6 Integrali funkcije kompleksne varijable

41. **A)** Podintegralna funkcija ze^z je analitička funkcija pa slijedi:

$$\int_0^{1+i} ze^z dz = \begin{bmatrix} u = z & dv = e^z dz \\ du = dz & v = e^z \end{bmatrix} = (ze^z - e^z)\Big|_0^{1+i} = 1 + ie^{1+i}$$

B) Podintegralna funkcija nije analitička pa ćemo parametrizirati kružnicu sa $z = Re^{i\varphi} + z_0 = 2e^{i\varphi}$, gdje kut φ ide od 0 do π (zadatkom je definiran gornji dio kružnice). Sada slijedi:

$$\bar{z} = 2e^{-i\varphi}$$

$$dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} 2e^{-i\varphi} \cdot 2ie^{i\varphi} d\varphi = 4i \int_0^{\pi} d\varphi = 4\pi i$$

42. **A)** Podintegralna funkcija $\cos(z - i)$ je analitička funkcija pa slijedi:

$$\int_0^{1+i} \cos(z-i) dz = \sin(z-i)\Big|_0^{1+i} = \sin 1 - \sin(-i) = \sin 1 + i \operatorname{sh} 1$$

B) Podintegralna funkcija nije analitička pa ćemo parametrizirati kružnicu sa $z = Re^{i\varphi} + z_0 = e^{i\varphi}$, gdje kut φ ide od 0 do π (zadatkom je definiran gornji dio kružnice). Sada slijedi:

$$z^2 + z\bar{z} = z^2 + |z|^2 = |z|^2 e^{2i\varphi} + |z|^2 = R^2 \left(e^{2i\varphi} + 1\right) = e^{2i\varphi} + 1$$

$$dz = ie^{i\varphi} d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \left(e^{2i\varphi} + 1\right) ie^{i\varphi} d\varphi = i \left(\frac{e^{3i\varphi}}{3i} + \frac{e^{i\varphi}}{i} \right)\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{8}{3}$$

43. **A)** Podintegralna funkcija $z \sin z$ je analitička funkcija pa slijedi:

$$\int_0^{\pi+i} z \sin z dz = \begin{bmatrix} u = z & dv = \sin z dz \\ du = dz & v = -\cos z \end{bmatrix} = (-z\cos z + \sin z)\Big|_0^{\pi+i} = (\pi + i)\cos i - \sin i =$$

$$= (\pi + i) \operatorname{ch} 1 - i \operatorname{sh} 1 = \pi \operatorname{ch} 1 + i (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1)$$

B) Podintegralna funkcija nije analitička pa ćemo parametrizirati kružnicu sa $z = Re^{i\varphi} + z_0 = 2e^{i\varphi}$, gdje kut φ ide od $\frac{\pi}{2}$ do $\frac{3\pi}{2}$ (zadatkom je definiran lijevi dio kružnice). Sada slijedi:

$$|z|^2 = R^2 = 4$$

$$dz = 2ie^{i\varphi} d\varphi$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 4 \cdot 2ie^{i\varphi} d\varphi = 8i \frac{e^{i\varphi}}{i}\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -16i$$

44. **A)** Nađemo nultočke:

$$z^2 + 16 = 0 \to (z - 4i)(z + 4i) = 0 \to z_1 = -4i,\ z_2 = 4i$$

Zadana krivulja obuhvaća obje točke, pa je potrebno napisati dva integrala:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\frac{1}{z+4i}}{z - 4i} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{1}{z-4i}}{z + 4i} dz = \frac{2\pi i}{0!} \left(\frac{1}{4i + 4i} + \frac{1}{-4i - 4i} \right) = 0$$

B) Nađemo nultočke:

$$z^2 + 2z = 0 \to z\left(z+2\right) = 0 \to z_1 = 0,\ z_2 = -2$$

Zadana krivulja obuhvaća samo točku $z_1 = 0$ pa slijedi:

$$\int_\Gamma \frac{\frac{e^z \cos\left(\pi z\right)}{z+2}}{z} dz = \frac{2\pi i}{0!} \frac{e^0 \cos\left(\pi \cdot 0\right)}{0+2} = \pi i$$

45. A) Nađemo nultočke:

$$z^2 = 0 \to z = 0$$

Zadana krivulja obuhvaća točku $z = 0$ pa slijedi:

$$\int_\Gamma \frac{\operatorname{sh} z}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} \left(\operatorname{sh} z\right)'_{a=0} = 2\pi i \operatorname{ch} 0 = 2\pi i$$

B) Nađemo nultočke:

$$z^2 + 1 = 0 \to \left(z - i\right)\left(z+i\right) = 0 \to z_1 = -i,\ z_2 = i$$

Zadana krivulja obuhvaća obje točke, pa je potrebno napisati dva integrala:

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z+i}}{z-i} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{e^z}{z-i}}{z+i} dz = \frac{2\pi i}{0!} \left(\frac{e^i}{i+i} + \frac{e^{-i}}{-i-i}\right) = 2\pi i \left(\frac{e^i}{2i} - \frac{e^{-i}}{2i}\right) =$$
$$= \pi\left(e^i - e^{-i}\right) = \pi\left(\cos 1 + i \sin 1 - \cos 1 + i \sin 1\right) = 2\pi i \sin 1$$