

# Matematika 3E

## Pripremni međuispit br. 1

1. (4) Izvedite formule za koeficijente  $a_n$ ,  $n \geq 0$ , trigonometrijskog Fourierovog reda zadane funkcije  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  po trigonometrijskome sustavu

$$\frac{1}{2}, \cos(\omega x), \sin(\omega x), \dots, \cos(n\omega x), \sin(n\omega x), \dots$$

gdje je  $\omega = \frac{2\pi}{b-a}$ .

2. (a) (3) Razvijte u Fourierov red funkciju  $f(x) = |x|$ ,  $-6 < x < 6$ .  
(b) (1) Skicirajte graf dobivenog Fourierovog reda.  
(c) (2) Koristeći dobiveni razvoj i Parsevalovu jednakost izračunate sumu reda  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$ .
3. (a) (1) Iskažite teorem o pomaku originala.  
(b) (2) Izvedite formulu za sliku originala  $f(t) = \sin\left(\frac{n\pi t}{A}\right)g_{[0,A]}(t)$ .  
(c) (2) Razvijte u Fourierov red neparno proširenu funkciju  $f(x) = 2e^{-x}$  definiranu na intervalu  $[0, 2]$ .
4. (3) Prikažite pomoću Fourierovog integrala funkciju  $f(x) = 3x^2 e^{-2|x|}$ .
5. (2) Teorem o početnoj vrijednosti glasi:

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

Neka je funkcija u donjem području zadana kao

$$F(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2(3s+9)} e^{-0.5s}$$

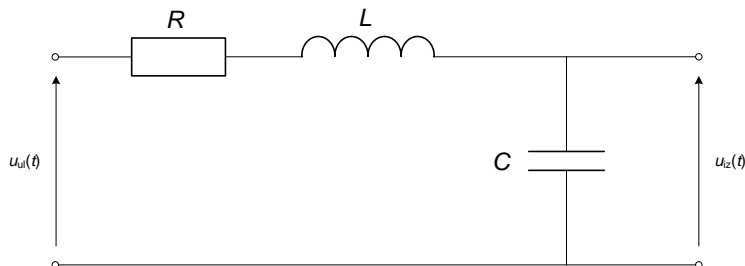
Odredite nagib funkcije  $f(t)$  u trenutku  $t = 0.5^+$  s. (Napomena:  $f(0) = f(0^-) = 0$ .)

6. (a) (1) Iskažite teorem o integriranju originala kod Laplaceove transformacije.  
(b) (2) Izvedite teorem o deriviranju originala kod Laplaceove transformacije.  
(c) (2) Riješite diferencijalno-integralnu jednadžbu

$$y'(t) = \delta(t) + \int_0^t e^u du$$

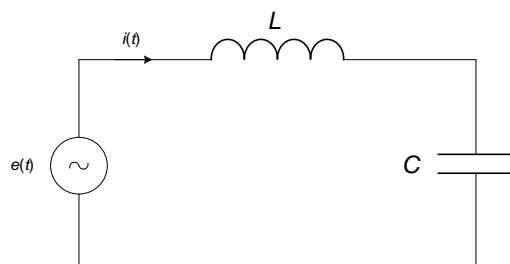
$$y(0) = 1$$

- (d) (4) Na slici 1 prikazana je shema električnog kruga. Parametri sustava su:  $R = 2$ ,  $L = C = 1$ ,  $u_{ul}(t) = u(t)$ ,  $i_L(0) = 0$ ,  $u_C(0) = 2$  i  $\dot{u}_C(0) = 0$ . Odredite  $u_{iz}(t)$ .



Slika 1: Shema električnog kruga

7. (3) Odedite struju električnog kruga prikazanog na slici 2 ako su parametri sustava  $L = C = 1$  i  $e(t) = \sin(t)u(t)$ .



Slika 2: Shema električnog kruga

8. (a) (2) Iskažite i dokažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa za dvostruki integral.
- (b) (3) Neka je  $f(x, y) = \sqrt{4x^2 - 4x + 4y^2 + 1}$ , a područje  $D$  neka je  $x^2 + y^2 \leq x$  u ravnini  $z = 0$ . Odredite visinu valjka baze  $D$  čiji je volumen  $V$  jednak volumenu tijela ispod plohe  $z = f(x, y)$  nad područjem  $D$ . Koliko iznosi volumen  $V$ ?
9. (3) U dvostrukom integralu

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1+\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy$$

promijenite poredak integracije i skicirajte područje integracije.