3. CIKLUS

1. PREDAVANJE

9. 12. 2009

$\boxed{\boxed{\text{SEMINAR}} \quad \text{SRI} \quad \underline{13. 1.} \quad 17h}$

SOPU $\quad y = f(x)$

1. po $\boxed{\text{def}}$
2. ako je $f(x)$ jednoglaviti $\quad S(f(x)) < 0$
3. $\underline{\lambda > 0}$ LJAPUNOVLJEV EKSPONENT

$$\downarrow$$

$$|f^n(x_0) - f^n(y_0)| \approx e^{\lambda n} |x_0 - y_0| \quad , n \to \infty$$

niz iteracije $f^n(x_0)$ je:

- STABILAN (nije SOPU) $\quad \lambda < 0$
- BIFURKACIJSKI $\quad \lambda = 0$ (nije SOPU)
- JE SOPU $\quad \lambda > 0$

TVRDNJA

$y=f(x)$ glatka (neprekidna i prva derivacija je neprekidna)

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_k)|$$ ← $\boxed{\text{DOKAZ MI}}$

ZAD 1

$r>0$

U ovisnosti o realnom parametru $r>0$ izračunati Ljapunovljev eksponent za tenda operator

$$f(x) = r(1-|2x-1|) \qquad x\in[0,1]$$

Potom odrediti za koje vrijednosti parametra r je $f(x)$ SOPU?

ZAD 2

Za f-ju $f(x)=3x$, $x\in[0,1]$ izr. Ljap. eksp., te pokazati da je ova f-ja SOPU?

$$f(x) = 3x$$

$$f'(x)=3$$

$$f'(x_n)=3$$

$$|f'(x_n)|=3 \Rightarrow \ln|f'(x_n)| = \ln 3$$

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_n)|$$

$$\lambda = \ln 3 > 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} |f'(x_n)| = \sum_{k=1}^{n} \ln 3 = 3\cdot n$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_n)| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln 3 = \frac{1}{n} n \ln 3 = \ln 3$$

$$\ln A + \ln B = \ln(A\cdot B)$$

PERIODIČKE TOČKE REDA 2

FIKSNE TOČKE OD $f^2(x)$ A KOJE NISU NASLIJEĐENE OD $f(x)$

$$\left.\begin{aligned} x^*_{1,r} &= \frac{r+1+\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r} \\ x^*_{2,r} &= \frac{r+1-\sqrt{(r+1)(r-3)}}{2r} \end{aligned}\right\} f(x) \text{ F. T.}$$

$f^2(x) \to 4$ F.T.

2 naslijeđene od $f(x)$

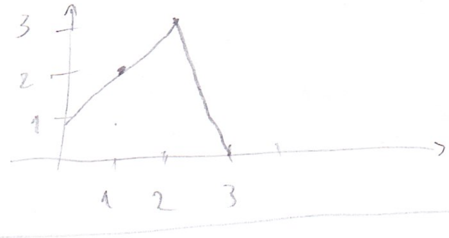
$$x^*_{3,r} = 0$$

$$x^*_{4,r} = 1 - \frac{1}{r}$$

$\boxed{\text{PER. T. REDA 3}}$ FT OD $f^3(x)$ A KOJE NISU NASLIJEĐENE OD $f(x)$ i $f^2(x)$

$\boxed{\text{ZAD 1}}$ Izračunati barem 1 per točku reda 3 od iter. $f(x)$ kao na slici, gdje se zna:

$$f(0)=1 \quad f(1)=2 \quad f(2)=3 \quad f(3)=0$$



RJ. $\boxed{x^* = \frac{3}{4} \text{ JE P. T. PERIODA 3 iteratora } y=f(x) \text{ zadana ZAD 1.}}$

$$\frac{3}{4} \to f\left(\frac{3}{4}\right) \to f^2\left(\frac{3}{4}\right) \to f^3\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

DOKAZ DA JE $\frac{3}{4}$ P.T PERIODA 3

RJ: $x \in [0,2]$, $f(x)$ je pravac $\overset{x_0\ y_0}{(0,1)}$ i $\overset{x_1\ y_1}{(2,3)}$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$y - 1 = \frac{3-1}{2-0}(x-0)$$

$$\boxed{y = x + 1}$$

$x \in [2,3]$ $f(x)$ je pravac $\overset{x_0\ y_0}{(2,3)}$ i $\overset{x_1\ y_1}{(3,0)}$

$$y - 3 = \frac{0-3}{3-2}(x-2)$$

$$\boxed{y = -3x + 9}$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} h_1(x) = x+1, & x \in [0,2] \\ h_2(x) = -3x+9, & x \in [2,3] \end{cases}}$$

