KOMPLEKSNA ANALIZA

Zadaci za vježbu

Möbiusova transformacija – II. dio

26. $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = \infty$

A) $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$

Obzirom da je $z_3 = \infty$, koristimo sljedeću formulu:

$$S(z) = w_3 \frac{z+\alpha}{z+\beta} = \frac{z+\alpha}{z+\beta}$$

Sada uvrstimo vrijednosti ostale dvije točke:

$$S(0) = \frac{0+\alpha}{0+\beta} = \frac{\alpha}{\beta} = -1 \to \alpha = -\beta$$

$$S(i) = \frac{i+\alpha}{i+\beta} = 0 \to i+\alpha = 0 \to \alpha = -i$$

$$\beta = i$$

Tražena transformacija je:

$$S(z) = \frac{z+\alpha}{z+\beta} = \frac{z-i}{z+i}$$

B) $w_1 = -2i, w_2 = -2, w_3 = 2i$

Obzirom da je $z_3 = \infty$, koristimo sljedeću formulu:

$$S(z) = w_3 \frac{z+\alpha}{z+\beta} = 2i\frac{z+\alpha}{z+\beta}$$

Sada uvrstimo vrijednosti ostale dvije točke:

$$S(0) = 2i\frac{0+\alpha}{0+\beta} = 2i\frac{\alpha}{\beta} = -2i \to \alpha = -\beta$$

$$S(i) = 2i\frac{i+\alpha}{i+\beta} = -2 \to \frac{i+\alpha}{i+\beta} = i$$

$$\frac{i+\alpha}{i+\beta} = \frac{i-\beta}{i+\beta} = i \to i-\beta = i(i+\beta) \to \beta = 1 \to \alpha = -\beta = -1$$

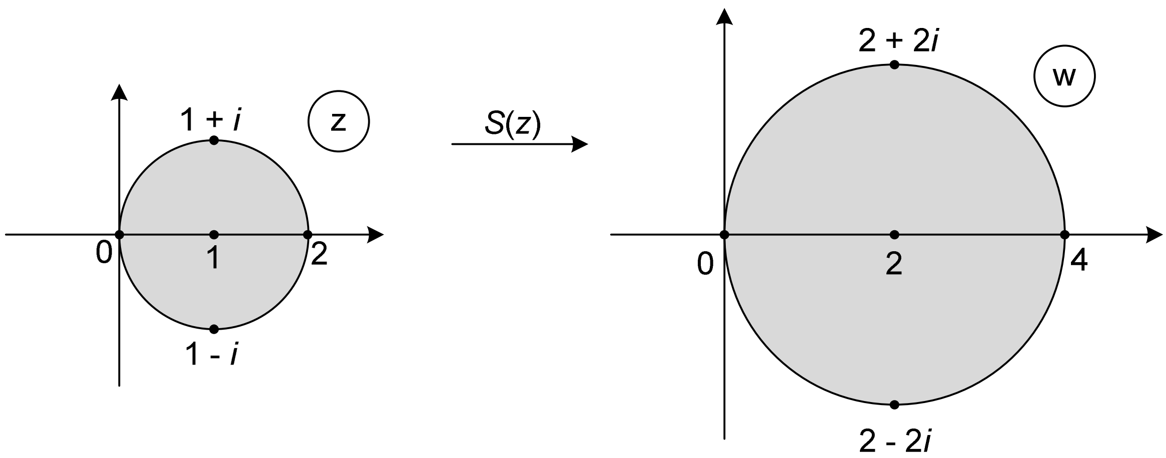
Tražena transformacija je:

$$S(z) = 2i\frac{z+\alpha}{z+\beta} = 2i\frac{z-1}{z+1}$$

27. $z_1 = 0, z_2 = 1 + i, z_3 = 2$

A) $w_1 = 0, w_2 = 2 + 2i, w_3 = 4$

Obzirom da ne želimo koristiti onu „ružnu“ formulu, napravimo sljedeće: točkama z_1, z_2 i z_3 određena je kružnica $|z - 1| = 1$, a točkama w_1, w_2 i w_3 kružnica $|w - 2| = 2$. Nacrtajmo te dvije kružnice.



Očito je da je izvršena samo homotetija za faktor $k = 2$ (provjerite da se označene točke iz z-ravnine množenjem s 2 preslikaju u označene točke u w-ravnini).

