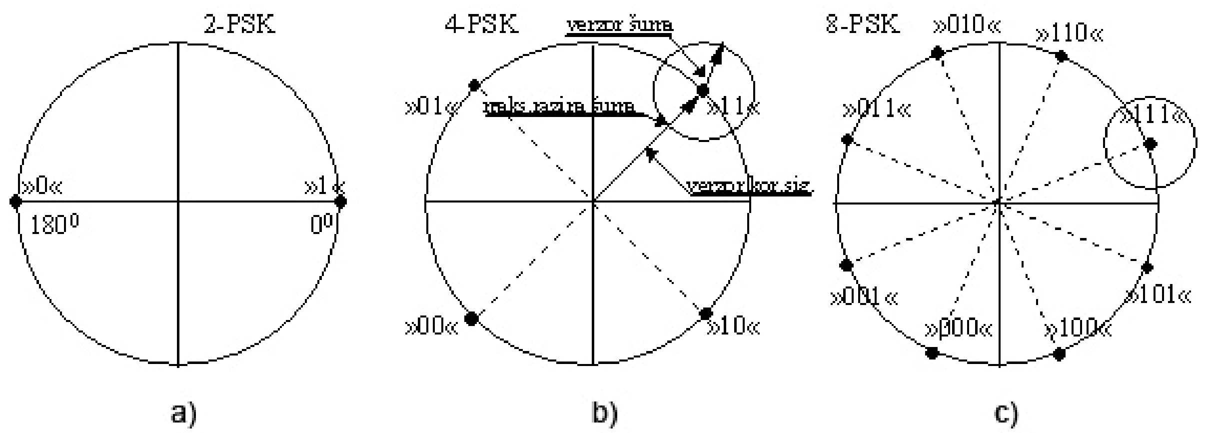
2. Vježba – Diskretna modulacije faze (PSK), optimalni prijamnik

2.1. Diskretna modulacija faze (PSK)

Kvalitetni prijenos podataka osigurava se malom vjerojatnošću pogreške bita i pri niskom omjeru snaga korisnog signala i šuma (*S/N*). Postupak diskretne modulacije faze (PSK, *Phase Shift Keying*) predstavlja učinkovito rješenje za kanale s visokim razinama smetnji.

Kod najjednostavnije, tj. binarne vrste diskretne modulacije faze binarnom znaku »**0**« pridružuje se faza 180°, dok se binarnom znaku »**1**« pridružuje faza 0°. Ova, najjednostavnija inačica diskretne modulacije faze, naziva se binarnom PSK (BPSK, *Binary PSK*), a susreće se i oznaka 2-PSK.

Osim BPSK (2-PSK) postoje postupci sa više od dva diskretna stanja faze. Zbog binarne osnove digitalnih sustava koristi se samo broj stanja faze koji je potencija broja 2 (2^n). Svakom diskretnom stanju faze pridružuje se onda n bita. Ako je n = 2 npr. nastat će se PSK sa 2^2 = 4 diskretna stanja faze (4-PSK ili QPSK, *Quaternary PSK* ili *Quadriphase PSK*). Svakom stanju faze pridružuje se jedna od četiri moguće kombinacije dva bita, dibita (slika 2.1.). Sa 8-PSK označuje se modulacijski postupak sa osam diskretnih stanja faze. Modulacije s više od osam stanja faze (16-PSK, 32-PSK, itd) se ne upotrebljavaju iz jednostavnog razloga, što bi za zadovoljavajuću vjerojatnost pogreške u tim sustavima trebao veliki omjer signala i šuma, odnosno zato što su ti sustavi preosjetljivi na šum. Slika 2.1. prikazuje dijagrame stanja ovih inačica moduliranih signala. Na slici su naznačeni tzv. krugovi šuma, tj. površine na koje pada vrh verzora moduliranog signala kad se na njega superponira šum.



