13.

Gama funkcija

Definicija Gamma funkcije

Gamma funkcija, ili **Eulerov integral druge vrste** je funkcija definirana nepravim integralom

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

Integral je konvergentan za $x>0$ a divergentan za $x\leqslant 0$.

Za bilo koji fiksni x i za dovoljno veliki t vrijedit će nejednakost

$$t^{x-1}<e^{t/2}$$

jer eksponencijalna funkcija raste brže od bilo kojeg polinoma. Zato je

$$t^{x-1}e^{-t}<e^{-t/2}$$

i integral je konvergentan u desnoj granici.

Ponašanje u točki $t=0$ određuje funkcije t^{x-1}, jer je vrijednost eksponencijalne funkcije u toj točki jednaka 1. Ako je $x>0$, onda je t^{x-1} integrabilna u svakom intervalu $[0,c]$, pa stoga postoji integral (1).

Osnovno svojstvo gamma funkcije

Vrijedi

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1. \tag{2}$$

Parcijalnom integracijom dobivamo:

$$\Gamma(x+1)=\Big[-t^xe^{-t}\Big]\Big|_0^{\infty}+x\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t=x\Gamma(x).$$

Odavde slijedi **rekurzivna formula** za gama funkciju:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x),\qquad x>0. \tag{3}$$

Sad možemo odrediti vrijednosti gama funkcija za argumente koji su prirodni brojevi. Iz rekurzivne formule slijedi

$$\Gamma(n+1)=n\,\Gamma(n)=n(n-1)\,\Gamma(n-1)=n!\,\Gamma(1)=n!. \tag{4}$$

Zato gama funkciju možemo tretirati kao poopćenje funkcije faktorijela na realne argumente.

Vrijednosti gama funkcije u polovičnim argumentima

Radi veze s gustoćom jedinične normalne razdiobe, poznata nam je vrijednost integrala
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1$$
Zamjenom varijabli $x = u\sqrt{2}$ dobivamo
$$\int_0^{\infty} e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
Vrijednost ovog integrala može se izračunati s pomoću dvostrukog integrala, prijelazom na integraciju u polarnom sustavu:
$$\begin{aligned}\left[\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right]^2 &= \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy\\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\\ &= \int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\int_0^{\pi/2}d\varphi\\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}d(r^2) = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$
Ovaj ćemo integral dovesti u vezu s vrijednostima gama funkcije u polovičnim argumentima. Zamjenom varijable integracije gama funkciju možemo prikazati na sljedeći način:
$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t = u^2 \\ \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u\end{bmatrix} = 2\int_0^{\infty} u^{2x-1}e^{-u^2}\mathrm{d}u. \tag{5}$$
Uvrstimo ovdje $x = \frac{1}{2}$:
$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}. \tag{6}$$
Sada na primjer imamo
$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$
i općenito
$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}.$$

Primjer 1. Iskažimo vrijednost integrala
$$I = \int_0^{\infty} e^{-u^4}\mathrm{d}u$$
pomoću gama funkcije.

▷ Uvedimo supstituciju $t = u^4$. Onda je $\mathrm{d}t = 4u^3 \mathrm{d}u$ pa je

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{4u^3} = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} \mathrm{d}t.$$

Tako dobivamo

$$I = \frac{1}{4} \int_0^\infty t^{-\frac{3}{4}} e^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \Gamma(\frac{1}{4}).$$

◁

Primjer 2. Centralni k-ti moment jedinične normalne razdiobe definira se formulom

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Koristeći gama funkciju, izračunaj te momente.

▷ Ako je k neparan, vrijednost integrala jednaka je nuli. Ako je k paran, $k = 2n$, onda je

$$\begin{aligned}
m_{2n} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2/2}\, dx \\
&= \left[t = x^2/2,\ \mathrm{d}t = x\, dx \right] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty (\sqrt{2t})^{2n-1} e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{\frac{2n-1}{2}} e^{-t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\Big(\frac{2n+1}{2}\Big) \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= (2n-1)(2n-3)\cdots 1
\end{aligned}$$

◁

Proširenje na negativnu realnu os

Rekurzivna formula nam omogućava proširenje gama funkcije na negativne argumente koji nisu cijeli brojevi. Pritom koristimo formulu

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \tag{7}$$

ako je $-1 < x < 0$, onda je desna strana dobro definirana funkcija, pa je prema tome definirana i lijeva. To nam daje vrijednosti gama funkcije na intervalu $\langle -1, 0 \rangle$. Sad se koristeći istu formulu te vrijednosti dalje proširuju na interval $\langle -2, -1 \rangle$, pa onda i na bilo koji interval $\langle -n-1, -n \rangle$, gdje je n prirodan broj.

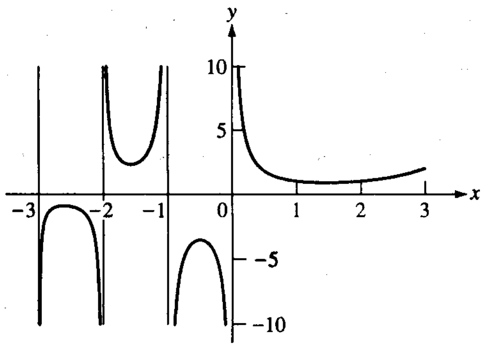
Za vrijednosti 0, -1, $-2, \dots$ gama funkcija nije definirana. Ako x pada u nulu, tada iz (7) zaključujemo da vrijedi

$$\Gamma(+0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = +\infty.$$

Iz iste formule zaključujemo da je

$$\Gamma(-0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\Gamma(x+1)}{x} = -\infty.$$

Slična će situacija biti i za svaki drugi negativni cijeli argument. Graf gama funkcije izgleda kao na sljedećoj slici



Sl. 13.1.

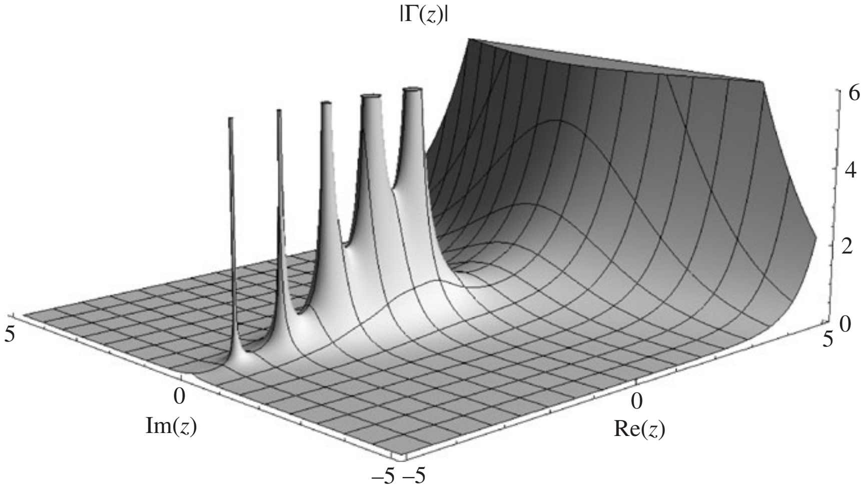
Proširenje na kompleksnu ravninu

Gama funkcija se identičnom formulom može definirati i za vrijednosti kompleksnog argumenta z. Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, \mathrm{d}t. \tag{8}$$

konvergirat će ako je $\operatorname{Re} z > 0$, a ovako definirana funkcija zadovoljava identičnu rekurzivnu relaciju.

Pokazat ćemo da je gama funkcija analitička u cijeloj kompleksnoj ravnini, s izuzetkom točaka 0, -1, $-2, \dots$ koje su polovi prvog reda.



Sl. 13.2.

Eulerova formula za Gama funkciju

Euler je dao još jedan prikaz gama funkcije u kojem se ne pojavljuje integral, već je funkcija definirana kao limes sljedećeg izraza:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot n^z, \qquad z \neq 0, -1, -2, -3, \ldots. \tag{9}$$

Poteškoća s ovom definicijom je u tome što na prvi pogled ne vidimo zašto bi ovaj limes morao postojati.

Stavimo li $z = 1$, dobit ćemo prema ovoj formuli

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!}\cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Nadalje, prema toj definiciji je

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{(z+1)(z+2)\cdots(z+n+1)}\cdot n^{z+1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{nz}{z+n+1}\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot n^z\\ &= z\cdot\Gamma(z).\end{aligned}$$

Teorem 1. *Definicije gama funkcije* (1) *i* (9) *su ekvivalentne.*

DOKAZ. Promotrimo funkciju

$$f(z,n) = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{d}t, \qquad \operatorname{Re} z > 0. \tag{10}$$

Tu je n prirodan broj. Budući je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n = e^{-t},$$

za ovu funkciju vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} f(z,n) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \Gamma(z).$$

Izračunajmo sad (10) koristeći parcijalnu integraciju i zamjenu $u = t/n$:

$$\begin{aligned} f(z,n) &= n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1}\mathrm{d}u, \\ &= n^z\left[(1-u)^n \frac{u^z}{z}\Big|_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-u)^{n-1}u^z\mathrm{d}u\right]. \end{aligned}$$

Prvi član zdesna nakon uvrštavanja granica iščezava. Ponavljajući ovaj postupak dobivamo

$$\begin{aligned} f(z,n) &= n^z \cdot \frac{n(n-1)\cdots 1}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}\int_0^1 u^{z+n-1}\mathrm{d}u \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot n^z. \end{aligned}$$

Ovaj se izraz javlja u definicijskoj formuli (9). Zato vrijedi

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} f(z,n) = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}\cdot n^z. \blacksquare$$

Faktorizacija polinoma i cijelih funkcija

Ako je c nultočka polinoma

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$

onda je on djeljiv sa $z-c$. Ova se tvrdnja lagano može dokazati. Naime, polinom se može napisati u obliku

$$P(z) = P(z) - P(c) = a_n(z^n - c^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - c^{n-1}) + \ldots + a_1(z-c)$$

i član $(z-c)$ može se izlučiti iz svakog pribrojnika s desne strane.

Ova tvrdnja može se dokazati na još jedan način. Svaki polinom može se prikazati pomoću Taylorove formule

$$P(z) = P(c) + \frac{P'(c)}{1}(z-c) + \frac{P''(c)}{2!}(z-c)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}}{n!}(z-c)^n$$

i odavde slijedi tvrdnja.

Ako su $c_1,\ldots,c_n$ sve nultočke polinoma P, onda je on djeljiv sa svakim od faktora $(z-c_1),\ldots,(z-c_n)$, pa ima prikaz

$$P(z) = a_n(z-c_1)(z-c_2)\cdots(z-c_n).$$

Postavlja se pitanje, vrijedi li slična formula i za funkcije koje nisu nužno polinomi?

Ako je f analitička funkcija u okolini nultočke c, pokazali smo da se f može napisati obliku

$$f(z) = (z-c)^k g(z)$$

pri čemu je g funkcija analitička u okolini točke c i vrijedi $g(c) \neq 0$. Ovdje je k kratnost nultočke c.

Koristeći zaključivanje po analogiji s polinomima, Euler je slično svojstvo pridružio i trigonometrijskim funkcijama.

Nultočke funkcije sinus su 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi, \ldots$ i one su jednostruke. To znači da se funkcija sinus može napisati u obliku

$$\sin z = \lim_{n\to\infty} a_n z(z^2-\pi^2)(z^2-4\pi^2)\ldots(z^2-n^2\pi^2).$$

Preimenovanjem konstante isti se izraz može napisati na prikladniji način:

$$\sin z = \lim_{n\to\infty} b_n z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Konstanta b_n može se odabrati da bude jednaka 1, jer će tada vrijediti $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin z}{z} = 1$. Tako dobivamo sljedeću formulu

$$\sin z = \lim_{n\to\infty} z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\ldots\left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{11}$$

U vrijeme kad je Euler izveo ovu formulu, on nije imao strogi dokaz njezine valjanosti.

U izrazu zdesna pojavljuje se **beskonačni produkt**.

Beskonačni produkt

Neka je $p_1, p_2, \ldots$ niz pozitivnih brojeva. Beskonačan umnožak ovog niza definira se prema analogiji sa sumom reda. Označimo

$$S_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$$

Ako postoji limes

$$P = \lim_{n\to\infty} S_n$$

koji je različit od nule, tada kažemo da beskonačni produkta konvergira i pišemo

$$P = \prod_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Ako limes niza (S_n) ne postoji, jednak je nuli ili beskonačno, tada kažemo da beskonačni produkt divergira.

Koristeći svojstvo neprekinutosti logaritamske funkcije može se napisati ekvivalencija:

$$\prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad \text{konvergira} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n) \quad \text{konvergira.}$$

Tada vrijedi

$$\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty} p_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(p_n).$$

Zbog ove ekvivalencije, nužan uvjet za konvergenciju beskonačnog produkta jest da mu opći član teži k 1. Naime, samo tada će niz $(\ln(p_n))$ težiti u nulu, što je nuždan uvjet konvergencije reda zdesna.

Zato se beskonačni produkt često zapisuje u obliku:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n).$$

Nužan uvjet za konvergenciju ovog produkta jest da niz (a_n) teži u nulu.

Ukoliko su članovi tog niza istog predznaka, tad postoji jednostavan kriterij za konvergenciju beskonačnog produkta.

Teorem 2. *Neka je* $0 \leqslant a_n < 1$. *Beskonačni produkt*

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_n) \tag{12}$$

konvergira onda i samo onda ako konvergira red

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{13}$$

DOKAZ. Za svaki x vrijedi nejednakost $1+x<e^x$. Zato je

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} e^{a_k} = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right).$$

Prema tome ako konvergira red (13), konvergirat će i beskonačni produkt (12). (Njegovi parcijalni umnošci čine rastući niz pozitivnih brojeva). S druge strane, uvijek vrijedi

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) > \sum_{k=1}^{n} a_k$$

jer suma zdesna sadrži samo dio pribrojnika koje dobivamo množenjem faktora s lijeve strane. Dakle, ako red (13) divergira, divergirat će i beskonačni produkt (12). ◁

Identična tvrdnja vrijedi i ukoliko su svi članovi niza (a_n) negativni. Međutim slična veza ne postoji za niz (a_n) kojemu članovi mogu mijenjati predznak.

Weierstrassova formula

Gama funkcija može se prikazati u obliku beskonačnog produkta. S obzirom da je gama funkcija uvijek različita od nule, promotrit ćemo funkciju $1/\Gamma(z)$. Njezine nultočke su 0, ± 1, $\pm 2 \ldots$.

Weierstrassov beskonačni produkt

Teorem 3. *Gama funkcija ima sljedeći prikaz*

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}. \tag{14}$$

Ovdje je γ **Euler-Mascheronijeva** *konstanta,*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \approx 0.577\,216\cdots.$$

DOKAZ. Krenimo od prikaza

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)\cdot n^z} = \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{z}\cdot n^z\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\end{aligned}$$

Korištenjem identiteta

$$n^{-z} = e^{(-\ln n)z}$$

recipročnu vrijednost ovog izraza možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\lim_{n\to\infty} e^{(-\ln n)z}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right).$$

Da bi izraz ispred umnoška konvergirao prema broju različitom od nule, svaki član umnoška pomnožit ćemo s $e^{-z/k}$. Budući da je

$$\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)z\right]\cdot\prod_{k=1}^{n}e^{-z/k} = 1,$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)} &= z\lim_{n\to\infty}\exp\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)z\right]\times \\ &\quad\times\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\right] \\ &= z\cdot e^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.\end{aligned}$$

Postojanje limesa koji definira Euler-Mascheronijevu konstantu dokazat ćemo u nastavku. $\triangleleft$

Weierstrassova formula potvrđuje da gama funkcija ima polove prvog reda u točkama 0, ± 1, $\pm 2, \ldots$.