EKSPLICITNO NAĐI $f^2(x)$ i $f^3(x)$ ZA DZ

DUGO TRAJE :)

- primijeti da $f(x^*) = x^*$ za $x^* \in [2,3]$

to se vidi iz grafa

periodična točka $x^* \notin [2,3]$

↳ ZBOG OVOGA SAMO TRAŽIMO NA $[0,1]$ i NA $[0,2]$

$$f^2(x) = \begin{cases} \ldots & [0,1) \\ & [1,2) \end{cases}$$

$x \in [0,1]$, $f^2(x) = f(f(x)) = h_1(h_1(x))$ ($x \in [1,2]$; $x \in [0,1]$)

$x+1 \longrightarrow x+1$

$x+1+1 = \underline{x+2}$

$$f^2(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [0,1] \\ & \end{cases}$$

$x \in [1,2]$, $f^2(x) = f(f(x)) = h_2(h_1(x))$

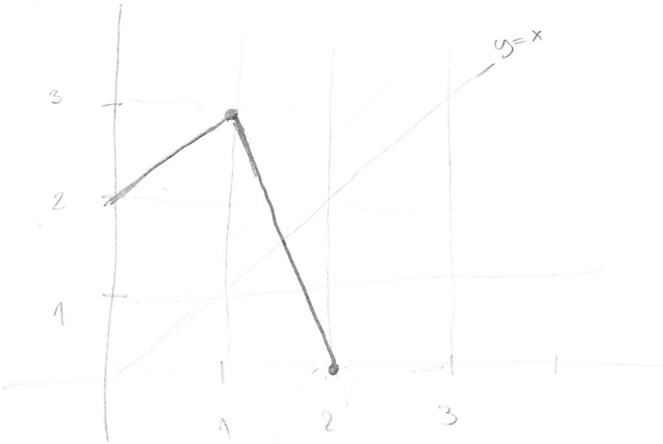
$x\in[2,3]$

$x \in [1,2]$

$x+1 \to -3x+9$

$-3(x+1)+9 = \boxed{-3x+6}$, $x \in [1,2]$

$$f^2(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [0,1] \\ -3x+6, & x \in [1,2] \end{cases}$$



f^3 ILI ?

f^2 ima P.T u $[1,2]$ PA ZATO $[2,3]$ NE nalazimo

f^3

$x \in [0,1]$, $f^3(x) = f(f(f(x))) = h_2(h_1(h_1(x)))$

$[0,1]$

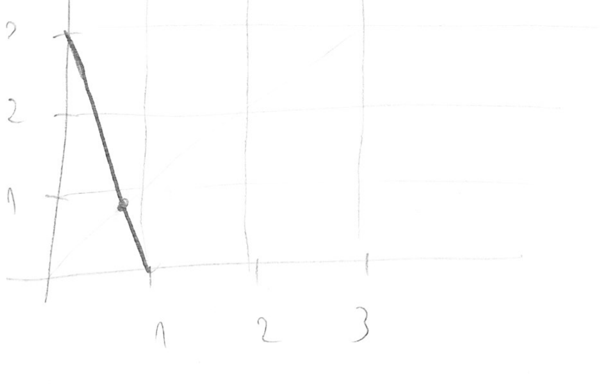
$x \in [1,2]$

$x \in [2,3]$

$= x+2 \mapsto -3x+9$

$-3(x+2)+9 = \boxed{-3x+3}$

$$f^3(x) = \begin{cases} -3x+3, & x \in [0,1] \end{cases}$$



$-3x^*+3 = x^*$

$$\boxed{x^* = \frac{3}{4}}$$

DZ

ZAD 2.

Izračunati barem jednu P.T. reda 3 od iterator $f(x)$ kao na slici, gdje se zna da je

$f(0)=3 \quad f(1)=0 \quad f(2)=1 \quad f(3)=2$

$f(0)=3 \quad f(1)=4 \quad f(2)=0 \quad f(3)=1 \quad f(4)=2$