Slika 2.1. Dijagrami stanja verzora: a) BPSK signala, b) QPSK signala te c) 8-PSK signala

BPSK-signal sa slike 2.1. a) može se opisati izrazom:

$$u_{\mathrm{PSK}}(t) = U_{\mathrm{pm}} \cos\left\lfloor \omega_{\mathrm{p}} t + \Phi(t) + \varphi_0 \right\rfloor \ , \qquad \textbf{(2.1)}$$

gdje funkcija $\Phi(t)$ može imati dvije vrijednosti:

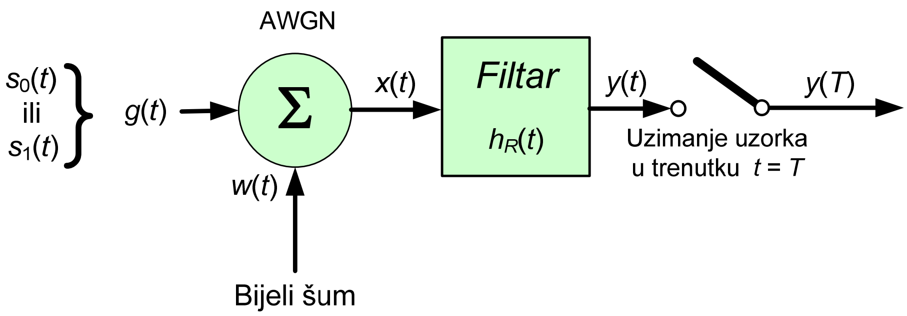
$\Phi(t) = 0°$, za u_{m} = »**1**«,
$\Phi(t) = 180°$, za u_{m} = »**0**«.

Šum, koji se superponira na modulirani signal, dovodi i do promjena faze. Ako je nastala promjena faze unutar tolerancije $\pm\Delta\varphi$ onda se ispravno demoduliraju binarni znakovi pridruženi određenome stanju faze. Kako je kod BPSK najveći razmak između dva diskretna stanja faze, to je dopušteno najveće odstupanje faze pri kojoj još ne dolazi do pogrešnog prepoznavanja binarnog znaka. Zato je kod BPSK najveća tolerancija $\Delta\varphi$.

Spektralna obilježja BPSK-signala jednaka su spektralnim obilježjima ASK-signala. BPSK-signal je istovjetan ASK-signalu koji nastaje modulacijom bipolarnim digitalnim signalom.

2.2. *Optimalni prijam*

Temeljna je zadaća prijama detektirati impuls prenesen komunikacijskim kanalom koji je izložen djelovanju šuma; pretpostavlja se aditivni bijeli šum (AWGN, *Additive White Gaussian Noise*).



Slika 2.2. Idealni prijamnik

Na ulaz u prijamni filtar impulsnog odziva $h_R(t)$ dolazi signal $x(t)$ koji se sastoji od impulsa odaslanog signala $g(t)$ i superponiranog signala bijelog šuma $w(t)$,

$$x(t) \;=\; g(t) + w(t)\,, \qquad 0 \le t \le T \ , \qquad \textbf{(2.2)}$$

pri čemu je T vremenski interval promatranja.
Funkcija $w(t)$ opisuje uzorke bijelog šuma koji je srednje vrijednosti nula i spektralne gustoće snage N_0. Pretpostavlja se da je prijamniku poznat valni oblik impulsa $g(t)$. Optimizacija prijama sastoji se od projektiranja prijamnog filtra kojim će se minimizirati učinci šuma na izlazu filtra i tako poboljšati detekcija impulsa $g(t)$. Kako je filtar linearnih osobina na njegovu je izlazu signal,

$$y(t) \quad = \quad x(t) * h_R(t) = g(t) * h_R(t) + w(t) * h_R(t) = g_o(t) + n(t) \quad . \tag{2.3}$$

U frekvencijskoj domeni za izlazni signal vrijedi:

$$Y(f) \quad = \quad X(f) \cdot H_\mathrm{R}(f) \ , \tag{2.4}$$

a korisni signal iznosi

$$g_o(t) \quad = \quad g(t) * h_R(t) = F^{-1}\{G(f) \cdot H_R(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} H_\mathrm{R}(f)\, G(f)\, e^{\mathrm{j}2\pi ft}\ \mathrm{d}f \quad . \tag{2.5}$$