Svojstvo simetrije gama funkcije

Računajući prema Weierstrassovoj formuli, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} &= -ze^{\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}\cdot ze^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{k}\right)e^{z/k} \\ &= -z^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right) \\ &= -\frac{z}{\pi}\cdot(\pi z)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{(\pi z)^2}{\pi^2 k^2}\right) \\ &= -\frac{z}{\pi}\cdot\sin\pi z.\end{aligned}$$

tako dobivamo

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin\pi z}$$

Konačno, primjenom relacije $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$ dobivamo

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}.$$

Reziduumi gama funkcije

Iz Weierstrassovog prikaza vidi se da su 0, -1, $-2, \ldots$ polovi prvog reda gama funkcije. Međutim, reziduum u tim polovima nije jednostavno odrediti.

Teorem 4. *Gama funkcija ima prikaz*

$$\Gamma(z) = \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{z+k}. \tag{15}$$

U točkama $c_k = -k$, $k = 0, 1, 2, 3\ldots$ *ima polove prvog reda i vrijedi*

$$\operatorname{Res}[\Gamma(z), -k] = \frac{(-1)^k}{k!}. \tag{16}$$

Dokaz. Izračunajmo sljedeći integral:

$$\int_0^1 e^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}t^k\right)t^{z-1}\mathrm{d}t$$

(red uniformno konvergira na $[0,1]$ pa možemo zamijeniti poredak s integracijom)

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 t^{k+z-1}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left.\frac{t^{k+z}}{k+z}\right|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\cdot\frac{1}{k+z}.\end{aligned}$$

Time smo definicijski integral za gama funkciju rastavili na dva. Prvi, duž intervala $\langle 0, 1\rangle$ pretvara se u ovaj red. Drugi, duž intervala $\langle 1, \infty\rangle$ ostavili smo nepromijenjen, u formuli (15). Taj integral predstavlja analitičku funkciju na cijeloj kompleksnoj ravnini, jer je podintegralna funkcija uniformno omeđena integrabilnom funkcijom, kad god z pripada ograničenom skupu. (Detaljniji dokaz i obrazloženje ove tvrdnje preskačemo na ovom mjestu.)

Prema tome, singulariteti gama funkcije sadržani su u dijelu koji je predstavljen sumom. Svaki pribrojnik te sume predstavlja glavni dio Laurentovog reda oko singulariteta $c_k = -k$, pa odatle slijedi tvrdnja (16).

Harmonijski red i konstanta γ

Harmonijski red je divergentan. Iz iskustva znamo da taj red divergira sporo. O brzini divergencije govori sljedeći teorem.

Teorem 5. *Za n-tu parcijalnu sumu*

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

harmonijskog reda vrijedi ocjena

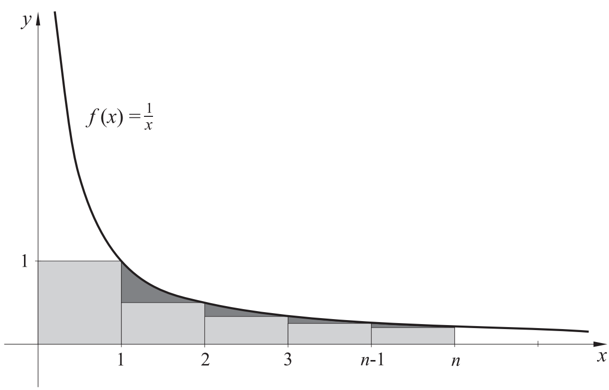
$$\ln(n+1) \leqslant S_n < \ln n + 1.$$

Niz s općim članom

$$S_n - \ln(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

je opadajući i konvergentan.

Dokaz. Dokaze ovih tvrdnji možemo dobiti proučavanjem grafa funkcije $x \mapsto 1/x$. Graf te funkcije nacrtan je na slici.



Sl. 13.3.

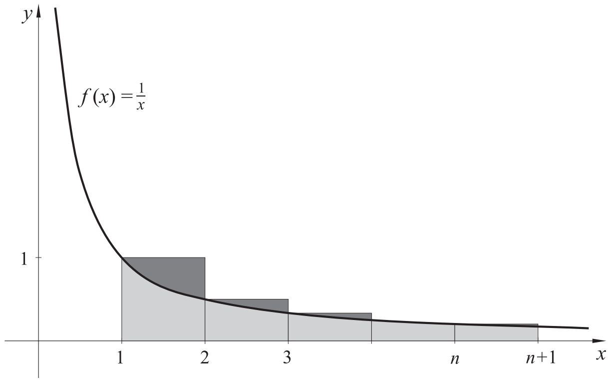
Površina pravokutnika naznačenih na slici je

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = S_n.$$

Zato vrijedi

$$S_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln x \,\Big|_1^n = 1 + \ln n.$$

Time je dokazana gornja međa. Za doljnju ćemo koristiti sljedeću sliku:



Sl. 13.4.

Ponovo je zbroj površina označenih pravokutnika na slici jednak S_n. Očevidno vrijedi

$$S_n > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \ln x \,\Big|_1^{n+1} = \ln(n+1)$$

pa je nejednakost dokazana.

Dokažimo sad da je niz $(S_n - \ln n)$ opadajući i konvergentan. Razlika

$$S_n - \ln n - [S_{n+1} - \ln(n+1)] = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}$$

jednaka je površini iznad krivulje, a ispod pravokutnika s visinom $\dfrac{1}{n+1}$, pa je ta razlika pozitivna. Dakle, niz $(S_n - \ln n)$ je opadajući. On je omeđen, jer vrijedi

$$S_n - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0.$$

Omeđeni opadajući niz ima limes. Označimo taj limes s

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

Psi funkcija i njezine derivacije

Gama funkcija ima jedan minimum u skupu pozitivnih realnih brojeva. Gdje se poprima taj minimum?

Iako je gama funkcija analitička, nijedan njezin prikaz ne omogućava jednostavno računanje derivacije. Za tu se svrhu koristi funkcija izvedena iz gama funkcije.

Psi, digama funkcija

Psi ili **digama funkcija** definra se kao derivacija logaritma gama funkcije:

$$\psi(x) := \left[\ln(\Gamma(x))\right]' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \qquad (17)$$

Formulu za psi funkciju možemo izvesti iz Weierstrassovog produkta:

$$\begin{aligned}
\ln\Gamma(z) &= \ln\left[z^{-1}e^{-\gamma z}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}e^{z/k}\right] \\
&= -\ln z - \gamma z + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{z}{k} - \ln\left(1+\frac{z}{k}\right)\right] \\
\frac{\mathrm{d}\ln\Gamma(z)}{\mathrm{d}z} &= -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{z+k}\right] \\
&= -\frac{1}{z} - \gamma + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z}{k(z+k)}
\end{aligned}$$

Ponašanje psi funkcije nalikuje na ponašanje logaritamske funkcije. Može se pokazati da za svaki $x > 0$ vrijedi ocjena:

$$\ln(x+\frac{1}{2}) < \psi(x+1) < \ln(x+e^{-\gamma}).$$

Beta funkcija

S pomoću gama funkcije mogu se iskazati vrijednosti nekih važnih integrala. Započnimo sa sljedećim izrazom:

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-s}\mathrm{d}s \int_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\mathrm{d}t, \qquad (\alpha>0, \beta>0).$$

Stavimo $s = x^2$, $t = y^2$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) &= \int_0^\infty 2x^{2\alpha-1}e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty 2y^{2\beta-1}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2\alpha-1}y^{2\beta-1}e^{-x^2+y^2}\,dx\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

(prelaskom na polarne koordinate)

$$\begin{aligned}
&= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty (r\cos\varphi)^{2\alpha-1}(r\sin\varphi)^{2\beta-1}e^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2\alpha-1}\varphi\,\sin^{2\beta-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^\infty r^{2\alpha+2\beta-2}e^{-r^2}2r\,\mathrm{d}r
\end{aligned}$$

(zamjena $r^2 = u$)

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\varphi\,\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi \int_0^{\infty} u^{\alpha+\beta-1}e^{-u}du\\
&= 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\varphi\,\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi \cdot \Gamma(\alpha+\beta).
\end{aligned}
$$

Prema tome, vrijedi

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^{2\alpha-1}\varphi\,\sin^{2\beta-1}\varphi d\varphi = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{2\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{18}
$$

Zamjenimo sad $2\alpha-1$ s α i $2\beta-1$ s β. Ovaj će se rezultat onda zapisati na način

Integral potencija trigonometrijskih funkcija

Za sve $\alpha,\beta>-1$ vrijedi formula

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}\varphi\,\sin^{\beta}\varphi d\varphi = \frac{\Gamma\Big(\dfrac{\alpha+1}{2}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{\beta+1}{2}\Big)}{2\Gamma\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1\Big)}. \tag{19}
$$

Stavimo li sad $\beta=0$ a onda i $\alpha=0$, dobit ćemo vrijednost sljedećih integrala:

$$
\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\pi/2} \sin^{\alpha}\varphi\,d\varphi = \frac{\Gamma\Big(\dfrac{\alpha+1}{2}\Big)}{2\Gamma\Big(\dfrac{\alpha}{2}+1\Big)}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad (\alpha>-1).
$$

Zadatak 1. Odredi vrijednost ovih integrala za prirodni eksponent α.

Vratimo se na integral u formuli (18). Zamjenom $x=\cos^2\varphi$ taj integral postaje

$$
\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx.
$$

Pomoću ovog integrala definiramo još jednu važnu specijalnu funkciju.

Beta funkcija

Beta funkcija ili **Eulerov integral prve vrste** je funkcija

$$
B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx. \tag{20}
$$

Veza beta i gama funkcije dana je s

$$
B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{21}
$$

Primjer 3. Temeljna veza između beta i gama funkcije može se izvesti na različite načine. Sljedeći način primjenio je Jacobi. On je umnožak gama funkcija pretvorio u dvostruki integral i primjenio pogodnu zamjenu varijabla:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}\mathrm{d}s = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{x-1}s^{y-1}e^{-(s+t)}\mathrm{d}s\mathrm{d}t.$$

Uvedimo nove varijable kroz zamjene: $s = uv$, $t = u(1-v)$. Primjetite da je onda $s+t = u$. Područja $0 < s,t < \infty$ ovim zamjenama prelazi u $0 < u < \infty$ (jer je $u = s+t$) i $0 < v < 1$ (jer je $v = \dfrac{s}{u} = \dfrac{s}{s+t}$.

Jacbijan preslikavanja je

$$\frac{\partial(s,t)}{\partial(u,v)} = \left\| \begin{matrix} v & u \\ 1-v & -u \end{matrix} \right\| = -u$$

pa je $\mathrm{d}s\mathrm{d}t = u\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Tako dobivamo

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-u}u^{x+y+1}\mathrm{d}u \int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}\mathrm{d}v = \Gamma(x+y)B(x,y).$$

Primjer 4. Koristeći samo definiciju beta funkcije, dokažimo sljedeći identitet:

$$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y).$$

▷ Imamo

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\ &= B(x,y) - B(x+1,y). \end{aligned}$$

S druge strane, parcijalnom integracijom dobivamo

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \frac{1}{x}t^x(1-t)^y \Big|_0^1 + \frac{y}{x}\int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \\ &= \frac{y}{x}B(x+1,y). \end{aligned}$$

Iz ove dvije relacije slijedi tražena formula. ◁

Primjer 5. Dokažimo formulu simetrije za gama funkciju ne koristeći prikaz sinus funkcije pomoću beskonačnog produkta.

Krenimo od identiteta:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x,1-x)\Gamma(x+1-x) = B(x,1-x) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{-x}\mathrm{d}s.$$

Uvedimo zamjenu $s = \dfrac{t}{t+1}$. Onda je $1-s = \dfrac{1}{t+1}$ i $\mathrm{d}s = \dfrac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}$. Tako dobivamo

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Da bismo izračunali ovaj integral, promotrit ćemo integral funkcije kompleksne varijable

$$I=\int_C \frac{z^{x-1}}{1-z}\mathrm{d}z.$$

Krivulja integracije prikazana je na slici

Sl. 13.5.

Prema teoremu o reziduumu, vrijedi

$$I=\operatorname{Res}\Big(\frac{z^{x-1}}{1-z};1\Big)=-2\pi i.$$

Tako dobivamo

$$-2\pi i=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{iR^x e^{ix\varphi}}{1-Re^{i\varphi}}\mathrm{d}\varphi+\int_R^{\varepsilon}\frac{t^{x-1}e^{ix\pi}}{1+t}\mathrm{d}t+\int_{\pi}^{-\pi}\frac{i\varepsilon^x e^{ix\varphi}}{1-\varepsilon e^{i\varphi}}\mathrm{d}\varphi+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{t^{x-1}e^{-ix\pi}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Pustimo da $R\to\infty$ i $\varepsilon\to 0$. Prvi i treći integral teže k nuli.

$$-2\pi i=(-e^{ix\pi}+e^{-ix\pi})\int_0^{\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Odavde slijedi tvrdnja.

Povijesna crtica

Problem pronalaženje funkcije realne varijable x koja se u cijelim brojevima podudara s funkcijom faktorijela bio je postavljen odavno. O tome postoje pisani tragovi u pismima Daniela Bernoullia and Goldbacha. Zadovljavajući odgovor na to pitanje dao je Euler u svom pismu Goldbachu godine 1729., koristeći beskonačni umnožak (9).

Mnogo prije toga, godine 1656. Wallis je pokušao naći formulu za računanje integrala

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\;dx.$$

Ovaj integral daje četvrtinu površine jediničnog kruga, a Wallis je htio dobiti efikasnu formulu za računanje broja π. Ovaj se integral može napisati u obliku

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x(^{1/2}(1+x)^{1/2}\,dx,$$

a Wallis je pokušao doći do formule promatrajući općenitije integrale

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx.$$

Eksplicitna formula postoji samo u slučajevima kad su p i q prirodni brojevi, ili ako je $q=0$ i p racionalan. Promatrajući različite slučajeve, Wallis je došao do formule koju danas zapisujemo u obliku

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right]^2 \tag{22}$$

ili

$$\frac{\pi}{4}=\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)^2.$$

Ovaj račun sigurno je inspirirao Eulera pri definiciji Beta funkcije.

Zadaci za vježbu

13.1. **Opći binomni koeficijent** definira se za prirodni broj r i kompleksni broj z formulom

$$\binom{z}{r}:=\frac{z(z-1)\cdots(z-r+1)}{r!}.$$

Dokaži da vrijedi

$$\binom{z}{r}=\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(r+1)\Gamma(z+1-r)}.$$

13.2. Dokaži da za prirodne brojeve n i r vrijedi

$$\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}.$$

13.3. Izračunaj $\binom{1/2}{r}$. Napiši razvoj funkcija

$$f(z)=(1+z)^{1/2},\qquad g(z)=(1+z)^{-1/2}$$

u obliku Mclaurinovog reda.

