Dz 4

29. listopada 2020. 20:49

Zadatak 3

Zadana je matrica $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&4&1&4\\3&6&3&9\end{bmatrix}$ i vektor $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}4\\11\\21\end{bmatrix}$. Riješite sustav $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&4\\2&4&1&4&11\\3&6&3&9&21\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&4\\0&0&1&2&3\\0&0&3&6&9\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&4\\&&1&2&3\\&&0&0&0\end{array}\right]$$

$x_1+2x_2+x_4=4$
$x_3+2x_4=3$
$x_2=\alpha$
$x_4=\beta$
$x_1=4-2\alpha-\beta$
$x_3=3-2\beta$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\3\\0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Zadatak 4

Hrvatsko ratno zrakoplovstvo obnavlja flotu kupovinom 20 novih vojnih zrakoplova. Na tržištu postoje tri tipa aviona koji se razlikuju po broju putnika i količini tereta koje mogu prevesti. Tri tipa aviona mogu prevesti redom 50, 75, 90 putnika, odnosno 100, 175, 230 tona tereta. Koliko aviona pojedinog tipa moraju kupiti ako je poznato da žele ukupni kapacitet 1400 putnika i 3250 tona tereta?

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&20\\50&75&90&1400\\100&175&230&3250\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&20\\0&25&40&400\\0&75&130&1250\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&20\\0&25&40&400\\0&0&10&50\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&15\\0&25&0&200\\&&1&5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&15\\0&1&0&8\\&&1&5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&7\\&1&0&8\\&&1&5\end{array}\right]$$

Zadatak 5

Suma znamenki nekog troznamenkastog broja je 12. Znamenka desetica je za 2 manja od znamenke stotica, a znamenka jedinica je za 4 manja od sume znamenki desetica i stotica. Odredite taj broj.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&12\\1&-1&0&2\\1&1&-1&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&12\\0&-2&-1&-10\\0&0&-2&-8\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&12\\&1&\frac12&5\\&&1&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&8\\&1&0&3\\&&1&4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&&&5\\&1&&3\\&&1&4\end{array}\right]$$

$\overline{x_1x_2x_3}=\overline{534}$

Zadatak 6

Cijena kazališne karte za odrasle iznosi 60 kuna, za studente 35 kuna te 25 kuna za djecu do 12 godina. Za predstavu je prodano 278 karata i ostvarena je zarada od 13 000 kuna. Karata za odrasle prodano je za 10 manje od dvostrukog broja studentskih karata. Koliko karata svakog tipa je prodano?

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&278\\60&35&25&13000\\-1&2&0&10\end{array}\right]\sim\begin{array}{cccc}x_3&x_2&x_1&b\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&278\\25&35&60&13000\\0&2&-1&10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&278\\0&10&35&6050\\0&2&-1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&278\\0&1&3.5&605\\0&0&-8&-1210\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&278\\&1&3.5&605\\&&1&151.25\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&126.75\\&1&0&79.125\\&&1&151.25\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&&&48.625\\&1&&79.125\\&&1&151.25\end{array}\right]\qquad\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}151.25\\79.125\\48.625\end{bmatrix}$$

Zadatak 7

Nađite sva rješenja zadanog sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}x_1-2x_2+x_3-x_4&=0\\2x_1-3x_2+4x_3-3x_4&=0\\3x_1-5x_2+5x_3-4x_4&=0\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&0\\2&-3&4&-3&0\\3&-5&5&-4&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&0\\0&1&2&-1&0\\0&1&2&-1&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&-2&1&-1&0\\0&1&2&-1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&5&-3&0\\&1&2&-1&0\\&&&&0\end{array}\right]$$

$x_1=-5\alpha+3\beta$
$x_2=-2\alpha+\beta$
$x_3=\alpha$
$x_4=\beta$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}-5\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\1\\0\\1\end{bmatrix}\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Zadatak 8

Zadana je matrica $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&0\\-1&-4&1\end{bmatrix}$.

Odgovorite je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna:

Sustav $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ ima rješenje za svaki vektor $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&b_1\\1&3&0&b_2\\-1&-4&1&b_3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&b_1\\0&1&-1&b_2-b_1\\0&-2&2&b_1+b_3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&1&b_1\\0&1&-1&b_2-b_1\\0&0&0&-b_1+b_2+b_3\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&3b_1-2b_2\\&1&-1&b_2-b_1\\&&&-b_1+b_2+b_3\end{array}\right]$$

$x_1+3x_3=3b_1-2b_2$ $\quad x_1+3x_3=3b_1-2b_2$
$x_2-x_3=b_2-b_1$ $\quad x_2-x_3=-b_3$
$0=-b_1+b_2+b_3 \Rightarrow b_3=-(b_2-b_1)$

$x_1=3b_1-2b_2-3\alpha$
$x_2=-b_3+\alpha$
$x_3=\alpha$
$x_4=\beta$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3b_1-2b_2\\-b_3\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Zadatak 9

