MAT3E – 6. DZ

1. (a)

$$x - 1 = \cos t \rightarrow x = 1 + \cos t$$
$$y = \sin t$$

$$\vec{f}(t) = (1 + \cos t)\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath}, \qquad t \in [0,2\pi]$$

(b)

$$t \in [0,1]$$

$$t = 0 \rightarrow x_A = 3, y_A = 2, z_A = -5$$

$$t = 1 \rightarrow x_B = 7, y_B = 2, z_B = 9$$

vrijedi općenito:

$$at + 3 = x$$
$$bt + 2 = y$$
$$ct - 5 = z$$

(ako uvrstimo $t = 0$ dobijemo prvu točku, a ako uvrstimo $t = 1$ moramo dobiti drugu točku)

za $t = 1$:

$$a + 3 = 7$$
$$b + 2 = 2$$
$$c - 5 = 9$$

iz čega je $a = 4$, $b = 0$ i $c = 14$

pa je rješenje:

$$\vec{r}(t) = (4t + 3)\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + (14t - 5)\vec{k}, \qquad t \in [0,1]$$

2. (a)

$$4x^2 - y^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$x = \pm 2 \operatorname{ch} t$$
$$y = 4 \operatorname{sh} t$$

(gdje predznak + prikazuje desnu, a predznak – lijevu granu hiperbole)

$$\vec{f}(t) = (\pm 2 \operatorname{ch} t)\vec{\imath} + 4 \operatorname{sh} t\, \vec{\jmath}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b)

$$r = 1 - \cos\varphi\,, \qquad \varphi \in [0,2\pi]$$

za polarne koordinate imamo

$$x = r\cos\varphi \leftrightarrow \cos\varphi = \frac{x}{r}$$
$$y = r\sin\varphi$$

a vrijedi da je $r = \sqrt{r^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{x^2 + y^2}$

uvrstimo to u prvu jednadžbu:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

odnosno kad kvadriramo vamo tamo:

$$(x^2 + y^2)^2 + (2x - 1)(x^2 + y^2) + x^2 = 0 \qquad (1)$$

φ je isto neki parametar, isto kao i t, pa možemo slobodno zapisati one polarne koordinate kao

$$x = r\cos t$$
$$y = r\sin t$$

i sad imamo onu prvu jednadžbu zapisanu na način

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \cos t \qquad (2)$$

kad ovaj zadnji izraz uvrstimo u jednadžbu (1) dobijemo:

$$(1 - \cos t)^2 + (2x - 1)(1 - \cos t) + x^2 = 0$$

pa kad riješimo tu kvadratnu jednadžbu dobijemo

$$x = \cos t\,(1 - \cos t)$$

pa kad to vratimo u (2) dobijemo

$$y = \sin t\,(1 - \cos t)$$

pa je onda zapis vektorske funkcije:

$$\vec{r}(t) = \cos t\,(1 - \cos t)\vec{\imath} + \sin t\,(1 - \cos t)\vec{\jmath}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

***Napomena:** Uzimao sam rješenja kvadratne jednadžbe samo sa plusom.

9. (a) Iz druge jednadžbe dobijemo da je $x = 1 - y$ i to ubacimo u prvu jednadžbu pa imamo:

$$(1-y)^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$$

$$4 - 8y + 4y^2 + y^2 + 4z^2 = 4$$

$$\left(\sqrt{5}y\right)^2 - 2\sqrt{5}y \cdot \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{16}{5} - \frac{16}{5} + 4z^2 = \frac{16}{5}$$

$$5\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + 4z^2 = \frac{16}{5}$$

$$\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}z^2 = \frac{16}{25}$$

Ovo je jednadžba kružnice pa uzmemo sljedeće:

$$y - \frac{4}{5} = \cos t$$

$$z = \frac{\sqrt{5}}{2}\sin t$$

I onda vratimo u jednadžbu $x = 1 - y$ pa dobijemo da je $x = \frac{1}{5} - \cos t$, $t \in [0, \pi]$.

(b) Stavimo $z = y$ u prvu jednadžbu i dobijemo

$$4(x-1)^2 + y^2 = 4y$$

$$4(x-1)^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0$$

$$4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + \left(\frac{y-2}{2}\right)^2 = 1$$

Ovo je jednadžba kružnice pa stavimo da je:

$$x - 1 = \cos t \to x = 1 + \cos t$$

$$\frac{y-2}{2} = \sin t \to y = 2 + 2\sin t$$

$$z = 2 + 2\sin t$$

$$t \in [0, \pi]$$

(c)
Ovo valjda znate :D