laplaceove transformacije[4]. Transformirajmo obje strane Laplaceovom transformacijom:

$$sP_0(s) - 1 = P_0(s)\lambda_0 + P_1(s)\mu_1 + P_2(s)\mu_0$$
$$sP_1(s) - 0 = P_0(s)\lambda_0 - P_1(s)(\lambda_1+\mu_1) + P_2(s)\mu_2$$
$$sP_2(s) - 0 = P_1(s)\lambda_1 - P_2(s)(\mu_0+\mu_2)$$

Sređivanjem dobivamo:

$$P_0(s)(s+\lambda_0) - P_1(s)\mu_1 - P_2(s)\mu_0 = 1$$
$$-P_0(s)\lambda_0 + P_1(s)(s+\lambda_1+\mu_1) - P_2(s)\mu_2 = 0$$
$$-P_1(s)\lambda_1 + P_2(s)(s+\mu_0+\mu_2) = 0$$

[4] U dodatku A na kraju skripte detaljno je obrađena Laplaceova transformacija

Na žalost, sada nastupaju veliki problemi. Kada riješimo sustav linearnih jednadžbi po nepoznanicama $P_0(s), P_1(s)P_2(s)$, dobivamo izuzetno kompleksna rješenja:

$$P_0(s) = \frac{(\lambda_0\mu_0 + \mu_1(\mu_0 + \mu_2)) + (\lambda_0 + \mu_0 + \mu_1 + \mu_2)s + s^2}{s(\lambda_1(\mu_0 + s) + (\mu_1 + s)(\mu_0 + \mu_2 + s) + \lambda_0(\lambda_1 + \mu_0 + \mu_2 + s))}$$

$$P_1(s) = \frac{\lambda_0(\mu_0 + \mu_2) + s\lambda_0}{s(\lambda_1(\mu_0 + s) + (\mu_1 + s)(\mu_0 + \mu_2 + s) + \lambda_0(\lambda_1 + \mu_0 + \mu_2 + s))}$$

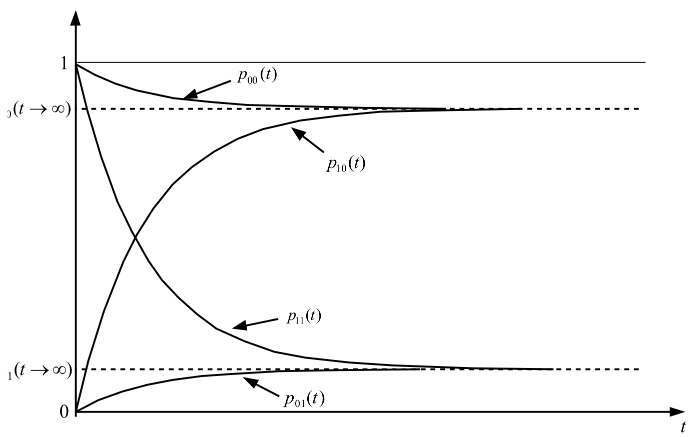
$$P_2(s) = \frac{\lambda_0\lambda_1}{s(\lambda_1(\mu_0 + s) + (\mu_1 + s)(\mu_0 + \mu_2 + s) + \lambda_0(\lambda_1 + \mu_0 + \mu_2 + s))}.$$

Ovakve jednadžbe u općem slučaju teško rješavamo i kako bismo rješavanje učinili razumnim, moramo koristiti određene matematičke alate.

Ovaj postupak demonstrira način na koji možemo postaviti diferencijalne jednadžbe za Markovljev lanac u općem slučaju. Smisao ovog postupka bit će jasan kad se upoznamo s pojmom stacionarnosti Markovljevog lanca. Rubni slučaj diferencijalnih jednadžbi bit će od izuzetne važnosti pri rješavanju problema beskonačnih jednostruko povezanih lanaca - procesa rađanja i umiranja.

4.2.6 Stacionarnost Markovljevog lanca

Prisjetimo se nakratko primjera 4.8. Na slici 4.14 su prikazani grafovi vjerojatnosti prijelaza za proizvoljno izabrane vrijednosti parametara a i b.



Slika 4.14: Grafovi prijelaznih vjerojatnosti

Lako je uočiti da prijelazne vjerojatnosti za ovaj primjer konvergiraju određenim vrijednostima. Prijelazne vjerojatnosti u stanje 0 se asimptotski približavaju jednoj vrijednosti, a prijelazne vjerojatnosti u stanje 1 drugoj vrijednosti. Krivulje prijelaznih vjerojatnosti u funkciji vremena t su glatke funkcije, i njihova derivacija opada s vremenom i teži k nuli. Ova opažanja vrijede i za opći Markovljev lanac, ali pod određenim uvjetima.

Prisjetimo se definicija ireducibilnosti i erogodičnosti za Markovljeve lance diskretne po parametru. Neka iste definicije vrijede i u kontinuiranom obliku. Do njih dolazimo zamjenjujući pojam korak i broj koraka s vremenom. Vrijedi sljedeće svojstvo:

SVOJSTVO 4.6 (STACIONARNOST MARKOVLJEVOG LANCA KONTINUIRANOG U VREMENU)
Za ireducibilan Markovljev lanac vrijedi sljedeće:

1. *uvijek postoje limesi:*

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = \hat{p}_j \geq 0 \tag{4.38}$$

   i vrijednosti limesa $\hat{p}_j$ ne ovise o početnom stanju lanca ili razdiobi vjerojatnosti stanja u $t = 0$,

2. *za ergodičan i ireducibilan Markovljev lanac postoje limesi:*

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t) = \lim_{t\to\infty} \sum_i p_{ij}(t) \cdot p_i(0) = \hat{p}_j \geq 0 \tag{4.39}$$

   i vrijednosti limesa ne ovise o početnom stanju lanca ili razdiobi vjerojatnosti stanja u $t = 0$,

3. *ukoliko vrijede (4.38) i (4.39) i zadovoljeno je:*

$$\sum_j \hat{p}_j = 1 \tag{4.40}$$

   onda je i

$$\lim_{t\to\infty} \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = 0. \tag{4.41}$$

Ovaj teorem ima nekoliko implikacija. Svi ireducibilni Markovljevi lanci imaju sposobnost ulaska u stacionarno stanje. Stacionarno stanje možemo zamisliti kao stanje procesa u kojem (diskretna) razdioba stanjâ lanca:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_i & \ldots \\ \hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \ldots & \hat{p}_i & \ldots \end{pmatrix}$$

ne ovisi o vrijednosti parametra t. Drugim riječima, ireducibilan lanac u početku prolazi kroz određeni prijelazni period i polako ulazi u stacionarno stanje. Stacionarno stanje odlikuje svojstvo da vjerojatnost da se lanac nalazi u stanju i ne mijenja u vremenu, da prijelazne vjerojatnosti ne ovise o vremenu i da je derivacija prijelaznih vjerojatnosti po vremenu jednaka 0.

Budući da je zadovoljen izraz (4.38), to je limes matrice prijelaznih vjerojatnosti matrica čiji su reci jednaki vektoru stacionarnih vjerojatnosti $\hat{\mathbf{p}}^\top = [\hat{p}_1 \hat{p}_1 \ldots]$:

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \ldots & p_{1j}(t) & \ldots \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \ldots & p_{2j}(t) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{i1}(t) & p_{i2}(t) & \ldots & p_{ij}(t) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \ldots & \hat{p}_j & \ldots \\ \hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \ldots & \hat{p}_j & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{p}_1 & \hat{p}_2 & \ldots & \hat{p}_j & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Dakle, stacionarne vjerojatnosti Markovljevog lanca možemo iščitati iz bilo kojeg retka matrice $\mathbf{P}(t)$ kada t teži u beskonačno. Zbroj elemenata bilo kojeg retka jednak je 1. Neka je vektor $\mathbf{p}(t)$ vektor razdiobe vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca u trenutku t:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{P}(t)^\top \cdot \mathbf{p}(0)$$

$$\begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_j(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{21}(t) & \ldots & p_{i1}(t) & \ldots \\ p_{12}(t) & p_{22}(t) & \ldots & p_{i2}(t) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{1j}(t) & p_{2j}(t) & \ldots & p_{ij}(t) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_2(0) \\ \vdots \\ p_j(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i p_{i1}(t) \cdot p_i(0) \\ \sum_i p_{i2}(t) \cdot p_i(0) \\ \vdots \\ \sum_i p_{ij}(t) \cdot p_i(0) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ako potražimo limes prethodne jednakosti, svi reci matrice $\mathbf{P}(t)$ bit će sastavljeni od jednakih elemenata - $\hat{p}_i$. Stoga ispred sume koja se javlja u vektoru razdiobe stanja možemo izlučiti $\hat{p}_j$:

$$\sum_i p_{ij}(t) \cdot p_i(0) = \hat{p}_j \cdot \underbrace{\sum_i p_i(0)}_{=1} = \hat{p}_j.$$

Slijedi:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{p}(t) = \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ \vdots \\ p_j(t) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_j \\ \vdots \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{p}}.$$

Time smo pokazali da je stacionarna razdioba stanja Markovljevog lanca neovisna o razdiobi početnog stanja procesa.

Većina problema koji se javljaju u teoriji prometa daju se opisati ireducibilnim Markovljevim lancima. Ti problemi se daju riješiti jedino poznavanjem stacionarnih vjerojatnosti stanja procesa. Stoga se nadalje usredotočujemo na izračunavanje vektora stacionarnih vjerojatnosti $\hat{\mathbf{p}}$.

Jedan način izračunavanja stacionarnih vjerojatnosti je traženjem limesa $\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t)$ i iščitavanjem vektora $\hat{\mathbf{p}}$ u bilo kojem retku dobivenog limesa. Evo kako bismo stacionarne vjerojatnosti našli za primjer Markovljevog lanca iz primjera 4.8.

Primjer 4.10 (nastavak primjera 4.8) Pronađimo stacionarne vjerojatnosti tražeći limes:

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = -\frac{a}{a+b} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{b}{a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{a}{a+b} \begin{bmatrix} -\frac{b}{a} & -1 \\ -\frac{b}{a} & -1 \end{bmatrix}$$

Bilo koji redak dobivene matrice daje nam stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \dfrac{b}{a+b} \\ \dfrac{a}{a+b} \end{bmatrix}$$

Metoda traženja stacionarnih vjerojatnosti traženjem limesa matrice vjerojatnosti prijelaza je složen postupak, no u nekim slučajevima može biti izuzetno koristan. Standardne metode koje se koriste za traženje stacionarnih vjerojatnosti su metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi i metoda globalne ravnoteže.

4.2.7 Metoda računanja stacionarnih vjerojatnosti rješavanjem sustava lineranih jednadžbi

Razmatrajmo Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed:

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}$$

Potražimo li limes kada t teži u beskonačno, član $\mathbf{P}'(t)$ postaje jednak nul-matrici $\mathbf{0}$. Dakle, Kolmogorovljeva jednadžba za stacionarno stanje procesa postaje jednaka:

$$\mathbf{0} = \hat{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Q}. \tag{4.42}$$

Budući da su reci matrice $\hat{\mathbf{P}}$ svi jednaki, jednadžbu (4.42) možemo zapisati i u obliku

$$\vec{\mathbf{0}} = \mathbf{Q}^\top \hat{\mathbf{p}}. \tag{4.43}$$

gdje je $\vec{\mathbf{0}}$ nul-vektor stupac. Jednadžba (4.43) predstavlja sustav linearnih jednadžbi

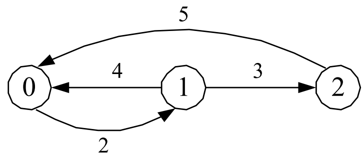
$$\sum_i q_{ij}\hat{p}_j = 0 \tag{4.44}$$

s nepoznanicama $\hat{p}_j$. Sustav jednadžbi je homogen, pa ovim jednadžbama dodajemo jednadžbu:

$$\sum_j \hat{p}_j = 1$$

čime sustav postaje netrivijalno rješiv. Demonstrirajmo ovu metodu sljedećim primjerom:

Primjer 4.11 Zadan je Markovljev lanac dijagramom stanja na slici 4.15. Potrebno je izračunati stacionarne vjerojatnosti stanja lanca.



Slika 4.15: Dijagram stanja uz primjer 4.11

Matrica gustoća prijelaza je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -7 & 3 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Iz (4.44) proizlazi sljedeći sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} -2\hat{p}_0 + 4\hat{p}_1 + 5\hat{p}_2 &= 0 \\ 2\hat{p}_0 - 7\hat{p}_1 + 0\hat{p}_2 &= 0 \\ 0\hat{p}_0 + 3\hat{p}_1 - 5\hat{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dobiveni sustav jednadžbi je homogen, pa jednu od jednadžbi zamjenjujemo jednadžbom

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_2 + \hat{p}_2 = 1$$

Mogući konačni sustav linearnih jednadžbi je:

$$\begin{aligned} 1\hat{p}_0 + 1\hat{p}_1 + 1\hat{p}_2 &= 1 \\ 2\hat{p}_0 - 7\hat{p}_1 + 0\hat{p}_2 &= 0 \\ 0\hat{p}_0 + 3\hat{p}_1 - 5\hat{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Ovaj sustav rješavamo Gauss-Jordanovom metodom eliminacije ili Cramerovom metodom.

1. Gauss-Jordanova metoda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \end{array}\right] = \ldots = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{35}{51} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{51} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{17} \end{array}\right]$$

2. Cramerova metoda:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 51$$

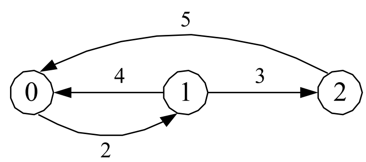
$$D_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & -7 & 0 \\ \mathbf{0} & 3 & -5 \end{vmatrix} = 35, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{1} & 1 \\ 2 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & -5 \end{vmatrix} = 10, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{1} \\ 2 & -7 & \mathbf{0} \\ 0 & 3 & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 6$$

$$\hat{p}_0 = \frac{D_0}{D} = \frac{35}{51}, \qquad \hat{p}_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{10}{51}, \qquad \hat{p}_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{6}{51} = \frac{2}{17}$$

Metoda računanja stacionarnih vjerojatnosti sustavom linearnih jednadžbi je povoljna samo ukoliko imamo Markovljeve lance s konačnim, relativno malim brojem stanja. Ukoliko se pojavi problem rješavanja Markovljevog lanca s beskonačnim brojem elemenata, metoda sa sustavom linearnih jednadžbi je gotovo beskorisna i moramo pronaći druge načine. Jedan od načina rješavanja ovog problema je postavljanjem jednadžbi globalne ravnoteže.

4.2.8 Jednadžbe globalne ravnoteže

Promotrimo još jednom dijagram stanja iz prethodnog primjera (slika 4.16).



Slika 4.16: Dijagram stanja uz primjer 4.11

Zamislimo da su stanja dijagrama čvorovi u mreži, a grane tokovi podataka. U stacionarnom stanju (stanju ravnoteže) tok koji ulazi u čvor mora biti jednak toku koji izlazi iz čvora. To je svojstvo *globalne ravnoteže.* Tok odgovara umnošku intenziteta i stacionarne vjerojatnosti stanja *iz kojeg tok izlazi.* Tok tako možemo zamisliti kao efektivni intenzitet.

Za stanja 0, 1 i 2 možemo napisati sljedeće *jednadžbe ravnoteže*:

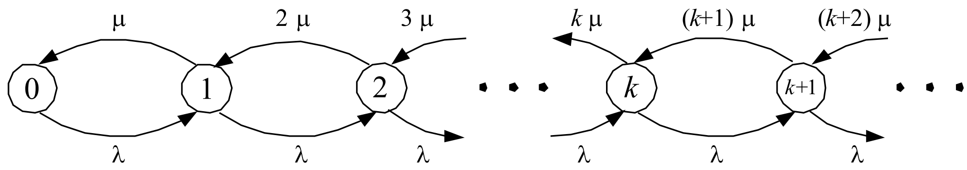
$$\begin{aligned} 2\hat{p}_0 &= 4\hat{p}_1 + 5\hat{p}_2, && \text{stanje } 0 \\ (4+3)\hat{p}_1 &= 2\hat{p}_0, && \text{stanje } 1 \\ 5\hat{p}_2 &= 3\hat{p}_1, && \text{stanje } 2 \end{aligned}$$

Možemo uočiti da ove jednadžbe u potpunosti odgovaraju sustavu linearnih jednadžbi kojeg smo dobili rješavajući Kolmogorovljevu jednadžbu u prethodnom primjeru. Dakako, to nije slučajno. Princip globalne ravnoteže vrijedi općenito, za sve Markovljeve lance. Taj nam princip omogućava postavljanje sustava linearnih jednadžbi neposredno iz dijagrama stanja Markovljevog lanca. Jednadžbe koje dobivamo su homogene pa ih, kao i prije, nadopunjujemo jednadžbom

$$\sum_i \hat{p}_i = 1.$$

Jednadžbe globalne ravnoteže se postavljaju jednostavno, no njihovo rješavanje je pitanje strukturiranosti Markovljevog lanca. Sljedeći primjer demonstrira slučaj povoljno strukturiranog lanca.

PRIMJER 4.12 Razmatrajmo lanac koji opisuje broj realiziranih poziva na pretplatničkom stupnju centrale. Uz uvjet da je broj pretplatnika jako velik, dolazni proces zahtjeva za uspostavu poziva se može aproksimirati Poissonovim procesom. Lanac se može opisati dijagramom na slici 4.17.



Slika 4.17: Uz primjer 4.12

Postavimo jednadžbe globalne ravnoteže za ovaj lanac:

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1 \\
(\lambda+\mu)p_1 &= \lambda p_0 + 2\mu p_2 \\
(\lambda+2\mu)p_2 &= \lambda p_1 + 3\mu p_3 \\
&\vdots \\
(\lambda+k\mu)p_k &= \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Uočimo da je lijeva strana prve jednadžbe jednaka prvom članu desne strane druge jednadžbe. Druga jednadžbe se transformira u

$$\lambda p_1 = 2\mu p_2$$

Ponavljajući ovaj postupak zaključujemo da se sve jednadžbe transformiraju u

$$\lambda \cdot p_k = (k+1)\mu \cdot p_{k+1}.^5$$

Dalje slijedi:

$$\lambda \cdot \hat{p}_k = (k+1)\mu \cdot \hat{p}_{k+1} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_{k+1} = \frac{\lambda}{(k+1)\mu}\hat{p}_k$$

Da bismo riješili ovaj sustav moramo pronaći opći izraz za $\hat{p}_k$. Sukcesivnim uvrštavanjem dobivamo:

$$\hat{p}_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\hat{p}_0$$

Vrijednost $\hat{p}_0$ saznajemo iz jednadžbe

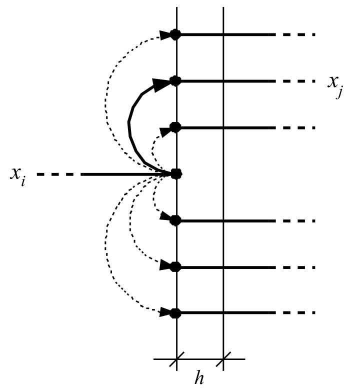
$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\hat{p}_k = 1 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}\hat{p}_0 = 1 \quad \Rightarrow \\
e^{\frac{\lambda}{\mu}}\hat{p}_0 = 1 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_0 = \frac{1}{e^{\frac{\lambda}{\mu}}}
\end{aligned}$$

Funkcija vjerojatnosti stanja lanca je:

$$\hat{p}_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

4.2.9 Vjerojatnosti skokova između stanja Markovljevog lanca

U 4.2.3 smo vidjeli da se vrijeme ostanka Markovljevog procesa u stanju i ravna po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom $-q_{ii}$. Koristeći ovu činjenicu, s lakoćom možemo modelirati ostanak u istom stanju za bilo kakav lanac. Problem nastupa kada istekne vrijeme za kojeg proces boravi u istom stanju. U tom trenutku proces mijenja stanje, a naš je zadatak da odredimo buduće stanje. Pošto je razdioba



Slika 4.18: Vjerojatnost skoka iz stanja x_i u stanje x_j

vjerojatnosti po stanjima općenito nejednolika, moramo izračunati vjerojatnost skoka lanca iz trenutnog stanja u novo stanje.

Promotrimo dio trajektorije Markovljevog lanca prikazan na slici 4.18. Budući da buduće stanje Markovljevog procesa ovisi samo o trenutnom, ovaj lanac možemo početi promatrati upravo u trenutku promjene njegovog stanja. Vrijeme početka promatranja po svojstvu odsustva pamćenja ne utječe na konačni ishod procesa, pa možemo promatrati kratki period h s početkom u trenutku promjene stanja i potražiti prijelaznu vjerojatnost iz stanja x_i u kojem se proces nalazi u trenutku $h = 0$ u neko drugo stanje x_j. Jasno je da proces ne može ponovno prijeći u isto stanje jer bi to značilo da proces u trenutku $h = 0$ uopće ne mijenja stanje, što je u suprotnosti s pretpostavkom. Budući da nas zanima stanje procesa u trenutku h, gdje $h \to 0$, moramo potražiti limes prijelazne vjerojatnosti kada h teži k 0. Označimo stanje procesa u trenutku h s $X(h)$, a moguća stanja procesa s x_k. Možemo napisati sljedeće:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{ij} &= \lim_{h\to 0} P\left[X(h) = x_j \mid X(0) = x_i \cap x_i \neq x_j\right] = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P\left[X(h) = x_j \cap X(0) = x_i \cap x_i \neq x_j\right]}{P\left[X(0) = x_i \cap x_i \neq x_j\right]} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P\left[X(h) = x_j \cap x_i \neq x_j \mid X(0) = x_i\right] \cdot P\left[X(0) = x_i\right]}{P\left[x_i \neq x_j \mid X(0) = x_i\right] \cdot P\left[X(0) = x_i\right]} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{P\left[X(h) = x_j \cap x_i \neq x_j \mid X(0) = x_i\right]}{1 - P\left[X(h) = x_i \mid X(0) = x_i\right]} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{p_{ij}(h)}{1 - p_{ii}(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{q_{ij} \cdot h + o(h)}{1 - (1 + q_{ii} + o(h))} = \left| q_{ii} = -\sum_{i,\ i\neq j} q_{ij} \right| = \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{q_{ij} \cdot h + o(h)}{q_{ii} \cdot h + o(h)} = -\lim_{h\to 0} \frac{q_{ij} + \frac{o(h)}{h}}{q_{ii} + \frac{o(h)}{h}} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}},\ i \neq j
\end{aligned}$$

Dakle, vjerojatnost skoka Markovljevog lanca iz stanja x_i u stanje x_j u trenutku promjene stanja je:

$$\tilde{p}_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}},\ i \neq j \tag{4.45}$$

Koristeći činjenicu da je vrijeme koje Markovljev lanac provodi u istom stanju raspodijeljeno eksponencijalno i poznavajući vjerojatnosti skokova možemo s lakoćom (npr. u diskretnom simulatoru) modelirati bilo kakav Markovljev lanac.

[5]Jednadžbe ovog oblika zovemo jednadžbe lokalne ravnoteže

4.3 Procesi rađanja i umiranja

4.3.1 Procesi rađanja

Prisjetimo se matrice gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ za Poissonov proces. Gustoća prijelaza u prvo više stanje je λ, a gustoća ostanka u istom stanju je $-\lambda$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Rekli smo da gustoću prijelaza q_{ij} možemo shvatiti kao intenzitet prijelaza. Za Poissonov proces intenzitet prijelaza ostaje konstantan bez obzira u kojem se stanju proces nalazio. Dopustimo sada da je intenzitet prijelaza u više stanje funkcija stanja u kojem se proces nalazi. Proces koji ima svojstvo da mu gustoća prijelaza u prvo više stanje ovisi o stanju i uvijek je pozitivna zovemo **proces rađanja**. Procesi rađanja su posebna klasa Markovljevih lanaca u kojima je dopušten jedino prijelaz iz trenutnog stanja n u prvo više stanje $n+1$.

Tipičan proces rađanja je proces množenja bakterija. Kada imamo samo jednu bakteriju, onda se određenim "intenzitetom" ona podijeli na dvije bakterije. Kada imamo dvije bakterije, tj. kada smo u stanju 2, onda se intenzitet "rađanja" novih bakterija povećao. Intenzitet rađanja raste s povećanjem broja bakterija.

Općenito možemo zapisati da je vjerojatnost realizacije k događaja u nekom malom vremenskom intervalu h procesa rađanja jednaka

$$p_{i,j}^{[t,t+h]} = p_k(h) = P(X(t+h) = j|X(t) = i) = \begin{cases} \lambda_{j-1}h + o(h) & j-i=1, \\ o(h) & j-i \geq 2, \\ 1-\lambda_j h + o(h) & j=i \end{cases}$$

Iz diferencijskih oblika za Chapman-Kolmogorovljevu jednadžbu direktno dobivamo matricu gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_1 & \dots & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \dots \\ \dots & 0 & -\lambda_n & \lambda_n & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Razmotrimo problem nalaženja vjerojatnosti prijelaza ovog procesa. Zasigurno bi bilo teško upotrijebiti matrično rješenje za Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed. Bilo bi potrebno naći svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore beskonačne kvadratne matrice. Bolje je potražiti opći član Kolmogorovljeve jednadžbe i riješiti ga kao diferencijalnu jednadžbu.

Prisjetimo se da je opći član Kolmogorovljeve jednadžbe:

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t) \cdot q_{kj}$$

Slijede dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} &p'_{ij}(t) = p_{i(j-1)}(t) \cdot \lambda_{j-1} - p_{ij}(t) \cdot \lambda_j, j \neq i \\ &p'_{00}(t) = -\lambda_0 p_{00}(t) \end{aligned}$$

Definirajmo da je proces u trenutku $t = 0$ bio u stanju 0 i nadalje promatrajmo vjerojatnosti prijelaza iz tog inicijalnog stanja u neko stanje n u budućem trenutku t. Uvedimo preoznaku:

$$p_{0n}(t) = p_n(t)$$

Gornje dvije jednadžbe postaju:

$$
\begin{aligned}
p_n'(t) &= -\lambda_n p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t),\\
p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t)
\end{aligned}
$$

To je diferencijalno-rekurzivni sustav jednadžbi. Težina rješavanja takvog sustava ovisi o zakonitosti rasta parametara λ s n. Obično je sustav rješiv za $n = 0$ i $n = 1$, a opći član se traži indukcijom.

Stacionarne vjerojatnosti se mogu izračunati samo u nekim specijalnim slučajevima. U općem slučaju se ne može tvrditi da ovakav lanac ima stacionarne vjerojatnosti zato što lanac nije ireducibilan.

4.3.2 Procesi rađanja i umiranja

Procesi rađanja su oni procesi kod kojih je intenzitet (gustoća) prijelaza u više stanje veći od 0, i svi ostali intenziteti jednaki 0. Uvedimo sada mogućnost da Markovljev proces može iz nekog stanja n preći u prvo niže stanje - $n-1$. Neka je gustoća takvog prijelaza također funkcija stanja. Označimo je s μ_n. Procesi koji imaju takvo svojstvo zovu se **procesi rađanja i umiranja**.

Proces rađanja i umiranja je poseban je slučaj Markovljevog lanca. U takvom Markovljevom lancu dopušteni su prijelazi samo u susjedna stanja, viša ili niža. Procesi rađanja i umiranja se pokazuju kao izvrsni modeli za proučavanje elementarne teorije posluživanja.

Promatrajmo određenu populaciju nekakvih entiteta. To mogu biti ljudi nekog grada ili ATM ćelije u nekom repu čekanja. Broj ljudi/ćelija neka predstavlja stanje procesa. Stanja obilježavamo s E_n gdje n označava veličinu populacije. Dopušteni su prijelazi samo u susjedna stanja, tj. u jednom trenutku proces iz stanja E_n može preći samo u E_{n+1} ili E_{n-1}. Prijelaz u prvo više stanje zovemo rađanje, a prijelaz u prvo niže stanje zovemo umiranje.

Uvedimo dva nova pojma: intenzitet rađanja (*birth rate*) λ_n i intenzitet umiranja (*death rate*) μ_n. Oba intenziteta su vezana uz stanje sustava. Ako je intenzitet rađanja veći od intenziteta umiranja, onda populacija raste. Naravno, vrijedi i obrnuto.

Za proces rađanja i umiranja prijelazna vjerojatnost iz stanja i u trenutku t u stanje j u trenutku $t+h$ možemo definirati slično kao i za Poissonov proces:

$$
p_{ij}(h) = P(X(t+h)=j|X(t)=i) = \left\{
\begin{array}{cc}
\lambda_{j-1}h + o(h) & j = i+1\\
o(h) & j \geq i+2, j \leq i-2\\
\mu_{j+1}h + o(h) & j = i-1\\
1-(\lambda_j+\mu_j)h + o(h) & j = i
\end{array}\right.
$$

Ako je veličina populacije 0, onda nema umiranja u populaciji, pa shodno tome definiramo da je $\mu_0 = 0$. Ekvivalentna matrica gustoće prijelaza je:

$$
\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
-\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
\mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots\\
0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_n & -(\lambda_n+\mu_n) & \lambda_n & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
$$

Ukoliko nam je poznata ovakva matrica, rješenja za prijelazne vjerojatnosti nalazimo pomoću Kolmogorovljeve jednadžbe unaprijed. Opće rješenje $e^{\mathbf{Q}t}$ nije primjenjivo zbog nemogućnosti dijagonalizacije ovakve matrice. Zbog toga postavljamo opći sustav diferencijalno-rekurzivnih jednadžbi. Rješenje je moguće ishoditi samo ukoliko nam je poznata funkcijska ovisnost intenziteta rađanja i umiranja o stanju lanca. Do diferencijalno-rekurzivne relacije dolazimo na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
p_{0,n}(t+h) = {} & p_{0,n}(t)\cdot P(\text{nema rađanja niti umiranja u } h) +\\
& + p_{0,n-1}(t)\cdot P(\text{dogodilo se jedno rađanje u } h) +\\
& + p_{0,n+1}(t)\cdot P(\text{dogodilo se jedno umiranje u } h) +\\
& + P(\text{dogodila su se 2 ili više rađanja ili umiranja u } h\text{, a novo stanje je } i+n)
\end{aligned}
$$

Uvedemo li kao i prije preoznaku $p_{0,n}(t) = p_n(t)$, slijedi

$$p_n(t+h) = p_n(t)[1-(\lambda_n+\mu_n)h] + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h + p_{n+1}(t)\mu_{n+1}h + o(h)$$
$$p_n(t+h) - p_n(t) = -p_n(t)(\lambda_n+\mu_n)h + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h + p_{n+1}(t)\mu_{n+1}h + o(h) \quad / \ : h, \quad \lim_{h\to 0}$$
$$p_n'(t) = -p_n(t)(\lambda_n+\mu_n) + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1} + p_{n+1}(t)\mu_{n+1}$$

Slično dobivamo:

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t)$$

Prisjetimo se sada rasprave u 4.2.5. Tamo smo ustanovili da rješavanje diferencijalnih jednadžbi u općem slučaju nema prevelikog smisla budući da dobivamo ekstremno komplicirana rješenja. Tako je i s rješavanjem gore izvedenih diferencijalnih jednadžbi.

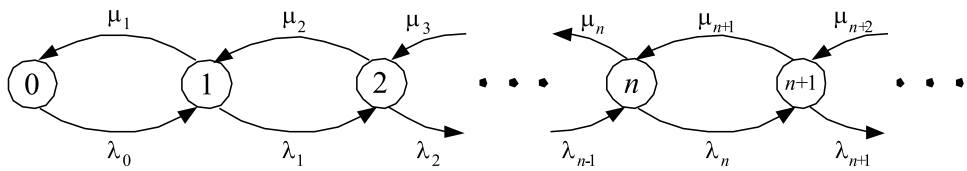
Jedino što ima smisla je tražiti stacionarne vjerojatnosti. Njih nalazimo na taj način što pretpostavimo da su sve derivacije u limesu kad $t \to \infty$ jednake 0:

$$\lim_{t\to\infty} p_n'(t) = 0.$$

Na ovaj način gornje diferencijalne jednadžbe možemo preurediti u obične rekurzivne jednadžbe koje rješavaju problem stacionarnih vjerojatnosti procesa rađanja i umiranja:

$$\begin{aligned} \hat{p}_n(\lambda_n+\mu_n) &= \hat{p}_{n-1}\lambda_{n-1} + \hat{p}_{n+1}\mu_{n+1} \\ \lambda_0\hat{p}_0 &= \mu_1\hat{p}_1 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Opći dijagram stanja procesa rađanja i umiranja je prikazan na slici 4.19.

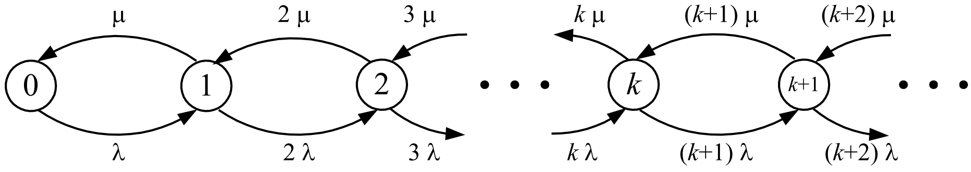


Slika 4.19: Dijagram stanja procesa rađanja i umiranja

Možemo povezati logiku pisanja stacionarnih rekurzivnih jednadžbi s ovim dijagramom: stacionarna vjerojatnost stanja kojeg promatramo pomnožena s intenzitetom koji izlazi iz stanja (izlazni tok) jednaka je zbroju umnožaka stacionarnih vjerojatnosti stanja iz kojih se dolazi u promatrano stanje i intenziteta tih dolazaka (ulazni tokovi). Dakle, dobivene jednadžbe su *jednadžbe globalne ravnoteže.* Kod ovakvih problema jednadžbe redovito postavljamo globalnom ravnotežom ili limesom diferencijalnih jednadžbi. Izvođenje jednadžbi iz matrice **Q** često rezultira pogreškama. Opće rješenje ovih jednadžbi ovisi o funkcijama λ_n i μ_n.

Demonstrirajmo ovaj postupak sljedećim primjerom:

Primjer 4.13 Zadan je proces rađanja i umiranja dijagramom na slici 4.20. Pronađimo stacionarne vjerojatnosti stanja $\hat{p}_j$.



Slika 4.20: Dijagram stanja procesa rađanja i umiranja uz primjer 4.13

Možemo postaviti jednadžbe globalne ravnoteže ili možemo postaviti diferencijalno-rekurzivne jednadžbe, pa potražiti limes kad t ide u beskonačno. Odlučimo se za diferencijalno-rekurzivne jednadžbe kako bismo utvrdili postupak.

$$p_k(t+h) = p_{k-1}(t)\cdot[k\lambda h + o(h)] + p_{k+1}(t)\cdot[(k+1)\mu h + o(h)] + p_k(t)\cdot\{1-[k\mu+(k+1)\lambda]\,h + o(h)\}\,.$$

Podijelimo obje strane s h:

$$\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} = p_{k-1}(t)\cdot\left[k\lambda+\frac{o(h)}{h}\right] + p_{k+1}(t)\cdot\left[(k+1)\mu+\frac{o(h)}{h}\right] - p_k(t)\cdot\left[k\mu+(k+1)\lambda+\frac{o(h)}{h}\right]$$

i potražimo limes kad h teži k nuli:

$$p_k'(t) = p_{k-1}(t)\cdot k\lambda + p_{k+1}(t)\cdot[(k+1)\mu] - p_k(t)\cdot[k\mu+(k+1)\lambda]$$

Slično dobivamo i za nulto stanje:

$$p_0'(t) = -p_0(t)\lambda + p_1(t)\mu$$

Potražimo li limes kada t teži k beskonačno, dobivamo jednadžbe globalne ravnoteže:

$$\hat{p}_k\cdot(k\mu+(k+1)\lambda) = \hat{p}_{k-1}\cdot k\lambda + \hat{p}_{k+1}\cdot[(k+1)\mu]$$

$$\hat{p}_0\lambda = \hat{p}_1\mu$$

Dakle, moramo riješiti sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1\\
(2\lambda+\mu)p_1 &= \lambda p_0 + 2\mu p_2\\
(3\lambda+2\mu)p_2 &= 2\lambda p_1 + 3\mu p_3\\
&\vdots\\
[(k+1)\lambda+k\mu]\,p_k &= k\lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Ovaj sustav rješavamo rekurzivno, uvrštavajući rješenje prve jednadžbe u drugu, pa rješenje druge u treću itd. Na kraju sva rješenja zbrojimo i izjednačimo s 1, te dobijemo funkciju vjerojatnosti stanja lanca. Sukcesivnim uvrštavanjem dobivamo:

$$\hat{p}_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \hat{p}_0$$

Vrijednost $\hat{p}_0$ saznajemo iz jednadžbe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\hat{p}_k = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \hat{p}_0 = 1$$

Kako bi red konvergirao, mora biti zadovoljeno:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$\frac{\hat{p}_0}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = 1 \quad\Rightarrow\quad \hat{p}_0 = 1-\frac{\lambda}{\mu}$$

Funkcija vjerojatnosti stanja lanca je:

$$\hat{p}_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Dakle, stacinarna razdioba stanja u ovom primjeru se ravna po geometrijskoj razdiobi. Moramo uočiti da su stacionarne vjerojatnosti ovog procesa uvjetovane s $\lambda/\mu < 1$. Razlog zašto se postavlja ovaj uvjet je neergodičnost lanca u općem slučaju. Ovaj lanac je pozitivno rekurentan (a time i ergodičan) samo uz zadani uvjet.

Procesi rađanja i umiranja kako smo ih definirali imaju beskonačan broj stanja. Međutim, u brojnim primjenama je broj stanja ograničen. Takve lance zovemo odsječenim procesima rađanja i umiranja. Za njih vrijede isti principi koji vrijede i za regularne procese rađanja i umiranja. Jedina je iznimka ta što postoji najviše stanje i što za njega posebno postavljamo jednadžbu globalne ravnoteže, jednako kao i za "nulto" stanje.

4.3.3 Višedimenzionalni lanci rađanja i umiranja, jednadžbe lokalne ravnoteže

Razmatrajmo proces uspostavljanja i raskida video veza kroz određeni link kapaciteta 50 Mb/s. Uspostavljaju se dva tipa veza: A i B. Veze tipa A rezerviraju 15 Mb/s prijenosnog pojasa linka, a veze tipa B rezerviraju 10 Mb/s. Dolazak zahtjeva za uspostavu veze za svaku vrstu posebno se može opisati Poissonovim procesom. Intenzitet dolaska zahtjeva za tip A je λ_1, a za tip B je λ_2. Intenzitet raskida veza za tip A je $n\mu_1$ gdje je n broj uspostavljenih veza tipa A, a za tip B je $k\mu_2$ gdje je k broj uspostavljenih veza tipa B.

Naočigled se radi o dva neovisna procesa rađanja i umiranja. To bi bila istina samo kada bi kapacitet linka bio beskonačan. Budući da je kapacitet ograničen, može se uspostaviti samo onoliko veza određenog tipa koliko je raspoloživo kapaciteta. Mogu se uspostaviti maksimalno 3 veze tipa A i 5 veza tipa B. Ako su uspostavljene 2 veze tipa A, onda tip B ima na raspolaganju maksimalno 20 Mb/s, odnosno dovoljno prijenosnog pojasa za 2 veze.

Na taj način procesi rađanja i umiranja za veze tipova A i B se ne mogu promatrati odvojeno. Procesi jedan drugom "kradu" raspoloživ prijenosni pojas. Oni na taj način *moduliraju* broj raspoloživih stanja svakog od procesa.

Ako nas zanima razdioba vjerojatnosti broja uspostavljenih veza za svaki od tipova A i B, onda ove odsječene i modullirane procese moramo promatrati zajedno. Na slici 4.21 je prikazan dijagram stanja koji opisuje naš problem.

Svako stanje procesa je opisano s dva indeksa: i i j. Indeks i se odnosi na broj uspostavljenih veza tipa A, a j se odnosi na broj uspostavljenih veza tipa B. Lako je uočiti da nema onih stanja za koje bi ukupni rezervirani prijenosni pojas bio veći od kapaciteta linka. Na primjer, nema stanja $(1, 4)$ jer bi ukupni potrebni prijenosni pojas trebao biti 55 Mb/s, što je veće od kapaciteta 50 Mb/s. Ovakvu strukturu zovemo dvodimenzionalni Markovljev lanac ili dvodimenzionalni proces rađanja i umiranja. Razlog za takav naziv je mogućnost rađanja i umiranja po dvije dimenzije, po dimenziji tipa A i dimenziji tipa B.

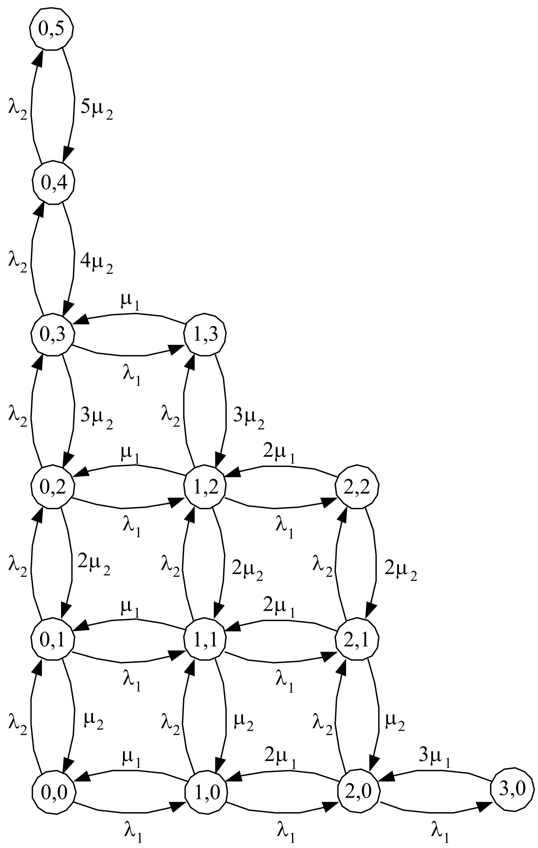
Dakle, razmatramo određeni Markovljev lanac s 14 stanja i određenim intenzitetima prijelaza između stanja, a želimo odrediti stacionarne vjerojatnosti svakog od 14 stanja. Stacionarne vjerojatnosti sigurno postoje jer je lanac ireducibilan, tj. iz svakog stanja se uz određeni broj prijelaza može stići u bilo koje drugo stanje. Stacionarne vjerojatnosti stanja izračunavamo iz sustava jednadžbi koje postavimo za promatrani lanac. Najlakše je to napraviti pomoću jednadžbi globalne ravnoteže.

Prisjetimo se kako se postavljaju jednadžbe globalne ravnoteže. Promatrajmo stanje koje ima sva četiri susjedna stanja (npr. stanje $(1, 2)$ ili $(1, 1)$). Stacionarna vjerojatnost takvog stanja pomnožena s ukupnim intenzitetom izlaska iz tok stanja jednaka je zbroju stacionarnih vjerojatnosti susjednih stanja pomnoženih s intenzitetom dolaska u promatrano stanje (slika 4.22). U našem slučaju, za stanje (i, j) sa sva četiri susjedna stanja možemo postaviti sljedeću jednadžbu globalne ravnoteže:

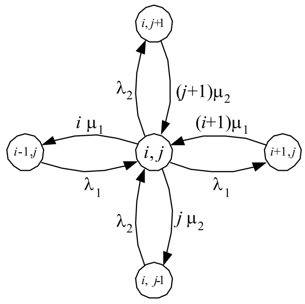
$$\hat{p}_{i,j}(\lambda_1 + \lambda_2 + i\mu_1 + j\mu_2) = \hat{p}_{i+1,j}(i+1)\mu_1 + \hat{p}_{i,j+1}(j+1)\mu_2 + \hat{p}_{i-1,j}\lambda_1 + \hat{p}_{i,j-1}\lambda_2 \tag{4.47}$$

Ukoliko se radi o stanju koje nema sva četiri susjedna stanja, onda shvaćamo da su intenziteti prijelaza prema tim stanjima i od tih stanja jednaka 0, tako da uz taj dogovor jednadžba (4.47) vrijedi u općem slučaju.

