①

III DOMAĆA ZADAĆA

1.) Neka je $f: P^2[x] \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definiran s

$$f(a+bx+cx^2) = \begin{bmatrix} b+c & a \\ b & c \end{bmatrix}$$

Pokažite da je f linearan i odredite matricu operatora f u paru uređenih baza $(1, x, 1+x^2)$ i $\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$. Opišite Im f i Ker f.

Rj:

Neka je $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ dana baza u $P^2[x]$ (tj. $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = 1+x^2$). Kao što je uobičajeno, vršimo identifikaciju vektora

$$P^2[x] \ni \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \longleftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \in M_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

Isto tako, neka je $(f) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ baza od $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ t.d. $f_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $f_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $f_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Također, vektor $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_3 + \beta_4 f_4$ identificiramo s vektorom $\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix} \in M_{4\times 1}(\mathbb{R})$.

Jednostavnim raspisom provjeri se da je f zaista lin. op. Da bismo odredili matricu operatora f u paru baza (e), (f) pogledajmo kako on djeluje na vektore baze (e) i raspišimo rezultat po vektorima baze (f):

$$f(e_1) = f(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = -f_1 + f_2 + 0\cdot f_3 + 0\cdot f_4$$

$$f(e_2) = f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = f_1 - f_2 + f_3 + 0\cdot f_4$$

$$f(e_3) = f(1+x^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\cdot f_1 + f_2 - f_3 + f_4$$

Neka je F matrica operatora f u paru baza (e), (f). Tada je iz gornjeg računa

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \underbrace{0}_{f(e_1)} & \underbrace{0}_{f(e_2)} & \underbrace{1}_{f(e_3)} \end{bmatrix}$$

Odredimo Ker f. $x \in \text{Ker } f \iff f(x) = 0$

tj. $\iff Fx = 0$ (uz identifikaciju $P^2[x] : M_{3\times 1}(\mathbb{R})$!!)

Dakle rješavamo sustav $Fx = 0$. No lako se vidi da je matrica F ranga 3 tj. $Fx = 0$ ima jedinstveno rješenje $x = 0$. Dakle $\text{Ker } f = \{0\}$.

Da bismo našli bazu za $\text{Im } f$ koristimo dokaz teorema o rangu i defektu. Naime, nadopunimo li bazu od Ker f do baze za $P^2[x]$ tada će slike dodanih vektora po preslikavanju f činiti bazu za Im f. Kako je baza za Ker f prazan skup, dodajemo vektore e_1, e_2, e_3 da bismo dobili bazu za $P^2[x]$. Tada je baza za Im f $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$

tj. $\text{Im } f = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$.

2.) Neka je $A : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lin. op. zadan s
$A(X) = [B, X] = BX - XB$ (KOMUTATOR OD B i X)
pri čemu je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi i baze za Ker A, Im A.
(Uočite da Ker A čine sve matrice koje komutiraju s matricom B).

Rj:

Neka je $(e) = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ kanonska baza za $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Tada je
$$A(E_1) = [B, E_1] = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -2E_2 + E_3$$
$$A(E_2) = [B, E_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -E_1 + E_2 + E_4$$
$$A(E_3) = [B, E_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = 2E_1 - E_3 - 2E_4$$
$$A(E_4) = [B, E_4] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2E_2 - E_3$$

②

Dakle, matrica operatora A u kanonskoj bazi glasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\quad A(E_1) \quad A(E_2) \quad A(E_3) \quad A(E_4)$

Da bismo našli $\operatorname{Ker} A$ rješavamo sustav $Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x \in \operatorname{Ker} A \iff x_1 = x_3 + x_4 \ \& \ x_2 = 2x_3$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} A = \left\{ \begin{bmatrix} x_3 + x_4 & 2x_3 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} A = L(\{I, B\})$

$E_1, E_2 \notin \operatorname{Ker} A$. Provjerite da je $\{I, B, E_1, E_2\}$ lin. nezavisan skup vektora, a onda i baza za $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Tada je kao u prošlom zadatku jedna baza za $\operatorname{Im} A$ dana s $\{A(E_1), A(E_2)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Možemo i ovako zaključivati:

Dobili smo $\dim \operatorname{Ker} A = 2$. Prema teoremu o rangu i defektu znamo da je tada $\dim \operatorname{Im} A = 4 - \dim \operatorname{Ker} A = 2$.

Dakle, dovoljno je naći dva lin. nezavisna vektora u slici, da bi oni činili bazu.

Npr. $\{A(E_1), A(E_2)\}$ ili $\{A(E_1), A(E_3)\}$

Uočite da je ovaj način brži jer treba provjeriti lin. nezavisnost dva vektora, dok je u prvom načinu trebalo provjeravati lin. nezavisnost četiri vektora $(\{I, B, E_1, E_2\})$

3.) Linearni operator $A : \mathcal{P}^2[t] \to \mathcal{P}^2[t]$ u kanonskoj bazi $\{1, t, t^2\}$ ima matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Odredite matricu operatora A u bazi $\{1+2t+3t^2, \; 2+3t+t^2, \; 1+t+2t^2\}$.

Rj.

Neka je $(e) = (1, t, t^2) = (e_1, e_2, e_3)$ kanonska baza

$(e') = (\underbrace{1+2t+3t^2}_{e_1'}, \underbrace{2+3t+t^2}_{e_2'}, \underbrace{1+t+2t^2}_{e_3'})$ nova baza

Nađimo matricu prijelaza T.

$e_1' = 1+2t+3t^2 = e_1 + 2e_2 + 3e_3$
$e_2' = 2+3t+t^2 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$
$e_3' = 1+t+2t^2 = e_1 + e_2 + 2e_3$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \;\; e_1' \;\; e_2' \;\; e_3' \end{array} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Tada je matrica operatora A u bazi (e') dana sa

$$A' = T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}.$$