13.4. **Pomaknuta faktorijela** ili **Pochhamerov simbol** $(z)_r$ definira se formulom

$$(z)_r:=\begin{cases}1, & r=0,\\ z(z+1)\cdots(z+r-1), & r\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

Dokaži da vrijedi

$$(z)_r=\frac{\Gamma(z+r)}{\Gamma(z)}.$$

13.5. Koristeći formule za gama funkciju, dokaži Wallisovu formulu:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}}\right]^2=\pi.$$

13.6. Wallisova formula (22) može se izvesti na sljedeći način.

A. Dokaži da vrijedi

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}$$

B. Deriviraj obje strane ovog identiteta po parametru a i izvedi formulu:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}}}$$

C. Uvrsti $a=1$, $x=u/\sqrt{n}$ i pusti da n teži u beskonačnost. Iskoristi formulu (6) i izvedi Wallisovu formulu.

13.7. Odredi vrijednost integrala $\int_0^{\pi/2} \sin^n \varphi d\varphi$ za prirodni eksponent n.

13.8. Dokaži da gama funkcija ima sljedeći integralni zapis

$$\Gamma(s) = \int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{s-1} dx.$$

13.9. Izračunaj vrijednost sljedećih integrala

A. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^3}\,dx$; **B.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^6}\,dx$; **C.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^n}\,dx$;

D. $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^3}\,dx$; **E.** $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x^2/2\sigma^2}\,dx$; **F.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

G. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$.

13.10. Izračunaj vrijednost sljedećih integrala

A. $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{1/2}$; **B.** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$; **C.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

13.11. Dokaži da vrijedi

$$B(\alpha,\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha)}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}$$

13.12. Dokaži da za $a>1$ vrijedi

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{a^x}\,dx = \frac{\Gamma(a+1)}{(\ln a)^{a+1}}.$$

13.13. Integral $\int_0^1 x^s(1-x)^t\,dx$ može se približno računati razvojem funkcije $(1-x)^t$ u Maclaurinov red i integrirajući zatim član po član. Koristeći taj pristup, izračunaj približnu vrijednost integrala

$$\int_0^1 x^{1/3}(1-x)^{1/6}\,dx$$

ograničivši se na prva tri pribrojnika. Prikaži taj integral pomoću gama funkcije, izračunaj mu vrijednost koristeći tablice gama funkcije i usporedi rezultate.

13.14. Dokaži da je

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

13.15. Izračunaj vrijednost integrala

$$\int_0^{\pi 2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

13.16. Izvedi sljedeći oblik beta funkcije:

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\mathrm{d}t.$$

13.17. Dokaži da vrijedi

$$B(x,y) = \frac{x+y}{xy}\prod_{n=1}^\infty \frac{\left(1+\dfrac{x+y}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\left(1+\dfrac{y}{n}\right)}.$$

13.18. Dokaži sljedeće formule za beta funkciju

A. $xB(x,y+1) = yB(x+1,y)$;

B. $B(x,y) = b(x+1,y) + B(x,y+1)$;

C. $(x+y)B(x,y+1) = yB(x,y)$;

D. $B(x,y)B(x+y,z) = B(y,z)B(y+z,x)$.

13. Funkcije izvodnice. Bernoullijevi polinomi

Funkcije izvodnice

Neka je 0 regularna točka analitičke funkcije f. Onda se ona može rastaviti u red potencija:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{1}$$

Na taj je način funkciji f pridružen niz brojeva (c_n). Vrijedi i obrat. Niz (c_n) ovom formulom definira samo jednu funkciju f. (Svaka druga, prikazana pomoću istog reda, podudara se s funkcijom f.)

Ova ideja pridruživanja niza brojeva funkciji f, ili, bolje rečeno, *generiranje* niza pomoću zadane funkcije koristi se u sljedećoj definiciji.

Funkcija izvodnica niza brojeva

Kažemo da je funkcija $G(x)$ **funkcija izvodnica** niza (c_n) ako postoji prikaz

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n x^n}{n!}. \tag{2}$$

Tako na primjer, iz prikaza

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

zaključujemo da je e^x funkcija izvodnica niza $(c_n = 1)$. Također, iz

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{n!}$$

zaključujemo da je $\dfrac{1}{1-x}$ funkcija izvodnica niza $(c_n = n!)$.

U formuli (2) u nazivniku se nalazi $n!$ iz praktičnih razloga. Takav odabir konstante pokazao se najkorisnijim u različitim primjenama.

Ideja funkcije izvodnice može se proširiti i na generiranje niza funkcija. Definicija je analogna prethodnoj:

Funkcija izvodnica niza brojeva

Kažemo da je funkcija $G(x,s)$ **funkcija izvodnica** niza funkcija $(h_n(s))$ ako postoji prikaz

$$G(x,s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(s)x^n}{n!}. \tag{3}$$

Ove ćemo definicije ilustrirati na primjeru Bernoullijevih brojeva i Bernoullijevih polinoma.

Bernoullijevi brojevi

Bernoulijevi brojevi (B_n) definiraju se pomoću funkcije izvodnice formulom

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!}. \tag{4}$$

Funkcija izvodnica Bernoullijevih brojeva $G(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ ima uklonjivi singularitet u nuli i može se razviti u Taylorov red. (Koliki je polumjer konvergencije tog reda?)

Koeficijenti Taylorovog reda mogu se računati pomoću derivacija funkcije izvodnice, jer vrijedi

$$B_n = G^{(n)}(0).$$

Tako na primjer vrijedi

$$B_0 = 1$$

(računajući limes funkcije izvodnice), te

$$B_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)\bigg|_{x=0} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{xe^x}{(e^x - 1(^2}\bigg|_{x=0} = -\frac{1}{2}.$$

(ponovo treba izračunati limes neodređenog izraza).

Nekoliko prvih Bernoullijevih brojeva najlakše je odrediti rastavom funkcije u Taylorov red neposrednim dijeljenjem. Nazivnik ćemo prikazati u obliku reda i skratiti razlomak:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24} + \ldots} = \frac{1}{1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^3}{24} + \ldots}$$

Neposrednim dijeljenjem sad dobivamo

$$1:1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\ldots=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\ldots$$

odakle zaključujemo $B_0=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}$, $B_3=0$, $B_4=-\frac{1}{30}, \ldots$

Ovakvim načinom računanja ne možemo lagano odrediti sljedeće vrijednosti članova ovog niza.

Promotrimo funkciju

$$H(x)=\frac{x}{e^x-1}-1+\frac{x}{2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{B_n x^n}{n!}.$$

Za nju vrijedi

$$\begin{aligned}H(-x)&=\frac{-x}{e^{-x}-1}-1-\frac{x}{2}=-\frac{xe^x}{1-e^x}-1\frac{x}{2}\\&=\frac{x+x(e^x-1)}{e^x-1}-1-\frac{x}{2}=\frac{x}{e^x-1}-x+\frac{x}{2}=H(x).\end{aligned}$$

Dakle, H je parna funkcija, pa u njezinom prikazu pomoću Taylorovog reda iščezavaju svi neparni koeficijenti. Zato je $B_3=B_5=\ldots=0$.

Rekurzivna formula za Bernoullijeve brojeve

Teorem 1. *Bernoullijevi brojevi zadovoljavaju sljedeću rekurzivnu formulu:*

$$B_0=1,$$
$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n+1}{j}B_j=0,\qquad n\geqslant 1. \tag{5}$$

DOKAZ. Iskoristit ćemo definiciju Bernoullijevih brojeva napisanu na način:

$$x=(e^x-1)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}\Big),$$

rastaviti funkciju e^x-1 u Taylorov red i pomnožiti redove zdesna:

$$\begin{aligned}x&=\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}\Big)\\&=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{(j+1)!k!}x^{j+1+k}\end{aligned}$$

(stavimo $j+k=n$ i grupirajmo pribrojnike kojima je taj zbroj stalan)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j+k=n} \frac{B_k}{(j+1)!k!} \Big) x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k \Big) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Iz formule (5) lako se može odrediti vrijednost Bernoullijevog broja B_n ako su poznate prethodne vrijednosti članova tog niza. Pri tom, dakako, treba uzeti u obzir da su neparni koeficijenti počevši od trećeg jednaki nuli.

Nekoliko prvih Bernoullijevih brojeva dao je u sljedećoj tablici

0	1	1.000 000 000
1	$-\frac{1}{2}$	−0.500 000 000
2	$\frac{1}{6}$	0.166 666 667
4	$-\frac{1}{30}$	−0.033 333 333
6	$\frac{1}{42}$	0.023 809 524
8	$-\frac{1}{30}$	−0.033 333 333
10	$\frac{5}{66}$	0.075 757 576
12	$-\frac{691}{2730}$	−0.253 113 553
14	$-\frac{7}{6}$	1.166 666 667

Bernoullijevi se brojevi javljaju u mnogobrojnim primjenama, pri računanju različitih suma i pri razvoju mnogih funkcija u Taylorov red. Tako na primjer, vrijedi

$$
\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots + = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}
$$

Bernoullijevi polinomi

Bernoullijevi polinomi $B_n(s)$ definirani su pomoću funkcije izvodnice

$$
\frac{xe^{xs}}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s) \frac{x^n}{n!}. \tag{6}
$$

Teorem 2. *Bernoullijevi polinomi imaju svojstva*

1. $B_n(0) = B_n$.

2. $B_n(1-s) = (-1)^n B_n(s)$.

3. $B_n'(s) = nB_{n-1}(s)$.

4. $B_n(s+1) - B_n(s) = ns^{n-1}$.

5. $B_n(s+h) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s) h^{n-k}, \qquad B_0(s) = 1$.

Iz formule (6) ne vidi se na prvi pogled da su funkcije $B_n(s)$ uistinu polinomi. Ta tvrdnja slijedi iz teorema, na primjer iz svojstva 5.

DOKAZ.

1. Dovoljno je staviti $s = 0$ u definiciju Bernoulijevih polinoma.

2. Tvrdnja slijedi iz ovog računa:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-s)\frac{x^n}{n!} &= \frac{xe^{x(1-s)}}{e^x-1} = \frac{xe^x e^{(-x)s}}{e^x-1}\\ &= -\frac{(-x)e^{(-x)s}}{1-e^{-x}} = \frac{(-x)e^{(-x)s}}{e^{-x}-1}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n B_n(s)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

3. Funkcija $B_0(s)$ jednaka je vrijednosti funkcije izvodnice za $x = 0$, pa je $B_0(s) = 1$ i $B_0'(s) = 0$. Deriviranjem osnovne relacije po varijabli s, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{xe^{xs}}{e^x-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\frac{x^n}{n!},\\ \frac{x^2e^{xs}}{e^x-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n'(s)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(s)\frac{x^{n+1}}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)B_n(s)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} nB_{n-1}(s)\frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Odavde slijedi tvrdnja.

4. Ponovo koristimo funkciju izvodnicu:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}[B_n(s+1)-B_n(s)]\frac{x^n}{n!} &= \frac{xe^{x(s+1)}}{e^x-1} - \frac{xe^{xs}}{e^x-1} = \frac{xe^{xs}(e^x-1)}{e^x-1}\\ &= xe^{xs} = x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(xs)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)s^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} ns^{n-1}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} B_n(s+h)\frac{x^n}{n!} &= \frac{xe^{x(s+h)}}{e^x-1} = e^{hx}\cdot\frac{xe^{xs}}{e^x-1}\\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(hx)^j}{j!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k(s)\frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(s)}{j!k!}h^j x^{j+k}\end{aligned}$$

(sumiramo po indeksima za koje je $j+k=n$)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(s) h^{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Koeficijenti nekolicine Bernoullijevih polinoma dani su u sljedećoj tablici. Koeficijenti su napisani od slobodnog prema vodećem.

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	$-\frac{1}{2}$	1									
2	$\frac{1}{6}$	-1	1								
3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1							
4	$-\frac{1}{30}$	0	1	-2	1						
5	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{2}$	1					
6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	-3	1				
7	0	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{7}{6}$	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1			
8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{14}{3}$	-4	1		
9	0	$-\frac{3}{10}$	0	2	0	$-\frac{21}{5}$	0	6	$-\frac{9}{2}$	1	
10	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	5	0	-7	0	$\frac{15}{2}$	-5	1

Tako na primjer, iz ove tablice čitamo

$$B_5(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^4 + x^5.$$

Primjer 1. Formula za sumiranje potencija prirodnih brojeva oduvijek je privlačila pažnju zaljubljenika u matematiku. Sljedeće tri dobro su poznate:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1),$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2,$$

Dokažimo da općenito vrijedi

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \frac{1}{k+1}[B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}].$$

Formula se izvodi prema svojstvu 4. Dovoljno je zbrojiti relacije

$$B_{k+1}(j+1) - B_{k+1}(j) = (k+1)j^k$$

za sve $j = 1, 2, \ldots, n$.

Tako na primjer, vrijedi

$$1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots n^4 = \frac{1}{5}[B_5(n+1) - B_5]$$
$$= \frac{1}{5}\left[-\frac{1}{6}(n+1) + \frac{5}{3}(n+1)^3 - \frac{5}{2}(n+1)^4 + (n+1)^5\right]$$

Newtonova formula parcijalne integracije

Bernoullijevi polinomi javljaju se u mnogim primjenama. pokazat ćemo koja je njihova uloga pri sumiranju nekih redova i integriranju funkcija.

U izvodu sljedećih formula koristit ćemo dokazana svojstva Bernoullijevih polinoma:

$$\begin{aligned} B_1'(x) &= B_0(x) = 1, \\ B_n'(x) &= nB_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Izvest ćemo numeričku formulu za približno računanje integrala

$$\int_0^1 f(x)\,dx.$$

Koristimo svojstva Bernoullijevih polinoma i parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 f(x)B_0(x)\,dx = \int_0^1 f(x)B_1'(x)\,dx \\ &= f(x)B_1(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx \\ &= f(1)B_1(1) - f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}[f(1)+f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x)\,dx. \end{aligned}$$

Nastavljajući na isti način, korištenjem identiteta $B_1(x) = B_2'(x)$ dobivamo

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(1)+f(0)] - \frac{1}{2}[f'(1)B_2(1) - f'(0)B_2(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 f''(x)B_2(x)\,dx.$$

U nastavku primjenjujemo istu tehniku, uvažavajući da vrijedi

$$\begin{aligned} B_{2n}(1) &= B_{2n}(0) = B_{2n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ B_{2n+1}(1) &= B_{2n+1}(0) = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}[f(1)+f(0)] - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(2k)!} B_{2k}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] \\ + \frac{1}{(2N)!}\int_0^1 f^{(2N)}(x)B_{2N}(x)\,dx. \end{aligned}$$

Ova se formula naziva **Euler–Maclaurinova formula**.

Ako se promatra integral na intervalu $[1,2]$, on se promjenom argumenta funkcije, $f(x+1)$ umjesto $f(x)$ svodi na integral po intervalu $[0,1]$. Formula će ostati identična prethodnoj, s tim da se vrijednosti funkcje f i njezinih derivacija računaju u rubnim točkama novog intervala. Zato vrijedi sljedeća formula (članovi s derivacijama u nutarnjim točkama će se međusobno skratiti):

Trapezna Euler–Maclaurinova formula

Vrijedi sljedeći identitet:

$$\begin{aligned}\int_0^n f(x)\,dx &= \frac{1}{2}f(0)+f(1)+f(2)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)\\ &\quad -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(2k)!}B_{2k}[f^{(2k-1)}(n)-f^{(2k-1)}(0)]\\ &\quad +\frac{1}{(2N)!}\int_0^1 B_{2N}(x)\sum_{m=0}^{n-1}f^{(2N)}(x+m)\,dx.\end{aligned}$$

Stirlingova formula

15.

Ortogonalni polinomi

Prostor $L^2(a, b; \rho)$

Neka je I interval (a, b), a, $b \in \overline{\mathbf{R}}$ te $\rho : I \to \mathbf{R}_+$ neprekinuta pozitivna funkcija. Nju ćemo nazivati **težinska funkcija**.

