Tutorial za Fourierove redove
(autor: T.Burić)

Svake godine ista priča i isti problemi oko Fouriera - od pregršt formula u knjizi, studenti su na kraju zbunjeni i ne znaju kada što treba upotrijebiti. Kada koristiti formule sa L, kada sa T? Kada podijeliti intervale na dva dijela, kada pomnožiti cijeli integral s 2? To su samo neka od pitanja koja se vrte u ferovskim malim glavama :)

No nema očajavanja, sve je lako kad se slijedi *Burićev algoritam*! (da nema brkanja, kod Laplacea ćete susresti *Burićevu kuharicu*, a na VISu se koristi *Burićev princip* :p)

Sve zadatke iz Fouriera možemo razvrstati u par tipova, vidjet ćete da to nije nikakav problem!

1. Razvij funkciju $f(x)$ u trig. Fourierov red na intervalu $[a, b]$

Svi zadaci ovog tipa mogu se riješiti koristeći osnovne formule:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx$$

Nadajući se da ste dobili relativno pristojne integrale, konačni rezultat zapišete u obliku:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n\sin\frac{2n\pi x}{T}\right)$$

No nemali broj puta ovakav zadatak možete olakšati ukoliko obratite pozornost na sljedeće stvari:

1. korak

Pogledamo da li je interval $[a, b]$ simetričan oko 0 (npr. $[-1, 1]$, $[-\pi, \pi]$, itd.)

a) ukoliko interval nije simetričan, vraćamo se na prethodni gore opisani postupak.

b) ukoliko je interval simetričan (općenito ga označavamo s $[-L, L]$), prelazimo na korak 2.

2. korak

Pogledamo parnost ili neparnost funkcije $f(x)$, tj. kako se ponaša minus: samo umjesto x uvrstite $-x$ i gledate što će se dogoditi - ili kako ja volim reći, parne funkcije progutaju minus $f(-x) = f(x)$, a neparne ga pljunu van $f(-x) = -f(x)$:D

a) ukoliko funkcija nije ni parna ni neparna, opet se vraćamo na gornje formule

ČESTA GREŠKA: bez obzira što je interval simetričan $[-L, L]$, ako funkcije nije ni parna ni neparna, morate koristiti početne formule sa T, a, b.

b) ukoliko je funkcija parna, računamo po sljedećim formulama:

$b_n = 0$
$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$
$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$

te pišemo da je rješenje:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

c) ukoliko je funkcija neparna, računamo po sljedećim formulama:

$a_0 = 0$ (namjerno sam to posebno naglasio!)
$a_n = 0$
$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

te pišemo da je rješenje:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

ČESTA GREŠKA: ponekad morate razviti u red funkciju koja je parna/neparna na svojoj domeni, ali je zadana na nesimetričnom intervalu pa ne možete koristiti pojednostavljene formule sa L jer tako zadana funkcija ne može biti ni parna ni neparna, nego morate koristiti početne formule sa T, a, b (npr. treba razviti u Fourierov red funkciju $f(x) = \cos x,\ -\pi < x < 2\pi$, ovako zadan kosinus nije ni paran ni neparan!).

2. Razvij funkciju $f(x)$ po kosinusima/sinusima na intervalu $[0, L]$.

Ovakav tip zadatka dodatno zbuni ljude, no sve se svodi na to da napravimo proširenje funkcije na simetrični interval $[-L, L]$ i pri tome imamo sljedeća dva konkretna slučaja:

ČESTA GREŠKA: ovdje nam nije bitno dal je funkcija parna ili neparna, koristimo sljedeće formule bez obzira kakva je funkcija! npr. možemo funkciju $f(x) = \sin x$ (koja je neparna na svojoj domeni) razviti po kosinusima (tako da je parno proširimo!)

a) razvijanje po kosinusima

Računamo sljedeće:

$b_n = 0$
$a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)dx$
$a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$

te pišemo da je rješenje:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

b) razvijanje po sinusima

$a_0 = 0$
$a_n = 0$
$b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

te pišemo da je rješenje:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

I to bi bilo to - nema nikakve druge mudrosti! Sve ostalo se svodi na to da li ćete znati riješiti integral do kraja, tj. koliko ste spretni sa supstitucijama i parcijalnim integracijama!

Par malih napomena:

1. Podjela na intervale

Ukoliko je funkcija $f(x)$ zadana po intervalima ili ima apsolutnu vrijednost, neovisno o kojem se gornjem tipu zadatka radi, integrale morate rastaviti, posebno izračunati svaki dio, te ih na kraju zbrojiti!

Npr. treba izračunati integral funkcije $f(x) = |\sin x|$ na intervalu $[0, 2\pi]$:

$$\int_0^{2\pi} |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} \sin x\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin x\, dx$$

Nemojte zaboraviti da prilikom micanja apsolutne vrijednosti na intervalu na kojem funkcija poprima negativne vrijednosti, ispred funkcije pišemo minus!

