FUNKCIJE KOMPLEKSNE VARIJABLE

Limes niza

Niz kompleksnih brojeva $(z_n) \subset \mathbf{C}$ je **konvergentan** ako postoji kompleksni broj z za koji vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N}) \quad n \geqslant n_\varepsilon \implies |z_n - z| < \varepsilon.$$

Broj z naziva se **limes** niza (z_n). Pišemo $z = \lim\limits_{n \to \infty} z_n$.

Cauchyjev niz

Niz (z_n) je Cauchyjev ako vrijedi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})\ n, m \geqslant n_\varepsilon \implies |z_n - z_m| < \varepsilon,$$

tj. ekvivalentno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbf{N})\ |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon, \qquad \forall n \geqslant n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{N}.$$

Derivacija funkcije kompleksne varijable

Neka je $z = x + iy$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Derivacija funkcije f u točki $z \in G$ definira se formulom

$$f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (1)$$

Cauchy–Riemannovi uvjeti

Teorem 1. *Neka su funkcije u i v neprekinuto diferencijabilne. Funkcija $f = u + iv$ je diferencijabilna u točki $z = x + iy$ onda i samo onda ako u i v zadovoljavaju Cauchy–Riemannove uvjete u točki (x, y):*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Za derivaciju f' vrijedi

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y. \tag{3}$$

DOKAZ. *Nužnost.* Δw možemo pisati u obliku $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$. Zato je

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \tag{4}$$

ako ovaj limes postoji, bez obzira kako Δx i Δy teže k nuli. Neka oni teže k nuli duž dviju koordinatnih osi:

(a) $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5}$$

(b) $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y \to 0$:

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{6}$$

Ako f ima derivaciju, tada se (5) i (6) moraju podudarati. Zato vrijede uvjeti (2).

Dovoljnost. u i v su neprekinuto diferencijabilne, i zato vrijedi

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1 \rho,$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_2 \rho,$$

gdje je $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ i $\lim_{\rho\to 0} \varepsilon_1 = \lim_{\rho\to 0} \varepsilon_2 = 0$. Sada je

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + i(v'_x \Delta x + v'_y \Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\rho}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Funkcije u i v zadovoljavaju Cauchy–Riemannove uvjete:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{u'_x(\Delta x + i\Delta y) + iv'_x(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\rho}{\Delta x + i\Delta y}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\rho}{\Delta x + i\Delta y}.\end{aligned}$$

Kako je

$$\left|\frac{(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\rho}{\Delta x + i\Delta y}\right| = |\varepsilon_1 + i\varepsilon_2| \to 0,$$

zato postoji ovaj limes i vrijedi

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = u'_x + iv'_x = f'(z).$$

Analitička funkcija

Ako je f derivabilna u svim točkama nekog područja G, tada za funkciju f kažemo da je **analitička ili regularna** u području G. Također kažemo da je f analitička u točki z_0 ako je analitička u nekoj okolini te točke.

Analitičnost i harmonijske funkcije

Funkcija $\psi = \psi(x,y)$ je **harmonijska funkcija** u području $G \subset \mathbf{R}^2$ ako je dvaput neprekinuto diferencijabilna i zadovoljava na G Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\Delta\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \equiv 0. \tag{7}$$

Realni i imaginarni dio analitičke funkcije su harmonijske funkcije. Dvije takve harmonijske funkcije koje zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete zovemo **konjugirani par** harmonijskih funkcija.