Tražena transformacija je:

$$S(z) = kz = 2z$$

B) $w_1 = 0, w_2 = 2, w_3 = \infty$

Obzirom da je $w_3 = \infty$, koristimo sljedeću formulu:

$$S(z) = \frac{az + b}{z - z_3} = \frac{az + b}{z - 2}$$

Sada uvrstimo vrijednosti ostale dvije točke:

$$S(0) = \frac{a \cdot 0 + b}{0 - 2} = \frac{b}{-2} = 0 \rightarrow b = 0$$

$$S(1 + i) = \frac{a(1 + i) + 0}{1 + i - 2} = \frac{a(1 + i)}{-1 + i} \cdot \frac{-1 - i}{-1 - i} = \frac{-2ia}{2} = -ia = 2 \rightarrow a = 2i$$

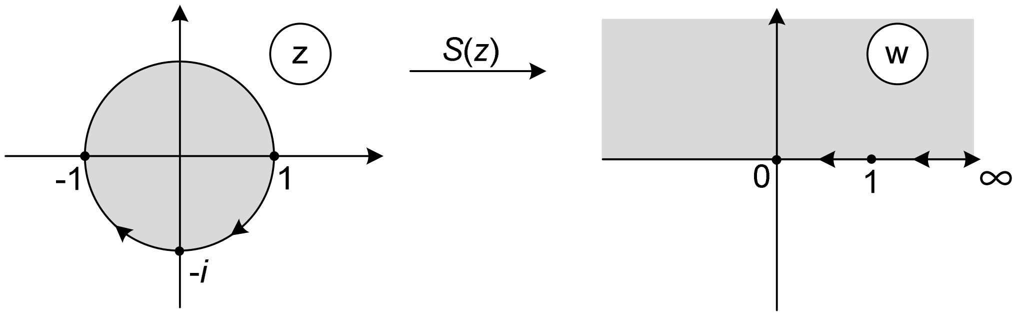
Tražena transformacija je:

$$S(z) = \frac{az + b}{z - 2} = \frac{2iz}{z - 2}$$

U zadacima 28.-30. rješenje nije jednoznačno određeno (ovisi o izboru točaka i sl.). Točnost svog rješenja možete provjeriti preslikavate li dobivenom funkcijom G u G^*. Ovdje je prikazan samo jedan način rješavanja.

28. A) $G = \{|z| < 1\}$ u $G^* = \{\operatorname{Im} w < 0\}$

Nacrtajmo zadana područja:



Odabrali smo točke $z_1 = 1 \to z_2 = -i \to z_3 = -1$ u z-ravnini. Područje nam se nalazi s desne strane. Kada biramo točke u w-ravnini, biramo na taj način da nam područje ostane s iste strane (desne strane), pa slijedi: $w_1 = \infty \to w_2 = 1 \to w_3 = 0$. Odabrali smo $w_1 = \infty$ kako bismo na lakši način računali. Primjenjujemo sljedeću formulu:

$$S(z) = \frac{az + b}{z - z_1} = \frac{az + b}{z - 1}$$

Uvrstimo ostale dvije točke:

$$S(-i) = \frac{-ia + b}{-i - 1} \cdot \frac{-1 + i}{-1 + i} = \frac{a - b + i(a + b)}{2} = 1 \to a - b + i(a + b) = 2$$

$$S(-1) = \frac{-a + b}{-1 - 1} = \frac{a - b}{2} = 0 \to a - b = 0 \to a = b$$

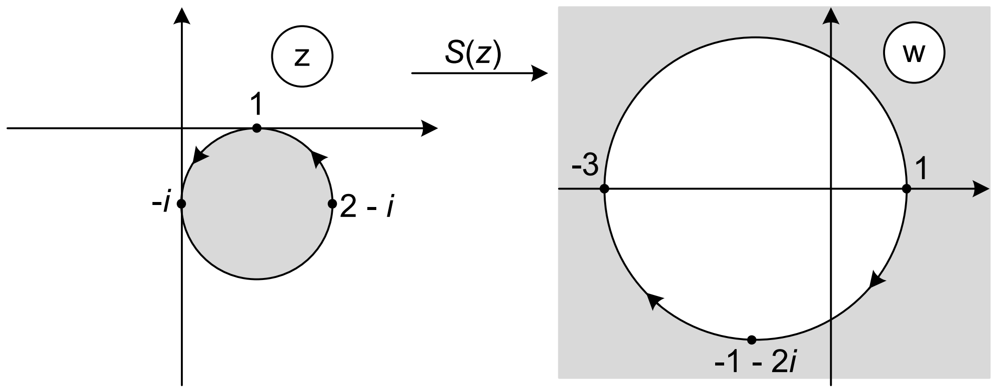
$$a - b + i(a + b) = 2ia = 2 \to a = -i = b$$

Transformacija je:

$$S(z) = \frac{-iz - i}{z - 1} = -i\frac{z + 1}{z - 1}$$

B) $G = \{|z - 1 + i| < 1\}$ u $G^* = \{|w + 1| > 2\}$

Nacrtajmo zadana područja:



1. način: Preko „ružne“ formule možemo dobiti transformaciju. (Obratite pažnju da je smjer kretanja u w-ravnini suprotan od onoga u z-ravnini, zbog činjenice da nam područje uvijek mora biti s lijeve strane.)

