Riješeni primjeri 1

1. Treba prenjeti na udaljenost od 1000 km datoteku od 100 paketa. Svi paketi su jednako veliki (50 Byte). Brzina prijenosa je 1 Mbit/s a propagacijsko kašnjenje 5 μs/km. Kolika je (a) vrijeme prijenosa datoteke, (b) koliko je kašnjenje od izvorišta do odredišta i (c) koliko paketa se može „poslagati" jedan iza drugog na linku od 1000 km ako se brzina poveća na 1 Gbit/s.

   ***Rješenje*:** Zadano: l = 1000 km, N_{pak} = 100 paketa, L_{pak} = 50 byte, C_{trans} = 1 Mbit/s, τ_{prop} = 5 μs/km. Propagacijsko kašnjenje linka: $T_{prop} = l\ \tau_{prop}$ = 1000 km × 5 μs/km = 5 ms. Veličina datoteke: $L = N_{pak} L_{pak}$ = 100 paket × 50 byte/paket × 8 bit/byte = 40000 bit. (a) Vrijeme prijenosa datoteke: $T_{trans} = L/C_{trans} = 40\times10^3/10^6$ = 40 ms. (b) Kašnjenje: $T_{trans} + T_{prop}$ = 45 ms. (c) Trajanje prijenosa paketa: $T_{pak} = L_{pak}/C_{trans}$ = 400 bit/ (1 Mbit/s) = 0,4 ms/paket; broj paketa na linku je T_{prop}/T_{pak} = 5/0,4 = 12,5 paketa uz brzinu 1 Mbit/s, odnosno 12500 paketa uz brzinu 1 Gbit/s

2. Studentsku službu posjećuje prosječno 24 studenata u svakom satu. Kad su svi šalteri zauzeti formira se jedan red čekanja. Uočeno je da je prosječno trajanje posluživanja 5 min, a srednji broj studenata u redu je 2.4. Odredite: srednje vrijeme čekanja, ponuđeni promet, srednji broj i srednje vrijeme boravka studenata u takvom sustavu. Kakva je njegova stabilnost i koliko bi šaltera trebalo biti otvoreno?

   ***Rješenje*:** λ = 24/6 = 0.4 student/min, $W = N_Q/\lambda$ = 2.4/0.4 = 6 min, $a = \lambda\tau (= \rho = \lambda/\mu)$ = 2 erl, tj. srednji broj studenata koje treba poslužiti je 2, a srednji broj u sustavu je $N = N_Q + a$ = 4.4. Zadnjese može izračunati i na ovaj način: $T = W + \tau$ = 11 min, $N = \lambda T$ = 0.4 × 11 = 4.4. Budući da svaki šalter može poslužiti najviše 1 erl, za broj šaltera c ≤ 2 red će stalno rasti i ne postoji stacionarno stanje. Treba biti $c > a$.

3. Grupa od 5 kanala prenosi 50 telefonskih poziva ujednom satu, a srednje trajanje poziva je 3 minute. Izračunajte: (a) promet prenesen po svakom kanalu i (b) srednji broj zauzetih kanala.

   ***Rješenje*:** (a) a = 50 × 3/60 = 2.5 erl ⇒ a/5 = 0.5 erl; (b) srednji broj zauzetih kanala jednak je prenesenom prometu a = 2.5erl.

4. Prosječno 10 telefonskih poziva dolazi slučajno u svakom satu. Odredite: (a) vjerojatnost da dva ili više poziva nastanu u 12 minuta i (b) vjerojatnost da međudolazno vrijeme nije veće od 6 minuta.

   ***Rješenje*:** (a) Budući da se broj poziva nastalih u 12 min ravna po Poissonovoj razdiobi s parametrom 12 × 10/60 = 2 poziv/min ⇒ vjerojatnost da se 2 ili više poziva pojavi u 12 min je: $1 - (1 + 2)e^{-2}$ = 0.594. (b) Međudolazno vrijeme se ravna po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom (srednjom vrijednosti) 60/10 = 6 min/poziv ⇒ vjerojatnost da međudolazno vrijeme nije veće od 6 min je $1 - e^{-1}$ = 0.6231.