Konjugirane harmonijske funkcije

Ako je zadan realni dio analitičke funkcije $f = u + iv$, tada se njezin imaginarni dio može dobiti formulom

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0,y)}{\partial x}\,dy + C. \tag{8}$$

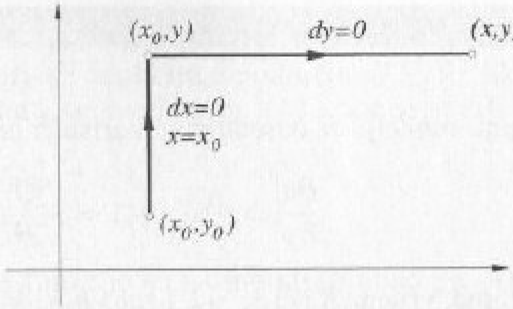
Obratno, za zadanu funkciju v njoj konjugirana funkcija u može se naći formulom

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\,dx + \int_{y_0}^{y} -\frac{\partial v(x_0,y)}{\partial x}\,dy + C. \tag{9}$$

Dokažimo ove formule. Vrijedi

$$dv = v'_x\,dx + v'_y\,dy = -u'_y\,dx + u'_x\,dy$$

(iskoristili smo Cauchy–Riemannove uvjete). Integrirajmo ovaj potpuni diferencijal po putu $(x_0,y_0) \to (x_0,y) \to (x,y)$ koji povezuje po volji odabranu točku (x_0,y_0) iz područja analitičnosti funkcije f, s točkom (x,y), tako da taj put leži u području G (sl. 4.2).



Sl. 4.2. Integral potpunog diferencijala ne ovisi o putu integracije. Taj put biramo tako da nam omogućuje jednostavno određivanje dijelova analitičke funkcije

Integral ne ovisi o putu integracije:

$$
\begin{aligned}
v(x,y)-v(x_0,y_0) &= \int_\gamma dv(x,y) \\
&= \int_{x_0}^{x} -u'_y(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} u'_x(x_0,y)dy
\end{aligned}
$$

i odavde slijedi (8). Analogno se izvodi i formula (9).

Konformna preslikavanja

Preslikavanje $f : G \to \mathbf{C}$ koje čuva kutove među krivuljama z ravnine nazivamo **konformnim**.
Kažemo da je preslikavanje $w = f(z)$ **konformno u točki** $z_0 \in \mathbf{C}$ ako ono čuva kut među krivuljama koje se sijeku u točki z_0. Kažemo da je preslikavanje f **konformno na području** G, ako je konformno u svakoj točki tog područja.
Ako je f analitička u nekoj okolini točke z_0 i ako vrijedi $f'(z) \neq 0$, tada je f konformno preslikavanje u točki z_0.

Omjer preslikavanja

Stavimo

$$
d_1 = |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}
$$

$$
d_2 = |\Delta w| = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}
$$

Tada je

$$
|f'(z_0)| = \left|\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0}\left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{d_2}{d_1} = \lambda
$$

Veličinu $|f'(z_0)|$ nazivamo **omjer preslikavanja** za funkciju f u točki z_0. Obič
označavamo sa λ. Za z dovoljno blizu točki z_0 vrijedi $|w - w_0| \approx \lambda |z - z_0|$. Da
luka krivulje γ se rasteže, a ako je $\lambda < 1$, element luka kriv

Kut zakreta i omjer preslikavanja

Neka je $f'(z_0) \neq 0$. Kut

$$\varphi = \arg f'(z_0)$$

naziva se **kut zakreta**, a

$$\lambda = |f'(z_0)|$$

naziva se **omjer preslikavanja** f u točki z_0.
Pri preslikavanju funkcijom f element luka krivulje zarotira se za kut φ te stegne (rastegne) za faktor λ.

Razgranište višeznačne funkcije

Neka je ε po volji malen broj. Točka $z_0 \in \mathbf{C}$ naziva se **razgranište** višeznačne funkcije ako obilaskom po bilo kojoj jednostavnoj zatvorenoj krivulji koja obuhvaća točku z_0, a leži unutar ε-okoline točke z_0, jedna grana višeznačne funkcije prelazi u drugu granu.
Ako se nakon n obilazaka vraćamo u početnu granu višeznačne funkcije, tada se razgranište naziva **algebarsko razgranište** reda $n-1$.

Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija $w = e^z$ definira se formulom

$$w = e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

Za nju vrijedi

$$|w| = e^x, \qquad \arg w = y,$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

To je analitička funkcija u cijeloj kompleksnoj ravnini, $(e^z)' = e^z$, periodička s periodom $2\pi i$.

Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija inverzna je eksponencijalnoj:

$$w := \operatorname{Ln} z \iff e^w = z.$$

To je višeznačna funkcija

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Nulta grana ima prikaz u algebarskom obliku:

$$\ln z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

To je analitička funkcija u području koje ne sadrži ishodište, i vrijedi

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Točka 0 je razgranište funkcije Ln. Obilaskom oko razgraništa u istom smjeru prelazimo stalno na nove grane. Takvo razgranište nazivamo **logaritamskim razgraništem.**

Trigonometrijske funkcije

Funkcije sinus i kosinus definiramo za svaki kompleksni broj z, formulama:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{8}$$

Tangens i kotangens izvedene su funkcije s poznatim formulama

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \tag{9}$$

definirane za one $z \in \mathbf{C}$ za koje je nazivnik različit od nule.

Trigonometrijske su funkcije analitičke u području definicije. Za njihove derivacije vrijede poznate formule. Na primjer,

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{iz}}{2} = \cos z.$$

Trigonometrijski identiteti

Teorem 1. *Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus zadovoljavaju identitete (za svaki $z, z_1, z_2 \in \mathbf{C}$):*

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= 1, \\ \sin(z_1 + z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \\ \cos(z_1 + z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2. \end{aligned}$$

DOKAZ. Tvrdnja slijedi iz definicijskih formula:

$$\begin{aligned} \sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1. \end{aligned}$$

Na sličan se način dokažu i adicijski teoremi.

Ostali trigonometrijski identiteti posljedica su ovih triju, i vrijedit će i za funkcije kompleksne varijable.

Hiberboličke funkcije

Definiraju se na isti način kao i u realnom slučaju:

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

2. Arkus (ciklometrijske) funkcije definirane su kao inverzne trigonometrijskim;

$$\begin{aligned} w &:= \operatorname{Arc}\sin z \iff z = \sin w, \\ w &:= \operatorname{Arc}\cos z \iff z = \cos w, \\ w &:= \operatorname{Arc}\operatorname{tg} z \iff z = \operatorname{tg} w, \\ w &:= \operatorname{Arc}\operatorname{ctg} z \iff z = \operatorname{ctg} w. \end{aligned}$$

3. Area funkcije inverzne su hiperboličkim.

$$
\begin{aligned}
w &:= \operatorname{Ar\,sh} z \iff z = \operatorname{sh} w, \\
w &:= \operatorname{Ar\,ch} z \iff z = \operatorname{ch} w, \\
w &:= \operatorname{Ar\,th} z \iff z = \operatorname{th} w, \\
w &:= \operatorname{Ar\,cth} z \iff z = \operatorname{ch} w.
\end{aligned}
$$

Möbiusova transformacija

Möbiusova transformacija (ili **razlomljena linearna funkcija**) je preslikavanje oblika

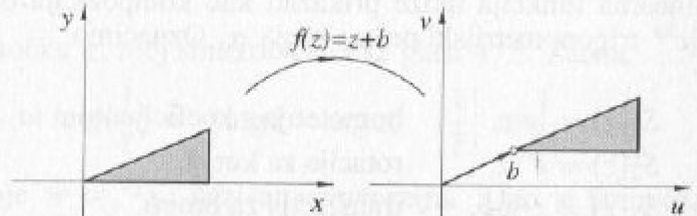
$$w = S(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

pri čemu su a, b, c, d kompleksni brojevi za koje vrijedi $ad - bc \neq 0$.

1. Translacija. To je linearna funkcija oblika

$$w = z + b.$$

Ona svakom broju z pridružuje broj $z + b$, dakle, riječ je o translaciji za broj b u kompleksnoj ravnini.



Sl. 6.1. Translacija za broj b.

Kompozicija translacija opet je translacija; ako je $w_1(z) = z + b_1$ i $w_2(z) = z + b_2$, onda je $(w_2 \circ w_1)(z) = z + (b_1 + b_2)$.

