Rješenja međuispita iz Kompleksne analize

15.11.2011.

Zadatak 1 (3b + 5b)

(a) Funkcija kosinus hiperbolni definira se sa

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Funkcija area kosinus hiperbolni definira se kao inverzna funkciji kosinus hiperbolni

$$z = \operatorname{ch} w \Leftrightarrow w = \operatorname{Arch} z$$

Ekspilicitan prikaz area kosinus hiperbolnog preko logaritamske funkcije dobije se na sljedeći način:

$$z = \operatorname{ch} w = \frac{e^w + e^{-w}}{2}$$

$$2z = e^w + e^{-w}$$

$$e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0$$

$$e^w = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\operatorname{Ln} e^w = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

$$w = \operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

(b) Jednadžba se riješi na sljedeći način:

$$2 \operatorname{ch}(iz + \pi) - 1 = 0 \to \operatorname{ch}(iz + \pi) = \frac{1}{2}$$

$$iz + \pi = \operatorname{Arch} \frac{1}{2} = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = i\left[arg\left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi\right]$$

$$z = i\pi + arg\left(\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi$$

$$z_{1,2} = i\pi \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Imaginarni dio svih točaka je isti, pa se te točke nalaze na istome pravcu. Jednadžba pravca je $y = \pi$ (gdje je $z = x + iy$).

Zadatak 2 (3b + 2b + 2b + 2b)

(a) N. Elezović, *Funkcije kompleksne varijable*, 42. i 43. str.

(b) Ako stavimo $z = x + iy$, slijedi:

$$f(x, y) = 2e^{2y}\left[x \sin(2x) + y\cos(2x)\right] + i2e^{2y}\left[x\cos(2x) - y\sin(2x)\right]$$

odnosno

$$u(x, y) = 2e^{2y}\left[x\sin(2x) + y\cos(2x)\right]$$
$$v(x, y) = 2e^{2y}\left[x\cos(2x) - y\sin(2x)\right]$$

(c) Potrebno je provjeriti Cauchy-Riemannove uvjete:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2y}\left[(1 - 2y)\sin(2x) + 2x\cos(2x)\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^{2y}\left[(-1 - 2y)\sin(2x) + 2x\cos(2x)\right]$$

Funkcija očito nije analitička.

(d) Najprije izračunamo $\ln i$:

$$\ln i = \ln |i| + i \arg i = \frac{i\pi}{2}$$

Sada je:

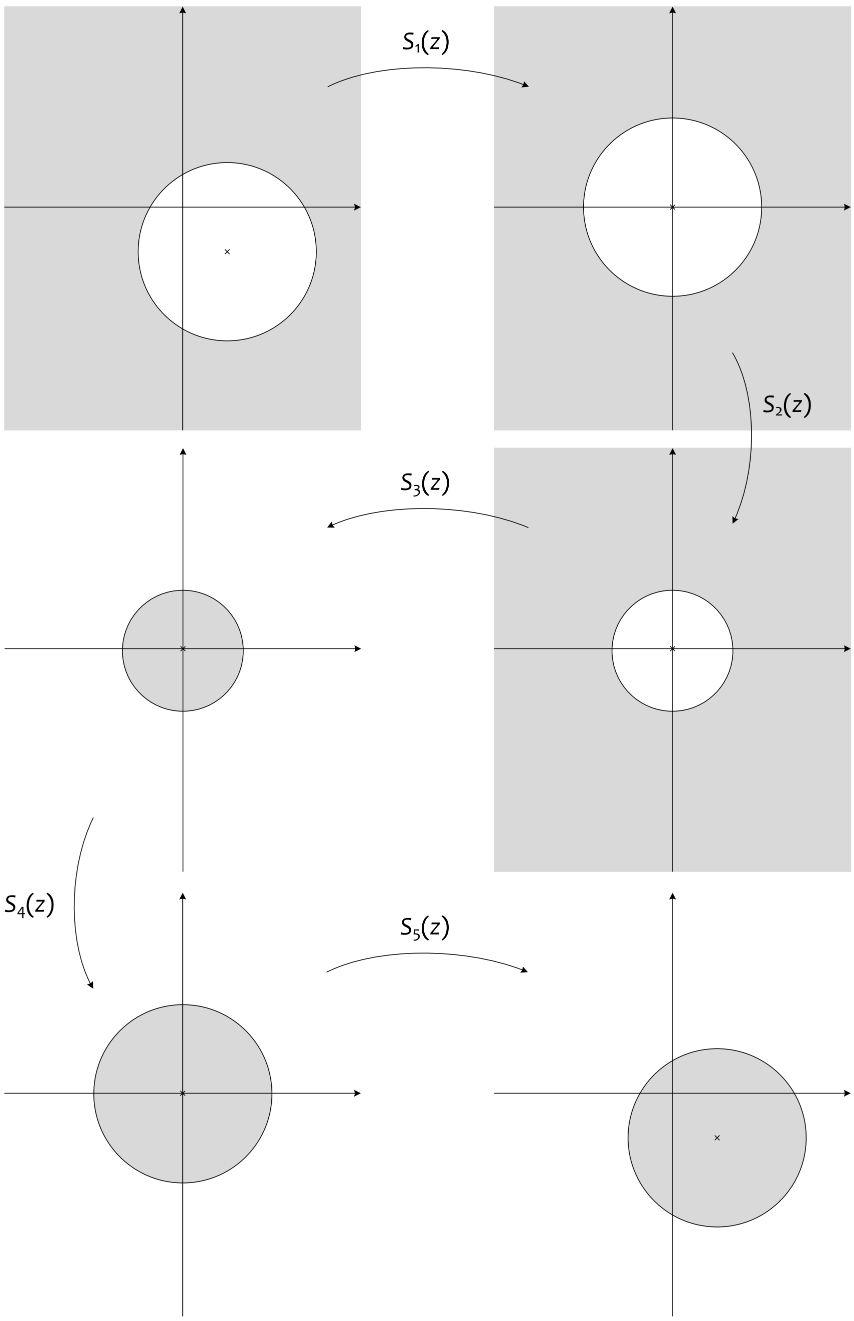
$$f(\ln i) = f\left(\frac{i\pi}{2}\right) = 2i\left(-\frac{i\pi}{2}\right)e^{-2i\cdot\frac{i\pi}{2}} = \pi e^{\pi}$$

