Započeto	subota, 9. listopada 2021., 12:38
Stanje	Završeno
Završeno	subota, 9. listopada 2021., 16:11
Proteklo vrijeme	3 sat(a) 32 min
Ocjena	**10,00** od maksimalno 12,00 (**83**%)

Pitanje **1**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Izračunajte $(3\mathbf{A}-\mathbf{B})\mathbf{C}+(\mathbf{A}-\mathbf{D})2\mathbf{E}$ ako je

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&3&4\\3&4&5\\4&5&6\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&-1&-2\\1&0&-1\\2&1&0\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{12}&-\frac{5}{12}&-\frac{3}{4}\\\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}&-\frac{1}{2}\\\frac{5}{12}&\frac{1}{12}&-\frac{1}{4}\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}-1&0&1\\-3&-2&-1\\-5&-4&-3\end{bmatrix},\mathbf{E}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}&-\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}\end{bmatrix}.$$

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}&8\\-16&-\frac{2}{5}&-\frac{104}{5}\\\frac{54}{5}&-\frac{34}{5}&-\frac{122}{5}\end{bmatrix}$
- b. Ne znam
- c. $\begin{bmatrix}7&-\frac{33}{5}&-\frac{101}{5}\\8&-\frac{56}{5}&-\frac{152}{5}\\9&-\frac{79}{5}&-\frac{203}{5}\end{bmatrix}$ ✔
- d. $\begin{bmatrix}\frac{33}{5}&-\frac{26}{5}&-16\\9&-\frac{32}{5}&-\frac{14}{5}\\\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}&\frac{22}{5}\end{bmatrix}$
- e. $\begin{bmatrix}\frac{13}{5}&-\frac{14}{5}&-16\\8&-\frac{32}{5}&-\frac{104}{5}\\-\frac{54}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{42}{5}\end{bmatrix}$

Vaš odgovor je točan.

Ispravan odgovor je: $\begin{bmatrix}7&-\frac{33}{5}&-\frac{101}{5}\\8&-\frac{56}{5}&-\frac{152}{5}\\9&-\frac{79}{5}&-\frac{203}{5}\end{bmatrix}$

Pitanje **2**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Odredite matricu $\mathbf{X}$ za koju vrijedi $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 11 \\ -1 & 10 & 27 \end{bmatrix}$.

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- b. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ✔
- c. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$
- d. Ne znam
- e. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Vaš odgovor je točan.

Ispravan odgovor je: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Pitanje **3**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Za koje sve matrice $\mathbf{X}$ vrijedi $\mathbf{AX} = \mathbf{A}$, ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$?

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1-2c & 2-2d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$
- b. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- c. Ne znam
- d. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1-2c & 2-2d \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$ ✔
- e. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$

Vaš odgovor je točan.

Matrica $\mathbf{X}$ mora biti tipa 2×2 pa ju tražimo u obliku

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Kako mora vrijediti $a + 2c = 1$ i $b + 2d = 2$ slijedi da je rješenje

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1-2c & 2-2d \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$$

gdje su c i d proizvoljni realni brojevi.

Ispravan odgovor je: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1-2c & 2-2d \\ c & d \end{bmatrix}, c, d \in \mathbb{R}$

Pitanje **4**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Točno ili netočno? Dokažite ili protuprimjerom opovrgnite tvrdnju: ako za matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{22}$ vrijedi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{B}^2$ onda je $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ili $\mathbf{A} = -\mathbf{B}$.

Odaberite jedan odgovor:

- Točno ✖
- Netočno

Tvrdnja ne vrijedi vrijedi primjerice za

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ispravan odgovor je 'Netočno'.

Pitanje **5**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Točno ili netočno? Dokažite tvrdnju ili opovrgnite protuprimjerom: matrice $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_{nn}$ komutiraju ako i samo ako vrijedi $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

Odaberite jedan odgovor:

- (x) Točno ✔
- ( ) Netočno

Tvrdnja vrijedi. Kako je $(\mathbf{A}-\mathbf{B})(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2$ imamo da vrijedi $\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} - \mathbf{BA} - \mathbf{B}^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 \Leftrightarrow \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{0}$.

Ispravan odgovor je 'Točno'.

Pitanje **6**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Koje sve matrice X komutiraju s matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}?$$

Odaberite jedan odgovor:

a. Ne znam.

b. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$

c. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$

d. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$

e. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$ ✔

Vaš odgovor je točan.

Matrica mora biti tipa 3×3 pa je tražimo u obliku

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Iz $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ dobijemo $d = g = h = 0$, $a = e, b = f, e = i$ odnosno

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

gdje su a, b, c proizvoljni realni brojevi.