Prisjetimo se sada izreke teorema o egzistenciji stacionarnih stanja. Po tom teoremu ako je lanac ireducibilan, onda postoji razdioba stacionarnih vjerojatnosti i ona je *jedinstvena*. Dakle, ako neka



Slika 4.21: Dvodimenzionalni Markovljev lanac



Slika 4.22: Stanje (i, j) za koje se postavlja jednadžba globalne ravnoteže

razdioba zadovoljava sve jednadžbe globalne ravnoteže, onda je to tražena jedinstvena razdioba. Ako pažljivije pogledamo izraz (4.47), uočavamo da za svaki pribrojak na desnoj strani postoji odgovarajući pribrojak na lijevoj strani. Ukupno postoje četiri takva para:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{i,j} \cdot \lambda_1 &= \hat{p}_{i+1,j} \cdot (i+1)\mu_1 \\
\hat{p}_{i,j} \cdot \lambda_2 &= \hat{p}_{i,j+1} \cdot (j+1)\mu_2 \\
\hat{p}_{i,j} \cdot i \cdot \mu_1 &= \hat{p}_{i-1,j} \cdot \lambda_1 \\
\hat{p}_{i,j} \cdot j \cdot \mu_2 &= \hat{p}_{i,j-1} \cdot \lambda_2
\end{aligned} \tag{4.48}$$

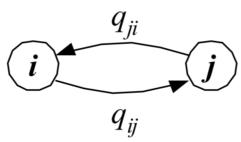
Kada zbrojimo ove jednadžbe, opet dobivamo početnu jednadžbu globalne ravnoteže. Sada je bitno primijetiti da razmatramo ireducibilan Markovljev lanac, i da su rješenja $\hat{p}_{i,j}$, $\hat{p}_{i+1,j}$, $\hat{p}_{i-1,j}$, $\hat{p}_{i,j+1}$ i

$\hat{p}_{i,j-1}$ jedinstvena. Dakle, ako uspijemo naći rješenje za sustav jednadžbi (4.48), onda ista rješenja zadovoljavaju i jednadžbu (4.47). Budući da su rješenja koja zadovoljavaju sustav jednadžbi globalne ravnoteže stacionarne vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca, to su i rješenja sustava svih jednadžbi (4.48) stacionarne vjerojatnosti stanja Markovljevog lanca. Jednadžbe (4.48) zovemo *jednadžbe lokalne ravnoteže.*

Jednadžbe lokalne ravnoteže su glavni alat u rješavanju složenih uravnoteženih Markovljevih lanaca i mreža Markovljevih lanaca. Njih ćemo iscrpno koristiti u svim narednim poglavljima i pomoću njih pokazati veliki broj izuzetno korisnih svojstava sustava s posluživanjem. Glavni doprinos jednadžbi lokalne ravnoteže je taj što sustav složenih jednadžbi globalne ravnoteže pretvara u sustav manjih, znatno jednostavnijih jednadžbi.

Prije nego što ih počnemo koristiti, moramo znati gdje ih možemo koristiti. Naime, jednadžbe lokalne ravnoteže se ne mogu postaviti za sve Markovljeve lance. Jednadžbe lokalne ravnoteže se mogu postaviti samo onda kada one neposredno slijede iz jednadžbe globalne ravnoteže. Kroz sljedeća poglavlja ukazivat ćemo na opće slučajeve kada možemo napisati jednadžbe lokalne ravnoteže. Za sada možemo konstatirati da ih možemo redovito pisati za *ireducibilne lance rađanja i umiranja.*

Jednadžbe lokalne ravnoteže je trivijalno napisati i onaj tko riješi jednadžbe lokalne ravnoteže, riješio je problem stacionarnih vjerojatnosti Markovljevog lanca. Jednadžbu lokalne ravnoteže u višedimenzionalnim procesima rađanja i umiranja postavljamo na sljedeći način. Uočimo par susjednih stanja, i i j (slika 4.23).



Slika 4.23: Postavljanje jednadžbe lokalne ravnoteže

Lijevi dio jednadžbe je jednak umnošku stacionarne vjerojatnosti stanja i i intenziteta prijelaza u stanje j: $\hat{p}_i q_{ij}$. Slično, desni dio jednadžbe je jednak umnošku stacionarne vjerojatnosti stanja j i intenziteta prijelaza u stanje i: $\hat{p}_j q_{ji}$.

$$\hat{p}_i q_{ij} = \hat{p}_j q_{ji} \tag{4.49}$$

Vratimo se natrag našem primjeru i napišimo jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$\begin{array}{lll}
\hat{p}_{00} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{10} \cdot \mu_1 & \hat{p}_{10} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{20} \cdot 2\mu_1 & \hat{p}_{20} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{30} \cdot 3\mu_1 \\
\hat{p}_{01} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{11} \cdot \mu_1 & \hat{p}_{11} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{21} \cdot 2\mu_1 & \\
\hat{p}_{02} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{12} \cdot \mu_1 & \hat{p}_{12} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{22} \cdot 2\mu_1 & \\
\hat{p}_{03} \cdot \lambda_1 = \hat{p}_{13} \cdot \mu_1 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\hat{p}_{00} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{01} \cdot \mu_2 & \hat{p}_{01} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{02} \cdot 2\mu_2 & \hat{p}_{02}\lambda_2 = \hat{p}_{03} \cdot 3\mu_2 & \hat{p}_{03} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{04} \cdot 4\mu_2 & \hat{p}_{04} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{05} \cdot 5\mu_2 \\
\hat{p}_{10} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{11} \cdot \mu_2 & \hat{p}_{11} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{12} \cdot 2\mu_2 & \hat{p}_{12}\lambda_2 = \hat{p}_{13} \cdot 3\mu_2 & & \\
\hat{p}_{20} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{21} \cdot \mu_2 & \hat{p}_{21} \cdot \lambda_2 = \hat{p}_{22} \cdot 2\mu_2. & & &
\end{array}$$

Dodatno mora biti zadovoljeno

$$\sum_i \sum_j \hat{p}_{ij} = 1.$$

Dakle, dobili smo sustav od 18 + 1 jednostavnih jednadžbi. Da smo postavljali jednadžbe globalne ravnoteže, imali bismo 15 + 1 jednadžbu, no oblik jednadžbi bi bio složen. Problem koji preostaje je kako riješiti ovakav sustav jednadžbi. Evo jednog od načina. Neka je:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \qquad a_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

Jednadžbe sada možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\begin{array}{lll}
\hat{p}_{00} \cdot \frac{a_1}{1} = \hat{p}_{10} & \hat{p}_{10} \cdot \frac{a_1}{2} = \hat{p}_{20} & \hat{p}_{20} \cdot \frac{a_1}{3} = \hat{p}_{30} \\
\hat{p}_{01} \cdot \frac{a_1}{1} = \hat{p}_{11} & \hat{p}_{11} \cdot \frac{a_1}{2} = \hat{p}_{21} & \\
\vdots & &
\end{array}$$

Sukcesivnim uvrštavanjem jednadžbi po retku slijeva, dobivamo sljedeći sustav jednadžbi:

$$
\begin{aligned}
&\hat{p}_{10} = \tfrac{a_1}{1!}\hat{p}_{00} \quad \hat{p}_{20} = \tfrac{a_1^2}{2!}\hat{p}_{00} \quad \hat{p}_{30} = \tfrac{a_1^3}{3!}p_{00} \\
&\hat{p}_{11} = \tfrac{a_1}{1!}\hat{p}_{01} \quad \hat{p}_{21} = \tfrac{a_1^2}{2!}\hat{p}_{01} \\
&\hat{p}_{12} = \tfrac{a_1}{1!}\hat{p}_{02} \quad \hat{p}_{22} = \tfrac{a_1^2}{2!}\hat{p}_{02} \\
&\hat{p}_{13} = \tfrac{a_1}{1!}\hat{p}_{03} \\
&\hat{p}_{01} = \tfrac{a_2}{1!}\hat{p}_{00} \quad \hat{p}_{02} = \tfrac{a_2^2}{2!}\hat{p}_{00} \quad \hat{p}_{03} = \tfrac{a_2^3}{3!}\hat{p}_{00} \quad \hat{p}_{04} = \tfrac{a_2^4}{4!} \quad \hat{p}_{05} = \tfrac{a_2^5}{5!}\hat{p}_{00} \\
&\hat{p}_{11} = \tfrac{a_2}{1!}p_{10} \quad \hat{p}_{12} = \tfrac{a_2^2}{2!}\hat{p}_{10} \quad \hat{p}_{13} = \tfrac{a_2^3}{3!}\hat{p}_{10} \\
&\hat{p}_{21} = \tfrac{a_2}{1!}\hat{p}_{20} \quad \hat{p}_{22} = \tfrac{a_2^2}{2!}\hat{p}_{20}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

Primijetimo da se sve vjerojatnosti mogu pokazati u funkciji od $\hat{p}_{00}$! To svojstvo ćemo iskoristiti na taj način da ćemo izračunati vrijednost od $\hat{p}_{00}$ i neposredno dobiti sve ostale vjerojatnosti. $\hat{p}_{00}$ dobivamo iz uvjeta da zbroj svih stacionarnih vjerojatnosti mora biti jednak 1.

$$
\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=0}^{3} p_{i0} + \sum_{i=0}^{2} p_{i1} + \sum_{i=0}^{2} p_{i2} + \sum_{i=0}^{1} p_{i3} + \sum_{j=0}^{5} p_{0j} + \sum_{j=0}^{3} p_{1j} + \sum_{j=0}^{2} p_{2j} = \\
&= p_{00}\left\{ \sum_{i=0}^{3} \frac{a_1^i}{i!}\frac{a_2^0}{0!} + \sum_{i=0}^{2} \frac{a_1^i}{i!}\frac{a_2^1}{1!} + \sum_{i=0}^{2} \frac{a_1^i}{i!}\frac{a_2^2}{2!} + \sum_{i=0}^{1} \frac{a_1^i}{i!}\frac{a_2^3}{3!} + \sum_{j=0}^{5} \frac{a_2^i}{i!}\frac{a_1^0}{0!} + \sum_{j=0}^{3} \frac{a_2^i}{i!}\frac{a_1^1}{1!} + \sum_{j=0}^{2} \frac{a_2^i}{i!}\frac{a_1^2}{2!} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
p_{00}^{-1} = \sum_{(i,j)\in\mathbf{S}} \frac{a_1^i}{i!}\frac{a_2^j}{j!}
$$

gdje je $\mathbf{S}$ skup svih dopuštenih indeksa stanja:

$$
\mathbf{S} = \{(0,0),(1,0),(2,0),(3,0),\ldots,(1,3),(0,4),(0,5)\}
$$

Stacionarne vjerojatnosti dobivamo uvrštavajući rješenje za $\hat{p}_{00}$ u (4.50). Ako pažljivije razmotrimo sustav (4.50) dobit ćemo i univerzalni izraz za računanje stacionarnih vjerojatnosti:

$$
p_{ij} = \frac{\dfrac{a_1^i}{i!}\dfrac{a_2^j}{j!}}{\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbf{S}} \frac{a_1^i}{i!}\frac{a_2^j}{j!}} \tag{4.51}
$$

Izraz (4.51) se u literaturi zove rješenje u produktnoj formi (*product-form solution*) za dvodimenzionalni slučaj.

Izračunali smo stacionarne vjerojatnosti i postavljamo pitanje što s njima? Odgovor na to pitanje ovisi o problemu koji se istražuje. Na primjer, koristeći stacionarne vjerojatnosti stanja možemo izračunati prosječno zauzeće linka. Trenutno zauzeće linka računamo prema izrazu:

$$
O(i,j) = 10i + 15j
$$

Prosječno zauzeće dobivamo kao očekivanje funkcije $O(i,j)$. Budući da je razdioba vjerojatnosti stanja koju smo dobili dvodimenzionalna, očekivanje računamo prema izrazu:

$$
E\left[O(i,j)\right] = \bar{O} = \sum_{(i,j)\in\mathbf{S}} O(i,j)\hat{p}_{ij} = \sum_{(i,j)\in\mathbf{S}} (10i+15j)\hat{p}_{ij}
$$

Također možemo izračunati vjerojatnost blokiranja uspostave veze. Ta je vjerojatnost jednaka zbroju vjerojatnosti da se lanac nađe u stanju koje je blokirajuće. Na primjer, stanje $(0,5)$ je blokirajuće za obje vrste veza zato što je to stanje kada u linku nema slobodnog prijenosnog pojasa. Stanje $(0,4)$

je blokirajuće za veze tipa A, ali ne i za tip B. Vjerojatnost blokiranja za tip A dobivamo zbrajajući stacionarne vjerojatnosti za stanja koja su blokirajuća za tip A. To su stanja:

$$\mathbf{K}_A = \{(0,5),(0,4),(1,3),(2,2),(2,1),(3,0)\}$$

Za tip B su to stanja:

$$\mathbf{K}_B = \{(0,5),(1,3),(2,2),(3,0)\}$$

Vjerojatnosti blokiranja uspostave veze za tipove A i B su:

$$P(A) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{K}_A} \hat{p}_{i,j} \qquad P(B) = \sum_{(i,j)\in\mathbf{K}_B} \hat{p}_{i,j}$$

Pojam jednadžbe lokalne ravnoteže je najvredniji alat u analizi sustava posluživanja. Kako ćemo vidjeti u narednim poglavljima, sustavi posluživanja i mreže takvih sustava se redovito mogu opisati procesima rađanja i umiranja. Stoga ovaj matematički aparat treba shvatiti kao bazično znanje bez kojeg nećemo moći izračunati vrijednosti prometnih parametara koji nas budu zanimali.

4.4 Zadaci za vježbu

4.4.1 Markovljevi lanci s diskretnim parametrom

ZADATAK 4.1 Koristeći metodu spektralne dekompozicije pronađite stacionarne vjerojatnosti Markovljevog lanca s dva stanja čija je matrica prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.2 Koristeći metodu dijagonalizacije matrice izračunajte stacionarne vjerojatnosti Markovljevog procesa s dva stanja čija je matrica prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.3 Promatrajte binarni izvor kod kojeg je vjerojatnost prijelaza iz stanja 1 u stanje 0 1/3, a vjerojatnost prijelaza iz 0 u 1 2/3. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti za ovaj binarni izvor.

ZADATAK 4.4 Izračunajte n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$ koristeći metodu dijagonalizacije.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.5 Izračunajte n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$ koristeći metodu spektralne dekompozicije.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 4.6 Prijenosni kanal uspostavljen je kroz 3 neovisna serijski spojena prijenosna sustava. Vjerojatnost pogreške bita na svakom od prijenosnih sustava za promatrani kanal je 0.01. Izračunajte vjerojatnost pogreške bita s kraja na kraj prijenosnog kanala.

ZADATAK 4.7 Binarni izvor se u početku (nultom koraku) nalazi u stanju 1. Ako je matrica prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix},$$

izračunajte vjerojatnost da se izvor nakon 5-tog koraka nalazi u stanju 1.

ZADATAK 4.8 Neka je matrica vjerojatnosti prijelaza Markovljevog lanca s diskretnim parametrom i dva stanja

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte stacionarne vjerojatnosti ovog procesa rješavanjem sustava linearnih jednadžbi.

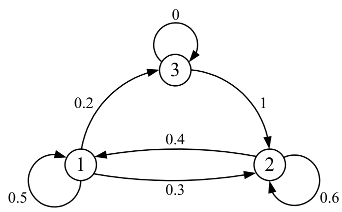
ZADATAK 4.9 Neka je matrica vjerojatnosti prijelaza Markovljevog lanca s diskretnim parametrom i dva stanja

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte stacionarne vjerojatnosti ovog lanca. Kako objašnjavate dobiveni rezultat ?

ZADATAK 4.10 Markovljev lanac ima 5 stanja. Iz nekog stanja može preći samo u susjedno stanje (više ili niže, ukoliko je moguće). Vjerojatnost prijelaza u prvo više stanje je p, a "silaska" u niže stanje je $q = 1 - p$. Pronađite matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ ovog procesa. Postavite matričnu jednadžbu čijim rješavanjem dobivamo stacionarne vjerojatnosti lanca.

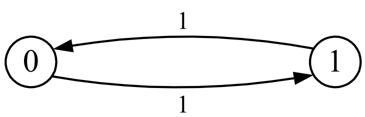
ZADATAK 4.11 Zadan je Markovljev lanac dijagramom na slici 4.24. Pronađite matricu prijelaznih vje-



Slika 4.24: Uz zadatak 4.11

rojatnosti $\mathbf{P}$ i izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca rješavajući sustav linearnih jednadžbi.

ZADATAK 4.12 Zadan je Markovljev lanac dijagramom stanja na slici 4.25. Pronađite matricu prijelaznih



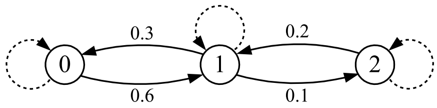
Slika 4.25: Uz zadatak 4.12

vjerojatnosti $\mathbf{P}$ i izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca rješavajući sustav linearnih jednadžbi.

ZADATAK 4.13 Zadan je Markovljev lanac dijagramom na slici 4.26.

Pronađite matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ i izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca rješavajući sustav linearnih jednadžbi.

ZADATAK 4.14 Promatrajte Markovljev lanac iz zadatka 4.13. Pronađite razdiobu i izračunajte prosječan broj koraka koje lanac bez prekida boravi u stanju 1.



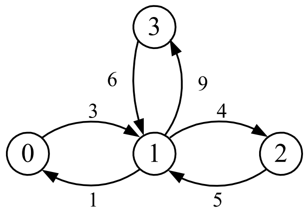
Slika 4.26: Uz zadatak 4.13

ZADATAK 4.15 Stacionarne vjerojatnosti Markovljevog lanca s dva stanja su: $\hat{p}_0 = \dfrac{1}{3}$ i $\hat{p}_1 = \dfrac{2}{3}$. Izračunajte prijelazne vjerojatnosti ovog lanca.

ZADATAK 4.16 Razmatrajte stohastički proces slučajnog hoda. To je Markovljev lanac. Pronađite matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ tog procesa.

4.4.2 Markovljevi lanci s kontinuiranim parametrom

ZADATAK 4.17 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.27. Napišite matricu gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ i nacrtajte segment jedne trajektorije ovog lanca.



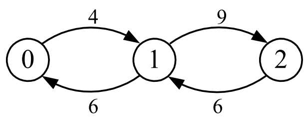
Slika 4.27: Dijagram stanja uz zadatak 4.17

ZADATAK 4.18 Matrica gustoća prijelaza nekog Markovljevog procesa je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 & 1 \\ 8 & -14 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & 7 & -12 \end{bmatrix}.$$

Nacrtajte dijagram stanja i segment jedne trajektorije ovog lanca.

ZADATAK 4.19 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.28. Napišite matricu gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$.

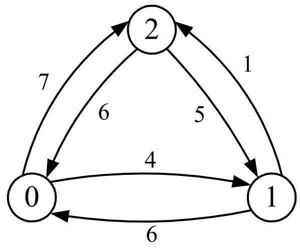


Slika 4.28: Dijagram stanja uz zadatak 4.19

Neka slučajna varijabla T_1 mjeri vrijeme koje ovaj lanac bez prekida boravi u stanju 1. Izračunajte funkciju razdiobe i očekivanje ove slučajne varijable.

ZADATAK 4.20 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.29. Napišite matricu gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$.

Neka slučajna varijabla T_1 mjeri vrijeme koje ovaj lanac bez prekida boravi u stanju 1. Izračunajte funkciju razdiobe ove varijable. Koliko je očekivanje slučajne varijable T_1.



Slika 4.29: Dijagram stanja uz zadatak 4.20

ZADATAK 4.21 Neka je za Markovljev lanac kontinuiran u vremenu matrica gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ jednaka

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Izračunajte matricu prijelaznih vjerojatnosti koristeći opće rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi.

ZADATAK 4.22 Neka je za Markovljev lanac kontinuiran u vremenu matrica gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ jednaka

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -9 & 9 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Izračunajte matricu prijelaznih vjerojatnosti koristeći opće rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi.

ZADATAK 4.23 Neka je za Markovljev lanac kontinuiran u vremenu matrica gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ jednaka

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte matricu prijelaznih vjerojatnosti koristeći opće rješenje Kolmogorovljevih jednadžbi.

ZADATAK 4.24 Neka je za Markovljev lanac kontinuiran u vremenu matrica gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ jednaka

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Napišite diferencijske jednadžbe prijelaznih vjerojatnosti za ovaj proces i postavite diferencijalne jednadžbe. Izračunajte matricu prijelaznih vjerojatnosti.

ZADATAK 4.25 Pronađite matricu gustoća prijelaza Poissonovog procesa. Izvedite diferencijske jednadžbe za Poissonov proces. Pođite od klasične definicije Poissonovog procesa. Iz diferencijskih jednadžbi izvedite diferencijalno-rekurzivne jednadžbe.

ZADATAK 4.26 Neka je za Markovljev lanac kontinuiran u vremenu matrica gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ jednaka

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Napišite diferencijske jednadžbe prijelaznih vjerojatnosti za ovaj proces i postavite diferencijalne jednadžbe. Riješite diferencijalne jednadžbe Laplaceovom transformacijom.

ZADATAK 4.27 Yule-Furryijev proces zadan je diferencijalnim jednadžbama

$$p_{i,j}^{[t,t+h]} = p_k(h) = P(X(t+h) = j \mid X(t) = i) = \begin{cases} (j-1)\lambda h + o(h) & j-i = 1, \\ o(h) & j-i \geq 2, \\ 1 - j\lambda h + o(h) & j = i \end{cases}$$

Napišite diferencijalne jednadžbe za $p_n(t)$ i matricu gustoća prijelaza ovog lanca.

ZADATAK 4.28 Matrica prijelaznih vjerojatnosti nekog Markovljevog procesa s dva stanja je

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} + \frac{5e^{-8t}}{8} & \frac{5}{8} - \frac{5e^{-8t}}{8} \\ \frac{3}{8} - \frac{3e^{-8t}}{8} & \frac{5}{8} + \frac{3e^{-8t}}{8} \end{bmatrix}$$

Izračunajte stacionarne vjerojatnosti i matricu gustoća prijelaza za ovaj proces.

ZADATAK 4.29 Promatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.21. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca iz matrice prijelaznih vjerojatnosti.

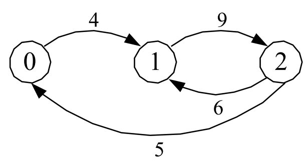
ZADATAK 4.30 Promatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.22. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca iz matrice prijelaznih vjerojatnosti.

ZADATAK 4.31 Promatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.23. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca iz matrice prijelaznih vjerojatnosti.

ZADATAK 4.32 Razmatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.19. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti rješavajući sustav linearnih jednadžbi.

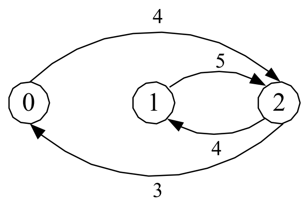
ZADATAK 4.33 Razmatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.20. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti rješavajući sustav linearnih jednadžbi.

ZADATAK 4.34 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.30. Rješavanjem sustava linearnih jednadžbi izračunajte stacionarne vjerojatnosti ovog lanca.



Slika 4.30: Dijagram stanja uz zadatak 4.34

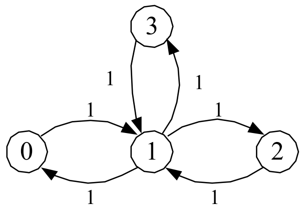
ZADATAK 4.35 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.31. Rješavanjem sustava linearnih jednadžbi izračunajte stacionarne vjerojatnosti ovog lanca.



Slika 4.31: Dijagram stanja uz zadatak 4.35

ZADATAK 4.36 Razmatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.34. Postavite i riješite jednadžbe globalne ravnoteže lanca.

ZADATAK 4.37 Razmatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.35. Postavite i riješite jednadžbe globalne ravnoteže lanca.

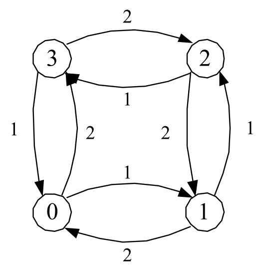


Slika 4.32: Dijagram stanja uz zadatak 4.38

ZADATAK 4.38 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.32. Postavite i riješite jednadžbe globalne ravnoteže zadanog lanca.

Ako se lanac nalazi u stanju 1, kolika je vjerojatnost da prilikom promjene stanja skoči u stanje 2.

ZADATAK 4.39 Dijagram stanja nekog Markovljevog lanca prikazan je na slici 4.33. Postavite i riješite jednadžbe globalne ravnoteže zadanog lanca.



Slika 4.33: Dijagram stanja uz zadatak 4.39

Ako se lanac nalazi u stanju 2, kolika je vjerojatnost da prilikom promjene stanja skoči u stanje 3.

4.4.3 Procesi rađanja i umiranja

ZADATAK 4.40 Napišite opće diferencijske jednadžbe za proces rađanja i umiranja koji ima jednake intenzitete rađanja i umiranja bez obzira na stanje u kojem se nalazi. Nakon toga izvedite matricu gustoća prijelaza za taj proces.

ZADATAK 4.41 Neka je proces rađanja i umiranja zadan diferencijskim jednadžbama

$$p_{ij}(h) = P(X(t+h) = j|X(t) = i) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & j = i+1 \\ o(h) & j \geq i+2, j \leq i-2 \\ \mu h + o(h) & j = i-1 \\ 1-(\lambda+\mu)h + o(h) & j = i \end{cases}$$

Postavite diferencijalne jednadžbe za vjerojatnost $p_n(t)$ i napišite matricu gustoća prijelaza za ovaj proces. (Ne rješavajte jednadžbe!)

ZADATAK 4.42 Neka je proces rađanja i umiranja zadan diferencijskim jednadžbama

$$p_{ij}(h) = P(X(t+h) = j|X(t) = i) = \begin{cases} (j-1)\lambda h + o(h) & j = i+1 \\ o(h) & j \geq i+2, j \leq i-2 \\ (j+1)\mu h + o(h) & j = i-1 \\ 1-(j\lambda+i\mu)h + o(h) & j = i \end{cases}$$

Postavite diferencijalne jednadžbe za vjerojatnost $p_n(t)$ i napišite matricu gustoća prijelaza za ovaj proces. (Ne rješavajte jednadžbe!)

ZADATAK 4.43 Neka je proces rađanja i umiranja definiran matricom gustoća prijelaza

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \dots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \quad n \geq 0 \\ \mu_n &= n\mu \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

Postavite diferencijalno-rekurzivne jednadžbe za $p_n(t)$.

ZADATAK 4.44 Promatrajte Markovljev lanac definiran u zadatku 4.38. Postavite i riješite jednadžbe lokalne ravnoteže za zadani lanac.

ZADATAK 4.45 Promatrajte sustav posluživanja s 2 poslužitelja i spremnikom kapaciteta 3 jedinice. Vrijeme posluživanja u poslužiteljima je raspodijeljeno eksponencijalno s parametrom μ, a jedinice dolaze u sustav po Poissonovom procesu s intenzitetom λ. Ako Markovljev proces kontinuiran u vremenu ima stanja koja odgovaraju broju jedinica u sustavu posluživanja, pronađite matricu gustoća prijelaza za ovaj sustav. Postavite jednadžbe lokalne ravnoteže i riješite ih.

ZADATAK 4.46 Promatrajte sustav posluživanja s 2 poslužitelja i spremnikom kapaciteta 2 jedinice. Vrijeme posluživanja u poslužiteljima je raspodijeljeno eksponencijalno s parametrom μ, a jedinice dolaze u sustav po Poissonovom procesu s intenzitetom λ. Ako Markovljev proces kontinuiran u vremenu ima stanja koja odgovaraju broju jedinica u sustavu posluživanja, pronađite matricu gustoća prijelaza za ovaj sustav. Postavite jednadžbe lokalne ravnoteže i riješite ih.

ZADATAK 4.47 Promatrajte sustav posluživanja s 3 poslužitelja i spremnikom kapaciteta 2 jedinice. Vrijeme posluživanja u poslužiteljima je raspodijeljeno eksponencijalno s parametrom μ, a jedinice dolaze u sustav po Poissonovom procesu s intenzitetom λ. Ako Markovljev proces kontinuiran u vremenu ima stanja koja odgovaraju broju jedinica u sustavu posluživanja, pronađite matricu gustoća prijelaza za ovaj sustav. Postavite jednadžbe lokalne ravnoteže i riješite ih.

ZADATAK 4.48 Promatrajte link kapaciteta $C = 20$ Mb/s. Kroz link se uspostavljaju dva tipa veza: A koji rezervira 15 Mb/s i B koji rezervira 10 Mb/s. Zahtjevi za uspostavom veze obaju tipova dolaze jednakim intenzitetom λ, a prosječno trajanje veze za oba tipa je $1/\mu$. Izračunajte vjerojatnost blokiranja uspostave veze tipa A.

4.5 Rješenja zadataka za vježbu

4.5.1 Markovljevi lanci s diskretnim parametrom

RJEŠENJE ZADATKA 4.1

Potrebno je izračunati n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$, i izračunati limes kada n teži u beskonačnost. n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$ potrebno je napisati u obliku

$$\mathbf{P}^n = \frac{\lambda_1^n}{\lambda_1 - \lambda_2}[\mathbf{P} - \lambda_2\mathbf{I}] + \frac{\lambda_2^n}{\lambda_2 - \lambda_1}[\mathbf{P} - \lambda_1\mathbf{I}],$$

gdje su λ_1 i λ_2 svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{P}$, ukoliko su različite. Pronađimo ih na sljedeći način:

$$\begin{aligned} |\mathbf{P} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0.5-\lambda & 0.5 \\ 0.6 & 0.4-\lambda \end{vmatrix} &= (0.5-\lambda)(0.4-\lambda) - 0.3 = \\ &= \lambda^2 - 0.9\lambda + 0.2 - 0.3 = \lambda^2 - 0.9\lambda - 0.1 = 0 \end{aligned}$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su svojstvene vrijednosti matrice:

$$\lambda_1 = 1 \text{ i } \lambda_2 = -0.1$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^n &= \frac{1^n}{1-(-0.1)}\begin{bmatrix} 0.5-(-0.1) & 0.5 \\ 0.6 & 0.4-(-0.1) \end{bmatrix} + \frac{(-0.1)^n}{-1-0.1}\begin{bmatrix} 0.5-1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4-1 \end{bmatrix} \\
\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n &= \frac{1}{1.1}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.\dot{5}\dot{4} & 0.\dot{4}\dot{5} \\ 0.\dot{5}\dot{4} & 0.\dot{4}\dot{5} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Stacionarne vjerojatnosti su: $\hat{\mathrm{p}}_1 = 0.\dot{5}\dot{4}$, $\hat{\mathrm{p}}_2 = 0.\dot{4}\dot{5}$

Rješenje zadatka 4.2

Potrebno je izračunati n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$, i izračunati limes kada n teži u beskonačnost. n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$ potrebno je napisati u obliku

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{S}\mathbf{D}^n\mathbf{S}^{-1}$$

gdje je $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica koja na dijagonalama ima svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{P}$, a $\mathbf{S}$ matrica svojstvenih vektora matrice $\mathbf{P}$. Izračunajmo prvo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{P}$.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0.6-\lambda & 0.4 \\ 0.5 & 0.5-\lambda \end{vmatrix} &= (0.6-\lambda)(0.5-\lambda) - 0.2 = \\
= \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.3 - 0.2 &= \lambda^2 - 1.1\lambda + 0.1 = 0
\end{aligned}$$

Rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su svojstvene vrijednosti matrice:

$$\lambda_1 = 1 \text{ i } \lambda_2 = 0.1$$

Potražimo odmah i svojstvene vektore pripadnih svojstvenih vrijednosti

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\vec{e}_i = \lambda_i\vec{e}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_i x_1 \\ \lambda_i x_2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0.6x_1 + 0.4x_2 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda_i x_1 \\ \lambda_i x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Rješenje ovog sustava jednadžbi je

$$x_1 = \frac{\lambda_i - 0.5}{0.5}x_2 \qquad x_2 = \frac{0.4}{\lambda_i - 0.6}x_2$$

U ovom rješenju izabrani su svojstveni vektori:

$$\lambda_1 = 1: \ \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = 0.1: \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

no mogu biti izabrani i neki drugi. Dakle, možemo napisati

$$\mathbf{P} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.\dot{5} & 0.\dot{4} \\ -1.\dot{1} & 1.\dot{1} \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n = \mathbf{S}\lim_{n\to\infty}\mathbf{D}^n\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -0.4 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.\dot{5} & 0.\dot{4} \\ -1.\dot{1} & 1.\dot{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.\dot{5} & 0.\dot{4} \\ 0.\dot{5} & 0.\dot{4} \end{bmatrix}$$

Stacionarne vjerojatnosti su: $\hat{\mathrm{p}}_1 = 0.\dot{5}$, $\hat{\mathrm{p}}_2 = 0.\dot{4}$.

Rješenje zadatka 4.3

Potrebno je odrediti matricu prijelaza ovog Markovljevog procesa diskretnog u vremenu. Ukoliko nam indeksi u matrici $\mathbf{P}$ odgovaraju stanjima, matrica prijelaza je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Nema potrebe tražiti stacionarne vjerojatnosti ovog procesa. Ukoliko pogledamo matricu $\mathbf{P}$, vidimo da su njeni reci jednaki i da je zbroj vjerojatnosti u retku 1 . Potenciranjem matrice $\mathbf{P}$ opet dobivamo matricu $\mathbf{P}$. Dakle reci matrice $\mathbf{P}$ već sadržavaju stacionarne vjerojatnosti sustava. Zaključujemo, stacionarne vjerojatnosti su: $\hat{p}_0 = \frac{1}{3}$, $\hat{p}_1 = \frac{2}{3}$.

Rješenje zadatka 4.4

Zadatak se rješava jednakim postupkom kao u primjeru 4.2. Krajnji rezultat je:

$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{a(1-a-b)^n}{a+b} + \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} - \frac{a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a}{a+b} + \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}.$$

Rješenje zadatka 4.5

Zadatak se rješava jednakim postupkom kao u primjeru 4.3. Krajnji rezultat je:

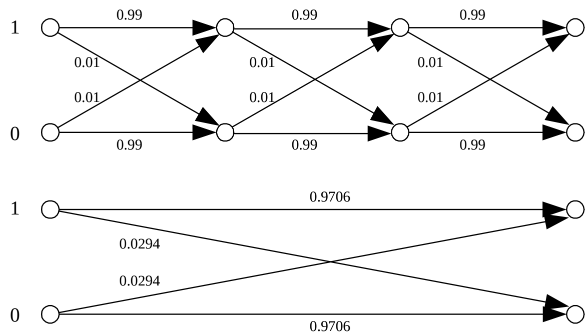
$$\mathbf{P}^n = \begin{bmatrix} \frac{a(1-a-b)^n}{a+b} + \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} - \frac{a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a}{a+b} + \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}.$$

Rješenje zadatka 4.6

Budući da je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita definirana općenito, matricu prijelaznih vjerojatnosti za jedan prijenosni sustav definiramo na sljedeći način:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}$$

Propagacija bita kroz tri sustava prikazana je na slici ispod.



Zaključujemo da će prijelazne vjerojatnosti propagacije bita kroz sva tri sustava biti definirane trećom potencijom matrice prijelaza $\mathbf{P}$.

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0.9705 & 0.0294 \\ 0.0294 & 0.9705 \end{bmatrix}$$

Vjerojatnosti prijelaza bita iz 0 u 1 i obrnuto su jednake, pa zaključujemo da je vjerojatnost pogreške bita s kraja na kraj 0.0294.

Rješenje zadatka 4.7
Vektor vjerojatnosti stanja u početnom koraku je $\mathbf{p}(0) = [0\,1]$. Vjerojatnost stanja u n-tom koraku računamo na sljedeći način:

$$\mathbf{p}(n) = [\mathbf{P}^n]^\top \mathbf{p}(0)$$

n-tu potenciju matrice $\mathbf{P}$ možemo pronaći koristeći rješenje iz primjera 4.2.

$$\mathbf{p}(n) = \begin{bmatrix} \frac{a(1-a-b)^n}{a+b} + \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} - \frac{a(1-a-b)^n}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} - \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a}{a+b} + \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}^\top \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} - \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} & \frac{a}{a+b} + \frac{b(1-a-b)^n}{a+b} \end{bmatrix}^\top$$

U slučaju $n = 5$, rješenje je

$$\mathbf{p}(5) = \begin{bmatrix} \frac{b}{a+b} - \frac{b(1-a-b)^5}{a+b} & \frac{a}{a+b} + \frac{b(1-a-b)^5}{a+b} \end{bmatrix}^\top$$

Vjerojatnost da se proces nalazi u stanju 1 nakon 5 koraka je

$$\hat{p}_1 = \frac{a}{a+b} + \frac{b(1-a-b)^5}{a+b}$$

Rješenje zadatka 4.8
Postavimo sustav linearnih jednadžbi:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_0 + \frac{1}{2}\hat{p}_1$$
$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_0 = 1.$$

To je i očekivano jer kada lanac jednom uđe u stanje 0, u njemu trajno ostaje.

Rješenje zadatka 4.9
Postavimo sustav linearnih jednadžbi:

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{P}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \hat{p}_0 \\ \hat{p}_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_1$$
$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_0 = \hat{p}_1 = \frac{1}{2}.$$

Lanac u svakom prijelazu alternira između stanja 0 i 1. Polovicu "vremena" provodi u svakom od stanja, pa je stoga vjerojatnost da lanac zateknemo u bilo kojem od stanja 1/2.

RJEŠENJE ZADATKA 4.10

Pri traženju matrice prijelaznih vjerojatnosti bitno je primijetiti da zbroj vjerojatnosti u retku matrice mora biti jednak jedan. Prema iskazu zadatka, proces u svakom sljedećem koraku mijenja svoje stanje prema gore ili dolje, no samo ukoliko je to moguće. To znači da ako je u stanju 1, onda može preći u stanje 2 s vjerojatnošću p, no može ostati i u istom stanju s vjerojatnošću q, jer nema nižeg stanja. Slično vrijedi i za slučaj kada je proces u stanju 5. Iz tog stanja može preći samo u stanje 4 s vjerojatnošću q ili ostati u stanju 5 s vjerojatnošću p. Jednostavno nalazimo da je matrica prijelaznih vjerojatnosti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & q & p \end{bmatrix}$$

Matričnu jednadžbu postavljamo na sljedeći način:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^\top - \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ p & -1 & q & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & -1 & q \\ 0 & 0 & 0 & p & -q \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \vec{b}$$

RJEŠENJE ZADATKA 4.11

Matricu prijelaznih vjerojatnosti iščitavamo neposredno iz dijagrama stanja:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Postavljamo sustav jednadžbi: $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{P}^\top \hat{\mathbf{p}}$.

$$\begin{aligned} 0.5\hat{p}_1 + 0.4\hat{p}_2 &= \hat{p}_1 \\ 0.3\hat{p}_1 + 0.6\hat{p}_2 + \hat{p}_2 &= \hat{p}_2 \\ 0.2\hat{p}_1 &= \hat{p}_3 \end{aligned}$$

Sustav postaje netrivijalan tek uz jednadžbu:

$$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 = 1$$

Eliminacijom druge jednadžbe dobivamo nehomogeni sustav:

$$\begin{aligned} \hat{p}_2 &= \frac{5}{4}\hat{p}_1 \\ \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 &= 1 \\ \hat{p}_1 &= 5\hat{p}_3 \end{aligned}$$

Stacionarne vjerojatnosti su:

$$\hat{p}_1 = \frac{20}{49}, \quad \hat{p}_2 = \frac{25}{49}, \quad \hat{p}_3 = \frac{4}{49}$$

RJEŠENJE ZADATKA 4.12

Matrica prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Možemo postaviti sljedeće dvije jednadžbe:

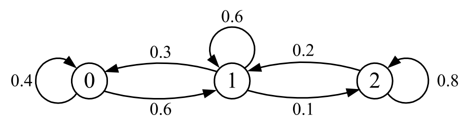
$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2$$
$$\hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1$$

Slijedi:

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \frac{1}{2}$$

Rješenje zadatka 4.13

Dijagram stanja je nepotpun i trebamo odrediti prijelazne vjerojatnosti ostanka u istom stanju. Potpun dijagram stanja je prikazan na slici 4.34.



Slika 4.34: Uz rješenje zadataka 4.13

Matrica prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Nehomogeni sustav jednadžbi je:

$$0.4\hat{p}_0 + 0.3\hat{p}_1 = \hat{p}_0$$
$$0.6\hat{p}_0 + 0.6\hat{p}_1 + 0.6\hat{p}_2 = \hat{p}_1$$
$$0.1\hat{p}_1 + 0.8\hat{p}_2 = \hat{p}_2$$

Sustav je najlakše riješiti zamjenjujući drugu jednadžbu s $\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1$. Dobivamo rješenja:

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{4}, \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{2}, \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{4}$$

Rješenje zadatka 4.14

Razdioba broja koraka koje lanac provodi u istom stanju ravna se po geometrijskoj razdiobi. Ako je proces proveo u nekom stanju n koraka (intervala), to znači da je napravio $n-1$ prijelaza u isto stanje i da je n-ti put napravio prijelaz u neko drugo stanje. Vjerojatnost napuštanja stanja 1 je $p = 0.4$, a ostanka u istom stanju je $q = 0.6$. Ako je N slučajna varijabla koja mjeri broj koraka provedenih bez prekida u stanju 1, onda je njena funkcija vjerojatnosti:

$$P(N = n) = q^{n-1}p$$

Očekivanje ove slučajne varijable odgovara prosječnom broju koraka koje lanac bez prekida provodi u stanju 1:

$$E[N] = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = \ldots = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} = 2.5$$

Rješenje zadatka 4.15
Krenimo od rješenja za binarni Markovljev lanac. Ako je matrica prijelaznih vjerojatnosti:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

onda je rješenje:

$$\hat{p}_0 = \frac{q}{p+q} = \frac{1}{3}, \qquad \hat{p}_1 = \frac{p}{p+q} = \frac{2}{3}$$

Ovaj sustav ima familiju rješenja:

$$\frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_1} = \frac{1}{2} = \frac{q}{p}$$
$$p = 2q$$

Rješenje zadatka 4.16
Za proces slučanog hoda možemo definirati sljedeće vjerojatnosti:

$$P[X_n = k | X_{n-1} = k-1] = p$$
$$P[X_n = k | X_{n-1} = k+1] = q$$

Budući da nemamo rubnih ograničenja, zaključujemo da je matrica prijelaznih vjerojatnosti beskonačna kvadratna matrica s elementima

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= p \\ p_{i,i-1} &= q \\ p_{i,j} &= 0, \qquad \text{za}\,|i-j| > 1 \text{ i } i-j=0 \end{aligned}$$

gdje smatramo da matrica može imati i negativne koeficijente i i j. Matricu bismo mogli prikazati ovako

$$P = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & q & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & q & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

4.5.2 Markovljevi lanci s kontinuiranim parametrom

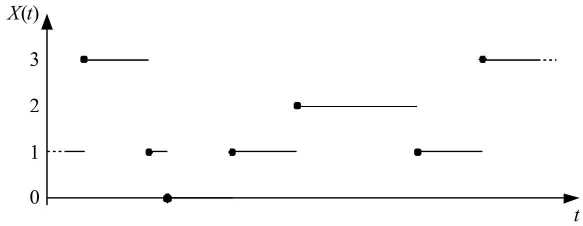
Rješenje zadatka 4.17
Matricu gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ čitamo neposredno iz dijagrama stanja. Zbroj elemenata u retku mora biti jednak 0.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -14 & 4 & 9 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

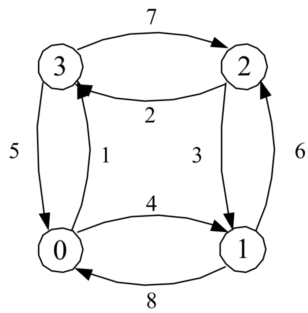
Prilikom crtanja trajektorije, moramo paziti na moguće prijelaze. Na primjer, prijelaz iz stanja 2 u stanje 3 nije moguć. Segment jedne moguće trajektorije prikazan je na slici 4.35.

Rješenje zadatka 4.18
Dijagram stanja dobivam pažljivim tumačenjem matrice $\mathbf{Q}$. $\mathbf{Q}$ ima dimenziju četiri, što znači da lanac ima 4 stanja, npr. stanje 0, 1, 2 i 3. Prijelazi su dopušteni samo između onih stanja za koje je element $q_i j$ matrice $\mathbf{Q}$ različit od 0. Negativne $q_i i$ ne ucrtavamo u dijagram stanja.

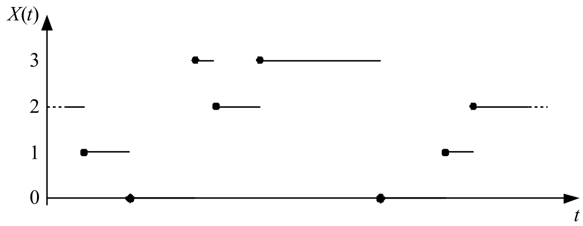
Segment jedne moguće trajektorije prikazan je na slici 4.37.



Slika 4.35: Segment trajektorije Markovljevog lanca uz rješenje zadatka 4.17



Slika 4.36: Dijagram stanja Markovljevog lanca uz rješenje zadatka 4.18



Slika 4.37: Segment trajektorije Markovljevog lanca uz rješenje zadatka 4.18

Rješenje zadatka 4.19
Matrica gustoća prijelaza je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -15 & 9 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

Prema teoremu 4.4 slijedi da je:

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-15t}$$

Očekivanje slučajne varijable T_1 je:

$$E[T_1] = \frac{1}{15}$$

Rješenje zadatka 4.20
Matrica gustoća prijelaza je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -11 & 4 & 7 \\ 6 & -7 & 1 \\ 6 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

Prema teoremu 4.4 slijedi da je:

$$F_{T_1}(t) = 1 - e^{-7t}$$

Očekivanje slučajne varijable T_1 je:

$$E[T_1] = \frac{1}{7}$$

Rješenje zadatka 4.21

Opće rješenje matrice prijelaznih vjerojatnosti (Kolmogorovljeve jednadžbe) Markovljevog lanca kontinuiranog u vremenu je:

$$\mathbf{P}(t) = e^{\mathbf{Q}t}.$$

Da bismo izračunali $e^{\mathbf{Q}t}$, matricu $\mathbf{Q}$ moramo napisati u obliku $\mathbf{Q} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{S}^{-1}$, gdje je $\mathbf{D}$ dijagonalna matrica. Dijagonalna matrica na dijagonali ima svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{Q}$, a matrica $\mathbf{S}$ je vektor redak svojstvenih vektora matrice $\mathbf{Q}$. Pronađimo svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{Q} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -(\lambda+5) & 5 \\ 3 & -(\lambda+3) \end{vmatrix} = (\lambda+5)(\lambda+3) - 15 =$$
$$= \lambda^2 + 8\lambda + 15 - 15 = \lambda(\lambda+8) = 0$$

Svojstvene vrijednosti ove matrice su: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -8$. Pronađimo svojstvene vektore.