2. Parni i neparni koeficijenti

Često ćete u službenim rješenjima vidjeti da u konačnom rezultatu umjesto n piše $2k$ ili $2k+1$. Poanta je da kad izračunate koeficijente, ponekad će svi parni ili neparni koeficijenti biti jednaki nuli, pa zbog jednostavnijeg zapisa radimo sljedeće:

kada izračunate a_n i b_n, u rezultat umjesto n uvrstite $2k$ i pogledate da li ćete dobiti jednostavniji zapis, ili čak da je rješenje jednako nula! Isto napravite i za $2k+1$.

Recimo da računamo parnu funkciju na intervalu $[-L, L]$ i da smo dobili da je $a_{2k} = 0$, a za a_{2k+1} smo dobili neke koeficijente. Onda rješenje zapisujemo ovako:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{L}$$

ČESTA GREŠKA: ne zaboravite u konačnom rješenju za $S(x)$ također umjesto svakog n napisati $2k$ ili $2k+1$, ovisno što vam ostane.

3. Nedefinirani n-ovi

Primjetili ste u knjizi da ponekad računamo limese. Zapravo se radi o računanju koefijenata za nedefinirane n-ove.

Recimo da ste dobili $b_n = \dfrac{2\sin(n\pi)}{1-n^2}$. I eto problema: budući da u nazivniku ne smije biti nula, umjesto n ne smijemo uvrstiti $n = 1$ (ne smijemo uvrstiti ni $n = -1$, no radi se o redu s pozitivnim članovima pa gledamo samo $n > 0$). I sada postoji dva načina kako to riješiti:

a) preko limesa

$$b_1 = \lim_{n \to 1} \frac{2\sin(n\pi)}{1-n^2} = ... = \pi$$

Tu pretpostavljam da znate računati limese i da se sjećate L'Hospitalovog pravila. Zato postoji i drugi način:

b) direktno preko formule:

U konkretnom slučaju u formulu za računanje b_n, umjesto n uvrstimo 1 i izračunamo integral:

$$b_1 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{1 \cdot \pi x}{L} dx = ... = \pi$$

Moramo naravno dobiti isto rješenje!

Konačni oblik Fourierovog reda za ovaj primjer zapisujemo ovako:

$$S(x) = b_1 \sin \frac{\pi x}{L} + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin \frac{n \pi x}{L}$$

Primjetite da suma sada kreće od 2, te da smo koeficijent b_1 zajedno s pripadnim sinusom napisali ispred sume.

4. Računanje suma

Na međuispitu vas gotovo sigurno očekuje bar jedan zadatak s računanjem sume! To nije ništa drugo nego šećer na kraju zadatka :p
Dakle o čemu se radi? Objasnit ću na tipičnom zadatku za ispit:

Potrebno je razviti funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \pi & , \; 0 < x < 1 \\ 0 & , \; 1 < x < 2 \end{cases}$$

u Fourierov red po kosinusima, te pomoću dobivenog reda izračunati sumu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Napomena: ponekad vam suma može biti zadana preko par početnih članova pa sami morate napisati opći član.
(npr. u ovom slučaju bi pisalo: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$)

Za vježbu preporučam da sami prođite kroz algoritam i razvijete funkciju - dobijemo da je razvoj u Fourierov red:

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

Ukoliko je netko imao problema pri rješavanju, evo cijeli postupak:

Dakle, radi se o tipu zadatka 2.a), napravimo parno proširenje, te računamo a_0 i a_n.

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)dx = \frac{2}{2}\int_0^1 \pi dx = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\int_0^1 \pi\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2\sin\frac{n\pi}{2}}{n}$$

Pogledajmo parne i neparne n-ove:

$$a_{2k} = \frac{2\sin\frac{2k\pi}{2}}{2k} = 0$$

$$a_{2k+1} = \frac{2\sin\frac{(2k+1)\pi}{2}}{2k+1} = \frac{2(-1)^k}{2k+1}$$

Stoga je:

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

Sumu odredimo tako da dobiveni red *namjestimo* na željenu sumu uvrštavanjem odgovarajućeg x-a. Funkcija nam je definirana na intervalu $[0,2]$ pa su nam pogodni x-evi iz tog intervala - najbolje je probat uvrstiti "lijepe" vrijednosti (tipa $x=0$, $x=1$, $x=2$) i uvijek će jedna od tih vrijednosti dati točnu sumu.