Ispravan odgovor je: $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$

Pitanje **7**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Točno ili netočno? Za matricu $\mathbf{A}$ kažemo da je involutorna ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ matrice takve da vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{B} - \mathbf{I}$. Dokažite tvrdnju ili opovrgnite protuprimjerom: matrica $\mathbf{A}$ je involutorna ako i samo ako je $\mathbf{B}^2 = 2\mathbf{B}$.

Odaberite jedan odgovor:

- ◉ Točno ✔
- ○ Netočno

Tvrdnja vrijedi. Dokažimo $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{B}^2 = 2\mathbf{B}$. Ako je $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ onda imamo
$\mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = 2(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = 2\mathbf{B}$.
Dokažimo i obrat, $\mathbf{B}^2 = 2\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. Ako vrijedi $\mathbf{B}^2 = 2\mathbf{B}$ onda imamo $\mathbf{A}^2 = (\mathbf{B} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{B}^2 - 2\mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{I}$.

Ispravan odgovor je 'Točno'.

Pitanje **8**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Koliko je $\mathbf{A}^n$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$?

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1}a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- b. $\begin{bmatrix} 2^n a & (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- c. Ne znam
- d. $\begin{bmatrix} 2^n & 2^n a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- e. $\begin{bmatrix} 2^n & (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ✔

Vaš odgovor je točan.

Slutnju :

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dokažimo matematičkom indukcijom.

Baza:

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^1 & \left(2^1 - 1\right)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pretpostavka: Neka za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 2^n & (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Korak: Provjerimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 2^n a + (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2^{n+1} & \left(2^{n+1} - 1\right)a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Ispravan odgovor je: $\begin{bmatrix} 2^n & (2^n - 1)\,a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pitanje **9**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kvadratna matrica reda 2. Dokažite ili opovrgnite: matrica A komutira sa svim dijagonalnim matricama onda i samo onda ako je i sama dijagonalna.

Odaberite jedan odgovor:

- (x) Točno ✔
- ( ) Netočno

Iz jednakosti

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

slijedi $ax = xa, by = xb, cx = yc$ i $dy = yd$ za svaki $x, y \in \mathbb{R}$. Odavde imamo $b = 0$ i $c = 0$ odnosno, matrica A mora biti dijagonalna.

Ispravan odgovor je 'Točno'.

Pitanje **10**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Koji od umožaka $\mathbf{AB}, \mathbf{BA}, \mathbf{AC}, \mathbf{BC}$ i $\mathbf{AA}$ postoje?

Odaberite jedan ili više odgovora:

- [x] a. $\mathbf{BC}$ ✔
- [ ] b. $\mathbf{AA}$
- [x] c. $\mathbf{BA}$ ✔
- [x] d. $\mathbf{AB}$ ✔
- [ ] e. $\mathbf{AC}$

Vaš odgovor je točan.

Ispravni odgovori su: $\mathbf{AB}$

, $\mathbf{BA}$

, $\mathbf{BC}$

Pitanje **11**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Zadana je matrica $\mathbf{A}$ za koju vrijedi

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - c\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Za koje vrijednosti parametra c vrijedi $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$?

Odaberite jedan odgovor:

- a. $c = 0, \frac{1}{3}$
- b. $c = 1, -1$
- c. Ne znam
- d. $c = 0$ ✖
- e. $c = 0, -1$

Vaš odgovor nije točan.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{I} - cE &= (\mathbf{I} - c\mathbf{E})^2 = (\mathbf{I} - c\mathbf{E})(\mathbf{I} - c\mathbf{E}) = \\ &= \mathbf{I}^2 - c\mathbf{E} - c\mathbf{E} + c^2\mathbf{E}^2 = \mathbf{I} - 2c\mathbf{E} + 3c^2\mathbf{E} = \\ &= \mathbf{I} - (2c - 3c^2)\mathbf{E} \end{aligned}$$

Sada iz jednakosti $c = 2c - 3c^2$ slijedi da je $c = 0$ ili $c = \frac{1}{3}$.

Ispravan odgovor je: $c = 0, \frac{1}{3}$

Pitanje **12**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Točno ili netočno? Dokažite ili opovrgnite primjerom: Ako je matrica $\mathbf{A}$ reda 2 takva da je $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ za svaku matricu $\mathbf{B}$ reda 2, onda je $\mathbf{A}$ jedinična matrica.

Odaberite jedan odgovor:

- (•) Točno ✔
- ( ) Netočno

Neka je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

i uzmimo

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz jednakosti

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

slijedi $a = 1, c = 0$. Slično za

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dobijemo $b = 0, d = 1$.

Ispravan odgovor je 'Točno'.

◄ Predavanja 1. Matrice

Prikaži...

1. auditorne vježbe ►