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}$$

$$-5x_1 + 5x_2 = \lambda x_1 \;\Rightarrow\; 5x_2 = x_1(\lambda+5) \;\Rightarrow\; x_1 = \tfrac{5}{\lambda+5}x_2$$

$$\text{za} \quad \lambda_1 = 0: \qquad x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; \vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{za} \quad \lambda_2 = -8: \qquad x_1 = -\tfrac{5}{3}x_2 \;\Rightarrow\; \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Dobivamo matrice $\mathbf{D}$ i $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-8t} \end{bmatrix}$$

Rješenje Kolmogorovljeve jednadžbe je:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{S} \cdot e^{\mathbf{D}t} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-8t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 3+5e^{-8t} & 5-5e^{-8t} \\ 3-3e^{-8t} & 5+3e^{-8t} \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.22

Jednakim postupkom kao u rješenju zadatka 4.21. Svojstvene vrijednosti su

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -13.$$

Svojstveni vektori su:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Nadalje je:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-13t} \end{bmatrix}$$

Rješenje Kolmogorovljeve jednadžbe je:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{S} \cdot e^{\mathbf{D}t} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-13t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4 + 9e^{-13t} & 9 - 9e^{-13t} \\ 4 - 4e^{-13t} & 9 + 4e^{-13t} \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.23

Jednakim postupkom kao u rješenju zadatka 4.21. Svojstvene vrijednosti su

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -6.$$

Svojstveni vektori su:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nadalje je:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \qquad e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$$

Rješenje Kolmogorovljeve jednadžbe je:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{S} \cdot e^{\mathbf{D}t} \cdot \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + e^{-6t} & 1 - e^{-6t} \\ 1 - e^{-6t} & 1 + e^{-6t} \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.24

Iz teorije znamo da vrijede diferencijske jednadžbe:

$$p_{ii}(h) = 1 + q_{ii}h + o(h)$$
$$p_{ij}(h) = q_{ij}h + o(h)$$

Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

pa slijedi:

$$\begin{aligned}
p_{00}(h) &= 1 + (-5)h + o(h)\\
p_{01}(h) &= 5h + o(h)\\
p_{10}(h) &= 3h + o(h)\\
p_{11}(h) &= 1 + (-3)h + o(h).
\end{aligned}$$

Na osnovu ovih jednadžbi izračunavamo diferencijalne jednadžbe na sljedeći način

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) &= p_0(t)p_{00}(h) + p_1(t)p_{10}(h)\\
p_0(t+h) &= p_0(t)(1-5h) + p_1(t)(3h) + o(h)\\
p_0(t+h) - p_0(t) &= -5hp_0(t) + 3hp_1(t) + o(h)\\
\frac{p_0(t+h)-p_0(t)}{h} &= -5p_0(t) + 3p_1(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \quad h \to 0\\
\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} &= -5p_0(t) + 3p_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1(t+h) &= p_0(t)p_{01}(h) + p_1(t)p_{11}(h)\\
p_1(t+h) &= p_0(t)(5h) + p_1(t)(1-3h) + o(h)\\
p_1(t+h) - p_1(t) &= -3hp_1(t) + 5hp_0(t) + o(h)\\
\frac{p_1(t+h)-p_1(t)}{h} &= -3p_1(t) + 5p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \quad h \to 0\\
\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -3p_1(t) + 5p_0(t)
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 4.25

Prema klasičnoj definiciji Poissonovog procesa, prijelazne vjerojatnosti su dane izrazom:

$$p_{ij}(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$$

Gustoće prijelaznih vjerojatnosti tražimo prema definiciji

$$q_{ij} = \left.\frac{\mathrm{d}p_{ij}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

Dobivamo različite vrijednosti ovisno o razlici $j-i$.

$$\begin{aligned}
q_{i,i} &= \left.\frac{\mathrm{d}p_{i,i}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}e^{-\lambda t}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\lambda e^{-\lambda t}\big|_{t=0} = -\lambda\\
q_{i,i+1} &= \left.\frac{\mathrm{d}p_{i,i+1}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}(\lambda t)e^{-\lambda t}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = -\lambda^2 te^{-\lambda t}\big|_{t=0} + \lambda e^{-\lambda t}\big|_{t=0} = \lambda\\
q_{i,j} &= |j \geq i+2| = \left.\frac{\mathrm{d}p_{i,j}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0
\end{aligned}$$

Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots\\
0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots\\
0 & 0 & -\lambda & \lambda & \dots\\
0 & 0 & 0 & -\lambda & \dots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Iz jednadžbi

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) &= 1 + q_{ii}h + o(h) \\ p_{ij}(h) &= q_{ij}h + o(h) \end{aligned}$$

slijedi

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) &= 1 - \lambda h + o(h) \\ p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= p_k(t)p_{kk}(h) + p_{k-1}(t)p_{k-1,k}(h) \\ p_k(t+h) &= p_k(t)(1-\lambda h) + p_{k-1}(t)(\lambda h) + o(h) \\ p_k(t+h) - p_k(t) &= -3hp_1(t) + 5hp_0(t) + o(h) \\ \frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} &= -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \ h \to 0 \\ \frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_0(t+h) &= p_0(t)p_{00}(h) \\ p_0(t+h) &= p_0(t)(1-\lambda h) + o(h) \\ \frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} &= -\lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ h \to 0 \\ \frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda p_0(t) \end{aligned}$$

Rješenje zadatka 4.26
Iz teorije znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} p_{ii}(h) &= 1 + q_{ii}h + o(h) \\ p_{ij}(h) &= q_{ij}h + o(h) \end{aligned}$$

Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p_{00}(h) &= 1 + (-\lambda)h + o(h) \\ p_{01}(h) &= \lambda h + o(h) \\ p_{10}(h) &= \mu h + o(h) \\ p_{11}(h) &= 1 + (-\mu)h + o(h) \end{aligned}$$

Na osnovu ovih jednadžbi jednostavno izračunavamo diferencijalne jednadžbe na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
p_0(t+h) &= p_0(t)p_{00}(h) + p_1(t)p_{10}(h) \\
p_0(t+h) &= p_0(t)(1-\lambda h) + p_1(t)(\mu h) + o(h) \\
p_0(t+h) - p_0(t) &= -\lambda h p_0(t) + \mu h p_1(t) + o(h) \\
\frac{p_0(t+h) - p_0(t)}{h} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \quad h \to 0 \\
\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_1(t+h) &= p_0(t)p_{01}(h) + p_1(t)p_{11}(h) \\
p_1(t+h) &= p_0(t)(\lambda h) + p_1(t)(1-\mu h) + o(h) \\
p_1(t+h) - p_1(t) &= -\mu h p_1(t) + \lambda h p_0(t) + o(h) \\
\frac{p_1(t+h) - p_1(t)}{h} &= -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \quad h \to 0 \\
\frac{\mathrm{d}p_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -\mu p_1(t) + \lambda p_0(t)
\end{aligned}$$

Za rješavanje ovih jednadžbi potrebno je uzeti dodatnu jednadžbu:

$$p_0(t) + p_1(t) = 1.$$

Prva diferencijalna jednadžba sada ima samo jednu nepoznanicu:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)p_0(t) + \mu.$$

Laplaceovom transformacijom transformirajmo obje strane gornje jednadžbe. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
P_0(s)\cdot s - p_0(0) &= -(\lambda+\mu)\cdot P_0(s) + \frac{\mu}{s} \Rightarrow \\
P_0(s)\cdot[s+\lambda+\mu] &= \frac{\mu}{s} + p_0(0) \Rightarrow \\
P_0(s) &= \frac{\mu}{s(s+\lambda+\mu)} + \frac{p_0(0)}{s+\lambda+\mu} = \frac{p_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}}{s+\lambda+\mu} + \frac{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}{s}
\end{aligned}$$

Inverznom transformacijom dobivamo:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(p_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t).$$

Rješenje zadatka 4.27

Napišimo prvo matricu gustoća prijelaznih vjerojatnosti. Iz

$$\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= 1 + q_{ii}h + o(h) \\
p_{ij}(h) &= q_{ij}h + o(h)
\end{aligned}$$

slijedi

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Sustav diferencijalnih jednadžbi se svodi na

$$\begin{aligned} p_{i-1,i}(h) &= (i-1)\lambda h + o(h) \\ p_{i,i}(h) &= 1 - i\lambda h + o(h) \end{aligned}$$

Diferencijalne jednadžbe dobivamo na slječi način:

$$\begin{aligned} p_k(t+h) &= p_k(t)p_{kk}(h) + p_{k-1}(t)p_{k-1,k}(h) \\ p_k(t+h) &= p_k(t)[1-k\lambda h] + (k-1)\lambda h p_{k-1}(t) + o(h) \\ p_k(t+h) - p_k(t) &= -k\lambda h p_k(t) + (k-1)\lambda h p_{k-1}(t) + o(h) \\ \frac{p_k(t+h) - p_k(t)}{h} &= -k\lambda p_k(t) + (k-1)\lambda p_{k-1}(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ h \to 0 \\ \frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} &= -k\lambda p_k(t) + (k-1)\lambda p_{k-1}(t) \\ \frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje zadatka 4.28

Potrebno je naći limes matrice $\mathbf{P}(t)$ kada t teži u beskonačnost:

$$\hat{\mathbf{P}} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} + \frac{3e^{-8t}}{8} & \frac{5}{8} - \frac{3e^{-8t}}{8} \\ \frac{3}{8} - \frac{5e^{-8t}}{8} & \frac{5}{8} + \frac{5e^{-8t}}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Stacionarne vjerojatnosti čitamo iz bilo kojeg retka dobivene matrice $\hat{\mathbf{P}}$: $\hat{p}_0 = \frac{3}{8}$, $\hat{p}_1 = \frac{5}{8}$ Matricu gustoća prijelaznih vjerojatnosti računamo kao vrijednost derivacije prijelaznih vjerojatnosti u točki $t = 0$: $q_{ij} = \dfrac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t}$. Dobivamo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.29

Pogledajte rješenje zadatka 4.21. Matrica prijelaznih vjerojatnosti je

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3+5e^{-8t} & 5-5e^{-8t} \\ 3-3e^{-8t} & 5+3e^{-8t} \end{bmatrix}.$$

Do stacionarnih vjerojatnosti dolazimo izračunavanjem limesa kada t teži u beskonačno:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 3+5e^{-8t} & 5-5e^{-8t} \\ 3-3e^{-8t} & 5+3e^{-8t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}.$$

Bilo koji redak dobivene matrice je vektor redak stacionarnih vjerojatnosti:

$$\hat{\mathbf{p}}^\top = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.30

Pogledajte rješenje zadatka 4.22. Matrica prijelaznih vjerojatnosti je

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4+9e^{-13t} & 9-9e^{-13t} \\ 4-4e^{-13t} & 9+4e^{-13t} \end{bmatrix}$$

Do stacionarnih vjerojatnosti dolazimo izračunavanjem limesa kada t teži u beskonačno:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 4+9e^{-13t} & 9-9e^{-13t} \\ 4-4e^{-13t} & 9+4e^{-13t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \\ \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}.$$

Bilo koji redak dobivene matrice je vektor redak stacionarnih vjerojatnosti:

$$\hat{\mathbf{p}}^\top = \begin{bmatrix} \frac{4}{13} & \frac{9}{13} \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.31
Pogledajte rješenje zadatka 4.22. Matrica prijelaznih vjerojatnosti je

$$\mathbf{P}(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+e^{-6t} & 1-e^{-6t} \\ 1-e^{-6t} & 1+e^{-6t} \end{bmatrix}$$

Do stacionarnih vjerojatnosti dolazimo izračunavanjem limesa kada t teži u beskonačno:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+e^{-6t} & 1-e^{-6t} \\ 1-e^{-6t} & 1+e^{-6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bilo koji redak dobivene matrice je vektor redak stacionarnih vjerojatnosti:

$$\hat{\mathbf{p}}^\top = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.32
Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti je

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -15 & 9 \\ 0 & 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

Sustav linearnih jednadžbi koji moramo riješiti je:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \mathbf{Q}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}} \\ \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Ovaj sustav jednadžbi je jednoznačno rješiv. Imamo sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned} -4\hat{p}_0 + 6\hat{p}_1 &= 0 \\ 4\hat{p}_0 - 15\hat{p}_1 + 6\hat{p}_2 &= 0 \\ 9\hat{p}_1 - 6\hat{p}_2 &= 0 \\ \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Budući da sustav ima jednu jednadžbu previše, drugu jednadžbu ćemo zamijeniti posljednjom, pa zapravo rješavamo sustav:

$$\begin{aligned} -4\hat{p}_0 + 6\hat{p}_1 &= 0 \\ \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 &= 1 \\ 9\hat{p}_1 - 6\hat{p}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Sustav možemo riješiti uzastopnim uvrštavanjima. Ovdje demonstriramo Gauss-Jordanovu metodu:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{16}{15} & -\frac{2}{5} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} -0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{2}{8} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} \end{array}\right]$$

Dakle, stacionarne vjerojatnosti su:

$$\hat{p}_0 = \frac{3}{8} \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{4} \quad \hat{p}_2 = \frac{3}{8}$$

Rješenje zadatka 4.33

Jednakim postupkom kao u rješenju zadatka 4.32.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -11 & 4 & 7 \\ 6 & -7 & 1 \\ 6 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -7 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & -11 & 0 \end{array}\right] = \ldots = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{79}{204} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{53}{204} \end{array}\right]$$

Za rješavanje ovog sustava možemo iskoristiti i Cramerovo pravilo, kojim lakše dolazimo do rješenja. Stacionarne vjerojatnosti su:

$$\hat{p}_0 = \frac{6}{17} \quad \hat{p}_1 = \frac{79}{204} \quad \hat{p}_2 = \frac{53}{204}$$

Rješenje zadatka 4.34

Matrica prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 9 \\ 5 & 6 & -11 \end{bmatrix}$$

Iz jednadžbi:

$$\vec{0} = \mathbf{Q}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}}$$

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1$$

slijedi (mogući) sustav jednadžbi koje rješavamo:

$$\begin{aligned} -4\hat{p}_0 + 5\hat{p}_2 &= 0 \\ 9\hat{p}_1 - 11\hat{p}_2 &= 0 \\ \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Riješimo ovaj sustav uvrštavanjem rješenja prve dvije jednadžbe po $\hat{p}_0$ u treću:

$$\begin{aligned} &\hat{p}_2 = \frac{4}{5}\hat{p}_0 \\ &\hat{p}_1 = \frac{11}{9}\hat{p}_2 = \frac{11}{9} \cdot \frac{4}{5}\hat{p}_0 \quad \Rightarrow \\ &\hat{p}_0 + \frac{11}{9} \cdot \frac{4}{5}\hat{p}_0 + \frac{4}{5}\hat{p}_0 = 1 \end{aligned}$$

Dobivamo:

$$\hat{p}_0 = \frac{9}{25}$$
$$\hat{p}_1 = \frac{11}{9} \cdot \frac{4}{5}\hat{p}_0 = \frac{44}{125}$$
$$\hat{p}_2 = \frac{4}{5}\hat{p}_0 = \frac{36}{125}$$

Rješenje zadatka 4.35
Matrica prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

Iz jednadžbi:

$$\vec{0} = \mathbf{Q}^\top \cdot \hat{\mathbf{p}}$$
$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1$$

slijedi (mogući) sustav jednadžbi koje rješavamo:

$$-4\hat{p}_0 + 3\hat{p}_2 = 0$$
$$-5\hat{p}_1 + \hat{4}p_2 = 0$$
$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1$$

Riješimo ovaj sustav uvrštavanjem rješenja prve dvije jednadžbe po $\hat{p}_0$ u treću:

$$\hat{p}_2 = \frac{4}{3}\hat{p}_0$$
$$\hat{p}_1 = \frac{4}{5}\hat{p}_2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\hat{p}_0 \quad \Rightarrow$$
$$\hat{p}_0 + \frac{11}{9} \cdot \frac{4}{5}\hat{p}_0 + \frac{4}{5}\hat{p}_0 = 1$$

Dobivamo:

$$\hat{p}_0 = \frac{5}{17}$$
$$\hat{p}_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5}\hat{p}_0 = \frac{16}{51}$$
$$\hat{p}_2 = \frac{4}{3}\hat{p}_0 = \frac{20}{51}$$

Rješenje zadatka 4.36
Jednadžbe globalne ravnoteže postavljamo po principu da je ukupni izlazni tok iz stanja jednak ukupnom ulaznom toku u stanje.

$$4\hat{p}_0 = 5\hat{p}_2$$
$$9\hat{p}_1 = 4\hat{p}_0 + 6\hat{p}_2$$
$$(5+6)\hat{p}_2 = 9\hat{p}_1$$
$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1$$

Rješavanjem sustava dobivamo sljedeća rješenja:

$$\hat{p}_0 = \frac{9}{25}, \quad \hat{p}_1 = \frac{44}{125} \quad \hat{p}_2 = \frac{36}{125}$$

RJEŠENJE ZADATKA 4.37
Jednadžbe globalne ravnoteže postavljamo po principu da je ukupni izlazni tok iz stanja jednak ukupnom ulaznom toku u stanje.

$$\begin{aligned} 4\hat{p}_0 &= 3\hat{p}_2 \\ 5\hat{p}_1 &= 4\hat{p}_2 \\ (3+4)\hat{p}_2 &= 4\hat{p}_0 + 5\hat{p}_1 \\ \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 &= 1 \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo sljedeća rješenja:

$$\hat{p}_0 = \frac{5}{17}, \quad \hat{p}_1 = \frac{16}{51} \quad \hat{p}_2 = \frac{20}{51}$$

RJEŠENJE ZADATKA 4.38
Postavimo jednadžbe globalne ravnoteže:

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 &= \hat{p}_1 \\ \hat{p}_3 &= \hat{p}_1 \\ 3\hat{p}_1 &= \hat{p}_0 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 \quad \Rightarrow 4\hat{p}_1 = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 = 1 \end{aligned}$$

Slijedi:

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p}_3 = \frac{1}{4}$$

Vjerojatnost skoka iz stanja 1 u stanje 2 računamo prema izvedenoj formuli

$$\tilde{p}_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}, \ i \neq j.$$

Dakle,

$$\tilde{p}_{12} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

RJEŠENJE ZADATKA 4.39
Postavimo jednadžbe globalne ravnoteže:

$$\begin{aligned} 3\hat{p}_0 &= 2\hat{p}_1 + \hat{p}_3 \\ 3\hat{p}_1 &= \hat{p}_0 + 2\hat{p}_2 \\ 3\hat{p}_2 &= \hat{p}_1 + 2\hat{p}_3 \\ 3\hat{p}_3 &= 2\hat{p}_0 + \hat{p}_2 \\ 1 &= \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 \end{aligned}$$

Sustav rješavamo sukcesivnim uvrštavanjem ili Gauss-Jordanovom metodom. Dobivamo sljedeće stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p}_3 = \frac{1}{4}$$

Vjerojatnost skoka iz stanja 1 u stanje 2 računamo prema izvedenoj formuli

$$\tilde{p}_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}, \ i \neq j.$$

Dakle,

$$\tilde{p}_{12} = -\frac{1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

4.5.3 Procesi rađanja i umiranja

Rješenje zadatka 4.40
S λ označimo intenzitet rađanja, a s μ intenzitet umiranja. Prema definiciji prijelaznih vjerojatnosti procesa rađanja i umiranja dobivamo:

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) \\
p_{i,i-1}(h) &= \mu h + o(h) \\
p_{i,j}(h) &= o(h), \quad |j-i| \geq 2 \\
p_{ii}(h) &= 1-(\lambda+\mu)h + o(h)
\end{aligned}$$

Iz

$$\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= 1 + a_{ii}h + o(h) \\
p_{ij}(h) &= a_{ij}h + o(h)
\end{aligned}$$

dobivamo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\
-\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\
0 & -\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\
0 & 0 & -\mu & -(\lambda+\mu) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.41
Pojednostavnimo definiciju ovog procesa rađanja i umiranja:

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) \\
p_{i,i-1}(h) &= \mu h + o(h) \\
p_{i,j}(h) &= o(h), \quad |j-i| \geq 2 \\
p_{ii}(h) &= 1-(\lambda+\mu)h + o(h)
\end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi dobivamo diferencijalne jednadžbe. Pri tom uvažavamo činjenicu da je skok od dva ili više koraka u infinitezimalno kratkom periodu h zanemariv i tu zanemarivu vjerojatnost označavat ćemo s $o(h)$.

$$\begin{aligned}
p_k(t+h) &= p_k(t)p_{kk}(h) + p_{k-1}(t)p_{k-1,k}(h) + p_{k+1}(t)p_{k+1,k}(h) \\
p_k(t+h) &= p_k(t)[1-(\lambda+\mu)h] + p_{k-1}(t)\lambda h + p_{k+1}(t)\mu h + o(h) \\
p_k(t+h) - p_k(t) &= -(\lambda+\mu)hp_k(t) + \lambda hp_{k-1}(t) + \mu hp_{k+1}(t) + o(h) \\
\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} &= -(\lambda+\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \, h \to 0 \\
\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} &= -(\lambda+\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + \mu p_{k+1}(t), \quad k > 0
\end{aligned}$$

Sličnim razmatranjem dobivamo i drugu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t)$$

Iz

$$\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= 1 + a_{ii}h + o(h) \\
p_{ij}(h) &= a_{ij}h + o(h)
\end{aligned}$$

dobivamo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\
0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\
0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.42

Pojednostavnimo diferencijske jednadžbe zadanog procesa rađanja i umiranja.

$$\begin{aligned}
p_{i-1,i}(h) &= (i-1)\lambda h + o(h) \\
p_{i+1,i}(h) &= (i+1)\mu h + o(h) \\
p_{i,j}(h) &= o(h), \quad |j-i| \geq 2 \\
p_{ii}(h) &= 1 - i(\lambda+\mu)h + o(h)
\end{aligned}$$

Iz ovih jednadžbi dobivamo diferencijalne jednadžbe. Pri tom uvažavamo činjenicu da je skok od dva ili više koraka u infinitezimalno kratkom periodu h zanemariv i tu zanemarivu vjerojatnost označavat ćemo s $o(h)$.

$$\begin{aligned}
p_k(t+h) &= p_k(t)p_{kk}(h) + p_{k-1}(t)p_{k-1,k}(h) + p_{k+1}(t)p_{k+1,k}(h) \\
p_k(t+h) &= p_k(t)[1-k(\lambda+\mu)h] + p_{k-1}(t)(k-1)\lambda h + p_{k+1}(t)(k+1)\mu h + o(h) \\
p_k(t+h) - p_k(t) &= -k(\lambda+\mu)hp_k(t) + (k-1)\lambda h p_{k-1}(t) + (k+1)\mu h p_{k+1}(t) + o(h) \\
\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} &= -k(\lambda+\mu)p_k(t) + (k-1)\lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ \, h \to 0 \\
\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} &= -k(\lambda+\mu)p_k(t) + (k-1)\lambda p_{k-1}(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t)
\end{aligned}$$

Sličnim razmatranjima dobivamo i drugu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = \mu p_1(t)$$

Iz

$$\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= 1 + a_{ii}h + o(h) \\
p_{ij}(h) &= a_{ij}h + o(h)
\end{aligned}$$

dobivamo

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\
0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & \cdots \\
0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 4.43

Iz

$$\begin{aligned}
p_{ii}(h) &= 1 + a_{ii}h + o(h) \\
p_{ij}(h) &= a_{ij}h + o(h)
\end{aligned}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}
p_{i,i+1}(h) &= \lambda h + o(h) \\
p_{i,i-1}(h) &= (i-1)\mu h + o(h) \\
p_{i,j}(h) &= o(h), \quad |j-i| \geq 2 \\
p_{ii}(h) &= 1 - (\lambda + (i-1)\mu)h + o(h), \quad i \geq 0
\end{aligned}$$

Diferencijalno-rekurzivne jednadžbe dobivamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
p_k(t+h) &= p_k(t)p_{kk}(h) + p_{k-1}(t)p_{k-1,k}(h) + p_{k+1}(t)p_{k+1,k}(h) \\
p_k(t+h) &= p_k(t)[1-(\lambda+(k-1)\mu)h] + p_{k-1}(t)\lambda h + p_{k+1}(t)(k-1)\mu h + o(h) \\
p_k(t+h) - p_k(t) &= -(\lambda+(k-1)\mu)hp_k(t) + \lambda h p_{k-1}(t) + (k-1)\mu h p_{k+1}(t) + o(h) \\
\frac{p_k(t+h)-p_k(t)}{h} &= -(\lambda+(k-1)\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k-1)\mu p_{k+1}(t) + \frac{o(h)}{h} \Big/ h \to 0 \\
\frac{\mathrm{d}p_k(t)}{\mathrm{d}t} &= -(\lambda+(k-1)\mu)p_k(t) + \lambda p_{k-1}(t) + (k-1)\mu p_{k+1}(t)
\end{aligned}$$

Slično dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}p_0(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda p_0(t)$$

Rješenje zadatka 4.44

Jednadžbe lokalne ravnoteže postavljamo po principu izjednačenosti tokova između svih parova stanja u procesu rađanja i umiranja. Ovaj lanac se može shvatiti kao dvodimenzionalni proces rađanja i umiranja. Stoga je moguće postaviti jednadžbe lokalne ravnoteže. Dobivamo sustav jednadžbi:

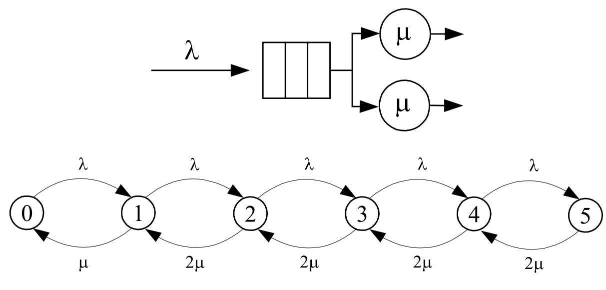
$$\begin{aligned}
\hat{p}_0 &= \hat{p}_1 \\
\hat{p}_2 &= \hat{p}_1 \\
\hat{p}_3 &= \hat{p}_1 \\
\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 &= 1
\end{aligned}$$

Stacionarne vjerojatnosti su:

$$\hat{p}_0 = \hat{p}_1 = \hat{p}_2 = \hat{p}_3 = \frac{1}{4}$$

Rješenje zadatka 4.45

Promatramo sustav posluživanja s dva poslužitelja i jednim spremnikom kapaciteta 3 jedinice. Možemo definirati dijagram stanja kako je prikazano na slici.



Slika 4.38: Uz rješenje zadatka 4.45

Intenziteti rađanja su elementi prve gornje sporedne dijagonale matrice gustoća prijelaza, dok su intenziteti umiranja elementi prve donje sporedne dijagonale matrice $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu
\end{bmatrix}$$

Budući da se radi o jednodimenzionalnom lancu rađanja i umiranja, možemo postaviti sljedeće jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$\begin{aligned}
\lambda\hat{p}_0 = \mu\hat{p}_1 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{\lambda}{\mu}\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_1 = 2\mu\hat{p}_2 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_2 = 2\mu\hat{p}_3 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_3 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_2 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_3 = 2\mu\hat{p}_4 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_4 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_3 = \frac{1}{2^3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_4 = 2\mu\hat{p}_5 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_5 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_4 = \frac{1}{2^4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5\hat{p}_0 \\
1 = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5 &
\end{aligned}$$

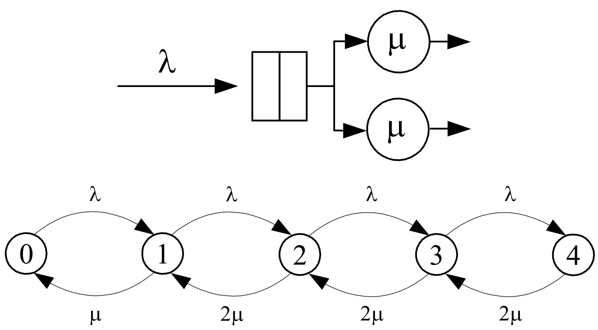
Iz dobivenih jednadžbi dobivamo vrijednost za $\hat{p}_0$, a time i sve ostale stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{p}_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^4}{8} + \frac{\rho^5}{16}\right]^{-1}$$

gdje je $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Rješenje zadatka 4.46

Promatramo sustav posluživanja s dva poslužitelja i jednim spremnikom kapaciteta 2 jedinice. Možemo definirati dijagram stanja kako je prikazano na slici.



Slika 4.39: Uz rješenje zadatka 4.46

Intenziteti rađanja su elementi prve gornje sporedne dijagonale matrice gustoća prijelaza, dok su intenziteti umiranja elementi prve donje sporedne dijagonale matrice $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}$$

Budući da se radi o jednodimenzionalnom lancu rađanja i umiranja, možemo postaviti sljedeće jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$\begin{aligned}
\lambda\hat{p}_0 = \mu\hat{p}_1 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{\lambda}{\mu}\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_1 = 2\mu\hat{p}_2 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_2 = 2\mu\hat{p}_3 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_3 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_2 = \frac{1}{2^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\hat{p}_0 \\
\lambda\hat{p}_3 = 2\mu\hat{p}_4 \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_4 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_3 = \frac{1}{2^3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\hat{p}_0 \\
1 = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5
\end{aligned}$$

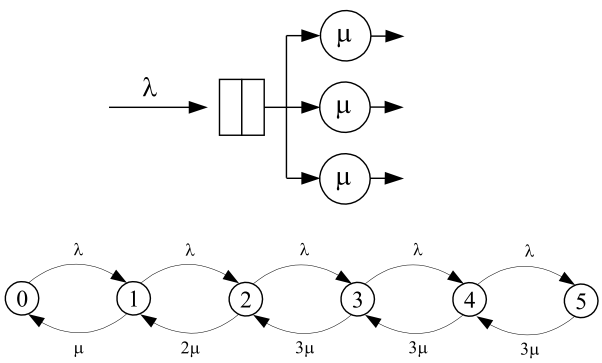
Iz dobivenih jednadžbi dobivamo vrijednost za $\hat{p}_0$, a time i sve ostale stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{p}_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4} + \frac{\rho^4}{8}\right]^{-1}$$

gdje je $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

RJEŠENJE ZADATKA 4.47

Promatramo sustav posluživanja s tri poslužitelja i jednim spremnikom kapaciteta 2 jedinice. Možemo definirati dijagram stanja kako je prikazano na slici.



Slika 4.40: Uz rješenje zadatka 4.47

Intenziteti rađanja su elementi prve gornje sporedne dijagonale matrice gustoća prijelaza, dok su intenziteti umiranja elementi prve donje sporedne dijagonale matrice $\mathbf{Q}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix}
-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu
\end{bmatrix}$$

Budući da se radi o jednodimenzionalnom lancu rađanja i umiranja, možemo postaviti sljedeće jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$
\begin{aligned}
\lambda\hat{p}_0 &= \mu\hat{p}_1 &&\Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{\lambda}{\mu}\hat{p}_0\\
\lambda\hat{p}_1 &= 2\mu\hat{p}_2 &&\Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\hat{p}_0\\
\lambda\hat{p}_2 &= 3\mu\hat{p}_3 &&\Rightarrow \quad \hat{p}_3 = \frac{\lambda}{3\mu}\hat{p}_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\hat{p}_0\\
\lambda\hat{p}_3 &= 3\mu\hat{p}_4 &&\Rightarrow \quad \hat{p}_4 = \frac{\lambda}{3\mu}\hat{p}_3 = \frac{1}{2\cdot 3^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\hat{p}_0\\
\lambda\hat{p}_4 &= 3\mu\hat{p}_5 &&\Rightarrow \quad \hat{p}_5 = \frac{\lambda}{3\mu}\hat{p}_4 = \frac{1}{2\cdot 3^3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5\hat{p}_0\\
1 &= \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5
\end{aligned}
$$

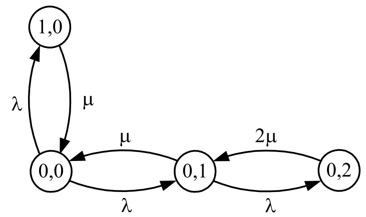
Iz dobivenih jednadžbi dobivamo vrijednost za $\hat{p}_0$, a time i sve ostale stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{p}_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} + \frac{\rho^4}{18} + \frac{\rho^5}{54}\right]^{-1}$$

gdje je $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Rješenje zadatka 4.48

U ovom zadatku se radi o dvodimenzionalnom procesu rađanja i umiranja. Dijagram stanja ovog lanca je prikazan na slici 4.41.



Slika 4.41: Uz rješenje zadatka 4.48

Stanje (i, j) označava stanje kada je uspostavljeno i veza tipa A i j veza tipa B. Da bismo izračunali vjerojatnost blokiranja, moramo izračunati stacionarne vjerojatnosti ovog lanca. Postavimo jednadžbe lokalne ravnoteže za lanac:

$$
\begin{aligned}
\lambda p_{00} &= \mu p_{10} &&\Rightarrow \quad p_{10} = \rho p_{00}\\
\lambda p_{00} &= \mu p_{01} &&\Rightarrow \quad p_{01} = \rho p_{00}\\
\lambda p_{01} &= 2\mu p_{02} &&\Rightarrow \quad p_{02} = \frac{\rho}{2}p_{01} = \frac{\rho^2}{2}p_{00}
\end{aligned}
$$

gdje je $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Rješavajući gornji sustav po p_{00} dobivamo

$$p_{00} = \frac{1}{1 + 2\rho + \frac{\rho^2}{2}}$$

Vjerojatnost blokiranja veza tipa A je jednaka zbroju vjerojatnosti stanja $(1, 0)$, $(0, 1)$ i $(0, 2)$. Stoga je:

$$p_{B_A} = \frac{2\rho + \frac{\rho^2}{2}}{1 + 2\rho + \frac{\rho^2}{2}}$$

Dio II

Osnove teorije posluživanja

Poglavlje 5

Osnovni sustavi posluživanja

Teorija prometa proučava matematičke modele prometnih izvora i sustava posluživanja prometa u mreži. Ti modeli se temelje na stohastičkim procesima, prvenstveno Markovljevim lancima. U ovom poglavlju ćemo proučiti osnovne modele posluživanja prometa u mreži i izračunati osnovne parametre koji ih opisuju.

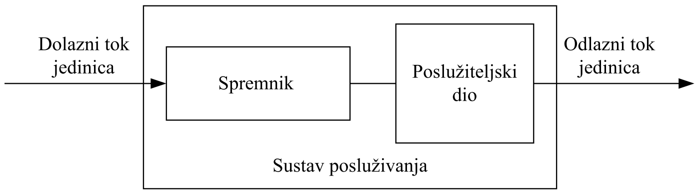
5.1 Pojam sustava posluživanja

Sustav posluživanja je sustav u koji pristižu određeni entiteti i traže uslugu. Entiteti stižu ograničenom brzinom, a sustav ima konačan kapacitet davanja usluga. Primjer sustava posluživanja je poslovnica banke u koju dolaze korisnici. Korisnici su entiteti koji postavljaju zahtjeve za obradom (posluživanjem), a radnici na šalterima predstavljaju kapacitetom ograničen resurs koji poslužuje zahtjeve entiteta.

Proučavamo sustave posluživanja informacijskih jedinica. Promatrajmo IP usmjeritelj (*router*). On na sebi ima određeni broj ulaznih i izlaznih portova. Možemo pretpostaviti da portovi imaju određeni spremnički prostor. Poslužitelj je ili sam usmjeritelj (točnije njegova interna sabirnica) u slučaju ulaznog porta ili odlazni link (njegova ograničena brzina prijenosa IP paketa) u slučaju izlaznog porta.

U početku promatramo jednostavan sustav posluživanja. U njemu vrijedi jednostavno pravilo da prva jedinica koja pristigne u sustav biva poslužena prva. To je princip posluživanja FIFO (*First In First Out*).

Sustav posluživanja se sastoji od spremnika i poslužiteljskog dijela, kako je prikazano na slici 5.1.

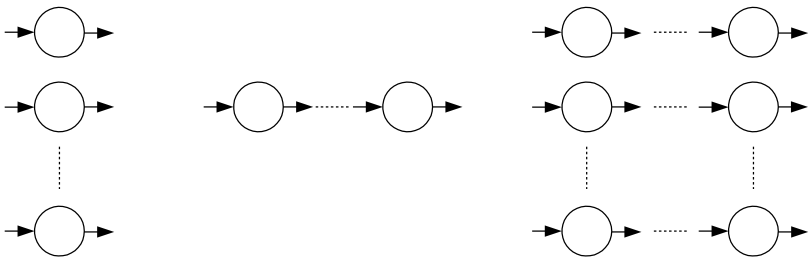


Slika 5.1: Osnovni dijelovi sustava posluživanja

Jedinice koje dolaze u sustav posluživanja ne moraju nužno odmah po dolasku biti poslužene. Razlog je taj što poslužiteljski dio može biti zauzet posluživanjem drugih jedinica. Stoga neke jedinice moraju čekati dok ne dođu na red za obradu. Dio poslužiteljskog sustava u kojem jedinice čekaju svoj red zove se spremnički dio.

Poslužiteljski dio se sastoji od jednog ili više poslužitelja. Poslužitelji mogu raditi u paraleli, seriji ili kombinirano. Poslužitelj je reprezentiran krugom s određenim simbolom u sredini. To može biti radnik na šalteru, jedan liječnik koji liječi cijeli red pacijenata. To je i jedan SDH 155.52 Mb/s link koji poslužuje ATM ćelije. Na slici 5.2 prikazane su različite kombinacije poslužitelja u poslužiteljskom dijelu.

U slučaju 5.2 - a) imamo nekoliko poslužitelja koji rade u paraleli. To odgovara situaciji gdje postoji jedan red čekanja a više šaltera koji rade istu vrstu posla. U slučaju 5.2 - b) imamo situaciju gdje nekakav proizvod u proizvodnoj liniji prolazi kroz više faza obrade. 5.2 - c) je kombinirani slučaj prethodna dva.



Slika 5.2: Različite kombinacije poslužitelja u sustavu posluživanja

Za opis (definiciju) sustava posluživanja koristimo *Kendallovu notaciju*

$$\mathrm{A}/\mathrm{B}/x/y/\mathrm{Z}$$

sa sljedećim značenjima:

A - označava razdiobu međudolaznih vremena dolaznog toka jedinica;

B - označava razdiobu vremena posluživanja (obrada) jedinica u poslužitelju poslužiteljskog dijela;

x - označava broj poslužitelja koji rade u paraleli (slučaj a);

y - označava kapacitet cijelog sustava: maksimalan broj jedinica u poslužiteljima plus broj mjesta za čekanje u spremniku;

Z - disciplina čekanja u spremniku (rep čekanja).

Oznake A i B mogu poprimati vrijednosti:

M - eksponencijalna razdioba (M dolazi od Markovljevog lanca kojim se može opisati tok jedinica s eksponencijalno raspodijeljenim međudolaznim vremenima;

E_r - Erlangova razdioba s r stupnjeva;

H_R - hipereksponencijalna razdioba s R stupnjeva;

D - deterministička razdioba - međudolazna vremena i vremena obrade su fiksna;

G - neka opća razdioba - nepoznata razdioba.

Tako je na primjer sustav M/D/3/10 tri-poslužiteljski sustav s eksponencijalno raspodijeljenim međudolaznim vremenima jedinica i s konstantnim vremenom obrade po jedinici s ukupno $10 - 3 = 7$ mjesta za čekanje u spremniku.

5.2 Oznake i osnovne relacije

Promatrajmo sada opći sustav posluživanja s m poslužitelja G/G/m. Neka C_n označava n-tu jedinicu slijeda jedinica koji dolazi u sustav posluživanja. Definirajmo sljedeće slučajne varijable:

$$\tau_n = \text{dolazno vrijeme jedinice } C_n \tag{5.1}$$

$$t_n = \tau_n - \tau_{n-1} = \text{ međudolazno vrijeme između } C_n \text{ i } C_{n-1} \tag{5.2}$$

$$x_n = \text{vrijeme posluživanja jedinice } C_n \tag{5.3}$$

U nekom trenutku t nas zanima ukupan broj jedinica u sustavu posluživanja $N(t)$. Broj jedinica u sustavu je jednak razlici broja jedinica koji je došao u sustav do trenutka t ($\alpha(t)$) i broja jedinica koji je poslužen do trenutka t ($\beta(t)$). To zapisujemo na sljedeći način:

$$N(t) = \alpha(t) - \beta(t). \tag{5.4}$$

$\alpha(t)$ i $\beta(t)$ su stohastički procesi koji u općem slučaju *nisu* neovisni. Ako $\alpha(t)$ stagnira, onda će ubrzo početi stagnirati i $\beta(t)$, jer poslužitelji nemaju što posluživati.

Cilj teorije čekanja i posluživanja nije samo predvidjeti broj jedinica u sustavu posluživanja (a time i broj jedinica u spremniku), nego i vrijeme koje jedinice provode u sustavu. Zato definiramo još jednu slučajnu varijablu:

$$s_n = \text{vrijeme koje jedinica } n \text{ provede u sustavu posluživanja.} \tag{5.5}$$

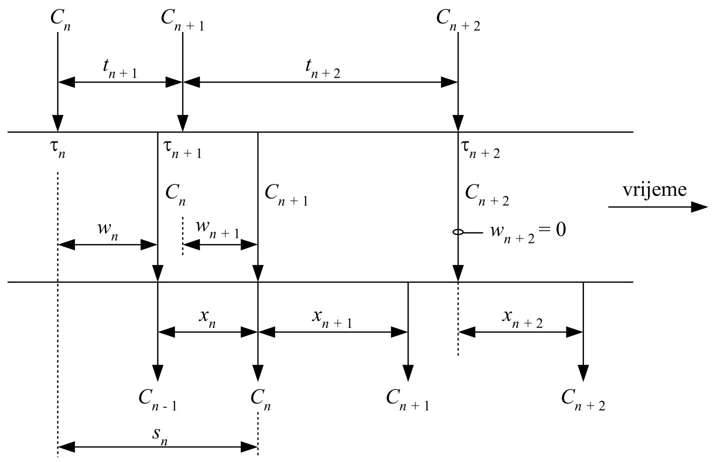
Ukupno vrijeme koje neka jedinica provede u sustavu posluživanja sastoji se od vremena koje ona provede u redu čekanja (spremniku) i vremena posluživanja jedinice u poslužitelju. Za vrijeme posluživanja već imamo oznaku (5.3). Vrijeme čekanja označavamo:

$$w_n = \text{ vrijeme čekanja jedinice } C_n \text{ u spremniku.} \tag{5.6}$$

Vrijedi:

$$s_n = w_n + x_n. \tag{5.7}$$

Odnos navedenih varijabli pojašnjava slika 5.3



Slika 5.3: Vremenski dijagram sustava posluživanja

Za navedene varijable definiramo funkcije razdioba i njihove gustoće na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
A_n(t) &= P[t_n \le t] & a_n(t) &= \frac{\mathrm{d}A_n(t)}{\mathrm{d}t} \\
B_n(t) &= P[x_n \le x] & b_n(x) &= \frac{\mathrm{d}B_n(x)}{\mathrm{d}x} \\
W_n(t) &= P[w_n \le w] & w_n(w) &= \frac{\mathrm{d}W_n(w)}{\mathrm{d}w} \\
S_n(y) &= P[s_n \le y] & s_n(y) &= \frac{\mathrm{d}S_n(y)}{\mathrm{d}y}
\end{aligned}$$

Očekivanja navedenih varijabli označavamo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
E[t_n] &= \bar{t}_n & E[x_n] &= \bar{x}_n \\
E[w_n] &= \bar{w}_n & E[s_n] &= \bar{s}_n
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Način na koji su definirane navedene varijable je općenit. Varijable definiramo za svaku pojedinu jedinicu posebno. Međutim, u realnom svijetu, varijable koje smo naveli ne ovise o parametru n. To je posljedica stacionarnog stanja procesa koje te varijable opisuju. Dakle, sustav posluživanja promatramo isključivo u stacionarnom stanju. Stoga nećemo promatrati varijable u funkciji od n, nego određene opće varijable. U slučaju međudolaznog vremena promatramo varijablu $\bar{t}$ koja je definirana graničnim prijelazom

$$\bar{t} = \lim_{n\to\infty} t_n \tag{5.9}$$

Ukoliko ovaj granični prijelaz označimo $t_n \to \bar{t}$ onda za sve definirane varijable možemo definirati opće varijable na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&t_n \to \tilde{t}, \quad && A_n(t) \to A(t), \quad && a_n(t) \to a(t), \quad && \bar{t}_n \to \bar{t} = \frac{1}{\lambda} = a \\
&x_n \to \tilde{x}, && B_n(x) \to B(x), && b_n(x) \to a(x), && \bar{x}_n \to \bar{x} = \frac{1}{\mu} = b \\
&w_n \to \tilde{w}, && W_n(t) \to W(t), && w_n(t) \to w(t), && \bar{w}_n \to \bar{w} = W \\
&s_n \to \tilde{s}, && S_n(y) \to S(y), && s_n(y) \to s(y), && \bar{s}_n \to \bar{s} = T
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Primijetimo da je očekivanje varijable koja mjeri međudolazno vrijeme jedinica ($\tilde{t}$) jednako $\frac{1}{\lambda}$. Parametar λ zovemo *prosječni intenzitet dolaska jedinica.* Slično, očekivanje varijable koja mjeri vrijeme obrade jedinica ($\tilde{x}$) jednako je $\frac{1}{\mu}$. Parametar μ zovemo *prosječni intenzitet posluživanja.*

Definirajmo jedan jako važan parametar - *faktor opterećenja poslužitelja* ili *faktor iskorištenja* ρ. Jedinica u kojoj mjerimo faktor opterećenja je *Erlang.* Ta je jedinica izvan SI sustava i ne mjeri nikakvu fizikalnu veličinu. Budući da se definicije opterećenja i prometnog intenziteta često miješaju, ovdje ćemo dati definiciju obiju veličina.