Ovdje uvrstimo $x=0$:

$$S(0) = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(0)$$

Primjeti da je po osnovnom teoremu o konvergenciji Fourierovog reda $S(x) = f(x)$, pa je $S(0) = f(0) = \pi$ (uvrstili smo dakle nulu u početnu funkciju)
Dobijemo:

$$\pi = \frac{\pi}{2} + 2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

tj. dobili smo željenu sumu pa sređivanjem imamo:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

I time je cijeli zadatak rješen!

Eto, to bi bilo sve za sigurni start!
Želim vam ugodno igranje s gosp. Fourierom! :)

Tutorial za Laplaceovu transformaciju
(autor: T.Burić)

Bez previše filozofiranja, objasnit ću opći postupk traženja slike, tj. Laplaceovog transformata neke funkcije, kojeg sam sažeo u *Burićevu kuharicu* :D

Neka nam je zadana funkcija $f(t)$ - Laplaceovu transformaciju radimo ovim redoslijedom:

1. zanemarimo prigušenje e^{-at}

2. svedemo svaki t na pomak iz step-funkcije $u(t-b)$

3. preslikamo funkciju $f(t)$ u $F(s)$ kao da nema pomaka

4. pomnožimo $F(s)$ sa e^{-bs} (pomak iz stepa)

5. pomaknemo svaki s za vrijednost a (koju smo u 1. koraku zanemarili)

Ukoliko u početnoj funkciji $f(t)$ nema nekog od ovih koraka, jednostavno ga preskočimo.
U trećem koraku nije potrebno znati cijelu tablicu Laplaceove transformacije, jedino zapamtite u što se preslikavaju sinus i kosinus, konstanta i potencije (tj. t^n). Sve ostalo se dobije ovim postupkom.

1. Primjer

Treba preslikati funkciju $f(t) = t^2 e^{-t} u(t-3)$

Slijedimo kuharicu:

1. prvo zanemarimo eksponencijalnu funkciju, tj. imamo $t^2 u(t-3)$

2. svedemo svaki t na pomak iz stepa - to se radi tako da dodamo i oduzmemo taj pomak te ga grupiramo zajedno sa t:

$$(t-3+3)^2 u(t-3) = [(t-3)+3]^2 u(t-3) = [(t-3)^2 + 6(t-3) + 9]u(t-3)$$

3. sada preslikavamo kao da nema pomaka, tj. kao da imamo $t^2 + 6t + 9$. Budući da t^n prelazi u $\frac{n!}{s^{n+1}}$, dobijemo:

$$\frac{2!}{s^3} + 6\frac{1!}{s^2} + 9\frac{1}{s}$$

4. pomak iz stepa prelazi u eksponencijalnu funkciju e^{-3s} (po teoremu o pomaku):

$$\left(\frac{2}{s^3}+\frac{6}{s^2}+\frac{9}{s}\right)e^{-3s}$$

5. i konačno, po teoremu o prigušenju, **svaki** s pomaknemo za $+1$, koliko je bilo u zanemarenoj eksponencijalnoj funkciji iz prvog koraka:

$$\left(\frac{2}{(s+1)^3}+\frac{6}{(s+1)^2}+\frac{9}{s+1}\right)e^{-3(s+1)}$$

I to je konačno rješenje - uopće nije bilo teško! :)

2. Primjer

Treba preslikati funkciju $f(t)=\sin(\frac{t}{2})e^{2t}u(t-\pi)$

Opet po kuharici (neću sada pisati detaljna objašnjenja):

1. Imamo $\sin(\frac{t}{2})u(t-\pi)$

2. Pomak: $\sin(\frac{t-\pi+\pi}{2})u(t-\pi)=\sin(\frac{t-\pi}{2}+\frac{\pi}{2})u(t-\pi)$

koristimo adicijsku formulu: $[\sin(\frac{t-\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2})+\cos(\frac{t-\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{2})]u(t-\pi)=\cos(\frac{t-\pi}{2})u(t-\pi)$

3. Preslikavamo $\cos(\frac{t}{2})$ (kao da nema pomaka) u

$$\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}$$

4. Množimo s eksponencijalnom funkcijom:

$$\frac{s}{s^2+\frac{1}{4}}e^{-\pi s}$$

5. Pomaknemo svaki s:

$$\frac{s-2}{(s-2)^2+\frac{1}{4}}e^{-\pi(s-2)}$$

I to je to!

Ovaj postupak možete koristiti i kod bilo koje primjene (diferencijalne jednadžbe, strujni krugovi, ...), dakle svaki put kada morate naći Laplaceovu transformaciju neke funkcije!