5. Na željezničkoj postaji u čekaonici je više od dvije telefonske govornice čije telefone je moguće koristiti pomoću kovanica. U jednom satu prosječno 50 korisnika obavi pozive prosječnog trajanja 3 min uporabom telefona u govornicama. Također je uočeno da prosječno 1.2 korisnika čeka u redu na slobodnu govornicu. Izračunajte: (a) srednji broj korištenih telefona i (b) srednje vrijeme čekanja na slobodnu govornicu.

   ***Rješenje*:** (a) Srednji broj korištenih telefona = prometno opterećenje = $50 \times 3/60 = 2.5$ erl $\Rightarrow$ potrebno je najmanje tri govornice. (b) Brzina dolazaka = 50/60 min $\Rightarrow$ vrijeme čekanja u redu (Little) = $1.2/(50/60) = 1.44$ min.

6. Na lokalnu telefonsku centralu spojeno je 1000 korisnika (pretplatnika). Prosječna korisnička brzina pozivanja (izvorno prometno opterećenje) iznosi 0.04 erl pri čemu je 10% od svih poziva usmjereno prema nadređenoj centrali (npr. prem tzv. mjesnoj centrali). Odredite potrebni broj kanala (snop) prema nadređenoj centrali tako da vjerojatnost blokiranja nije veća od 1%. (b) Procjenite vjerojatnost blokiranja u slučaju preopterećenja kad se ponuđeni promet udvostruči.

   ***Rješenje*:** (a) ukupni promet prema nadređenoj centrali je $a = 0.04 \times (1000 \times 0.1) = 40$ erl. Prema Erlang-B formuli imamo: $E_{53}(40) = 0.0082 < 0.01 \Rightarrow$ potrebno je 53 kanala (broj kanala treba biti najmanji cijeli broj koji zadovoljava uvjete blokiranja). (b) U slučaju preopterećenja imamo $a = 2 \times 40 = 80$ erl $\Rightarrow$ vjerojatnost blokiranja (gubitaka) je $E_{53}(80) = 0.3582$, tj. odbačeno je skoro 36% poziva (gubici).

7. Poruke dolaze u sustav brzinom od 10 poruka u minuti. Njihove duljine slijede eksponencijalnu razdiobu sa srednjom vrijednosti 3600 Byte. Poruke se prijenose kanalom brzine 9600 bit/s. Odredite: (a) Srednje vrijeme posluživanja (tj. srednje vrijeme prijenosa); (b) Srednje opterećenje poslužitelja (tj. iskoristivost poslužitelja); (c) Vjerojatnost da su dvije poruke u sustavu; (d) Srednji broj poruka u redu; (e) Srednji broj poruka u sustavu; (f) Srednje vrijeme čekanja u redu; (g) Srednje vrijeme boravka (zadržavanja) u sustavu (vrijeme odziva).

   ***Rješenje*:** (a) T_s = (3600 Byte) (8 bit/Byte)/(9600 bit/s) = 3 s. (b) λ = 10 poruka/min = 1/6 poruka/s, $\mu = 1/T_s$ = 1/3 poruka/s $\Rightarrow \rho = \lambda/\mu = (1/6)/(1/3) = 0.5$. (c) $P_2 = (1-\rho)\rho^2 = 0.125$. (d) $N_Q = \rho^2/(1 - \rho) = 0.5$ poruka. (e) $N = \rho/(1 - \rho) = 1$ poruka. ($N = N_Q + \rho$). (f) $W = N_Q/\lambda = 0{,}5/(1/6) = 3$ s. (g) $T = W + T_s = 6$ s.

8. Zadan je sustav posluživanja s jednim poslužiteljem u koji korisnici dolaze brzinom 3 korisnik/h a poslužuju se brzinom 8 korisnik/h. Vjerojatnosti p_n da se n korisnika nalazi u sustavu dane su tablicom:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
p_n	0.625	0.234	0.088	0.033	0.012	0.005	0.002	0.001	0

   Odredite: (a) Očekivani broj korisnika u sustavu; (b) Očekivano vrijeme boravka (zadržavanja) u sustavu; (c) Očekivano vrijeme čekanja u redu; (d) Očekivani broj korisnika u redu čekanja; (e) Očekivani broj korisnika u poslužitelju.