S $L^2(a, b; \rho)$, ili kraće $L^2(\rho)$, označavamo prostor svih **kvadratno integrabilnih funkcija uz težinu** ρ. Dakle, za funkciju f definiranu na intervalu $[a, b]$ kažemo da pripada tom prostoru ako vrijedi

$$\int_a^b |f(x)|^2 \rho(x)\, dx < \infty$$

U ovom je prostoru definiran **skalarni produkt** formulom

$$(f \mid g) = \int_a^b f(x) g(x) \rho(x)\; dx. \tag{1}$$

kažemo da je $L^2(a, b; \rho)$ **unitarni prostor**.

Pripadna norma glasi

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2\; dx \right)^{1/2}.$$

Udaljenost dviju funkcija u ovom prostoru računamo na način

$$d(f, g) = \|f - g\|_2 = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2\; dx \right)^{1/2}.$$

Udaljenost d jest prikladna mjera za udaljenost funkcija u mnogim primjenama. Činjenica da je ta udaljenost inducirana skalarnim produktom omogućava da se koriste sva svojstva unitarnih prostora u proučavanju prostora funkcija opskrbljenog ovom udaljenošću.

Primjer 1. Pokazali smo da niz $f_n(x) = x^n$ ne teži uniformno, tj. po normi $\| \cdot \|_\infty$ ka funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Međutim, vrijedi $d_2(f_n, f) \to 0$, jer

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1} .$$

Zato

$$d(f_n, f) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \qquad \text{kad} \quad n \to \infty .$$

Za sistem funkcija $w_0, w_1, w_2, \ldots \subset D(a,b)$ kažemo da je **ortogonalan s težinom** ρ, ako vrijedi

$$(w_n \mid w_m) = \int_a^b w_n(x)\, w_m(x)\, \rho(x)\, dx \begin{cases} > 0 & \text{za} \quad n = m \\ = 0 & \text{za} \quad n \neq m \end{cases} \tag{2}$$

Sistem polinoma 1, x, x^2, ... čini bazu u prostoru $L^2(\rho)$. ta baza nije ortogonalna. Npr., vrijedi

$$(x \mid x^3) = \int_a^b x \cdot x^3 \rho(dx) > 0.$$

Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonalizacije ta baza može se zamijeniti sistemom polinoma Q_0, $Q_1, \ldots, Q_n \ldots$ koji su ortogonalni na intervalu $[a,b]$, s težinskom funkcijom ρ. Pri tom su polinomi Q_k stupnja k.

Neka je P_k bilo koji polinom stupnja k. On se može prikazati u obliku linearne kombinacije polinoma $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$. Kako je Q_n okomit na sve polinome Q_j, $j < n$, zaključujemo da će Q_n biti okomit na po volji odabran polinom P_k, čim je $k < n$. Dakle, Q_n je okomit na prostor $\mathscr{P}_{n-1}$.

ρ–uvjeti

U daljnjem ćemo pretpostavljati da težina ρ zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \tag{3}$$

uz uvjete

$$\rho(a)\beta(a) = \rho(b)\beta(b) = 0. \tag{4}$$

Ovdje su α i β polinomi (najviše) prvog, odnosno (najviše) drugog stupnja,

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x,$$
$$\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2.$$

Ukoliko je interval (a,b) beskonačan, ali i onda kad ρ nije definirana u rubnim točkama, uvjet (02) treba zapravo čitati na način $\lim\limits_{x \to a} \rho(x)\beta(x) = 0$, slično za desni kraj intervala.

Ako je ρ strogo pozitivna funkcija, tada se β mora poništavati na krajevima intervala. Kako je to polinom drugog stupnja, on tada mora imati oblik $A(x-a)(x-b)$ i određen do na koeficijent normiranja A.

Uvjete (01) i (02) nazivamo ρ**–uvjeti**.

Primjeri težina

Opišimo sada najvažnije primjere ortogonalnih polinoma, koje ćemo dobiti prikladnim izborom težine ρ.

LEGENDREOVI POLINOMI P_n. Definirani su na intervalu $[a,b]=[-1,1]$, uz težinu $\rho(x)\equiv 1$. Tada je $\rho'(x)\equiv 0$. Da bi vrijedili uvjeti (01) i (02), dovoljno je uzeti $\alpha(x)=0$, $\beta(x)=1-x^2$.

ČEBIŠEVLJEVI POLINOMI T_n. Ponovo je $[a,b]=[-1,1]$, uz težinu $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$. Vrijedi

$$\rho'(x)=\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{x\rho(x)}{1-x^2},$$

te je $\alpha(x)=x$, $\beta(x)=1-x^2$.

HERMITEOVI POLINOMI H_n. Uzmimo $[a,b]=[-\infty,\infty]$, $\rho(x)=e^{-x^2}$. Vrijedi

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}=-2x$$

i zato $\alpha(x)=-2x$, $\beta(x)\equiv 1$.

LAGUERROVI POLINOMI L_n. Definirani su na intervalu $[a,b]=[0,\infty]$, uz težinu $\rho(x)=e^{-x}$. Zato je

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}=-1$$

Polinom β mora imati nul-točku u ishodištu. Zato uzimamo $\alpha(x)=-x$, $\beta(x)=x$.

POOPĆENI LAGUERROVI POLINOMI L_n^s.

Neka je $s>-1$, $[a,b]=[0,\infty]$ i $\rho(x)=x^se^{-x}$. Tada je

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)}=\frac{s-x}{x}$$

i uzimamo $\alpha(x)=s-x$, $\beta(x)=x$. Uvjet $s>-1$ je nuždan da bi bio zadovoljen uvjet (2). Za $s=0$ dobivamo Laguerrove polinome L_n.

Iskažimo ove veličine u jednoj tablici

Polinomi	Oznaka	Interval	Težina	$\alpha(x)$	$\beta(x)$
Lagrangeovi	P_n	$[-1,1]$	1	0	$1-x^2$
Čebiševljevi	T_n	$[-1,1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x	$1-x^2$
Hermiteovi	H_n	$[-\infty,\infty]$	e^{-x^2}	$-2x$	1
Laguerrovi	L_n	$[0,\infty]$	e^{-x}	$-x$	x
Poopć.Laguerrovi	L_n^s	$[0,\infty]$	$x^s e^{-x}$	$s-x$	x

Diferencijalna jednadžba

Pokazat ćemo da svi ortogonalni polinomi zadovoljavaju linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Koeficijenti te jednadžbe ovise samo o težini ρ, odnosno o funkcijama $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ koji određuju tu težinu.

Teorem 1. *Neka je (Q_n) sistem polinoma, ortogonalnih s težinskom funkcijom ρ, koja zadovoljava ρ-uvjete. Tada je Q_n rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$\beta y'' + (\alpha + \beta')y' - n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]y = 0 \tag{5}$$

Ovdje smo, zbog kratkoće, pisali $\beta\rho Q_n;$ umjesto $\beta(x)\rho(x)Q_n'(x)$ i slično. To ćemo koristiti i u nsatavku.

DOKAZ. Krenimo od integrala

$$I = \int_a^b [\beta\rho Q_n']' x^k dx = [\beta\rho Q_n' x^k] \Big|_a^b - k\int_a^b \beta\rho x^{k-1} Q_n' dx$$

Rabili smo parcijalnu integraciju. Prvi član jednak je nuli, zbog uvjeta (02). Još jedna parcijalna integracija i korištenje istog uvjeta daje

$$\begin{aligned} I = {} & -kx^{k-1}\beta\rho Q_n \Big|_a^b + k\int_a^b Q_n[\beta'\rho x^{k-1} \\ & + \beta\rho' x^{k-1} + \beta\rho(k-1)x^{k-2}]dx \\ & = k\int_a^b \rho Q_n[\beta' x^{k-1} + \alpha x^{k-1} + (k-1)\beta x^{k-2}]dx. \end{aligned}$$

Tu smo ponovo iskoristili (02), a unutar integrala smo zamijenili član $\beta\rho'$ sa $\alpha\rho$, jer ρ zadovoljava (01).

Izraz u zagradi je polinom stupnja $\leqslant k$, budući da je β stupnja $\leqslant 2$, a α stupnja $\leqslant 1$. Iskoristimo sada uvjet ortogonalnosti: Q_n je okomit (uz težinu ρ) na sve polinome stupnja $\leqslant n-1$. Zato je vrijednost ovog integrala jednaka 0, čim je $k \leqslant n-1$.

Izrazimo sad taj integral na drugi način:

$$\begin{aligned}0 = I &= \int_a^b (\beta\rho Q_n')' x^k dx \\ &= \int_a^b (\beta'\rho Q_n' + \beta\rho' Q_n' + \beta\rho Q_n'')x^k dx \\ &= \int_a^b \rho x^k[\beta Q_n'' + (\alpha+\beta')Q_n']dx, \quad k = 0, 1, \dots, n-1\end{aligned}$$

(ponovo smo zamijenili $\beta\rho'$ sa $\alpha\rho$). Iz ove relacije zaključujemo: polinom $\beta Q_n'' + (\alpha+\beta')Q_n'$ je okomit na sve polinome stupnja $\leqslant n-1$. Budući da je to polinom stupnja $\leqslant n$, on mora biti stupnja točno n i mora biti proporcionalan polinomu Q_n:

$$(\alpha+\beta')Q_n' + \beta Q_n'' = \gamma_n Q_n.$$

Odredimo nepoznatu konstantu proporcionalnosti γ_n. U tu svrhu izjednačit ćemo koeficijente uz vodeću potenciju x^n u gornjoj jednadžbi. Označimo sa a_n vodeći koeficijent polinoma Q_n, $Q_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$. Dobivamo

$$(\alpha_1 + 2\beta_2)na_n + \beta_2 n(n-1)a_n = \gamma_n a_n.$$

Odavde

$$\gamma_n = n(\alpha_1 + (n+1)\beta_2)$$

i vrijedi

$$\beta Q_n'' + (\alpha+\beta')Q_n' - n[\alpha_1 + (n+1)\beta_2]Q_n = 0$$

što je i trebalo pokazati. ■

Primjer 2. Iz poznatih vrijednosti polinoma $\alpha(x)$ i $\beta(x)$ dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe za gore navedene klase ortogonalnih polinoma. Po formuli (03) slijedi

Legendreovi polinomi

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0.$$

Čebiševljevi polinomi

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0.$$

Hermiteovi polinomi

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0.$$

Laguerrovi polinomi

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Rodriguesova formula

Ortogonalni polinomi, određeni težinskom funkcijom ρ imaju i eksplicitni prikaz! Iako na prvi pogled neobičan, taj je prikaz vrlo efikasan pri računu s ortogonalnim polinomima.

Rodiquesova formule

Teorem 2. *Neka je* (Q_n) *sistem polinoma, ortogonalnih s težinom* ρ *koja zadovoljava* ρ*–uvjete. Tada vrijedi prikaz*

$$Q_n(x) = A_n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \Big\{ \rho(x)\beta(x)^n \Big\} \tag{6}$$

U ovoj formuli, A_n je po volji uzeta konstanta (ortogonalni polinomi su uvijek određeni do na multiplikativnu konstantu). Tu konstantu A_n određujemo zavisno od načina na koji želimo normirati polinome. Obično se ta konstanta određuje bilo tako da se zada vodeći koeficijent polinoma Q_n, bilo tako da se zada njegova vrijednost u nekoj točki.

DOKAZ. Krenimo od izraza

$$\begin{aligned}(\rho\beta^n)' &= \rho'\beta^n + n\rho\beta^{n-1}\beta' \\ &= \rho\beta^{n-1}\Big(\frac{\rho'}{\rho}\beta + n\beta'\Big) = \rho\beta^{n-1}(\alpha + n\beta').\end{aligned}$$

Definirajmo polinom

$$Q_{n,1} := \alpha + n\beta'.$$

To je polinom prvog stupnja za kojeg vrijedi

$$(\rho\beta^n)' = \rho\beta^{n-1}Q_{n,1}.$$

Na isti način možemo definirati polinom $Q_{n,k}$, stupnja k, formulom

$$(\rho\beta^n)^{(k)} =: \rho\beta^{n-k}Q_{n,k} \tag{7}$$

Da bismo provjerili da je ova definicija dobra, tj. da je funkcija

$$Q_{n,k} = \frac{(\rho\beta^n)^{(k)}}{\rho\beta^{n-k}}$$

zaista polinom stupnja k, izvest ćemo rekurzivnu formulu koju zadovoljavaju ovako definirane funkcije:

$$\begin{aligned}\rho\beta^{n-(k+1)}Q_{n,k+1} &:= (\rho\beta^n)^{(k+1)} \\ &= [(\rho\beta^n)^{(k)}]' = [\rho\beta^{n-k}Q_{n,k}]' \\ &= \rho'\beta^{n-k}Q_{n,k} + \rho(n-k)\beta^{n-k-1}\beta'Q_{n,k} + \rho\beta^{n-k}Q'_{n,k} \\ &= \rho\beta^{n-(k+1)}[\alpha + (n-k)\beta']Q_{n,k} + \rho\beta^{n-(k+1)}\beta Q'_{n,k}\end{aligned}$$

(Iskoristili smo pri tom relaciju $\rho'\beta = \rho\alpha$). Odavde, uz prenumeraciju indeksa,

$$Q_{n,k} = [\alpha + (n-k-1)\beta']Q_{n,k-1} + \beta Q'_{n,k-1}$$

i vidimo da je $Q_{n,k}$ zaista polinom stupnja k (koristeći pri tom indukciju). Specijalno je $Q_{n,n}$ polinom stupnja n. Za njega vrijedi

$$Q_{n,n} = \frac{1}{\rho}(\rho\beta^n)^{(n)} = (\alpha + \beta')Q_{n,n-1} + \beta Q'_{n,n-1}.$$

Pokažimo da je ovaj polinom okomit na sve polinome stupnja $< n$. Odatle će slijediti da je $Q_{n,n}$ proporcionalan polinomu Q_n, dakle $Q_n = A_n Q_{n,n}$ i time će teorem biti dokazan.

Dovoljno je pokazati da je $Q_{n,n}$ okomit na x^k, za $k = 0, 1, \dots, n-1$. Parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned}
(Q_{n,n} \mid x^k) &= \int_a^b x^k Q_{n,n} \rho dx \\
&= \int_a^b x^k (\rho\beta^n)^{(n)} dx \\
&= (\rho\beta^n)^{(n-1)} x^k \Big|_a^b - k \int_a^b x^{k-1} (\rho\beta^n)^{(n-1)} dx
\end{aligned}$$

kako je po formuli

$$(\rho\beta^n)^{(n-1)} x^k \Big|_a^b = \rho\beta Q_{n,n-1} x^k \Big|_a^b = 0,$$

zbog ρ–uvjeta, to prvi član iščezava. Ponovimo parcijalnu integraciju k puta. Pri tom svaki put iskoristimo relaciju i ρ–uvjet (5.2). Dobivamo

$$\begin{aligned}
(Q_{n,n} \mid x^k) &= (-1)^k k! \int_a^b (\rho\beta^n)^{(n-k)} dx \\
&= (-1)^k k! (\rho\beta^n)^{(n-k-1)} \Big|_a^b = 0
\end{aligned}$$

ponovo zbog istog razloga, čim je $k < n$.