$$|f(\ln i)| = \pi e^{\pi},\ \arg f(\ln i) = 0$$

Zadatak 3 (3b + 2b + 3b)

(a) N. Elezović, *Funkcije kompleksne varijable*, 74. i 77. str.

(b) Na slici 1 pikazan je postupak preslikavanja korak po korak.



Slika 1: Kompozicija elementarnih preslikavanja

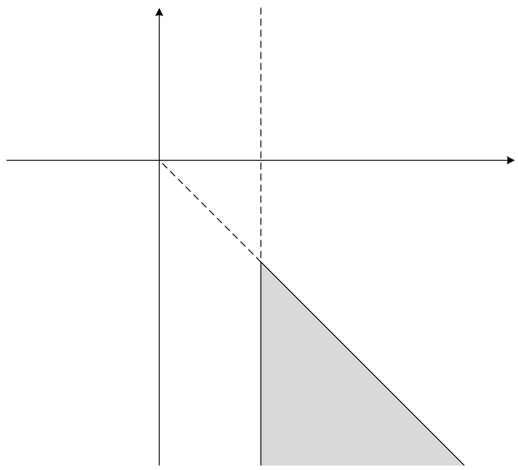
Transformacije su:

- ⋄ *translacija u ishodište* $\to S_1(z) = z - 1 + i$
- ⋄ *homotetija za faktor* $k = \frac{1}{2} \to S_2(z) = \frac{1}{2}z$
- ⋄ *inverzija* $\to S_3(z) = \frac{1}{z}$
- ⋄ *homotetija za faktor* $k = 2 \to S_4(z) = 2z$
- ⋄ *translacija u točku* $1 - i \to S_5(z) = z + 1 - i$

Konačno je:

$$S(z) = (S_5 S_4 S_3 S_2 S_1)(z) = 1 - i + \frac{4}{z - 1 + i}$$

(c) Na slici 2 pikazano je zadano područje.



Slika 2: Zadano područje u z ravnini

Točke za odabir nalaze se na pravcima $\mathrm{Im}z = -\mathrm{Re}z$ i $\mathrm{Re}z = 1$.

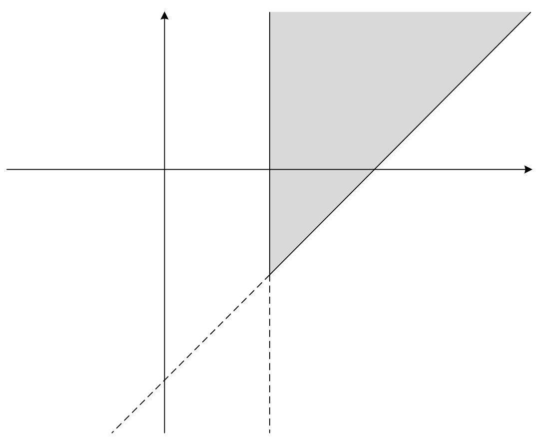
$$z_1 = \infty \to w_1 = 1 - i$$

$$z_2 = 2 - 2i \to w_2 = 3 + i$$

$$z_3 = 1 - i \to w_3 = \infty$$

$$z_4 = 1 - 2i \to w_4 = 1 + 3i$$

Na slici 3 pikazano je područje koje se dobije preslikavanjem $S(z)$ ($x > 1$ i $y > x - 2$).



Slika 3: Slika područja u w ravnini

Zadatak 4 (1b + 2b + 5b)

(a) N. Elezović, *Funkcije kompleksne varijable*, 49. str.

