ROBI

Predavanje 30.11.2010.

Senzitivna ovisnost o početnim uvjetima

Definicija SOPU :

→ nastavak

Postoji $\delta > 0$ - konstanta razdvajanja i ~~za svaki~~ postoji y_0 i za svaku okolinu iz .... tako da će

δ - parametar razdvajanja

3 - metode za dokazivanje da je dani δ SOPU u danoj točki (SOPU na cijelom intervalu) (neprekinutost u točki - neprekinutost na intervalu)

Metode za SOPU :

1. - po definiciji - konkretan f, točka i iteriranje
2. - Ljapunovljev eksponent od $f(x)$ → HIT
3. - SOPU za jednogrbaste iterature $S(f(x))$ - švarcijan

Zadatci po definiciji

1.) - nemamo puno takvih operatora, nekoliko.

$f(x) = 3x \rightarrow$ linearni, ali SOPU

$f(x) = \frac{1}{3}x \rightarrow$ nije SOPU

SOPU $\rightarrow$ nužan uvjet, ali nije dovoljan za kaotičnost

a)

$$f^2(x) = f(f(x)) = 3f(x) = 3 \cdot 3 \cdot x = 3^2 x$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = 3 \cdot f^2(x) = 3 \cdot 3 \cdot 3x = 3^3 x$$

⋮

indukcijom

⋮

$$f^n(x) = 3^n x \quad \text{odnosno} \quad \left.\begin{aligned} f^n(x_0) &= 3^n x_0 \\ f^n(y_0) &= 3^n y_0 \end{aligned}\right\} \text{razlika između dvije orbite} =$$

$$f^n(x_0) - f^n(y_0) = 3^n(x_0 - y_0) \geq \frac{1}{2} = \delta$$

$\rightarrow$ OVAKAV OČEKIVATI NA ISPITU! $\downarrow$

možemo odabrati po volji veliku konstantu razdvajanja. U svakoj realnoj točki on je SOPU

b) $f(x) = \frac{1}{3}x$ ... razlika će težiti k nuli

$$f^n(x) = \frac{1}{3^n}(x) \; ; \; f^n(x_0) = \frac{1}{3^n}(x_0)$$

$$f^n(y_0) = \frac{1}{3^n}(y_0)$$

- razlika:

$$f^n(x_0) - f^n(y_0) = \frac{1}{3^n}(x_0 - y_0) \leq \delta \rightarrow$$

Općenito:

$f(x) = ax$ je SOPU za cijelo $\mathbb{R}$ za $a > 1$

$f(x) = ax$ nije SOPU na $\mathbb{R}$ za $a < 1$

Što je za $a = 1$? Gdje i kada je on SOPU?

Primjedba:

Profa pita da li je kojim slučajem za $rx(1-x)$ moguće eksplicitno izraziti što je $f^n(x_0) = ?$

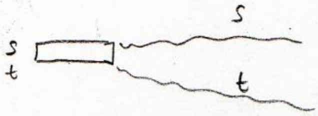
Što za shift operatorom? Primjer iteratora koji je SOPU u jednoj točki, a nije u drugoj točki:

$$f(x) = x^2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{jest SOPU u } 1 \\ \text{nije SOPU u } 0 \end{array}\right\} \text{ nekome za zadaću!}$$

$$\left.\begin{array}{l} f^n(x_0) \\ f^n(y_0) \end{array}\right\}, \text{ ako je } \begin{array}{l} x_0 = 0, \text{ nije SOPU} \\ x_0 = 1, \text{ jest SOPU} \end{array}$$

Sljedeći primjer: SHIFT OPERATOR

Pokaži da je shift operator SOPU u $s = 10101010\ldots$



$s = 1010\,0\,1010\ldots$

$t = 1010\,10\,101\ldots$

$$x = (1-1) + \frac{1}{2}(0-0) + \frac{1}{4}(1-1) + \frac{1}{8}(0-0) + \frac{1}{16}(1-0)$$

→ dokazujemo da su blizu na početku, a zatim da nisu blizu nakon određenog broja iteracija

$\sigma^4(s) = 1\,0\,1\,0\,1$

$\sigma^4(t) = 0\,1\,0\,1\,0$

$\rightarrow$ za $n \geq 4$, $\sigma^n(s)$ i $\sigma^n(t)$ se razlikuju u ovim mjestima.