Prometni intenzitet (*traffic intensity*) ili ponuđeni promet nekog sustava posluživanja se definira kao omjer

$$A = \frac{\text{očekivano vrijeme posluživanja}}{\text{očekivano međudolazno vrijeme}} = \lambda \cdot \bar{x} \quad [\text{erl}] \tag{5.11}$$

gdje očekivano vrijeme posluživanja $\bar{x}$ odgovara prosječnom vremenu posluživanja za promatrani sustav. Jedinice koje pripadaju toku prometnog intenziteta A dolaze u poslužitelj i tamo se poslužuju. U sustavu posluživanja možemo imati jednog ili više poslužitelja koji rade paralelno. Promatramo samo one sustave gdje su svi poslužitelji koji rade u paraleli jednaki. Kada neka jedinica dođe na red za posluživanje, ona će s jednakom vjerojatnošću otići bilo kojem od m poslužitelja u paraleli. Budući da svaki od poslužitelja ima jednaku brzinu posluživanja, prosječno vrijeme posluživanja u poslužitelju će ostati nepromijenjeno bez obzira na broj poslužitelja m. Jedino što će se postići arhitekturom sustava s više paralelnih poslužitelja je da će se u jedinici vremena moći obraditi više jedinica nego u slučaju jednog poslužitelja.

Svaki od m poslužitelja poslužuje m-ti dio ukupnog dolaznog toka jedinica. Promatrajući jedan od tih m poslužitelja možemo zaključiti da će on određeno vrijeme provesti poslužujući jedinice, a jedno vrijeme ne radeći ništa. Ako promatramo dovoljno dugačak vremenski interval T, i zbrojimo ukupno vrijeme koje je promatrani poslužitelj proveo poslužujući jedinice te ga podijelimo s T, dobivamo mjeru koju zovemo faktor opterećenja poslužitelja. Faktor opterećenja se točnije definira relacijom:

$$\rho = \min\left\{\frac{\text{intenzitet dolaska jedinica u } \textit{poslužiteljski dio}}{\text{intenzitet posluživanja jedinica u promatranom } \textit{poslužiteljskom dijelu}}, 1\right\} \quad [\text{erl}] \tag{5.12}$$

Ovdje je taj faktor opterećenja definiran općenito za bilo koji sustav posluživanja (točnije poslužiteljski dio). On predstavlja količinu posla koji sustav obavi u jedinici vremena. Budući da sustav fizički ne može obaviti više posla od svog kapaciteta, opterećenje je s gornju stranu ograničeno s 1. To je ujedno i osnovna razlika između prometnog intenziteta A i opterećenja ρ. Iako se mjere jednakom jedinicom (*Erlang*), imaju bitno različita značenja.

Izuzetno je važno primijetiti da je opterećenje poslužitelja definirano kao omjer intenziteta dolaska jedinica u poslužitelj kroz njegov intenzitet posluživanja. U slučaju kada imamo spremnik ograničenog kapaciteta, ukupni dolazni tok intenziteta λ neće biti jednak intenzitetu toka koji dopire do poslužitelja. Razlog je taj što se određeni dio dolaznog toka jedinica ne prihvaća u sustav posluživanja zbog prepunjenosti spremnika. Vjerojatnost da je neka jedinica odbijena jednaka je vjerojatnosti da je sustav u potpunosti ispunjen jedinicama.

Promotrimo sada sustav G/G/1 intenziteta dolaska jedinica λ i intenziteta posluživanja poslužitelja μ, $\lambda < \mu$. To je sustav s jednim poslužiteljem. Faktor opterećenja tog sustava je prema definiciji:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ [erl]} \tag{5.13}$$

gdje smo iskoristili jednakost $\bar{x} = \frac{1}{\mu}$. U ovom slučaju je zadovoljena jednakost $A = \rho$. No, promotrimo sada sustav posluživanja s m jednakih poslužitelja u paraleli. Izračunajmo ponuđeni promet A i opterećenje sustava ρ. Jedno je sigurno - intenzitet dolazaka je λ. Treba još jedino saznati koliki je kapacitet poslužiteljskog dijela sustava. On je jednak $m\mu$ gdje je μ intenzitet posluživanja jednog poslužitelja. Opterećenje bilo kojeg poslužitelja jednako je:

$$\rho_{posl.} = \min\left\{\frac{\lambda\bar{x}}{m} = \frac{\lambda}{m\mu}, 1\right\} \text{ [erl]} \tag{5.14}$$

To je jasno budući da se ukupni dolazni tok dijeli na m dijelova, pa je ponuđeni promet svakom od poslužitelja $\frac{\lambda}{m\mu}$. Ukupni ponuđeni promet je opet

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \text{ [erl]} \tag{5.15}$$

Vrijedi jednakost

$$A = m\rho$$

Ponuđeni promet je m puta veći od opterećenja jednog poslužitelja u ovom poslužiteljskom sustavu. Opterećenje cijelog sustava posluživanja je:

$$\rho_{sustava} = \min\left\{\frac{\lambda}{m\mu}, 1\right\} = \rho_{posl.}$$

Dok ponuđeni promet može biti veći od 1 [erl], opterećenje sustava ili poslužitelja u sustavu ne može biti veće od 1 [erl]. *Opterećenje svakog od poslužitelja ne mora nužno biti jednako opterećenju sustava. Primjer je sustav posluživanja s dva paralelna poslužitelja koji poslužuju jedinice različitim intenzitetima.*

Opterećenje je tako očekivani udio vremena kada je sustav zauzet (kada obrađuje jedinice). Ako je intenzitet dolaska jedinica veći od intenziteta posluživanja, sustav je u potpunosti zauzet. Veliki dio jedinica mora čekati i red čekanja raste u beskonačnost. Sustav je stabilan jedino ukoliko je intenzitet dolaznog toka *manji* od intenziteta posluživanja. Jednake intenzitete dolaska jedinica i posluživanja dopuštamo samo u slučaju kada imamo sustav posluživanja D/D/1.

Gledanje opterećenja kao očekivanja udjela zauzetosti poslužitelja nam omogućuje izvođenje jedne vrlo zanimljive relacije za sustav G/G/1. Opterećenje ovog sustava zapravo je jednako *vjerojatnosti* da u sustavu ima barem jedna jedinica koja se obrađuje. Dakle, sustav je zauzet ukoliko se u njemu nalazi barem jedna jedinice. Ako s p_0 označimo vjerojatnost da u sustavu nema niti jedna jedinica, onda vrijedi:

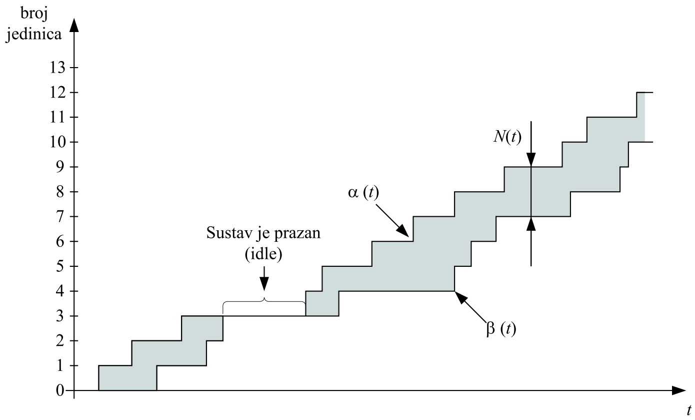
$$\rho = 1 - p_0. \tag{5.16}$$

5.3 Littleova formula

Sjetimo se izraza za broj jedinica u sustavu posluživanja $N(t)$ (5.4):

$$N(t) = \alpha(t) - \beta(t).$$

Odnos stohastičkih procesa $N(t)$, $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ grafički je predstavljen pripadnim trajektorijama na slici 5.4.



Slika 5.4: Dolasci i odlasci jedinica

Promotrimo površinu između trajektorija do nekog trenutka t. Ta površina je jednaka ukupnom vremenu kojeg su sve jedinice do trenutka t provele u sustavu. Tu površinu označimo s $\gamma(t)$. Ako je t jako velik, onda je prosječan broj jedinica u sustavu:

$$\overline{N} = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{t} \tag{5.17}$$

Nadalje, intenzitet dolaska jedinica λ možemo izračunati kao ukupan broj jedinica koji je do trenutka t došao u sustav, podijeljen s t, ako je t jako velik.

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{\alpha(t)}{t} \tag{5.18}$$

Ukupno vrijeme koje su jedinice provele u sustavu posluživanja do trenutka t podijeljeno s ukupnim brojem jedinica koje su došle u sustav posluživanja do trenutka t je jednako prosječnom vremenu koje su jedinice provodile u sustavu. Ako je t jako velik onda dobivamo:

$$T = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\frac{\gamma(t)}{t}}{\frac{\alpha(t)}{t}} = \frac{\overline{N}}{\lambda} \tag{5.19}$$

Ovaj rezultat se zove Littleova formula. Ona se može napisati u sljedećim oblicima:

$$\overline{N} = \lambda T \tag{5.20}$$
$$\overline{N}_q = \lambda W \tag{5.21}$$
$$\overline{N}_s = \lambda \bar{x} \tag{5.22}$$

$\overline{N}_q$ označava prosječan (očekivani) broj jedinica u spremniku, a $\overline{N}_s$ prosječan broj jedinica u poslužiteljskom dijelu. Naravno, vrijedi odnos:

$$T = \bar{x} + W \tag{5.23}$$

Izuzetno je važno primijetiti da smo pri izvodu Littleove formule pretpostavili da u sustav ulaze sve jedinice koje pristižu u sustav. No, to je opravdano jedino za sustav posluživanja koji imaju beskonačno veliki spremnik. Ukoliko je spremnički dio konačnog kapaciteta, neke jedinice koje pokušaju ući u sustav posluživanja će biti odbačene. To znači da je intenzitet dolaznog toka za sustav posluživanja efektivno manjeg intenziteta. Taj efektivni intenzitet označavamo λ_{ef}. Njega računamo kao umnožak pravog intenziteta dolaska jedinica i vjerojatnosti prihvaćanja jedinice u sustav posluživanja:

$$\lambda_{ef} = \lambda P[\text{prihvaćanja}] = \lambda(1 - P[\text{odbacivanja}])$$

Zbog ovog razloga Littleove relacije za sustave s konačnim spremnicima imaju sljedeći oblik:

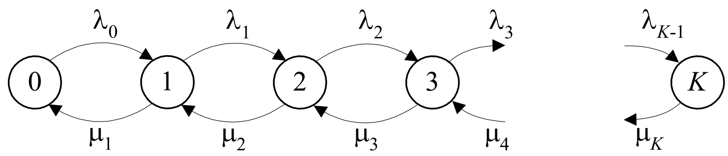
$$\overline{N} = \lambda_{ef} T \tag{5.24}$$
$$\overline{N}_q = \lambda_{ef} W \tag{5.25}$$
$$\overline{N}_s = \lambda_{ef} \bar{x} \tag{5.26}$$

Ove relacije ćemo uvelike koristiti pri izračunavanju vrijednosti osnovnih veličina sustava posluživanja. U ovom poglavlju obradit ćemo najjednostavnije sustave posluživanja koje možemo opisati procesima rađanja i umiranja.

5.4 Sustavi posluživanja opisani procesima rađanja i umiranja

Ovi sustavi posluživanja su podskup Markovljevih sustava posluživanja. Međudolazna vremena jedinica u sustav posluživnja su raspodijeljena eksponencijalno s parametrom λ, koji je ujedno i intenzitet, a vremena obrada u poslužitelju su eksponencijalno raspodijeljena s parametrom μ koji je ujedno i intenzitet posluživanja. Primjeri ovih sustava su M/M/1, M/M/1/K, M/M/m/K itd.

Bilo koji sustav posluživanja opisan procesom rađanja i umiranja možemo predstaviti dijagramom stanja na slici 5.5



Slika 5.5: Dijagram stanja sustava posluživanja s ograničenim spremnikom

Svako stanje ima pridružen određeni broj koji označava broj jedinica u sustavu. Stanje procesa rađanja i umiranja je broj jedinica u sustavu posluživanja. Možemo postaviti Kolmogorovljevu jednadžbu unaprijed.

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{Q}$$

Koeficijente λ_i i μ_i dogovorno definiramo kao elemente matrice gustoća prijelaza na sljedeći način:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \mu_4 & \ddots \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Bilo koji sustav posluživanja je opisan svojom matricom gustoća prijelaza $\mathbf{Q}$ i određenim početnim uvjetima. No, često nas ne zanima kako se sustav ponaša neposredno nakon što je aktiviran, nego nas zanima njegovo ponašanje kada je ušao u stacionarno stanje (*equilibrium*). Do takvog stanja dolazimo promatrajući sustav u dalekom vremenu $t \to \infty$.

Budući da razmatramo procese rađanja i umiranja, do stacionarnih vjerojatnosti možemo doći postavljanjem jednadžbi lokalne ravnoteže. Na slici 5.5 je prikazan dijagram stanja sustava s konačnim brojem stanja, tj. ograničenog spremničkog i poslužiteljskog dijela. Postavimo jednadžbe lokalne ravnoteže za ovaj sustav:

$$\begin{aligned} \lambda_0\hat{p}_0 &= \mu_1\hat{p}_1 \\ \lambda_1\hat{p}_1 &= \mu_2\hat{p}_2 \\ &\vdots \\ \lambda_{K-1}\hat{p}_{K-1} &= \mu_K\hat{p}_K \\ 1 &= \sum_{i=0}^{K}\hat{p}_i. \end{aligned} \tag{5.28}$$

U slučaju da sustav ima neograničen spremnički kapacitet, sustav jednadžbi postaje:

$$\begin{aligned} \lambda_i\hat{p}_i &= \mu_{i+1}\hat{p}_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots \\ 1 &= \sum_{i=0}^{\infty}\hat{p}_i. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Riješimo dobiveni sustav jednadžbi za slučaj sustava posluživanja s konačnim brojem stanja K.

$$\hat{p}_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\hat{p}_0$$
$$\hat{p}_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\hat{p}_1 = \frac{\lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_2 \cdot \mu_1}\hat{p}_0$$
$$\vdots$$
$$\hat{p}_K = \frac{\lambda_{K-1}}{\mu_K}\hat{p}_{K-1} = \frac{\lambda_{K-1} \cdot \lambda_{K-2} \ldots \lambda_2 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_0}{\mu_K \cdot \mu_{K-1} \ldots \mu_3 \cdot \mu_2 \cdot \mu_1}\hat{p}_0$$

$$\hat{p}_0 = \left[1 + \sum_{j=1}^{K} \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}\right]^{-1} \tag{5.30}$$

U slučaju kada imamo sustav s beskonačnim brojem stanja, koristimo isto rješenje ali puštamo da K teži u beskonačno.

Poznavajući stacionarnu razdiobu stanja sustava posluživanja, možemo izračunati statističke parametre sustava. Izračunajmo očekivani (prosječni) broj jedinica u sustavu. Taj je broj jednak očekivanju procesa rađanja i umiranja u stacionarnom stanju. Proces rađanja i umiranja je diskretan po vrijednostima i kontinuiran po parametru. Ako fiksiramo neki trenutak $t \to \infty$ i u njemu promatramo slučajnu varijablu procesa $N(t)$ onda dobivamo diskretnu slučajnu varijablu s vjerojatnošću stanja n jednakom $\hat{p}_n$. Srednji broj jedinica u sustavu posluživanja jednak je očekivanju te varijable. Očekivanje računamo prema izrazu:

$$\overline{N} = \sum_n n p_n \tag{5.31}$$

Slično možemo izračunati i varijancu broja jedinica u sustavu:

$$\sigma_N^2 = \sum_n \left(n - \overline{N}\right)^2 p_n \tag{5.32}$$

Kada izračunamo prosječan broj jedinica u sustavu, onda koristeći Littleovu formulu jednostavno izračunavamo prosječno vrijeme zadržavanja jedinica u sustavu prema izrazu:

$$T = \frac{\overline{N}}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\sum_n n p_n \tag{5.33}$$

gdje je α efektivni intenzitet dolaska jedinica u sustav posluživanja. Efektivni intenzitet računamo prema izrazu:

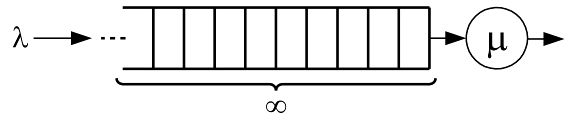
$$\alpha = \sum_n \lambda_n p_n \tag{5.34}$$

U nastavku skripte će se traženje pojedinih veličina svesti na uvrštavanje rješenja za stacionarne vjerojatnosti u gore dane izraze i traženje suma koje će se pojaviti. Za demonstraciju dajemo nekoliko konkretnih primjera.

5.5 Primjeri sustava posluživanja opisanih procesima rađanja i umiranja

5.5.1 Sustav posluživanja M/M/1

U sustavu posluživanja M/M/1, poslužiteljski dio se sastoji od jednog poslužitelja. Spremnik je beskonačnog kapaciteta (slika 5.6).

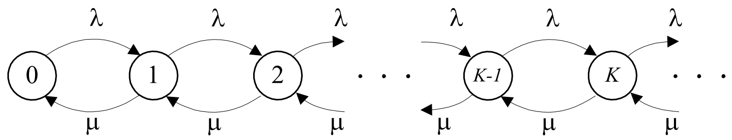


Slika 5.6: Sustav posluživanja M/M/1

Jedinice dolaze u sustav s međudolaznim vremenima raspodijeljenim po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ. Vrijeme obrade jedinice je eksponencijalno raspodijeljeno s parametrom μ. Intenziteti prijelaza u viša i niža stanja su:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu_n &= \mu \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Dijagram stanja je prikazan na slici 5.7.



Slika 5.7: Dijagram stanja sustava posluživanja M/M/1

Postavimo jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$\hat{p}_n = \frac{\lambda}{\mu}\hat{p}_{n-1} = \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\mu} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \hat{p}_0 \rho^n \qquad n \geq 1$$

$\hat{p}_0$ izračunavamo prema (5.30) uz uvjet da je $\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$.

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} = \frac{1}{\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}} = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Prema izrazu (5.13) zaključujemo da je $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Slijedi:

$$\hat{p}_0 = 1 - \rho \tag{5.35}$$

Sada $\hat{p}_0$ vraćamo u (5.5.1) i dobivamo:

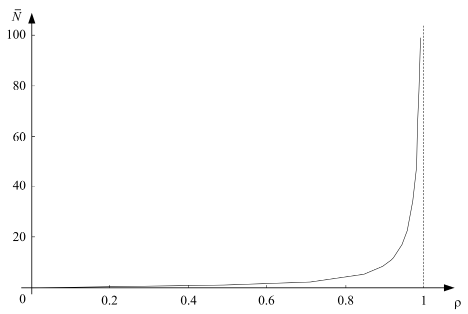
$$\hat{p}_n = (1 - \rho)\rho^n. \tag{5.36}$$

Prosječan broj jedinica u sustavu posluživanja $\overline{N}$ računamo kao očekivanje slučajne varijable koja označava broj jedinica u sustavu:

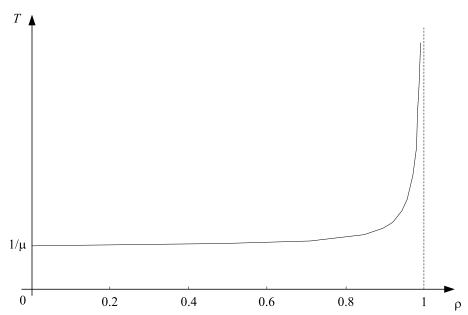
$$
\begin{aligned}
\overline{N} &= \sum_{n=0}^{\infty} n\hat{p}_n = (1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n \\
&= \rho(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \rho(1-\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \\
&= \rho(1-\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{1-\rho}\right] = \rho(1-\rho)\left[\frac{1}{(1-\rho)^2}\right] \\
\overline{N} &= \frac{\rho}{1-\rho} \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

Prosječno vrijeme koje jedinice provode u sustavu računamo prema Littleovoj formuli kako slijedi:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{\overline{N}}{\lambda} \\
T &= \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} \qquad (5.38)
\end{aligned}
$$



Slika 5.8: Prosječan broj jedinica u M/M/1 sustavu u funkciji od ρ



Slika 5.9: Prosječno vrijeme provedeno u M/M/1 sustavu u funkciji od ρ

Sada znamo prosječan broj jedinica u sustavu kao i prosječno vrijeme koje jedinice provode u sustavu. No, koliko je vrijeme čekanja u spremničkom dijelu i kolika je prosječna duljina reda (repa) čekanja? Ove dvije nepoznanice određujemo tako što izračunamo prosječno vrijeme obrade jedinice u sustavu posluživanja i iz njega izračunamo prosječno vrijeme koje jedinice provode u repu čekanja. Prosječno vrijeme posluživanja jedinice je određeno parametrom eksponencijalne razdiobe μ i jednako je

$$
\bar{x} = \frac{1}{\mu} \qquad (5.39)
$$

Slijedi

$$W = T - \bar{x} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \tag{5.40}$$

Prosječan broj jedinica u repu čekanja je:

$$\overline{N}_q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{5.41}$$

Iz (5.41) slijedi i prosječan broj jedinica u poslužitelju:

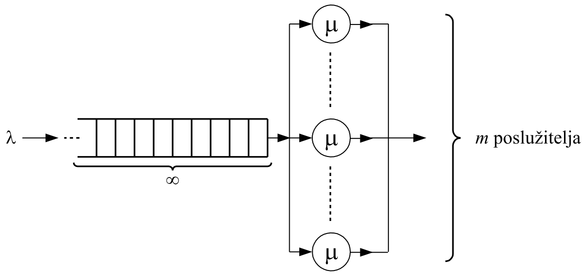
$$\overline{N}_s = \overline{N} - \overline{N}_q = \rho \tag{5.42}$$

Prosječan broj jedinica u sustavu posluživanja tako koincidira s njegovim opterećenjem. To je još jedan vid interpretacije pojma opterećenja.

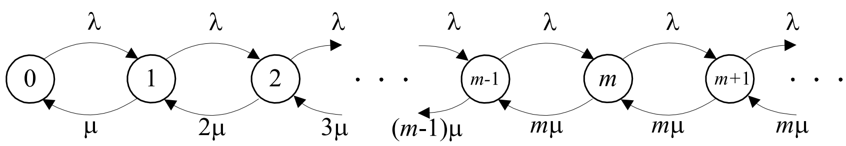
Zanimljivo je promotriti grafove funkcijskih ovisnosti $\overline{N}(\rho)$ i $T(\rho)$. Ti su grafovi prikazani na slikama 5.8 i 5.9. Vidimo da broj jedinica u sustavu, a shodno tome i prosječno vrijeme koje jedinice provode u sustavu, naglo raste ako opterećenje pređe 0.8. Ovaj vid ponašanja sustava posluživanja je svojstven gotovo svim modelima sustava posluživanja. Uz određene uvjete, može se reći da ovakvo ponašanje pokazuju svi sustavi posluživanja tipa G/G/1.

5.5.2 Sustav posluživanja M/M/m - *Erlangova C formula*

Promatramo sustav s beskonačno velikim spremnikom i m poslužitelja koji rade u paraleli (slika 5.10). Dijagram stanja je prikazan na slici 5.11.



Slika 5.10: Sustav posluživanja M/M/m



Slika 5.11: Dijagram stanja za sustav posluživanja $M/M/m$

Razlog što je intenzitet posluživanja proporcijalan broju jedinica u sustavu za $N(t) \leq m$ je taj što je u tim stanjima aktivno točno onoliko poslužitelja koliko je jedinica u sustavu. Možemo zapisati

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \\ \mu_n &= \min\{n\mu, m\mu\} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Problem traženja vjerojatnosti stanja ovog sustava je u tome što moramo posebno promatrati slučaj kada je $n \leq m$ i kada je $n \geq m$. Iz jednadžbi lokalne ravnoteže slijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
\text{za } n \leq m, \qquad \hat{p}_n &= \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \\
&= \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^n}{n!} \qquad (5.43) \\
\text{za } n \geq m, \qquad \hat{p}_n &= \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=m}^{n-1} \frac{\lambda}{m\mu} \\
&= \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{m^m}{m! m^n} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^m}{m!} \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

Pri izračunu smo se pobrinuli da nam se u potenciji od n nađe opterećenje poslužitelja.

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} < 1 \qquad (5.45)$$

Sada jednostavnije možemo zapisati funkciju vjerojatnosti slučajne varijable koja mjeri broj jedinica procesa u stacionarnom stanju:

$$p_n = \begin{cases} p_0 \dfrac{(m\rho)^n}{n!} & n \leq m \\ p_0 \dfrac{\rho^n m^m}{m!} & n \geq m \end{cases} \qquad (5.46)$$

Naravno, još nam je jedino potreban izraz za vjerojatnost $\hat{p}_0$. Nju nalazimo iz izraza (5.30).

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\rho^n m^m}{m!}\right)} \qquad (5.47)$$

Prvi zbroj u nazivniku ne možemo eksplicitno izračunati, no drugi možemo i to na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n &= \frac{m^m}{m!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n - \sum_{n=0}^{m-1} \rho^n\right] \\
&= \frac{m^m}{m!} \left[\frac{1}{1-\rho} - \frac{1-\rho^m}{1-\rho}\right] \\
&= \frac{(m\rho)^m}{(1-\rho)m!}
\end{aligned}$$

Pojednostavljenjem (5.47) dobivamo:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{(1-\rho)m!}} \qquad (5.48)$$

Srednji broj jedinica u sustavu posluživanja pronalazimo kao očekivanje slučajne varijable s funkcijom razdiobe (5.46).

$$\overline{N} = \sum_{n=0}^{m-1} n p_0 \frac{(m\rho)^n}{n!} + \sum_{n=m}^{\infty} n p_0 \frac{\rho^n m^m}{m!} \qquad (5.49)$$

Nažalost, gornji izraz se ne može jednostavno izračunati. Stoga statističke veličine računamo zaobilaznim putom. Izračunat ćemo srednju duljinu repa čekanja. Promatramo slučajnu varijablu $N_q(t)$ (odnosno proces) koja mjeri broj jedinica u repu čekanja u trenutku t u stacionarnom stanju. Vjerojatnosti da je $N_q(t) = 1, 2, 3, \ldots$ jednake su vjerojatnostima $N(t) = m+1, m+2, m+3, \ldots$. Vjerojatnost

$N_q = 0$ jednaka je vjerojatnosti da je sustav u jednom od stanja iz skupa $\{0, 1, \ldots, m\}$. Srednji broj jedinica u repu čekanja je jednak očekivanju varijable $N_q(t)$.

$$\begin{aligned}
\overline{N}_q &= \sum_{n=0}^{\infty} nP\left[N(t) = m + n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} nP\left[N(t) = m + n\right] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} np_0 \frac{m^m \rho^{m+n}}{m!} = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \left[\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^n\right] \\
&= p_0 \rho \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right] = p_0 \rho \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n - 1\right] \\
&= p_0 \rho \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{1-\rho} - 1\right] = p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (5.50)
\end{aligned}$$

Sjetimo se iz prethodnog primjera da je opterećenje jednog procesora jednako prosječnom broju jedinica koji boravi u njemu (koje se obrađuju). Budući da imamo m procesora, zaključujemo da je $\overline{N}_s = m\rho$. Iz (5.23) zaključujemo da vrijedi:

$$\overline{N} = \overline{N}_s + \overline{N}_q = m\rho + p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (5.51)$$

Prosječno vrijeme zadržavanja u sustavu i čekanja u repu računamo pomoću Littleovih formula. Prosječno vrijeme obrade je $1/\mu$.

Sustav posluživanja M/M/m ima veliki praktični značaj u telefoniji. Prvi ga je analizirao A.K. Erlang. On ga je iskoristio kako bi izračunao vjerojatnost da će jedinica koja je pristigla u sustav biti prisiljena čekati svoj red na posluživanje. Ta je vjerojatnost jednaka vjerojatnosti da su svi poslužitelji zauzeti. Ta je pak vjerojatnost jednaka vjerojatnosti da su svi poslužitelji zauzeti i da je u spremničkom dijelu sustava posluživanja 0, 1 ili više jedinica. Tu vjerojatnost nalazimo jednostavno kao:

$$\begin{aligned}
P[\text{čekanja}] &= \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \sum_{n=m}^{\infty} p_0 \frac{\rho^n m^m}{m!} \\
&= p_0 \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m+m} = p_0 \frac{(\rho m)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^{n-m} \\
&= p_0 \frac{(\rho m)^m}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = p_0 \frac{(\rho m)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho}
\end{aligned}$$

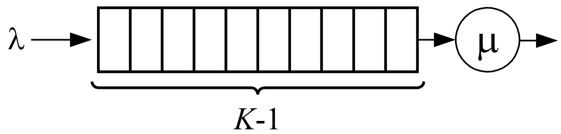
$$P_m = \frac{\dfrac{(\rho m)^m}{m!(1-\rho)}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{(1-\rho)m!}} \qquad (5.52)$$

Izraz (5.52) se zove *Erlangova C Formula*. U Europi je obično označavamo s $E_{2,m}(\lambda/\mu)$, dok je u Americi označavaju s $C(m, \lambda/\mu)$. Formula vraća vjerojatnost da je niti jedan vod (*trunk*) nije raspoloživ i da dolazni poziv mora čekati. Dakako, poziv nije odbijen, nego se stavlja na čekanje.

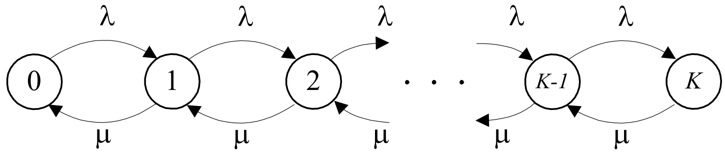
Erlangovu formulu obično koristimo u obrnutom smjeru. Naime, uobičajeni problem koji se javlja pri dimenzioniranju komunikacijskih sustava s pozivima na čekanju je određivanje dovoljnog broja poslužitelja ako se vjerojatnost čekanja želi svesti na neku vrijednost ispod p_{max}. U tom slučaju je potrebno imati određeni alat za računanje dovoljnog broja poslužitelja ili se možemo koristiti tabelom koja se nalazi u prilogu.

5.5.3 Sustav posluživanja M/M/1/K - Spremnik konačne veličine

Ovim sustavom posluživanja se po prvi put približavamo realnim sustavima posluživanja kakve susrećemo u portovima usmjeritelja. Budući da imamo K mjesta na raspolaganju za spremanje jedinica u cijelom



Slika 5.12: Sustav posluživanja M/M/1/K



Slika 5.13: Dijagram stanja za sustav posluživanja M/M/1/K

sustavu, kapacitet spremnika je $K-1$ jedinica (slika 5.12). Dijagram stanja za ovaj sustav posluživanja prikazan je na slici 5.13.
Postavljajući jednadžbe lokalne ravnoteže dobivamo:

$$\begin{aligned}\hat{p}_n &= \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \\ &= p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad n \le K \end{aligned} \tag{5.53}$$

Naravno, sve vjerojatnosti $\hat{p}_n = 0$ za $n > K$. Sustav se ne može naći u stanju većem od K. $\hat{p}_0$ nalazimo koristeći (5.30):

$$\begin{aligned}\hat{p}_0 &= \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{K}\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}} = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}}\end{aligned} \tag{5.54}$$

Prosječnu duljinu repa računamo kao očekivanje slučajne varijable s funkcijom razdiobe $\hat{p}_n$. Kako bismo pojednostavili zapis, koristimo oznaku za ponuđeni promet A umjesto λ/μ. A u ovom slučaju nije ρ - opterećenje poslužitelja ($\rho \neq \lambda/\mu$).

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \sum_{n=0}^{K} np_n = \sum_{n=0}^{K} p_0 nA^n = \frac{1-A}{1-\rho^{K+1}}\sum_{n=0}^{K} nA^{n-1+1} = \frac{(1-A)A}{1-A^{K+1}}\sum_{n=0}^{K} nA^{n-1} \\ &= \frac{(1-A)A}{1-A^{K+1}}\frac{\partial}{\partial A}\left[\sum_{n=0}^{K} A^n\right] = \frac{(1-A)A}{1-A^{K+1}}\frac{\partial}{\partial A}\left[\frac{1-A^{K+1}}{1-A}\right] \\ &= \frac{(1-A)A}{1-A^{K+1}}\frac{-(K+1)A^K(1-A)+(1-A^{K+1})}{(1-A)^2} \\ &= \frac{A(1-(K+1)A^K+KA^{K+1})}{(1-A^{K+1})(1-A)}\end{aligned} \tag{5.55}$$

Prosječno vrijeme zadržavanja u sustavu posluživanja možemo izračunati pomoću Littleove formule (5.24).

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda_{ef}} = \frac{A(1-(K+1)A^K + KA^{K+1})}{(1-A^{K+1})(1-A)\lambda_{ef}} \tag{5.56}$$

Efektivnu vrijednost λ_{ef} dobivamo kao:

$$\lambda_{ef} = \lambda\left[1-p_m\right] = \lambda\left[1-p_0 A^K\right] \tag{5.57}$$

Sada još izračunajmo opterećenje poslužitelja. Ono je jednako umnošku efektivnog λ_{ef} koji je jednak intenzitetu toka koji dopire do poslužitelja i srednjeg vremena posluživanja $1/\mu$:

$$\rho = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} \tag{5.58}$$

Budući da je prosječno vrijeme obrade jedinice u poslužitelju $\bar{x} = 1/\mu$, onda je vrijeme koje jedinica provodi u spremničkom dijelu jednako

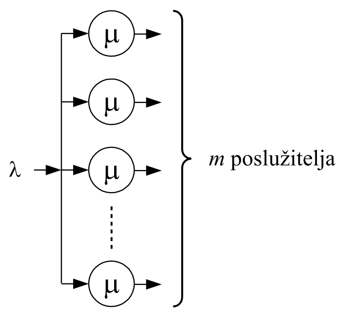
$$W = \frac{A(1-(K+1)A^K + KA^{K+1})}{(1-A^{K+1})(1-A)\lambda_{ef}} - \frac{1}{\mu} \tag{5.59}$$

Prosječan broj jedinica u repu čekanja je jednostavno $\overline{N}$ minus prosječan broj jedinica u poslužitelju koji je jednak ρ.

$$\overline{N}_q = \overline{N} - \rho = \frac{A(1-(K+1)A^K + KA^{K+1})}{(1-A^{K+1})(1-A)} - \rho \tag{5.60}$$

5.5.4 Sustav posluživanja M/M/m/m - *Erlangova B formula*

Sustav posluživanja M/M/m/m ima točno m poslužitelja i nema sposobnost stavljanja jedinica u čekanje (slika 5.14).



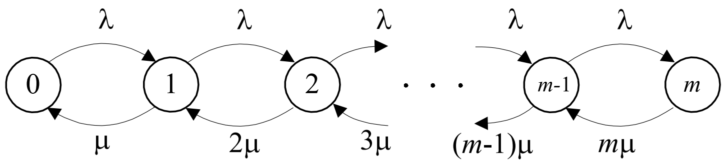
Slika 5.14: Sustav posluživanja M/M/m/m

Ovaj sustav još zovemo M/M/m s gubicima (*m-server loss system*). Savršen primjer ovakvog sustava posluživanja je prijenosni vod kapaciteta m govornih kanala. Na primjer, neka tvrtka ima m zakupljenih linija prema javnoj telefonskoj mreži. Te linije su na raspolaganju lokalnoj telefonskoj centrali koja sve pozive prema "van" preusmjerava preko prve slobodne linije. Ukoliko su sve linije zauzete, poziv se odbija. Korisnik koji je birao vanjski broj mora pokušati ponovno. Dijagram stanja ovog sustava posluživanja prikazan je na slici 5.15

Postavljajući jednadžbe lokalne ravnoteže dobivamo:

$$\hat{p}_n = \hat{p}_0 \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(j+1)\mu} = \hat{p}_0 \frac{\lambda}{\mu n!} \tag{5.61}$$

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}} \tag{5.62}$$



Slika 5.15: Dijagram stanja za sustav posluživanja M/M/m/m

Prosječan broj zauzetih poslužitelja (linija) nije eksplicitno izračunljiv pa ga zapisujemo u obliku:

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= \overline{N}_s = \hat{p}_0 \sum_{n=1}^{m} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}}{\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu} \left[\sum_{j=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}\right]}{\sum_{i=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{\mu} \left[\hat{p}_0 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}\right]}{\hat{p}_0}
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Prosječno vrijeme obrade jedinice u poslužitelju je i dalje $1/\mu$. Prosječan broj jedinica bi po toj logici trebao bi biti jednak λ/μ. No, gore smo dobili drukčiji rezultat. Zašto ? Problem je u tome da smo krivo interpretirali dolazni tok λ. λ nije tok koji dopire do poslužitelja. Dio jedinica tog dolaznog procesa biva odbijen tako da je efektivni λ_{ef} nešto manji. Koliko manji ? Pa za onoliki broj jedinica u jedinici vremena koji je u prosjeku odbijen zbog zauzetosti svih poslužitelja. Taj prosjek jednak je umnošku dolaznog toka λ i vjerojatnosti odbijanja dolazne jedinice. Vjerojatnost odbijanja jedinice jednaka je vjerojatnosti da su svi poslužitelji zauzeti, tj. da je broj jedinica u sustavu posluživanja m. Tu vjerojatnost već znamo:

$$p_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}}{\sum_{n=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} \tag{5.64}$$

(5.64) se zove *Erlangova B formula*. Ona vraća vjerojatnost odbijanja jedinice koja je došla na posluživanje. Konkretno, to je vjerojatnost odbijanja poziva prema "van" u tvrtki koja ima zakupljenih m linija prema javnoj telefonskoj mreži. Ovu formulu označavamo $E_{1,m}(\lambda/\mu)$. U Americi je označavaju $B(m, \lambda/\mu)$. Nju ćemo bolje upoznati kada se susretnemo sa zadacima iz domene telefonskog prometa.

Sada se možemo vratiti interpretaciji efektivnog intenziteta dolaznog toka λ_{ef}. On je jednak:

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_m) \tag{5.65}$$

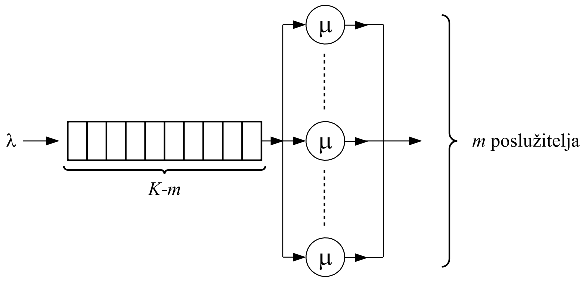
Uvrštavanjem ovog izraza u $\overline{N} = \lambda_{ef}\bar{x} = \lambda_{ef}/\mu$ dobivamo ponovno (5.63).

5.5.5 Sustav posluživanja M/M/m/K

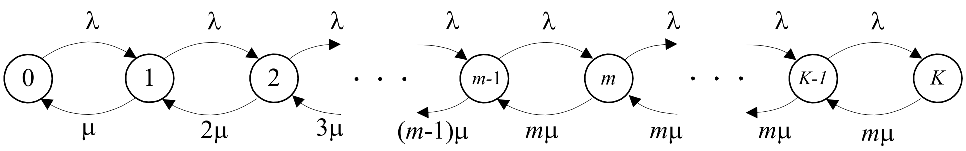
Ovaj sustav posluživanja predstavlja poopćenje sustava posluživanja $M/M/m$ (slika 5.16). Dijagram stanja ovog sustava prikazan je na slici (5.17).

Možemo zapisati:

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda, & n &= 0, 1, 2, \ldots, K-1 \\
\mu_n &= \min\{n\mu, m\mu\}, & n &= 1, 2, 3, \ldots, K
\end{aligned}$$



Slika 5.16: Sustav posluživanja M/M/m/K



Slika 5.17: Dijagram stanja za sustav posluživanja M/M/m/K

Problem traženja vjerojatnosti stanja ovog sustava jednak je onom sustava M/M/m. Postavljajući jednadžbe lokalne ravnoteže dobivamo:

$$\text{za } 0 \leq n \leq m, \qquad \hat{p}_n = \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^n}{n!} \tag{5.66}$$

$$\text{za } m \leq n \leq K, \qquad \hat{p}_n = \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{m-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{i=m}^{n-1} \frac{\lambda}{m\mu} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{m^m}{m!m^n} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^m}{m!} \tag{5.67}$$

Vjerojatnost $\hat{p}_0$ nalazimo iz izraza (5.30).

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^n}{n!} + \sum_{n=m}^{K} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^m}{m!}} \tag{5.68}$$

Prvi zbroj u nazivniku ne možemo eksplicitno izračunati, no drugi možemo i to na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{K} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n &= \frac{m^m}{m!} \left[\sum_{n=0}^{K} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \right] \\
&= \frac{m^m}{m!} \left[\frac{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)} - \frac{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{m}}{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)} \right] \\
&= \frac{m^m}{m!} \frac{\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^m - \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{K+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)}
\end{aligned}$$

Možemo napisati pojednostavljeni izraz:

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n \frac{m^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \frac{\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^m - \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{K+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)}} \tag{5.69}$$

Sada možemo izračunati prosječan broj jedinica u cijelom sustavu. Niti ovaj izraz ne možemo eksplicitno izračunati, pa ćemo ovdje dati samo konačan rezultat. Zbog jednostavnosti uvodimo zamjenu $B = \frac{\lambda}{m\mu}$.

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \sum_{n=0}^{m-1} n\hat{p}_0 B^n \frac{m^n}{n!} + \sum_{n=m}^{K} n\hat{p}_0 B^n \frac{m^m}{m!} \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} n\hat{p}_0 B^n \frac{m^n}{n!} + \\ &+ \hat{p}_0 \frac{m^m}{m!} \frac{mB^m + (1-m)B^{m+1} - (K+1)B^{K+1} + KB^{K+2}}{(1-B)^2} \end{aligned} \tag{5.70}$$

Efektivni λ izračunavamo kao i prije:

$$\lambda_{ef} = \lambda[1 - \hat{p}_K] = \lambda \left[1 - \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^K \frac{m^m}{m!}\right] \tag{5.71}$$

Svaki od m poslužitelja intenzitetom μ poslužuje dolazni intenzitet λ_{ef}/μ. Budući da je prosječan broj jedinica u bilo kojem od poslužitelja $\frac{\lambda_{ef}}{m\mu}$ slijedi da je

$$\overline{N}_s = m\frac{\lambda_{ef}}{m\mu} = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} \tag{5.72}$$

Iz ovog rezultata lako dobivamo da je

$$\overline{N}_q = \overline{N} - \frac{\lambda_{ef}}{\mu} \tag{5.73}$$

Jasno da je za bilo kakvo praktično korištenje izvedenih jednadžbi potrebno raspolagati određenim pomagalom.

5.6 Neki riješeni primjeri

U sljedećim primjerima pretpostavljamo da su međudolazna vremena i vremena posluživanja raspodijeljena eksponencijalno.

Primjer 5.1 U poštanski ured stranke dolaze intenzitetom 4 stranke/min. Koliki minimalan broj službenika mora posluživati stranke kako bi vjerojatnost da u redu čekanja bude manje ili jednako 4 stranke bila veća od 0.99 ? Pretpostavimo da stranka koja uđe u poštanski ured ne odustaje od čekanja u redu. Jedan službenik u prosjeku može poslužiti 2 stranke u minuti.

U ovom zadatku je bitno ustanoviti sustav posluživanja. Budući da stranke koje dolaze u sustav posluživanja (poštanski ured) ne odustaju, radi se o sustavu s neograničenim kapacitetom spremnika. Budući da je intenzitet kojim stranke dolaze u poštanski ured veći od intenziteta posluživanja jednog službenika, zasigurno će morati raditi više od jednog službenika. Tako smo ustanovili da je sustav posluživanja M/M/m. Za njega smo već izračunali vjerojatnosti stanja sustava posluživanja.

Zahtjev koji nam se nameće u zadatku je izračunati broj službenika tako da je manje od 90% vremena u redu čekanja manje od ili točno 4 stranke. Taj zahtjev možemo zapisati na sljedeći način:

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \ldots + \hat{p}_m + \hat{p}_{m+1} + \hat{p}_{m+2} + \hat{p}_{m+3} + \hat{p}_{m+4} > 0.9$$

Nema pametnog načina da riješimo gornju jednadžbu. Moramo ići metodom pokušaja. Ne moramo pokušavati za $m = 1$ ili $m = 2$. Jedan poslužitelj ne može poslužiti sve stranke, a dva poslužitelja mogu posluživati sve stranke samo ako bi sustav bio tipa D/D/2. Stoga nam jedino preostaje probati s $m = 3$, $m = 4$ itd. Vrijednosti za λ, μ i m računamo prema

$$p = \frac{1 + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=m+1}^{m+4} \frac{m^m}{m!} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^n}{\sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{(1 - \frac{\lambda}{\mu})m!}}$$

gdje je $\lambda = 4$ stranke/min, a $\mu = 2$ stranke/min. Za $m = 3$ dobivamo da je $p = 0.941472$, a već za $m = 4$ dobivamo da je $p = 0.994565$. Rješenje zadatka je tako da su potrebna četiri radnika kako bi u najvećem dijelu vremena bilo maksimalno četiri stranke u redu čekanja.