Rješenje: (a) $N = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = 0.6$ korisnik; (b) $T = N/\lambda = 0.6/3 = 0.2$ h; (c) $W = T - 1/\mu = 0.2 - 1/8 = 0.075$ h; (d) $N_Q = \lambda W = 3\times 0.075 = 0.225$ korisnik; (e) $N - N_Q = \lambda/\mu = 3/8 = 0.6 - 0.225 = 0.375$ korisnik.

9. Jedan komunikacijski kanal se koristi za prijenos paketa od nekoliko izvorišta do središnjeg računala. Pretpostavljamo da se dolasci od svakog izvorišta ravnaju po Poissonovoj razdiobi sa srednjom brzinom 2 paket/s, te da su međusobno neovisni. Svi paketi su statistički identični, čekaju u jednom zajedničkom repu čekanja i zatim se odašilju jedan po jedan. Pretpostavljamo da se vrijeme prijenosa (transmisije) ravna po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 25 ms. Treba odrediti najveći broj izvorišta koje je moguće priključiti na kanal za svaki od sljedeća tri slučaja: (a) Kanal ne smije biti zasićen (preopterećen). (b) Stacionarno prosječno vrijeme odziva (tj. vrijeme zadržavanja) paketa ne smije biti veće od 100 ms. (c) U stacionarnom stanju barem 95% svih paketa nema vrijeme odziva (tj. vrijeme zadržavanja) veće od 100 ms. (d) Usporedite rezultate za (a), (b) i (c) te obrazložite konačno rješenje.

   Rješenje: Modeliramo sustav s K izvorišta spojenih na kanal koji odgovara sustavu M/M/1 s parametrima $\lambda = 2K$ i $1/\mu = 0.025$s (superpozicijom neovisnih Poissonovih procesa dobiva se opet Poissonov proces). ρ = opterećenje = $\lambda/\mu = 0.05K$. (a) $0.05K < 1 \Rightarrow K < 20$. (b) Srednje vrijeme zadržavanja = $1/(\mu - \lambda) = 1/(40 - 2K) \leq 0.1 \Rightarrow K \leq 15$. (c) $F(x) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)x}$, $\Rightarrow x \geq 0$; $F(0.1) \geq 0.95 \Rightarrow 1 - F(0.1) \leq 0.05 \Rightarrow e^{-(\mu - \lambda)x} \leq 0.05 \Rightarrow K \leq 5$. (d) Strogost uvjeta: (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a). Najveći broj izvorišta = $K = 5$.

10. 24 terminala koristi jednu liniju brzine 96 kbit/s. Svaki terminal šalje prosječno 10 poruka u minuti na zajedničku liniju. Duljine poruka se ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi s prosječnom duljinom 20 kbita. (a) Odredite iskoristivost takvog sustava i srednje vrijeme boravka poruke u sustavu; (b) Uzmimo da je vrijeme dobiveno u (a) preveliko te ga želimo smanjiti uvođenjem još jednog kanala brzine 96 kbit/s tako da na svaki kanal priključimo po 12 terminala. Kolika je sada iskoristivost, a koliko srednje vrijeme boravka u sustavu? (c) Pretpostavite sada da se oba kanala koriste kao M/M/2 sustav posluživanja (tj. poruke se šalju na trenutno slobodni kanal). Kolika je sada iskoristivost, a koliko srednje vrijeme boravka u sustavu? (d) Pretpostavite sada da oba kanala multipleksiramo u jedan brzine 192 kbit/s. Kolika je sada iskoristivost, a koliko srednje vrijeme boravka u sustavu? (e) Komentirajte dobivene rezultate za slučajeve (b)-(d); usporedite kašnjenja (vrijeme odziva) i očekivane troškove pojedinog slučaja.

    Rješenje: (a) T_s = srednje vrijeme posluživanja = vrijeme prijenosa = (duljina poruke)/(brzina linije) = 20000/96000 = 5/24 ≈ 0.208 s/poruka. [Može i ovako: $\mu = 1/T_s$ = 96000 bit/s = 4.8 poruka/s]. λ = srednja ukupna brzina dolazaka = (24 ter)×(10 poruka/min/ter)×(1/60 min/s)×(20000 bit/poruka) = 80000 bit/s = 4 poruja/s. ρ = iskoristivost = (ukupna brzina dolazaka)/(brzina posluživanja) = 80000/96000 = 5/6 ≈ 0,833. T = srednje ukupno vrijeme zadržavanja = $T_s/(1 - \rho)$ = 5/4 = 1,25 s/poruka. [Može i ovako: $T = 1/(\mu - \lambda)$ = 1/16000 s/bit = 1/0.8 s/poruka = 1.25 s/poruka]. (b) Sustav je i dalje M/M/1, ali su brzina dolazaka i iskoristivost prepolovljeni: $\rho = 0.417 \Rightarrow T = 0.208/0.583 = 0.357$ s/poruka. (c) Sada imamo sustav M/M/2: $\rho = 0.833 \Rightarrow$ efektivna iskoristivost = $\rho/2$ = 0,417 $\Rightarrow T = T_s/(1 - (\rho/2)^2) =$

