

# Zadaci za vježbu iz Kompleksne analize

## 1 Kompleksna ravnina

Odredi i skiciraj podskup kompleksne ravnine određen sa:

1. A)  $1 < |z - 1 + i| < \sqrt{2}$   
B)  $|z - 1| < |z - i|$   
C)  $\operatorname{Re}(1 + z) = |z|$
2. A)  $|z - 1 + 2i| = |z + 3 - i|$   
B)  $|z| < \operatorname{Im} z + 1$   
C)  $|z|^2 = |1 + z^2|$
3. A)  $\operatorname{Re} \frac{z - 1}{z - i} = 0$   
B)  $|z - 3i| + |z + 3i| = 8$   
C)  $|z - 3| - |z + 3| > 4$
4. A)  $\operatorname{Im} \frac{z - 1}{z - i} = 0$   
B)  $|z - i| - |z + i| = 1$   
C)  $4 < |z - 1| + |z + 1| < 8$

Skiciraj sljedeće krivulje u  $\mathbb{C}$  i naznači smjer kretanja po njima ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ):

5. A)  $z(t) = 2e^{-it}$   
B)  $z(t) = e^{2it} - 1 + i$   
C)  $z(t) = 1 + i \cos t$

## 2 Funkcije kompleksne varijable

Odredi realni i imaginarni dio funkcije:

6. A)  $w = e^{1-z}$   
B)  $w = \operatorname{tg} z$
7. A)  $w = e^{z^2}$   
B)  $w = \operatorname{sh} z$

Provjeri koje su funkcije analitičke, a onima koje jesu izračunaj derivaciju:

8. A)  $w = z^2 |z|$   
B)  $w = \operatorname{ch}(z - 2)$

9. A)  $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$   
 B)  $w = ze^z$
10. A)  $w = |z| \operatorname{Im} z$   
 B)  $w = z^3$

Provjeri koje su funkcije harmonijske, a onima koje jesu odredi pripadne konjugirane funkcije:

11. A)  $v = e^x \sin y + y^2$   
 B)  $u = x^2 + 2x - y^2$
12. A)  $u = 2e^x \cos y$   
 B)  $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + y^2$

Odredi analitičku funkciju  $f(z)$  ako je poznat njen realni ili imaginarni dio:

13. A)  $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, f(\pi) = 1/\pi$   
 B)  $v = 2x^2 - 2y^2 + x$
14. A)  $v = -2 \sin 2x \operatorname{sh} 2y + y, f(0) = 2$   
 B)  $v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$
15. A)  $u = 2 \sin x \operatorname{ch} y - x$   
 B)  $v = 2(\operatorname{ch} x \sin y - xy), f(0) = 0$

### 3 Elementarne funkcije

Odredi modul i argument kompleksnih brojeva:

16. A)  $3^{2-i}$   
 B)  $\operatorname{ch}^2(i \ln 3)$   
 C)  $\operatorname{th}(\pi i)$

Izračunaj:

17. A)  $\operatorname{Ln}(-i)$   
 B)  $i^{\operatorname{Ln} i}$   
 C)  $\operatorname{Arctg}(\frac{i}{3})$
18. A)  $\operatorname{Ln}(e)$   
 B)  $1^{1/i}$   
 C)  $\operatorname{sh}(\frac{\pi i}{2})$

Riješi jednačbe:

19. A)  $e^z + i = 0$   
 B)  $i + \operatorname{sh} iz = 0$
20. A)  $\ln(i - z) = 1$   
 B)  $\sin z = \pi i$

## 4 Möbiusova transformacija

Odredi sliku područja  $G$  pri preslikavanju  $w = S(z)$ :

21. A)  $G = \{|z - 1| < 2\}$ ,  $w = \frac{2z}{z + 3}$   
B)  $G = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $w = \frac{z - 1}{z}$
22. A)  $G = \{|z - 1| < 2\}$ ,  $w = \frac{z + 1}{z - 2}$   
B)  $G = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \frac{1 - z}{1 + z}$
23. A)  $G = \{\operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $w = \frac{z}{z - 2}$   
B)  $G = \{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \frac{z + i}{z - i}$
24. A)  $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \frac{z - 1}{z + 1}$   
B)  $G = \{1 < |z| < 2\}$ ,  $w = \frac{2}{z - 1}$
25. A)  $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \frac{i - z}{i + z}$   
B)  $G = \{|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \frac{z}{z - 1}$

Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke  $0, i, \infty$  redom u točke:

26. A)  $-1, 0, 1$   
B)  $-2i, -2, 2i$

Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava točke  $0, 1 + i, 2$  redom u točke:

27. A)  $0, 2 + 2i, 4$   
B)  $0, 2, \infty$

Odredi Möbiusovu transformaciju koja preslikava područje  $G$  u  $G^*$ :

