

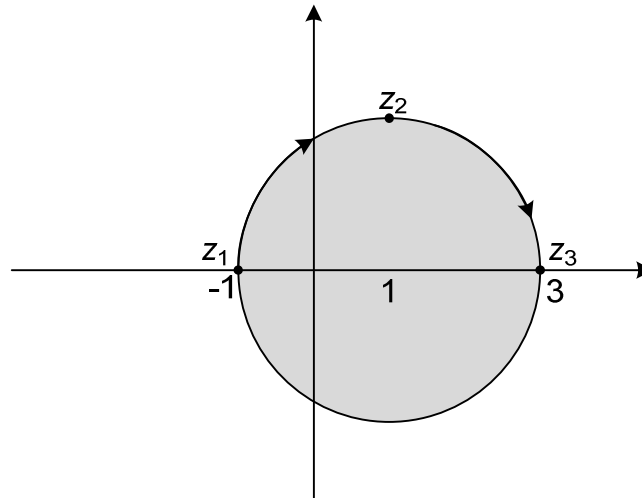


KOMPLEKSNA ANALIZA

Zadaci za vježbu

Möbiusova transformacija – I. dio

21. A) $G = \{|z - 1| < 2\}$, $w = \frac{2z}{z+3}$



$$z_1 = -1 \rightarrow w_1 = -1$$

$$z_2 = 1 + 2i \rightarrow w_2 = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

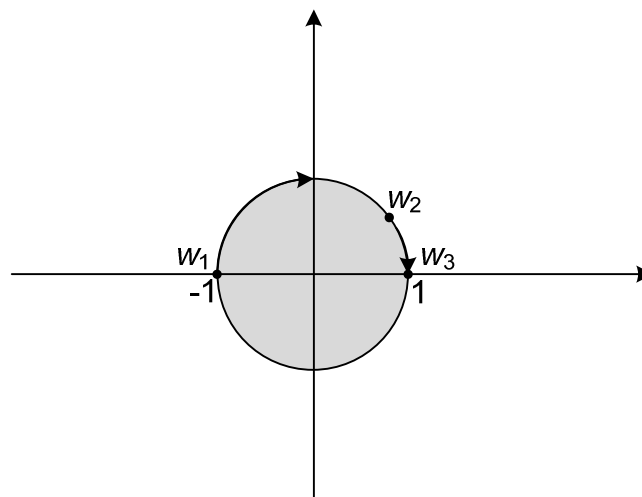
$$z_3 = 3 \rightarrow w_3 = 1$$

Preslikavanjem smo dobili kružnicu. Polumjer kružnice je pola udaljenosti od točke $w_1 = -1$ do točke $w_3 = 1$:

$$r = \frac{1 + 1}{2} = 1$$

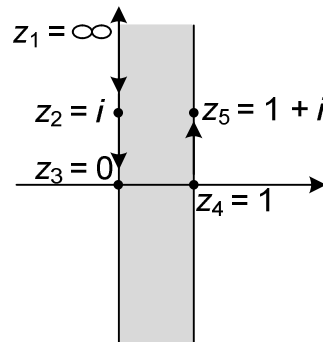
Središte je na polovici te udaljenosti, dakle $S = (0,0)$. Iz toga je $|w| = 1$.

Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s desne strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s desne strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .



Konačno slijedi $G^* = \{|w| < 1\}$.

B) $G = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \frac{z-1}{z}$



Pruga je određena s najmanje 5 točaka:

$$z_1 = \infty \rightarrow w_1 = 1$$

$$z_2 = i \rightarrow w_2 = 1 + i$$

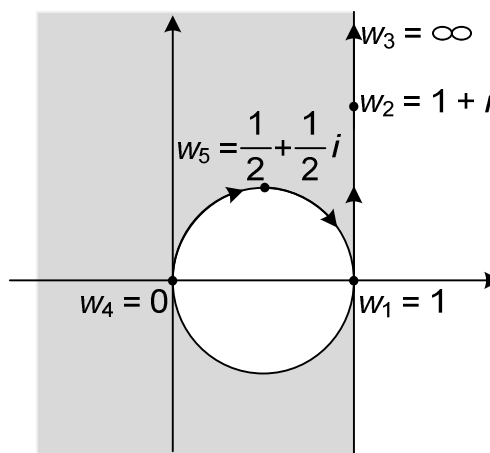
$$z_3 = 0 \rightarrow w_3 = \infty$$

$$z_4 = 1 \rightarrow w_4 = 0$$

$$z_5 = 1 + i \rightarrow w_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