Definirajmo točke:

$$z_1 = 2 - i \to w_1 = 1$$

$$z_2 = 1 \to w_2 = -1 - 2i$$

$$z_3 = -i \to w_3 = -3$$

Uvrstimo to sada u formulu:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

$$\frac{w - 1}{w + 1 + 2i} : \frac{-3 - 1}{-3 + 1 + 2i} = \frac{z - 2 + i}{z - 1} : \frac{-i - 2 + i}{-i - 1}$$

$$\frac{w - 1}{w + 1 + 2i} : \frac{-4}{-2 + 2i} = \frac{z - 2 + i}{z - 1} : \frac{-2}{-1 - i}$$

$$\frac{w - 1}{w + 1 + 2i} : \frac{4}{2 - 2i} = \frac{z - 2 + i}{z - 1} : \frac{2}{1 + i}$$

Nakon dužeg rješavanja dobije se:

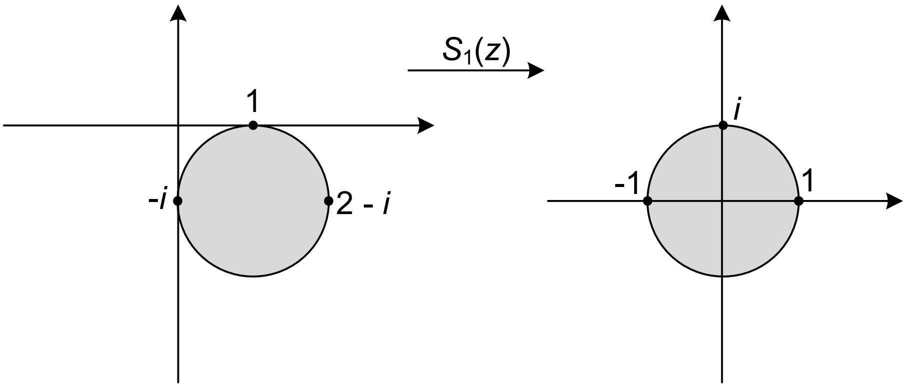
$$w = \frac{-z + (3 - i)}{z - (1 - i)} = -1 + \frac{2}{z - 1 + i}$$

2. način (možemo reći, lakši način): Obzirom da imamo kružnicu koju preslikamo u kružnicu, napravit ćemo sljedeći niz transformacija:

(1) translatirati kružnicu u ishodište,
(2) napraviti inverziju kako bismo dobili područje izvan kružnice,
(3) napraviti homotetiju,
(4) translatirati kružnicu kako bismo dobili konačno rješenje.

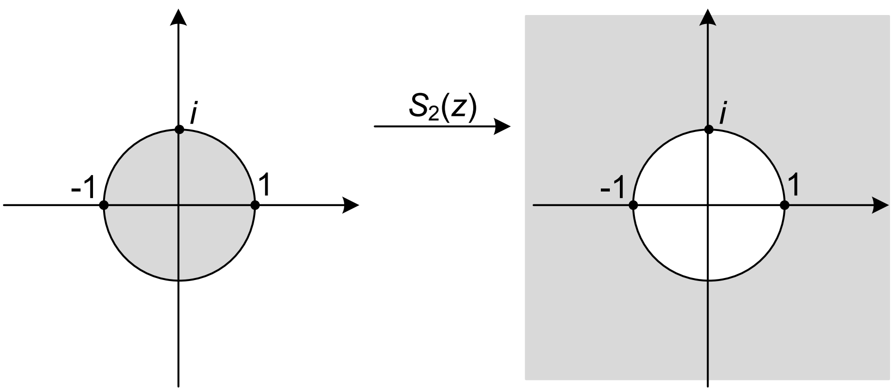
(1) Kako bismo došli u ishodište, potrebno je središte kružnice $|z-1+i|<1$ koje je jednako *S*(1, -*i*) pomaknuti za *i* prema gore i za -1 u lijevo:

$$S_1(z) = z - 1 + i$$



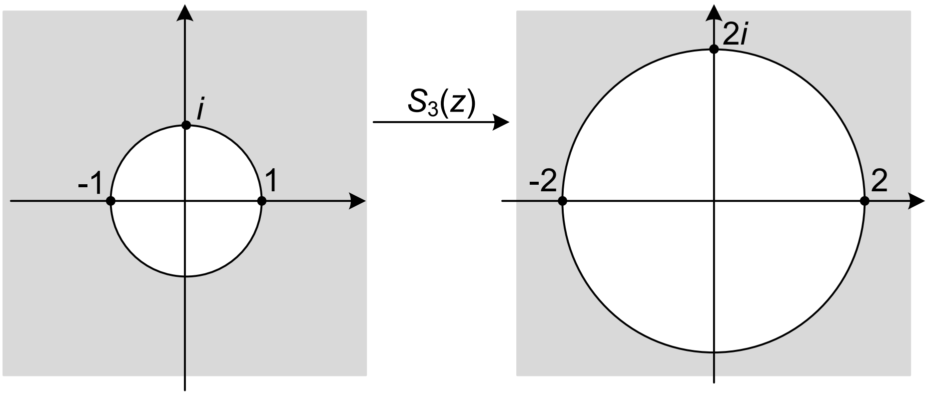
(2) Napraviti inverziju.