(b) Uvjet konformnosti je $f'(z) \neq 0$:

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z \neq 0$$

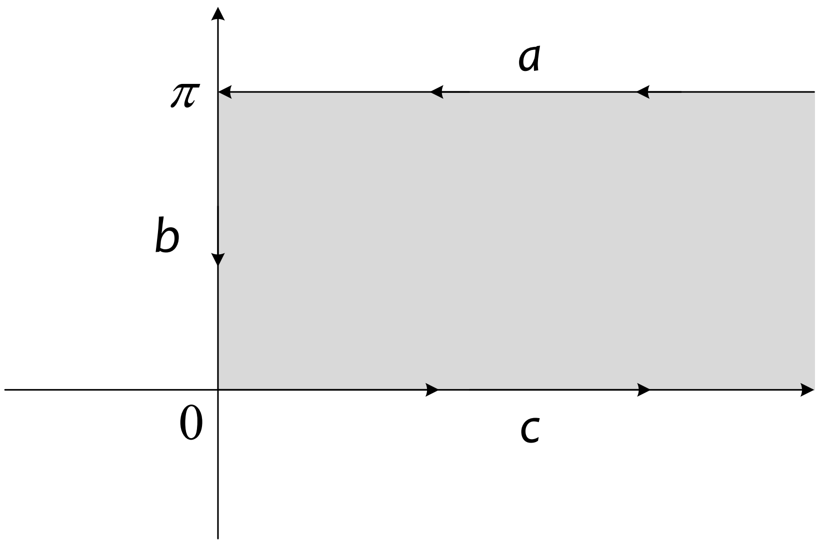
$$e^{2z} + 1 \neq 0$$

$$z \neq \frac{1}{2} \operatorname{Ln}(-1)$$

$$z \neq i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z}$$

Funkcija je, dakle, konformna na $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{ i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

(c) Na slici 4 pikazano je zadano područje.



Slika 4: Zadano područje u z ravnini

Raspišimo zadanu funkciju:

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y = u(x, y) + iv(x, y)$$

Odredimo slike krivulja koje omeđuju zadano područje:

$$a \ldots x \in \left(\overleftarrow{0, \infty}\right), \ y = \pi$$

$$a^* \ldots u = -\operatorname{sh} x \in \left(\overrightarrow{-\infty, 0}\right), \ v = 0$$

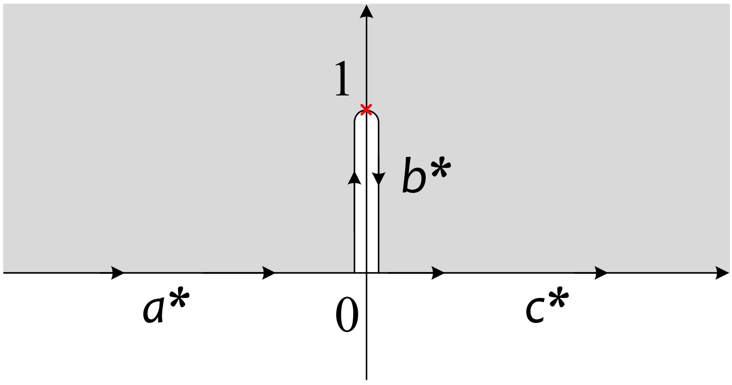
$$b \ldots x = 0, \ y \in \left(\overleftarrow{0, \pi}\right)$$

$$b^* \ldots u = 0, \ v = \sin y \in \left(\underleftarrow{\overrightarrow{0, 1}}\right)$$

$$c \ldots x \in \left(\overrightarrow{0, \infty}\right), \ y = 0$$

$$c^* \ldots u = \operatorname{sh} x \in \left(\overrightarrow{0, \infty}\right), \ v = 0$$

Na slici 5 pikazano je područje koje se dobije preslikavanjem $w = \operatorname{sh} z$ i označena točka u kojoj preslikavanje nije konformno $\rightarrow f\left(\frac{i\pi}{2}\right) = i$.



Slika 5: Slika područja u w ravnini

Zadatak 5 (2b + 5b)

(a) N. Elezović, *Račun ostatka*, 6. str.

(b) Neka je područje G krug omeđen krivuljom $\Gamma \ldots |z| = \pi$. Funkcija $\frac{z \operatorname{sh}(\pi z)}{(z+2\pi i)^2}$ je analitička na tom području pa je i integral te funkcije po krivulji Γ jednak 0 (Cauchyjev teorem).

Za drugi dio integrala uvedemo supstituciju:

$$\int_{|z|=\pi} \frac{z\bar{z}}{(z+2\pi i)^2} dz = \begin{bmatrix} z = \pi e^{i\varphi} \to dz = i\pi e^{i\varphi} d\varphi \\ z\bar{z} = |z|^2 = \pi^2 \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2 i\pi e^{i\varphi} d\varphi}{(\pi e^{i\varphi} + 2\pi i)^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{i\pi e^{i\varphi} d\varphi}{(e^{i\varphi} + 2i)^2} = \begin{bmatrix} t = e^{i\varphi} + 2i \\ dt = ie^{i\varphi} d\varphi \end{bmatrix} = -\pi \left(\frac{1}{e^{2\pi i} + 2i} - \frac{1}{e^0 + 2i} \right) = 0$$

Rješenje zadanog integrala je 0.