Započeto	srijeda, 29. prosinca 2021., 10:20
Stanje	Završeno
Završeno	srijeda, 29. prosinca 2021., 15:51
Proteklo vrijeme	5 sat(a) 30 min
Ocjena	**7,60** od maksimalno 13,00 (**58**%)

Pitanje **1**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Za $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$ definiramo

$U = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta\}$.

U je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ ako i samo ako je

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\beta = 0$
- b. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n$
- c. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$
- d. $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = \beta = 0$ ✖
- e. $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$

Vaš odgovor nije točan.

Neka su $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$.
To znači da je $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta$ i $\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i = \beta$.

Vrijedi

$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in U, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\iff (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_n + \mu y_n) \in U, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\iff \sum_{i=1}^n \alpha_i(\lambda x_i + \mu y_i) = \beta, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\iff \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \mu \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i) = \beta, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\iff \lambda\beta + \mu\beta = \beta, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\iff \beta = 0$

Ispravan odgovor je: $\beta = 0$

Pitanje **2**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Definiramo zbrajanje i množenje elemenata iz $V = \mathbb{R}^2$ realnim brojevima na sljedeći način:

$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$,

$\alpha(x, y) := (\alpha x, y)$.

Je li uz ovako definirane operacije V vektorski prostor nad $\mathbb{R}$?

Odaberite jedan odgovor:

- Točno
- Netočno ✔

Potrebno je provjeriti vrijede li svojstva vektorskog prostora $VP_1 - VP_8$.

Ne vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbb{R}$. Na primjer,

$(0, 1) = 2(0, 1) = (1 + 1)(0, 1)$

S druge strane

$1(0, 1) + 1(0, 1) = (0, 1) + (0, 1) = (0, 2)$

Ispravan odgovor je 'Netočno'.

Pitanje **3**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Neka su U i V vektorski prostori. Na Kartezijevom produktu $U \times V$ definiramo zbrajanje i množenje skalarom:

$(u, v) + (u', v') := (u + u', v + v'), \quad u, u' \in U,\ v, v' \in V,$

$\alpha(u, v) := (\alpha u, \alpha v), \quad \alpha \in \mathbb{R},\ u \in U,\ v \in V.$

Je li, uz ovako definirane operacije, $U \times V$ vektorski prostor nad $\mathbb{R}$?

Odaberite jedan odgovor:

- Točno ✔
- Netočno

Potrebno je provjeriti da vrijede svojstva vektorskog prostora $VP_1 - VP_8$.

Ispravan odgovor je 'Točno'.

Pitanje **4**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Polinomi $p, q, r \in \mathcal{P}_3$ zadani s

$p(t) = t^3 + t^2 + t,$
$q(t) = t^3 - t + 1,$
$r(t) = 2t^3 - t^2 + t - 2$

su linearno nezavisni.

Odaberite jedan odgovor:

- (●) Točno ✔
- ( ) Netočno

Pretpostavimo da je za $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha p(t) + \beta q(t) + \gamma r(t) = 0.$

Tada je

$\alpha(t^3 + t^2 + t) + \beta(t^3 - t + 1) + \gamma(2t^3 - t^2 + t - 2) = 0,$

$(\alpha + \beta + 2\gamma)t^3 + (\alpha - \gamma)t^2 + (\alpha - \beta + \gamma)t + (\beta - 2\gamma) = 0.$

Odavde lako slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0.$

Ispravan odgovor je 'Točno'.

Pitanje **5**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Odredite potprostor V od $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ koji ne sadrži ne-nul dijagonalne matrice.

Odaberite jedan odgovor:

- ( ) a. $V = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \mid a, b, d \in \mathbb{R}\}$
- (●) b. $V = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}\}$ ✔
- ( ) c. $V = \{\mathbf{A} \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathbf{A}^2 = \mathbf{I}\}$
- ( ) d. $V = \{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\}$

Vaš odgovor je točan.

Ispravan odgovor je: $V = \{\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} \mid b, c \in \mathbb{R}\}$

Pitanje **6**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Ako skup vektora $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ čini bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ i W je potprostor od $\mathbb{R}^4$, onda neki podskup skupa S čini bazu za W.