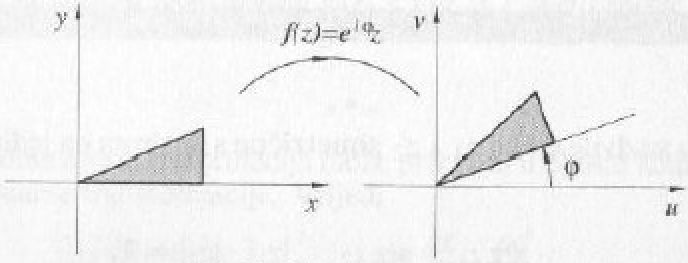
2. Rotacija. Neka je a kompleksan broj modula 1. Tada se on može napisati u obliku

$$a = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Množenje s kompleksnim brojem modula 1 odgovara rotaciji oko ishodišta za kut φ, zato je preslikavanjem

$$w = e^{i\varphi}z$$

određena **rotacija** oko ishodišta za kut φ.

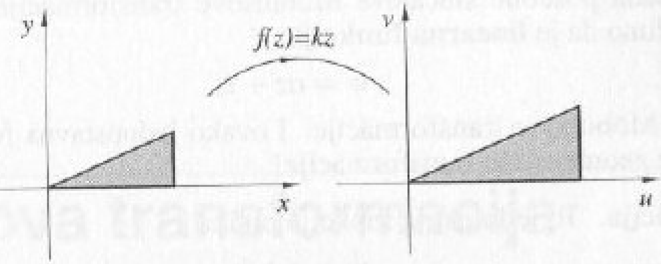


Sl. 6.2. Rotacija za kut φ.

3. Homotetija. Preslikavanje

$$w = kz$$

pri čemu je $k > 0$ realan broj, jest **homotetija** sa središtem u ishodištu i koeficijentom homotetije k.



Sl. 6.3. Homotetija za faktor k.

Svaka se linearna funkcija može prikazati kao kompozicija ovih triju funkcija. Neka je $a = |a|e^{i\varphi}$ trigonometrijski prikaz broja a. Označimo:

$$
\begin{aligned}
S_1(z) &= |a|z, && \text{homotetija s koeficijentom } |a|, \\
S_2(z) &= e^{i\varphi}z, && \text{rotacija za kut } \varphi, \\
S_3(z) &= z + b, && \text{translacija za broj } b.
\end{aligned}
$$

Tada vrijedi

$$w = az + b = (S_3 \circ S_2 \circ S_1)(z).$$

* * *

Kažemo da su dvije točke z_1 i z_2 **simetrične** s obzirom na jediničnu kružnicu ako vrijedi

$$\arg z_1 = \arg z_2, \quad |z_1| \cdot |z_2| = 1.$$

Temeljno svojstvo Möbiusove transformacije

Teorem 1. *Möbiusova transformacija prevodi kružnice u kružnice (pri čemu pravce smatramo kružnicama beskonačno velikog polumjera).*

Implicitni oblik Möbiusove transformacije

Teorem 2. *Postoji točno jedna Möbiusova transformacija koja zadane tri točke z_1, z_2, z_3 preslikava u zadane tri točke w_1, w_2, w_3. Njezina formula glasi*

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2} = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}$$

ukoliko nijedna točka nije jednaka ∞. Ako je neka od njih jednaka ∞ (npr. z_1, odnosno w_1), tada $S(z)$ ima oblik

$$S(z) = \frac{az+b}{z-z_1} \qquad \text{ako je } w_1 = \infty$$

$$S(z) = w_1 \frac{z+\alpha}{z+\beta} \qquad \text{ako je } z_1 = \infty$$

$$S(z) = az+b \qquad \text{ako je } z_1 = w_1 = \infty$$

Preostale dvije konstante određujemo pomoću druga dva para točaka.