~~$|\sigma^n(s) - \sigma^n(t)| = 2$ za~~

Ono što može biti različito je naše biranje t-a. Barem da su blizu za $\frac{1}{4}$.

Kakva god da je zadana točka u zadatku, konstanta razdvajanja je 2

2 je maksimum po definiciji.

2.) Ljapunovljev eksponent λ

$$\lambda = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |f^i(x_n)|$$

$\rightarrow$ teški problemi u egzaktnom izračunu

Tvrdnja $\rightarrow$ ako je $\lambda > 0$, tada je $f(x)$ SOPU u x_0

ako je $\lambda < 0$, tada nije $f(x)$ SOPU u x_0

ako je $\lambda = 0$, najvjerovatnije je riječ o bifurkaciji

Napomena $\rightarrow$ kad imamo operator o r, tada za konkretni r imamo konkretni λ.

Da li iz ove njegove hipoteze možemo izračunati nulu?

Dokaz $\rightarrow$ $\lambda = ?$

$$e^{\lambda n} \approx \frac{|f^n(x_0) - f^n(y_0)|}{|x_0 - y_0|} \quad / \ln$$

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \left(\ln \frac{f^n(x_0) - f^n(y_0)}{|x_0 - y_0|} \right) \approx \frac{dF'}{dx}(x_0)$$

$$\approx \frac{1}{n} \ln \frac{1}{dx} \left| \frac{d}{dx} f^n(x_0) \right|$$

– kako derivirati n-tu komp?

Predavanje

7. 12. 2011.

Julian Julia - Set

$\boxed{f(z) = z^3 - 1}$

$$z_{n-1} = z - \frac{3z}{z^3-1}$$

Unutar Mandelbrotovog seta $\rightarrow$ zatvorena krivulja

Teorem

$|c| < \frac{1}{4} \rightarrow$ zatvorena krivulja

Mandelbrotov skup:

Skup svih takvih skupova takav da je J^c povezan

$$M \subseteq \left\{ z, \ |z| < \frac{1}{4} \right\}$$

$$M \cap \left\{ z, \ |z| > 2 \right\} = \emptyset$$

Tvrdnja: $M = S \in \mathbb{C}, \quad f^n(0)$ omeđen $\forall n \in \mathbb{N}$

Predavanje 14.12.2011.

tvrdnja: $f\ (0,1) \to (0,1)$ jednogrbasti

$f(x)$ je sopu na $[0,1]$

Ideja dokaza - slica dokaza:

koristi se „Spike Lema" - neka je $f\ (0,1) \to (0,1)$ jednogrbasti sa svojstvom 1 i 2. Tada $\exists \in [0,1]$ postoji grba $f^n(x)$ čija je baza sadržana

Spike lema ključna je kod dokaza da je SOPU..? jednogrbasti Koristit ćemo za dokaz kaosa.

Kako koristiti Spike lemu? u dokazu da $f_n(x_0) - f_n(y_0) \geq \frac{1}{2}$?

TEST NA SOPU: f jednogrbasti, zadovoljava svojstvo 1

$S(f)(x) < 0,\ \forall x \in (0,1)$ → Schwarzijan derivacija od f
→ odgovara da je „napeta" krivulja

Tada je f SOPU.

1. uvjet se ne provjerava, treba prebrojati broj grbi od n-te kompozicije.
2. Schwarzijan je kompot prve, druge i treće derivacije.

$S(f)(x) =$

Jedna od pikanterija iz skripte → tko može dokazati da ako je Schwartzijan < 0 ... za 5 na usmenom.

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 \quad ; f'(x) \neq 0$$

$$\bar{S}f(x) = 2f'(x)\, f'''(x) - 3\left(f''(x)\right)^2$$

Tvrdnja: $S(f)(x) < 0 \iff \bar{S}(f)(x) < 0$ → ČESTO NA MI!