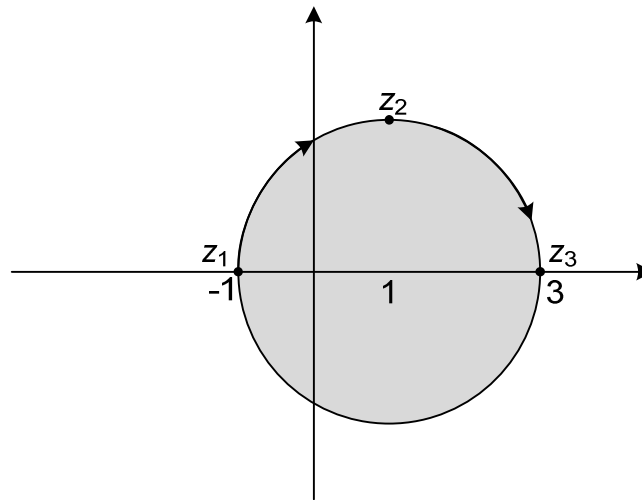
Može se uzeti i točka $z_6 = \infty$ ali to je isto što i točka z_1 pa se dobije isto preslikavanje.

z_1 , z_2 i z_3 očito se preslikavaju u pravac, dok se z_4 , z_5 i $z_6 = z_1$ preslikavaju u kružnicu. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 . Kada se krećemo od točke z_4 prema točki z_5 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_4 prema točki w_5 .



Iz toga je $G^* = \left\{ \left| w - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} w < 1 \right\}$.

22. A) $G = \{|z - 1| < 2\}$, $w = \frac{z+1}{z-2}$



$$z_1 = -1 \rightarrow w_1 = 0$$

$$z_2 = 1 + 2i \rightarrow w_2 = \frac{2}{5} - \frac{6}{5}i$$

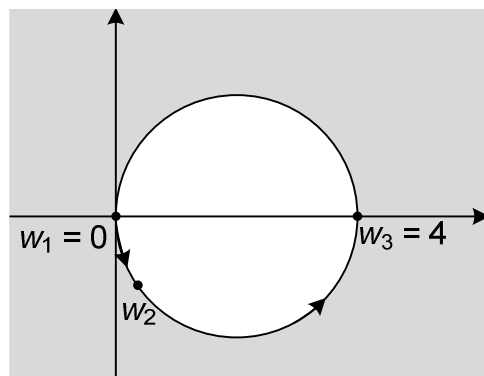
$$z_3 = 3 \rightarrow w_3 = 4$$

Preslikavanjem smo dobili kružnicu. Polumjer kružnice je pola udaljenosti od točke $w_1 = 0$ do točke $w_3 = 4$:

$$r = \frac{0 + 4}{2} = 2$$

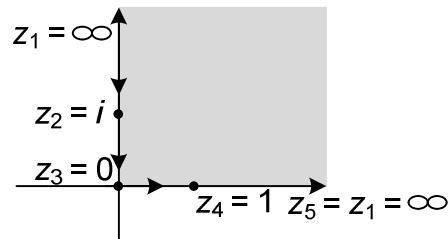
Središte je na polovici te udaljenosti, dakle $S = (2,0)$. Iz toga je $|w - 2| = 2$.

Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s desne strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s desne strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .



Konačno slijedi $G^* = \{|w - 2| > 2\}$.

