5. Domaća zadaća

1. Neka je $f:[a,b]\to[a,b]$ neprekinuti iterator. Iskazati def. f.t. za periodičke točke osnovnog perioda 5 i 8. Potom, koristeći Šarkovski teorem pokazati da ako $f(x)$ ima ptp 5, onda ima i 3

x^* je periodična točka perioda 8 od $f(x)$ ako je $f^8(x^*)=x^*$ i $f^k(x^*)\neq x^*$ $\forall k\in[1,m\rangle$

x^* je ptp 8 od $f(x)$ ako je $f^8(x^*)=x^*$ i $f^k(x^*)\neq x^*$ $\forall k\in\langle 1,m\rangle$

Šarkovski teorem $3\succ 5\succ\cdots\succ 8\succ 4\succ 2$

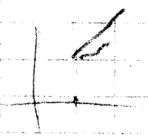
$\Rightarrow$ ako ima ptp 5, onda ima i 8.

2. Iskazati def. ptp 3 za neprekinuti iterator x. Potom pokazati da je $x^*=1$ ptp 3 za $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$

x^* je ptp 3 od $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ ako $f^3(x^*)=x^*$ i $f^k(x^*)\neq x^*$ $\forall k\in\langle 1,3\rangle$

$f(0)=-1$ $\quad f(-1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-1=1$

$f(1)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1=0$



$0\mapsto 1\mapsto -1\mapsto 0$

3. Pokazati da ako je $f:[1,2]\to[1,2]$ neprekinuti iterator i da je $f([1,2])\cap[1,2]=\emptyset$ da tada f nema f.t. na intervalu 1,2

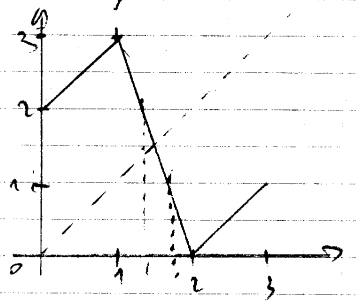
$f(x^*)=x^*$, što znači da bi $f([1,2])\cap[1,2]$ moraju imati bar 1 zajedničku točku, x^*; budući je nema, zaključujem da $f(x)$ nema f.t. na $[1,2]$

4. Pokazati da ako je $f[2,3]\to[2,3]$ neprekinuti iterator i ako je $f([2,3])\cap[2,3]=[2,3]$ da tada $f(x)$ ima f.t. na $[2,3]$

Ako je iterator neprekinut, znači da će $f(x)$ barem jednom presjeći pravac $y=x$, a to je upravo fiksna točka.

5. Veći je broj f.t. od $f^3(x)$ jer se naslijeđuju sve fiksne točke i od reda 1 i od reda 2, dok su ptp 3 f.t. koje su f.t. od 3, ali nisu ni od 1 ni od 2.

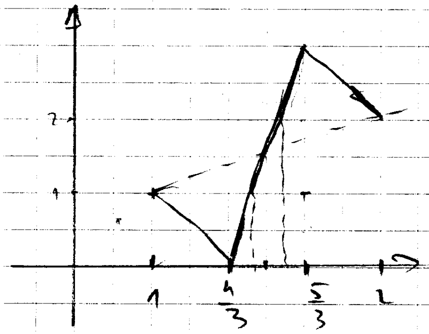
6. $f:[0,3]\to[0,3]$ - nema niti jednu ptp 3 na $[0,3]$



1° $f([0,1])=[2,3]$ $f[0,1]\cap[0,1]=\emptyset$

$f([1,2])=[0,3]$ $f([1,2])\cap[1,2]=[1,2]$ može

$f([2,3])=[0,1]$



2° što je $f(x)$ na $[1,2]$, $f(x^*)=x^*$

što je $f^2(x)$ na $[1,2]$ $f^2(x^*)=x^*$

što je $f^3(x)$ na $[1,2]$ $f^3(x^*)=x^*$

$(0,2)$ $(1,3)$ $y-2=\frac{3-2}{1-0}(x)$ $y=x+2$

$(1,3)$ $(2,0)$ $y=\frac{3}{1-2}(x-2)=-3x+6$

$(2,0)$ $(3,1)$ $y=\frac{1}{3-2}(x-2)=x-2$

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\in[0,1] \\ -3x+6, & x\in[1,2) \\ x-2, & x\in[2,3] \end{cases}$$

$f(x^*)=x^*$ $-3x^*+6=x^*$

$x^*=\frac{3}{2}$

$$f^2(x)\begin{cases} x\in[1,\frac{4}{3}) & -3x+6\to x-2 & f(x)=-3x+4 \\ x\in[\frac{4}{3},\frac{5}{3}] & -3x+6\to-3x+6 & f(x)=9x-12 \\ x\in[\frac{5}{3},2) & -3x+6\to x+2 & f(x)=-3x+8 \end{cases}$$

$9x-12=x^*$ $8x^*=12$ $x^*=\frac{3}{2}$

$x\in[1,\frac{4}{3}]$ $-3x+4\to x+2$

$x\in[\frac{4}{3},\frac{13}{9}]$ $9x-12\to x+2$

$x\in[\frac{13}{9},\frac{14}{9}]$ $9x-12\to-3x+6$

$x\in[\frac{14}{9},\frac{5}{3}]$ $9x-12\to x-2$

$x\in[\frac{5}{3},2]$ $-3x+8\to x-2$

$$f^3(x)=\begin{cases} -3x+6, & x\in[1,\frac{4}{3}] \\ 9x-10, & x\in[\frac{4}{3},\frac{13}{9}] \\ -27x+42 & x\in[\frac{13}{9},\frac{14}{9}] \\ 9x-14 & x\in[\frac{14}{9},\frac{5}{3}] \\ -3x+6 & x\in[\frac{5}{3},2] \end{cases}$$