0.252 s/poruka. (d) Ponovo imamo sustav M/M/1, ali su sada i T_s i ρ prepolovljeni $\Rightarrow$ T = ukupno vrijeme zadržavanja = $T_s/(1 - \rho) = 0.104/0.583 = 0.178$ s. (e) U sva tri slučaja (b)-(d) znatno je reducirano kašnjenje redukcijom iskoristivosti. Najveće poboljšanje se dobiva dupliciranjem brzine linije [slučaj (d)], ali je posljedica toga povećanje troškova zbog uvođenja drugog kanala i multipleksora. U svim slučajevima vidi se: veća investicija za smanjenje kašnjenja.

11. Ured s 20 zaposlenika ima svega tri telefonske linije. Tijekom 8 satnog radnog dana svaki zaposlenik pokuša obaviti u prosjeku 16 poziva pri čemu je prosječno trajanje svakog poziva 3 minute. (a) Odredite intenzitet poziva (ponuđeni promet) i vjerojatnost gubitaka (vjerojatnost da će poziv biti odbačen kad su sve tri linije zauzete); (b) Koliko bi ured trebao imati linija da bi gubici bili najviše 2%? (c) Ravnatelj ureda ograničio je zaposlenicima dnevni broj poziva na 4 jer nije spreman investirati u nove linije. Koliki su sada gubici?

Rješenje:

(a) $a = \dfrac{20\times16\times3\,\text{min}}{8\times60\,\text{min}} = 2$ erl; Erlang-B formula:

$$E(c,a) = E(3,2) = \frac{\frac{2^3}{3!}}{\frac{2^0}{0!}+\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}} = \frac{4}{19} \approx 0.2105$$

Rezultat se može dobiti i rekurzivno (iterativno):

$$E(0,2) = 1 \Rightarrow E(1,2) = \frac{2E(0,2)}{2E(0,2)+1} = \frac{2}{3} \Rightarrow E(2,2) = \frac{2\times\frac{2}{3}}{2\times\frac{2}{3}+2} = \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$E(3,2) = \frac{2\times\frac{2}{5}}{2\times\frac{2}{5}+3} = \frac{4}{19} \approx 0.2105,\ \text{tj. gubici su oko } 21\%!$$

(b) Iz tablica za Erlang-B formulu dobivamo $c = 6$. Rekurzivno:

$$E(4,2) = \frac{2\times\frac{4}{19}}{2\times\frac{4}{19}+4} = \frac{2}{21} \Rightarrow E(5,2) = \frac{2\times\frac{2}{21}}{2\times\frac{2}{21}+5} = \frac{4}{109} > 0.02 \Rightarrow$$

$$E(6,2) = \frac{2\times\frac{4}{109}}{2\times\frac{4}{109}+6} = \frac{4}{331} \approx 0.01208 < 0.02 \Rightarrow c = 6 \text{ (cijeli broj)}$$

(c) $a = 0.5$ erl $\Rightarrow E(0,0.5) = 1 \Rightarrow B(1,0.5) = 1/3 \Rightarrow B(2,0.5) = 1/13 \Rightarrow B(3,0.5) = 1/79 \approx 0.012658$.

12. Na kućnu telefonsku centralu priključeno je 1000 korisnika pri čemu svaki korisnik generira promet od 0,03 erlanga. Prosječno trajanje poziva je 3 minute. (a) Odredite broj odlaznih linija iz kućne centrale prema nadređenoj javnoj centrali telefonske mreže uz uvjet da blokiranje poziva nije veće od 3%. (b) Koliko će se povećati broj odlaznih linija ako se broj korisnika poveća na 1300, a dozvoljeno blokiranje ostane najviše 3%? (c) Usporedite i komentirajte postotak porasta prometa s postotkom porasta broja izlaznih linija.