→ nudi ~~analizu kvantitativne~~ kvalitativnu analizu prve derivacije

$$S(f) = \frac{\bar{S}(f)}{2f'(x)}$$

Mi dokazujemo da je $\bar{S} < 0$ jer je jednostavnije. Krećemo od populacijskog.

$$f_r(x) = r \cdot x(1-x)$$

$$f' = r(1-x) - rx = r - rx - rx = r - 2rx$$

$$f'' = -2r$$

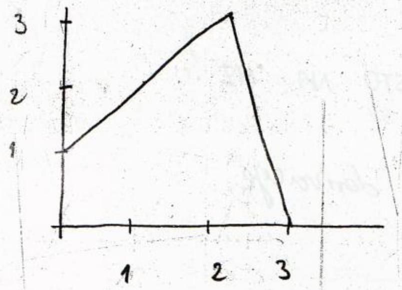
$$f''' = 0$$

$$\bar{S}f(x) =$$

Predavanja - Period 3

21.12.2011.

funkcija s intervala $[0,3]$ na interval:



$f(x)$ je po dijelovima linearna

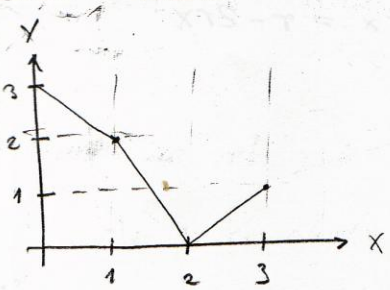
$f: [0,3], [0,3]$

PTF 3 -

11.1.2012.

Posljedica preliminarne eliminacije intervala

- nastavak - zadatka

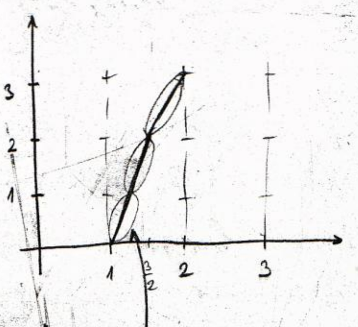


$f(x)_{[0,1]} = -x+3$ → ovi zubi dijele $[0,1]$ na drugoj osi

$_{[1,2]} = -2x+4$ $[1,2]$ na drugoj osi

$_{[2,3]} = x-2$ $[2,3]$ na drugoj osi

$$f^2(x) = \begin{cases} -2(-2x+4)+4 = 4x-4, & x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ -2x+4 = 2x-1 & , x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{cases}$$



Broj PTP3 točaka je djeljiv s 3

Zad 11.

Univerzalnost prijelaza u kaos 18. 1. 2012.

Predavanje_3. pdf

Uto, sri, čet od 4–6

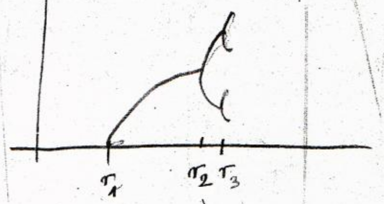
teme → dokaz Sarkovskog
→ jednogrbasti operatori
→ Z2 prostor
→ fraktali
→ tema iz neke knjige

1 zad računskog tipa iz ovog gradiva!

sopu + tranzitivnost +

↓

det + Ljapunovljev + schwarcijana → 3 zadatka!



nastaju periodičke točke perioda 1, 2, 3...

$r_1 = 3$

$r_2 = 3{,}449489... = 1 + \sqrt{6}$

r_2

r_3

⋮

razlika za svaka 2 broja (susjedna):

$\delta_1 = r_2 - r_1 = 0{,}44949...$

⋮

$\lim \delta_k = 0$ – eksperimentalno lako dokazivo

Ono što je spektakularno je to što je izračunao brzinu konvergencije:

$\delta = 4{,}666920...$ i on je isti bez obzira na r

Matematička potvrda univerzalnosti:

Tm 1.5 → o jednogrlastim operatorima

Na ispitu će biti zadatak tipa provjere, da li operator zadovoljava test na kaotičnost (sopu, tranzitivan, guste točke) i da li zadovoljava Feigenbaumov broj.

1° Izračunati maksimum

2° Monotonost

3° Schwarzijana

$$S(f)(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 < 0$$

$$\bar{S}(f)(x) = 2f'(x)f''(x) - 3f''^2(x) < 0$$

ZAŠTO JE BITNO DA JE < 0?

$2f'f''' < 3f''$