Zadaća filtra je dakle maksimirati omjer snaga signala/snaga šuma tj. izraz

$$\eta \quad = \quad \frac{|g_o(T)|^2}{E[n^2(t)]} \ , \tag{2.5}$$

gdje je E operator matematičkog očekivanja, a $E\ [n^2(t)]$ mjera srednje snage izlaznog šuma.
Ako je na ulazu filtra samo šum $w(t)$ spektralne gustoće snage N_0, onda će gustoća spektra snage izlaznog šuma $n(t)$ biti jednaka,

$$S_\mathrm{N}(f) \quad = \quad N_0 \cdot |H_\mathrm{R}(f)|^2 , \tag{2.6}$$

što daje srednju snagu izlaznog šuma,

$$E[n^2(t)] \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} S_\mathrm{N}(f)\,\mathrm{d}f \quad = \quad N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_\mathrm{R}(f)|^2\ \mathrm{d}f \quad . \tag{2.7}$$

Da bi se maksimirao omjer snaga signala/snaga šuma koristit će se Schwarzova nejednakost

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\, f_2(x)\ \mathrm{d}x \right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} |f_1(x)|^2 \mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f_2(x)|^2 \mathrm{d}x \ , \tag{2.8}$$

koja vrijedi samo uz uvjet da je

$$f_1(x) \quad = \quad k \cdot f_2^{\,*}(x) , \tag{2.9}$$

gdje je k neka konstanta.
Konačno izlazi,

$$\eta \quad = \quad \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H_\mathrm{R}(f)\, G(f)\, e^{\mathrm{j}2\pi fT}\ \mathrm{d}f \right|^2}{N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_\mathrm{R}(f)|^2\ \mathrm{d}f} \le \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H_\mathrm{R}(f)|^2 \mathrm{d}f \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \mathrm{d}f}{N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H_\mathrm{R}(f)|^2\ \mathrm{d}f} \ . \tag{2.10}$$

Dakle, maksimum omjera iznosi (u formuli je *E* energija)

$$\eta_{\mathrm{maks}} = \frac{1}{N_0}\int_{-\infty}^{\infty}|G(f)|^2\,\mathrm{d}f = \frac{E}{N_0}\ , \qquad \textbf{(2.11)}$$

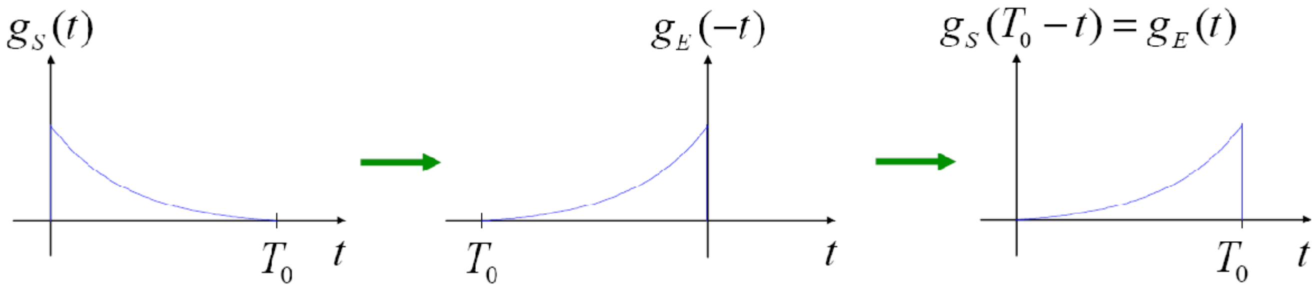
a optimalna prijenosna funkcija filtra koja daje taj maksimum je (zadovoljenje Schwarzove nejednakosti):

$$H_{\mathrm{R}opt}(f) = k\cdot G^*(f)\,e^{-\mathrm{j}2\pi fT}\ . \qquad \textbf{(2.12)}$$

Promatrano u vremenskoj domeni (inverzna Fourierova transformacija), dobije se impulsni odziv optimalnog filtra