$$S_2(z) = \frac{1}{z}$$



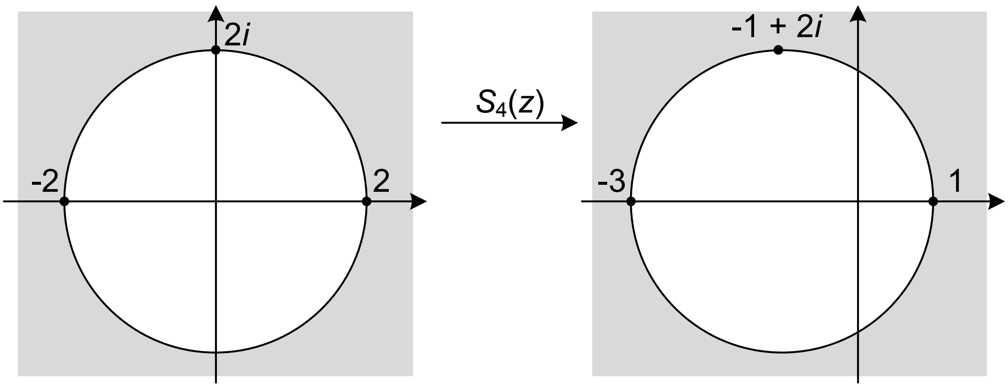
(3) Napraviti homotetiju za faktor $k = 2$.

$$S_3(z) = 2z$$



(4) Translatirati za -1 u lijevo.

$$S_4(z) = z - 1$$



Konačno je transformacija jednaka:

$$S(z) = S_4\left(S_3\left(S_2(S_1(z))\right)\right) = S_4\left(S_3(S_2(z-1+i))\right) = S_4\left(S_3\left(\frac{1}{z-1+i}\right)\right) =$$

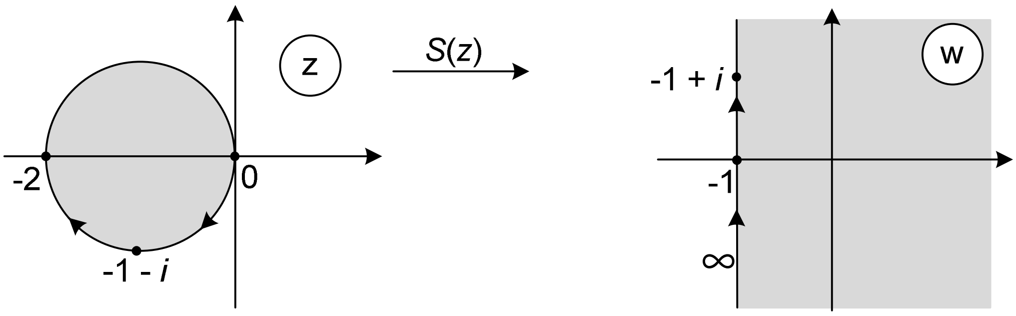
$$= S_4\left(\frac{2}{z-1+i}\right) = -1 + \frac{2}{z-1+i}$$

$$S(z) = -1 + \frac{2}{z-1+i}$$

što je jednako rješenju dobivenom na 1. način.

29. A) $G = \{|z+1| < 1\}$ u $G^* = \{\mathrm{Re}\, w > -1\}$

Nacrtajmo zadana područja:



Odabrali smo točke $z_1 = 0 \to z_2 = -1-i \to z_3 = -2$ u z-ravnini. Područje nam se nalazi s desne strane. Kada biramo točke u w-ravnini, biramo na taj način da nam područje ostane s iste strane (desne strane), pa slijedi: $w_1 = \infty \to w_2 = -1 \to w_3 = -1+i$. Odabrali smo $w_1 = \infty$ kako bismo na lakši način računali. Primjenjujemo sljedeću formulu:

$$S(z) = \frac{az+b}{z-z_1} = \frac{az+b}{z-0} = \frac{az+b}{z}$$

Uvrstimo ostale dvije točke:

$$S(-1-i) = \frac{a(-1-i)+b}{-1-i} \cdot \frac{-1+i}{-1+i} = \frac{2a+b(-1+i)}{2} = -1 \to a + \frac{b(-1+i)}{2} = -1$$

$$S(-2) = \frac{-2a+b}{-2} = a - \frac{b}{2} = -1+i$$

$$\frac{b(-1+i)}{2} + \frac{b}{2} = -i \to b = -2$$

$$a - \frac{b}{2} = -1+i \to a = -2+i$$

Transformacija je:

$$S(z) = \frac{az+b}{z} = \frac{(-2+i)z-2}{z} = -2+i-\frac{2}{z}$$

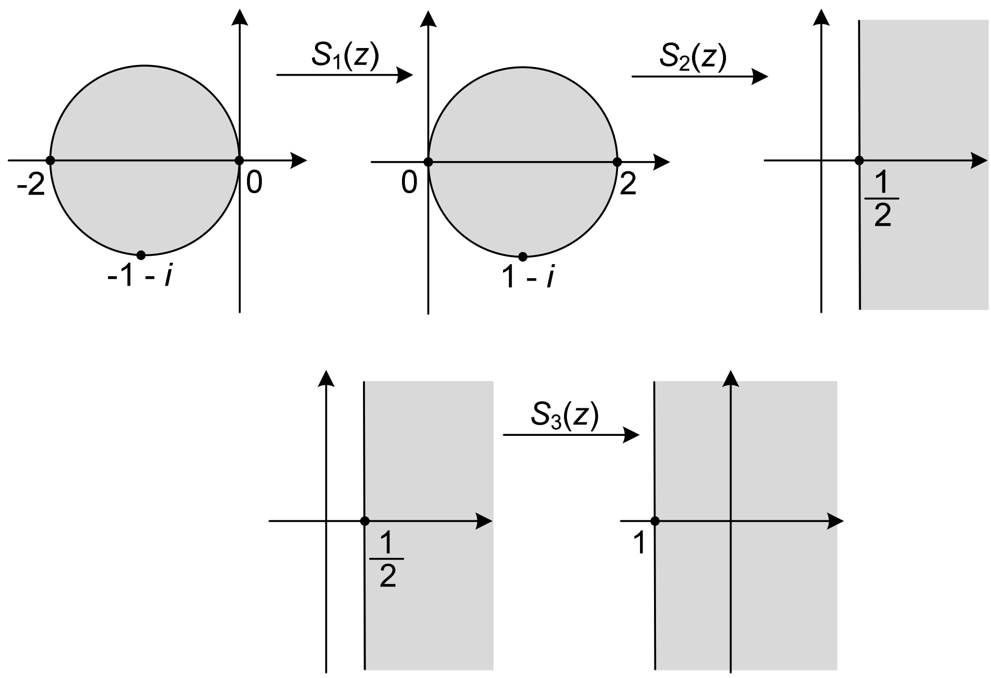
**Naravno, do rješenja smo ponovno mogli doći koristeći elementarne transformacije.

$$S_1(z) = z+2,\ S_2(z) = \tfrac{1}{z} \ \text{ i } \ S_3(z) = z - \tfrac{3}{2}$$

$$S(z) = S_3\Big(S_2\big(S_1(z)\big)\Big) = S_3\big(S_2(z+2)\big) = S_3\left(\frac{1}{z+2}\right) = \frac{1}{z+2} - \frac{3}{2} = \frac{-4-3z}{2(z+2)}$$

$$S(z) = \frac{-4-3z}{2(z+2)}$$

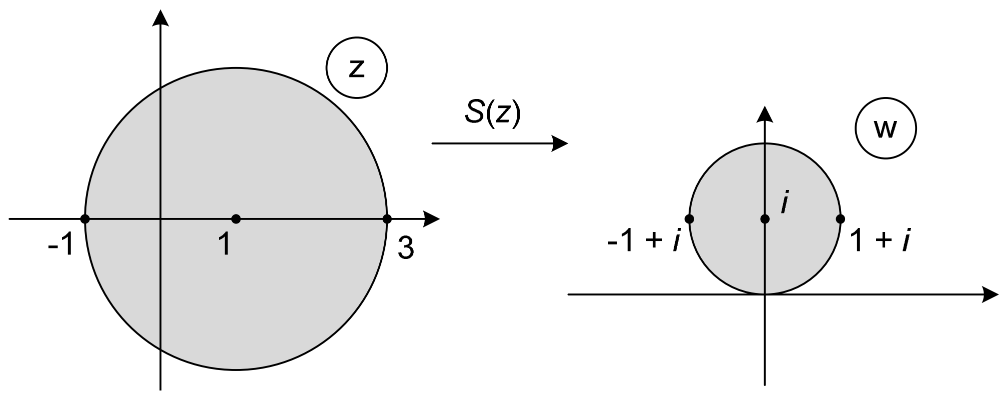
Puuuuuuuuuno brže. ☺ Ova transformacija prikazana je na slici ispod.



Primijetite da smo u ovom zadatku na dva različita načina dobili dvije različite funkcije koje rade istu stvar.

