Univerzalnost prelaska u kaos → biti će zadatak

- gustoća periodičnih točaka
- tranzitivnost iteratora
- sopu - <u>Schwarzian</u>!

- brzina konvergencije

r_{k+1}

$\lim (r_{k+1} - r_k) = 0$

$\lim_{k \to \infty} r_k = 3{,}5699$ → vrata u kaos

$\delta = 4{,}669201$ ⇒ naći knjigu di su objašnjeni pokusi odraza

Universality in chaos, Cvitanović

- na ispitu će biti zad. da li iterator zadovoljava uvjete prelaska u kaos

- važno iskazati teorem

$$S(f(x)) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

$$= \frac{2f'f''' - 3f''^2}{2(f'(x))^2} < 0$$

$$\overline{S}(f(x)) = 2f'(x)f'''(x) - 3(f''(x))^2$$

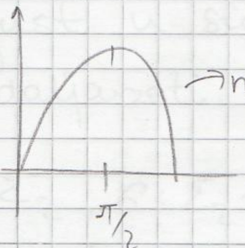
$f(x) = \sin \pi x$

$x_{n+1} = r \sin \pi x_n$ } dokaži da zadovoljava univerz

$x_n \in [0,1]$ } prelazak u kaos

a) $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \neq 0$ $x = 1 \rightarrow$ kandidat

b)



$\rightarrow$ unimodalna na intervalima

c) $S(f(x)) = \dfrac{f'''}{f''} - \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{f''}{f'}\right)^2 < 1$

$f_r(x) = rxe^{-x}$

a) $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} \neq 0$ $f' = re^{-x} + rxe^{-x}(-x)$
$= re^{-x} - rx^2 e^{-x}$

$f'' = -xre^{-x} - 2rxe^{-x} - rx^2 e^{-x}(-x)$
$= -xre^{-x} - 2rxe^{-x} + rx^3 e^{-x}$

b)

– unimodalna po dijelovima

Gustoća periodičkih točaka i tranzitivnost

$f:[a,b] \to [a,b]$

1) f je SOPO na $[a,b]$
2) skup svih per. točaka PTPn je gust u tom intervalu
3) f je tranzitivan

↳ tada je f kaotičan iterator

Def. gustoće - A podskup $[a,b]$ je gust na $[a,b]$ ako

Definicija gustoće u metričkom sustavu:

$([a,b], d)$

↳ $d(x,y) = |x-y|$

(Σ, d) dis $= \sum_{n=0} \frac{1}{2^n}(s_n - t_n)$

A je podskup od x, je gust u X ako za svaki $x \in X$ i za svaki $y > 0$ postoji $a \in A$.

$A \subseteq X$ je gust ako za svaku okolinu $V \subseteq X$, $A \cap V \neq 0$.

Kontra gustoći je rijetkost, tj. poroznost.

Skup polinoma na $[0,1]$ je gust u skupu neprekinutih funkcija na $[0,1]$

Problem gustoće na nekom skupu nije ništa drugo nego Fourierova, Taylorova, ... analiza.

Skup svih periodičkih točaka shift iteratora je gust u sigma 2. Dokazat ćemo to pomoću udaljenosti.

Σ_2, $\sigma: \Sigma_2 \to \Sigma_2$

→ prepoznajemo periodičke točke nekog reda po blokovima koji se ponavljaju

$\underbrace{01}\underbrace{01}\underbrace{01}010 \to 2$

$010\underbrace{010}010.. \to 3$

A skup svih periodičkih točaka (sve blokaste beskonačne znamke)

A_σ - gust u Σ_2

$t \in \Sigma_2 \; \exists S \in A, \; dis(t) < \varepsilon$

$t = t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 \dots$

$S = t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 \to S$ će postati blokasta

blizu su

$S = t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 . t_0 t_1 t_2 t_3 t_4 \; t_0 t_1 t_2 t_4 \dots$

Kako dokazujemo gustoću

$f:[0,1]\to[0,1]$

$f(0)=f(1)=0$

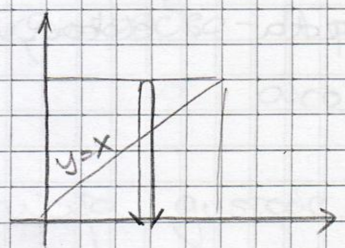
$f[0,1]=[0,1] \to \{PTP_n,\ n\in\mathbb{N}\} \subseteq [0,1]$

$S(f)<0$

$\forall V\subseteq[0,1],\ A\cap V\neq 0$

Spojit lema!

IZGUBIO SAM SE OVDJE!



za $f^2(x)\subseteq V$

$V\cap A\neq 0$

TRANZITIVNOST

Ima ga svugdje

$f:[0,1]\to[0,1]$ je tranzitivan

ako $\forall V\subseteq[0,1],\ \forall U\subseteq[0,1]$

$\exists n\in\mathbb{N},\ f^n(U)\cap V\neq\emptyset$

$I_0\subseteq[0,1]$

$\{I_0, f(I_0), f^2(I_0)\ldots\}\subseteq[0,1]$

$\forall V\subseteq[0,1],\ \exists n\in\mathbb{N}$

$f^n(I_0)\cap V\neq 0$

Pomoću spajt lume se lako dokaže

Tranzitivnost Σ_2 - posljedica da je skup gust

- postoji $s^* \in \Sigma_2$ $\{s^*, \sigma(s^*), \sigma^2(s^*)$

- s^* - je fenomenalna, sadrži sve blokove

$s^* = 0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000 \ldots$

$\Rightarrow \sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$