Primjer 5.2 Ljudi dolaze pred telefonsku govornicu intenzitetom $\lambda = 12$ ljudi/h. Kada dođu pred govornicu korisnici ne odustaju od razgovora bez obzira bila govornica zauzeta ili ne. Srednje vrijeme trajanja svakog razgovora je 2 minute.

a) Kolika je vjerojatnost da će nadolazeći korisnik naići na zauzetu govornicu ?

b) Telekom operator ima politiku instaliranja dodatne govornice ako korisnici čekaju u prosjeku više od 3 minute. Izračunajmo srednji dolazni intenzitet koji je potreban da bi se postavila dodatna govornica.

a) Radi se naravno o sustavu posluživanja M/M/1. $\lambda = 12$ ljudi/sat $= 1/5$ ljudi/min. Iz $\bar{x} = 2$ minute slijedi $\mu = \frac{1}{\bar{x}}$ poziva/min. Opterećenje govornice je

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{5}.$$

Vjerojatnost da je govornica zauzeta kada korisnik dolazi na govornicu jednaka je vjerojatnosti da netko koristi govornicu ili da ispred govornice čeka 1,2,3 ... ljudi. Dakle, tražena vjerojatnost jednaka je (prema 5.35)

$$p[\text{čekanja}] = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \ldots = 1 - \hat{p}_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho = \frac{2}{5} = 0.4$$

b) Potrebno je odrediti λ takav da je srednje vrijeme čekanja u redu veće od tri minute. Koristeći rezultat (5.40) dobivamo

$$\begin{aligned} W &< \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \Rightarrow \\ \lambda &> \frac{W\mu^2}{1+W} = 0.3 \text{ korisnika/min} \end{aligned}$$

Primjer 5.3 Korporacijski računalni centar ima 2 računala jednake obradbene moći. Poslovi koji dolaze u centar mogu se podijeliti u dvije kategorije: interni i eksterni. Interni poslovi dolaze u centar intenzitetom $\lambda_i = 18$ poslova/sat, a eksterni s intenzitetom $\lambda_e = 15$ poslova/sat. Obje vrste poslova se u prosjeku obrađuju $\bar{x} = 3$ minute.

a) Odredimo srednje vrijeme čekanja svakog posla za slučaj kad se jedno računalo koristi samo za interne, a drugo samo za eksterne poslove.

b) Odredimo srednje vrijeme čekanja po poslu kad oba računala obavljaju istovremeno oba tipa poslova.

a) Budući da se poslovi ne miješaju, tj. svaka vrsta posla ima vlastiti poslužitelj, promatramo dva sustava posluživanja M/M/1. Koristeći već izvedenu formulu (5.40) lako dobivamo sljedeće rješenje:

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{\rho_1}{\mu_1(1-\rho_1)} = \frac{\frac{\lambda_1}{\mu_1}}{\mu_1(1-\frac{\lambda_1}{\mu_1})} = \frac{\frac{18/60}{1/3}}{1/3(1-\frac{18/60}{1/3})} = 27 \text{ minuta} \\ W_e &= \frac{\rho_2}{\mu_2(1-\rho_2)} = \frac{\frac{\lambda_2}{\mu_2}}{\mu_2(1-\frac{\lambda_2}{\mu_1})} = \frac{\frac{15/60}{1/3}}{1/3(1-\frac{15/60}{1/3})} = 9 \text{ minuta} \end{aligned}$$

b) U ovom slučaju oba poslužitelja jednakopravno obrađuju sve poslove koji dolaze. Budući da su oba dolazna procesa Poissonova, onda je njihov ukupni tok ponovno Poissonov proces intenziteta $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Jasno je da promatramo sustav posluživanja M/M/2 s dolaznim intenzitetom $\lambda = 18 + 15 = 33$ posla/sat. Sada možemo upotrijebiti već izvedeni izraz za duljinu reda čekanja (5.50).

$$\begin{aligned} \overline{N}_q &= \hat{p}_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \hat{p}_0 \frac{2\rho^3}{(1-\rho)^2} \Rightarrow \\ W &= \hat{p}_0 \frac{2\rho^3}{(1-\rho)^2 \lambda} \\ \hat{p}_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{(1-\rho)m!}} = \frac{1}{1 + 2\rho + \frac{2\rho^2}{(1-\rho)}} \\ W &= 6.39 \text{ minuta} \end{aligned}$$

Primjer 5.4 Neka je w vrijeme koje neka proizvoljna jedinica provodi u sustavu posluživanja M/M/1. Izračunajmo funkciju razdiobe ove varijable.

U zadatku se traži vjerojatnost $P\{w \le t\}$. Jasno je da će to biti kontinuirana (neprekinuta) funkcija razdiobe budući da je w kontinuirana varijabla. Zadatak najlakše rješavamo teoremom o totalnoj vjerojatnosti. Ako $S(n)$ označava da je u sustavu n jedinica kada dolazi sljedeća jedinica, onda totalnu vjerojatnost izračunavamo na sljedeći način:

$$P\{w \le t\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{w \le t | S(n)\} P\{S(n)\}$$

Koristeći se izrazom (5.35) dobivamo:

$$P\{S(n)\} = \hat{p}_n = (1-\rho)\rho^n$$

gdje je $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Jedini problem koji ostaje je kako izračunati vjerojatnost $P\{w \le t | S(n)\}$. Pogledajmo što točno "pita" ova vjerojatnost. Ona pita vjerojatnost da zbroj vremena obrada svih n jedinica koje se nalaze ispred nove jedinice plus vrijeme obrade nove jedinice bude manje od t. Prisjetimo se da se zbroj n slučajnih varijabli koje se ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi ravna po gamma razdiobi $\gamma(n, \mu)$ gde je μ parametar eksponencijalnih razdioba posluživanja svih varijabli. Budući da promatramo vrijeme posluživanja $n + 1$ jedinica, slijedi:

$$P\{w \le t | S(n)\} = \int_0^t \frac{t^n \mu^{n+1} e^{-\mu t}}{n!} \, \mathrm{d}t$$

Nećemo rješavati ovaj integral jer bismo mogli zapasti u poteškoće. Bolje napisati konačno rješenje pa tamo potražiti pojednostavljenje.

$$\begin{aligned} P\{w \le t\} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_0^t \frac{t^n}{n!}\mu^{n+1}e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t\;(1-\rho)\rho^n\right] = \mu(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^t \frac{(\mu\rho t)^n}{n!}e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mu(1-\rho)\int_0^t e^{-\mu t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mu\rho t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \mu(1-\rho)\int_0^t e^{-\mu t}e^{\mu\rho t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mu(1-\rho)\int_0^t e^{\mu(\rho-1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mu(1-\rho)}{\mu(\rho-1)}\left[e^{\mu(\rho-1)t}-1\right] \\ &= 1-e^{-\mu(1-\rho)t} = 1-e^{-(\mu-\lambda)t} \end{aligned}$$

Rezultat je jako zanimljiv. Vrijeme zadržavanja u sustavu posluživanja M/M/1 raspodijeljeno je eksponencijalno s parametrom $\mu-\lambda$ uz $\rho<1$.

Primjer 5.5 Glavni avionski terminal ima četiri doka za utovar tereta. Svaki avion koji dolazi na terminal kad su sva četiri doka zauzeta se preusmjerava na pomoćni terminal. Srednji intenzitet dolazaka aviona na utovar je 3 po satu. Srednje vrijeme utovara svakog aviona je 2 sata na glavnom i 3 sata na pomoćnom terminalu. Odredimo postotak aviona koji se preusmjeravaju na pomoćni terminal.

U ovom zadatku se radi o sustavu posluživanja tipa M/M/4/4. Naravno, svi avioni (dolazne jedinice) koji bivaju odbijeni s glavnog terminala se preusmjeravaju na pomoćni terminal. No, to nas se ne tiče jer su za promatrani sustav posluživanja ti avioni izgubljeni.

$$\mu=\frac{1}{2}\text{ aviona/sat}\qquad \lambda=3\text{ aviona/sat}\qquad A=\frac{3}{1/2}=6\text{ erl}$$

Postotak aviona koji se preusmjeravaju na pomoćni terminal jednak je vjerojatnosti odbijanja posluživanja aviona na glavnom terminalu. Tu vjerojatnost nam daje Erlangova B formula:

$$\hat{p}_4=\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4\frac{1}{4!}}{\sum_{n=0}^{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}}=\frac{(6)^4\,\frac{1}{4!}}{\sum_{n=0}^{4}(6)^n\,\frac{1}{n!}}=0.47$$

Dakle 47% svih aviona će biti preusmjereno na pomoćni terminal.

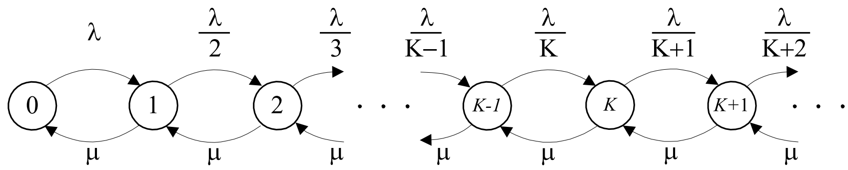
Primjer 5.6 Kupci dolaze pred kiosk kako bi kupili novine. Samo je jedan red za novine i samo jedan prodavač. Neki kupci odustaju od čekanja u redu ako nemaju dovoljno vremena. Zbog tog efekta dolazni intenzitet kupaca nije konstantan nego se ravna po zakonu:

$$\lambda_n=\frac{\lambda}{n+1}$$

gdje je n broj kupaca koji su u redu čekanja plus jedan koji trenutno plaća svoj primjerak novina. Prodavač poslužuje sve kupce jednakim intenzitetom. Odredimo vjerojatnosti stanja ovog sustava posluživanja i izračunajmo prosječan broj kupaca pred kioskom kao i opterećenje prodavača.

Kako bismo pojednostavnili cijeli proračun nacrtajmo dijagram stanja ovog sustava posluživanja. Rješenje dobivamo postavljanjem jednadžbi lokalne ravnoteže. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= \hat{p}_0\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \hat{p}_0\prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda}{\mu(i+1)} = \hat{p}_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!} \\ \hat{p}_0 &= \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\hat{p}_n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}} = \frac{1}{e^{\lambda/\mu}} = e^{-\lambda/\mu} \Rightarrow \\ \hat{p}_n &= e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \end{aligned}$$



Prosječan broj kupaca pred kioskom je:

$$\begin{aligned}\overline{N} &= \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} = \frac{\lambda}{\mu} e^{-\lambda/\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \frac{\lambda}{\mu} e^{-\lambda/\mu} e^{\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu}\end{aligned}$$

Efektivni dolazni intenzitet računamo prema izrazu (5.34). U (5.34) je efektivni dolazni intenzitet označen s α, a tu ga označujemo s λ_{ef}.

$$\begin{aligned}\lambda_{ef} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{p}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{n+1} e^{-\lambda/\mu} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda/\mu} \frac{\lambda}{\lambda/\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^{n+1}}{(n+1)!} = \mu e^{-\lambda/\mu} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^j}{(j)!} \\ &= \mu e^{-\lambda/\mu} \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda/\mu)^j}{(j)!} - 1 \right] = \mu e^{-\lambda/\mu} \left[e^{\lambda/\mu} - 1 \right] \\ &= \mu \left[1 - e^{-\lambda/\mu} \right]\end{aligned}$$

Sada možemo izračunati i opterećenje prodavača, kao i prosječno vrijeme koje kupac provede pred kioskom dok ne kupi novine.

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = 1 - e^{-\lambda/\mu} = 1 - \hat{p}_0 \text{ (korektno)} \\ T &= \frac{\overline{N}}{\lambda_{ef}} = \frac{\lambda}{\mu^2 (1 - e^{-\lambda/\mu})}\end{aligned}$$

5.7 Zadaci za vježbu

5.7.1 Opći problemi posluživanja

ZADATAK 5.1 Automobili pristižu pred naplatnu kućicu na izlazu s autoputa po Poissonovom procesu intenziteta 3 automobila u minuti. Prosječno vrijeme naplate cestarine po automobilu je 17 sekundi. Vrijeme naplate se ravna po eksponencijalnoj razdiobi. Izračunajte prosječnu duljinu reda pred naplatnom kućicom i prosječno vrijeme koje automobil provede od trenutka pristizanja pred naplatnu kućicu do trenuka kad je napusti.

ZADATAK 5.2 Radnici jedne tvornice u Zagrebu pristižu na posao po Poissonovom procesu intenziteta 10 radnika u minuti. Na ulazu moraju proći kroz automatska vrata koja se otvaraju određenom karticom. Vrijeme koje je potrebno radniku da izvadi karticu, provuče ju i prođe kroz vrata raspodijeljeno je eksponencijalno sa srednjom vrijednošću 4 sekunde. Koliko radnika u prosjeku čeka u redu pred vratima, koliko je prosječno vrijeme čekanja u redu i koliko je prosječno vrijeme koje je potrebno radniku da uđe u zgradu tvornice.

ZADATAK 5.3 Automobili pristižu pred 2 naplatne kućice na izlazu s autoputa po Poissonovom procesu intenziteta 6 automobila u minuti. Prosječno vrijeme naplate cestarine po automobilu je 17 sekundi. Vrijeme naplate se ravna po eksponencijalnoj razdiobi. Izračunajte prosječnu duljinu reda pred naplatnom kućicom i prosječno vrijeme koje automobil provede od trenutka pristizanja pred naplatnu kućicu do trenutka kad je napusti.

ZADATAK 5.4 Pred *drive in fast food* restoran stižu automobili po Poissonovom procesu s intenzitetom 2 automobila u minuti. Vlasnik restorana želi da barem 99% vremena ima manje ili točno 5 automobila pred restoranom (uključujući onoga koji se trenutno poslužuje). Kojom brzinom se trebaju posluživati automobili kako bi se želja vlasnika ostvarila ?

ZADATAK 5.5 Promatrajte sustav posluživanja na blagajni nekog manjeg dućana. Prosječno vrijeme naplate na blagajni je 2 minute. Vrijeme naplate ravna se po eksponencijalnoj razdiobi. Međudolazna vremena kupaca su raspodijeljena eksponencijalno s očekivanjem 3 minute. Kolika je vjerojatnost da ćemo u redu ispred blagajne naći barem 4 kupaca ?

ZADATAK 5.6 U banci rade dva šaltera. Korisnici dolaze u banku po Poissonovom procesu intenziteta 15 korisnika na sat i svi čekaju u jednom redu. Vrijeme posluživanja na šalteru je raspodijeljeno eksponencijalno. Prosječno vrijeme koje korisnik provede za šalterom je 3 minute. Izračunajte vjerojatnost da će korisnik koji dolazi u banku morati čekati.

ZADATAK 5.7 U poštanskom uredu rade tri službenika. Korisnici koji dolaze u ured formiraju jedan red. Pretpostavimo da je vrijeme posluživanja svakog korisnika raspodijeljeno eksponencijalno s očekivanjem 3 minute, a da korisnici dolaze u skladu s Poissonovim procesom intenziteta 30 korisnika na sat. Izračunajte vjerojatnost da su sva tri službenika zauzeta, prosječan broj korisnika u redu i prosječno vrijeme koje korisnici provode u poštanskom uredu.

5.7.2 Problemi posluživanja u tehnici

ZADATAK 5.8 *Oracle server* baze podataka smješten na određenom serveru poslužuje različite upite od *client* aplikacija koje su pokrenute na nekim drugim računalima u mreži. Vrijeme obrade jednog upita (vrijeme od početka traženja podatka do njegove isporuke) se ravna po eksponencijalnoj razdiobi. Upiti koje server primi dok se obrađuje trenutni upit se stavljaju u određeni FIFO red čekanja. Upiti pristižu po Poissonovom procesu intenziteta 120 upita u minuti. Kolika bi trebala biti brzina obrade upita ako se želi postići da je vrijeme od slanja upita do dobivanja rezultata manje od 3 sekunde?

ZADATAK 5.9 Programski paket *Mathematica* posjeduje jezgru i jedan ili više *front end* aplikacija koje služe kao sučelje između jezgre i korisnika. Jezgra ovog sustava je pokrenuta na određenom poslužitelju u mreži i opslužuje sve *front end* aplikacije na drugim računalima. Zadaće koje jezgra prima se stavljaju u određeni FIFO spremnik. Ako je broj zadaća u redu 4, dolazni zadatak se odbija i korisnik se obavještava da je jezgra trenutno preopterećena. Vrijeme obrade jednog zadatka se ravna po eksponencijalnoj razdiobi s očekivanjem 4 sekunde. Izračunajte postotak zadataka koji se odbija i prosječno vrijeme potrebno za dobivanje rješenja ako zadatak nije odbijen ukoliko zadaci dolaze u jezgru po Poissonovoj razdiobi intenziteta 12 zadataka u minuti.

ZADATAK 5.10 Određeni *backbone* IP usmjerivač ima 3 porta na koje je spojen određeni transmisijski sustav koji povezuje usmjerivač s njegovim susjedima. Svaki port se sastoji od ulaznog i izlaznog porta. Izlazni port sastoji se od spremnika velikog kapaciteta i sklopa za stavljanje paketa u odlazni link. Duljine paketa su tako raspodijeljene da možemo pretpostaviti kako je vrijeme koje je potrebno da se IP paket prenese iz usmjerivača na link raspodijeljeno eksponencijalno s očekivanjem 0.2 ms. Komutacijski dio usmjeritelja je iznimno brz tako da možemo pretpostaviti da se IP paket iz ulaznog u izlazni port prenese trenutno. IP paketi pristižu u ulazne portove po Poissonovoj razdiobi. Dolazni intenziteti paketa kao i vjerojatnosti njihova usmjeravanja dani su u tabeli ispod.

Ulazni port	λ [pak/s]	$\hat{p}_{x1}$	$\hat{p}_{x2}$	$\hat{p}_{x3}$
1	4000	0	0.6	0.4
2	4500	0.4	0	0.6
3	3000	0.3	0.7	0

Izračunajte

a) opterećenje izlaznog porta 1,

b) prosječnu duljinu repa paketa izlaznog porta 1,

c) prosječno kašnjenje paketa u izlaznom portu 1.

ZADATAK 5.11 Pročitajte tekst zadatka 5.10. Izračunajte

a) opterećenje izlaznog porta 2,

b) prosječnu duljinu repa paketa izlaznog porta 2,

c) prosječno kašnjenje paketa u izlaznom portu 2.

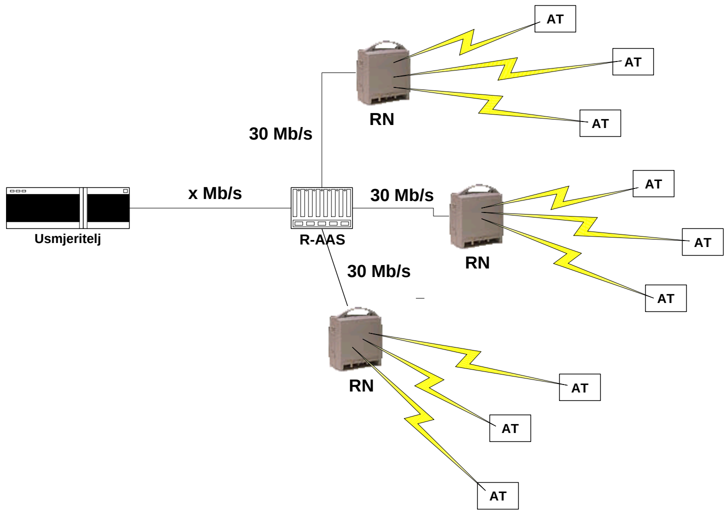
ZADATAK 5.12 Pročitajte tekst zadatka 5.10. Izračunajte

a) opterećenje izlaznog porta 3,

b) prosječnu duljinu repa paketa izlaznog porta 3,

c) prosječno kašnjenje paketa u izlaznom portu 3.

ZADATAK 5.13 BAS (*Broadband Acces System*) je pristupna mreža temeljena na radio prijenosu između korisnika i pristupnog čvora. Svaki korisnik posjeduje uređaj kojim komunicira s pristupnim čvorom. Taj čvor se zove AT (LMDS *Access Terminal*) (vidi sliku). Uređaj koji komunicira s AT-ovima korisnika na strani operatora je RN (*Radio Node*). Pretpostavimo da RN koncentrira promet koji dolazi od korisnika



Slika 5.18: BAS

i šalje ga čvoru R-AAS. Koncentriranje se izvodi spremanjem u određeni spremnik. RN je s R-AAS-om spojen linkom efektivnog kapaciteta 30 Mb/s. R-AAS koncentrira promet koji stiže od ostalih RN-ova i šalje ga usmjeritelju.

Korisnici u mrežu šalju IP pakete čija je duljina raspodijeljena eksponencijalno s očekivanjem 1000 bita (zanemarite granularnost). Svaki korisnik u prosjeku generira 1500 paketa u sekundi (po Poissonu). Koliki maksimalan broj korisnika smije biti spojen na jedan RN kako bi prosječno kašnjenje zbog koncentracije bilo manje od 1 ms ?

Zadatak 5.14 Pročitajte zadatak 5.13. Neka korisnici u mrežu šalju IP pakete čija je duljina eksponencijalno raspodijeljena s očekivanjem 1500 bita (zanemarujući granularnost) i neka svaki korisnik generira u prosjeku 1500 paketa u sekundi (po Poissonu). Koliki maksimalan broj korisnika smije biti spojen na jedan RN kako bi prosječno kašnjenje zbog koncentracije bilo manje od 1 ms ?

Zadatak 5.15 Pročitajte zadatak 5.13. Neka su na R-AAS spojena 3 RN-a, i neka svaki RN prema R-AAS-u šalje 1500 paketa u sekundi (po Poissonu). Duljina svakog paketa neka je raspodijeljena eksponencijalno s prosječnom duljinom paketa 1500 bita (zanemarite granularnost). Dimenzionirajte kapacitet prijenosnog linka od R-AAS-a do usmjeritelja tako da prosječno zadržavanje paketa u R-AAS-u bude manje od 3 ms.

Zadatak 5.16 Pročitajte zadatak 5.13. Neka su na R-AAS spojena 3 RN-a, i neka svaki RN prema R-AAS-u šalje 15000 paketa u sekundi (po Poissonu). Duljina svakog paketa neka je raspodijeljena eksponencijalno s prosječnom duljinom paketa 1200 bita (zanemarite granularnost). Dimenzionirajte kapacitet prijenosnog linka od R-AAS-a do usmjeritelja tako da prosječno zadržavanje paketa u R-AAS-u bude manje od 2 ms.

Zadatak 5.17 Dvije Ericssonove AXE centrale spojene su E1 prijenosnim sustavom (30 kanala). Ako prosječan poziv u telefonskoj mreži traje tri minute i ako je vrijeme razgovora eksponencijalno raspodijeljeno, koliko poziva u jedinici vremena može biti usmjereno ovim prijenosnim sustavom ako se smije izgubiti samo 0.1% svih poziva?

Zadatak 5.18 RSS (*Remote Subscriber System*) je na centralu spojen E1 prijenosnim sustavom (30 kanala). Prosječno trajanje razgovora je raspodijeljeno eksponencijalno s očekivanjem 3 minute. Koliki maksimalan broj korisnika smije biti spojen na RSS ako količina odbijenih poziva mora biti ispod 1% i ako prosječan korisnik u sat vremena obavi 0.5 poziva?

ZADATAK 5.19 Web server prima 500 zahtjeva u sekundi. Koliki mora biti intenzitet obrade zahtijeva kako bi vjerojatnost stavljanja zahtjeva u red čekanja bila manja od 5%? Pretpostavite da je vrijeme obrade zahtjeva raspodijeljeno eksponencijalno.

ZADATAK 5.20 Sustav govornog automata tečajne liste nekog operatora prima 25 poziva na sat. Korisnici koji nazovu ne slušaju cijelu poruku, nego samo onaj dio koji ih zanima, tako da je vrijeme poziva eksponencijalno raspodijeljeno s očekivanjem 3 minute. Koliko paralelnih automata mora biti instalirano tako da vjerojatnost stavljanja poziva na čekanje bude manja od 0.1%?

5.7.3 Problemi modeliranja sustava

ZADATAK 5.21 Zamislite sustav posluživanja M/M/1 kod kojeg su dolazne jedinice (npr. kupci koji dolaze u trgovinu) nestrpljive. Svaka jedinica koja dolazi prvo procjenjuje vrijeme koje će joj trebati da dođe na posluživanje (vrijeme $\tilde{w}$) i onda se priključuje redu s vjerojatnošću $e^{-\alpha\tilde{w}}$, odnosno odustaje s vjerojatnošću $1 - e^{-\alpha\tilde{w}}$. Vrijeme $\tilde{w}$ se procjenjuje jednostavno kao k/μ, gdje je μ intenzitet posluživanja poslužitelja, a k broj jedinica u sustavu. Uz pretpostavku da je $\alpha \leq 0$ izračunajte: stacionarne vjerojatnosti stanja sustava, opterećenje poslužitelja i prosječan broj jedinica u sustavu.

ZADATAK 5.22 Razmatrajte sustav posluživanja G/M/1 kod kojeg je dolazni intenzitet jednak λ kada je u repu posluživanja manje ili jednako K jedinica, a 2λ ako je u sustavu više od K jedinica. Izračunajte stacionarne vjerojatnosti i opterećenje poslužitelja ovog sustava.

ZADATAK 5.23 Izvedite stacionarne vjerojatnosti sustava posluživanja M/M/3 i pomoću njih izračunajte prosječan broj jedinica u sustavu.

ZADATAK 5.24 Izrazite erlang B formulu preko erlang C formule. Za fiksne vrijednosti λ i μ koja formula daje veću vjerojatnost ?

5.8 Rješenja zadataka za vježbu

5.8.1 Opći problemi posluživanja

RJEŠENJE ZADATKA 5.1
Radi se o klasičnom slučaju sustava posluživanja M/M/1. Dolazni intenzitet $\lambda = 3$ automobila/min, a prosječno vrijeme posluživanja je $\bar{x} = 17$ s. Traže se $\overline{N}_q$ i T. Krenimo od opterećenja:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\bar{x} = \frac{3}{60}17 = 0.85$$

Prema (5.41) dobivamo:

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 4.8 \qquad \text{automobila}$$

Prema (5.38) dobivamo:

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{\bar{x}}{1-\rho} = 113.\dot{3} \text{ s}$$

RJEŠENJE ZADATKA 5.2
Promatra se sustav posluživanja M/M/1. Intenzitet dolaska radnika je $\lambda = 10$ radnika/min, a prosječno vrijeme posluživanja je $\bar{x} = 4$ s. Traže se $\overline{N}_q$, W i T. Krenimo od opterećenja:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\bar{x} = \frac{10}{60} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

Prema (5.41) dobivamo:

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 1.\dot{3} \qquad \text{radnika}$$

Prema (5.40) dobivamo:

$$W = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\bar{x}\rho}{1-\rho} = 8 \text{ s}$$

Prema (5.38) dobivamo:

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{\bar{x}}{1-\rho} = 12 \text{ s}$$

Rješenje zadatka 5.3

Razmatramo sustav posluživanja M/M/2. $\lambda = 6$ automobila/minuti, $\bar{x} = 17$ s. Traže se $\overline{N}_q$, W i T. Opterećenje svake od naplatnih kućica dobivamo prema (5.45):

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{6}{260}17 = 0.85$$

Koristeći (5.50) i (5.48) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\overline{N}_q &= \hat{p}_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \\
\hat{p}_0 &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{(1-\rho)m!}} = \frac{1}{1 + 2\rho + \dfrac{(2\rho)^2}{2(1-\rho)}} = 0.081 \\
\overline{N}_q &= \hat{p}_0 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \frac{(2\rho)^2}{2!} = 4.43 \qquad \text{automobila} \\
T &= \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{2\rho + \overline{N}_q}{\lambda} = 1.021 \text{ min}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 5.4

Promatra se sustava posluživanja M/M/1, $\lambda = 2$ automobila/min. Traži se intenzitet posluživanja μ takav da vrijedi:

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5 > 0.99$$

Prema (5.36) dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\hat{p}_n = (1-\rho)\rho^n \\
&(1-\rho) + (1-\rho)\rho + \ldots + (1-\rho)\rho^5 > 0.99 \\
&(1-\rho)[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + \rho^5] > 0.99 \\
&(1-\rho)\frac{1-\rho^6}{1-\rho} > 0.99 \\
&1 - \rho^6 > 0.99 \\
&\rho^6 < 0.01 \Rightarrow \rho < 0.46 \\
&\frac{\lambda}{\mu} < 0.46 \Rightarrow \mu > \frac{\lambda}{0.46} = 4.3 \text{ automobila/min}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 5.5
Promatra se sustav posluživanja M/M/1 s $\bar{x} = 2$ min, $\frac{1}{\lambda} = 3$ min. Potrebno je izračunati vjerojatnost $P[X \geq 5] = ?$ Prema (5.36) dobivamo:

$$\begin{aligned} P[X \geq 5] &= \hat{p}_5 + \hat{p}_6 + \ldots + \hat{p}_j + \ldots = 1 - \sum_{i=0}^{4} \hat{p}_i \\ &= 1 - (1-\rho)\left[1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4\right] = 1 - (1 - \rho^5) = \rho^5 = (\lambda\bar{x})^5 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.132 \end{aligned}$$

Rješenje zadatka 5.6
Promatra se sustav posluživanja M/M/2. Parametri su: $\lambda = 15$ korisnika/h i $\bar{x} = 3$ min. Vjerojatnost čekanja nam daje Elangova C formula.

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\lambda}{2\mu} = \frac{\lambda\bar{x}}{2} = \frac{15 \cdot 3}{60 \cdot 2} = \frac{45}{120} = 0.375 \text{ erl} \\ P_{cekanja} &= \hat{p}_2 \frac{\frac{(2\rho)^2}{2(1-\rho)}}{1 + 2\rho + \frac{(2\rho)^2}{2(1-\rho)}} = 0.2045 \end{aligned}$$

Rješenje zadatka 5.7
Promatra se sustav posluživanja M/M/3 s parametrima: $\bar{x} = 3$ min, $\lambda = 30$ korisnika/h. Izračunajmo prvo opterećenje svakog službenika:

$$\rho = \frac{\lambda}{3\mu} = \frac{\lambda\bar{x}}{3} = \frac{1}{2} \text{ erl}$$

Vjerojatnost da su sva tri službenika zauzeta jednaka je:

$$P[\text{ sva tri posl. zauzeta }] = \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \ldots = 1 - \hat{p}_0 - \hat{p}_1 - \hat{p}_2$$

Prema (5.46) i (5.47) slijedi:

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= \hat{p}_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, \qquad n \leq 3 \\ \hat{p}_0 &= \frac{1}{\sum_{n=0}^{2} \frac{(3\rho)^n}{n!} + \frac{(3\rho)^3}{(1-\rho)3!}} = \frac{4}{19} = 0.21 \\ P[\text{ sva tri posl. zauzeta }] &= 1 - \hat{p}_0 \left[1 + 3\rho + \frac{(3\rho)^2}{2}\right] = 0.237 \end{aligned}$$

Prosječnu duljinu reda dobivamo iz (5.50):

$$\overline{N}_q = \hat{p}_0 \frac{(3\rho)^3}{3!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = 0.237$$

Prosječno vrijeme koje korisnik provede u poštanskom uredu dobivamo iz Littleove formule na sljedeći način:

$$T = \frac{\overline{N}}{\lambda} = \frac{\overline{N}_s + \overline{N}_q}{\lambda} = \frac{3\rho + \overline{N}_q}{\lambda} = 3.47 \text{ min}$$

5.8.2 Problemi posluživanja u tehnici

RJEŠENJE ZADATKA 5.8

Radi se o tipičnom primjeru sustava posluživanja M/M/1. Definirajmo konstantu $T_L = 3$ s. Dolazni intenzitet je $\lambda = 120$ erl/min $= 2$ erl/s. Tražimo intenzitet posluživanja koji zadovoljava vrijeme obrade zahtjeva ($\mu = ?$).

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} < T_L \\ \frac{1}{T_L} &< \mu - \mu\frac{\lambda}{\mu} \\ \frac{1}{T_L} &< \mu - \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \mu > \frac{1}{T_L} + \lambda \\ \mu &> \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \text{ elr/s} \end{aligned}$$

RJEŠENJE ZADATKA 5.9

Potrebno je promatrati sustav posluživanja M/M/1/5 s parametrima $\lambda = 12$ erl/min i $\bar{x} = 4$ s. Vjerojatnost odbacivanja jednaka je vjerojatnosti da je sustav do kraja popunjen tj. da se u njemu nalazi 5 zadaća. Prema (5.54) dobivamo:

$$P[\text{ odbijanja }] = \hat{p}_5 = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 = \frac{(1-\frac{\lambda}{\mu})\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{5+1}} = 0.089$$

Neka je A

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{4}{5}$$

Efektivni dolazni intenzitet je prema (5.59) jednak:

$$\lambda_{ef} = \lambda\left[1 - \hat{p}_0 A^5\right] = 0.186$$

Sada slijedi:

$$T = \frac{A(1-6A^5+5A^6)}{(1-A^6)(1-A)\lambda_{ef}} = 10.1 \text{ s}$$

RJEŠENJE ZADATKA 5.10

Usmjerivač ima tri porta. Dio prometa s potrova 2 i 3 se preusmjerava na port 1. Port 1 sprema dolazne pakete u određeni spremnik, dok ih odlazni link poslužuje. Izlazni port 1 možemo promatrati kao sustav posluživanja M/M/1 s prosječnim vremenom obrade (prijenosa na link) $\bar{x} = 0.2$ ms. Zašto ?

Svi dolazni paketski tokovi u usmjeritelj se mogu po pretpostavci modelirati Poissonovim procesom. S određenim vjerojatnostima paketi se s ulaznih portova 2 i 3 preusmjeravaju na izlazni port 1. Bitno je primijetiti da je tok paketa koji se preusmjerava prema nekom odredišnom portu također Poissonov, ali s parametrom $p\lambda$ gdje je λ dolazni intenzitet paketa na ulaznom portu, a p udio paketa koji se usmjerava prema promatranom izlaznom portu. To je situacija koju smo već promatrali u primjeru s brojanjem muškaraca i žena koji dolaze u trgovinu.

Dakle, u neki odredišni port dolaze dva Poissonova toka paketa, jedan iz porta 2 s intenzitetom $\hat{p}_{21}\lambda_2$, a drugi s intenzitetom $\hat{p}_{31}\lambda_3$. Budući da je zbroj Poissonovih tokova opet Poissonov, to je izlazni port opravdano promatrati kao sustav posluživanja M/M/1 s dolaznim intenzitetom:

$$\lambda_{x1} = \hat{p}_{21}\lambda_2 + \hat{p}_{31}\lambda_3$$

a) Opterećenje odlaznog linka (poslužitelja) je

$$\rho_1 = \frac{\hat{p}_{21}\lambda_2 + \hat{p}_{31}\lambda_3}{\mu} = (0.4 \cdot 4500 + 0.3 \cdot 3000) \cdot 0.2 \cdot 10^{-3} = 0.54$$

b) Prosječna duljina repa paketa je prema (5.37)

$$\overline{N} = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} = 1.174 \qquad \Rightarrow \qquad \overline{N}_q = \overline{N} - \rho_1 = 0.634$$

c) Prosječno kašnjenje paketa u izlaznom portu je prema (5.38)

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho_1)} = \frac{1}{\frac{1}{0.2\cdot 10^{-3}}(1-\rho_1)} = 0.435 \text{ ms}$$

Rješenje zadatka 5.11

Pročitajte objašnjenje u rješenju zadatka 5.10

a) Opterećenje odlaznog linka (poslužitelja) je

$$\rho_2 = \frac{\hat{p}_{12}\lambda_1 + \hat{p}_{32}\lambda_3}{\mu} = (0.6\cdot 4000 + 0.7\cdot 3000)\cdot 0.2\cdot 10^{-3} = 0.9$$

b) Prosječna duljina repa paketa je prema (5.37)

$$\overline{N} = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{N}_q = \overline{N} - \rho_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2} - \rho_2 = 8.1$$

c) Prosječno kašnjenje paketa u izlaznom portu je prema (5.38)

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho_2)} = \frac{1}{\frac{1}{0.2\cdot 10^{-3}}(1-\rho_2)} = 2 \text{ ms}$$

Rješenje zadatka 5.12

Pročitajte objašnjenje u rješenju zadatka 5.10

a) Opterećenje odlaznog linka (poslužitelja) je

$$\rho_3 = \frac{\hat{p}_{13}\lambda_3 + \hat{p}_{23}\lambda_2}{\mu} = (0.4\cdot 4000 + 0.6\cdot 4500)\cdot 0.2\cdot 10^{-3} = 0.86$$

b) Prosječna duljina repa paketa je prema (5.37)

$$\overline{N} = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{N}_q = \overline{N} - \rho_3 = \frac{\rho_3}{1-\rho_3} - \rho_3 = 5.28$$

c) Prosječno kašnjenje paketa u izlaznom portu je prema (5.38)

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho_3)} = \frac{1}{\frac{1}{0.2\cdot 10^{-3}}(1-\rho_3)} = 1.43 \text{ ms}$$

Rješenje zadatka 5.13

Svi korisnici koje pokriva LMDS RN šalju pakete po Poissonovu procesu. Ukupni dolazni tok je također Poissonov s intenzitetom koji je jednak zbroju intenziteta slanja paketa svih korisnika. RN djeluje kao koncentrator paketa koji dolaze. Koncentracija se vrši spremanjem dolaznih paketa u FIFO spremnik koji se poslužuje određenim intenzitetom. Dakle, radi se o sustavu M/M/1. Raspolažemo sljedećim podacima:

$$\begin{aligned} \lambda &= 1500 \text{ erl/s} \qquad T_L = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \\ \bar{x} &= \frac{1000 \text{ bit}}{30\cdot 10^6 \text{ bit/s}} = \frac{1}{30\cdot 10^3} \text{ s} = \frac{1}{\mu} \end{aligned}$$

Do maksimalnog broja korisnika dolazimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-n\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu - n\lambda} < T_L \\
\frac{1}{T_L} &< \mu - n\lambda \qquad n\lambda < \mu - \frac{1}{T_L} \\
n &< \frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda T_L} \\
n &< 19.33 \\
n_{max} &= 19 \text{ korisnika}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 5.14

Svi korisnici koje pokriva LMDS RN šalju pakete po Poissonovu procesu. Ukupni dolazni tok je također Poissonov s intenzitetom koji je jednak zbroju intenziteta slanja paketa svih korisnika. RN djeluje kao koncentrator paketa koji dolaze. Koncentracija se vrši spremanjem dolaznih paketa u FIFO spremnik koji se poslužuje određenim intenzitetom. Dakle, radi se o sustavu M/M/1. Raspolažemo sljedećim podacima:

$$\begin{aligned}
\lambda &= 1500 \text{ erl/s} \qquad T_L = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \\
\bar{x} &= \frac{1500 \text{ bit}}{30 \cdot 10^6 \text{ bit/s}} = \frac{1.5}{30 \cdot 10^3} \text{ s} = 50\mu\text{s} = \frac{1}{\mu}
\end{aligned}$$

Do maksimalnog broja korisnika dolazimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-n\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu - n\lambda} < T_L \\
\frac{1}{T_L} &< \mu - n\lambda \qquad n\lambda < \mu - \frac{1}{T_L} \\
n &< \frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda T_L} \\
n &< 12.\dot{3} \\
n_{max} &= 12 \text{ korisnika}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 5.15

Dolazni tok u R-AAS superpozicija tri Poissonova toka intenziteta $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1500$ paketa/s. $T_L = 3$ ms je maksimalno prosječno vrijeme zadržavanja paketa u R-AAS-u koje se može tolerirati. Prosječna duljina paketa je $\bar{d} = 1500$ bit. Ukupni dolazni intenzitet u R-AAS je $\lambda = 3 \cdot \lambda_i = 4500$ paketa/s. Slično kao i u prethodnom zadatku dobivamo:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1}{\mu - \lambda} < T_L \\
\frac{1}{T_L} &< \mu - \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \mu > \frac{1}{T_L} + \lambda = 1833.\dot{3} \text{ paketa/s}
\end{aligned}$$

Kako bismo posltigli ovu brzinu posluživanja potreban nam je link koji efektivno prenosi:

$$C = \mu \cdot \bar{d} = 2.75 \text{ Mb/s}$$

Rješenje zadatka 5.16

Dolazni tok u R-AAS je superpozicija tri Poissonova toka intenziteta $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 15000$ paketa/s. $T_L = 3$ ms je maksimalno prosječno vrijeme zadržavanja paketa u R-AAS-u koje se može tolerirati. Prosječna duljina paketa je $\bar{d} = 1200$ bita. Ukupni dolazni intenzitet u R-AAS je $\lambda = 3 \cdot \lambda_i = 45000$ paketa/s. Slično kao i u prethodnom zadatku dobivamo:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{1}{\mu-\lambda} < T_L \\ \frac{1}{T_L} &< \mu - \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \mu > \frac{1}{T_L} + \lambda = 45500 \text{ paketa/s} \end{aligned}$$

Kako bismo posltigli ovu brzinu posluživanja potreban nam je link koji efektivno prenosi:

$$C = \mu \cdot \bar{d} = 54.6 \text{ Mb/s}$$

Rješenje zadatka 5.17

Budući da se poziv odbija ukoliko nema slobodnih kanala (poslužitelja), promatra se sustav posluživanja M/M/30/30. Maksimalan promet koji smije biti ponuđen ovom prijenosnom sustavu određuje se iz Erlangove B formule (5.67).

$$\hat{p}_{30} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{30} \frac{1}{30!}}{\sum_{n=0}^{30} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \frac{1}{n!}} < 0.001$$

Iterativno ili iz tablica dobivamo da mora biti zadovoljeno:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 16.68 \qquad \lambda < 16.68\mu$$

Maksimalan intenzitet poziva koji još zadovoljava kriterije odbacivanja poziva je:

$$\lambda_{max} = \frac{16.68}{3 \text{ min}} = 5.56 \text{ poziva/min}$$

Rješenje zadatka 5.18

Budući da se poziv odbija ukoliko nema slobodnih kanala (poslužitelja), promatra se sustav posluživanja M/M/30/30. Maksimalan broj korisnika spojenih na RSS uz uvjet da je vjerojatnost odbijanja manja od 1% određujemo iz Erlangove B formule (5.67). Jedan korisnik generira $\lambda' = 0.5$ poziva/h. Proces pozivanja je Poissonov proces. To znači da n korisnika generira pozive po Poissonovu procesu s intenzitetom $\lambda = n\lambda'$. Iz tablica lako određujemo sljedeće:

$$\begin{aligned} \hat{p}_{30} &= \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{30} \frac{1}{30!}}{\sum_{n=0}^{30} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \frac{1}{n!}} < 1\% \\ \frac{\lambda}{\mu} &< 20.337 \qquad \Rightarrow \qquad n\lambda' < \mu \cdot 20.337 \\ n &< 813.491 \\ n_{max} &= 813 \text{ korisnika} \end{aligned}$$

RJEŠENJE ZADATKA 5.19
Promatra se sustav posluživanja M/M/1, $\lambda = 500$ erl/s. Vjerojatnost čekanja jednaka je:

$$P[\text{čekanja}] = 1 - \hat{p}_0 = \rho = \frac{\lambda}{\mu} < \frac{5}{100}$$

Slijedi:

$$\mu > \frac{100}{5}\lambda = 10000 \text{ zaht./s}$$

RJEŠENJE ZADATKA 5.20
Promatra se sustav posluživanja M/M/m, $\lambda = 25$ erl/h, $\bar{x} = 3$ min. Granična vjerojatnost čekanja je 0.1% ili 0.001. Koristimo Erlangovu C formulu (5.52).

$$\hat{P}_m = \frac{\dfrac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!(1-\frac{\lambda}{m\mu})}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!\left(1-\frac{\lambda}{m\mu}\right)}}$$

Za $m = 6$ dobivamo $P_6 = 0.19\%$, a za $m = 7$, $P_7 = 0.033\%$. Izabiremo rješenje $m = 7$ automata jer je ono prvo koje zadovoljava postavljeni kriterij.

5.8.3 Problemi modeliranja sustava

RJEŠENJE ZADATKA 5.21
Koeficijenti umiranja su svi jednaki μ, dok su koeficijenti rađanja funkcija stanja procesa. Intenzitet rađanja u stanju n je $\lambda e^{-\frac{\alpha n}{\mu}}$.

$$\lambda_n = \lambda e^{-\frac{\alpha n}{\mu}} \qquad \mu_n = \mu$$

Iz jednadžbi lokalne ravnoteže dobivamo:

$$\begin{aligned}\hat{p}_n &= \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1}\frac{\lambda e^{-\frac{\alpha i}{\mu}}}{\mu} = \hat{p}_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\alpha}{\mu}\sum_{i=0}^{n-1} i} \\ &= \hat{p}_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\alpha n(n-1)}{2\mu}} \\ \hat{p}_0 &= \frac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\alpha n(n-1)}{2\mu}}}\end{aligned}$$

Za $\hat{p}_0$ ne postoji jednostavniji izraz. Opterećenje poslužitelja računamo koristeći (5.34):

$$\rho = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\hat{p}_n\lambda e^{-\frac{\alpha n}{\mu}}}{\mu}$$

Niti opterećenje se ne može eksplicitno izračunati. Prosječan broj jedinica dobivamo kao očekivanje diskretne slučajne varijable s funkcijom vjerojatnosti $\hat{p}_n$.

$$\overline{N} = \sum_{n=0}^{\infty} n\hat{p}_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\hat{p}_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\frac{\alpha n(n-1)}{2\mu}}$$

Ovaj se izraz ne može eksplicitno izračunati.