B) $G = \{|z-1| < 2\}$ u $G^* = \{|w-i| < 1\}$

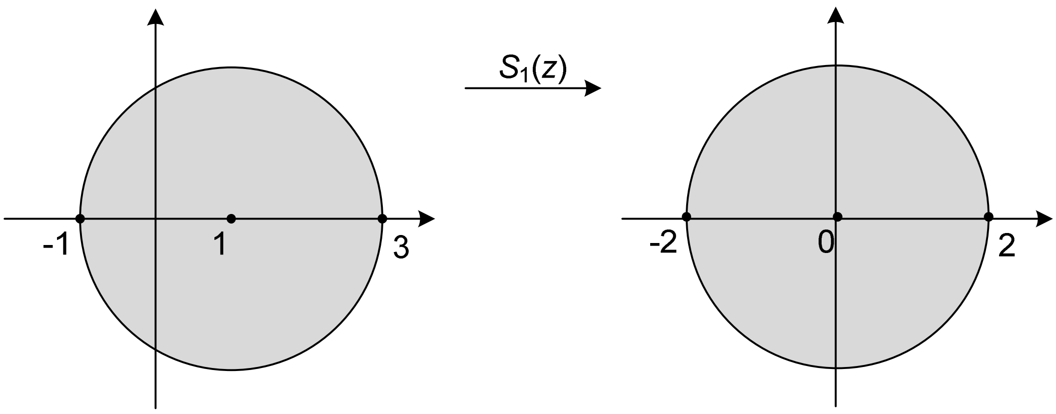
Nacrtajmo zadana područja:



Obzirom da imamo kružnicu koju preslikamo u kružnicu, napravit ćemo sljedeći niz transformacija:
(1) translatirati kružnicu u ishodište,
(2) napraviti homotetiju,
(3) translatirati kružnicu kako bismo dobili konačno rješenje.

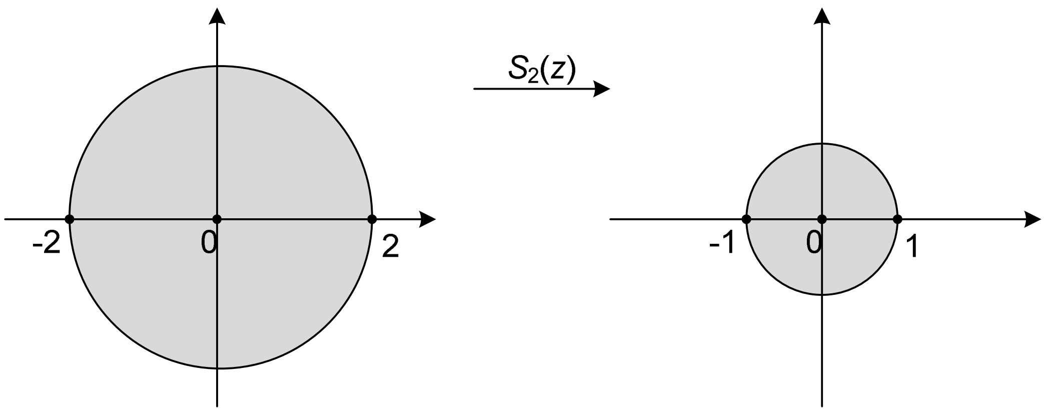
(1) Kako bismo došli u ishodište, potrebno je središte kružnice $|z-1|<2$ koje je jednako $S(1,0)$ pomaknuti za -1 u lijevo:

$$S_1(z) = z - 1$$



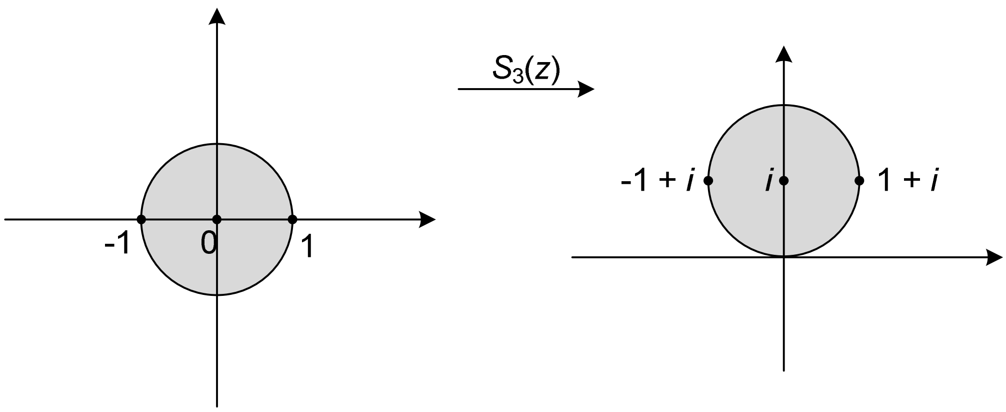
(2) Napraviti homotetiju za faktor $k = \frac{1}{2}$.

$$S_2(z) = \frac{1}{2}z$$



(3) Translatirati za *i* prema gore.