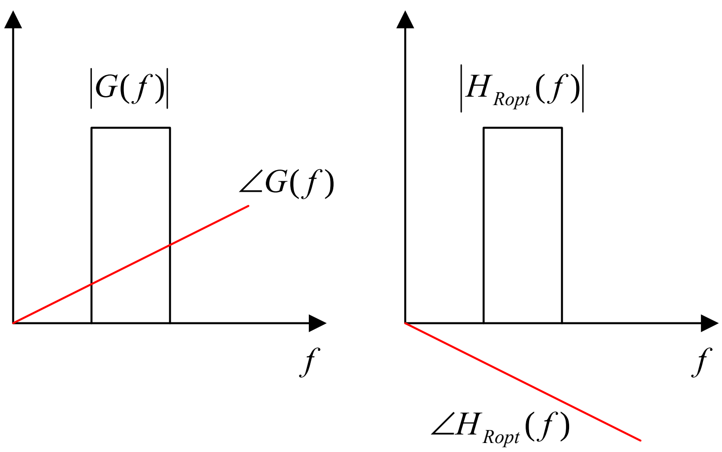
$$h_{\mathrm{R}opt}(t) = k\int_{-\infty}^{\infty}G^*(f)\,e^{-\mathrm{j}2\pi f(T-t)}\,\mathrm{d}f = k\cdot g(T-t)\ . \qquad \textbf{(2.13)}$$

Impulsni odziv optimalnog filtra odgovara vremenski zaokrenutom i pomaknutom ulaznom signalu *g*(*t*) kao što je prikazano na slici 2.3.



Slika 2.3. Impulsni odziv optimalnog filtra

Slika 2.4. prikazuje prijenosnu funkciju optimalnog filtra u odnosu na frekvencijsku karakteristiku odaslanog signala.



Slika 2.4. Prijenosna funkcija optimalnog filtra

2.3. *Domaća zadaća*

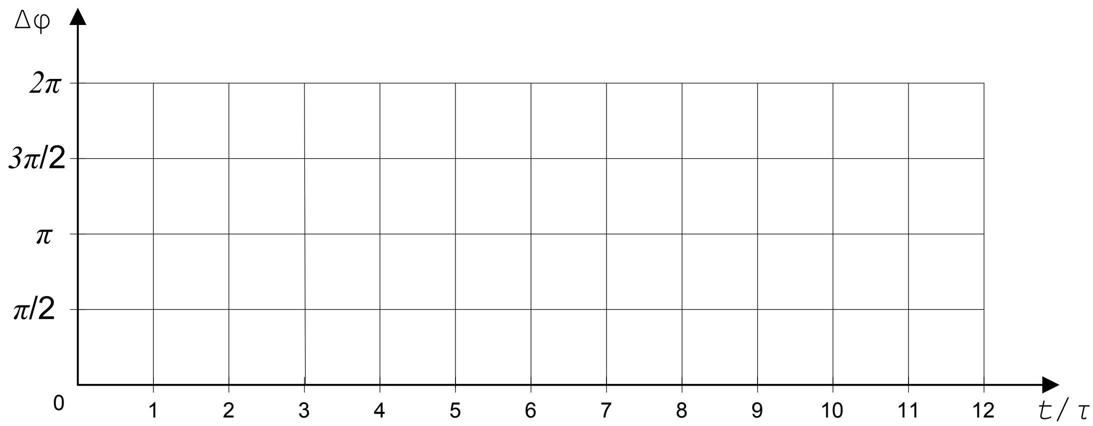
2.3.1. Odredite relativnu fazu $\pi/4$-DQPSK-signala za sljedeći slijed binarnih znakova:

1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0

Neposredno prije pojave ovoga binarnog slijeda relativna faza $\pi/4$-DQPSK-signala bila je jednaka $\pi/2$.

<table>
<tr><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Rel. faza</td><td>$\pi/2$</td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

Skicirajte dobiveni vremenski tijek relativne faze $\pi/4$-DQPSK-signala u koordinatnom sustavu na slici 2.5.



Slika 2.5. Vremenski tijek relativne faze

2.3.2. Digitalnim odašiljačem izlazne snage 80 W postiže se vjerojatnost pogreške bita $p_{Eb} = 10^{-6}$ pri uporabi modulacijskog postupka 8-PSK.

a) Kolika mora biti izlazna snaga odašiljača za ostvarivanje jednake vjerojatnosti pogreške bita (10^{-6}) ako se koriste modulacijski postupci:

1) BPSK,
2) QPSK,
3) 16-PSK.

b) Kolika je dovoljna izlazna snaga odašiljača za ostvarivanje vjerojatnosti pogreške bita $p_{Eb} = 10^{-4}$ ako se koriste modulacijski postupci:

1) BPSK,
2) QPSK,
3) 8-PSK,
4) 16-PSK.