B) $G = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{1-z}{1+z}$



Prvi polupravac:

$$z_1 = \infty \rightarrow w_1 = -1$$

$$z_2 = i \rightarrow w_2 = -i$$

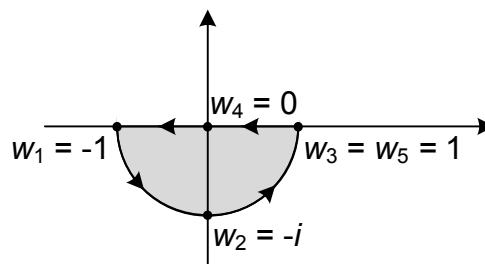
$$z_3 = 0 \rightarrow w_3 = 1$$

Drugi polupravac:

$$z_4 = 1 \rightarrow w_4 = 0$$

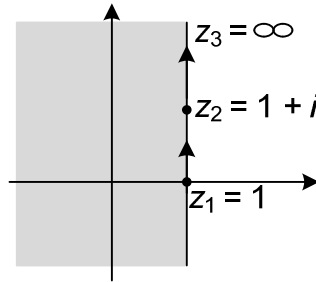
$$z_5 = z_1 = \infty \rightarrow w_5 = w_1 = -1$$

Prvi polupravac očito se preslikava u polukružnicu, dok se drugi polupravac preslikava u segment. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 . Kada se krećemo od točke z_3 prema točki z_5 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_3 prema točki w_5 .



Iz toga je $G^* = \{|w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$.

23. A) $G = \{\operatorname{Re} z < 1\}$, $w = \frac{z}{z-2}$



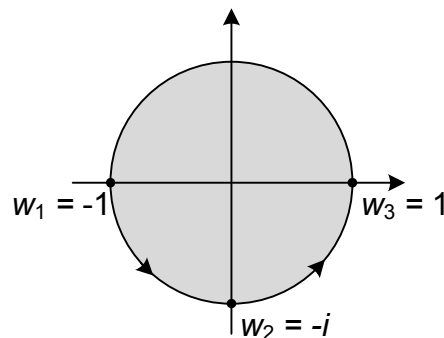
$$z_1 = 1 \rightarrow w_1 = -1$$

$$z_2 = 1 + i \rightarrow w_2 = -i$$

$$z_3 = \infty \rightarrow w_3 = 1$$

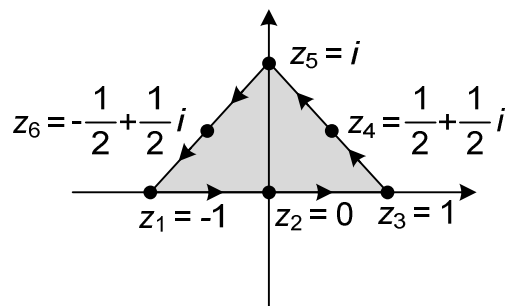
Preslikavanjem smo dobili kružnicu $|w| = 1$.

Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .



Konačno slijedi $G^* = \{|w| > 1\}$.

B) $G = \{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{z+i}{z-i}$



Prvi segment:

$$z_1 = -1 \rightarrow w_1 = -i$$

$$z_2 = 0 \rightarrow w_2 = -1$$

$$z_3 = 1 \rightarrow w_3 = i$$

Drugi segment:

$$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \rightarrow w_4 = -1 + 2i$$

$$z_5 = i \rightarrow w_5 = \infty$$

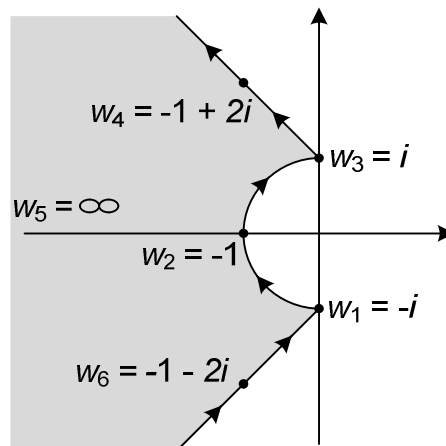
Treći segment:

$$z_6 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \rightarrow w_6 = -1 - 2i$$

Prvi segment sadrži točke z_1 , z_2 i z_3 i preslikava se u polukružnicu. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .

Drugi segment sadrži točke z_3 , z_4 i z_5 i preslikava se u polupravac. Kada se krećemo od točke z_3 prema točki z_5 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_3 prema točki w_5 .

Treći segment sadrži točke z_5 , z_6 i z_1 i preslikava se u polupravac. Kada se krećemo od točke z_5 prema točki z_1 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_5 prema točki w_1 .

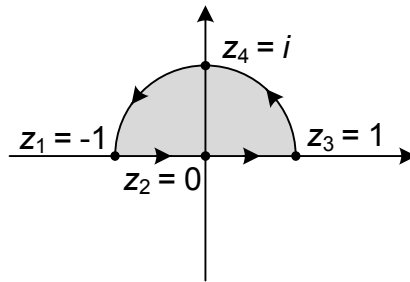


Pravac kroz točke w_1 i w_6 : $v = u - 1 \rightarrow u - v = 1 \rightarrow \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w = 1$.

Pravac kroz točke w_3 i w_4 : $v = -u + 1 \rightarrow u + v = 1 \rightarrow \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w = 1$.

Iz toga je $G^* = \{|w| > 1, \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} w < 1, \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} w < 1\}$.

24. A) $G = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{z-1}{z+1}$



Segment:

$$z_1 = -1 \rightarrow w_1 = \infty$$

$$z_2 = 0 \rightarrow w_2 = -1$$

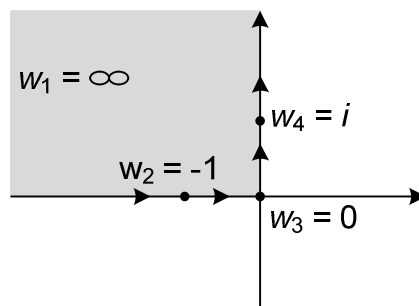
$$z_3 = 1 \rightarrow w_3 = 0$$

Polukružnica:

$$z_4 = i \rightarrow w_4 = i$$

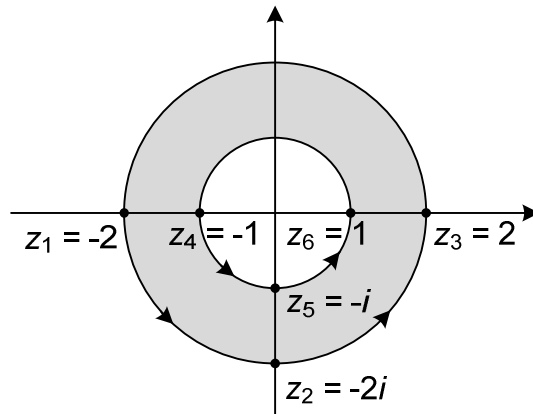
Segment sadrži točke z_1 , z_2 i z_3 i preslikava se u polupravac. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .

Polukružnica sadrži točke z_3 , z_4 i z_1 i preslikava se u polupravac. Kada se krećemo od točke z_3 prema točki z_1 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_3 prema točki w_1 .



Konačno slijedi $G^* = \{\operatorname{Re} w < 0, \operatorname{Im} w > 0\}$.

B) $G = \{1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{2}{z-1}$



Prva kružnica:

$$z_1 = -2 \rightarrow w_1 = -\frac{2}{3}$$

$$z_2 = -2i \rightarrow w_2 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

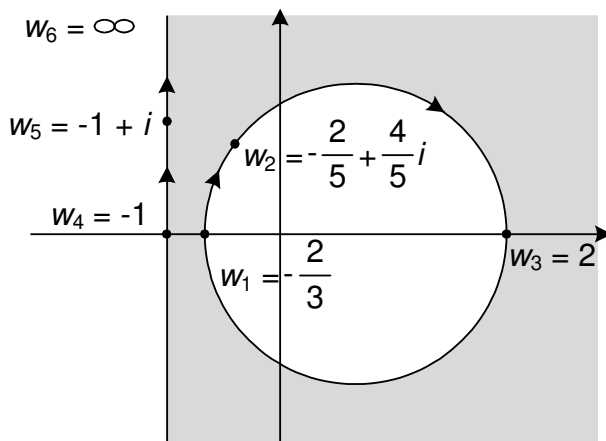
$$z_3 = 2 \rightarrow w_3 = 2$$

Druga kružnica:

$$z_4 = -1 \rightarrow w_4 = -1$$

$$z_5 = -i \rightarrow w_5 = -1 + i$$

$$z_6 = 1 \rightarrow w_6 = \infty$$



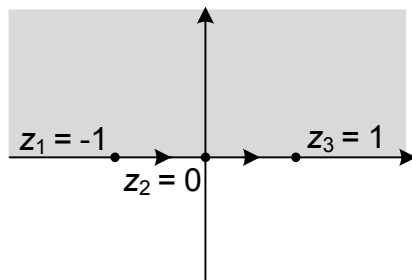
Prva kružnica preslikava se u kružnicu. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 . Druga kružnica preslikava se u pravac. Kada se krećemo od točke z_4 prema točki z_6 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s desne strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s desne

strane kada se krećemo od točke w_4 prema točki w_6 .

Polumjer kružnice je $r = \frac{\frac{2}{3}+2}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, a središte je u $u = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, $v = 0$.

Iz toga je $G^* = \left\{ \left| w - \frac{2}{3} \right| > \frac{4}{3}, \operatorname{Re} w > -1 \right\}$.

25. A) $G = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \frac{i-z}{i+z}$



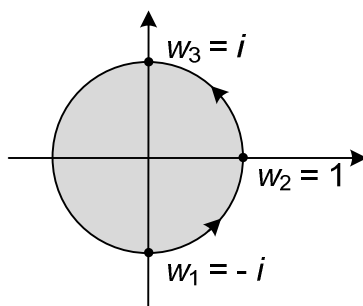
Poluravnina:

$$z_1 = -1 \rightarrow w_1 = -i$$

$$z_2 = 0 \rightarrow w_2 = 1$$

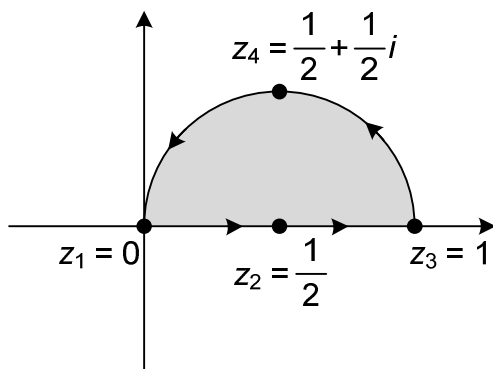
$$z_3 = 1 \rightarrow w_3 = i$$

Segment sadrži točke z_1 , z_2 i z_3 i preslikava se u kružnicu. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .



Konačno slijedi $G^* = \{|w| < 1\}$.

B) $G = \left\{ \left| z - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0 \right\}$, $w = \frac{z}{z-1}$



Segment:

$$z_1 = 0 \rightarrow w_1 = 0$$

$$z_2 = \frac{1}{2} \rightarrow w_2 = -1$$

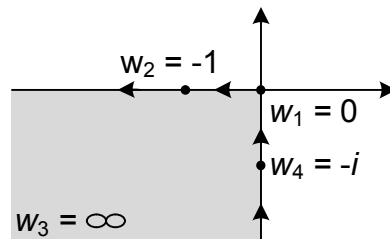
$$z_3 = 1 \rightarrow w_3 = \infty$$

Polukružnica:

$$z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \rightarrow w_4 = -i$$

Segment sadrži točke z_1 , z_2 i z_3 i preslikava se u polupravac. Kada se krećemo od točke z_1 prema točki z_3 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_1 prema točki w_3 .

Polukružnica sadrži točke z_3 , z_4 i z_1 i preslikava se u polupravac. Kada se krećemo od točke z_3 prema točki z_1 u naznačenom smjeru, područje se nalazi s lijeve strane. Stoga se i u w -ravnini područje mora nalaziti s lijeve strane kada se krećemo od točke w_3 prema točki w_1 .



Iz toga je $G^* = \{\text{Re } w < 0, \text{Im } w < 0\}$.