IV DOMAĆA ZADAĆA 12

LINEARNE ALGEBRE

① Dokažite indukcijom: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}$

za $k = 2$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Pretp. da tvrdnja vrijedi za k.

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^{k+1} & (k+1)\lambda^{k+1} \\ 0 & \lambda^{k+1} \end{bmatrix}$$

② Odredite vlastite vrijednosti i vlastite vektore matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \ldots = (\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_1 \ldots \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v \in \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{R},\ (x_1, x_3) \neq (0,0) \right\}$$

$\lambda_2 \ldots$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v \in \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, x_3 \in \mathbb{R},\ (x_1, x_3) \neq (0,0) \right\}$

(3.) Odredite vlastite vrijednosti i pripadne vlastite vektore za operator $A : P_3 \to P_3$ definiran s $A(p(t)) = (t\,p(t))'$

$A(1) = (t)' = 1$
$A(t) = (t^2)' = 2t$
$A(t^2) = (t^3)' = 3t^2$
$A(t^3) = (t^4)' = 4t^3$

$\Rightarrow$ matrica operatora A u kanonskoj bazi jednaka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(1,2,3,4)$$

$\Rightarrow$ vlastite vrijednosti su $\lambda_i = i$, $i = 1,2,3,4$.

Za vlastitu vrijednost λ_i pripadni vlastiti vektori su $\alpha_i t^{i-1}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \neq 0$.

(4) Neka je F linearni operator za koji vrijedi $F^2 = -F$. ~~Kakav može biti F?~~ Koji brojevi mogu biti vlastite vrijednosti od F?

Neka je λ vlastita vrijednost i v pripadni vlastiti vektor.

$\left.\begin{matrix} F^2 v = \lambda^2 v \\ \| \\ -Fv = -\lambda v \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda^2 v = -\lambda v \\ \lambda(\lambda+1) v = 0 \end{matrix}$

$v \neq 0 \Rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0$
$\Rightarrow \lambda = 0$ ili $\lambda = -1$

(5.) Pokažite da ako je x vlastiti vektor operatora F, onda je i vlastiti vektor za F^n, $\forall n \in \mathbb{N}$. Kako se odnose odgovarajuće vlastite vrijednosti?

λ ... vlastita vrijednost za x.

$Fx = \lambda x$

Dokaz indukcijom: $n = 2$ ... $F^2 x = F(\lambda x) = \lambda^2 x$

Pretp. da tvrdnja vrijedi za n.

$F^{n+1} x = F(F^n x) = F(\lambda^n x) = \lambda^{n+1} x$

(6.) Dokažite: Ako je F regularan operator i λ vlastita vrijednost za F, onda je $\lambda \neq 0$ i λ^{-1} je vlastita vrijednost za F^{-1}. U kakvom su odnosu pripadni vlastiti vektori?

Ako je $\lambda = 0$ vlastita vr. od F tada F ne može biti injekcija jer $\exists x \neq 0$ t.d. $Fx = 0 \cdot x = 0$, no već je $F0 = 0$ (što vrijedi za svaki lin. op.)

Dakle, mora biti $\lambda \neq 0$. Neka je x pripadni vlastiti vektor.

$$Fx = \lambda x \Rightarrow F^{-1}(Fx) = F^{-1}(\lambda x) \Rightarrow x = \lambda F^{-1} x$$

$$\Rightarrow F^{-1} x = \lambda^{-1} x.$$

Dakle, λ^{-1} je vlastita vrijednost za F^{-1}, a pripadni vlastiti vektor jednak je vlastitom vektoru od F za vlastitu vrijednost λ.