DOKAZ. Lako se provjerava da funkcija w zadana gornjim formulama zaista preslikava točke z_1, z_2, z_3 redom u točke w_1, w_2, w_3. Moramo pokazati jedinstvenost. Neka su S_1 i S_2 dvije Möbiusove transformacije takve da je $S_1(z_k) = S_2(z_k), k = 1,2,3$. Tada je $(S_1^{-1} \circ S_2)(z_k) = z_k, k = 1,2,3$, tj. Möbiusova transformacija $S_1^{-1} \circ S_2$ ima tri fiksne točke. Stoga je ona identiteta:

$$(S_1^{-1} \circ S_2)(z) = z, \forall z \implies S_1(z) = S_2(z), \forall z. \quad \triangleleft$$

U sljedećem primjeru tražena Möbiusova transformacija nije jedinstvena. Njezin oblik ovisit će o izboru parova točaka (z_k, w_k) koje možemo birati po našoj volji. Činit ćemo to na što prirodniji način (s opravdanom nadom da će tako i traženu funkciju biti lakše izračunati).

RAČUN OSTATAKA

Integral funkcije kompleksne varijable

Neka je Γ orijentirana, po dijelovima glatka krivulja i $z \mapsto f(z)$ funkcija kompleksne varijable definirana i po dijelovima neprekinuta na Γ. Integral funkcije f duž krivulje Γ definira se kao

$$\int_\Gamma f(z)dz := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k), \tag{1}$$

ukoliko ovaj limes postoji, neovisno o izboru točaka $z_1, z_2, \ldots, z_n$ na krivulji Γ (z_0 je početna, a z_n završna točka krivulje), te izboru točaka ξ_k unutar luka krivulje određenog točkama z_k, z_{k+1} (sl. 8.1.). Limes uzimamo po svim razdiobama za koje vrijedi $\max|z_{k+1} - z_k| \to 0$.

Računanje integrala

Integral $\int_\Gamma f(z)dz$ računamo na jedan od sljedećih dvaju načina:

1. Ako je $f = u + iv$ prikaz funkcije f, onda se integral svodi na krivuljni integral realnih funkcija:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\Gamma u(x,y)dy + v(x,y)dx. \tag{5}$$

2. Ako je

$$\Gamma \ldots z = \gamma(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1$$

parametrizacija krivulje Γ, onda se integral svodi na Riemannov integral

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt, \tag{6}$$

pri čemu imaginarnu jedinicu i u računu tretiramo kao običan broj.

Cauchyjev teorem

Teorem 3. *Ako je f analitička funkcija na području $D \subset \mathbf{C}$ i $G \subset D$ jednostruko suvislo područje omeđeno zatvorenom krivuljom $\Gamma = \partial G \subset D$, tada je*

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0. \tag{7}$$

Cauchyjeva integralna formula

Teorem 4. *Neka je f analitička na nekoj okolini skupa $\overline{G}$. Tada je*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \qquad \forall z \in G. \tag{8}$$

Ovaj teorem vrijedi i za višestruko povezana područja. (Integral će tad biti zbroj integrala po rubnim krivuljama.) U tom slučaju obilazak po rubu ∂G moramo vršiti tako da područje G uvijek bude s lijeve strane.

Derivacije analitičke funkcije

Teorem 5. *Derivacija analitičke funkcije je analitička funkcija. Zato analitička funkcija ima derivaciju svakog reda i vrijedi*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi. \tag{9}$$

Weierstrassov kriterij

Teorem 1. *Ako se u području G članovi reda $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ mogu majorizirati članovima apsolutno konvergentnog reda, tada taj red konvergira jednoliko na G.*

Jednolika konvergencija reda analitičkih funkcija

Ako red analitičkih funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergira prema funkciji $f(z)$ jednoliko na području G, onda je f analitička funkcija i vrijede formule

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz, \tag{5}$$

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)}(z). \tag{6}$$

Teorem 2. *Ako su članovi reda $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ neprekinute funkcije i ako red konvergira jednoliko u nekom području G, tada je funkcija $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ neprekinuta funkcija na G. Nadalje, za svaku jednostavnu zatvorenu krivulju $\Gamma \subset G$ red možemo integrirati član po član:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz. \tag{3}$$