Zadan je sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix}1&-1&-2&-2&-2\\3&-2&-2&-2&-2\\4&-3&-4&-4&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-2&-2&-2&3\\3&-2&-2&-2&-2&-1\\4&-3&-4&-4&-4&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-2&-2&-2&3\\0&1&4&4&4&-10\\0&1&4&4&4&-10\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&-1&-2&-2&-2&3\\&1&4&4&4&-10\\&&0&&&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&2&2&2&-7\\&1&4&4&4&-10\\&&&&&0\end{array}\right]$$

$x_1=-7-2\alpha-2\beta-2\gamma$
$x_2=-10-4\alpha-4\beta-4\gamma$
$x_3=\alpha$
$x_4=\beta$
$x_5=\gamma$

Zadatak 11

Matrica $\mathbf{A}=\mathbf{LU}$ je umnožak trokutastih matrica $\mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\-1&-1&-2&1\end{bmatrix}$ $\quad\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1&-1&-2&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

Za vektor $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\-4\end{bmatrix}$, nađite sva rješenja sustava $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

$$LU=\begin{bmatrix}1&&&\\-2&1&&\\0&-2&1&\\-1&-1&-2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&-2&0\\&1&0&-2\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&-2&0\\-2&3&4&-2\\0&-2&1&4\\-1&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&0&-1\\-2&3&4&-2&2\\0&-2&1&4&2\\-1&0&0&3&-4\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&0&-1\\0&1&0&-2&0\\0&-2&1&4&2\\0&-1&-2&3&-5\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&-1&-2&0&-1\\0&1&0&-2&0\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&-1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&&&&1\\&1&&&-2\\&&1&&2\\&&&1&-1\end{array}\right]$$

Zadatak 12

Neka su $a,b,c>0$. Zadana je kvadratna matrica $\mathbf{A}$ i vektor $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\a&1&0&0\\b&0&1&0\\c&0&0&1\end{bmatrix},\qquad\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Odgovorite je li sljedeća tvrdnja točna ili netočna:

Sustav $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ i sustav $\mathbf{A}^T\mathbf{x}=\mathbf{b}$ imaju ista rješenja.

$$A=\left[\begin{array}{cccc|c}1&&&&1\\a&1&&&1\\b&&1&&1\\c&&&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&&&&1\\&1&&&1-a\\&&1&&1-b\\&&&1&1-c\end{array}\right]\qquad\begin{aligned}x&=1\\y&=1-a\\z&=1-b\\w&=1-c\end{aligned}$$

Za $a,b,c=1$ ne vrijedi

$$A^T=\left[\begin{array}{cccc|c}1&a&b&c&1\\&1&&&1\\&&1&&1\\&&&1&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|c}1&&&&1-a-b-c\\&1&&&1\\&&1&&1\\&&&1&1\end{array}\right]\qquad\begin{aligned}x&=1-a-b-c\\y&=1\\z&=1\\w&=1\end{aligned}$$

Zadatak 13

Pronađite sva rješenja zadanog sustava linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5&=1\\2x_1+5x_2+8x_3+x_4+6x_5&=4\\x_1+4x_2+7x_3+5x_4+2x_5&=8\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\ldots+\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\ldots\quad\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Zadatak 13

Odredite realni parametar a za koji dani sustav nema rješenja te za koji sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

$$\begin{aligned}x_1+3x_2+ax_3&=3\\x_1+ax_2+(2+a)x_3&=5\\x_1+4x_2+(6+2a)x_3&=12\end{aligned}$$

$a=-9$ nema rješenja

Zadatak 16

Za koji realan parametar b dani sustav ima jedinstveno rješenje?

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+(b+1)x_3&=1\\-2x_1+bx_2-4x_3&=0\\x_1+x_2+2x_3&=0\end{aligned}$$

$b\neq-2\quad b\neq1$

Zadatak 17

Za koji realni parametar λ dani sustav nema rješenja, a za koji λ ima beskonačno mnogo rješenja?

$$\begin{aligned}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4&=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3+x_4&=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3+x_4&=\lambda^2,\\x_1+x_2+x_3+\lambda x_4&=\lambda^3.\end{aligned}$$

$\lambda=1$ beskonačno

Zadatak 18

Marija je naslijedila 24 000 kuna koje je podijelila na tri različita računa. Na kraju godine od kamata je zaradila 1 300 kuna. [illegible]

Zadatak 19

Odredite polinom $P(x)$ trećeg stupnja za kojeg vrijedi $P(1)=4$, $P(2)=15$, $P(-1)=0$, $P(-2)=-5$.

$ax^3+bx^2+cx+d=e$
$a+b+c+d=4$
$8a+4b+2c+d=15$
$-a+b-c+d=0$
$-8a+4b-2c+d=-5$

NEŠ' SAM ZEZNUO.