Rješenje zadatka 5.22
Zadan je sustav posluživanja s intenzitetima rađanja i umiranja:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \lambda \qquad 0 \le n \le K+1 \\ \lambda_n &= 2\lambda \qquad K+1 < n < \infty \\ mu_n &= \mu \qquad \forall\ n > 0 \end{aligned}$$

Iz jednadžbi lokalne ravnoteže dobivamo:

$$\begin{aligned} \hat{p}_n &= \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \qquad 0 \le n \le K+1 \\ \hat{p}_n &= \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \hat{p}_0 \prod_{i=0}^{K} \frac{\lambda}{\mu} \prod_{i=K+1}^{n} \frac{2\lambda}{\mu} \\ &= \hat{p}_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1} \left(\frac{2\lambda}{\mu}\right)^{n-K}, \qquad K+1 \le n \le \infty \end{aligned}$$

Označimo:

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\hat{p}_0$ dobivamo kao:

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K+1} A^i + \sum_{i=1}^{\infty} (2A)^i} = \frac{1}{\frac{1-A^{K+2}}{1-A} + \frac{1}{1-2A} - 1}$$

Opterećenje dobivamo koristeći (5.34):

$$\rho = \frac{\lambda \hat{p}_0 \sum_{i=0}^{K+1} A^i + 2\lambda \hat{p}_0 \sum_{i=0}^{\infty} (2A)^i}{\mu} = \hat{p}_0 A \left[\frac{1-A^{K+2}}{1-A} + \frac{2}{1-2A}\right]$$

Rješenje zadatka 5.23
Postupak je identičan onom za sustav M/M/m. Vidi poglavlje 5.5.2.

Rješenje zadatka 5.24
Izjednačavanjem karakterističnih dijelova izraza Erlangovih formula dobivamo odnos:

$$E_{1,m}(\lambda/\mu) = \frac{E_{2,m}(\lambda/\mu)\left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right)}{1 - E_{2,m}(\lambda/\mu)\frac{\lambda}{m\mu}}$$

Općenito vrijedi da je:

$$E_{1,m}(\lambda/\mu) < E_{2,m}(\lambda/\mu)$$

Poglavlje 6

Odabrani prometni modeli

Teorija prometa je iznimno široko znanstveno područje. Cilj ovog predmeta je obuhvaćanje samo osnovnih prometnih modela. Prometni modeli temeljeni na Markovljevim lancima su iznimno korisni, no u nekim slučajevima se ne mogu uspješno primijeniti na određene realne slučajeve. Zbog toga se koriste određene aproksimacije, poput fluidne aproksimacije, koja je djelomično temeljena na teoriji obnavljanja (*renewal theory*). Vremenska ograničenost nam ne dopušta da uđemo u ovo zanimljivo područje. Zbog istog razloga ne možemo iscrpnije proučavati modele temeljene na Markovljevim lancima. Stoga ćemo u ovom zadnjem poglavlju dati samo pregled odabranih prometnih modela koji se koriste u prometnoj analizi.

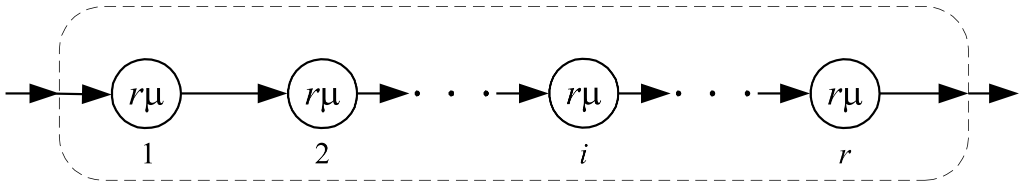
Počet ćemo s analizom nekih osnovnih sustava posluživanja kod kojih vrijeme posluživanja nije raspodijeljeno eksponencijalno. Upoznat ćemo se s osnovnim modelima izvorišta glasovnog i video prometa. Iznimno je zanimljiv samoslični (*self-similar*) model prometnog izvorišta koji koristimo za modeliranje kumulativnog TCP prometa u Internetu i modeliranje video prometa. Upoznat ćemo se s osnovnim metodama analize mreže repova koje se mogu primijeniti na paketske mreže. Na kraju ćemo se upoznati s poopćenjem Erlangove B formule - Kaufman-Robertsovom formulom.

6.1 M/G/1 sustavi posluživanja temeljeni na jednostavnim Markovljevim lancima

6.1.1 Erlangova razdioba posluživanja E_r

Proučavajući realne sustave posluživanja A.K. Erlang je uočio da vrijeme posluživanja jedinica u sustavima posluživanja često nije eksponencijalno raspodijeljeno. Zapravo, zaključio je da je razdioba posluživanja više slična Gamma razdiobi nego eksponencijalnoj razdiobi. Budući da nije raspolagao s boljim matematičkim alatom od Markovljevih lanaca, htio je modelirati ove sustave posluživanja koristeći dobro poznata svojstva Markovljevih lanaca.

Već smo ranije pokazali da se zbroj eksponencijalno raspodijeljenih slučajnih varijabli ravna po gamma razdiobi. Promotrimo poslužiteljski dio sustava posluživanja koji je sastavljen od r serijski povezanih poslužitelja koji dolazeće jedinice poslužuju intenzitetom $r\mu$, s eksponencijalno raspodijeljenim (slika 6.1).



Slika 6.1: Erlangov poslužitelj s r-stupnjeva

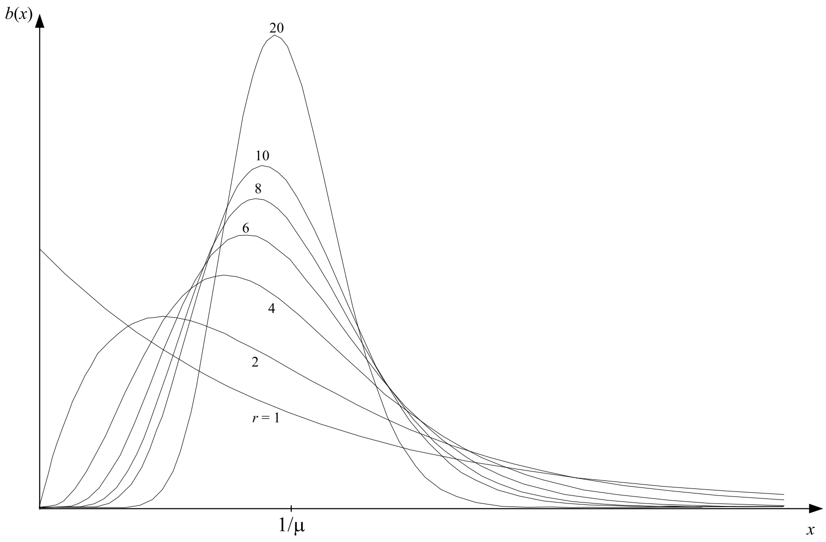
Erlangov poslužiteljski dio ima svojstvo da kada jedna jedinica započne svoje opsluživanje niti jedna druga jedinica ne smije ući u poslužiteljski dio dok se trenutno posluživana jedinica ne obradi do kraja.

Dakle, u trenutku kada neka jedinica napušta sustav posluživanja, sljedeća jedinica ulazi u poslužiteljski dio, i to u njegov prvi poslužitelj. Tamo se zadržava određeno vrijeme koje se ravna po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom $r\mu$. Nakon toga prelazi u drugi poslužitelj gdje se također zadržava određeno eksponencijalno raspodijeljeno vrijeme, pa u sljedeći i tako redom dok ne izađe iz poslužiteljskog dijela. Tek u trenutku izlaska jedinice iz poslužiteljskog dijela u sustav ulazi sljedeća jedinica ukoliko je ima. Dakle, u bilo kojem trenutku samo se jedna jedinica smije nalaziti u Erlangovu poslužiteljskom dijelu.

Budući da je ukupno vrijeme zadržavanja jedinice u Erlangovom poslužiteljskom dijelu određeno zbrojem r slučajnih varijabli koje su eksponencijalno raspodijeljene s parametrom $r\mu$, razdioba vremena obrade jedinice $\tilde{x}$ u ovom sustavu posluživanja određena je Gamma razdiobom (6.1).

$$b(x) = \frac{r\mu(r\mu x)^{r-1}e^{-r\mu x}}{(r-1)!}, \qquad x \geq 0. \tag{6.1}$$

Budući da je do ovog izraza došao Erlang, razdiobu određenu izrazom (6.1) zovemo Erlangova razdioba i označavamo E_r. r je konkretan cijeli broj koji ovisi o promatranom sustavu posluživanja. Zanimljivo je pogledati graf gustoće razdiobe za različite vrijednosti parametra r (slika 6.2).



Slika 6.2: Gustoća razdiobe Erlangove razdiobe za $r = 1, 2, 4, 6, 8, 10, 20$

Ova funkcija ima neka izuzetno zanimljiva i važna svojstva. Očekivanje slučajne varijable $\tilde{x}$ koja ima gustoću razdiobe $b(x)$ je:

$$E[\tilde{x}] = r\left(\frac{1}{r\mu}\right) = \frac{1}{\mu}. \tag{6.2}$$

Točka u kojoj ova funkcija dostiže svoj maksimum je:

$$t_{max} = \left[\frac{r-1}{r}\right]\frac{1}{\mu}. \tag{6.3}$$

Što je r veći to je točka maksimuma bliža vrijednosti $1/\mu$. Ako pustimo da r teži u ∞ dobivamo da se očekivanje poklapa s maksimumom gustoće razdiobe. Može se pokazati da funkcija $b(x)$ konvergira k delta funkciji $\delta(x - \mu)$ kada k teži u beskonačnost.

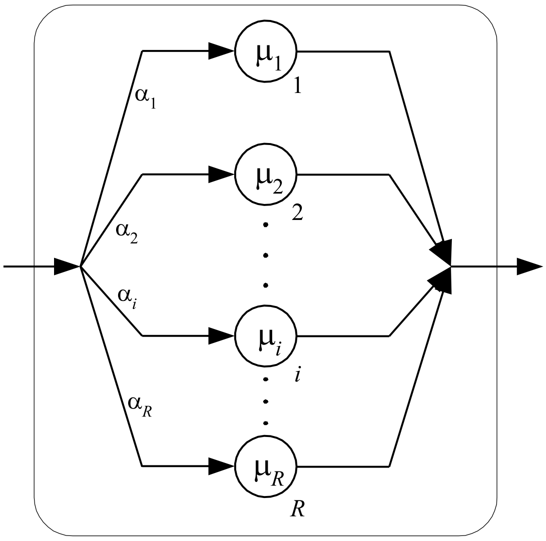
$$\lim_{r\to\infty} b(x) = \lim_{r\to\infty} \frac{r\mu(r\mu x)^{r-1}e^{-r\mu x}}{(r-1)!} = \delta(x - 1/\mu). \tag{6.4}$$

Ova činjenica je izuzetno važna. Možemo se pitati kakva slučajna varijabla ima gustoću razdiobe jednaku delta funkciji? Prisjetimo se intuitivnog značenja funkcije gustoće razdiobe kao funkcije koja pokazuje kako "gusto" se vrijednosti slučajne varijable pojavljuju u određenim područjima vrijednosti.

Ako je funkcija gustoće razdiobe delta funkcija $\delta(x-\mu)$, to onda znači da slučajna varijabla pri svakoj realizaciji događaja poprima vrijednost jednaku μ. U tom slučaju čak ne možemo niti govoriti o slučajnoj varijabli, nego o determinističkoj varijabli. Ova spoznaja je izuzetno bitna. To znači da ako uspijemo modelirati sustav posluživanja $M/E_r/1$, onda ćemo graničnim prijelazom $r \to \infty$ dobiti parametre sustava posluživanja $M/D/1$.

6.1.2 Hipereksponencijalna razdioba posluživanja $\mathbf{H}_R$

Poslužiteljski dio nekog poslužitelja može biti izuzetno kompleksna kombinacija serijski i paralelno povezanih poslužitelja. Promotrimo sada slučaj poslužiteljskog dijela koji se sastoji od R paralelnih poslužitelja gdje svaki poslužitelj ima eksponencijalno vrijeme posluživanja proizvoljnog intenziteta μ_i, $1 \le i \le R$. Ovakav poslužiteljski dio sustava posluživanja prikazan je na slici 6.3.



Slika 6.3: R-stupanjski paralelni poslužiteljski dio

U poslužiteljski dio dolazi R različitih vrsta jedinica. Svaka jedinica koja pripada vrsti i se obrađuje na poslužitelju i koji jedinice svoje vrste poslužuje intenzitetom μ_i. α_i je vjerojatnost dolaska jedinice vrste i u poslužiteljski dio. Izračunajmo razdiobu vjerojatnosti vremena posluživanja za ovakav sustav. Neka A_i označava događaj da je jedinica koja je pristigla u poslužiteljski dio bila namijenjena poslužitelju i. Vjerojatnost takvog događaja je $P(A_i) = \alpha_i$ Neka je $\tilde{X}$ slučajna varijabla koja mjeri vrijeme posluživanja bez poznavanja same naravi jedinice koja se poslužuje. Možemo sprovesti sljedeći izvod:

$$
\begin{aligned}
P\left\{\tilde{X} \le x\right\} &= P\left\{\left(\tilde{X} \le x \cap A_1\right) \cup \left(\tilde{X} \le x \cap A_2\right) \cup \ldots \cup \left(\tilde{X} \le x \cap A_R\right)\right\} = \\
&= P\left\{\tilde{X} \le x \cap A_1\right\} + \left\{\tilde{X} \le x \cap A_2\right\} + \ldots + \left\{\tilde{X} \le x \cap A_R\right\} = \\
&= P\left\{\tilde{X} \le x | A_1\right\} P\left(A_1\right) + \left\{\tilde{X} \le x | A_2\right\} P\left(A_2\right) + \ldots + \left\{\tilde{X} \le x | A_R\right\} P\left(A_R\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{R} P\left\{\tilde{X} \le x | A_1\right\} P\left(A_1\right) = \sum_{i=1}^{R} \left(1 - e^{-\mu_i x}\right) \alpha_i
\end{aligned}
$$

Gustoću razdiobe varijable koja mjeri vrijeme posluživanja jedinica u poslužiteljskom dijelu dobivamo derivacijom funkcije $P\left\{\tilde{X} \le x\right\}$ po parametru x (6.5).

$$
b(x) = \frac{\partial P\left\{\tilde{X} \le x\right\}}{\partial x} = \sum_{i=1}^{R} \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i x}, \qquad x \ge 0 \tag{6.5}
$$

Ovu razdiobu zovemo *hipereksponencijalnom razdiobom* R-tog stupnja - H_R. Njeno očekivanje je:

$$E[\tilde{X}] = \bar{X} = \sum_{i=1}^{R} \frac{\alpha_i}{\mu_i} \tag{6.6}$$

Budući da je i ovaj poslužiteljski dio moguće prikazati preko dijagrama stanja Markovljevog lanca, moguće je izvršiti jednostavnu analizu sustava posluživanja M / H $_R$ / 1.

Demonstrirajmo osnovna svojstva opisanog poslužitelja sljedećim primjerom:

Primjer 6.1 Na izlazu s autoputa postoje dvije naplatne kućice, jedna za kamione i autobuse, a druga za automobile i motocikliste. Poznato je da je ukupni dolazni intenzitet vozila na naplatne kućice 7 vozila u minuti. Na autoputu je 25% autobusa i kamiona, a 75% automobila i motocikala. Ako je prosječno vrijeme posluživanja autobusa i kamiona na naplatnoj kućici 0.5 minuta, a automobila i motocikla 0.15 minuta, koliko je prosječno vrijeme posluživanja vozila na naplatnim kućicama autoputa ? Uz pretpostavku da se na naplatnim kućicama održavaju neovisni redovi za svaku od naplatnih kućica, koliki je prosječan broj vozila koji čeka na posluživanje ?

S obzirom na poslužiteljski dio ovog sustava posluživanja postoje dvije vrste jedinica: velika i mala vozila. Svaka vrsta se poslužuje na svom poslužitelju. To znači da imamo sustav posluživanja kod kojeg je vrijeme posluživanja raspodijeljeno po hipereksponencijalnoj razdiobi H_2. Prema (6.6) slijedi da je:

$$E[\tilde{x}] = \overline{x} = 0.25 \cdot 0.5 \text{ minute} + 0.75 \cdot 0.15 \text{ minuta} = 0.23 \text{ minute}$$

Ukoliko se održava poseban red za svaku vrstu vozila onda je ukupna duljina reda jednaka zbroju redova vrsti. U tom slučaju promatramo dva neovisna sustava posluživanja M/M/1. Intenzitete posluživanja poslužitelja znamo, a dolazne intenzitete dobivamo dekompozicijom dolaznog Poissonova procesa.

$$N_{q1} = \frac{{\rho_1}^2}{1-\rho_1} \qquad N_{q2} = \frac{{\rho_2}^2}{1-\rho_2}$$
$$\rho_1 = \frac{0.25 \cdot \lambda}{\mu_1} \qquad \rho_2 = \frac{0.75 \cdot \lambda}{\mu_2}$$

Uvrštavajući vrijednosti:

$$\lambda = 7 \ \frac{\text{vozila}}{\text{min}} \qquad \mu_1 = \frac{1}{0.5\,\text{min}} \qquad \mu_2 = \frac{1}{0.15\,\text{min}}$$

Dobivamo da je:

$$N_{q1} = 6.125 \text{ vozila} \qquad N_{q2} = 2.92 \text{ vozila}$$

U prosjeku je ispred naplatnih kućica:

$$N_q = N_{q1} + N_{q2} = 9.04 \text{ vozila}$$

6.1.3 Osnovni parametri sustava posluživanja $M/E_r/1$ i $M/D/1$

Promotrimo prvo sustav posluživanja $M/E_r/1$. Kako bismo došli do sustava jednadžbi koji opisuje ovaj sustav potrebno je kreirati određeni dijagram stanja. Umjesto stanja sustava uvodimo pojam stupnja u sustavu. Jedinice koje su u sustavu moraju proći kroz r stupnjeva obrade u poslužiteljskom dijelu. Stupanj sustava definiramo kao broj stupnjeva obrade kroz koje će morati proći sve trenutno prisutne jedinice u sustavu posluživanja.

Neka je broj jedinica u sustavu točno n. Stupanj možemo zamisliti kao broj koraka koji su potrebni da se neka n-ta jedinica obradi. n-ta jedinica prvo mora pričekati da se jedinica koja je trenutno u poslužiteljskom dijelu do kraja obradi i da se obrade sve $n-2$ jedinice ispred nje plus ona sama (dakle $n-1$ jedinica), i mora još pričekati $r-i+1$ stupnjeva kako bi se do kraja obradila trenutno obrađivana jedinica. Pretpostavljamo da je trenutno obrađivana jedinica došla do i-tog stupnja. Da se obradi jedna jedinica potrebno je proći kroz r stupnjeva. Ako s j označimo broj stupnjeva kroz koji sustav mora proći kako bi se obradilo n jedinica, onda vrijedi:

$$j = (n-1)r + (r-i+1) = rn - i + 1 \tag{6.7}$$

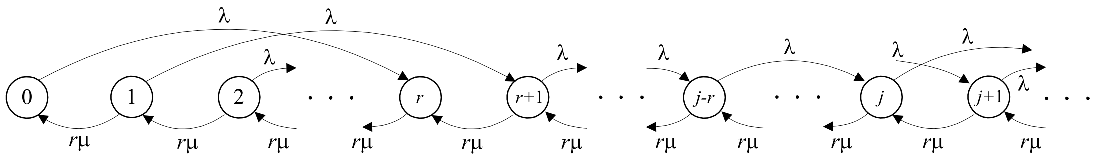
Budući da nas zanima stacionarna vjerojatnost p_n koja označava vjerojatnost da je u sustavu n jedinica, onda moramo naći vezu vjerojatnosti $P[\text{ j stupnjeva u sustavu }]$ i vjerojatnosti p_n. Ako definiramo

$$P_j \triangleq P[\text{ j stupnjeva u sustavu }]$$

onda

$$p_n = \sum_{j=(n-1)r+1}^{nr} P_j, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.8}$$

(6.8) kaže da je u sustavu posluživanja n jedinica onda kada se u sustavu ima proći kroz $j = (n-1)r + 1$ ili $j = (n-1)r + 2$ ili ... ili nr stupnjeva. Dijagram stupnjeva obrade prikazan je na slici 6.4



Slika 6.4: Dijagram stupnjeva obrade sustava posluživanja $M/E_r/1$

Tako smo došli do klasičnog Markovljevog procesa za koji možemo postaviti sustav linearnih jednadžbi. Iz rješenja tog sustava, koristeći (6.8) dobivamo funkciju razdiobe stanja ovog sustava posluživanja. Sustav jednadžbi koji slijedi je:

$$\begin{aligned} \lambda P_0 &= r\mu P_1 \\ (\lambda + r\mu)P_j &= r\mu P_{j+1}, \qquad & j = 1, 2, \ldots, r-1 \\ (\lambda + r\mu)P_j &= \lambda P_{j-r} + r\mu P_{j+1}, \qquad & j = r, r+1, \ldots \end{aligned} \tag{6.9}$$

Na žalost nema jednostavnog rješenja za ovaj sustav jednadžbi. Teško da bismo ga mogli riješiti gornji sustav bez korištenja z-transformacije. Zbog ograničenog vremena koje nam je na raspolaganju nećemo tražiti funkciju razdiobe. Bitno je jedino zapamtiti koju metodu smo koristili kako bi uopće Erlangov poslužitelj uspjeli svesti na Markovljev lanac. Iako nema jednostavnog općeg rješenja, za sustav posluživanja s konačno velikim spremničkim dijelom traženje rješenja se svodi na određene matrične operacije. Ovdje ćemo samo dati izvedene izraze pomoću kojih možemo računati osnovne statističke parametre sustava posluživanja $M/E_r/1$.

Srednji broj jedinica u sustavu posluživanja $M/E_r/1$ je:

$$\overline{N} = \frac{\rho}{1-\rho}\left[1 - \rho\frac{1-\frac{1}{r}}{2}\right] \tag{6.10}$$

gdje je ρ opterećenje cijelog poslužiteljskog dijela:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \tag{6.11}$$

Budući da i ovdje vrijede osnovne zakonitosti sustava posluživanja i Littleova formula, direktno slijede i ostali parametri:

$$\begin{aligned}
\overline{N}_s &= \rho && (6.12)\\
\overline{N}_q &= \overline{N} - \overline{N}_s = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1+\frac{1}{r}\right] && (6.13)\\
W &= \frac{\overline{N}_q}{\lambda} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}\left[1+\frac{1}{r}\right] && (6.14)\\
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)}\left[1-\rho\frac{1-\frac{1}{r}}{2}\right] && (6.15)
\end{aligned}$$

M/D/1 sustav posluživanja je sustav posluživanja u kojem je vrijeme posluživanja svake jedinice točno $1/\mu$. Već prije smo ustanovili da sustav posluživanja M/E$_r$/1 konvergira u sustav posluživanja M/D/1 kada r teži u beskonačno. Graničnim prijelazom dobivamo sve karakteristične parametre sustava posluživanja M/D/1:

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= \frac{\rho}{1-\rho}\left[1-\frac{\rho}{2}\right] && (6.16)\\
\overline{N}_s &= \rho && (6.17)\\
\overline{N}_q &= \overline{N} - \overline{N}_s = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} && (6.18)\\
W &= \frac{\overline{N}_q}{\lambda} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} && (6.19)\\
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)}\left[1-\frac{\rho}{2}\right] && (6.20)
\end{aligned}$$

Demonstrirajmo osnovna svojstva sustava posluživanja M/E$_r$/1.

Primjer 6.2 Četiri radne stanice šalju pakete van svoje domene preko usmjeritelja. Intenzitet slanja paketa je jednak za sve stanice i iznosi 1500 paketa/s. Svi paketi se usmjeravaju na isti izlazni port i nema drugog prometa koji bi bio usmjeren na ovaj port usmjeritelja. Link koji poslužuje port usmjeritelja ima kapacitet 2 Mb/s. Duljine paketa suraspodijeljene po Erlangovoj razdiobi s očekivanjem $\overline{d} = 40$ okteta i $r = 4$. Izračunajte prosječnu duljinu repa i prosječno vrijeme zadržavanja paketa u izlaznom portu poslužitelja.

Jasno je da se radi o sustavu posluživanja M/E$_r$/1. Budući da je vrijeme posluživanja proporcionalno duljini paketa i da je duljina paketa raspodijeljena po Erlangovoj razdiobi E_4 to je po istoj razdiobi raspodijeljeno i vrijeme posluživanja na odlaznom linku (poslužiteljskom dijelu). Potrebno je odrediti λ i μ.

$$\lambda = 4 \cdot 1500 \text{ paketa/s} = 6000 \text{ paketa/s}$$

budući da imamo četiri Poissonova izvorišta. μ određujemo iz kapaciteta odlaznog linka na sljedeći način:

$$\mu = \frac{2 \cdot 10^6 \text{ bit/s}}{40 \text{ okteta} \cdot 8 \text{ bita}} = 6250 \text{ paketa/s}$$

Uspoređujući dolazni i odlazni tok paketa zaključujemo da će izlazni port u prosjeku ipak uspjeti poslužiti veliku većinu paketa. Sada izračunajmo opterećenje linka:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6000 \text{ paketa/s}}{6250 \text{ paketa/s}} = 0.96$$

Koristeći se sada izrazima (6.12, 6.13, 6.14, 6.15) dobivamo:

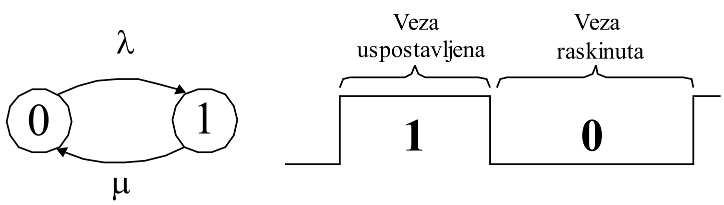
$$\begin{aligned}
\overline{N}_s &= \rho = 0.96\,\text{paketa} \approx 40\,\text{okteta} = 320\,\text{bita} \\
\overline{N}_q &= \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1+\frac{1}{r}\right] = 14.4\,\text{paketa} = 576\,\text{okteta} \\
W &= \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}\left[1+\frac{1}{r}\right] = 2.4\ \text{ms} \\
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)}\left[1-\rho\frac{1-\frac{1}{r}}{2}\right] = 2.56\ \text{ms}
\end{aligned}$$

Na žalost nisu nam poznati izrazi za razdiobu duljine repa čekanja pa ne možemo ocijeniti potrebnu veličinu spremnika kako bi broj odbačenih paketa bio relativno mali. Sigurno je jedino da bi spremnik trebao biti veći od 277 okteta, no koliko veći je dobro pitanje. Potrebno je izvršiti veću matematičku analizu ili izvesti nekoliko simulacija koje bi dale korektan odgovor. Inače, u većini primjena gdje ne postoji analitički izraz za razdiobu duljine repa, projektanti koriste simulaciju i statističku analizu kako bi pronašli razdiobu duljine repa.

6.2 Osnovni modeli izvorišta glasovnog prometa

Izvor glasovnog prometa može se promatrati na nekoliko razina: na razini uspostavljanja i raskida poziva (razini veze), na razini dijaloga - perioda za vrijeme kojih korisnik generira glasovnu informaciju, na razini snopova paketa koji prenose glasovnu informaciju i razini samog prijenosa paketa.

Za početak opišimo poziv na razini uspostave veze (poziva). Mjerenja pokazuju da se vrijeme trajanja poziva i vrijeme između kraja jedne i početka druge veze jednog korisnika može dosta dobro opisati eksponencijalnom razdiobom. To nas navodi na zaključak da aktivnost nekog korisnika opišemo Markovljevim lancem s kontinuiranim parametrom s dva stanja.



Slika 6.5: Dijagram stanja modela uspostave i raskida veze za jednog korisnika

Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

odakle neposredno iščitavamo da je prosječno vrijeme boravka u stanju 0 $1/\lambda$, a u stanju 1 $1/\mu$. Stacionarne vjerojatnosti su:

$$\hat{p}_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad \hat{p}_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Ovaj model možemo neposredno primijeniti prilikom simulacije ili generiranja prometa prilikom mjerenja na realnoj mreži. Međutim, ponekad generiranje eksponencijalno raspodijeljene slučajne varijable nije prikladno i često se primjenjuju alternativni načini. Jedan od načina generiranja trajektorije promatranog binarnog Markovljevog lanca je koristeći Markovljev lanac s diskretnim parametrom.

6.2.1 Aproksimacija Markovljevog lanca s kontinuiranim parametrom Markovljevim lancem s diskretnim parametrom

Promatrajmo slučajnu varijablu X koja je raspodijeljena po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom a. Neka je K diskretna slučajna varijabla koja ima geometrijsku razdiobu s parametrom p. Izračunajmo pod kojim uvjetima će varijable X i K imati jednako očekivanje. Jasno da varijabla X mjeri nekakvo vrijeme, a K broj koraka. Stoga, kako bismo doveli u vezu dvije varijable, broj koraka geometrijski raspodijeljene varijable K pomnožit ćemo s nekim fiksnim vremenskim periodom Δt i na taj način dobiti varijablu koja mjeri diskretna vremena. Moramo izvršiti i jednu preinaku razdiobe varijable K. Budući da ona mjeri broj intervala Δt i budući da broj ostanaka u istom stanju Bernulijeve slučajne varijable odgovara broju intervala koje mjerimo, logično je funkciju vjerojatnosti slučajne varijable K definirati na sljedeći način:

$$p_i = P(K = i) = (1-p)^{i-1} \cdot p$$

Očekivanje ovako definirane slučajne varijable je jednako

$$E[K] = \frac{1}{p}$$

Tražimo uvjete pod kojima će biti zadovoljeno

$$E[X] = E[\Delta t \cdot K] = \Delta t \cdot E[K]. \tag{6.21}$$

Slijedi:

$$\frac{1}{\lambda} = \Delta t \cdot \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad p = \lambda \cdot \Delta t \tag{6.22}$$

Dakle, parametar geometrijske razdiobe p koji postiže uvjet (6.21) proporcionalan je parametru λ eksponencijalne razdiobe varijable X i duljini vremenskog odsječka Δt.

Koristeći ovaj podatak pokazat ćemo da varijabla $K \cdot \Delta t$ za male Δt dobro aproksimira eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Ova činjenica će nam omogućiti da Markovljeve lance s kontinuiranim parametrom preslikavamo u Markovljeve lance s diskretnim parametrom. Izračunajmo funkciju razdiobe slučajne varijable K za slučaj kada je zadovoljen uvjet (6.21):

$$\begin{aligned} P\left\{\Delta t \cdot K \le x\right\} &= P\left\{K \le \frac{x}{\Delta t}\right\} = P\left\{\bigcap_{i=1}^{x/\Delta t} K = i\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{x/\Delta t} P\left\{K = i\right\} = \sum_{i=1}^{x/\Delta t} p \cdot (1-p)^{i-1} = \\ &= p \cdot \frac{1-(1-p)^{x/\Delta t}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{x/\Delta t} = 1-(1-\lambda\Delta t)^{x/\Delta t} \end{aligned}$$

Neka je $n = x/\Delta t$. Dobivamo:

$$P\left\{\Delta t \cdot K \le x\right\} = 1 - \left(1 + \frac{-\lambda x}{n}\right)^n \tag{6.23}$$

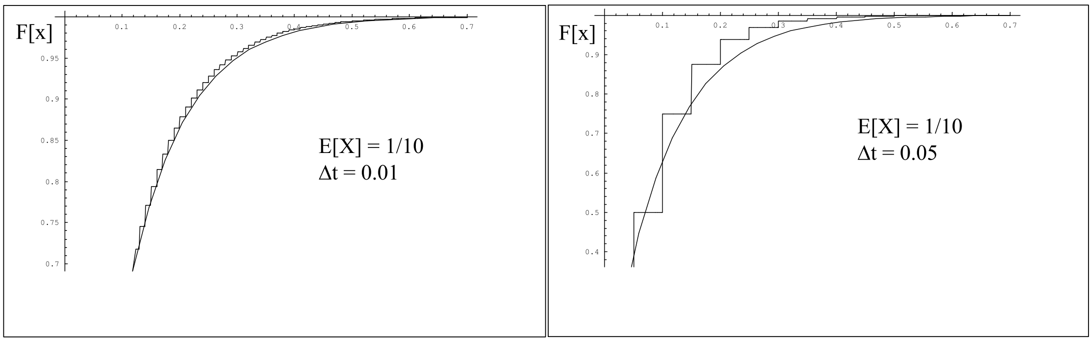
Ukoliko pustimo da n teži u beskonačno, odnosno da Δt teži k 0, dobivamo

$$\lim_{\Delta t \to 0} P\left\{\Delta t \cdot K \le x\right\} = 1 - e^{-\lambda x} \tag{6.24}$$

što je izraz za funkciju razdiobe eksponencijalne razdiobe s parametrom λ. Budući da je desna strana izraza (6.23) monotona funkcija od n, neposredno zaključujemo da se razdioba varijable K s geometrijskom razdiobom i parametrom $p = \lambda\Delta t$ asimptotski približava eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ. Razdioba slučajne varijable K je to bliže razdiobi slučajne varijable X što je interval Δt manji. Kvaliteta aproksimacije se može vidjeti sa slike 6.6.

Nadalje bismo mogli izvršiti analizu odstupanja (pogreške) koju unosimo aproksimacijom, no za takvu analizu u ovoj skripti nema prostora.

Budući da smo utvrdili na koji način možemo vršiti aproksimaciju eksponencijalne razdiobe geometrijskom, pogledajmo kako možemo Markovljev lanac s kontinuiranim parametrom aproksimirati Markovljevim lancem s diskretnim parametrom. Trebamo postići dva cilja. Matricu prijelaznih vjerojatnosti moramo podesiti tako da su očekivanja vremena ostanka u pojedinim stanjima jednaka onima kod lanca s kontinuiranim parametrom i da su zadovoljene vjerojatnosti skokova između stanja.



Slika 6.6: Aproksimacija eksponencijalne razdiobe geometrijskom razdiobom

Neka je matrica prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca s diskretnim parametrom **P** i matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti Markovljevog lanca s kontinuiranim parametrom **Q**. Prisjetimo se da je parametar p geometrijske razdiobe vjerojatnost pojave iščekivanog Bernoulievog događaja. Ako je lanac u stanju k, onda je događaj kojeg iščekujemo geometrijskom razdiobom promjena stanja iz k u neko drugo stanje. Budući da je vrijeme neprekidnog boravka u istom stanju raspodijeljeno eksponencijalno, jasno je da je parametar (vjerojatnost) p za dato stanje k jednak:

$$p = -q_{kk}\Delta t = \sum_{j \neq k} p_{kj} = \sum_{j \neq k} q_{kj}\Delta t.$$

Ova jednakost slijedi iz činjenice da je parametar eksponencijalne razdiobe varijable koja mjeri vrijeme neprekidnog boravka lanca s kontinuiranim parametrom u istom stanju jednak $-q_{kk}$. Budući da parametar p označava vjerojatnost odlaska lanca iz stanja k, onda slijedi da je prijelazna vjerojatnost p_{kk} iz matrice **P** jednaka

$$p_{kk} = 1 - p = 1 + q_{kk}\Delta t \tag{6.25}$$

Na taj način smo izračunali elemente dijagonale matrice **P**. Da bismo dobili i ostale elemente moramo se koristiti vjerojatnostima skokova.

Vjerojatnost skoka iz stanja i u stanje j za lance s kontinuiranim parametrom određujemo prema izrazu

$$\tilde{p}_{ij} = -\frac{q_{ij}}{q_{ii}}$$

Izračunajmo vjerojatnosti skokova za Markovljev lanac s diskretnim parametrom. Vjerojatnost skoka iz stanja i u stanje j dobivamo sljedećim izvodom:

$$\begin{aligned}
\tilde{p}_{ij} &= P\left\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n+1} \neq X_n\right\} = \\
&= \frac{P\left\{X_{n+1} = j, X_n = i, X_{n+1} \neq X_n\right\}}{P\left\{X_n = i, X_{n+1} \neq X_n\right\}} = \\
&= \frac{P\left\{X_{n+1} = j, X_{n+1} \neq X_n | X_n = i\right\} P(X_n = i)}{P\left\{X_{n+1} \neq X_n | X_n = i\right\} P(X_n = i)} = \\
&= \frac{P\left\{X_{n+1} = j, X_{n+1} \neq X_n | X_n = i\right\}}{1 - P\left\{X_{n+1} = X_n | X_n = i\right\}} = \frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}}
\end{aligned}$$

Budući da nam je cilj postići jednakost skokova, izjednačavanjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
\frac{p_{ij}}{1 - p_{ii}} &= -\frac{q_{ij}}{q_{ii}} \quad \Rightarrow \\
\frac{p_{ij}}{1 - 1 - q_{ii}\Delta t} &= -\frac{q_{ij}}{q_{ii}} \quad \Rightarrow \\
p_{ij} &= q_{ij}\Delta t
\end{aligned}$$

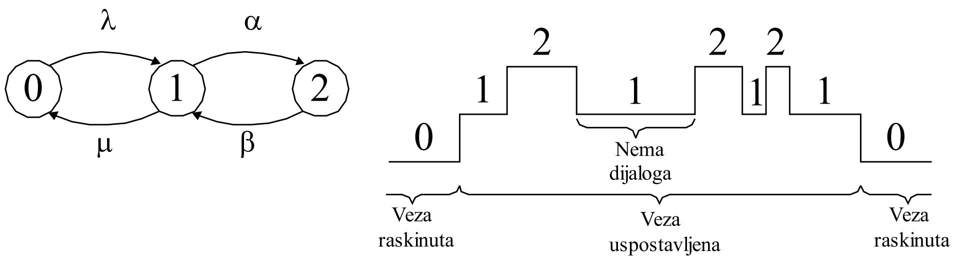
Dakle, jednadžbe pomoću kojih pronalazimo matricu prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{P}$ aproksimacijskog Markovljevog lanca s diskretnim parametrom iz matrice $\mathbf{Q}$ su

$$\begin{aligned} p_{ij} &= q_{ij}\Delta t, \quad i \neq j \\ p_{ii} &= 1 + q_{ii}\Delta t \end{aligned} \tag{6.26}$$

6.2.2 Jednostavan model usamljenog govornog izvorišta

Promatrajmo periode dijaloga jednog korisnika paketske telefonske usluge. To su vremenski periodi kada korisnik aktivno govori (ne sluša). Pretpostavljamo da se paketi generiraju samo onda kada korisnik govori i zanima nas statistika aktivnosti generatora paketa.

Ukoliko promatramo dijaloge za vrijeme dok je veza uspostavljena, možemo ih modelirani binarnim Markovljevim lancem gdje stanje 1 odgovara prisutnosti dijaloga, a stanje 0 odgovara odsutnosti dijaloga. Međutim, ukoliko želimo modelirati dijaloge uzimajući u obzir uspostavljenost veze, moramo promatrati model s tri stanja.



Slika 6.7: Jednostavan model govornog izvorišta s tri stanja

U tom modelu ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da se veza može prekinuti samo ako korisnik ne govori. Neka stanje 0 predstavlja stanje raskinute veze, stanje 1 uspostavljene veze bez dijaloga, a stanje 2 stanje uspostavljene veze s dijalogom. Možemo pretpostaviti da je prosječno vrijeme boravka u stanju 0 T_0, prosječno vrijeme boravka u stanju 1 T_1, a prosječno vrijeme boravka u stanju 2 T_2. Pretpostavimo da je statistički utvrđeno da promatrani lanac ima stacionarne vjerojatnosti p_0, p_1 i p_2.

Početnička greška koja se često potkrada u ovakvim slučajevima je pokušaj izračunavanja stacionarnih vjerojatnosti na osnovu vremena T_0, T_1 i T_2. U općem slučaju vrijedi sljedeća konstatacija:

$$\hat{p}_0 \neq \frac{T_0}{T_0 + T_1 + T_2}, \quad \hat{p}_1 \neq \frac{T_1}{T_0 + T_1 + T_2}, \quad \hat{p}_2 \neq \frac{T_2}{T_0 + T_1 + T_2}.$$

Ovakvo rezoniranje vrijedi samo u slučaju binarnog Markovljevog lanca.

Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{Q}$ ima oblik:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \alpha \\ 0 & \beta & -\beta \end{bmatrix}$$

Budući da λ odgovara parametru eksponencijalne razdiobe varijable koja mjeri vrijeme boravka u stanju 0, zaključujemo:

$$\lambda = \frac{1}{T_0}$$

Sličnim zaključivanjem dobivamo da je:

$$\beta = \frac{1}{T_2}$$

$$\alpha + \mu = \frac{1}{T_1}$$

Za izračunavanje parametara α i μ potrebno je dovesti u vezu izraze za stacionarne vjerojatnosti s njihovim vrijednostima. Rješavajući sustav linearnih jednadžbi dobivamo:

$$\hat{p}_0 = \frac{\beta\mu}{\alpha\lambda + \beta\lambda + \beta\mu}, \quad \hat{p}_1 = \frac{\beta\lambda}{\alpha\lambda + \beta\lambda + \beta\mu}, \quad \hat{p}_2 = \frac{\alpha\lambda}{\alpha\lambda + \beta\lambda + \beta\mu}$$

Slijedi:

$$\frac{\hat{p}_0}{\hat{p}_1} = \frac{\mu}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{\hat{p}_0}{T_0 \hat{p}_1}$$

$$\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} = \frac{\beta}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\hat{p}_2}{T_2 \hat{p}_1}.$$

Primijetimo da statistički utvrđeni postoci boravka lanca u pojedinim stanjima moraju zadovoljiti jednakost:

$$\frac{\hat{p}_0}{T_0 \hat{p}_1} + \frac{\hat{p}_2}{T_2 \hat{p}_1} = \frac{1}{T_1}.$$

Rezimirajmo. Na osnovu statistički određenih veličina izračunali smo elemente matrice $\mathbf{Q}$ i koristeći je možemo simulirati promatrani model i analizirati njegovo ponašanje. Međutim, što ukoliko želimo izgraditi generator prometa koji radi po prikazanom modelu.

Pretpostavimo da želimo napraviti generator paketa IP telefonskog korisnika u cilju mjerenja na realnoj mreži. U IP telefoniji se paket generira samo za vrijeme kada korisnik govori (za vrijeme dijaloga) u pravilnim vremenskim razmacima od 20 ms. Kako bismo uspjeli generirati pakete, u program bismo morali ugraditi brojne mehanizme, *timere* koje bismo ugađali po eksponencijalnoj razdiobi, te *while* petlju koju bismo aktivirali za vrijeme dok je lanac u stanju 2, a koja bi u pravilnim vremenskim razmacima od 20 ms generirala paket. Jednostavnije bi bilo model transformirati u odgovarajući model s Markovljevim lancem s diskretnim parametrom i na osnovu matrice prijelaznih vjerojatnosti generirati pakete. Jednostavnost se svodi na to što bi za dobivanje jednakog uzorka paketa bila potrebna samo jedna *while* petlja koja bi se ponavljala svakih 20 ms i koja bi u stanju 2 generirala IP paket. Stanje, zapisano u nekoj unutarnjoj varijabli, bi se mijenjalo na osnovu matrice prijelaza $\mathbf{P}$. Prednost ovakvog pristupa je očigledna za slučaj kada emuliramo veliki broj korisnika.

PRIMJER 6.3 Izračunajmo parametre Markovljevog lanca s diskretnim parametrom koji aproksimira model korisnika paketske telefonije s tri stanja.

Matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_0} & \frac{1}{T_0} & 0 \\ \frac{\hat{p}_0}{T_0 \hat{p}_1} & -\frac{1}{T_1} & \frac{\hat{p}_2}{T_2 \hat{p}_1} \\ 0 & \frac{1}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}.$$

Transformaciju ćemo dakako izvršiti uzimajući da je $\Delta t = 20$ ms, koliko traje period generiranja paketa. Koristeći se transformacijskim izrazima (6.26) dobivamo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{T_0}\Delta t & \frac{1}{T_0}\Delta t & 0 \\ \frac{\hat{p}_0}{T_0 \hat{p}_1}\Delta t & 1 + \frac{1}{T_1}\Delta t & \frac{\hat{p}_2}{T_2 \hat{p}_1}\Delta t \\ 0 & \frac{1}{T_2}\Delta t & 1 + \frac{1}{T_2}\Delta t \end{bmatrix}.$$

Model s tri stanja koji smo analizirali je najjednostavniji cjeloviti model na razini dijaloga. Spomenuli smo i analizirali jednu njegovu primjenu. Međutim, taj model daleko je od točnog i preciznog opisa realne govorne komunikacije. Na primjer Brady-ev model koji ne uzima u obzir uspostavu i raskid komunikacije ima 6 stanja kojima opisuje dijaloge unutar konverzacije.