Teorem 3. *Ako red analitičkih funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergira jednoliko na području G, tada je i zbroj $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ analitička funkcija na G.*

Teorem 4. *Neka red analitičkih funkčija $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergira jednoliko na području G prema funkciji $f(z)$. Tada je*

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)}(z) \tag{4}$$

Jednolika konvergencija reda analitičkih funkcija

Ako red analitičkih funkcija $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ konvergira prema funkciji $f(z)$ jednoliko na području G, onda je f analitička funkcija i vrijede formule

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} f_n(z)dz, \tag{5}$$

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(m)}(z). \tag{6}$$

Teorem 5. (Abel) *Ako red potencija konvergira u točki* z_1, *tada on apsolutno konvergira za svaki* z *za koji je* $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Korolar 6. *Ako red potencija divergira (ili ne konvergira apsolutno) za neku vrijednost varijable* $z = z_1$, *tada on divergira za sve vrijednosti* z *za koje je* $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

9. Taylorov red

Točka z_0 je **izolirani singularitet** ukoliko f nije analitička u z_0 i postoji okolina G točke z_0 takva da je f analitička na $G \setminus \{z_0\}$.

Taylorov red analitičke funkcije

Teorem 7. (Taylor) *Ako je funkcija f jednoznačna i analitička u nekoj okolini G točke $a \in \mathbf{C}$, tada se ona može prikazati pomoću Taylorovog reda oko točke a:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{13}$$

Koeficijenti c_n dani su formulom

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \tag{14}$$

tj.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \, dz, \tag{15}$$

gdje je Γ zatvorena, pozitivno orijentirana Jordanova krivulja koja sadrži točku a i leži u području G.

Laurentov red

Red oblika

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \ldots + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{1}$$

zove se **Laurentov red** oko točke a.

Na kakvom će području konvergirati ovakav red? Laurentov red konvergira ako istovremeno konvergiraju njegov **glavni dio**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \ldots \tag{2}$$

i njegov **pravilni dio**

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \ldots. \tag{3}$$

Laurentov red analitičke funkcije

Teorem 1. *Ako je funkcija f analitička u prstenu*

$$D = \{z : R_2 < |z - a| < R_1\},$$

tada se ona može na jednoznačan način prikazati pomoću Laurentovog reda

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n. \tag{4}$$

Koeficijenti c_n računaju se formulom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}} d\xi, \tag{5}$$

gdje je Γ bilo koja pozitivno orjentirana zatvorena krivulja koja obuhvaća točku a i leži unutar D.

Pol n-tog reda

Točka $z = a$ je pol n-tog reda za funkciju f ako se f može napisati u obliku

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z-a)^n}, \qquad \psi(a) \neq 0,$$

tj. ako je glavni dio Laurentovog reda konačan i rastav funkcije u Laurentov red ima oblik:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \ldots.$$

3. Bitni singulariteti. z_0 je **bitan** (**esencijalan**) **singularitet** ako ne postoji $\lim_{z \to z_0} f(z)$. Glavni dio Laurentovog reda u okolini točke a ima beskonačno mnogo članova.

singularitet	$\lim_{z\to z_0} f(z)$	glavni dio Laurentovog reda
uklonjivi	postoji i konačan je	ne postoji
pol	∞	konačan
bitan	ne postoji	beskonačan

Reziduum analitičke funkcije

Reziduum (ostatak) analitičke funkcije f u izoliranom singularitetu z_0 jest koeficijent c_{-1} razvoja funkcije f u Laurentov red oko točke z_0. Pišemo

$$\mathrm{Res}(f, z_0) := c_{-1}. \tag{1}$$

Za reziduum vrijedi

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(z)\,dz. \tag{2}$$

gdje se integral računa po bilo kojoj zatvorenoj Jordanovoj krivulji orijentiranoj u pozitivnom smjeru, koja obuhvaća singularitet z_0 (i niti jedan drugi osim njega).