$$S_3(z) = z + i$$



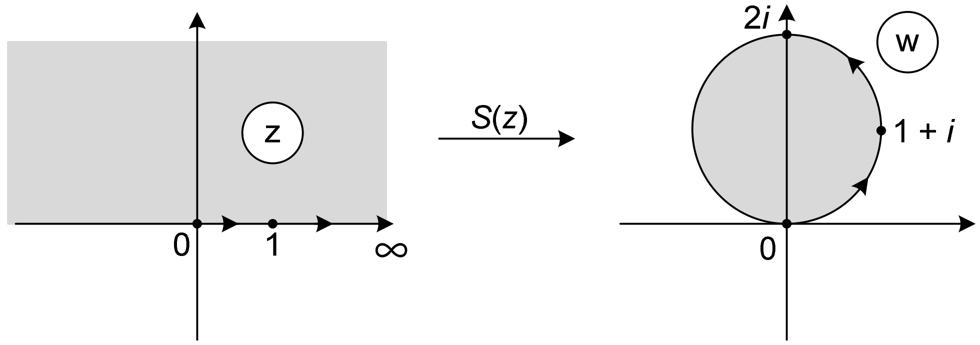
Konačno je transformacija jednaka:

$$S(z) = S_3\left(S_2\big(S_1(z)\big)\right) = S_3\big(S_2(z-1)\big) = S_3\left(\frac{1}{2}(z-1)\right) = \frac{1}{2}(z-1) + i$$

$$S(z) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} + i$$

30. A) $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ u $G^* = \{|w - i| < 1\}$

Nacrtajmo zadana područja:



Odabrali smo točke $z_1 = 0 \to z_2 = 1 \to z_3 = \infty$ u z-ravnini. Područje nam se nalazi s lijeve strane. Kada biramo točke u w-ravnini, biramo na taj način da nam područje ostane s iste strane (lijeve strane), pa slijedi: $w_1 = 0 \to w_2 = 1 + i \to w_3 = 2i$. Odabrali smo $z_3 = \infty$ kako bismo na lakši način računali. Primjenjujemo sljedeću formulu:

$$S(z) = w_3 \frac{z + \alpha}{z + \beta} = 2i \frac{z + \alpha}{z + \beta}$$

Uvrstimo ostale dvije točke:

$$S(0) = 2i \frac{0 + \alpha}{0 + \beta} = 0 \to 2i \frac{\alpha}{\beta} = 0 \to \alpha = 0$$

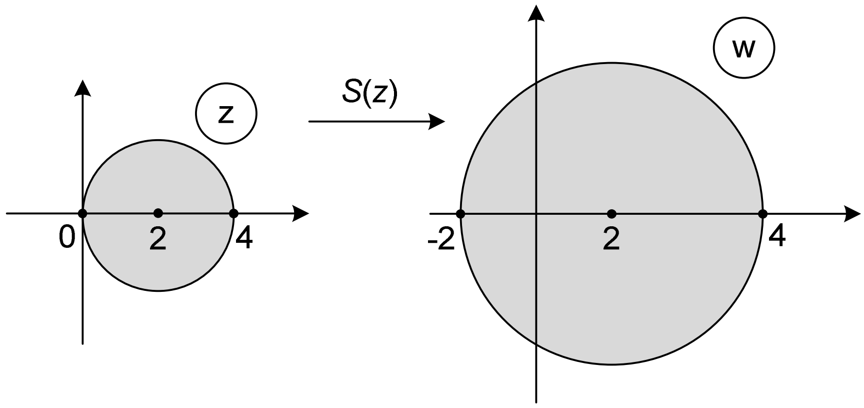
$$S(1) = 2i \frac{1 + 0}{1 + \beta} = 1 + i \to 2i \frac{1}{1 + \beta} = 1 + i \to \beta = i$$

Transformacija je:

$$S(z) = 2i \frac{z + \alpha}{z + \beta} = 2i \frac{z}{z + i}$$

B) $G = \{|z-2| < 2\}$ u $G^* = \{|w-2| > 4\}$

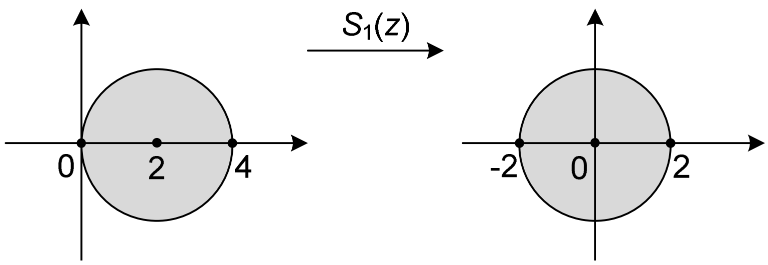
Nacrtajmo zadana područja:



Obzirom da imamo kružnicu koju preslikamo u kružnicu, napravit ćemo sljedeći niz transformacija:
(1) translatirati kružnicu u ishodište,
(2) napraviti homotetiju,
(3) napraviti inverziju,
(4) napraviti homotetiju,
(5) napraviti translaciju.