Odaberite jedan odgovor:

- (•) Točno ✖
- ( ) Netočno

$v_i = e_i, \ W = L(1, 1, 2, 2)$

Ispravan odgovor je 'Netočno'.

Pitanje **7**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Neka je skup S baza prostora $\mathcal{P}_2$ svih polinoma stupnja ≤ 2. Tada S mora sadržavati po jedan polinom svakog stupnja.

Odaberite jedan odgovor:

- (•) Točno ✖
- ( ) Netočno

Na primjer, skup polinoma

$\{t^2 - 2t + 5, 2t^2 - 3t, t + 1\}$

čini bazu prostora $\mathcal{P}_2$.

Ispravan odgovor je 'Netočno'.

Pitanje **8**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Pronađite bazu prostora rješenja sustava linearnih jednadžbi

$x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 = 0$

$2x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 0$

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\{(4,1,0,0),(-3,0,1,0),(0,0,0,1)\}$
- b. $\{(4,1,0,0),(0,3,4,0),(0,1,0,4)\}$
- c. $\{(1,0,0,1),(0,1,0,-4),(0,0,1,3)\}$ ✔
- d. $\{(1,-4,3,-1)\}$

Vaš odgovor je točan.

Svako rješenje sustava može se izraziti kao linearna kombinacija linearno nezavisnih vektora $(1,0,0,1)$, $(0,1,0,-4)$, $(0,0,1,3)$ na sljedeći način:

$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,x_3,x_1-4x_2+3x_3) = x_1(1,0,0,1) + x_2(0,1,0,-4) + x_3(0,0,1,3)$

Ispravan odgovor je: $\{(1,0,0,1),(0,1,0,-4),(0,0,1,3)\}$

Pitanje **9**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Odredite bazu prostora svih polinoma stupnja ≤ 4 koji u točkama -1, 0 i 1 poprimaju istu vrijednost 0.

Odaberite jedan odgovor:

- a. $\{t^4 + t^2, t^3 + t\}$
- b. $\{t^4 - t^2, t^3 - t\}$
- c. $\{t^4 + t^3 + t^2 + t, 1\}$
- d. Ništa od navedenog.

Vaš odgovor je točan.

Dakle, mora vrijediti

$p(-1) = p(0) = p(1) = 0.$

Ako označimo $p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$, onda je

$a - b + c - d + e = 0$, $e = 0$ i $a + b + c + d = 0$.

Tada je $p(t) = at^4 + bt^3 - at^2 - bt$.

Skup $\{t^4 - t^2, t^3 - t\}$ je baza.

Ispravan odgovor je: $\{t^4 - t^2, t^3 - t\}$

Pitanje **10**

Djelomično točno

Broj bodova: 0,60 od 1,00

Neka su S i T podskupovi vektorskog prostora V.

Koje su od sljedećih tvrdnji točne a koje netočne?

1. $L(S \cup T) = L(S) \cup L(T)$ Točno ✖
2. $L(S \cap T) = L(S) \cap L(T)$ Netočno ✔
3. $L(S^c) = L(S)^c$ Netočno ✔
4. $L(L(S)) = L(S)$ Točno ✔
5. $S \subset L(S)$ Netočno ✖

Vaš odgovor je djelomično točan.

Broj točnih odgovora: 3

1. Netočno. Uzmimo, na primjer, $S = \{(1,0,0)\}$, $T = \{(0,1,0)\}$. $(1,1,0) \in L(S \cup T)$, dok s druge strane $(1,1,0) \notin L(S) \cup L(T)$. Općenito, unija dva potprostora ne mora biti potprostor.

2. Netočno. Na primjer, za $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $T = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ tvrdnja ne vrijedi.

3. Netočno. $\mathbf{0} \in L(S^c)$ ali $\mathbf{0} \notin L(S)^c$. Općenito $L(S)^c$ nije potprostor dok $L(S^c)$ jest.

4. Točno. Očito vrijedi $L(L(S)) \supset L(S)$ (Tvrdnja 5). S druge strane, svaki $x \in L(L(S))$ se može napisati kao linearna kombinacija elemenata $y_1, \ldots, y_n \in L(S)$, a svaki y_i kao linearna kombinacija elemenata $z_1, \ldots, z_m \in S$. U konačnici, $x \in L(L(S))$ se može napisati kao linearna kombinacija elemenata $z_1, \ldots, z_m \in S$, tj. $L(L(S)) \subset L(S)$.