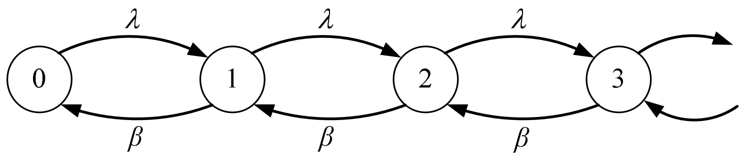
    ***Rješenje*:** (a) Budući je priključeno 1000 korisnika koji neovisno jedan od drugog generiraju po 0.03 erl Poissonovog prometa možemo sustav aproksimirati sustavom s beskonačnim brojem izvora. Za telefonski promet koristimo model M/M/c/c (sustav s gubicima). $1/\mu = 3$ min/poziv; Svaki korisnik i doprinosi srednjom dolaznom brzinom $\lambda_i = \rho\,\mu = (30\times10^{-3}$ erl$)$ /3 min $= 10^{-2}$ poziv/min. Ukupna srednja brzina dolazaka (Poissonov proces): $\lambda = 1000 \times 10^{-2} = 10$ poziv/min. Ukupni ponuđeni intenzitet prometa $a = \rho = \lambda/\mu = 30$ erl (ili jednostavno $1000 \times 0.03 = 30$ erl). Iz tablica za Erlang-B formulu, uz blokiranje najviše 3%, dobivamo $c_{30} = 38$ izlaznih linija.
    (a) Ako se broj korisnika poveća na 1300 ukupni intenzitet prometa kućne centrale je $\rho = (1300\times10^{-2}$ poziv/min$)\times(3$ min$) = 39$ erl. Iz tablica za Erlang-B formulu, uz blokiranje 3%, dobivamo $c_{39} = 47$ izlaznih linija. Porast prometa $\Delta\rho\% = 100\times(39 - 30)/30 = 30\%$, a porast linija $\Delta c\% = 100\times(47 - 38)/38 \approx 23.7\%$.
    (b) Uz fiksno blokiranje linearno povećanje broja korisnika dovodi do porasta prometa i efekta multipleksiranja tako da je $\Delta c\% < \Delta\rho\%$ (nelinearno).

13. Komutacija (preklopnik) ima samo jednu izlaznu liniju. Međudolazna vremena dolazaka poziva i njihova trajanja ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom brzinom dolazaka λ i srednjom brzinom posluživanja β. Treba analizirati dva različita slučaja:
    Slučaj 1: Komutacija ima listu čekanja poziva: komutacija može poziv prosljediti u listu čekanja kad je izlazna linija zauzeta. (a) Skicirajte model (Markovljev lanac) takvog sustava, (b) napišite jednadžbe stanja, te (c) odredite izraz za vjerojatnost P_1 da će dolazni poziv biti stavljen u listu čekanja kad je izlazna linija zauzeta.
    Slučaj 2: Komutacija nema listu čekanja poziva: ako je izlazna linija zauzeta poziv je blokiran i odbačen. (d) Skicirajte model (Markovljev lanac) takvog sustava, (e) napišite jednadžbe stanja, te (f) odredite izraz za vjerojatnost P_2 da će dolazni poziv biti blokiran kad je izlazna linija zauzeta. (g) Koliko smije biti maksimalno ulazno prometno opterećenje (u erl) a da blokiranje bude najviše 1%? Konačno, (h) usporedite i komentirajte stabilnosti sustava u oba slučaja.

    ***Rješenje*:**

    Može i ovako: <u>Slučaj 1</u>

    (a) Pozivi dolaze sukladno Poissonovom procesu sa srednjom brzinom λ; trajanje poziva ravna se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom brzinom β. Dakle, koimutacija se može modelirati kao M/M/1 sustav s beskonačnim spremnikom (redom čekanja).



(b) Prometni intenzitet je $\rho = \lambda/\beta < 1$ erl (stabilan sustav).

$\lambda P_0 = \beta P_1 \Rightarrow P_1 = (\lambda/\beta)P_0 = \rho P_0$

$\lambda P_1 = \beta P_2 \Rightarrow P_2 = (\lambda/\beta)P_1 = \rho^2 P_0$

....

