1. a) Definirati pojam polja $(F, +, \cdot)$. Preko definicije polja pokazati zašto Z_6 nije polje. 2b

b) Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja Z_5. Naći matricu X, s koeficijentima iz polja Z_5, takvu da je $AX = B$. 4b

2. Neka je X skup svih polinoma $p = p(t)$ (gdje je $t \in \mathbb{R}$), definiran sa $X = \{p(t) = (a+b) + 2bt + at^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Provjerite da je X vektorski podprostor prostora P_2 svih polinoma najviše drugog stupnja. 2b

b) Definirati linearnu nezavisnost vektora općeg vektorskog prostora X. Provjerite da je rastav bilo kojeg vektora x po zadanoj bazi određen jednoznačno. 2b

c) Odredite neku bazu u vektorskom prostoru X zadanom u (a). Provjerite da se radi o bazi.

3. Zadan je linearni operator $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonalnog projiciranja na ravninu u $\mathbb{R}^3$ zadanu sa $x + y - z = 0$

a) Odredite matricu A tog operatora u kanonskoj bazi u $\mathbb{R}^3$. 3b

b) Odredite neku bazu u $\mathbb{R}^3$ (ako postoji) takvu da je odgovarajuća matrica A' tog linearnog operatora dijagonalna 2b

c) Odredite baze u jezgri i slici tog linearnog operatora 2b

4. a) Definirajte vlastite vrijednosti i vlastite vektore kvadratne matrice A 2b

b) Provjerite da se vlastite vrijednosti podudaraju s nultočkama karakterističnog polinoma matrice A 2b

c) Odredite vlastite vrijednosti i vlastite vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Dijagonalizirajte tu matricu, ako je moguće (tj. odredite regularnu matricu T i dijagonalnu matricu D, takve da je $T^{-1}AT = D$) 5b

d) Izračunajte matricu e^{At} za matricu A zadanu u (b) i za bilo koji realan broj t. 3b

c) Riješite Cauchyjev problem $x' = 3x$, $y' = 2x + 3y$, s početnim uvjetima $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, gdje su $x = x(t)$ i $y = y(t)$ nepoznate realne funkcije. 3b

5\. a) Dokažite Geršgorinov teorem o krugovima. Uz pomoć njega ispitajte stabilnost matrice $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$, ako je moguće. 5b

b) Opišite Jacobijev iterativni postupak za problem $Ax = b$, gdje je $b = [1\ 0\ 0]^T$ 2b

c) Odredite iteracije $x^{(1)}$ i $x^{(2)}$ Jacobijeve metode za problem iz zadatka (b), počevši s $x^{(0)} = [0\ 0\ 0]^T$. 1b

6\. a) Izračunajte međusobnu udaljenost kvadratnih matrica $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ reda 2 s obzirom na ∞-normu, gdje je $a_{ij} = (-1)^{i+j}/(1+i+j)$ i $b_{ij} = i - j$. 2b

b) Provjerite da za svaku kvadratnu matricu A vrijedi $r(A) \leq \|A\|$, gdje je $r(A)$ spektralna norma matrice, a $\|A\|$ bilo koja operatorska norma matrice. 4b

c) Definirati Neumannov red matrice. Da li Neumannov red matrice A iz (a) konvergira? 2b