Time je teorem dokazan. ■

Označavat ćemo u daljnjem

$$\widetilde{Q}_n(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} \Big(\rho(x) \beta(x)^n \Big)$$

tako da će n-ti ortogonalni polinom biti

$$Q_n = A_n \cdot \widetilde{Q}_n(x).$$

Primjer 3. Za već prije promatrane četiri klase polinoma, upravo izvedena Rodriguesova formula glasi

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= A_n \frac{d^n}{dx^n} \Big\{ (1 - x^2)^n \Big\} \\
T_n(x) &= A_n \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n}{dx^n} \Big\{ (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}} \Big\} \\
L_n(x) &= A_n e^x \frac{d^n}{dx^n} \Big\{ x^n e^{-x} \Big\} \\
H_n(x) &= A_n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \Big\{ e^{-x^2} \Big\}
\end{aligned}$$

Norma ortogonalnog polinoma

U slučaju $k = n$ skalarni produkt $(Q_{n,n} \mid x^k)$ ne izčezava, već omogućuje da se odredi norma ortogonalnog polinoma $\widetilde{Q}_n$. Ta je norma potrebna pri određivanju koeficijenata Fourierovog reda.

Neka su $\widetilde{a}_n$, $\widetilde{b}_n$ vodeći koeficijenti polinoma $\widetilde{Q}_n$:

$$\widetilde{Q}_n(x) = \widetilde{a}_n x^n + \widetilde{b}_n x^{n-1} + \dots$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}(\widetilde{Q}_n \mid x^n) &= \frac{1}{\widetilde{a}_n}(\widetilde{Q}_n \mid \widetilde{a}_n x^n)\\ &= \frac{1}{\widetilde{a}_n}(\widetilde{Q}_n \mid \widetilde{a}_n x^n + \widetilde{b}_n x^{n-1} + \dots)\\ &= \frac{1}{\widetilde{a}_n}(\widetilde{Q}_n \mid \widetilde{Q}_n).\end{aligned}$$

Označimo sa $\widetilde{d}_n$ normu polinoma $\widetilde{Q}_n$,

$$\widetilde{d}_n^2 := (\widetilde{Q}_n \mid \widetilde{Q}_n).$$

Prema gornjem, vrijedi

$$\widetilde{d}_n^2 = \widetilde{a}_n(\widetilde{Q}_n \mid x^n).$$

S druge strane, racunajući ovaj skalarni produkt na način kao u Teoremu 5.2, dobivamo

$$(\widetilde{Q}_n \mid x^n) = (-1)^n n! \int_a^b \rho(x)\beta(x)^n dx.$$

Zato je

$$\widetilde{d}_n^2 = (-1)^n \widetilde{a}_n n! \int_a^b \rho(x)\beta(x)^n dx. \tag{8}$$

Funkcija izvodnica

Funkcija izvodnica ortogonalnog sistema (Q_n) jest funkcija dviju varijabli $\Psi(x,w)$ koja ima prikaz oblika

$$\Psi(x,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_n(x)}{n!} w^n.$$

Pri tom tretiramo x kao parametar, a ovaj red priomatramo kao Taylorov red funkcije $w \mapsto \Psi(x,w)$. w je općenito kompleksna varijabla i ovaj će red konvergirati na nekom krugu oko ishodišta.

Odredimo oblik funkcije $\Psi(x,w)$ za proizvoljan ortogonalni sistem $\{Q_n\}$.

Zbog jednostavnosti ćemo promatrati funkciju izvodnicu za sistem polinoma $\widetilde{Q}_n$ definiran sa

$$\widetilde{Q}_n(z) = \frac{1}{\rho(z)} \frac{d^n}{dz^n}\Big\{\rho(z)\beta(z)^n\Big\} \tag{9}$$

tj. uz izbor $A_n = 1$ u Rodriguesovoj formuli (5.4). Nakon što odredimo funkciju izvodnicu za ovaj sistem, time je ujedno i određena funkcija izvodnica i za sistem $\{A_n\widetilde{Q}_n\}$, za različite izbore konstante normiranja A_n.

Promatrajmo jednadžbu po nepoznanici u

$$u - z - w\beta(u) = 0$$

to jest

$$u - z - w(\beta_0 + \beta_1 u + \beta_2 u^2) = 0.$$

Ukoliko je $w - 0$, rješenje ove jednadžbe je $u = z$. Neka je sada w u nekoj malenoj okolini nule. Tada ova kvadratna jednadžba ima dva rješenja, jedno koje se nalazi blizu točke z, a drugo blizu točke ∞. Da naglasimo ovisnost tih rješenja o parametru w, označimo ih sa

$$u_{1,2}(w) = \frac{1 - \beta_1 w \pm \sqrt{(1 - \beta_1 w)^2 - 4w(\beta_0 w + z)\beta_2}}{2w\beta_2}.$$

Rješenje koje se nalazi u okolini točke z jest ono s predznakom $-$. Izaberimo taj predznak.

Za funkciju

$$u(w) = \frac{1 - \beta_1 w - \sqrt{(1 - \beta_1 w)^2 - 4w(\beta_0 w + z)\beta_2}}{2w\beta_2}.$$

vrijedi $u(0) = z$ (pokaži to!). To je analitička funkcija u nekoj okolini točke $w = 0$. Pomoću nje možemo izraziti funkciju izvodnicu:

Teorem 3. *Neka je $\{\widetilde{Q}_n\}$ ortogonalni sistem definiran sas (5.7). Funkcija izvodnica Ψ definirana formulom*

$$\Psi(z, w) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{Q}_n(z)}{n!} w^n$$

ima prikaz

$$\Psi(z, w) = \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{\rho(u(w))}{1 - w\beta'(u(w))} \tag{10}$$

gdje je $u(w)$ nul-točka jednadžbe

$$u - z - w\beta(u) = 0 \tag{11}$$

koja se nalazi u okolini točke $u = z$.

DOKAZ. Vrijedi, po Rodriguesovoj formuli

$$\begin{aligned}\Psi(z, w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \widetilde{Q}_n(z) \\ &= \frac{1}{\rho(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \frac{d^n(\rho\beta^n)}{dz^n}.\end{aligned}$$

Upotrebimo Cauchyjev teorem za prikaz n-te derivacije analitičke funkcje $\rho\beta^n$:

$$\Psi(z,w) = \frac{1}{\rho(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(u)\beta^n(u)du}{(u-z)^{n+1}}.$$

Tu je C Jordanova zatvorena krivulja koja sadrži točku z i nalazi se u području analitičnosti funkcije $\rho\beta^n$. Zamjenom poretka sumiranja i integracije imamo, za dovoljno maleni $|w|$

$$\begin{aligned}
\Psi(w,z) &= \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(u)}{u-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w\beta(u)}{u-z}\right)^n du \\
&= \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(u)}{u-z} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{w\beta(u)}{u-z}} du \\
&= \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\rho(u)du}{u-z-w\beta(u)}.
\end{aligned}$$

Ovaj ćemo integral izračunati primjenom teorema o reziduumu. Unutar krivulje C nalazi se samo jedan singularitet podintegralne funkcije. To je upravo pol prvog reda koji odgovara nul-točki $u = u(w)$ jednadžbe (5.9), koja se nalazi u blizini točke z. Reziduum u toj točki je

$$c_{-1} = \frac{\rho(u(w))}{1-w\beta'(u(w))}.$$

Stoga je

$$\Psi(z,w) = \frac{1}{\rho(z)} c_{-1} = \frac{1}{\rho(z)} \cdot \frac{\rho(u(w))}{1-w\beta'(u(w))}.$$

a to smo i trebali dokazati

Sada ćemo odrediti izvodncu za četiri najvažnije klase ortogonalnih polinoma.

Izvodnica Legendreovih polinoma.

Osnovne relacije za Legendreove polinome:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= [-1,1], \qquad \rho(x) = 1, \\
\alpha(x) &= 0, \qquad \beta(x) = 1-x^2.
\end{aligned}$$

Jednadžba (05) glasi (sa x na mjestu z):

$$wu^2 + u - (x+w) = 0,$$

sa rješenjima

$$u_{1,2} = \frac{1}{2w}\left(-1 \pm \sqrt{1+4xw+4w^2}\right).$$

Ako je w malen, tada vrijedi $\sqrt{1+4xw+4w^2} \approx 1+2xw$ i izbor predznaka $+$ daje rješenje blisko broju x:

$$u = u(x,w) = \frac{1}{2w}\left(-1 + \sqrt{1+4xw+4w^2}\right).$$

Po formuli (???) slijedi

$$\begin{aligned}\Psi(x,w) &= \frac{1}{1+2wu(x,w)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4wx+4w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{P}_n(x)}{n!}w^n \end{aligned}\tag{12}$$

Sada ćemo odabrati konstantu normiranja A_n. Stavimo

$$P_n(x) := \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\cdot\widetilde{P}_n(x).$$

Pokazat ćemo poslije da je ova konstanta izabrana tako da vrijedi $P_n(1)=1$ za svaki n.

Zamijenimo w sa $-w/2$ u formuli . Dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{1-2wx+w^2}} = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{\widetilde{P}_n(x)}{n!}\Big(-\frac{w}{2}\Big)^n = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)w^n.$$

Dakle

$$\frac{1}{\sqrt{1-2wx+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)w^n.$$

Uvrstimo sada $x=1$. Funkcija izvodnica i desna strana prelaze u:

$$\frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty}w^n = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)w^n$$

te je $P_n(1)=1$ za svaki n.

Rodriguesova formula za Legendreove polinome, uz ovaj izbor konstante normiranja glasi

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}\Big\{(1-x^2)^n\Big\}.\tag{13}$$

Izvodnica Hermiteovih polinoma.

Za Hermiteove polinome vrijedi

$$\begin{aligned}[a,b] &= [-\infty,\infty], &\qquad \rho(x) &= e^{-x^2},\\ \alpha(x) &= -2x, &\qquad \beta(x) &= 1.\end{aligned}$$

Jednadžba (???) glasi

$$u-x-w=0$$

s jednoznačnim rješenjem $u=u(x,w)=x+w$. Po (???), funkcija izvodnica glasi

$$\begin{aligned}\Psi(x,w) &= \frac{1}{e^{-x^2}}e^{-(x+w)^2}\\ &= e^{-2xw-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\widetilde{H}_n(x)}{n!}w^n.\end{aligned}$$

Stavimo $H_n(x) := (-1)^n \widetilde{H}_n(x)$ i zamijenimo u gornjoj formuli w sa $-w$:

$$e^{2wx-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{H}_n(x)}{n!}(-w)^n = \sum_{\overset{=}{H}_n(x)}^{n!} w^n.$$

Dakle

$$e^{2wx-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} w^n \tag{14}$$

Uvrštavajući tu konstantu normiranja, Rodriguesova formula glasi

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right). \tag{15}$$

Izvodnica Laguerrovih polinoma.
Poopćeni Laguerrovi polinomi definirani su s vrijednostima

$$\begin{aligned} [a,b] &= [0,\infty], & \rho(x) &= e^{-x}, \\ \alpha(x) &= s - x, & \beta(x) &= x. \end{aligned}$$

Zato jednadžba (???) u slučaju poopćenih Laguerrovih polinoma glasi

$$u - x - wu = 0$$

s rješenjem

$$u = u(x,w) = \frac{x}{1-w}.$$

Odavde, po relaciji (???) dobivamo izvodnicu

$$\begin{aligned} \Psi(x,w) &= \frac{x^2 e^{-x}}{\cdot} \, \frac{\left(\frac{x}{1-w}\right)^s e^{-\frac{x}{1-w}}}{1-w} \\ &= \frac{1}{(1-w)^{s+1}} e^{-\frac{xw}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widetilde{L}_n^s(x)}{n!} w^n. \end{aligned}$$

Konstantu normiranja A_n ćemo odabrati da bude jednaka 1. Dakle, $L_n^s(x) = \widetilde{L}_n^s(x)$. Dobivamo

$$\frac{1}{(1-w)^{s+1}} e^{-\frac{xw}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^s(x)}{n!} w^n. \tag{16}$$

Rodriguesova formula:

$$L_n^s(x) = x^{-s} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+s} e^{-x}\right).$$

Za $s = 0$ dobivamo Laguerrove polinome L_n, s funkcijom izvodnicom

$$\frac{1}{1-w} e^{-\frac{xw}{1-w}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} w^n. \tag{17}$$

i Rodriguesovom formula:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right).$$

Izvodnica Čebiševljevih polinoma.
Kod Čebiševljevih polinoma imamo

$$\begin{aligned}[a,b] &= [-1,1],\\ \rho(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\ \alpha(x) &= x,\\ \beta(x) &= 1-x^2.\end{aligned}$$

Jednadžba (5.9) se podudara s odgovarajućom jednadžbom u slučaju Lagrangeovih polinoma. Međutim, formula (5.8) je znatno kompliciranija. Zato funkciju izvodnicu Čebiševljevih polinoma izvodimo na način objašnjen u §3.

Slična situacija je i s Rodriguesovom formulom.

Izaberimo konstante normiranja

$$A_n = (-1)^n 2^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Uz ovakav izbor će vrijediti $T_n(1) = 1$. za svaki n. Time dobivamo Rodriguesovu formulu

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{2^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\} \tag{18}$$

koja je, za razliku prema drugim ortogonalnim polinomima, u ovom slučaju od minorne važnosti. Naime, Čebiševljevi polinomi imaju vrlo jednostavan eksplicitni prikaz, koji glasi

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \tag{19}$$

a kojeg smo pokazali u §3, korištenjem rekurzivne relacije. Na osnovu njega dobivamo i funkciju izvodnicu

$$\frac{1-wx}{1-2wx+w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) w^n. \tag{20}$$

Moramo spomenuti da pri korištenju formula o ortogonalnim polinomima u literaturi treba izvjesna doza opreza, pošto ovdje izabrane konstante normiranja nisu istovjetne u svim udžbenicima i priručnicima. Moguće izmjene se dadu lako napraviti, stoga je uvijek potrebno usporediti početne definicije ortogonalnih polinoma.

Rekurzivna relacija

Neka je $\{Q_n\}$ ortogonalni sistem s težinskom funkcijom ρ koja zadovoljava ρ-uvjete. Pokazati ćemo da taj sistem zadovoljava izvjesnu rekurzivnu relaciju koja nam omogućuje da znajući polinome čiji je stupanj $< n$ izračunamo jednostavno i polinom stupnja n.

Krenimo od polinoma $xQ_n(x)$. Njegov je stupanj $n+1$ i možemo ga prikazati u obliku linearne kombinacije

$$xQ_n(x) = c_0 Q_{n+1}(x) + c_1 Q_n(x) + c_2 Q_{n-1}(x) + \dots \tag{21}$$

budući da polinomi Q_0, Q_1, Q_{n+1} čine bazu u prostoru $\mathscr{P}_{n+1}$. Nadalje, znamo da je Q_n okomit na prostor $\mathscr{P}_{n-1}$ svih polinoma stupnja $\leqslant n-1$. Zato vrijedi, specijalno

$$(Q_n \mid xQ_k) = 0, \quad \text{čim je } k < n-1,$$

jer je tada $xQ_k(x)$ polinom stupnja $\leqslant n-1$. Prema tome, vrijediti će i

$$\begin{aligned}(xQ_n \mid Q_k) &= \int_a^b xQ_n(x)Q_k(x)\rho(x)dx \\ &= \int_a^b Q_n(x)\cdot xQ_k(x)\rho(x)dx = (Q_n \mid xQ_k) = 0\end{aligned}$$

čim je $k < n-1$. Po relaciji dobivamo

$$\begin{aligned}(xQ_n \mid Q_k) &= c_0(Q_{n+1} \mid Q_k) + c_1(Q_n \mid Q_k) + \dots \\ &\qquad + c_{n-k+1}(Q_k \mid Q_k) + \dots \\ &= c_{n-k+1}(Q_k \mid Q_k)\end{aligned} \tag{22}$$

Ostali su skalarni produkti jednaki nuli, zbog ortogonalnosti. Međutim, i ovaj preostali izraz jednak je nuli za $k < n-1$. To je moguće samo ako vrijedi $c_{n-k+1} = 0$ za $k < n-1$. Odavde slijedi da je u relaciji (???) ispunjeno $c_3 = c_4 = \ldots = 0$. Prema tome, u toj relaciji preostaju samo tri člana:

$$xQ_n(x) = c_0Q_{n+1}(x) + c_1Q_n(x) + c_2Q_{n-1}(x). \tag{23}$$

i to će biti oblik tražene rekurzivne formule.