Jordanova lema

Teorem 1. *Neka je f analitička funkcija u gornjoj poluravnini, osim možda u točkama $z_1, \dots, z_n$ koje se ne nalaze na realnoj osi. Označimo*

$$M(R) = \max_{z\in C_R} |f(z)|.$$

a) Ako je $R \cdot M(R) \to 0$ kad $R \to \infty$, tada je

$$\int_{C_R} f(z)dz \to 0 \qquad kad \quad R\to\infty. \tag{6}$$

b) Ako je $\alpha > 0$ i $M(R) \to 0$ kad $R \to \infty$, tada

$$\int_{C_R} f(z)e^{i\alpha z}dz \to 0 \qquad kad \quad R\to\infty. \tag{7}$$

SPECIJALNE FUNKCIJE

Definicija Gamma funkcije

Gamma funkcija, ili **Eulerov integral druge vrste** je funkcija definirana nepravim integralom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t. \qquad (1)$$

Integral je konvergentan za $x > 0$ a divergentan za $x \leqslant 0$.

Za bilo koji fiksni x i za dovoljno veliki t vrijedit će nejednakost

$$t^{x-1} < e^{t/2}$$

jer eksponencijalna funkcija raste brže od bilo kojeg polinoma. Zato je

$$t^{x-1} e^{-t} < e^{-t/2}$$

Osnovno svojstvo gamma funkcije

Vrijedi

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1. \qquad (2)$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]\Big|_0^\infty + x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x).$$

Odavde slijedi **rekurzivna formula** za gama funkciju:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad x > 0. \qquad (3)$$

Sad možemo odrediti vrijednosti gama funkcija za argumente koji su prirodni brojevi. Iz rekurzivne formule slijedi

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = n!\,\Gamma(1) = n!. \qquad (4)$$

Vrijednosti gama funkcije u polovičnim argumentima

Radi veze s gustoćom jedinične normalne razdiobe, poznata nam je vrijednost integrala

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2/2}dx = 1$$

Zamjenom varijabli $x = u\sqrt{2}$ dobivamo

$$\int_0^\infty e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

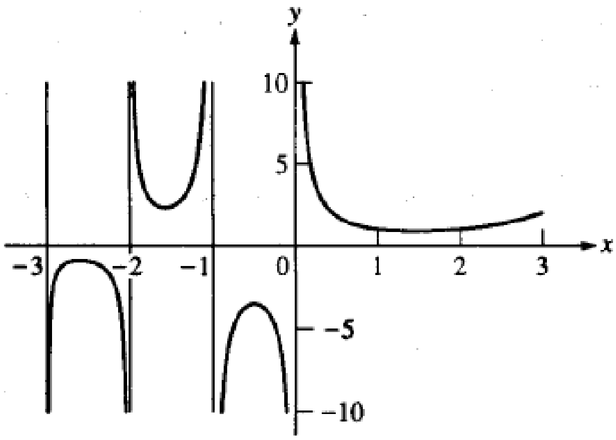
Vrijednost ovog integrala može se izračunati s pomoću dvostrukog integrala, prijelazom na integraciju u polarnom sustavu:

$$\begin{aligned}
\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right]^2 &= \int_0^\infty e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy \\
&= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_0^\infty e^{-r^2}r\,dr\int_0^{\pi/2}d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-r^2}d(r^2) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt = \begin{bmatrix} t = u^2 \\ dt = 2u\, du \end{bmatrix} = 2\int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2}\, du. \tag{5}$$

Uvrstimo ovdje $x = \frac{1}{2}$:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}. \tag{6}$$



Proširenje na kompleksnu ravninu

Gama funkcija se identičnom formulom može definirati i za vrijednosti kompleksnog argumenta z. Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt. \tag{8}$$

Eulerova formula za Gama funkciju

Euler je dao još jedan prikaz gama funkcije u kojem se ne pojavljuje integral, već je funkcija definirana kao limes sljedećeg izraza:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)} \cdot n^z, \qquad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots . \tag{9}$$

Iz Weierstrassovog prikaza vidi se da su 0, -1, -2,... polovi prvog reda gama funkcije. Međutim, reziduum u tim polovima nije jednostavno odrediti.