$\lambda P_{i-1} = \beta P_i \;\Rightarrow\; P_i = \dfrac{\lambda}{\beta} P_{i-1} = P_0 \rho^i, \forall i \geq 1$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty} P_0 \rho^i = 1 \Rightarrow P_0 = \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i\right)^{-1} = 1 - \rho \quad \text{normalizacija}$$

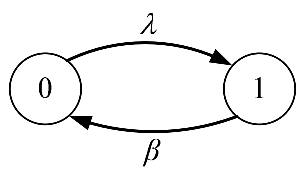
$$P_i = (1-\rho)\rho^i, \forall i \geq 0$$

(c) Novi dolazni poziv nalazi poslužitelja zauzetog kad je u nekom od stanja 1, 2, 3, … i stavlja se u listu čekanja. Vjerojatnost P_1 (čekanje) je određena Erlang-C formulom za slučaj jednog poslužitelja:

$$P_1(\text{čekanje}) = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1 - P_0 = \rho$$

<u>Slučaj 2</u>

(d) Model je i dalje M/M/* tipa ali sada postoji točno jedno mjesto u redu čekanja (tj. mjesto za posluživani poziv) pa je model M/M/1/1, a Markovljev lanac ima dva stanja:



(e) Intenzitet ulaznog prometa je i dalje $\rho = \lambda / \beta$. Jednanžbe stanja su:

$$\begin{Bmatrix} \lambda P_0 = \beta P_1 \\ P_0 + P_1 = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow P_0 = \frac{\beta}{\lambda + \beta};\; P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \beta}$$

(f) Novi poziv je blokiran i odbačen kad se sustav nalazi u stanju 1.Vjerojatnost blokiranja je (Erlang-B):

$$P_2(\text{blokiranje}) = P_1 = \lambda / (\lambda + \beta) = \rho / (1 + \rho)$$

(g) Maksimalni intenzitet ulaznog prometa ρ uz uvjet da je P_2 (blokiranje) ≤ 1% dobije se kao

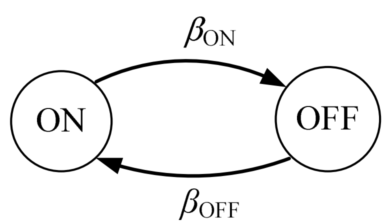
$$\rho/(1+\rho) = P_2(\text{blokiranje}) = P_1 \Rightarrow \rho = P_1/(1-P_1) = 0.01/(1-0.01) = 1/99\ e\text{rl}$$
$$(\text{Može i ovako: } P_1 = \rho P_0 \Rightarrow \rho = P_1/P_0 = 0.01/0.99\ ).$$

(h) Sustav je stabilan za *Slučaj 1* ako je $\rho < 1$. U *Slučaju 2* nema probleme sa stabilnosti sustava: on može raditi (čak uz visoku vjerojatnost blokiranja) i za $\rho > 1$.

14. Paketi dolaze u spremnik (buffer) transmisijske linije sukladno procesu koji karakterizira izvor prometa s dva stanja (ON-OFF). Vremena trajanja stanja ON i OFF ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim brzinama β_{ON} i β_{OFF}. Izvor u stanju OFF ne generira pakete, a u stanju ON generira pakete stalnom brzinom r paketa u sekundi. Trajanje slanja jednog paketa na transmisijsku liniju iznosi T sekundi. (a) Skicirajte Markovljev lanac za opisani model, (b) napišite jednadžbe stanja i (c) odredite vjerojatnosti pojedinih stanja (P_{ON} i P_{OFF}). (d) Odredite indeks usnopljenosti (praskavosti) η izvora prometa u ovisnosti od parametara β_{ON} i β_{OFF}. (*Indeks usnopljenosti* η je definiran kao omjer vršne i srednje brzine bita koje generira izvor prometa), (e) intenzitet prometa (u erl) ponuđen spremniku transmisijske linije, te (f) srednji broj paketa N u spremniku ako je srednje kašnjenje slanja paketa jednako $5T$. (g) Ako su β_{ON} = 1 s^{-1}, β_{OFF} = 1/3 s^{-1}, r = 4 paketa/s i T = 1s je li spremnik (= sustav posluživanja) stabilan? Komentirajte rezultate i predložite što bi trebalo učiniti.