Inverzna Laplaceova transformacija

Sada nam preostaje napisati *Burićevu kuharicu* za inverznu Laplaceovu transformaciju, tj. postupak traženja originala neke funkcije - redoslijed je isti, uz jedan dodatni korak:

1. zanemarimo eksponencijalnu funkciju e^{-bs}

2. faktoriziramo nazivnik i rastavimo funkciju na parcijalne razlomke (obavezno u brojniku mora biti polinom manjeg stupnja nego u nazivniku!), te namjestimo nazivnik na potpuni kvadrat (ukoliko je to potrebno)

3. svedemo s u brojniku na pomak $s + a$ iz nazivnika

4. preslikamo funkciju $F(s)$ u $f(t)$ kao da nema pomaka

5. pomnožimo $f(t)$ sa e^{-at} (pomak od s)

6. pomaknemo svaki t za vrijednost $-b$ (koju smo u prvom koraku zanemarili)

Primjer

Potrebno je naći original funkcije $F(s) = \dfrac{s^3 + 10}{s^3 + 2s^2 + 10s} e^{-2s}$

Slijedimo redom kuharicu:

1. Zanemarimo eksponencijalnu funkciju i imamo: $\dfrac{s^3 + 10}{s^3 + 2s^2 + 10s}$

2. Primjetimo da je u brojniku i nazivniku polinom istog stupnja - da riješimo taj problem, najbolje je napraviti sljedeći trik: samo dodajte i oduzmite u brojniku ono što vam fali, tako da to možete grupirati i skratiti s nazivnikom:

$$\frac{s^3 + 10}{s^3 + 2s^2 + 10s} = \frac{s^3 + 2s^2 + 10s - 2s^2 - 10s + 10}{s^3 + 2s^2 + 10s} = 1 + \frac{-2s^2 - 10s + 10}{s^3 + 2s^2 + 10s}$$

Sada je potrebno faktorizirat nazivnik (pri tome obavezno provjerite da li se kvadratna jednadžba može faktorizirati, tj. da li ima realne nultočke - u našem slučaju nema)

$$\frac{-2s^2 - 10s + 10}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 10}$$

Nadam se da se sjećate rastava na parcijalne razlomke iz MAT1 - treba iz jednadžbe $A(s^2+2s+10)+(Bs+C)s = -2s^2-10s+10$ izračunati A, B i C. To možete napraviti uvrštavanjem nekih brojeva u s (npr. uvrstite $s = 0$, $s = 1$ i $s = -1$ i brzo dobijete konstante) ili izjednačavanjem onog što stoji uz istu potenciju s obje strane (tako većina studenata radi). Dobije se: $A = 1$, $B = -3$, $C = -12$, tj. cijela funkcija je:

$$1 + \frac{1}{s} + \frac{-3s - 12}{s^2 + 2s + 10}$$

Potrebno je još namjestiti nazivnik na potpuni kvadrat - budući da imamo $s^2 + 2s$, moramo dodati $+1$ da bi imali $(s + 1)^2$

Naravno, ako dodajemo 1, moramo to i oduzeti pa imamo konačno:

$$1 + \frac{1}{s} + \frac{-3s - 12}{(s + 1)^2 + 9}$$

3. sada je potrebno u drugom razlomku namjestiti s na pomak iz nazivnika standardnom metodom:

$$1 + \frac{1}{s} + \frac{-3(s + 1 - 1) - 12}{(s + 1)^2 + 9}$$

malo grupiramo i rastavimo razlomak na dva dijela:

$$1 + \frac{1}{s} + \frac{-3(s + 1) - 9}{(s + 1)^2 + 9} = 1 + \frac{1}{s} - 3\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 9} - 3\frac{3}{(s + 1)^2 + 9}$$

(u brojniku zadnjeg razlomka ostavio sam samo 3 zato jer namještavam na formulu za sinus)

4. preslikamo kao da nema pomaka (mala napomena: jedinica se preslikava u diracovu delta funkciju)

$$\delta(t) + 1 - 3\cos(3t) - 3\sin(3t)$$

5. sada preslikavamo pomak, no pripazite da ne pomnožite sve sa eksponencijalnom funkcijom jer je pomaknuti s bio samo u zadnja dva razlomka, tj. kod sinusa i kosinusa:

$$\delta(t) + 1 - 3[\cos(3t) + \sin(3t)]e^{-t}$$

6. i napokon pomaknemo **svaki** t zbog zanemarene eksponencijalne funkcije iz prvog koraka:

$$[\delta(t - 2) + 1 - 3[\cos(3(t - 2)) + \sin(3(t - 2))]e^{-(t-2)}]u(t - 2)$$

ČESTA GREŠKA: Nemojte zaboraviti pomaknuti t u eksponencijalnoj funkciji i na kraju u step funkciji!!

Znam da možda sve ovo izgleda malčice komplicirano, no prođite polako i detaljno kroz svaki korak - ako ste shvatili ovaj zadatak, nema toga što neće moći riješiti! :)

Opet napominjem da je ovaj postupak univerzalan i tako se može naći bilo koji original, bilo općenito bilo u nekoj od primjena na diferencijalne jednadžbe i strujne krugove!