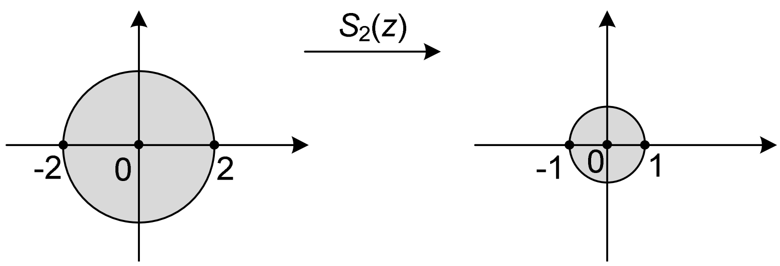
(1) Kako bismo došli u ishodište, potrebno je središte kružnice $|z-2| < 2$ koje je jednako $S(2,0)$ pomaknuti za -2 u lijevo:

$$S_1(z) = z - 2$$



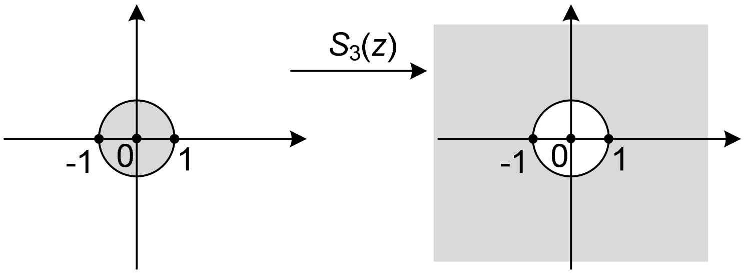
(2) Napraviti homotetiju za faktor $k = \frac{1}{2}$.

$$S_2(z) = \frac{1}{2}z$$



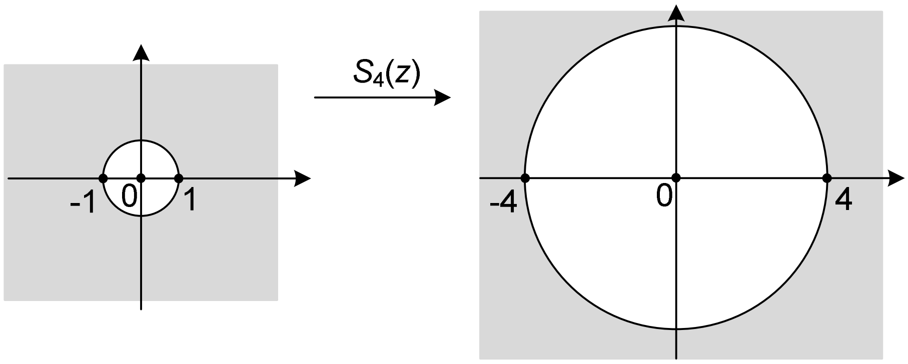
(3) Inverzija.

$$S_3(z) = \frac{1}{z}$$



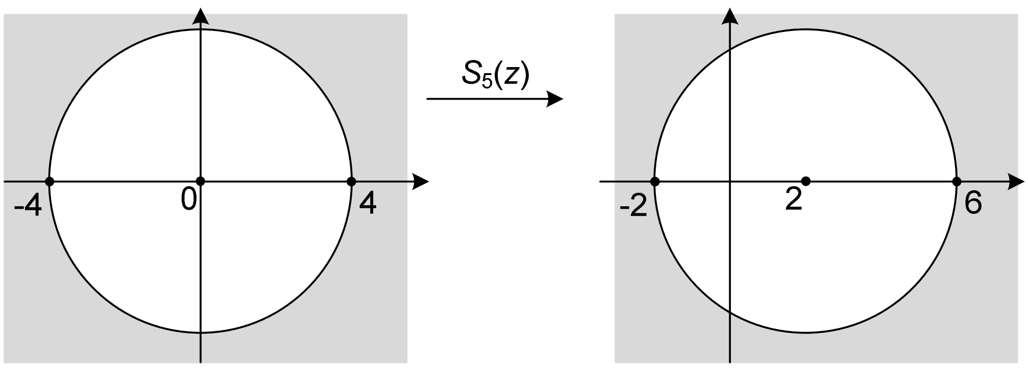
(4) Napraviti homotetiju za faktor $k = 4$.

$$S_4(z) = 4z$$



(5) Translacija za 2 u desno.

$$S_5(z) = z + 2$$



Konačno je transformacija jednaka:

$$S(z) = S_5\left(S_4\left(S_3\left(S_2\left(S_1(z)\right)\right)\right)\right) = S_5\left(S_4\left(S_3\left(S_2(z-2)\right)\right)\right) = S_5\left(S_4\left(S_3\left(\frac{1}{2}(z-2)\right)\right)\right) =$$

$$= S_5\left(S_4\left(\frac{2}{z-2}\right)\right) = S_5\left(\frac{8}{z-2}\right) = \frac{8}{z-2} + 2 = \frac{8+2z-4}{z-2} = \frac{4+2z}{z-2} = 2\frac{z+2}{z-2}$$

$$S(z) = 2\frac{z+2}{z-2}$$