28. A)  $G = \{|z| < 1\}$ ,  $G^* = \{\operatorname{Im} w < 0\}$   
B)  $G = \{|z - 1 + i| < 1\}$ ,  $G^* = \{|w + 1| > 2\}$
29. A)  $G = \{|z + 1| < 1\}$ ,  $G^* = \{\operatorname{Re} w > -1\}$   
B)  $G = \{|z - 1| < 2\}$ ,  $G^* = \{|w - i| < 1\}$
30. A)  $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $G^* = \{|w - i| < 1\}$   
B)  $G = \{|z - 2| < 2\}$ ,  $G^* = \{|w - 2| > 4\}$

## 5 Konformna preslikavanja

Odredi neku funkciju koja preslikava zadano područje na gornju poluravninu  $\{\operatorname{Im} w > 0\}$ :

31. A)  $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$   
B)  $G = \{|z| < 1, |z - 1| < 1\}$
32. A)  $G = \{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$   
B)  $G = \{|z| < 1, |z - i| > 1\}$
33. A)  $G = \{|z| > 1, |z - i| < 1\}$   
B)  $G = \{|z| < 1, |z - 1| > 1\}$

Odredi sliku područja ili krivulje  $G$  pri preslikavanju funkcijom  $w$ .

34. A)  $G = \{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ ,  $w = e^z$   
B)  $G = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$ ,  $w = \cos z$
35. A)  $G = \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ,  $w = e^z$   
B)  $G = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ,  $w = \operatorname{ch} z$
36. A)  $G = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = e^{iz}$   
B)  $G = \{\operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ,  $w = \operatorname{sh} z$
37. A)  $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \operatorname{Ln} z$ ,  $w(i) = \frac{\pi i}{2}$   
B)  $G = \{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \cos z$
38. A)  $G = \{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \sin z$   
B)  $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = z^2$
39. A)  $G = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ ,  $w = \operatorname{tg} z$   
B)  $G = \{\arg z = \frac{\pi}{6}\}$ ,  $w = z^3$
40. A)  $G = \{\operatorname{Re} z > 1\}$ ,  $w = z^2$   
B)  $G = \{|z| = 1, |\arg z| < \frac{\pi}{3}\}$ ,  $w = z^3$

## 6 Integrali funkcija kompleksne varijable

Izračunaj sljedeće krivuljne integrale:

41. A)  $\int_{\Gamma} z e^z dz$ ,  $\Gamma$  : parabola  $y = x^2$  koja spaja  $z_1 = 0$  i  $z_2 = 1 + i$   
B)  $\int_{\Gamma} \bar{z} dz$ ,  $\Gamma$  : luk kružnice  $|z| = 2$  od točke  $A(2, 0)$  do  $B(-2, 0)$ , za  $\operatorname{Im} z > 0$
42. A)  $\int_{\Gamma} \cos(z - i) dz$ ,  $\Gamma$  : dio pravca od točke  $z_1 = 0$  i  $z_2 = 1 + i$   
B)  $\int_{\Gamma} (z^2 + z\bar{z}) dz$ ,  $\Gamma$  : luk kružnice  $|z| = 1$  od točke  $A(1, 0)$  do  $B(-1, 0)$ , za  $\operatorname{Im} z > 0$
43. A)  $\int_{\Gamma} z \sin z dz$ ,  $\Gamma$  : dio pravca od točke  $z_1 = 0$  i  $z_2 = \pi + i$   
B)  $\int_{\Gamma} |z|^2 dz$ ,  $\Gamma$  : luk kružnice  $|z| = 2$  od točke  $A(0, 2)$  do  $B(0, -2)$ , za  $\operatorname{Re} z < 0$

Koristeći Cauchyjevu integralnu formulu izračunaj:

44. A)  $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16}$   
 B)  $\int_{|z|=1} \frac{e^z \cos(\pi z)}{z^2 + 2z} dz$
45. A)  $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} z}{z^2} dz$   
 B)  $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$

## 7 Taylorovi redovi i nultočke

Odredi polumjer konvergencije sljedećih redova:

46. A)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$   
 B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(in) z^n$
47. A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$   
 B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n$
48. A)  $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$   
 B)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{z}{in} \right)^n$
49. A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$   
 B)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\pi/n} z^n$
50. A)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!} z^n$   
 B)  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$

Razvij u Taylorov red oko točke  $z_0$  sljedeće funkcije:

51. A)  $f(z) = \frac{1}{(1 + z^3)^2}, z_0 = 0$   
 B)  $f(z) = \sin(3z - 1), z_0 = -1$
52. A)  $f(z) = \frac{1}{(z + 1)(z - 2)}, z_0 = 0$

**B)**  $f(z) = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{4}$

**53. A)**  $f(z) = \operatorname{Arsh} z, \quad z_0 = 0$

**B)**  $f(z) = \ln(3 - z), \quad z_0 = -1$

Razvij u Maclaurinov red sljedeće funkcije:

**54. A)**  $f(z) = \ln(z^2 - 3z + 2)$

**B)**  $f(z) = \sin^2 z$

**55. A)**  $f(z) = \sqrt{z + i}$

**B)**  $f(z) = e^z \sin z$

**56. A)**  $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)(z^2 - 4)}$

**B)**  $f(z) = \operatorname{ch}^2 z$

Odredi nultočke i njihove kratnosti za funkcije:

**57. A)**  $f(z) = z^6 + 9z^4$

**B)**  $f(z) = (z - i) \operatorname{sh} z$

**58. A)**  $f(z) = z^3 \sin z$

**B)**  $f(z) = \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z}$

Odredi kratnost nultočke  $z = 0$  za funkcije:

**59. A)**  $f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2$

**B)**  $f(z) = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$

**60. A)**  $f(z) = z^2(e^{z^3} - 1)$

**B)**  $f(z) = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}$

## 8 Laurentovi redovi i singulariteti

Razvij sljedeće funkcije u Laurentov red oko točke  $z_0$  u zadanom području  $D$ :

**61. A)**  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad z_0 = 0, \quad D = \{|z| < 1\}$

**B)**  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 9)z^2}, \quad z_0 = 1, \quad \frac{5}{2} \in D$

**62. A)**  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad z_0 = 0, \quad D = \{1 < |z|\}$

**B)**  $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 9)z^2}, \quad z_0 = 1, \quad \frac{7}{2} \in D$

**63. A)**  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}, \quad z_0 = 1, \quad D = \{0 < |z - 1| < 2\}$

**B)**  $f(z) = \frac{1}{(z - 2)(z - 3)}, \quad z_0 = 0, \quad \frac{5}{2} \in D$

64. A)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ ,  $z_0 = 1$ ,  $D = \{2 < |z - 1|\}$   
 B)  $f(z) = \frac{1}{(z - 2)(z - 3)}$ ,  $z_0 = 0$ ,  $4 \in D$
65. A)  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 1}$ ,  $z_0 = 2$ ,  $D = \{1 < |z - 2| < 3\}$   
 B)  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ ,  $z_0 = i$ ,  $0 \in D$

Odredi singularitete i njihov karakter za funkcije:

66. A)  $f(z) = \frac{1}{z(z^2 + 1)^2}$   
 B)  $f(z) = \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$
67. A)  $f(z) = \frac{z^2 + z}{z^5 + 2z^4 + z^3}$   
 B)  $f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$
68. A)  $f(z) = z^2 \operatorname{ctg} z$   
 B)  $f(z) = \frac{z + 3i}{z(z^2 + 9)^3}$
69. A)  $f(z) = \exp \frac{z}{1 - z}$   
 B)  $f(z) = \frac{z^3}{1 + z^6}$

## 9 Reziduumi i primjena reziduuma

Odredi reziduume u svim singularitetima sljedećih funkcija:

70. A)  $f(z) = \frac{1}{z^3 + z}$   
 B)  $f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^3(z - 1)}$
71. A)  $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$   
 B)  $f(z) = \frac{\sin \pi z}{(z - 1)^3}$
72. A)  $f(z) = \frac{z^2}{z^4 - 1}$   
 B)  $f(z) = \frac{e^{3z} - 1}{z^3}$

Izračunaj sljedeće integrale:

73. A)  $\int_{|z+2|=2} \frac{z dz}{(z - 2)(z + 1)^2}$   
 B)  $\int_{|z|=2} \sin \frac{z}{z + 1} dz$

74. A)  $\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^z dz}{z^4 + z^3}$   
 B)  $\int_{|z-1|=1} \sin \frac{1}{z-1} dz$
75. A)  $\int_{|z-1|=1} \frac{e^{2z} dz}{z^3 - 1}$   
 B)  $\int_{|z|=2} z \sin \frac{z+1}{z-1} dz$
76. A)  $\int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 - z} dz$   
 B)  $\int_{|z|=\pi} \operatorname{tg}(\pi z) dz$

Primjenom reziduuma izračunaj sljedeće realne integrale:

77. A)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 - 4 \cos t}$   
 B)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2 + 4)(x - 1)} dx$
78. A)  $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t}$   
 B)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{x(x^2 + 4)} dx$
79. A)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$   
 B)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 - 2x + 10} dx$
80. A)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$   
 B)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx$

## 10 Specijalne funkcije

Koristeći gama i beta funkciju, izračunaj sljedeće integrale:

81. A)  $\int_0^{\infty} e^{-x^3} dx$   
 B)  $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$
82. A)  $\int_0^{\infty} e^{-x^6} dx$   
 B)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$



83. A)  $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$

B)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}$

84. A)  $\int_0^\infty x e^{-x^3} dx$

B)  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$

85. A)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$

B)  $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} dx$

86. Dokaži da vrijedi:

$$B(\alpha, \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)}{2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha + \frac{1}{2})}$$

87. Bez korištenja temeljne veze gama i beta funkcije, dokaži sljedeće formule:

A)  $xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$

B)  $B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$

C)  $(x+y)B(x, y+1) = yB(x, y)$

D)  $B(x, y)B(x+y, z) = B(y, z)B(y+z, x)$