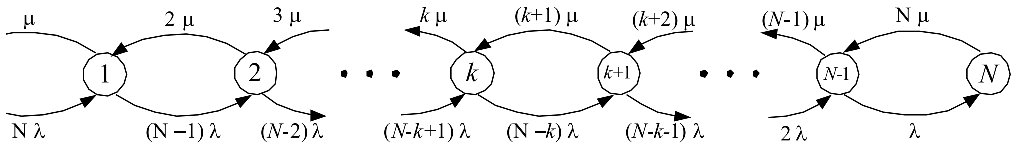
6.2.3 Jednostavani modeli grupe govornih izvorišta

Jedan model grupe govornih izvorišta smo već upoznali. Dijagram stanja prikazan je na slici 6.8.

Parametre λ i μ određujemo statistički analizirajući ponašanje jednog korisnika - model s dva stanja:

$$\lambda = \frac{1}{T_{OFF}}, \quad \mu = \frac{1}{T_{ON}},$$

gdje je T_{ON} - prosječno vrijeme razgovora, a T_{OFF} prosječno vrijeme između dva razgovora.



Slika 6.8: Model aktivnosti grupe korisnika

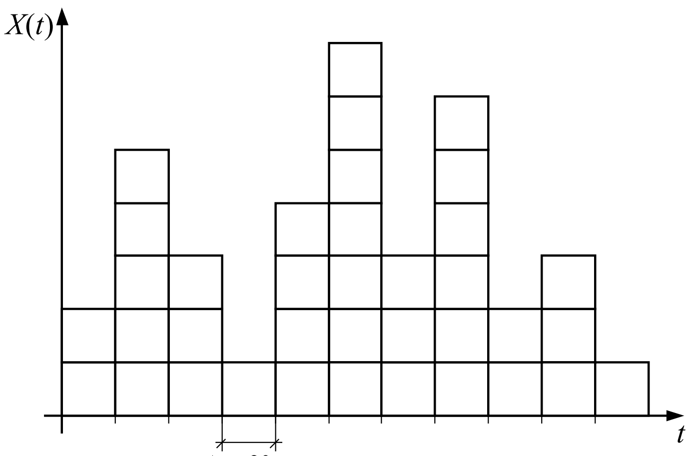
Ukoliko ovaj model koristimo za opis broja uspostavljenih veza, možemo ga koristiti za opis svih vrsta konekcijski orijentiranih komunikacija. Ukoliko se spustimo na razinu dijaloga, model se znatno posložnjuje. Da bismo ga dobro opisali, morali bismo za N korisnika promatrati trodimenzionalni odsječeni proces rađanja i umiranja gdje bi se svaka dimenzija i odnosila na broj korisnika čije se trenutno stanje opisuje kao stanje i jednostavnog modela govornog izvorišta. Takvo razmatranje ćemo ovdje preskočiti zato što je proračunksi vrlo složeno. Objasnit ćemo model koji se temelji na Markovljevom lancu s diskretnim parametrom.

Neka su $\hat{p}_0$, $\hat{p}_1$ i $\hat{p}_2$ stacionarne vjerojatnosti jednostavnog modela s tri stanja s diskretnim parametrom koji opisuje dijaloge jednog korisnika. Taj model možemo dodatno pojednostavniti tako što stanja 0 i 1 stopimo u jedno stanje koje označava stanje bez prisutnosti govora. Novi model ima dva stanja i samo statistički dobro opisuje prethodni model. Promatrajmo skupinu od N korisnika i pokušajmo opisati broj korisnika koji trenutno imaju dijalog. Ako je Markovljev lanac ušao u stacionarno stanje (nakon velikog broja koraka), onda je vjerojatnost da neki korisnik ima dijalog jednaka $\hat{p}_2$. Vjerojatnost da točno n korisnika ima dijalog u nekom trenutku je stoga jednaka $\binom{N}{n}(1-\hat{p}_2)^{N-n}\cdot\hat{p}_2^n$.

Promatrajmo sada korisnike IP telefonije. Za vrijeme dijaloga paketi se generiraju u pravilnim vremenskim razmacima, svakih $\Delta t = 20$ ms. Ukoliko svakih 20 ms želimo generirati pakete svih korisnika, onda ih moramo generirati onoliko koliko nam diktira funkcija vjerojatnosti prvog reda u stacionarnom stanju:

$$p_n = \binom{N}{n}(1-p)^{N-n}p^n \tag{6.27}$$

gdje je $p = \hat{p}_2$. Ovaj model se zove binarni model prometnog izvorišta i u praksi se pokazuje kao dobra aproksimacija realnog stanja. Fragment trajektorije stohastičkog procesa koji odgovara binomnom modelu prikazan je na slici 6.9.



Slika 6.9: Binomni model grupe korisnika

Problem s kojim se susrećemo je određivanje vrijednosti binomne slučajne varijable koja mjeri broj paketa koji se generiraju tijekom jednog intervala. Budući da je nemoguće izračunati inverz funkcije razdiobe binomne varijable, koristimo se aproksimacijom pomoću centralnog graničnog teorema. Varijabla X koja mjeri broj trenutno aktivnih dijaloga jednaka je zbroju binarnih varijabli X_i s funkcijom vjerojatnosti

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Očekivanje i varijanca od X_i su jednake:

$$E[X_i] = 0(1-p) + 1p = p$$

$$Var[X_i] = E[X^2] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p) = \sigma^2.$$

Stoga se po centralnom graničnom teoremu varijabla X

$$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

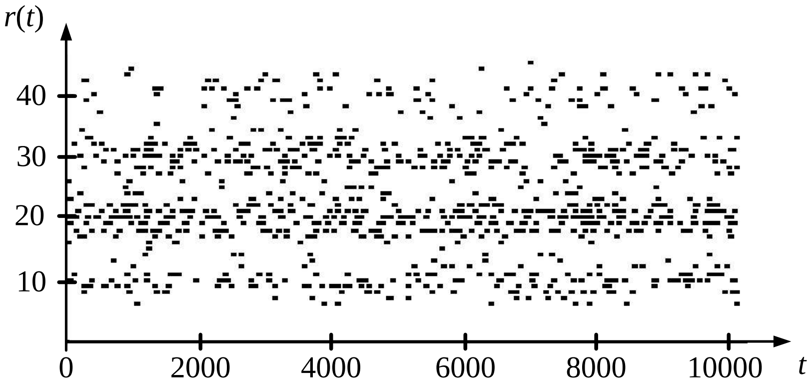
za velike N može dobro opisati normalnom razdiobom:

$$X \sim N(np, np(1-p)).$$

Postupak generiranja normalno raspodijeljenih slučajnih varijabli opisali smo u poglavlju o generiranju slučajnih varijabli.

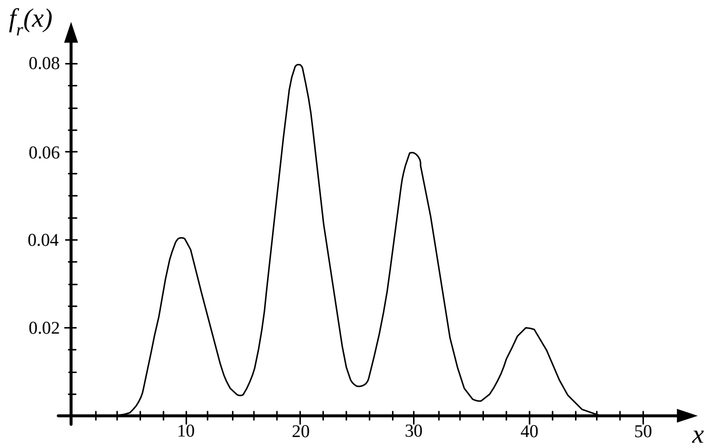
6.3 Osnovni modeli izvorišta video prometa

Video promet spada u klasu prometa s varijabilnom brzinom prijenosa. Video signal sastoji se od niza okvira koji slijede jedan iza drugog u pravilnim vremenskim razmacima. Video koder svaki okvir kodira različitim brojem bita što rezultira varijabilnom brzinom toka koji izlazi iz kodera. Brzina se određuje kao broj informacijskih jedinica (najčešće bita) koje generira koder unutar nekog vremenskog okvira podijeljen s duljinom trajanja tok vremenskog intervala. Za duljinu mjernog intervala obično uzimamo prosječnu duljinu snopa bita - od 50 do 500 ms. Video signal je zanimljiv po tome što brzina iz kodera zadržava određeno vrijeme istu vrijednost, a vrijednosti brzina su koncentrirane oko nekoliko razina. Brzina izlaznog toka informacije iz kodera je tako kvantizirana što upućuje na mogućnost njenog opisa Markovljevim lancima. Slika 6.10 prikazuje trajektoriju brzina i njihovu kvantizaciju, a slika 6.11.



Slika 6.10: Kvantiziranost brzine prijenosa u vremenu

Statistička mjerenja brzina pokazuju da se gustoća razdioba brzina može opisati normiranim zbrojem Erlangovih (E_r) gustoća razdiobe s očekivanjima jednakim glavnim razinama. Modeliranje se svodi na utvrđivanje što više glavnih razina brzina i njihovo modeliranje Markovljevim lancem s kontinuiranim parametrom. U ovom odjeljku ćemo se upoznati samo s jednostavnim Markovljevim modelima s kontinuiranim i diskretnim parametrom. Kasnije ćemo se upoznati s MMPP modelom video prometa koji se može primijeniti na modeliranje bilo kojeg prometa s varijabilnom brzinom.



Slika 6.11: Razdioba brzina i glavne razine

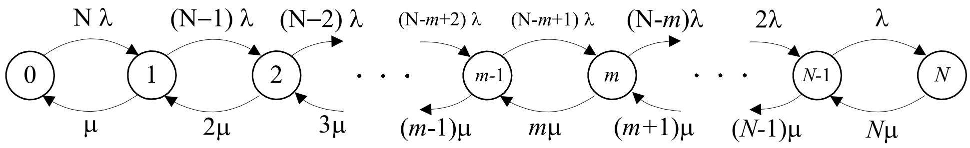
6.3.1 Markovljev model video prometa s kontinuiranim parametrom

U literaturi postoji veliki broj modela video prometa koji se temelje na procesu rađanja i umiranja. Ovdje predstavljamo opći model iz kojeg se pažljivim odabirom parametara može izvesti bilo koji drugi sličan model.

Za svaki se video signal može utvrditi maksimalna i minimalna brzina: r_{min} i r_{max}. Markovljev model se svodi na utvrđivanje $N+1$ razina brzina koje su jednoliko raspodijeljene između r_{min} i r_{max}. Brzinu i-te razine određujemo pomoću izraza:

$$r(i) = r_{min} + \frac{r_{max} - r_{min}}{N} \cdot i.$$

Dijagram stanja Markovljevog modela s kontinuiranim parametrom je prikazan na slici 6.12.



Slika 6.12: Markovljev model s kontinuiranim parametrom

Kao što vidimo, intenzitet prijelaza u više stanje opada s rednim brojem stanja, a intenzitet prijelaza u niže stanje raste s rednim brojem stanja. Neka je $R(t)$, $t \geq 0$ pripadni Markovljev lanac. $R(t)$ odgovara brzini informacijskog toka koji izlazi iz video izvora u trenutku t. Neka je i $X(t)$ Markovljev lanac koji neposredno odgovara definiranom dijagramu stanja modela. Odnos ova dva procesa može se iskazati sljedećom relacijom:

$$R(t) = r_{min} + \frac{r_{max} - r_{min}}{N} \cdot X(t) = r_{min} + \frac{\Delta}{N} \cdot X(t). \tag{6.28}$$

Odgovarajuća matrica gustoća prijelaznih vjerojatnosti lanca $X(t)$ je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -N\lambda & N\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & -[(N-1)\lambda + \mu] & (N-1)\lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -[(N-2)\lambda + 2\mu] & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N\mu & -N\mu \end{bmatrix}$$

Postavljajući jednadžbe lokalne ravnoteže za $X(t)$ dobivamo:

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_0 N\lambda = \hat{p}_1\mu \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \hat{p}_0 \frac{N\lambda}{\mu} \\
\hat{p}_1(N-1)\lambda = \hat{p}_2 2\mu \quad &\Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \hat{p}_1 \frac{(N-1)\lambda}{2\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \frac{N!}{2!(N-2)!}\hat{p}_0 = \binom{N}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \hat{p}_0 \\
&\vdots \\
\hat{p}_i = \frac{N}{i}&\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \hat{p}_0, \quad i = 1, 2, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Stacionarnu vjerojatnost $\hat{p}_0$ dobivamo iz jednadžbe $\sum_{i=0}^{N} \hat{p}_i = 1$:

$$
\begin{aligned}
1 &= \hat{p}_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = \hat{p}_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \cdot 1^{N-i} = \hat{p}_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^N \quad \Rightarrow \\
\hat{p}_0 &= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N
\end{aligned}
$$

Stacionarne vjerojatnosti lanca $X(t)$ su:

$$
\hat{p}_i = \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N = \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{N-i}, \quad i = 0, \ldots, N. \tag{6.29}
$$

Budući da oba procesa $X(t)$ i $R(t)$ promatramo u stacionarnom stanju, ne moramo voditi računa o vremenu t, pa skraćeno pišemo redom X i R. Koristeći se funkcijom vjerojatnosti stanja možemo izračunati očekivanje i varijancu slučajne varijable R koja mjeri brzinu video signala. Ova varijabla je definirana izrazom

$$
R = r_{min} + \frac{\Delta}{N} \cdot X \tag{6.30}
$$

gdje je X slučajna varijabla stanja promatranog modela. Funkcijska ovisnost R o X je oblika

$$
R = a + bx
$$

što implicira

$$
\begin{aligned}
E[R] &= E[a + bx] = a + bE[x] \\
Var[R] &= Var[a + bx] = Var[a] + Var[bx] = b^2 Var[x].
\end{aligned}
$$

Očekivanje i varijancu dobivamo rješavanjem jednostavnih redova na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{i=0}^{N} i\hat{p}_i = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^N \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial}{\partial \frac{\lambda}{\mu}} \left[\sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i\right] = \ldots = N\frac{\lambda}{\lambda+\mu}
\end{aligned}
$$

$$
Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{N\lambda(N\lambda+\mu)}{(\lambda+\mu)^2} - \left[N\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right]^2 = \frac{N\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2}.
$$

Očekivanje i varijanca varijable R su:

$$
\begin{aligned}
E[R] &= r_{min} + (r_{max} - r_{min})\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\
Var[R] &= \frac{\lambda\mu}{N}\left(\frac{r_{max} - r_{min}}{\lambda+\mu}\right)^2 = \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} \cdot \frac{\Delta^2}{N}.
\end{aligned} \tag{6.31}
$$

Problem s kojim smo suočeni je određivanje vrijednosti parametara λ i μ za koje naš model dobro opisuje realni izvor. Pri tome se moramo koristiti vrijednostima koje smo dobili statističkom obradom mjernih uzoraka: aritmetičkom srednjom vrijednošću i standardnom devijacijom koje odgovaraju očekivanju i korijenu varijance. Koristeći se izrazima za očekivanje i varijancu možemo izračunati samo odnos λ/μ:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{E[R] - r_{min}}{r_{max} - E[R]}. \tag{6.32}$$

Da bismo odredili i pojedinačne vrijednosti parametara λ i μ moramo se poslužiti autokovarijacijskom funkcijom $Cov[r(t), r(t+\tau)] = Cov(\tau)$ koju dobivamo statističkom obradom mjernih rezultata. Dakako, potreban nam je analitički izraz za autokovarijancu [1]. Ukoliko bismo računali autokovarijancu slučajnog procesa $R(t)$ u stacionarnom stanju po definiciji, dobili bismo:

$$\begin{aligned}
Cov(\tau) &= E\left\{(R(t) - E[R]) \cdot (R(t+\tau) - E[R])\right\} = E\left\{R(t) \cdot R(t+\tau)\right\} - E[R]^2 = \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} \left(r_{min} + i \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot \left(r_{min} + j \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot P\left\{X(t) = i, \quad X(t+\tau) = j\right\} - E[R]^2 = \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} \left(r_{min} + i \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot \left(r_{min} + j \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot P\left\{X(t) = i \mid \ X(t+\tau) = j\right\} \hat{p}_i - E[R]^2 = \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{i=0}^{N} \left(r_{min} + i \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot \left(r_{min} + j \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot p_{ij}(\tau) \cdot \hat{p}_i - E[R]^2.
\end{aligned}$$

Izvod smo sproveli pretpostavljajući da je proces $R(t)$ u stacionarnom stanju. Problem koji je nastupio je nepoznatost vjerojatnosti $p_{ij}(\tau)$. Već smo rekli da u općem slučaju ne možemo odrediti analitički izraz za ove funkcije. Stoga moramo potražiti alternativno rješenje.

Ukoliko pogledamo ponovno dijagram stanja promatranog modela, uočavamo da je jednak modelu izvorišta grupe korisnika. Taj model je superpozicija N **neovisnih** binarnih Markovljevih modela s matricom gustoća prijelaznih vjerojatnosti

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

i konstante r_{min}. Neka $\tilde{R}(t)$ predstavlja binarni Markovljev lanac s matricom $\tilde{\mathbf{Q}}$. Razlikujemo dva stanja, stanje u kojem je pripadna brzina 0 i stanje u kojem je pripadna brzina $\tilde{R}(t) = \frac{\Delta}{N}$. Ukoliko uspijemo izračunati autokovarijacijsku funkciju za model s dva stanja, onda ćemo moći izračunati i autokovarijacijsku funkciju procesa $R(t)$. Budući da je kovarijanca zbroja neovisnih varijabli jednaka zbroju pojedinačnih kovarijanci:

$$Cov\left[\left(\sum_{i=0}^{N} Y_i(t)\right), \left(\sum_{i=0}^{N} Y_i(t+\tau)\right)\right] = \sum_{i=0}^{N} Cov\left[\left(Y_i(t)\right), \left(Y_i(t+\tau)\right)\right],$$

funkciju $Cov(\tau)$ ćemo izračunati prema izrazu:

$$Cov(\tau) = Cov\left[R(t), R(t+\tau)\right] = N \cdot Cov\left[\tilde{R}(t), \tilde{R}(t+\tau)\right] + Cov[r_{min}] = N \cdot Cov\left[\tilde{R}(t), \tilde{R}(t+\tau)\right].$$

Moramo još jedino izračunati kovarijancu od $\tilde{R}(t)$.

$$\begin{aligned}
Cov\left[\tilde{R}(t), \tilde{R}(t+\tau)\right] &= \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} \left(i \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot \left(j \cdot \frac{\Delta}{N}\right) \cdot p_{ij}(\tau) \cdot \hat{p}_i - E[\tilde{R}]^2 = \\
&= \left(\frac{\Delta}{N}\right)^2 p_{11}(\tau) \cdot \hat{p}_1 - E[\tilde{R}]^2.
\end{aligned}$$

Rješavajući Kolmogorovljevu jednadžbu $\mathbf{P}'(\tau) = \mathbf{P}(\tau) \cdot \tilde{\mathbf{Q}}$, dobivamo:

$$\hat{p}_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad \hat{p}_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad p_{11}(\tau) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)\tau}.$$

[1] Izvod autokovarijacijske funkcije nije nuždan za shvaćanje gradiva pa ga student može preskočiti.

Nadalje je:

$$E[\tilde{R}] = \hat{p}_1 \frac{\Delta}{N}$$

$$Cov\left[\tilde{R}(t), \tilde{R}(t+\tau)\right] = \left(\frac{\Delta}{N}\right)^2 \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)\tau}\right) \cdot \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \cdot \frac{\Delta}{\mu}\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{\Delta}{N}\right)^2 \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)\tau}$$

Konačno je:

$$Cov(\tau) = N \cdot Cov\left[\tilde{R}(t), \tilde{R}(t+\tau)\right] = \frac{\Delta^2}{N} \cdot \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} \cdot e^{-(\lambda+\mu)\tau} = Var[R] \cdot e^{-(\lambda+\mu)\tau}.$$

Vratimo li se izrazima (6.31) i (6.32) dobivamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E[R] - r_{min}}{r_{max} - r_{min}} \cdot \frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{Var[R]}{Cov(\tau)}\right) \\ \mu &= \frac{r_{max} - E[R]}{r_{max} - r_{min}} \cdot \frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{Var[R]}{Cov(\tau)}\right). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Dakle parametri λ i μ su u potpunosti određeni srednjom vrijednošću brzine, njenom varijancom i autokovarijacijskom funkcijom. Budući da je varijanca $Var[R]$ konstanta, a kovarijanca funkcija parametra τ, postavlja se pitanje mogućnosti dobivanja konstante iz izraza

$$\frac{1}{\tau} \ln\left(\frac{Var[R]}{Cov(\tau)}\right).$$

Dakako, nije za očekivati da će navedeni izraz konvergirati konstanti za svaki τ, pa time i same vrijednosti parametara λ i μ. Procjena parametara λ i μ zadire u problematiku mjerne statistike i na ovom mjestu se nećemo baviti ovim problemom.

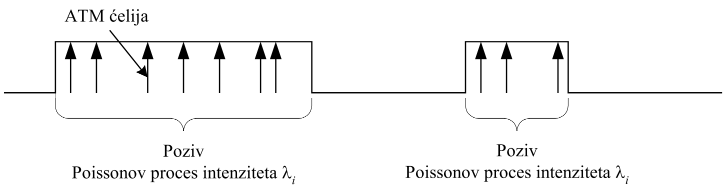
6.3.2 Poissonov proces moduliran Markovljevim procesom (*Markov Modulated Poisson Process* - MMPP)

Do sada smo govorili samo o sustavima posluživanja kod kojih vrijeme posluživanja nije bilo eksponencijalno raspodijeljeno. No, u većini primjena niti dolazni proces jedinica u sustav posluživanja nije Poissonov. Dolazni tok može biti različit: deterministički (D), s hipereksponencijalno raspodijeljenim međudolaznim vremenima, međudolaznim vremenima raspodijeljenim po Erlangovoj razdiobi ili neki drugi. Jedan od često korištenih modela dolaznog toka jedinica u sustav posluživanja je i Poissonov proces koji je moduliran Markovljevim procesom (*Markov Modulated Poisson Process* - MMPP). Ovaj proces se često koristi za modeliranje kumulativnog varijabilnog toka kakav je i informacijski tok koji potiče od video izvora s kompresijom slike.

Zamislimo tok ATM ćelija na nekom prijenosnom linku kojeg stvaraju videofonske aplikacije. Kada korisnik uspostavi video-telefonsku vezu, onda se za cijelo vrijeme trajanja te veze generiraju ATM ćelije po Poissonovom procesu (barem tako pretpostavljamo). Slika 6.13 prikazuje tok ćelija koji generira jedan videofon.

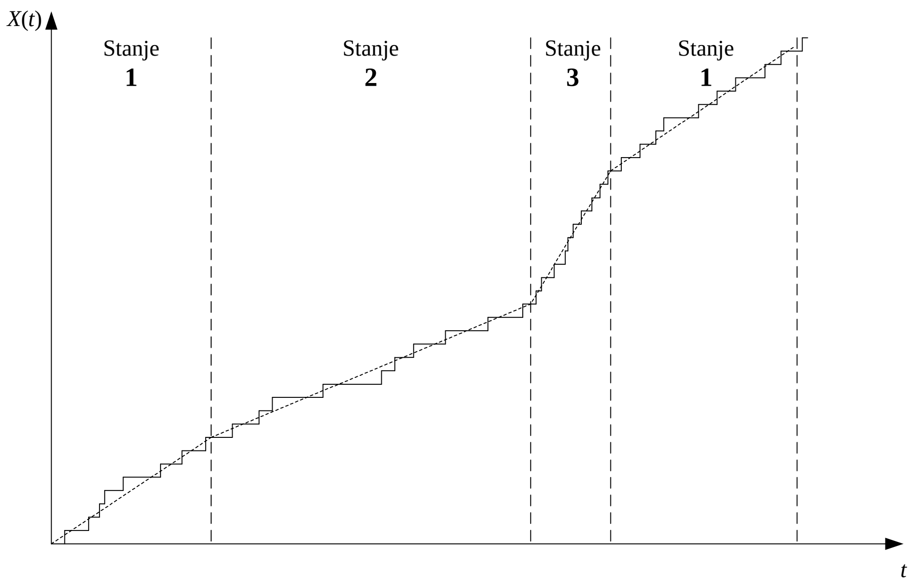
Pretpostavljamo da je trajanje poziva (razgovora) eksponencijalno raspodijeljeno, jednako kao i vrijeme između poziva. Ćelijski tok iz m videofona se multipleksira i šalje dalje u mrežu. Zanima nas tok koji je nastao superpozicijom tokova m pojedinačnih korisnika. On je izvrstan primjer prometnog toka koji se može opisati procesom MMPP.

Jasno je da je proces koji opisuje ukupni tok ćelija u određenom trenutku jednak zbroju Poissonovih procesa trenutno aktivnih poziva. Aktivnih poziva može biti od 0 do m. Budući da je zbroj Poissonovih procesa opet Poissonov proces čiji je intenzitet jednak zbroju intenziteta pribrojenih Poissonovih procesa, to je konačni proces Poissonov proces koji u vremenu mijenja svoj intenzitet. Vrijeme koje protekne između dvije uzastopne promjene intenziteta procesa je raspodijeljeno eksponencijalno. Taj proces zovemo



Slika 6.13: Tok ćelija koji generira videofon

Poissonov proces moduliran Markovljevim procesom. Određeni Markovljev proces (lanac) kontinuiran u vremenu mijenja (modulira) intenzitet Poissonova procesa pa odavde i slijedi naziv za MMPP. Kako bismo dobili uvid u ovaj proces, promotrimo trajektoriju nekog MMPP procesa koja je prikazana na slici 6.14.



Slika 6.14: Tipična trajektorija MMPP-a

U općem slučaju MMPP procesa Markovljev lanac koji modulira Poissonov ima m stanja $1, \ldots, m$. Svakom stanju i Markovljevog lanca pridružujemo određeni intenzitet λ_i. Markovljev lanac je opisan svojom matricom gustoća prijelaznih vjerojatnosti $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_1 & q_{11} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & -q_2 & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1} & q_{m2} & \cdots & -q_m \end{bmatrix} \tag{6.34}$$

gdje je naravno

$$q_i = \sum_{j=1; i \neq j}^{k} q_{ij} \tag{6.35}$$

Definirajmo dijagonalnu matricu $\mathbf{\Lambda}$ reda m koja na dijagonali ima intenzitete MMPP procesa.

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Poznavanje (6.34) i (6.36) je dovoljno za opis MMPP-a u stacionarnom stanju. To stanje proces postiže kada je parametar stanja procesa $t \gg 0$.

IPP i SPP

Promotrimo sada MMPP s dva stanja. Ako je intenzitet bilo kojeg od stanja jednak 0, $\lambda_{1/2} = 0$, onda taka proces zovemo prekinuti Poissonov proces (IPP - *Interrupted Poisson Process*). Ukoliko su oba intenziteta veća od 0 onda se takav proces zove izmjenjivi ili komutirani Poissonov proces (SPP - *Switched Poisson Process*). Definirajuće matrice ovog procesa su:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -q_1 & q_1 \\ q_2 & -q_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Rješavanjem Kolmogorovljeve jednadžbe dobivamo rješenje za vektor stacionarnih vjerojatnosti:

$$\hat{\mathbf{p}} = \left[\frac{q_2}{q_1 + q_2} \quad \frac{q_1}{q_1 + q_2} \right]$$

6.4 Modeli mreža s komutacijom kanala

U prvom poglavlju upoznali smo nekoliko paketskih tehnologija koje u cilju garantiranja kvalitete veze vrše uspostavu veze s kraja na kraj. Jedan način garantiranja kvalitete usluge je rezervacija dovoljno širokog prijenosnog pojasa s kraja na kraj. Svaka usluga zahtijeva svoju širinu prijenosnog pojasa. Osnovni problem pri projektiranju takvih mreža je procjena prijenosnih kapaciteta. Kapacitet se projektira tako da vjerojatnost blokiranja uspostave poziva za svaku od usluga ne bude veći od neke unaprijed zadane vrijednosti. Postupci izračunavanja kapaciteta u mreži su dosta složeni. U obzir se uzima algoritam usmjeravanja (fiksni ili dinamički), zaštitni mehanizmi, kao i dnevno, tjedno i sezonsko maksimalno opterećenje (glavni prometni sat) u različitim dijelovima mreže. Kapaciteti moraju biti tako odabrani da u slučaju ispada jedne grane ili čvora u mreži ostatak mreže može preuzeti promet s oštećenog dijela.

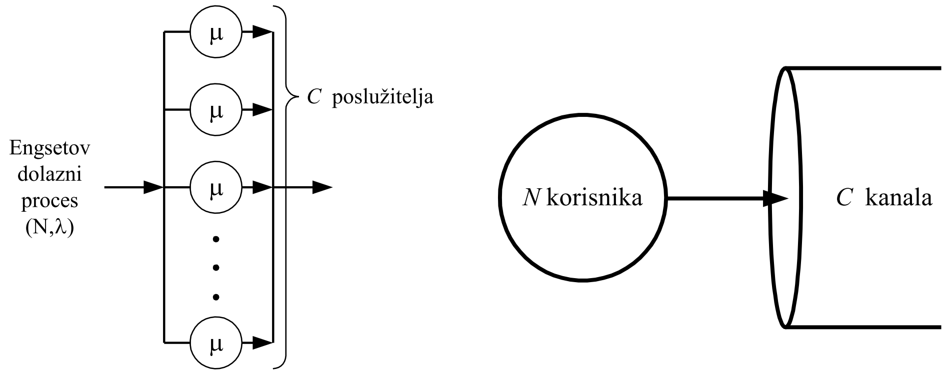
Nadalje ćemo se upoznati samo s osnovnim modelima blokiranja poziva u mreži. Počet ćemo s modelima jednouslužnih (telefonskih) mreža s usamljenim resursom (Engsetov i Erlangov model) i kasnije to proširiti na višeuslužne mreže s jednim ili više resursa (Kaufman-Roberts, Wilkinson).

6.4.1 Engsetov model

Promatrajmo resurs kapaciteta C kanala. Svaki kanal predstavlja poslužitelj i svih C kanala rade u paraleli. U sustav pristižu zahtjevi za uspostavom poziva. Vremena trajanja poziva (*call holding time*) su raspodijeljena po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom $1/\mu$ (slika 6.15).

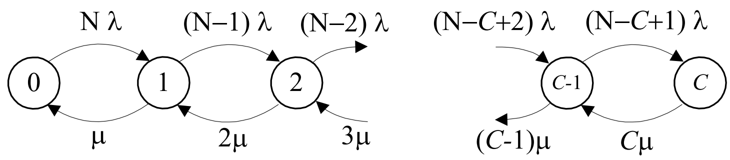
Izvorište procesa dolazaka zahtijeva za uspostavu poziva je grupa od N korisnika. Korisnici su međusobno neovisni i ne međusobno se ne nazivaju. Engsetov model temelji se na pretpostavci da je intenzitet dolazaka zahtijeva proporcionalan broju neaktivnih korisnika. Ukoliko $i \leq C$ korisnika ostvaruje poziv intenzitet dolaska zahtijeva za uspostavom poziva je $\lambda(N - i)$. Dakle, dolazni proces je funkcija stanja samog resursa. Parametri λ i μ odgovaraju redom intenzitetima prijelaza korisnika u aktivno stanje, odnosno povratka u neaktivno stanje (binarni Markovljev lanac). Omjer ova dva parametra zovemo ponuđeni promet po korisniku:

$$a = \frac{\lambda}{\mu} \quad [Erl].$$



Slika 6.15: Engsetov poslužiteljski sustav

Ponuđeni promet izražavamo u jedinici **erlang**. U telefonskim mrežama se za ovaj parametar obično uzima vrijednost 0.1 erl u glavnom prometnom satu. Dijagram stanja opisanog Engsetovog poslužiteljskog sustava je prikazan na slici (slika 6.16)



Slika 6.16: Dijagram stanja Engsetovog modela

Postavljajući i rješavajući C jednadžbi lokalne ravnoteže jednostavno dobivamo opći izraz za stacionarne vjerojatnosti stanja[2].

$$\hat{p}_i = \frac{\binom{N}{i} a^i}{\sum_{j=0}^{C} \binom{N}{j} a^j} \tag{6.37}$$

U slučaju Engsetovog modela, vjerojatnost blokiranja poziva **nije jednaka** vjerojatnosti da se model nalazi u stanju blokiranja. Vjerojatnost blokiranja poziva jednaka je vjerojatnosti da se sustav nalazi u stanju blokiranja kada pristigne zahtjev za uspostavu poziva. Za slučaj Engsetovog modela, vjerojatnost da se sustav nalazi u stanju i kada pristigne zahtjev za uspostavom poziva jednaka je:

$$\hat{p}_i^{'} = \hat{p}_{i-1}. \tag{6.38}$$

Stoga je u Engsetovom modelu vjerojatnost blokiranja poziva jednaka:

$$B_{Engset}(N, a, C) = \frac{\binom{N}{C-1} a^{C-1}}{\sum_{j=0}^{C-1} \binom{N}{j} a^j}. \tag{6.39}$$

Pri izvodu vjerojatnosti blokiranja pretpostavili smo da korisnici koji su blokirani ne biraju ponovno odmah, nego čekaju određeno (dulje) vrijeme. Važno je napomenuti da ovaj efekt ima utjecaj na povećanje ukupnog ponuđenog prometa A. Ako ne bismo uzimali u obzir ovaj efekt, ponuđeni promet bio bi jednak

[2]Za vježbu provedite izvod i provjerite konačan izraz

omjeru efektivnog dolaznog intenziteta λ_{ef} i inverza prosječnog vremena trajanja poziva. Efektivni intenzitet možemo dobiti na sljedeći način:

$$\lambda_{ef} = \sum_{i=0}^{N} \lambda(N-i)\tilde{p}_i.$$

$\tilde{p}_i$ je stacionarna vjerojatnost Engsetovog modela u slučaju $C = N$. Samo pod tim uvjetom će se obaviti sav ponuđeni promet. Uvrštavanjem dobivamo

$$\lambda_{ef} = N \cdot \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu},$$

i ponuđeni promet je:

$$A = \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = N \cdot \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \quad [Erl]. \tag{6.40}$$

Obavljeni promet je jednak postotku uspješno realiziranih zahtijeva za uspostavom poziva pomnoženim s ponuđenim prometom:

$$L = A \cdot [1 - B_{Engset}(N, a, C)] \quad [Erl]. \tag{6.41}$$

U praksi se dosta teško određuje vrijednost parametra A, i on se često određuje iz postotka nerealiziranih poziva i obavljenog prometa, koristeći određene statističke metode. Važno je napomenuti da se tako izmjeren ponuđeni promet odnosi na pravi ponuđeni promet A', budući da je u njemu sadržano povećanje u odnosu na A zbog efekta ponovljenog biranja nakon blokade poziva.

Engsetov model se zbog svoje složenosti rjeđe upotrebljava u praksi. Uzrok tome je prvenstveno taj što intenzitet dolaska zahtijeva za uspostavu poziva nije konstantan, što znatno posložnjuje bilo kakvu ozbiljniju analizu. Međutim, Engsetov model u odnosu na Erlangov model točnije opisuje realan sustav kada je broj korisnika N malen.

6.4.2 Erlangov model - Erlangova B formula, aproksimacija i projektiranje kapaciteta

Erlangov model je formalno prezentiran u prethodnom poglavlju. To je model blokiranja poziva s C poslužitelja kod kojeg je dolazni proces Poissonov proces intenziteta λ - M/M/C/C. **Ponuđeni promet** (*average traffic load*) računamo prema izrazu:

$$A = \frac{\lambda}{\mu} \quad [Erl] \tag{6.42}$$

Ponuđeni promet jednak je zbroju prometa ponuđenih od svih korisnika koji svoj poziv uspostavljaju kroz promatrani resurs (link). Budući da je sveukupni dolazni proces Poissonov intenziteta λ, onda je on jednak zbroju Poissonovih procesa koji potječu od pojedinih korisnika ili skupina korisnika. Stoga je i intenzitet dolaznog Poissonovog procesa jednak zbroju intenziteta pojedinih pritoka:

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots$$

Pretpostavimo li da je prosječno vrijeme razgovora jednako za sve korisnike, obje strane možemo podijeliti s μ i dobivamo:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots \quad [Erl]. \tag{6.43}$$

Dakle, ukupni ponuđeni promet jednak je zbroju ponuđenih prometa pojedinih pritoka.

Budući da je resurs ograničenog kapaciteta (C), određeni zahtijevi za uspostavom poziva bit će blokirani. Vjerojatnost blokiranja daje nam Erlangova B funkcija gubitaka[3] (*Erlang loss function*):

$$B(C, A) = \frac{\frac{A^C}{C!}}{\sum_{j=0}^{C} \frac{A^j}{j!}}. \tag{6.44}$$

[3] Agner Krarup Erlang, Danski matematičar, objavio je ovu formulu u svom radu "Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges", Elektrotkeknikeren, vol 13, 1917.

A je ponuđeni promet izražen u jedinici **erlang**, a C je cijeli broj koji odgovara broju poslužitelja (kanala) u resursu - kapacitet resursa. Oznaka $B(C, A)$ je oznaka za Erlang B funkciju u američkoj literaturi. U Europskoj literaturi je ekvivalentna oznaka $E_{1,C}(A)$. Nadalje ćemo zbog jednostavnosti koristiti oznaku $B(C, A)$.

Već ranije smo analizirali proces brojanja kod kojeg se iz Poissonovog toka događaja intenziteta λ ispuštaju događaji s vjerojatnošću p. Pokazali smo da je novi tok također Poissonov tok intenziteta $(1-p)\lambda$. Stoga je dolazni proces koji se stvarno poslužuje u poslužiteljima resursa Poissonov proces intenziteta

$$\lambda' = \lambda \cdot [1 - B(C, A)].$$

Podijelimo li obje strane ovog izraza s μ, dobivamo:

$$L = A \cdot (1 - B(C, A)) \quad [Erl]. \tag{6.45}$$

Parametar L zovemo **obavljeni promet** (*carried load*). Nadalje vrijedi:

$$L = \sum_i A_i \left[1 - B\left(C, \sum_i A_i\right)\right]. \tag{6.46}$$

Preljevni ili izgubljeni promet (*overflow/loss traffic*) definiramo kao razliku ponuđenog i obavljenog prometa

$$Y = A - L = A \cdot B(C, A) \quad [Erl]. \tag{6.47}$$

Y je promet koji se trajno gubi ili se preusmjerava alternativnim rutama kroz mrežu.

Osnovni problem analize telefonskog prometa je procjena stvarnog ponuđenog prometa. Zbog efekta ponovnog biranja, ponuđeni promet raste s vjerojatnošću blokiranja poziva. Ako je vjerojatnost blokiranja poziva velika, veliki broj blokiranih korisnika će uskoro nakon blokiranja ponovno uputiti zahtjev za uspostavom poziva. Što je vjerojatnost blokiranja veća, sve će veći broj korisnika ponovno pozivati i time će se pravi ponuđeni promet povećavati. Međutim, taj ponuđeni promet nije i pravi ponuđeni promet jer se djelomično stvara od uzastopnog ponovnog biranja blokiranih korisnika. Zovemo ga fiktivni ponuđeni promet A'. Računamo ga samo za relativno velike vjerojatnosti blokiranja. Budući da teško možemo predvidjeti ponašanje korisnika nakon blokiranja, A' najčešće procjenjujemo iz izmjerenog obavljenog prometa L. Postoji nekoliko načina procjene vrijednosti A'. Procjene se temelje na različitim pretpostavkama o načinu ponašanja korisnika. Ovdje ćemo proučiti najjednostavniju analizu.

Neka je E **izmjereni** postotak (vjerojatnost) blokiranja poziva, a L **izmjereni** obavljani promet. Fiktivni ponuđeni promet A' će zasigurno biti veći od L i manji od stvarnog ponuđenog prometa A. Pretpostavimo da je stvarni ponuđeni promet približno jednak L (zbog male vjerojatnosti blokiranja). Preljevni promet ne računajući ponovno nazivanje je zasigurno jednak $L \cdot E$, što znači da je ponuđeni promet $A = L(1 + E)$. Pretpostavimo sada da blokirani korisnici ponovno biraju sve dok ne ostvare poziv. Oni generiraju dodatni (fiktivni) promet. Ovom prometu se dodaje novi promet od korisnika koji do sada nisu nazivali. Pri prvom pokušaju poziva preljevni promet je bio $L \cdot E$. Pri drugom pokušaju jednak je prometu koji je ostao blokiran iz prvog pokušaja plus novi blokirani promet: $L \cdot E + L \cdot E \cdot E$. Budući da korisnici ne odustaju od uspostave poziva, ovaj postupak možemo nastaviti do beskonačnosti. Dobivamo da je fiktivni ponuđeni promet:

$$A' = L\left(1 + E + E^2 + E^3 + \ldots\right) = \frac{L}{1 - E} \quad [Erl]. \tag{6.48}$$

Dobiveni izraz je u skladu s izrazom (6.45). To nam omogućuje da na jednostavan način odredimo ponuđeni promet koji moramo predati Erlangovom modelu blokiranja kako bismo za obavljeni promet dobili L, dakle:

$$L = A' \left[1 - B(C, A')\right]. \tag{6.49}$$

Dakako, ovaj izraz vrijedi samo uz uvedenu pretpostavku ponašanja blokiranih korisnika. Ostale modele nećemo proučavati zbog njihove prevelike složenosti. Treba samo napomenuti da se ti modeli temelje na različitim pretpostavkama o razdiobama vremena ponovnog nazivanja blokiranih korisnika.

Erlangov B model je jednostavan, no zbog složenosti izraza za vjerojatnost blokiranja zadaje dosta problema. Najveći problem je nemogućnost jednostavnog izračunavanja nazivnika i nemogućnost pronalaska inverza funkcije gubitaka.

Jedan od načina olakšavanja izračunavanja vrijednosti $B(C, A)$ je rekurzivni izraz Erlang B formule kojeg ovdje dajemo bez izvoda:

$$B(C, A) = \frac{1}{1 + \dfrac{C}{A \cdot B(C-1, A)}}. \tag{6.50}$$

Daljnja olakšanja računanja Erlang B formule se svode na aproksimacije. Jedna od aproksimacija je R. Franks-ova aproksimacija koja funkciju $B(C, A)$ aproksimira funkcijom $\tilde{B}_\nu(C, A)$:

$$\tilde{B}_\nu(C, A) = \frac{1}{\displaystyle\sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{C!}{(C-j)!} A^{-j}}. \tag{6.51}$$

Vrijednost parametra ν se izabire tako da je zadovoljeno

$$\frac{C!}{(C-\nu)!} A^{-\nu} \leq \eta, \quad \eta > 0. \tag{6.52}$$

Uz tako izabranu vrijednost ν, pogreška aproksimacije je:

$$\tilde{B}_\nu(C, A)(1-\eta) \leq B(C, A) \leq \tilde{B}_\nu(C, A). \tag{6.53}$$

Iako ova aproksimacija znatno olakšava izračunavanje Erlangove funkcije gubitaka, još uvijek je nepraktična za velike vrijednosti parametra C. Na sreću, razvijena je kontinuirana aproksimacija koja ima jednaku složenost izračunavanja za sve vrijednosti A i C.

Aproksimacija kontinuiranom dvodimenzionalnom funkcijom ima oblik:

$$B(C, A) \approx 1 \Bigg/ \left(a_0(d)\sqrt{C} + a_1(d) + \frac{a_2(d)}{\sqrt{C}} \right) \tag{6.54}$$

gdje je:

$$d = \frac{A - C}{\sqrt{C}} \tag{6.55}$$

$$\begin{aligned} a_0(d) &= e^{\frac{1}{2}d^2} \int_d^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2} du = e^{\frac{d^2}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot Erfc\left[\frac{d}{\sqrt{2}}\right] \\ a_1(d) &= \frac{2}{3} + \frac{d^2}{3} - \frac{d^3}{3} \cdot a_0(d) \\ a_2(d) &= -\frac{d^5}{18} - \frac{7}{36}d^3 + \frac{d}{12} + \left(\frac{d^6}{18} + \frac{d^4}{4} + \frac{1}{12}\right) a_0(d) \end{aligned} \tag{6.56}$$

Dakako, za funkciju $Erfc[x]$ moramo koristiti njenu aproksimaciju. Budući da aproksimacije često imaju izuzetno veliki broj koeficijenata, jasno da aproksimaciju funkcije $B(C, A)$ ne možemo izračunati bez pomoći računala. Stoga za izračunavanje vrijednosti Erlangove B funkcije možemo koristiti tablicu koeficijenata 6.1. Prvo izračunamo vrijednost koeficijenta d i iz tablice iščitamo najbliže vrijednosti za koeficijente a_i.

Budući da je aproksimacijska funkcija kontinuirana i neprekidna, ona je i diferencijabilna. Deriviranjem funkcije $B(C, A)$ po parametru C dobivamo izraz

$$\frac{\partial B(C, A)}{\partial C} \approx -\frac{B(C, A)^2}{2\sqrt{C}} \left(a_0 - \frac{a_2}{C}\right) - \frac{C + A}{2C} B(C, A) \left[\frac{C}{A} - 1 + B(C, A)\right]. \tag{6.57}$$

To je ujedno i najvažniji rezultat ove aproksimacije. Pronalaskom derivacije Erlangove B funkcije korak smo bliže rješenju problema proračuna minimalnog kapaciteta C koji uz zadani ponuđeni promet A garantira vjerojatnost blokiranja manju ili jednaku p_B. Prije nego razradimo i ovaj problem, na jednostavnom primjeru demonstrirajmo korištenje tablice 6.1.