Preostaje nam odrediti nepoznate konstante c_0, c_1 i c_2.

Označimo u tu svrhu vodeće koeficijente triju uzastopnih polinoma u formuli (tagbr0), na način

$$\begin{aligned}Q_n(x) &= a_nx^n + b_nx^{n-1} + \dots \\ Q_{n+1}(x) &= a_{n+1}x^{n+1} + b_{n+1}x^n + \dots \\ Q_{n-1}(x) &= a_{n-1}x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \dots\end{aligned}$$

Uvrstimo ove polinome u (tagbr0) i usporedimo koeficijente uz dvije najveće potencije, x^{n+1} i x^n. Koeficijenti uz x^{n+1} glase

$$a_n = c_0a_{n+1}$$

te je

$$c_0 = \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Koeficijenti uz x^n su $b_n = c_0b_{n+1} + c_1a_n$. Odavde

$$c_1 = \frac{b_n - c_0b_{n+1}}{a_n} = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Preostaje nam odrediti koeficijent c_2. Izveli smo u (tagbr1):

$$c_2(Q_{n-1} \mid Q_{n-1}) = (xQ_n \mid Q_{n-1}) = (Q_n \mid xQ_{n-1}) = (Q_n \mid a_{n-1}x^n + \dots).$$

Neispisani dio je polinom stupnja $n-1$, na kojeg je Q_n ortogonalan. Zato,

$$\begin{aligned}c_2(Q_{n-1} \mid Q_{n-1}) &= (Q_n \mid a_{n-1}x^n) = a_{n-1}(Q_n \mid x_n) \\ &= \frac{a_{n-1}}{a_n}(Q_n \mid a_nx^n) = \frac{a_{n-1}}{a_n}(Q_n \mid a_nx^n + \dots).\end{aligned}$$

Ovdje (na mjesto točkica) možemo dodati bilo koji polinom stupnja $n-1$. Izabrati ćemo baš ostatak polinoma Q_n:

$$c_2(Q_{n-1} \mid Q_{n-1}) = \frac{a_{n-1}}{a_n}(Q_n \mid Q_n).$$

Dakle,

$$c_2 = \frac{a_{n-1}(Q_n \mid Q_n)}{a_n(Q_{n-1} \mid Q_{n-1})} = \frac{a_{n-1}d_n^2}{a_n d_{n-1}^2},$$

gdje je d_n norma polinoma Q_n.

Time smo dokazali

Teorem 4. *Ortogonalni polinomi* $\{Q_n\}$ *zadovoljavaju rekurzivnu relaciju*

$$xQ_n(x) = \frac{a_n}{a_{n+1}}Q_{n+1}(x) + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_n(x) + \left(\frac{d_n}{d_{n-1}}\right)^2 \frac{a_{n-1}}{a_n}Q_{n-1}(x) \qquad ()$$

Nul-točke ortogonalnih polinoma

U mnogim primjenama od osnovne s važnosti nul točke ortogonalnih polinoma. U sljedećem teoremu ćemo dokazati neke osnovne činjenice o karakteru tih nul-točaka.

Teorem 5. *Neka je* $n \geqslant 1$. *Sve nul-točke polinoma* Q_n *su realne različite i leže unutar intervala* $[a,b]$.

DOKAZ. Dokažimo najprije da realne nul točke ne mogu biti višestruke. Pretpostavimo obratno: x_0 je višestruka realna nul-točka. Tada je

$$R_{n-2}(x) := \frac{Q_n(x)}{(x-x_0)^2}$$

polinom stupnja $n-2$. On je stoga okomit na Q_n. Međutim, vrijedi

$$(Q_n \mid R_{n-2}) = \int_a^b \frac{Q_n(x)^2}{(x-x_0)^2}\rho(x)dx > 0$$

jer je podintegralna funkcija pozitivna. Time smo dobili kontradikciju. Stoga su sve realne nul-točke jednostruke.

Na sličan način ćemo pokazati da realnih nul-točaka ima n te da sve leže unutar intervala $[a,b]$.

kad bi ih bilo manje, recimo $x_1,\dots,x_k$, ($k<n$), tada bismo mogli napisati

$$Q_n(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_k)R_{n-k}(x).$$

Tu je R_{n-k} polinom stupnja $n-k$ koji nema realnih nul-točaka unutar intervala $[a,b]$ i stoga je na tom intervalu stalnog znaka. Nadalje, polinom Q_n je okomit na polinom $\dfrac{Q_n(x)}{R_{n-k}(x)} = (x-x_1)\cdots(x-x_k)$, jer je ovaj stupnja $k<n$. Stoga,

$$(Q_n \mid \frac{Q_n}{R_{n-k}}) = \int_a^b \frac{Q_n^2(x)}{R_{n-k}(x)}\rho(x)dx = 0$$

što je ponovo kontradikcija, jer je podintegralna funkcija stalnog znaka na $[a,b]$. ■

Primjer 4. Polinomi Jacobija Izbor težine $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ daje

$$\frac{\rho'(x)}{\rho(x)} = \frac{\beta - \alpha - (\alpha+\beta)x}{1-x^2}$$

i odavde

$$\alpha(x) = \beta - \alpha - (\alpha+\beta)x$$
$$\beta(x) = 1 - x^2$$

Pripadne polinome zovemo Jacobijevi polinomi i označavamo sa $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Izbor $\alpha = \beta = 0$ daje Legendreove polinome L_n. Za $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ dobivamo Čebiševljeve polinome T_n, a $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ Čebiševljeve polinome druge vrste U_n. Izbor $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, $\beta = \lambda - \frac{1}{2}$ daje Gegenbauerove polinome C_n^λ.

16.

Fourierov red po ortogonalnim sustavima

Neka je (φ_n) ortogonalni skup u unitarnom vektorskom prostoru X. Ako se f može prikazati u obliku

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \varphi_j$$

tada vrijedi

$$(f \mid \varphi_k) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\,(\varphi_j \mid \varphi_k) = c_k(\varphi_k \mid \varphi_k)$$

tj.

$$c_k = \frac{(f \mid \varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}\,. \tag{1}$$

Tako dobivamo

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(f \mid \varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2}\,\varphi_j\,. \tag{2}$$

Red (3.5) naziva se **Fourierov red** funkcije f po ortogonalnom sistemu (φ_n), a koeficijenti c_j se nazivaju **Fourierovi koeficijenti**.

Primjer 1. Niz $\frac{1}{2}$, $\cos x$, $sinx, \ldots$, $\cos nx$, $\sin nx, \ldots$ čini ortogonalni skup uz skalarni produkt $(f \mid g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. Fourierov red za funkciju f glasi

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\, \cos kx + b_k\, \sin kx)\,.$$

Kako je $\|\frac{1}{2}\|^2 = \pi/2$, $\|\cos k\cdot\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,dx = \pi = \|\sin k\cdot\|^2$, to Fourierovi koeficijenti glase

$$a_k = \frac{(\cos k\cdot \mid f)}{\|\cos k\cdot\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx f(x)\,dx$$

$$b_k = \frac{(\sin k\cdot \mid f)}{\|\sin k\cdot\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx f(x)\,dx$$

Konačne sume oblika $\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k$ zvati ćemo polinom n–tog stupnja po ortogonalnim funkcijama.

Problem. Neka je (φ_n) ortogonalan sistem. Odredi koeficijente $a_1,\dots,a_n$ tako da polinom n–tog stupnja $\sum_1^n a_k\varphi_k$ najbolje aproksimira zadanu funkciju $f\in X$.

Drugim riječima, moramo odrediti koeficijente $a_1,\dots,a_n$ tako da udaljenost $d(f,\sum_1^n a_k\varphi_k)$ bude najmanja moguća, pri čemu je udaljenost d zapravo udaljenost d_2 izvedena iz skalarnog produkta u X. Imamo

$$\begin{aligned}
d(f,\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k)^2 &= \|f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|^2 = \Big(f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \Bigm| f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\Big)\\
&= (f\mid f) - \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \Bigm| f\Big) - (f\mid \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k) + \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \Bigm| \sum_{k=1}^{n} a_j\varphi_j\Big)\\
&= (f\mid f) - 2\sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k\mid f) + \sum_{j,k=1}^{n}(\varphi_j\mid\varphi_k)\\
&= \|f\|^2 - 2\sum_{k=1}^{n} a_k\,c_k\,\|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2\|\varphi_k\|^2\\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k-c_k)^2\|\varphi_k\|^2\\
&\geqslant \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 .
\end{aligned}$$

Možemo zaključiti sljedeće:

1) Ova je udaljenost najmanja kad je $a_k=c_k$.
2) Uvijek vrijedi $\sum_1^n c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2$.

Time smo pokazali

Teorem 1. *Fourierov red (5) ima svojstvo da najbolje aproksimira funkciju f, za svaki n je udaljenost*

$$\|f-\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|_2$$

najmanja, ukoliko je $a_k=c_k=\dfrac{(f\mid\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Nadalje, za koeficijente c_k Fourierovog reda vrijedi Besselova nejednakost

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 \leqslant \|f\|^2 .$$

Do sada smo pokazali: ako se neka funkcija f dade napisati u obliku reda $f = \sum_1^\infty c_k \varphi_k$ po ortogonalnom sistemu (φ_k), tada se koeficijenti c_k tog reda računaju formulom $c_k = \dfrac{1}{\|\varphi\|^2}(f \mid \varphi_k)$ i polinom $\sum_1^n \dfrac{1}{\|\varphi_k\|^2}(f \mid \varphi_k)\,\varphi_k$ najbolje aproksimira funkciju f. Preostaje odgovoriti na sljedeći

Problem. *Kada* se funkcija f može napisati u obliku reda $\sum_1^\infty c_k \varphi_k$?

Primjer 2. Ako je (φ_k) siromašan skup, to neće biti moguće uvijek napraviti. Npr. $\{\sin kx\}$ je ortogonalan skup. Međutim, kako je $\sum b_k \sin kx$ uvijek neparna funkcija, to se niti jedna parna funkcija ne može napisati u obliku $f(x) = \sum b_k \sin kx$.

Neka je X unitaran prostor. Kažemo da je ortogonalan skup (φ_n)

a) **baza** u X, ako se svaka funkcija $f \in X$ može napisati u obliku $f = \sum_1^\infty c_k \varphi_k$ i pri tom vrijedi
$$\|f - \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k\| \to 0 \qquad \text{kad} \quad n \to \infty;$$

b) **zatvoren**, ako za koeficijente Fourierovog reda vrijedi **Parsevalova jednakost**
$$\sum_{k=1}^n c_k^2 \,\|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2;$$

c) **potpun**, ako je svaka funkcija koja je okomita na sve funkcije φ_k identički jednaka nuli (osim možda u konačno mnogo točaka).

Teorem 2. *Neka je (φ_k) ortogonalan sistem u $L^2(a,b)$. Slijedeće su tvrdnje ekvivalentne*

1) (φ_k) je baza.
2) (φ_k) je zatvoren.
3) (φ_k) je potpun.

Čebiševjevi polinomi

Niz (T_n) **Čebiševljevih polinoma** definiran je formulom
$$T_n(x) = \cos n(\arccos x).$$
Ovom su formulom uistinu definirani polinomi. Stavimo $t := \arccos x$. Tada je $x = \cos t$ i $T_n(x) = \cos nt$. Znamo da se $\cos nt$ uvijek može prikazati u obliku polinoma po $\cos t$. Npr.
$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos 0 \cdot t = 1\\
T_1(x) &= \cos t = x\\
T_2(x) &= \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t\\
&= 2\cos^2 t - 1 = 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= \cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t\\
&= 4\cos^3 t - 3\cos t = 4x^3 - 3x
\end{aligned}$$

itd. Općenito, Čebiševljevi polinomi zadovoljavaju rekurzivnu formulu, koju ćemo izvesti iz identiteta

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\,\cos t\,\cos nt\,.$$

Supstitucija $t = \arccos x$ daje

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)\,, \quad n \geqslant 1, \\ T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x. \end{aligned}$$

Iz rekurzivne formule lako dobivamo nekoliko prvih Čebiševljevih polinoma

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

* * *

Sistem (T_n) Čebiševljevih polinoma ortogonalan je na intervalu $[-1,1]$ s težinskom funkcijom $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Vrijedi naime

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos x)\cdot\cos(m \arccos x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \Big[x = \cos t\Big] \\ &= \int_{\pi}^{0} \cos nt \cdot \cos mt \cdot \frac{-\sin t\,dt}{\sqrt{1-\cos^2 t}} \\ &= \int_{0}^{\pi} \cos nt \cdot \cos mt\,dt = \frac{\pi}{2}\delta_{nm} \end{aligned}$$

po poznatim relacijama o ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija.

Odavde vidimo da norma Čebiševljevih polinoma iznosi:

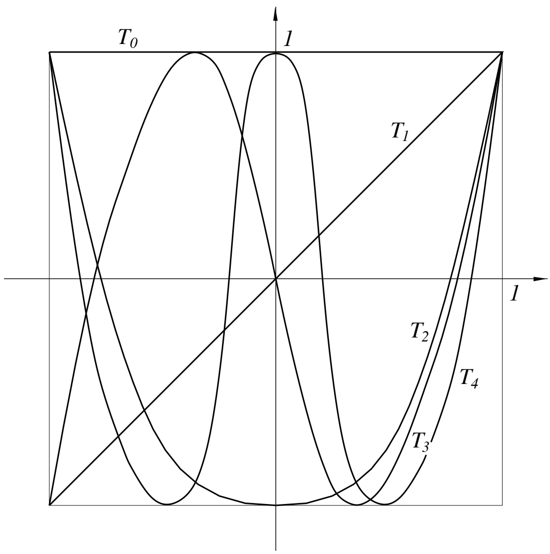
$$\|T_0\|^2 = \pi\,, \qquad \|T_n\|^2 = \frac{2}{\pi}\,, \quad n \geqslant 1.$$

Fourierov red funkcije f po ortogonalnom sustavu (T_n) glasi

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0\,T_0(x) + \ldots + c_n\,T_n(x) + \ldots, \\ c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ c_n &= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad n \geqslant 1\,. \end{aligned}$$

Ovi se integrali računaju supstitucijom $x = \cos t$, jer je tada $T_n(x) = \cos nt$. Tako gornje formule prelaze u

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) dt,$$
$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos t) \cos nt dt$$



Sl. 16.1. Grafički prikaz prvih nekoliko Čebiševljevih polinoma. Primijeti da su ekstremi svih tih polinoma po apsolutnom iznosu jednaki 1

Zadatak 1. Razvij u Fourierov red po Čebiševljevim polinomima funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

▷ Vrijedi

$$f(\cos t) = \begin{cases} 0, & \pi/2 \leqslant t \leqslant \pi, \\ \cos t, & 0 \leqslant t \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

i zato

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{1}{\pi},\\
c_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t\, \cos nt\, dt\\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \big[\cos(n+1)t + \cos(n-1)t\big]\, dt\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}(n+1)}{n+1} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}(n-1)}{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n+1} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n-1}\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1}\,. \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

Ova formula vrijedi za $n > 1$. Shvativši n kao parametar koji teži ka 1 (granični prelaz je opravdan!), ili pak pomoću direktne integracije, dobivamo

$$c_1 = -\frac{2}{\pi}\lim_{n\to 1}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^2-1} = -\frac{2}{\pi}\lim_{n\to 1}\frac{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Za $n \geqslant 1$ dobivamo

$$\begin{aligned}
c_{2n+1} &= 0\\
c_{2n} &= \frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^2-1}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}T_0(x) + \frac{1}{2}T_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\,T_{2n}(x)\,.$$

* * *

Polinom $\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ ima svojstvo da među svim polinomima stupnja n s vodećim koeficijentom 1 najmanje odstupa od nule na intervalu $[-1,1]$. Maksimalno odstupanje tog polinoma je $\pm\frac{1}{2^{n-1}}$ i ono se dostiže u $n+1$ točki. Pokažimo kako se to svojstvo Čebiševljevih polinoma koristi u postupku **teleskopiranja** reda potencija.