$-3x^*+6=x^*$ $x=3$ ~~x~~ ne pošto u interval

$9x^*-10=x^*$ $x=\frac{5}{4}$ => nije u interval

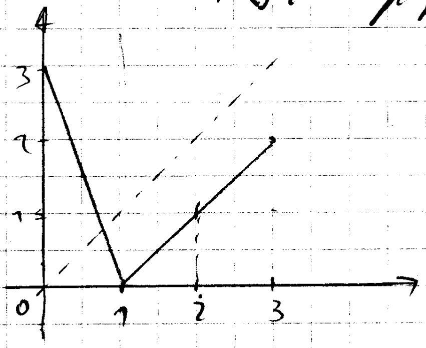
$-27x^*+42=x^*$ $x^*=\frac{42}{28}=\frac{3}{2}$, ✓

$9x^*-14=x^*$ $x^*=\frac{7}{4}$ nije u intervalu

$-3x+6=x$ $x=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ => nije u intervalu

$x^*=\frac{3}{2}$ je JEDINA f.t. od $f^3(x)$ na $[1,2]$, koja je ujedno 1 f.t. za $f(x)$ i $f^2(x)$ pa nije ptp 3 od $f(x)$

7. Neprekinuti iskrotos $f:[0,3]\to[0,3]$ Izračunati ptp 2 na na $[1,2]$ i ptp 3 na $[2,3]$



$f([0,1])\supseteq[0,3]$ => f.t.

$f([1,3])=[1,2]$ $\quad -3x+3$

$f(x)=x-1$

$f(x^*)=x^*$ $\quad x^*-1=x^*$

0,3 1,0

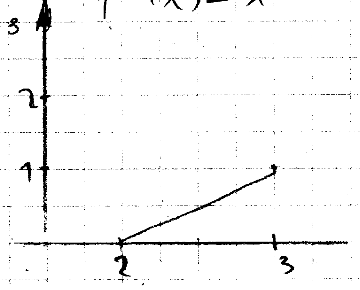
$[1,2]$: $x-1 \to -3x+3$

$[2,3]$: $x-1 \to x-1$

$$f^2(x)=\begin{cases} -3x+6, & x\in[1,2] \\ x-2, & x\in[2,3] \end{cases}$$

$f^2(x^*)=x^*$ $\quad -3x^*+6=x^*$ $\quad x^*=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ ptp 2

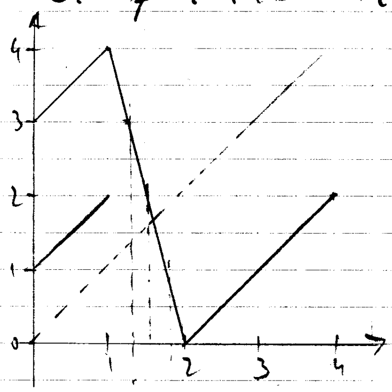
$f^2(x^*)=x^*$ $\quad x^*-2=x^*$ $\to$ nema f.t. p.t.



$[2,3]$ $\quad x-2\to -3x+3$ $\quad f^3(x)=-3x+9$

$f^3(x^*)=x^*$ $\quad -3x^*+9=x^*$ $\quad x^*=\frac{9}{4}$ ✓

8. $f:[0,4]\to[0,4]$ Izračunati ptp 3 ne $[0,1]$



0,3, 1,4 . $y-3=\frac{4-3}{1-0}x = x$

$y=x+3$

$f(x)=x+3$

$f(x^*)=x^*$ $\quad x^*+3=x^*$

nema ptp. 1

$x+3\to x-2$ $\quad f^2(x)=x+1$

$f^2(x^*)=x^* \Rightarrow x^*+1=x^* \Rightarrow$ nema ptp 2

$(1,4)(2,0)$ $\quad y=\frac{4}{1-2}(x-2)=-4x+8$

$x+1\to -4x+8$

$f^3(x)=-4x+4$ $\quad f^3(x^*)=x^*$ $\quad -4x^*+4=x^*$

$x^*=\frac{5}{4}$ je ptp 3.

5. Zadanje nepokretnih iteracija $f:[0,4]\to[0,4]$

ptp 2 na intervalu $[1,2]$

$f(x)=-4x+8$ $\quad f(x^*)=x^* \Rightarrow x^*=\frac{8}{5}$

$[1,\frac{3}{2}]$ $\quad -4x+8\to x-2 \Rightarrow -4x+6$

$[\frac{3}{2},\frac{7}{4}]$ $\quad -4x+6\to -4x+8 \to 16x-24$

$[\frac{7}{4},2]$ $\quad -4x+8\to x+3 \to -4x+11$

$$f^2(x)=\begin{cases}-4x+6, & x\in[1,\frac{3}{2}]\\ 16x-24 & x\in[\frac{3}{2},\frac{7}{4}]\\ -4x+11 & x\in[\frac{7}{4},2]\end{cases}$$

$-4x^*+6=x^*$ $\quad x^*=\frac{6}{5}\Rightarrow$ p.t.p. 2

$16x^*-24=x^*$ $\quad x^*=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}\to$ naslijeđeno iz $f(x)$ nije ptp 2

$\cancel{-4x^*+11=x^* \quad x^*=\frac{11}{5}}$ izvan je intervala