Teorem 4. *Gama funkcija ima prikaz*

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{z+k}. \tag{15}$$

U točkama $c_k = -k$, $k = 0, 1, 2, 3\dots$ *ima polove prvog reda i vrijedi*

$$\mathrm{Res}[\Gamma(z), -k] = \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{16}$$

DOKAZ. Izračunajmo sljedeći integral:

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}t^k\right) t^{z-1}\mathrm{d}t$$

(red uniformno konvergira na [0, 1] pa možemo zamijeniti poredak s integracijom)

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 t^{k+z-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \frac{t^{k+z}}{k+z}\Big|_0^1$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{k+z}.$$

Psi funkcija i njezine derivacije

Gama funkcija ima jedan minimum u skupu pozitivnih realnih brojeva. Gdje se poprima taj minimum?

Iako je gama funkcija analitička, nijedan njezin prikaz ne omogućava jednostavno računanje derivacije. Za tu se svrhu koristi funkcija izvedena iz gama funkcije.

Psi, digama funkcija

Psi ili **digama funkcija** definra se kao derivacija logaritma gama funkcije:

$$\psi(x) := \big[\ln(\Gamma(x))\big]' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \tag{17}$$

Beta funkcija

S pomoću gama funkcije mogu se iskazati vrijednosti nekih važnih integrala. Započnimo sa sljedećim izrazom:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-s}\mathrm{d}s \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \qquad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Stavimo $s = x^2$, $t = y^2$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty 2x^{2\alpha-1}e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty 2y^{2\beta-1}e^{-y^2}\,dy\\ &= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-x^2+y^2}\,dxdy\end{aligned}$$

(prelaskom na polarne koordinate)

$$\begin{aligned}&= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty (r\cos\varphi)^{2\alpha-1}(r\sin\varphi)^{2\beta-1}e^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-1}\varphi\,\sin^{2\beta-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-2}e^{-r^2}2r\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

(zamjena $r^2 = u$)

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\varphi\, \sin^{2\beta-1}\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta-1} e^{-u} \mathrm{d}u \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\varphi\, \sin^{2\beta-1}\varphi \mathrm{d}\varphi \cdot \Gamma(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

Prema tome, vrijedi

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\varphi\, \sin^{2\beta-1}\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{18}
$$

Zamjenimo sad $2\alpha-1$ s α i $2\beta-1$ s β. Ovaj će se rezultat onda zapisati na način

Integral potencija trigonometrijskih funkcija

Za sve $\alpha, \beta > -1$ vrijedi formula

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}\varphi\, \sin^{\beta}\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+1\right)}. \tag{19}
$$

Stavimo li sad $\beta = 0$ a onda i $\alpha = 0$, dobit ćemo vrijednost sljedećih integrala:

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha}\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad (\alpha > -1).
$$

Beta funkcija

Beta funkcija ili **Eulerov integral prve vrste** je funkcija

$$
B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\, dx. \tag{20}
$$

Veza beta i gama funkcije dana je s

$$
B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{21}
$$

Primjer 4. Koristeći samo definiciju beta funkcije, dokažimo sljedeći identitet:

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} B(x, y).$$

▷ Imamo

$$\begin{aligned} B(x, y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y \mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\ &= B(x, y) - B(x+1, y). \end{aligned}$$

S druge strane, parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned} B(x, y+1) &= \frac{1}{x} t^x (1-t)^y \Big|_0^1 + \frac{y}{x} \int_0^1 t^x (1-t)^{y-1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{y}{x} B(x+1, y). \end{aligned}$$

Iz ove dvije relacije slijedi tražena formula. ◁