Zadatak 2. Odredi polinom stupnja 4 koji najmanje odstupa od polinoma $P(x) = x^6$, na intervalu $[-1,1]$.

$\triangleright$ Među svim polinomima stupnja 6, s vodećim koeficijentom 1, najmanje od nule odstupa polinom $\frac{1}{32}T_6(x)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{32}T_6(x) &= \tfrac{1}{32}(32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1)\\
&= x^6 - \tfrac{3}{2}x^4 + \tfrac{9}{16}x^2 - \tfrac{1}{32}
\end{aligned}$$

Zbog toga polinom $Q(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{32}$ najmanje odstupa od polinoma $P(x) = x^6$.

Polinom Q možemo dobiti na još jedan način, koji bolje opisuje postupak aproksimiranja funkcije s njenim Fourierovim redom. Prikažimo u tu svrhu x^6 pomoću Čebiševljevih polinoma (vidi Tablicu 2.1).

$$x^6 = \tfrac{1}{32}(10 + 15\,T_2 + 6\,T_4 + T_6)$$

a zatim zanemarimo član sa T_6:

$$\begin{aligned} x^6 &\approx \tfrac{1}{32}(10 + 15\,T_2 + 6\,T_4) \\ &= \tfrac{1}{32}\big(10 + 15(2x^2 - 1) + 6(8x^4 - 8x^2 + 1)\big) \\ &= \tfrac{3}{2}x^4 - \tfrac{9}{16}x^2 + \tfrac{1}{32} \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Zadatak 3. Odredi polinom četvrtog stupnja koji dobro aproksimira funkciju $f(x) = \cos x$ na intervalu $[-1, 1]$.

$\triangleright$ Funkciju f možemo aproksimirati Taylorovim polinomom stupnja 4:

$$\cos \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Pri tom je učinjena pogreška koja iznosi

$$R_4 = \frac{\cos^{(5)}(\vartheta)\,x^5}{5!}, \qquad \vartheta \in (-1, 1)$$

i manja je od $^1/_{5!} = 0.0083$. Želimo li postići veću točnost, aproksimirati ćemo funkciju f Taylorovim polinomom većeg stupnja:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720}$$

a zatim polinom x^6 aproksimiramo pomoću Čebiševljevih polinoma polinomom čevtrtog stupnja, kao u prošlom zadatku:

$$x^6 \approx \tfrac{1}{32}(1 - 18x^2 + 48x^4).$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned} \cos x &\approx -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{720}\,\frac{1}{32}\,(1 - 18x^2 + 48x^4) \\ &= 0.99996 - 0.49922\,x^2 + 0.03958\,x^4 \end{aligned}$$

Učinjena pogreška je manja od

$$R_6 + \frac{1}{720}\,\frac{1}{32}\,|T_6| < \frac{1}{7!} + \frac{1}{720}\,\frac{1}{32} = 0.00024\,.$$

Još veću točnost postižemo ako dodamo i član

$$\begin{aligned} \frac{x^8}{8!} &= \frac{1}{40\,320}\,\frac{1}{128}\,(35T)0 + 56T_2 + 28T_4 + T_8) \\ &\approx \frac{1}{40\,320}\,\frac{1}{128}\,(35T_0 + 56T_2 + 28T_4) \\ &\approx \frac{1}{40\,320}\,\frac{1}{128}\,(7 - 112x^2 + 224x^4) \end{aligned}$$

Tada ćemo imati

$$\cos x \approx 0.9999580 - 0.4992405\, x^2 + 0.0396267\, x^4$$

Učinjena pogreška je sada sigurno manja od

$$\frac{1}{720 \cdot 32}\,|T_6| + \frac{1}{40320 \cdot 128}(8|T_6| + |T_8|) + R_8 < 0.000048 \quad \triangleleft$$

Tablica 2.1. Prikaz Čebiševljevih polinoma pomoću polinoma $x \mapsto x^n$ i obratne veze.

	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
T_0	1										
T_1		1									
T_2	−1		2								
T_3		−3		4							
T_4	1		−8		8						
T_5		5		−20		16					
T_6	−1		18		−48		32				
T_7		−7		56		−112		64			
T_8	1		−32		160		−256		128		
T_9		9		−120		432		−576		256	
T_{10}	−1		50		−400		1120		−1280		512

		T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
1		1										
x			1									
x^2	$\frac{1}{2}$	1		1								
x^3	$\frac{1}{4}$		3		1							
x^4	$\frac{1}{8}$	3		4		1						
x^5	$\frac{1}{16}$		10		5		1					
x^6	$\frac{1}{32}$	10		15		6		1				
x^7	$\frac{1}{64}$		35		21		7		1			
x^8	$\frac{1}{128}$	35		56		28		8		1		
x^9	$\frac{1}{256}$		126		84		36		9		1	
x^{10}	$\frac{1}{512}$	126		210		120		45		10		1

16.1. Gramm–Schmidtov postupak ortogonalizacije

Neka je $f_0, f_1, \dots,$ niz linearno nezavisnih funkcija. Taj sistem možemo zamijeniti sistemom ortogonalnih funkcija $w_0, w_1, \dots,$ na ovaj način:

$$
\begin{aligned}
w_0 &:= f_0,\\
w_1 &:= f_1 - \frac{(f_1 \mid w_0)}{\|w_0\|^2}\, w_0,\\
&\ \vdots\\
w_n &:= f_n - \frac{(f_n \mid w_0)}{\|w_0\|^2} - \dots - \frac{(f_n \mid w_{n-1})}{\|w_{n-1}\|^2}\, w_{n-1},\\
&\ \vdots
\end{aligned}
\tag{3}
$$

tj. $w_n := f_n - S_{n-1}(f_n)$. Da je ovaj sistem zaista ortogonalan, lako provjeravamo indukcijom. Vrijedi

$$(w_1 \mid w_0) = (f_1 \mid w_0) - \frac{(f_1 \mid w_0)}{\|w_0\|^2}(w_0 \mid w_0) = 0$$

Neka je $k < n$. Pretpostavimo da je $(w_j \mid w_k) = 0$ za sve $j < n$, $j \neq k$. Želimo pokazati da vrijedi i $(w_n \mid w_k) = 0$. Množeći relaciju (**??**) skalarno s funkcijom w_k dobivamo

$$
\begin{aligned}
(w_n \mid w_k) &= (f_n \mid w_k) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_j)}{\|w_j\|^2}(w_j \mid w_k)\\
&= (f_n \mid w_k) - \frac{(f_n \mid w_k)}{\|w_k\|^2}(w_k \mid w_k) = 0.
\end{aligned}
$$

Ovaj postupak zamijenjivanja niza $f_0, f_1, \dots,$ sistemom ortogonalnih funkcija naziva se **Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije**.

Primijetimo još da se w_n dade prikazati u obliku linearne kombinacije funkcija $f_0, f_1, \dots, f_n$. Nadalje, zbog ortogonalnosti, funkcije $w_0, w_1, \dots, w_n$ su linearno nezavisne. Stoga će sistem $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ razapinjati isti prostor kaoi i prvobitni sistem $\{f_0, f_1, \dots, f_n$.

* * *

Od naročite važnosti u matematičkoj fizici (i numeričkoj matematici) su sistemi ortogonalnih polinoma.

Neka je $\mathscr{P}$ vektorski prostor svih polinoma, promatranih na intervalu $[-1, 1]$. Istaknimo u njemu sljedeće polinome

$$
\begin{aligned}
f_0(x) &= 1,\\
f_1(x) &= x,\\
f_2(x) &= x^2\\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Tada se svaki polinom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ može napisati u obliku $f = a_n f_n + \ldots + a_1 f_1 + a_0 f_0$. Kažemo da smo polinom f rastavili po bazi (f_n) u prostoru $\mathscr{P}$. Međutim, taj sistem nije ortogonalan na intervalu $[-1, 1]$. Vrijedi npr.

$$(f_1 \mid f_3) = \int_{-1}^{1} x \cdot x^3 \, dx = \frac{2}{5}.$$

Sistem ortogonalnih polinoma možemo dobiti od sistema 1, x^2,... s pomoću Gramm–Schmidtovog postupka ortogonalizacije, uz pogodno odabranu težinsku funkciju.

Stavimo

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x. \end{aligned}$$

Vrijedi $(P_0 \mid P_1) = \int_{-1}^{1} x \, dx = 0$. Polinom P_2 potražimo u obliku: $P_2(x) = ax^2 + bx + c$. Tada mora biti

$$(P_2 \mid P_0) = \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c) dx = \tfrac{2}{3}a + 2c = 0 \implies a = -3c$$
$$(P_2 \mid P_1) = \int_{-1}^{1} (ax^3 + bx^2 + cx) dx = \tfrac{2}{3}b = 0.$$

Dobili smo $P_2(x) = c(-3x^2 + 1)$. Konstantu c ćemo izabrati tako da bude $P_2(1) = 1$. Dobivamo

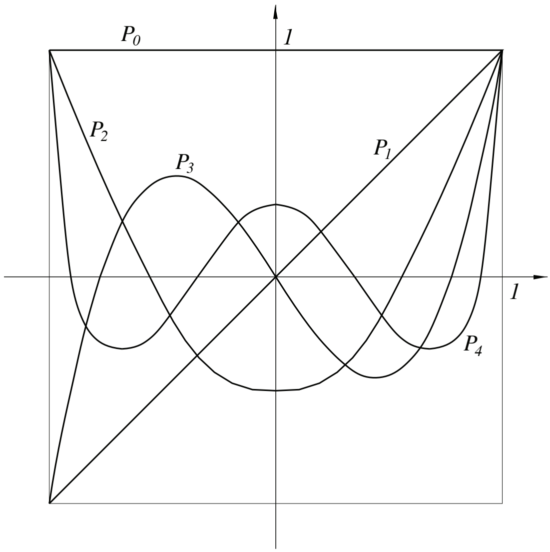
$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}.$$

Nastavimo ovakav postupak s polinomom $P_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Dobiti ćemo:

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x,$$

itd. Na ovaj način dobivamo sistem (P_n) polinoma koji su ortogonalni na intervalu $[-1, 1]$, uz težinsku funkciju $\rho(x) \equiv 1$. Polinom P_n naziva se n–ti **Legendreov polinom**.

Na sljedećoj slici su prikazani grafovi prvih nekoliko Legendreovih polinoma.



Sl. 16.2. Grafovi prvih nekoliko Legendreovih polinoma. Svi oni prolaze točkom $(1,1)$, *imaju sve nul točke realne. Primjeti da nul točke polinoma* P_n *razdvajaju nul točke polinoma* P_{n+1}

Legendreovi se polinomi mogu zadati eksplicitno, pomoću **Rodriguesove formule**:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]. \tag{4}$$

Korištenjem tog prikaza pokazati ćemo da su polinomi P_n i P_m zaista ortogonalni za $n \neq m$. Pri tom ćemo koristiti tzv **Leibnitzovu formulu** za derivaciju višeg reda produkta dviju funkcija:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f \cdot g) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k f}{dx^k} \cdot \frac{d^{n-k} g}{dx^{n-k}}. \tag{5}$$

Pokazati ćemo da vrijedi

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = \delta_{nm} \cdot \frac{2}{2n+1}. \tag{6}$$

Neka je $n \neq m$. Možemo pretpostaviti da je $n > m$. Da bismo dokazali ortogonalnost polinoma P_n i P_m, dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n(x)\,dx = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Koristeći prikaz (**??**) i uzastopnu parcijalnu integraciju, imamo

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{-1}^{1} x^k P_n(x)dx = \frac{1}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1} x^k \frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n\Big]dx \\
&= \frac{1}{2^n\, n!}\, x^k\, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)^n\Big]\,\Big|_{-1}^{1} - \frac{k}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1} x^{k-1}\, \frac{d^{n-1}[(x^2-1)^n]}{dx^{n-1}}dx.
\end{aligned}$$

Funkcija $(x^2-1)^n$ ima nul točke $+1$ i -1, kratnosti n. Stoga derivacija reda $n-1$ ima u tim točkama (jednostruke) nul-točke, te prvi dio u gornjoj formuli iščezava. Uzastopna parcijalna integracija nakon k koraka daje

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{(-1)^k\, k!}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1} \frac{d^{n-k}[(x^2 1)]}{dx^{n-k}}dx \\
&= \frac{(-1)^k\, k!}{2^n\, n!}\, \frac{d^{n-k-1}[(x^2-1)^n]}{dx^{n-p-1}}\,\Big|_{-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

čim je $n-k-1 \geqslant 0$, tj $k < n$.

Ako je pak $k = n$, integral nije jednak nuli:

$$I_n = \frac{(-1)^n\, n!}{2^n\, n!}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx.$$

Satvimo ovdje $x = 1-2t$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{(-1)^n}{2^n}\int_0^1 (2t)^n(2-2t)^n\cdot 2dt \\
&= (-1)^n\cdot 2^{n+1}\int_0^1 (1-t)^n t^n dt.
\end{aligned}$$

Ponovna n–terostruka parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned}
I_n &= (-1)^n\cdot 2^{n+1}\Big\{(1-t)^n\cdot\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\Big|_0^1 - \frac{n}{n+1}\int_{-1}^{1}(1-t)^{n-1}\cdot t^{n+1}dt\Big\} \\
&= \ldots = (-1)^n\cdot 2^{n+1}\cdot(-1)^n\cdot\frac{n!}{(n+1)\cdots(2n)}\int_{-1}^{1} t^{2n}dt \\
&= \frac{2^{n+1}\, n!}{(n+1)\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

Ovim smo izračunali **normu** Legendreovog polinoma:

$$\begin{aligned}
d_n^2 = \int_{-1}^{1} P_n(x)^2 dx &= \int_{-1}^{1} P_n(x)\cdot[a_n x^n + \ldots]dx \\
&= a_n\int_{-1}^{1} P_n(x)\, x^n\, dx \\
&= a_n I_n = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{(2b)!}{(n!)^2}\cdot\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Primjer 3. Izračunaj prvih nekoliko koeficijenata u razvoju funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

u red po Legendreovim polinomima.

