

Matematika 3E – 3R

1. Predmeđuispit

(pripremio Armand Van Helden)

Zadatak 1.

Neka je zadana funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \text{ i } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Pomoću razvoja ove funkcije u Fourierov red, odredite sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Zadatak 2.

Odredite razvoj funkcije $f(x) = 2e^{-|x|}$ na intervalu od $(0, \pi)$ po sinus funkcijama.

Zadatak 3.

Prikažite funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2|\cos(2x)|, & -\pi \leq x \leq \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

u obliku Fourierovog integrala.

Zadatak 4.

a) Odredi funkciju koja je original slike

$$\frac{s^3}{(s^2 + 1)(s - 2)}$$

b) Izvedite formulu za sliku druge derivacije originala.

c) Neka je zadana funkcija $f(t)$ (koja je original), takva da je:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in \langle n_1 - 0.5, n_1 + 0.5 \rangle, & n_1 = 2k + 1 \\ -1, & t \in \langle n_2 - 0.5, n_2 + 0.5 \rangle, & n_2 = 2k \end{cases}$$

gdje je $k \in \mathbb{N}_0$, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.

Odredite sliku funkcije.

Zadatak 5.

Izračunajte vrijednost integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-3b} - e^{-5b}}{2} b^2 db$$

pomoću Laplaceove transformacije.

Zadatak 6.

Riješite jednađbu

$$y''e^{-2t} = 1 - \int_0^t y(u)e^{-2u} du$$

$$y'(0) = y(0) = 0$$

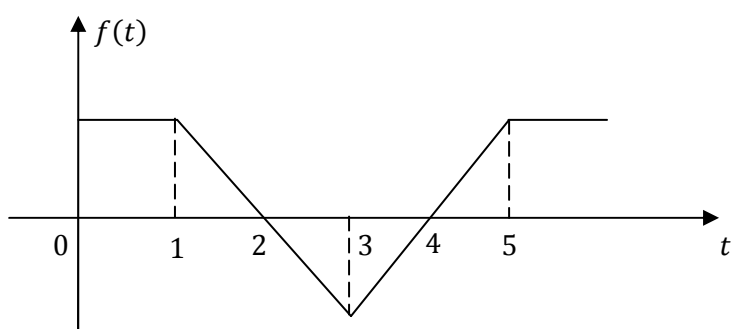
Zadatak 7.

Riješite diferencijalnu jednađbu

$$y'(t) + y(t) = f(t)$$

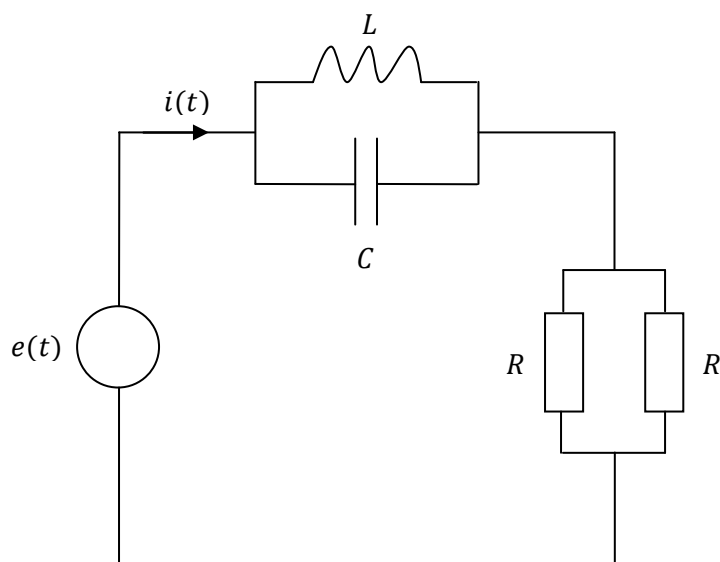
$$y(0) = 0$$

gdje je $f(t)$ zadan slikom:



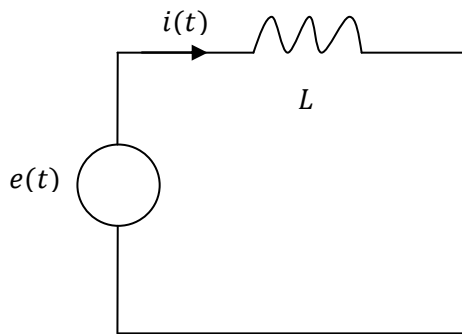
Zadatak 8.

a) Odredite kakav napon treba biti narinut da bi struja u strujnom krugu zadanom slikom 1. bila konstantna, $i(t) = K$?

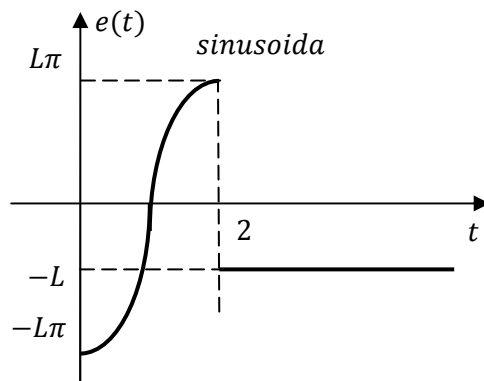


Slika 1.

b) Odredite struju u strujnom krugu zadanom slikom 2., ako je narinuti napon zadanom slikom 3.



Slika 2.



Slika 3.

Rješenja:

$$1. \sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

$$2. S(x) = \sum \frac{4n(1-e^{-\pi(-1)^n})}{\pi(n^2+1)} \sin(nx)$$

$$3. A(\lambda) = \frac{4}{\pi} \frac{2\lambda \sin(\frac{\lambda\pi}{2}) + \lambda \sin(\lambda\pi)}{4-\lambda^2}$$

$$4. a) \delta(t) + \left(\frac{8}{5} e^{2t} - \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t \right) u(t)$$

$$c) \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(-\frac{1}{s} + \frac{3e^{-\frac{1}{2}s}}{s} - \frac{3e^{-\frac{3}{2}s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \right)$$

$$5. \frac{98}{3375}$$

$$6. y(t) = \left(-e^t + \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{\frac{1}{2}t} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) e^{\frac{1}{2}t} \right) u(t)$$

$$7. y(t) = (1 - e^{-t})u(t) + (2 - t + e^{-(t-1)})u(t-1) + (-8 + 2t - 2e^{-(t-3)})u(t-3) + (6 - t + e^{-(t-5)})u(t-5)$$

$$8. a) e(t) = \left(K \sqrt{\frac{L}{C}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t\right) + \frac{RK}{2} \right) u(t)$$

$$b) i(t) = -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) u(t) + 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) u(t-2) - (t-2)u(t-2)$$