***Rješenje*:**

(a)



(b) i (c) Jednadžbe stanja:

$$\left.\begin{cases}\beta_{ON}P_{ON} = \beta_{OFF}P_{OFF} \\ P_{ON} + P_{OFF} = 1\end{cases}\right\} \Rightarrow P_{ON} = \frac{\beta_{OFF}}{\beta_{ON}+\beta_{OFF}}; P_{OFF} = \frac{\beta_{ON}}{\beta_{ON}+\beta_{OFF}}$$

(Treba istaknuti da je funkcija razdiobe stanja Bernoullijevog tipa sa z-transformacijom izraženom polinomom prvog stupnja: $P_{ON} + zP_{ON}$).

(d) Budući da se promet ne generira u stanju OFF, vjerojatnost P_{ON} pretstavlja faktor aktivnosti izvora. Imamo:

$$\eta = \text{indeks usnopljenosti} = \frac{r}{rP_{ON}} = \frac{1}{P_{ON}} > 1$$

(e) Intenzitet prometa koji generira izvor dobiva se uzimanjem u obzir da je T vrijeme transamisije jednog paketa:

$$\rho = rP_{\text{ON}}\left[\text{paket/s}\right]\times T\left[\text{s/paket}\right] = rP_{\text{ON}}T\left[\text{erl}\right] = rT\,\frac{\beta_{\text{OFF}}}{\beta_{\text{ON}}+\beta_{\text{OFF}}}\left[\text{erl}\right]$$

(f) Srednji broj paketa N u transmisijskom spremniku je u relaciji s poznatim srednjim transmisijskim kašnjenjem paketa (Littleova formula) koje je u ovom slučaju $5T$:

$$N = rP_{\text{ON}}\left[\text{paket/s}\right]\times 5T\left[\text{s}\right] = 5rP_{\text{ON}}T\left[\text{paket}\right]$$

(g)
$$\rho = rT\,\frac{\beta_{\text{OFF}}}{\beta_{\text{ON}}+\beta_{\text{OFF}}} = 4\times 1\times\frac{1/3}{1+1/3} = 1\ \text{erl}$$

Uz intenzitet prometa 1 erl transmisijski spremnik nije stabilan te je neophodno povećati kapacitet (brzinu prijenosa) linije kako bi se mogle prenositi informacije generirane iz tog izvora.

15. Neka tvrtka raspolaže s dvije linije od po 1 Mbit/s za povezivanje dviju njihovih lokacija. Pretpostavimo da paketi na tim linijama dolaze brzinom 150 paket/s sukladno Poissonovom procesu, a duljine paketa ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom 10 kbit. Kad su obje linije zauzete, paketi ulaze u spremnik (red čekanja) te seodašilju tek kad je neka linija slobodna (raspoloživa). (a) Odredite vjerojatnost da će paket čekati u redu.(b) Kolika je vjerojatnost da paket ne čeka dulje od 40ms?

***Rješenje*:**

Parametri sustava: $c = 2$, $\lambda = 150$ paket/s, $1/\mu = (10\ \text{kbit/paket})/(1\ \text{Mbit/s}) = 10\text{ms/paket} \Rightarrow \mu = 100$ paket/s, $a = \lambda/\mu = 1.5$, $\rho = a/c = \lambda/c\mu = 3/4$.

(a) Prvo treba izračunati p_0 za sustav M/M/c:

$$p_0 = \left\{1 + 1.5 + \frac{(1.5)^2}{2!}\frac{1}{1-3/4}\right\}^{-1} = \frac{1}{7}$$

Vjerojatnost čekanja dobiva se pomoću Erlang-C formule:

$$E_{2,n}(a) = E_{2,2}(1.5) = P_Q = \frac{a^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}p_0 = \frac{(1.5)^2}{2!}\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\frac{1}{7} = \frac{9}{14} \approx 0.643$$

(b) Vjerojatnost da paket čeka dulje od 40ms:

$$\begin{aligned} P(W > t = 40\,\text{ms}) &= 1 - P(W \le t = 40\,\text{ms}) \\ &= E_{2,n}(a)e^{-c\mu(1-\rho)0.04} = \frac{9}{14}e^{-200(1/4)0.04} \\ &= \frac{9}{14}e^{-2} \approx 0.0875 \end{aligned}$$