2.4. Rad na vježbi

Pokrenuti program *MATLAB* i promijeniti radni direktorij sa

cd c:\ ComSys\Vjezba2

U komandnoj liniji glavnog *MATLAB* prozora definirajte parametre:

T – trajanje bita; T_s –vremenski razmak uzoraka; E_b/N_0 – omjer energije bita i gustoće snage šuma (u decibelima) kako slijedi:

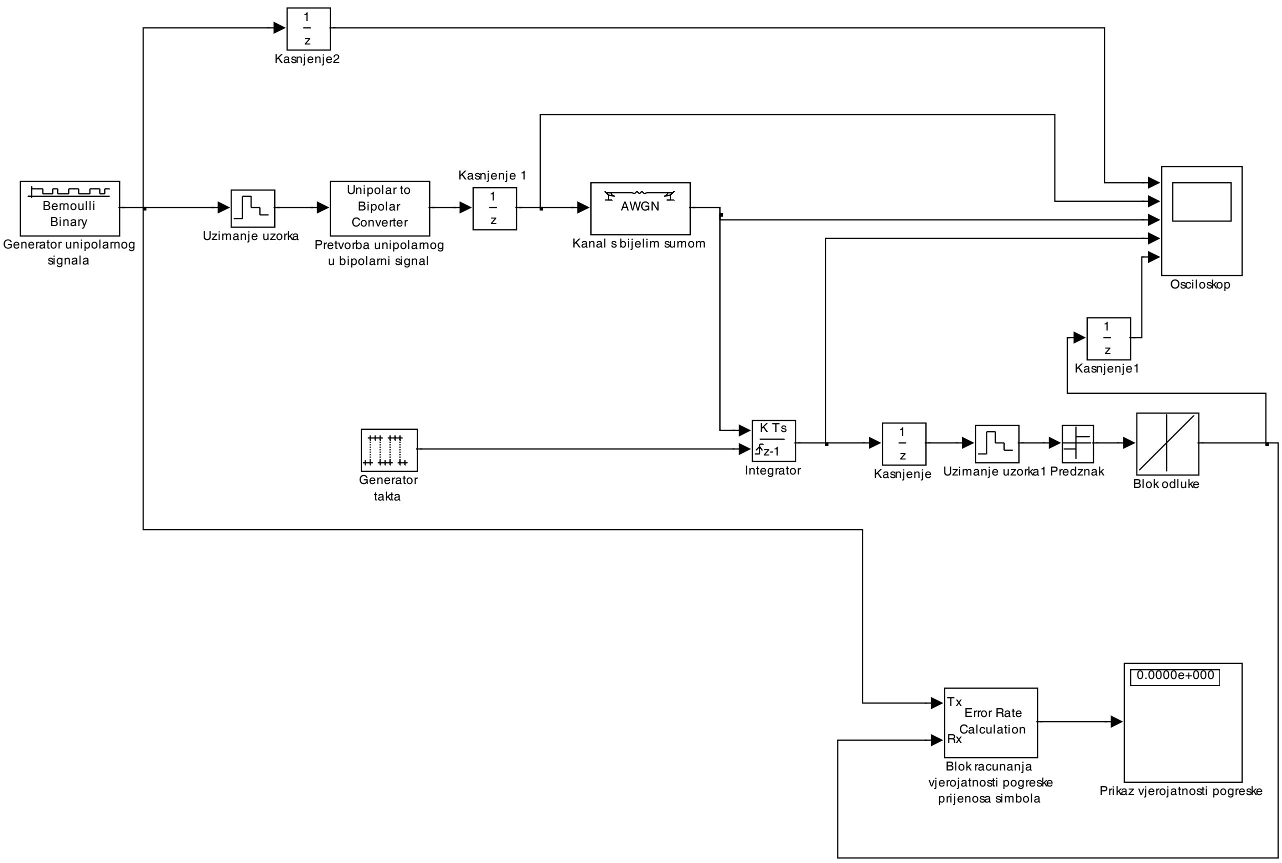
> **T=1;**
> **Ts=1/20;**
> **EbN0=5;**

Potrebno je otvoriti već gotov *Simulink* model

vjezba_2_1.mdl

koji je prikazan na slici 2.6.