5. Točno. $L(S)$ se sastoji od svih linearnih kombinacija elemenata skupa S pa tako sadrži elemente oblika $1 \cdot v,\ v \in S$.

Ispravan odgovor je:

Neka su S i T podskupovi vektorskog prostora V.

Koje su od sljedećih tvrdnji točne a koje netočne?

1. $L(S \cup T) = L(S) \cup L(T)$ [Netočno]
2. $L(S \cap T) = L(S) \cap L(T)$ [Netočno]
3. $L(S^c) = L(S)^c$ [Netočno]
4. $L(L(S)) = L(S)$ [Točno]
5. $S \subset L(S)$ [Točno]

Pitanje **11**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Zadani su vektori

$a_1 = (1, 1, 2, 2)$,

$b_1 = (1, 0, 0, 1)$,

$a_2 = (2, 1, 2, 3)$,

$b_2 = (0, 1, 2, 1)$

te neka je

$V_1 = L(a_1, b_1)$, $V_2 = L(a_2, b_2)$.

Tada je

Odaberite jedan odgovor:

- a. $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ ✖
- b. $V_1 \subsetneq V_2$
- c. $L(V_1 \cup V_2) = \mathbb{R}^4$
- d. $V_1 = V_2$

Vaš odgovor nije točan.

$a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$, $b_1 = \frac{1}{2}(a_2 - b_2)$, $\Rightarrow a_1, b_1 \in L(a_2, b_2)$, $\Rightarrow L(a_1, b_1) \subset L(a_2, b_2)$

$a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = a_1 - b_1$, $\Rightarrow a_2, b_2 \in L(a_1, b_1)$, $\Rightarrow L(a_2, b_2) \subset L(a_1, b_1)$

$\Rightarrow V_1 = V_2$

Ispravan odgovor je: $V_1 = V_2$

Pitanje **12**

Točno

Broj bodova: 1,00 od 1,00

Odredite dimenziju prostora $L(S)$ gdje je

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 = 1,\ x_1 + x_3 = 1\}$.

Odaberite jedan odgovor:

- a. 0
- b. 1
- c. 2 ✔
- d. 3

Vaš odgovor je točan.

$S = \{(x_1, 1 - x_1, 1 - x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, -1, -1) + (0, 1, 1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$.

$L(S) = \{\alpha(1, -1, -1) + \beta(0, 1, 1) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Ispravan odgovor je: 2

Pitanje **13**

Netočno

Broj bodova: 0,00 od 1,00

Zadani su polinomi $p_1, p_2, p_3, v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{P}_2$:

$p_1(t) = t^2 - 2t + 5$,

$p_2(t) = 2t^2 - 3t$,

$p_3(t) = t + 1$,

$v_1(t) = t^2 + 4t - 3$,

$v_2(t) = t - 1$,

$v_3(t) = 1$.

Odredi matricu prijelaza iz baze $P = \{p_1, p_2, p_3\}$ u bazu $V = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Odaberite jedan odgovor:

a. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -\frac{4}{11} & \frac{2}{11} & \frac{9}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$ ✖

b. $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -17 & -4 & 2 \\ 14 & 2 & -1 \\ 52 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & -7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Vaš odgovor nije točan.

Prvo možemo naći matricu prijelaza iz baze V u bazu P. Izrazimo vektore baze P pomoću vektora baze V:

$p_1(t) = v_1(t) - 6v_2(t) + 2v_3(t)$,

$p_2(t) = 2v_1(t) - 11v_2(t) - 5v_3(t)$,

$p_3(t) = 0v_1(t) + 1v_2(t) + 2v_3(t)$.

Označimo

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -6 & -11 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Onda je tražena matrica prijelaza

$\mathbf{T} = \mathbf{S}^{-1}$.

Ispravan odgovor je: $\frac{1}{11}\begin{bmatrix} -17 & -4 & 2 \\ 14 & 2 & -1 \\ 52 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

◄ Predavanja 7. Vektorski prostori

Prikaži...

9. auditorne vježbe ►