Tablica 6.1: Koeficijenti za izračunavanje $B(C, A)$ i $\partial B(C, A)/\partial C$

d	$a_0(d)$	$a_1(d)$	$a_2(d)$		d	$a_0(d)$	$a_1(d)$	$a_1(d)$
-4.0	7471.92	159407.	$2.17917 \cdot 10^6$		0.0	1.253310	0.666667	0.1044430
-3.9	5033.6	99535.1	$1.2756 \cdot 10^6$		0.1	1.159260	0.669614	0.1047730
-3.8	3425.03	62651.6	751801.		0.2	1.075940	0.677131	0.1051900
-3.7	2353.9	39749.3	446061.		0.3	1.001840	0.687650	0.1051710
-3.6	1633.99	25416.8	266392.		0.4	0.935667	0.700039	0.1044930
-3.5	1145.63	16377.6	160110.		0.5	0.876364	0.713485	0.1031090
-3.4	811.271	10633.2	96828.7		0.6	0.823028	0.727409	0.1010650
-3.3	580.248	6955.08	58911.7		0.7	0.774894	0.741404	0.0984539
-3.2	419.159	4582.42	36051.5		0.8	0.731314	0.755189	0.0953865
-3.1	305.812	3040.68	22185.8		0.9	0.691734	0.768575	0.0919742
-3.0	225.335	2031.68	13726.4		1.0	0.655680	0.781440	0.0883198
-2.9	167.682	1366.67	8536.02		1.1	0.622744	0.793709	0.0845138
-2.8	126.012	925.355	5334.02		1.2	0.592574	0.805344	0.0806327
-2.7	95.628	630.512	3348.29		1.3	0.564867	0.816329	0.0767391
-2.6	73.2784	432.234	2110.67		1.4	0.539358	0.826668	0.0728830
-2.5	56.6963	298.043	1335.65		1.5	0.515816	0.836374	0.0691034
-2.4	44.2877	206.664	848.137		1.6	0.494040	0.845471	0.0654296
-2.3	34.9234	144.068	540.202		1.7	0.473853	0.853986	0.0618828
-2.2	27.7973	100.942	344.95		1.8	0.455101	0.861950	0.0584778
-2.1	22.3296	71.0681	220.718		1.9	0.437647	0.869393	0.0552238
-2.0	18.1002	50.2673	141.432		2.0	0.421369	0.876349	0.0521261
-1.9	14.8026	35.7136	90.7006		2.1	0.406161	0.882848	0.0491862
-1.8	12.2111	25.4851	58.1719		2.2	0.391927	0.888921	0.0464033
-1.7	10.1589	18.2669	37.2839		2.3	0.378582	0.894597	0.0437746
-1.6	8.52140	13.1546	23.8598		2.4	0.366051	0.899905	0.0412960
-1.5	7.20514	9.52245	15.2321		2.5	0.354265	0.904869	0.0389621
-1.4	6.13944	6.93554	9.6918		2.6	0.343164	0.909516	0.0367669
-1.3	5.27051	5.08977	6.14094		2.7	0.332693	0.913867	0.0347041
-1.2	4.55713	3.77157	3.87239		2.8	0.322803	0.917944	0.0327670
-1.1	3.96752	2.83026	2.42994		2.9	0.313449	0.921767	0.0309489
-1.0	3.47705	2.15902	1.51885		3.0	0.304590	0.925354	0.0292432
-0.9	3.06646	1.68182	0.948605		3.1	0.296191	0.928722	0.0276431
-0.8	2.72063	1.34432	0.596028		3.2	0.288218	0.931887	0.0261425
-0.7	2.42763	1.10756	0.381586		3.3	0.280641	0.934863	0.0247351
-0.6	2.17795	0.943479	0.254027		3.4	0.273433	0.937664	0.0234151
-0.5	1.96402	0.831834	0.180436		3.5	0.266568	0.940302	0.0221769
-0.4	1.77973	0.757968	0.139786		3.6	0.260023	0.942789	0.0210152
-0.3	1.62017	0.711248	0.118745		3.7	0.253778	0.945134	0.0199250
-0.2	1.48132	0.683950	0.108948		3.8	0.247812	0.947348	0.0189017
-0.1	1.35993	0.670453	0.105223		3.9	0.242109	0.949439	0.0179407
0.0	1.25331	0.666667	0.104443		4.0	0.236652	0.951416	0.0170380

Izračunati $d = \dfrac{A - C}{\sqrt{C}}$ i odrediti koeficijente a_0, a_1 i a_2.

$$B(C, A) \approx \frac{1}{a_0\sqrt{C} + a_1 + a_2/\sqrt{C}}$$

$$\frac{\partial B(C, A)}{\partial C} \approx -\frac{B(C, A)^2}{2\sqrt{C}}\left(a_0 - \frac{a_2}{C}\right) - \frac{C + A}{2C} B(C, A)\left[\frac{C}{A} - 1 + B(C, A)\right]$$

PRIMJER 6.4 Promet ponuđen jednom 30-kanalnom prijenosnom sustavu je $A = 36.57$ Erl. Izračunajmo vjerojatnost blokiranja poziva.

Koristeći neposredno Erlang-B funkciju u svom izvornom obliku za vjerojatnost blokiranja dobivamo:

$$p_B = \frac{A^C/C!}{\sum\limits_{i=0,C} A^i/i!} = 0.245977$$

uz $C = 30$. Pokušajmo sada izračunati ovu vjerojatnost aproksimacijskom funkcijom.

$$d = \frac{36.57 - 30}{\sqrt{30}} = 1.1995 \approx 1.2$$

Iz tablice čitamo da su vrijednosti koeficijenata

$$a_0 = 0.592574, \quad a_1 = 0.805344, \quad a_2 = 0.0806327.$$

Uvrštavajući njihove vrijednosti u aproksimacijsku funkciju dobivamo:

$$p_B \approx 1 \Bigg/ \left(a_0\sqrt{C} + a_1 + \frac{a_2}{\sqrt{C}} \right) = 1 \Bigg/ \left(0.59\sqrt{30} + 0.8 + \frac{0.081}{\sqrt{30}} \right) = 0.245915.$$

Greška koju uvodi aproksimacija je:

$$\Delta p_B = 62.43 \cdot 10^{-6}$$

ili 0.025%, što je zanemariva pogreška.

PRIMJER 6.5 Postavimo isti problem na drugi način. Pretpostavimo da nam je zadana maksimalna vjerojatnost blokiranja $p_B = 0.01$. Pokušajmo odrediti koliki minimalni prijenosni kapacitet C (izražen u broju kanala) nam je potreban da zadovoljimo postavljeni kriterij. Jedna od mogućnosti je da se koristimo iterativni postupak Newtonovom metodom tangente.

Pogledajmo graf na slici 6.17. Prikazan je graf aproksimacijske funkcije $B(C, A)$ za $A = 36.57$. Isprekidani pravac prikazuje ciljanu maksimalnu vjerojatnost blokiranja $p_B = 0.01$. C koordinata točke gdje se križaju pravac $p_B = 0.01$ i graf funkcije $B(C, A)$ predstavlja traženi minimalni kapacitet $\tilde{C}$ za kojeg je vjerojatnost blokiranja $p_B = 0.01$.

Iterativni postupak traženja vrijednosti $\tilde{C}$ Newtonovom metodom tangente se sastoji od konstrukcije tangente u nekoj proizvoljnoj točki koja je zasigurno manja od $\tilde{C}$. To je početna točka postupka - C_0. Bez dokaza tvrdimo da je

$$A < \tilde{C},$$

gdje je A ponuđeni promet. Stoga za početnu točku uzmimo $C_0 = A$. Cilj koraka metode tangente je pronaći točku koja je bliže vrijednosti $\tilde{C}$ od C_0. Tu točku dobivamo kao C koordinatu točke križanja tangente funkcije $B(C, A)$ u točki $C_0 = A$ i pravca $p_B = 0.01$. Tu točku označimo s C_1. Elementarnom matematikom dobivamo da je

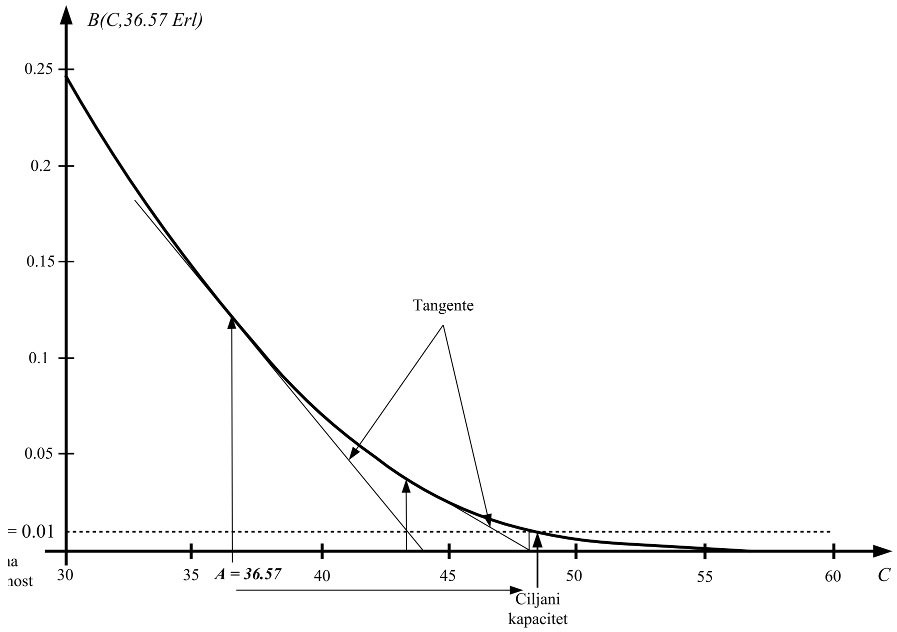
$$C_1 = \frac{p_B - B(C_0, A)}{\left.\frac{\partial B(C,A)}{\partial C}\right|_{C_0}} + C_0.$$

U općem slučaju vrijedi

$$C_i = \frac{p_B - B(C_{i-1}, A)}{\left.\frac{\partial B(C,A)}{\partial C}\right|_{C_{i-1}}} + C_{i-1}. \tag{6.58}$$

$$\tilde{C} = \lim_{i \to \infty} C_i \tag{6.59}$$

Koristeći se izrazom (6.58) uz početni uvjet $C_0 = A$ dobivamo vrijednost $\tilde{C}$. Međutim, po (6.58) ispada da bismo ovaj iterativni postupak trebali ponavljati do beskonačno. Međutim, postupak jako brzo



Slika 6.17: Newtonova metoda tangente

konvergira, nakon nekoliko koraka. Jedan od načina određivanja koraka završetka postupka je pomoću definicije tolerancije ΔC. Ako vrijedi:

$$\Delta C > \frac{p_B - B(C_{i-1}, A)}{\left.\dfrac{\partial B(C,A)}{\partial C}\right|_{C_{i-1}}}, \tag{6.60}$$

onda postupak završavamo u i-tom koraku i pogreška koju smo napravili pri proračunu je

$$\tilde{C} - C_i \leq \Delta C.$$

Riješimo problem s početka. Zadana nam je maksimalna vjerojatnost blokiranja $p_B = 0.01$. $A = C_0 = 36.57$ Erl. Za toleranciju možemo izabrati $\Delta C = 1$, dakle maksimalna pogreška koju želimo postići je 1 kanal. Uvrštavajući zadane vrijednosti u (6.58) dobivamo:

$$C_1 = \frac{0.01 - B(36.57, 36.57)}{\left.\dfrac{\partial B(C, 36.57)}{\partial C}\right|_{36.57}} + 36.57 = \frac{0.01 - 0.121}{-0.01616} + 36.57 = 43.44.$$

Razlika $C_1 - C_0 > \Delta C = 1$ pa nastavljamo postupak. U sljedećem koraku dobivamo:

$$C_2 = 46.801.$$

Razlika $C_2 - C_1 > \Delta C = 1$ pa nastavljamo postupak. U trećem koraku dobivamo:

$$C_3 = 48.2524.$$

Razlika $C_3 - C_2 > \Delta C = 1$. U četvrtom koraku dobivamo:

$$C_4 = 48.573.$$

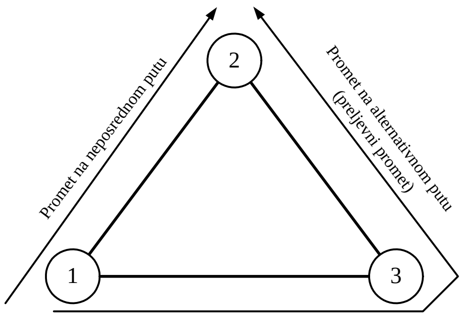
Razlika $C_4 - C_3 < \Delta C = 1$, pa smo završili postupak. Naravno, budući da broj kanala mora biti cijeli broj, kao konačno rješenje moramo izabrati prvu veću cjelobrojnu vrijednost od $C_4 = 48.573$. Dakle, kapacitet prijenosnog sustava treba biti:

$$C = 49 \ \text{ kanala.}$$

Vjerojatnost blokiranja za kapacitet $C = 49$ je $B(49, 36.57) = 0.00862261 < 0.01 = p_B$. Proračun je izvršen korektno.

6.4.3 Preljevni promet

Za topologiju telefonske mreže je tipično da između svakog para čvorova postoji grana koja ih povezuje. U klasičnim implementacijama, iskoristivost mreže se može povećati ukoliko se uvede mogućnost alternativnog usmjeravanja u mreži. Ukoliko neki poziv nije moguće uspostaviti na neposrednom putu između



Slika 6.18: Mreža s alternativnim usmjeravanjem i preljevni promet

dva čvora, onda se poziv pokušava uspostaviti preko drugog puta duljine dvije grane, odnosno preko tzv. tandemskog čvora. Na slici 6.18 pozivi između čvorova 1 i 2 koji se ne mogu uspostaviti na neposrednom putu se uspostavljaju preko tandemskog čvora 3. Postoji više vrsta alternativnog usmjeravanja. Ovdje promatramo samo fiksno alternativno usmjeravanje. U tom slučaju za svaki par čvorova postoji samo jedan rezervni put za uspostavu poziva.

U mreži s fiksnim alternativnim usmjeravanjem svaka grana nosi promet koji se obavlja neposredno između dva čvora i preljevni promet iz jednog ili više parova čvorova. Stoga je prilikom dimenzioniranja kapaciteta grane potrebno uzeti u obzir i preljevni promet.

Za razliku od ponuđenog prometa čija je varijanca jednaka očekivanju, preljevni promet ima znatno veću varijancu od očekivanja. Također, obavljeni promet ima manju varijancu od očekivanja.

Dakle, preljevni promet nije Poissonov proces. To je promet za kojeg je omjer varijance i očekivanja (*peackedness*) veći od 1. Očekivanje i varijancu preljevnog prometa za kanal kapaciteta C i ponuđeni promet a dobivamo pomoću Riordanovih formula:

$$\alpha = E[N] = a \cdot B(C, a), \tag{6.61}$$

$$v = Var[N] = \alpha \cdot \left(1 - \alpha + \frac{a}{C + 1 - a + \alpha}\right). \tag{6.62}$$

Postavlja se pitanje kako izračunati vjerojatnost blokiranja ne-Poissonovog prometa s varijancom v i očekivanjem α koji je ponuđen kanalu kapaciteta C. Često korištena metoda u ovu svrhu je Wilkinsonova metoda, poznata i pod nazivom *Equivalent Random Theory*.

Wilkinsonova metoda polazi od pretpostavke da je svaki promet s varijancom v i očekivanjem α preljevni promet nekog fiktivnog kanala kapaciteta C^* kojem je ponuđen promet a^*. Vrijednosti parametara fiktivnog kanala proizlaze iz jednadžbi koje se dobivaju izjednačavanjem očekivanja i varijance promatranog prometa i preljevnog prometa fiktivnog kanala:

$$\alpha = B(C^*, a^*)$$

$$v = \alpha \cdot \left(1 - \alpha + \frac{a^*}{C + 1 - a^* + \alpha}\right).$$

Ovaj sustav jednadžbi moguće je točno riješiti samo numerički. Nakon pronalaska parametara a^* i C^*, vjerojatnost blokiranja se približno određuje pomoću izraza:

$$B = \frac{a^*}{\alpha} \cdot B(C^* + C, a^*). \tag{6.63}$$

Rješavanje sustava jednadžbi pri izračunavanju parametara C^* i a^* je mukotrpno i numerički zahtjevno. Stoga se u praksi koriste različite aproksimacije. Najpoznatija je Rappova aproksimacija:

$$\begin{aligned} a^* &= v + 3z(z-1), \\ C^* &= \frac{a^*(\alpha+z)}{\alpha+z-1} - \alpha - 1, \end{aligned} \tag{6.64}$$

gjde je $z = \frac{v}{\alpha}$.

U slučaju kada je kanalu ponuđeno više prometa različitih varijanci i očekivanja, onda se po Wilkinsonovoj metodi takav slučaj aproksimira jednim prometnim tokom s očekivanjem i varijancom jednakim zbroju pojedinih očekivanja i varijanci tokova:

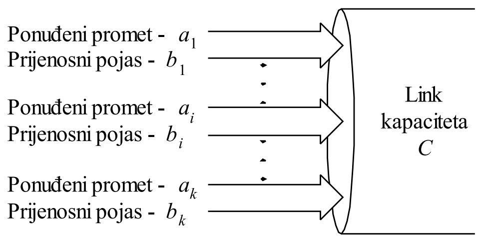
$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_i \alpha_i, \\ v &= \sum_i v_i. \end{aligned} \tag{6.65}$$

6.4.4 Blokiranje poziva usamljenog kanala u višeuslužnoj mreži

Promatrajmo usamljeni kanal kapaciteta C. Kapacitet je cjelobrojni višekratnik neke osnovne brzine prijenosa ϵ. Postoji k usluga. Svaka usluga postavlja zahtjeve za uspostavom poziva. Zahtjevi za uspostavom poziva usluge i pristižu po Poissonovom procesu intenziteta λ_i i traže rezervaciju b_i brzine prijenosa kroz kanal. b_i je također cjelobrojni višekratnik osnovne brzine prijenosa ϵ. Trajanje uspostavljenog poziva usluge i raspodijeljeno je po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom μ_i. Ponuđeni promet usluge i definiran je umnoškom intenziteta dolaska zahtijeva i srednjim vremenom trajanja poziva:

$$a_i := \frac{\lambda_i}{\mu_i}. \tag{6.66}$$

Opisani model prikazan je na slici 6.19.



Slika 6.19: Model blokiranja poziva u višeuslužnoj mreži

Parametar koji nas zanima u ovom modelu je vjerojatnost blokiranja uspostave poziva P_{B_i} za uslugu i. Ovaj problem smo već analizirali za slučaj kada je broj usluga jednak 2. U ovom modelu promatramo slučaj kada je broj usluga k proizvoljan, uključujući mogućnost da je broj usluga $k = 1$. U tom slučaju za vjerojatnost blokiranja moramo dobiti rezultat koji je jednak onom kojeg daje Erlang-B formula. Važno je uočiti da sve usluge imaju općenito različite vjerojatnosti blokiranja poziva.

Već smo rekli da za slučaj kada je broj usluga jednak $k = 2$, model opisujemo dvodimenzionalnim Markovljevim lancem (vidi 4.3.3). U općem slučaju, model blokiranja opisujemo Markovljevim lancem s k dimenzija.

Nadalje ćemo pretpostavljati da se poziv koji pristigne na resurs uspostavlja ako ima dovoljno raspoloživom prijenosnog pojasa. Takav princip dijeljenja resursa se zove *politika potpunog dijeljena* (CS - *complete sharing policy*). Postoje i brojne druge politike, npr. politika parcijalnog dijeljenja (*partial sharing policy*) i potpunog dijeljenja s ograničenjem zauzetosti (*complete sharing policy with occupancy constraint*). Cilj njihove primjene je izjednačavanje vjerojatnosti blokiranja različitih usluga.

Da bi se došlo do vjerojatnosti blokiranja, potrebno je izračunati stacionarne vjerojatnosti stanja modela. Neka je $\mathbf{n} = [n_1, n_2, \ldots, n_k]$ vektor stanja modela, gdje n_i označava broj uspostavljenih poziva usluge i. Neka je $\mathbf{b} = [b_1, \ldots, b_k]$ vektor zahtjeva na brzinu prijenosa. Stacionarna vjerojatnost stanja $\mathbf{n}$ (s oznakom $P(\mathbf{n})$) u slučaju cjelovitog dijeljenja resursa dana je izrazom (Kaufmanov teorem):

$$P(\mathbf{n}) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{a_i^{n_i}}{n_i!}}{\displaystyle\sum_{\{\mathbf{n}:\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}\le C\}} \prod_{i=1}^{k} \frac{a_i^{n_i}}{n_i!}} \tag{6.67}$$

Vjerojatnost blokiranja poziva usluge i dobiva se zbrajanjem stacionarnih vjerojatnosti onih stanja $\mathbf{n}$ u kojima nije moguće uspostaviti novi poziv usluge i.

$$P_{B_i} = \sum_{\{\mathbf{n}:\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}>C-b_i\}} P(\mathbf{n}). \tag{6.68}$$

Dobiveni izraz je potrebno uzeti s velikim oprezom. Stacionarna vjerojatnost stanja $\mathbf{n}$ predstavljaju samo udio vremena kojeg model provodi u stanju $\mathbf{n}$. Vjerojatnost blokiranja poziva jednaka je vjerojatnosti da je model u stanju blokiranja u trenutku dolaska zahtjeva za uspostavom poziva. Stoga se u općem slučaju zbroj stacionarnih vjerojatnosti blokirajućih stanja i vjerojatnost blokiranja poziva razlikuju. Zbroj stacionarnih vjerojatnosti blokirajućih stanja se zove vremensko blokiranje i razlikuje se od blokiranja poziva.

U slučaju Poissonovog procesa zahtijeva za uspostavom poziva, vremensko blokiranje je jednako blokiranju poziva, tj. ove dvije vjerojatnosti su brojčano jednake. Ovaj princip vrijedi općenito za sve M/M/n/K modele posluživanja. U literaturi je poznat pod nazivom PASTA (*Poisson Arrivals See Time Averages*).

6.4.5 Neosjetljivost

Rješenje (6.68) izvedeno je za slučaj Poissonovih dolaznih procesa zahtjeva za uspostavom poziva i eksponencijalnom razdiobom trajanja poziva. Međutim, isto rješenje vrijedi bez obzira na razdiobu vremena trajanja poziva. Jedino što je važno da izraz (6.68) bude točan je da je srednje vrijeme trajanja poziva usluge i jednako $1/\mu_i$. Dakle, trajanje poziva može biti i unaprijed determinirano (fiksno), a da su vjerojatnosti blokiranja prema (6.68) još uvijek točne. Ovo svojstvo se u literaturi zove svojstvo neosjetljivosti (*insensitivity property*).

Isto svojstvo vrijedi i u mrežama s komutacijom kanala i fiksnim usmjeravanjem. To su one mreže u kojima se pozivi određene usluge između para čvorova uspostavljaju uvijek istim putom kroz mrežu.

6.4.6 Kaufman-Robertsova rekurzija

Rješenje za vjerojatnost blokiranja (6.67) i (6.68) je neprikladno za praktičnu primjenu. Veliko pojednostavljenje moguće je izvršiti koristeći rekurziju koju su neovisno izveli Kaufman i Roberts.

Neka je $q(j)$ stacionarna vjerojatnost da je u kanalu kapaciteta C rezervirano (zauzeto) točno j jedinica, odnosno da je trenutno rezervirana brzina prijenosa $j \cdot \epsilon$. Tada vrijedi sljedeća rekurzija:

$$q(j) = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i q(j - b_i), \tag{6.69}$$

$q(j) = 0$ za $j < 0$. Budući da su $q(j)$ stacionarne vjerojatnosti, mora biti zadovoljeno:

$$\sum_{j=0}^{C} q(j) = 1. \tag{6.70}$$

Vjerojatnost blokiranja se izračunava prema izrazu:

$$P_{B_i} = \sum_{j=0}^{b_i-1} q(C - j). \tag{6.71}$$

PRIMJER 6.6 Razmatrajmo primjer s dvije usluge, $k = 2$. Neka su ponuđeni prometi: $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/3$. Vektor zahtjeva za brzinom prijenosa je $\mathbf{b} = [2, 3]$. Kapacitet kanala je $C = 5$. Potrebno je izračunati vjerojatnosti blokiranja obje usluge.

U prvom koraku je potrebno izračunati tzv. nenormalizirani vektor stanja $\hat{\mathbf{q}}$. Potrebno je definirati $\hat{q}(0) = 1$. Prema rekurzivnoj formuli slijedi:

$$\hat{q}(1) = \frac{1}{1}\left\{\hat{q}(1-2) + \hat{q}(1-3)\right\} = 0$$

$$\hat{q}(2) = \frac{1}{2}\left\{\hat{q}(2-2) + \hat{q}(2-3)\right\} = \frac{1}{2}$$

$$\hat{q}(3) = \frac{1}{3}\left\{\hat{q}(3-2) + \hat{q}(3-3)\right\} = \frac{1}{3}\dots$$

Generiran je vektor:

$$\hat{\mathbf{q}} = \left[1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6}\right].$$

Normirani vektor $\mathbf{q}$ se dobiva dijeljenjem elemenata vektora $\hat{\mathbf{q}}$ zbrojem svih elemenata u $\hat{\mathbf{q}}$.

$$q(0)^{-1} = \sum_{j=0}^{5} \hat{q}(j) = \frac{17}{8} = \frac{24}{51}.$$

Slijedi vektor $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{q} = \frac{1}{51}\left[24, 0, 12, 8, 3, 4\right].$$

Vjerojatnost blokiranja poziva usluge i dobivamo zbrajanjem b_i posljednjih elemenata vektora $\mathbf{q}$:

$$P_{B_1} = \frac{3+4}{51} = \frac{7}{51}, \qquad P_{B_2} = \frac{4+3+8}{51} = \frac{15}{51}.$$

6.4.7 Blokiranje poziva u mreži s fiksnim usmjeravanjem i *Knapsack* aproksimacija

Vjerojatnost blokiranja poziva u mreži s fiksnim usmjeravanjem može se izraziti kompliciranim izrazom u produktnoj formi poput izraza (6.68). Izraz vrijedi bez obzira na razdiobu trajanja poziva (neosjetljivost). Takav izraz neprikladan je za praktične primjene i potrebno je koristiti određene aproksimacije. Najbolje rezultate u ovom području postižu tzv. aproksimacije reduciranim prometom (*reduced load approximation*). Postoji nekoliko aproksimacija: Kellyeva aproksimacija (još poznata i kao aproskimacije Erlangovom fiksnom točkom), *Knapsack* aproksimacija, Pascalova aproksimacija i druge. Među njima najbolje rezultate daje *Knapsack* aproksimacija.

Razmatra se mreža od J kanala (grana) koji povezuju čvorove mreže. Kapacitet grane j je C_j. Svi kapaciteti u mreži su cjelobrojni višekratnici neke osnovne brzine prijenosa ϵ. U mreži je prepoznatljivo k usluga. Usluga i identificirana je putom R_i na kojem uspostavlja poziv, brzinom prijenosa b_i koju rezervira na svim granama na putu i ponuđenim prometom a_i. Put za uslugu i je skup grana $R_i = \{e_1, \dots, e_{|R_i|}\}$. Duljina puta izražena je u broju grana - $|R_i|$.

Ukoliko se promatra samo jedna grana u mreži, onda kroz nju pozive uspostavlja samo određeni podskup usluga. Neka je skup indeksa tih usluga za granu j Γ_j:

$$\Gamma_j = \{i : j \in R_i\}.$$

Elementarna pretpostavka *Knapsack* aproksimacije, kao i svih aproksimacija s reduciranim prometom, je da se blokiranje poziva odvija neovisno na svim granama kroz koje se poziv uspostavlja. Dakle, vjerojatnost blokiranja poziva usluge i se prema ovoj aproksimaciji se može izračunati na sljedeći način:

$$P_{B_i} = 1 - \prod_{j \in R_i} (1 - L_{ij}), \tag{6.72}$$

gdje je L_{ij} vjerojatnost blokiranja poziva usluge i na grani j. Jasno, vjerojatnost prihvaćanja poziva usluge i na grani j je jednaka $1 - L_{ij}$, pa je vjerojatnost prihvata poziva s kraja na kraj mreže jednaka vjerojatnosti da je poziv prihvaćen na svim granama u mreži.

Problem koji ostaje neriješen je kako izračunati koeficijente L_{ij}. Prema *Knapsack* aproskimaciji L_{ij} se određuje na taj način što se promatra model usamljenog kanala (grane) j kojem su ponuđeni reducirani prometi usluga u skupu Γ_j. Reducirani promet usluge $i \in \Gamma_j$ se izračunava prema sljedećoj jednadžbi:

$$a_{i,j} = a_i \cdot \prod_{\substack{j \in R_i \\ i \neq j}} (1 - L_{ij}) \tag{6.73}$$

Dakle, reducirani ponuđeni promet usluge i je onaj promet kojeg mreža nije blokirala na granama na putu R_i osim na promatranoj grani j. S takvim ponuđenim prometima svih usluga u skupu Γ_j se ulazi u proračun vjerojatnosti blokiranja za usamljeni kanal kapaciteta C_j.

L_{ij} se računa kao vjerojatnost blokiranja usluge i na grani j uz reducirane ponuđene promete $\mathbf{a}_j = \{a_{i,j} : i \in \Gamma_j\}$ i zahtjeve za brzinom prijenosa $\mathbf{b}_i = \{b_i : i \in \Gamma_j\}$.

$$L_{ij} = \sum_{m=0}^{b_i - 1} q(C_j - m), \tag{6.74}$$

gdje je

$$q(m) = \frac{1}{m} \sum_{i \in \Gamma_j} a_i b_i \cdot \prod_{\substack{r \in R_i \\ i \neq r}} (1 - L_{rj}) \cdot q(m - b_i), \tag{6.75}$$

$$\sum_{m=0}^{C_j} q(m) = 1. \tag{6.76}$$

Jasno, postavlja se pitanje kako izračunati koeficijente L_{ij} jer se prema (6.75) L_{ij} može izračunati samo ako su poznati L_{ij} koeficijeni na svim ostalim granama. Ovakav sustav jednadžbi ne može se riješiti eksplicitno i potrebno je upotrijebiti određene numeričke postupke.

Potrebno je uočiti da je sustav jednadžbi (6.74), (6.75) i (6.76) preslikavanje s prostora $[0,1]^{J \cdot k}$ u isti prostor. Kad je definirano preslikavanje s konveksnog prostora u isti prostor, onda vrijedi tzv. teorem Brouwera. Po tom teoremu, ako postoji preslikavanje $f : S \to S$, gdje je S konveksan skup, onda zasigurno postoji i točka $x \in S$ takva da je $x = f(x)$. Takva točka se naziva ***fiksnom točkom preslikavanja*** f. Dakle, preslikavanje definirano *Knapsack* aproksimacijom zasigurno ima jednu fiksnu točku. Jedan način pronalaska fiksne točke je metodom sekvencijalne iteracije.

Ideja metode sekvencijalne iteracije je odabrati proizvoljno rješenje $x^1 \in S$ i na osnovu njega preslikavanjem dobiti novo rješenje $x^2 = f(x^1)$. Rješenje x^2 se proglašava novim rješenjem i pronalazi se rješenje $x^3 = f(x^2)$. Nastavljajući ovaj postupak, svako novo rješenje se sve više približava fiksnoj točki x. Za *Knapsack* aproksimaciju je moguće pokazati da ovaj postupak uvijek konvergira fiksnoj točki.

Dakle, u početku je dovoljno odabrati da su svi $L_{ij} = 1$. Tada se preslikavanjem (6.74) - (6.76) pronalaze nove vrijednosti L_{ij}. Nad tim vrijednostima se opet vrši preslikavanje i postupak se ponavlja dok ne bude zadovoljen neki uvjet konvergencije.

6.5 Zadaci za vježbu

Erlangova i hipereksponencijalna razdioba

ZADATAK 6.1 Autoput ima šest traka. Vozač koji je upravo ušao u sasvim desnu traku želi se što prije prebaciti u sasvim lijevu traku. Ako je vrijeme koje je potrebno da se vozač prebaci u susjednu traku raspodijeljeno eksponencijalno s očekivanjem 10 sekundi, koju razdiobu ima vrijeme prebacivanja u sasvim lijevu traku (izraz za gustoću razdiobe) i koliko je očekivanje te slučajne varijable ?

ZADATAK 6.2 Na regrutaciji regruti prolaze test motoričkih sposobnosti. Test se sastoji od 3 zadatka. Za rješavanje svakog zadatka su u prosjeku potrebne 3 minute. Na test je dovedeno 20 regruta. Kada jedan regrut rješava test, ostali čekaju. Koliko je očekivano vrijeme koje će biti potrebno da svi regruti riješe test ?

ZADATAK 6.3 Sustav od 3 paralelno postavljena procesora primaju zadatke koje moraju obraditi. Zadaci upućeni prvom procesoru se u ukupnom toku zadataka pojavljuju s vjerojatnošću α_1, zadaci za drugi procesor s vjerojatnošću α_2 i zadaci za treći procesor s vjerojatnošću α_3. Ukoliko su vremena obrade zadataka u procesorima raspodijeljena eksponencijalno i intenziteti obrade u procesorima redom μ_1, μ_2 i μ_3, odredite srednje vrijeme posluživanja zadataka u ovom paralelnom poslužiteljskom sustavu kao i funkciju razdiobe vremena obrade.

ZADATAK 6.4 Određena pločica u telefonskoj centrali je trostruko redundantna i redundantni dijelovi rade u hladnoj rezervi. Pločica se ne mijenja dok se ne pokvare sva tri redundantna dijela (glavni i dva rezervna). Ako je prosječno vrijeme do otkazivanja jednog elementa 1 godina, izračunajte funkciju gustoće razdiobe vremena nakon kojeg će biti potrebno zamijeniti pločicu.

Sustavi posluživanja $M/E_r/1$ i $M/D/1$

ZADATAK 6.5 Liječnik vodi ordinaciju bez pomoći medicinske sestre zato što je ona otišla na godišnji odmor. Budući da ne može obavljati svoj dio posla i dio posla kojeg bi trebala obavljati medicinska sestra istovremeno, liječnik prvo primi pacijenta (pripremi njegov karton, provjeri zdravstvenu iskaznicu ...), a onda tek počinje obavljati pregled. Vremena pregleda i prijema su raspodijeljena eksponencijalno s očekivanjima 10 minuta. Koliki broj pacijenata čeka ispred vrata ordinacije ako je intenzitet dolazaka pacijenata 2 na sat ?

ZADATAK 6.6 ATM multipleksor vrši statistički multipleks 10 ćelijskih tokova pomoću FIFO poslužitelja s odlaznim linkom kapaciteta 1000 ćelija/s. 5 ćelijskih tokova imaju intenzitete po 140 ćelija/s, a ostalih 5 imaju intenzitete po 40 ćelija/s. Koliki je prosječan broj ćelija u spremniku i koliko je prosječno vrijeme zadržavanja ćelija u multipleksoru ?

ZADATAK 6.7 IP paketi pristižu u izlazni port usmjeritelja. Prosječna duljina paketa je 500 byte-ova, a dolazni intenzitet je $\lambda = 1000$ paketa/s. Odlazni link je kapaciteta 5 Mb/s. Ako je duljina paketa raspodijeljena po Erlangovoj E_4 razdiobi, izračunajte prosječnu duljinu repa paketa i kašnjenje u portu.

ZADATAK 6.8 Ljudi dolaze na biračko mjesto po Poissonovoj razdiobi s intenzitetom 0.5 ljudi u minuti. Glasači prvo dolaze do mjesta gdje se provjerava da li su na glasačkom popisu i gdje dobivaju listić. Nakon toga odlaze do kabine gdje zaokružuju svog kandidata i nakon toga ubacuju listić u kutiju. Na oba mjesta se zadržavaju u prosjeku 50 sekundi. Vrijeme obaju koraka je raspodijeljeno eksponencijalno. Ukoliko glasači čekaju da njihov prethodnik prođe kroz oba koraka prije nego što i sami pristupe glasanju, izračunajte prosječnu duljinu reda birača, razdiobu vremena kojeg glasač provodi glasajući i prosječno vrijeme samog glasanja.

Poissonov proces moduliran Markovljevim procesom - MMPP

ZADATAK 6.9 Koliko stanja ima MMPP koji se dobiva superpozicijom četiri SPP procesa i koja su to stanja ?

ZADATAK 6.10 Koliko stanja ima MMPP koji se dobiva superpozicijom tri IPP procesa i koja su to stanja ?

ZADATAK 6.11 Izračunajte očekivanje MMPP procesa koji se dobiva superpozicijom dva jednaka IPP procesa.

ZADATAK 6.12 Izračunajte očekivanje MMPP procesa koji se dobiva superpozicijom dva jednaka SPP procesa.

6.6 Rješenja zadataka za vježbu

6.6.1 Erlangova i hipereksponencijalna razdioba

RJEŠENJE ZADATKA 6.1
Vozač želi iz prve trake preći u šestu. Budući da u svakoj traci čeka određeno vrijeme, ukupno vrijeme koje će mu biti potrebno da pređe u šestu traku jednako je zbroju vremena koje je proveo u prvoj, drugoj, ..., petoj traci. Šestu traku ne računamo jer kada dođe u šestu traku, vozač je već na cilju. Dakle, ukupno vrijeme koje je potrebno da se pređe u šestu traku jednako je zbroju 5 eksponencijalno raspodijeljenih slučajnih varijabli. Ukupno vrijeme se stoga ravna po Erlangovoj razdiobi E_5. Prametar $r\mu$ te razdiobe dobivamo kao inverz prosječnog vremena kojeg korisnik provodi u jednoj liniji.

$$\frac{1}{5\mu} = 10 \text{ s}$$

Vrijeme od 10 s možemo shvatiti kao prosječno vrijeme obrade u jednom poslužitelju u slučaju da imamo Erlanogov poslužitelj s 5 "eksponencijalnih" poslužitelja. Konačno, ako s $\tilde{x}$ označimo vrijeme potrebno da vozač dosegne šestu traku, možemo napisati:

$$f_{\tilde{x}}(x) = \frac{5\frac{1}{50}(5\frac{1}{50}x)^4 e^{-5\frac{1}{50}x}}{4!} = \frac{\frac{1}{10}(\frac{1}{10}x)^4 e^{-\frac{1}{10}x}}{4!}$$

Prosječno vrijeme koje je potrebno da se dosegne šesta traka je:

$$E[\tilde{x}] = r\frac{1}{r\mu} = 50 \text{ s}$$

RJEŠENJE ZADATKA 6.2
Budući da regrut ne smije ući u prostoriju u kojoj se obavlja testiranje, a testiranje (posluživanje) se sastoji od 3 koraka (poslužitelja), radi se klasičnom sustava posluživanja $M/E_r/1$. Međutim, ne traži se prosječna duljina reda, nego se traži prosječno vrijeme koje će biti potrebno da se posluži svaki od 20 regruta. Budući da se test sastoji od tri testa za čija su rješavanja potrebna eksponencijalno raspodijeljena vremena, ukupno trajanje testiranja je raspodijeljeno po Erlangovoj razdiobi E_3 s očekivanjem 9 minuta (3 testa po 3 minute). Srednje vrijeme posluživanja 20 regruta nalazimo kao 20 regruta po 9 minuta:

$$E[\tilde{x}] = 20\frac{1}{3\mu} = 20 \cdot 9 = 180 \text{ min}$$

RJEŠENJE ZADATKA 6.3
Radi se o Hipereksponencijalnom poslužiteljskom sustavu s $R = 3$ poslužitelja. (Vidi 6.3 i izraze (6.5,6.6)). Odmah slijede razdioba i očekivanje vremena obrade u ovom poslužitelju.

$$b(x) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i x}, \qquad x \geq 0$$

$$E[\tilde{x}] = \bar{x} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\alpha_i}{\mu_i}$$

RJEŠENJE ZADATKA 6.4
Budući da je vrijeme ispravnog rada sustava od tri pločice sastavljeno (jednako zbroju) od tri eksponencijalno raspodijeljena vremena s prosječnom vrijednošću (očekivanjem) 1 godinu, to se vrijeme ispravnog

rada ravna po Erlangovoj razdiobi s parametrom $r = 3$, E_3. Koristeći se izrazom (6.1) dobivamo da vrijeme do kvara sve tri pločice ($\tilde{x}$) ima razdiobu:

$$f_{\tilde{x}}(x) = \frac{3\frac{1}{3\text{ god.}}\left(3\frac{1}{3\text{ god.}}x\right)^2 e^{-3\frac{1}{3\text{ god.}}x}}{2!}$$

6.6.2 Sustavi posluživanja $M/E_r/1$ i $M/D/1$

RJEŠENJE ZADATKA 6.5

U ovom zadatku je jedino bitno odrediti sustav posluživanja o kojem se radi. Cijela ordinacija je sustav posluživanja čiji se poslužitelj sastoji od dva serijski spojena "eksponencijalna" poslužitelja (liječnik koji prihvaća pacijenta, i isti liječnik koji ga pregledava), svaki s očekivanjem 10 minuta. Budući da pacijent čeka ispred vrata ordinacije sve dok je prethodni u njoj, jasno je da se radi o sustavu posluživanja $M/E_2/1$, $r = 2$.

$$\frac{1}{2\mu} = 10 \text{ min} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{20 \text{ min}}$$

Koristeći se podatkom da je $\lambda = 2/60$ pacijenata u minuti i izrazom (6.13) dobivamo:

$$\overline{N}_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu}^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}\left[1+\frac{1}{r}\right] = 1 \text{ pacijent}$$

RJEŠENJE ZADATKA 6.6

ATM ćelije su paketi fiksne veličine, pa je vrijeme njihovog posluživanja konstantno. Budući da se prilazni tokovi ponašaju u skladu s Poissonovim procesom, možemo ustanoviti da se radi o sustavu posluživanja $M/D/1$. Dolazni intenzitet je jednak:

$$\lambda = 5 \cdot 140 + 5 \cdot 40 = 900 \text{ ćelija/s}$$

Intenzitet posluživanja je $\mu = 1000$ ćelija/s. Prosječan broj ćelija u spremniku se izračunava prema (6.18)

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{0.9^2}{2(1-0.9)} = 4.05 \text{ ćelija}$$

Prosječno vrijeme zadržavanja ćelija u multipleksoru, tj. vrijeme zadržavanja u sustavu posluživanja se računa prema (6.21):

$$T = \frac{1}{\mu(1-\rho)}\left[1-\frac{\rho}{2}\right] = \frac{1}{1000(1-0.9)}\left[1-\frac{0.9}{2}\right] = 5.5 \text{ ms}$$

RJEŠENJE ZADATKA 6.7

Budući da je duljina IP paketa raspodijeljena po Erlangovoj E_4 razdiobi i da se bitovi paketa poslužuju konstantnom brzinom, to je vrijeme posluživanja paketa također raspodijeljeno po Erlangovoj razdiobi E_4. Budući da IP paketi pristižu po Poissonovom procesu, imamo sustav posluživanja $M/E_4/1$. Prosječno vrijeme posluživanja IP paketa ujedno predstavlja parametar $1/\mu$ E_4 razdiobe i jednak je:

$$\mu = \frac{5 \cdot 10^6}{500 \cdot 8 \text{ bita}} = 1250 \text{ paketa/s}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1000}{1250} = 0.8$$

Prema izrazima (6.13) i (6.15)

$$\begin{aligned}\overline{N}_q &= \overline{N} - \overline{N}_s = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1+\frac{1}{r}\right] = 2.4 \text{ paketa} \\ T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)}\left[1-\rho\frac{1-\frac{1}{r}}{2}\right] = 3.2 \text{ ms}\end{aligned}$$

RJEŠENJE ZADATKA 6.8

Budući da se glasanje sastoji od dva serijski povezana koraka čije je trajanje raspodijeljeno eksponencijalno, i budući da građaninu nije dopušteno pristupiti proceduri prije nego što prethodnik u potpunosti ne završi glasanje, jasno je da se radi o sustavu posluživanja $M/E_2/1$. Daljnje rješavanje zadatka je trivijalno. Prosječan broj glasača u redu se računa po (6.13).

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.5}{60} \cdot 100 = 0.8\dot{3}$$

$$\overline{N}_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1+\frac{1}{r}\right] = 3.125$$

Razdioba vremena posluživanja je Erlangova E_2 s očekivanjem (prosječnim vremenom posluživanja) 100 sekundi.

6.6.3 Poissonov proces moduliran Markovljevim procesom - MMPP

RJEŠENJE ZADATKA 6.9

Potrebno je samo utvrditi koliko novih stanja se može generirati superpozicijom četiri različita SPP procesa. Ako se zamisli da su stanja 0 i 1, onda je jedna moguća kombinacija 0010. Takvo stanje uključenosti izvora predstavlja jedno stanje novog MMPP-a. Budući da kombinacija ima onoliko koliko ima i binarnih brojeva koji se mogu napisati iz četiri bita, onda zaključujemo da je broj stanja novog procesa jednak $2^4 = 16$.

RJEŠENJE ZADATKA 6.10

MMPP nasljeđuje stanje totalne isključenosti koje odgovara slučaju kada su sva tri procesa isključena. Uključeni mogu biti izvori 1 i 2, 1 i 3, 2 i 3, i naravno mogu biti uključeni svi. Dakle imamo ukupno 5 stanja.

RJEŠENJE ZADATKA 6.11

Trivijalno. $m(t) = 2 \cdot m_{IPP}(t)$

RJEŠENJE ZADATKA 6.12

Trivijalno. $m(t) = 2 \cdot m_{SPP}(t)$