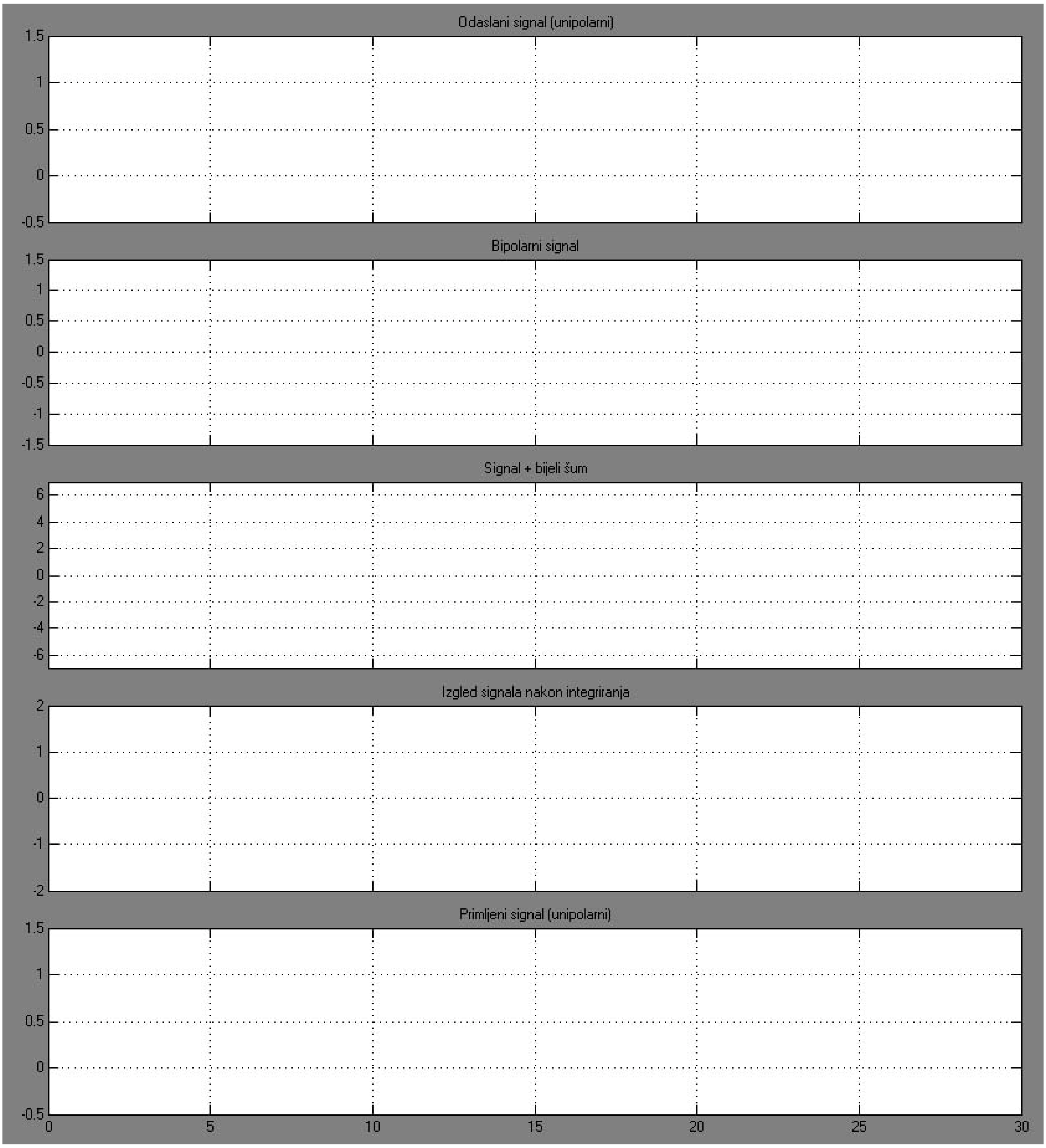
Proučite model!



Slika 2.6. Model vjezba_2_1.mdl

Pokrenite simulaciju modela sa slike 2.6.

Po završetku simulacije potrebno je nacrtati valne oblike signala dobivene na osciloskopu (slika 2.7).