▷ Fourierov red funkcije f po Legendreovim polinomima će imati oblik

$$f(x) = c_0 P_0(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots$$

a koeficijente c_n ćemo računati na način

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx \\ &= \frac{2n+1}{2} \left(-\int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx + \int_0^1 P_n(x)\, dx \right). \end{aligned}$$

Za parni n polinom P_n je parna, a za neparni n neparna funkcija. (Iz rekurzivnih relacija se lako vidi da P_{2n} sadrži samo parne potencije, a P_{2n+1} samo neparne potencije.) Zato vrijedi

$$\int_{-1}^{0} P_n(x)\, dx = (-1)^n \int_0^1 P_n(s)\, ds.$$

Odavde

$$c_n = \begin{cases} 0\,, & n \quad \text{paran,} \\ (2n+1) \displaystyle\int_0^1 P_n(x)\, dx\,, & \text{n} \quad \text{neparan.} \end{cases}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} c_1 &= 3 \int_0^1 x\, dx = \frac{3}{2} \\ c_3 &= 7 \int_0^1 \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x)\, dx = -\frac{7}{8} \\ c_5 &= 11 \int_0^1 \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)\, dx = \frac{11}{16} \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

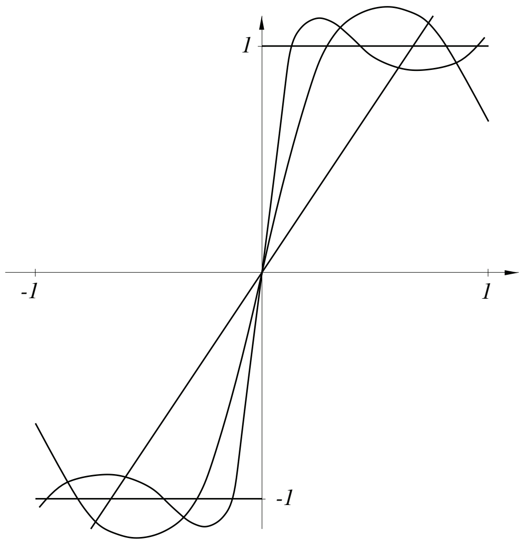
Dobili smo

$$f(x) = \tfrac{3}{2} P_1(x) - \tfrac{7}{8} P_3(x) + \tfrac{11}{16} P_5(x) + \ldots$$

Nekoliko prvih Fourierovih polinoma (aproksimacija funkcije f) su:

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \tfrac{3}{2}\, x \\ S_3(f) &= \tfrac{5}{16}(-7x^3 + 9x) \\ S_5(f) &= \frac{1}{128}(693\, x^5 - 1050\, x^3 + 525\, x) \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

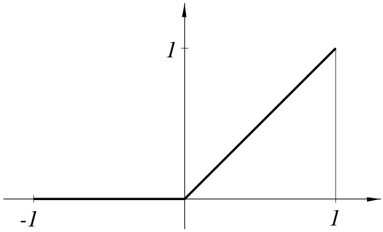
Na slici 16.3 nacrtane su dobivene aproksimacije. ◁



Sl. 16.3.

Zadatak 4. Razvij u red po Legendreovim polinomima funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$



Sl. 16.4.

▷ Vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x),$$

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \int_{0}^{1} x P_n(x) dx.$$

Da bismo izračunali ovaj integral, upotrebit ćemo Rodriguesovu formulu. Parcijalna integracija daje:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{2n+1}{2}\int_0^1 xP_n(x)dx \\
&= \frac{2n+1}{2}\cdot\frac{1}{2^n\,n!}\int_0^1 x\cdot\frac{d^n}{dx^n}\Big[(x^2-1)^n\Big]\,dx \\
&= \frac{2n+1}{2^{n+1}\,n!}\left\{x\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)\Big]\,\Big|_0^1 - \int_0^1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)^n\Big]dx\right\} \\
&= \frac{2n+1}{2^{n+1}\,n!}\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)^n\Big]\,\Big|_{x=1} - \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Big[(x^2-1)^n\Big]\,\Big|_0^1\right\},
\end{aligned}$$

(za $n \geqslant 2$). Vrijednost izraza $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x^2-1)^n\Big]$ u točki $x=1$ izračunat ćemo primjenom Leibnitzove formule za derivaciju produkta:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\Big[(x-1)^n\cdot(x+1)^n\Big]\,\Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{d^k[(x-1)^n]}{dx^k}\cdot\frac{d^{n-k-1}[(x+1)^n]}{dx^{n-k+1}}\,\Big|_{x=1} = 0$$

jer je

$$\frac{d^k[(x-1)^n]}{dx^k}\,\Big|_{x=1} = n(n-1)\cdot(n-k+1)\cdot(x-1)^{n-k}\,\Big|_{x=1} = 0,$$

za $k < n$.

(Možemo zaključivati i ovako: točka $x=1$ je nul-točka kratnosti n polinoma $x \mapsto (x^2-1)^n$, pa je nul-točka kratnosti 1 za njegovu derivaciju reda $n-1$.)

Dakle,

$$c_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}\,n!}\cdot\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Big[(x^2-1)^n\Big]\,\Big|_{x=0}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\Big[(x^2-1)^n\Big] &= \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{d^{n-2}(x^{2k})}{dx^{n-2}}.
\end{aligned}$$

Za neparne $n > 1$ ovaj polinom ima samo neparne potencije i uvršten u točki 0 daje vrijednost 0. Zato je $c_{2n+1} = 0$, za sve $n \geqslant 1$.

$$c_1 = \frac{3}{2}\int_0^1 xP_1(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Ako je n paran, $n = 2m$,

$$\sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} (-1)^{2m-k} \frac{d^{2m-2}(x^{2k})}{dx^{2m-2}} \Bigg|_{x=0}$$
$$= \binom{2m}{m-1} (-1)^{m+1} \frac{d^{2m-2}(x^{2m-2})}{dx^{2m-2}}$$
$$= \binom{2m}{m-1} (-1)^{m+1} (2m-2)!$$

te je

$$\begin{aligned} c_{2n} &= \frac{4n+1}{2^{2n+1}(2n)!} \binom{2n}{n-1} (-1)^{n+1} (2n-2)! \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)}{2^{2n+2} n(2m-1)} \binom{2n}{n-1}, \qquad n \geqslant 1; \\ c_0 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dakle

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(4n+1)}{2^{2n+2} n(2n-1)} \binom{2n}{n-1} P_{2n}(x) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} x + \frac{5}{16} P_2(x) - \frac{3}{32} P_4(x) + \frac{13}{256} P_6(x) + \ldots \quad \triangleleft \end{aligned}$$

* * *

Zadatak 5. Gramm-Schmidtovim postupkom ortogonaliziraj funkcije

$$f_0(x) = 1\,, \quad f_1(x) = x\,, \quad f_2(x) = x^2\,, \quad f_3(x) = x^3$$

na intervalu $[0,1]$, uz težinsku funkciju $\rho(x) = x$.

$\triangleright$ Računat ćemo ortogonalan niz (w_n) po formuli . Izračunajmo potrebne skalarne produkte i norme.

$$\begin{aligned} w_0(x) &= f_0(x) = 1, \\ \|w_0\|^2 &= \int_0^1 x\,dx = \tfrac{1}{2}, \\ (f_1 \mid w_0) &= \int_0^1 x \cdot 1 \cdot x\,dx = \tfrac{1}{3}. \end{aligned}$$

Zato

$$w_1(x) = f_1(x) - \frac{(f_1 \mid w_0)}{\|w_0\|^2} w_0(x) = x - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \cdot 1 = x - \tfrac{2}{3},$$

Da bi odredili w_2, računamo

$$\|w_1\|^2 = \int_0^1 (x - \tfrac{2}{3})^2\, x\, dx = \tfrac{1}{36},$$

$$(f_2 \mid w_0) = \int_0^1 x^2 \cdot 1\, x\, dx = \tfrac{1}{36},$$

$$(f_2 \mid w_1) = \int_0^1 x^2 (x - \tfrac{2}{3})\, x\, dx = \tfrac{1}{30}.$$

i odavde

$$\begin{aligned} w_2 &= f_2(x) - \frac{(f_2 \mid w_0)}{\|w_0\|^2}\, w_0(x) - \frac{(f_2 \mid w_1)}{\|w_1\|^2}\, w_1(x) \\ &= x^2 - \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \cdot 1 - \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{36}}(x - \tfrac{2}{3}) = x^2 - \tfrac{6}{5}\, x + \tfrac{3}{10}, \end{aligned}$$

Još jedan krug računanja

$$\|w_2\|^2 = \int_0^1 (x^2 - \tfrac{6}{5}\, x + \tfrac{3}{10})^2 x\, dx = \tfrac{1}{600},$$

$$(f_3 \mid w_0) = \int_0^1 x^3 \cdot 1 \cdot x\, dx = \tfrac{1}{5},$$

$$(f_3 \mid w_1) = \int_0^1 x^3\, (x - \tfrac{2}{3})\, x\, dx = \tfrac{1}{30},$$

$$(f_3 \mid w_2) = \int_0^1 x^3\, (x^2 - \tfrac{6}{5}\, x - \tfrac{3}{10})\, x\, dx = \tfrac{1}{350},$$

i ponovo po dobivamo

$$\begin{aligned} w_3(x) &= x^3 - \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} \cdot 1 - \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{36}}(x - \tfrac{2}{3}) - \frac{\frac{1}{350}}{\frac{1}{600}} \left(x^2 - \tfrac{6}{5}\, x + \tfrac{3}{10}\right) \\ &= x^3 - \tfrac{12}{7}\, x^2 + \tfrac{5}{6}\, x - \tfrac{4}{35}\, . \quad \triangleleft \end{aligned}$$

Zadatak 6. U svakom koraku Gramm–Schmidtovog postupka ortogonalizacije, najteže je izračunati $\|w_n\|^2$. Dokaži sljedeću korisnu formulu:

$$\|w_n\|^2 = \|f_n\|^2 - \frac{(f_n \mid w_0)^2}{\|w_0\|^2} - \ldots - \frac{(f_n \mid w_{n-1})^2}{\|w_{n-1}\|^2}\ .$$

▷ Vrijedi

$$\|w_n\|^2 = (w_n \mid w_n) = \left(f_n - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_i)}{\|w_i\|^2} \;\middle|\; f_n - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_j)}{\|w_j\|^2}\right)$$

$$(f_n \mid f_n) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_i)}{\|w_i\|^2}(wi \mid f_n) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_j)}{\|w_j\|^2}(f_n \mid w_j)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_i)(f_n \mid w_j)}{\|w_i\|^2\|w_j\|^2}(w_i \mid w_j)$$

Kako vrijedi $(w_i \mid w_j) = \delta_{ij}\|w_j\|^2$, to dobivamo

$$\|w_n\|^2 = (f_n \mid f_n) - 2\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_j)^2}{\|w_j\|^2} + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_j)^2}{\|w_j\|^2}$$

$$= (f_n \mid f_n) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(f_n \mid w_j)^2}{\|w_j\|^2}.$$

Na primjer, u prošlom Zadatku moramo umjesto integrala

$$(w_2 \mid w_2) = \int_0^1 \left(x^2 - \tfrac{6}{5}x + \tfrac{3}{10}\right)^2 x dx$$

izračunati samo

$$(f_2 \mid f_2) = \int_0^1 x^4 \cdot x\,dx = \frac{1}{6}$$

i iskoristiti već od prije poznate vrijednosti:

$$(w_2 \mid w_2) = \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{900}}{\frac{1}{36}} = \frac{1}{600}. \quad \triangleleft$$

Rademacherov sistem

Uz klasične ortogonalne sisteme, sastavljene od klasa 'lijepih', beskonačno-diferencijabilnih funkcija poput sinusoida ili polinoma, važni su i ortogonalni sistemi sasvim drukčijih svojstava, koje sačinjavaju diskontinuirane funkcije. Jedan od tih sistema je i **Rademacherov sistem**.

Definirajmo niz funkcija $\{r_n\}$ na intervalu $[0, 1]$ na način

$$r_0(x) = 1, \qquad 0 < x < 1$$

$$r_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

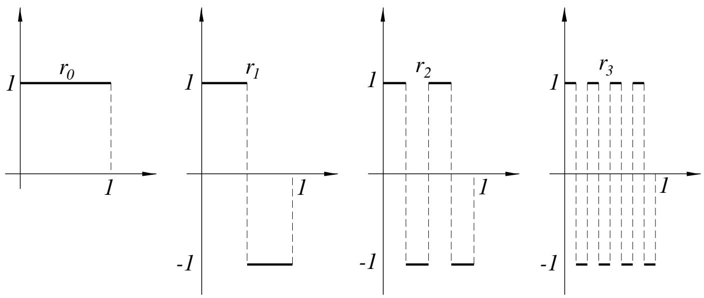
$$r_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \frac{1}{4},\ \frac{2}{4} < x < \frac{3}{4} \\ -1, & \frac{1}{4} < x < \frac{2}{4},\ \frac{3}{4} < x < 1 \end{cases}$$

itd. U točkama prekida neka je $r_k(x) = 0$.

Vrijednost funkcije r_k u točki $x \in (0,1)$ možemo napisati i na ovaj način: prikažimo broj $x \in (0,1)$ u binarnom obliku. Ako se na k-tom mjestu nalazi broj 1, stavimo $r_k(x) = 1$, a ako se na tom mjestu nalazi broj 1, stavimo $r_k(x) = -1$.

Tako npr. u točki $x = 0{,}011101\dots$ vrijedi $r_0(x) = 1$, $r_1(x) = 1$, $r_2(x) = -1$, $r_3(x) = -1$, $r_4(x) = -1$, $r_5(x) = 1$, $r_6(x) = -1$, itd.

Slika **??** prikazuje prvih nekoliko Rademacherovih funkcija.



Sl. 16.5. Rademacherove funkcije

Zadatak 7. Pokaži da $\{r_n\}$ čini ortonormirani sistem, uz uobičajeni skalarni produkt prostora $L_2(0,1)$.

▷ Neka je $m > n$. Neka je I_n bilo koji od 2^n intervala na kojima je r_n konstantna (i iznosi $+1$ ili -1). Tada je

$$\int_{I_n} r_n(x) r_m(x) dx = \pm 1 \cdot \int_{I_n} r_m(x) dx.$$

Kako je $m > n$, to funkcija r_m poprima na intervalu I_n vrijednosti $+1$ ili -1, na svakom od 2^{m-n} dijelova na koje se raspada taj podinterval. Funkcija r_m će imati vrijednost $+1$ na polovini tih podintervala, te -1 na preostaloj polovini. Zato je

$$\int_{I_n} r_m(x) dx = 0$$

te je

$$\int_0^1 r_n(x) r_m(x) dx = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{I_n} r_n(x) r_m(x) = 0$$

S druge strane je

$$\int_0^1 r_n(x)^2 dx = \int_0^1 1 \cdot dx = 1,$$

te je $\{r_n\}$ ortonormirani sistem. ◁

Zadatak 8. Funkciju $f(x) = x$ razvij u red po Rademacherovom sistemu.

▷ Kako je $\{r_n\}$ ortonormirani sistem, to će Fourierov red glasiti

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f \mid r_n) r_n.$$

Nulti koeficijent dobivamo iz

$$(f \mid r_0) = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \tfrac{1}{2}.$$

Pri računanju ostalih koeficijenata koristimo prikaz

$$r_n(x) = (-1)^{j-1}, \qquad x \in \left(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}\right),\ j = 1, 2, \dots, 2^n.$$

Zato je

$$\begin{aligned}
(f \mid r_n) &= \int_0^1 f(x) r_n(x) dx = \sum_{j=1}^{2^n} \int_{(j-1)/2^n}^{j/2^n} x \cdot (-1)^{j-1} dx \\
&= \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^{j-1} \frac{1}{2} \left[\left(j2^n \right)^2 - \left(\frac{j-1}{2^n} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} \sum_{j=1}^{2^n} (-1)^{j-1} (2j-1) \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} [1 - 3 + 5 - 7 + \dots - (2^n - 1)] \\
&= \frac{1}{2^{2n+1}} [(-2) \cdot 2^{n-1}] = -\frac{1}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Dobili smo:

$$f(x) = \frac{1}{r_0} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} r_n(x). \quad \triangleleft$$