Slika 2.7. Valni oblici signala prikazani na osciloskopu

Pitanja:

Koliko je kašnjenje demoduliranog signala u odnosu na odaslani signal?

Što se događa s valnim oblicima signala uz različite vrijednosti EbN0 (tj. različit omjer E_b/N_0)?

Utipkajte u komandnoj liniji glavnog *MATLAB* prozora

clear all

U komandnoj liniji glavnog *MATLAB* prozora definirajte sljedeće parametre:

> **T=1;**
> **Ts=1/20;**

Otvorite *Simulink* model **vjezba_2_2.mdl** i proučite ga!

U komandnoj liniji glavnog *MATLAB* prozora upišite

bertool

Nakon što to upišete, otvorit će Vam se prozor: `Bit Error Rate Analysis Tool.`

U podizborniku **Monte Carlo** treba postaviti:

1. područje promjene omjera E_b/N_0 od 0 dB do 7 dB kao i korak promjene 1 dB,
2. naziv modela odnosno odgovarajuće datoteke (vjezba_2_2.mdl),
3. naziv varijable u koju se spremaju rezultati (BER),
4. uvjete za prestanak simulacije u obliku dosegnutog broja pogrešnih bitova i ukupnog broja bitova. Simulacija se zaustavlja kad se ispuni jedan od ova dva uvjeta.

Unose se podaci kako slijedi:

E_b/N_0 range	0:1:7
Simulation M-file or model:	vjezba_2_2.mdl
BER variable name:	BER
Number of errors:	100
Number of bits:	1e8

`Bit Error Rate Analysis Tool` pokreće se pritiskom na naredbu **Run**.
Postupak simulacije traje nekoliko minuta. U konačnici dobiva se grafički prikaz vjerojatnosti pogreške prijenosa simbola (bita) u ovisnosti o omjeru E_b/N_0.

Dobivene rezultate simulacije treba se usporediti s teorijski dobivenim vrijednostima BER-a koje se izračunavaju sljedećim izrazom:

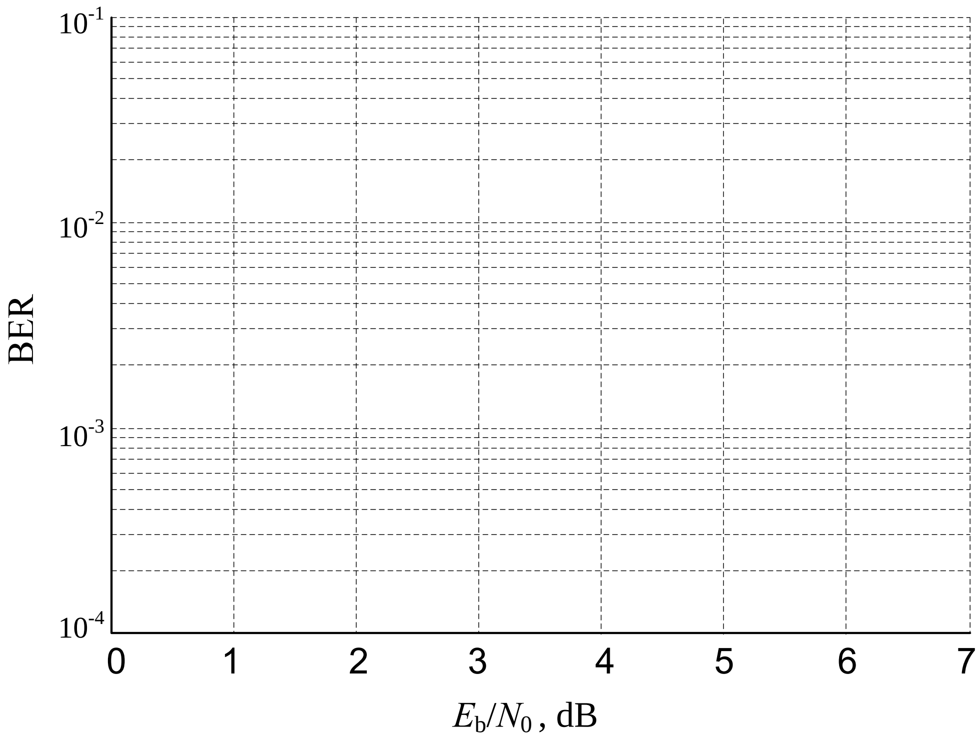
$$p_E = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right), \tag{2.14}$$

U simulaciji se teorijske vrijednosti dobiju sljedećim postupkom:

- U podizborniku **Theoretical** treba postaviti:

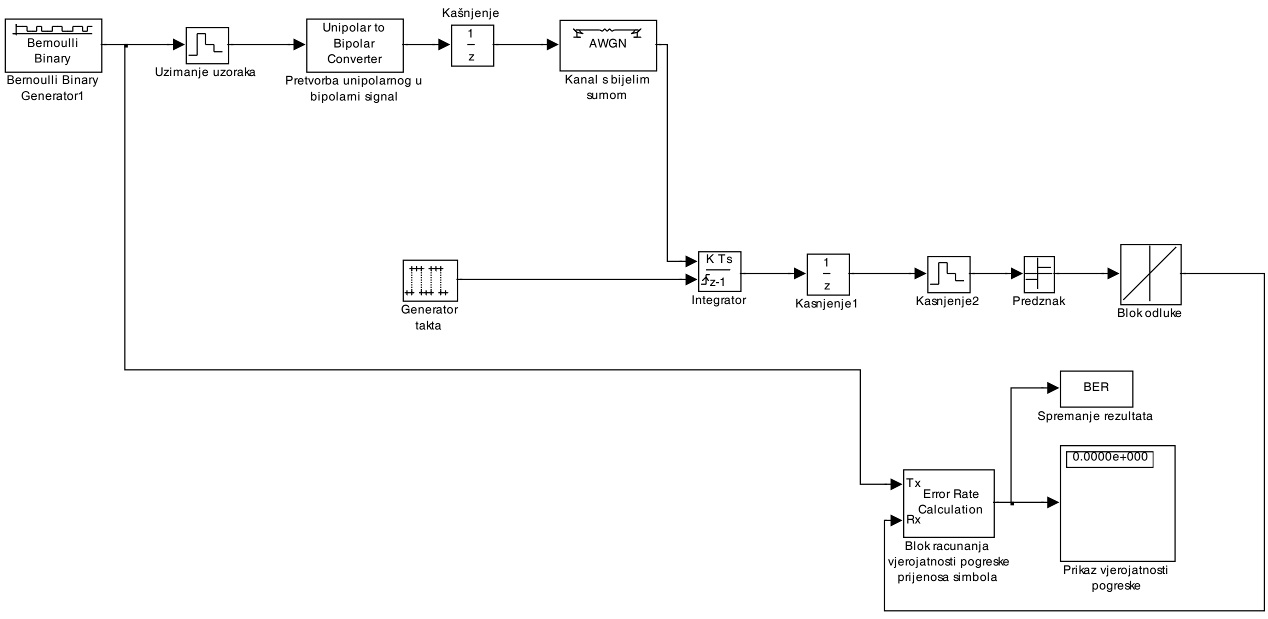
E_b/N_0 range	0:1:7	
Channel type:	AWGN	(kanal s bijelim Gaussovim šumom)
Modulation type:	PSK	
Modulation order:	2	(to znači binarna PSK, tj. BPSK)
Channel Coding:	None	
Synchronization:	Perfect synchronization	

- Prikaz teorijskih vrijednosti BER-a za prethodno zadane uvjete dobiva se pritiskom na naredbu **Plot**. U slici 2.8. treba nacrtati dobivene rezultate.



Slika 2.8. Rezultati simulacije i odgovarajuće teorijske vrijednosti

Usporedite model vjezba_2_1.mdl i model vjezba_2_2.mdl koji je prikazan na slici 2.9. U čemu je razlika između ta dva modela?



Slika 2.9. Model vjezba_2_2.mdl

Pitanja:

U kojim trenucima se u demodulatoru uzimaju uzorci signala? Zašto?

Na koji način je izveden optimalni prijamnik? Zašto je moguće prijam realizirati na taj način?

Pomoću koje formule se računa vjerojatnost pogreške?

Pomoću napravljenih modela iz prvog ili drugog dijela vježbe simulirajte vjerojatnost pogreške za $E_b/N_0 = -2$ dB. Komentirajte simulirani rezultat i teoretski izračunatu vrijednost!

Datum

Potpis asistenta