

# Masovne instrukcije iz Matematike 3

## 17.11.2012.

### Fourierov red

#### Zadatak 1

Odredite temeljni period funkcije

$$f(x) := c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c_{2n} \cos\left(\frac{2n\pi x}{3}\right) + c_{3n} \sin\left(\frac{2n\pi x}{3}\right) \right].$$

#### Zadatak 2

Dokažite da je sustav funkcija

$$1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \dots, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x), \dots$$

ortogonalan na intervalu  $[-1, 1]$ .

#### Zadatak 3

Izvedite formule za koeficijente  $a_n$  i  $b_n$ ,  $n \geq 0$ , trigonometrijskog Fourierovog reda zadane funkcije  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  po trigonometrijskome sustavu

$$1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \dots, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x), \dots$$

#### Zadatak 4

Provjerite zadovoljavaju li sljedeće funkcije Dirichletove uvjete:

(a)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ , na intervalu  $[-1, 1]$ ,

(b)  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , na intervalu  $[-1, 1]$ ,

(c)  $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$ , na intervalu  $[-4, 4]$ ,

(d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ \pi, & x = 0 \end{cases}$ ,

(e)  $f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ .

#### Zadatak 5

(a) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[-\pi, \pi]$  funkciju  $f(x) = 1 - |\cos x|$ .

(b) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[0, \pi]$  po kosinus funkcijama funkciju  $f(x) = 1 - |\cos x|$ .

(c) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[0, 1]$  funkciju  $f(x) = 2e^{-x}$ .

(d) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[-2, 2]$  funkciju  $f(x) = \begin{cases} 0, & 1 < |x| < 2 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x-1}{2}, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$ . Skiciraj graf.

(e) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[-\pi, \pi]$  funkciju  $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$ . Skiciraj graf. Izračunaj sumu reda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

(f) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[-6, 6]$  funkciju  $f(x) = |x|$ . Skiciraj graf. Koristeći Parsevalovu jednakost izračunaj sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

**Zadatak 6**

(a) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[0,2]$  funkciju  $f(x) = |x - 1|$ .

(b) Funkcija  $f(x) = 1 - x^2$  razvijena je po sinus funkcijama u Fourierov red na intervalu  $[0,1]$ . Izračunajte  $S(5\pi)$ . (Funkciju nije potrebno razvijati u red.)

(c) Razvij u Fourierov red na intervalu  $[0,3]$  po kosinus funkcijama funkciju  $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$ . Skiciraj graf. Izračunaj sumu reda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

te odredi vrijednost  $S(\sqrt{111})$ .

(d) Razvoj u Fourierov red na intervalu  $[0,2]$  po sinus funkcijama funkcije  $f(x) = 2$  glasi

$$S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1}.$$

Koristeći Parsevalovu jednakost izračunaj sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

(e) Razvoj u Fourierov red na intervalu  $[-\pi, \pi]$  funkcije  $f(x) = x$  glasi

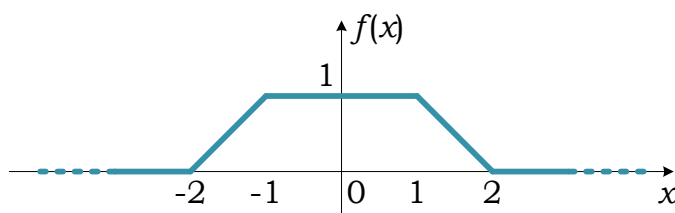
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{n}\right) (-1)^n \sin(nx).$$

Koristeći Parsevalovu jednakost izračunaj sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

**Fourierov integral****Zadatak 1**

(a) Prikažite Fourierovim integralom funkciju zadanu slikom.



(b) Prikažite Fourierovim integralom funkciju  $f(x) = e^{-3x}$ . Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{u \sin u}{u^2 + 1} du.$$

(c) Prikažite Fourierovim integralom funkciju  $f(x) = 3x^2 e^{-2|x|}$ .

(d) Prikažite Fourierovim integralom funkciju  $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ .

(e) Prikažite Fourierovim integralom funkciju  $f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in (0,1) \\ \frac{5}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ .

(f) Prikažite Fourierovim integralom funkciju  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & x \in (-1,1) \\ 0, & x \notin (-1,1) \end{cases}$ . Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} dx.$$

## Laplaceova transformacija

### Zadatak 1

Odredi Laplaceovu transformaciju sljedećih funkcija:

(a)  $f(t) = e^{-5t}u(t)$ ,

(b)  $f(t) = e^{2t}u(t)$ ,

(c)  $f(t) = 5t^2u(t)$ ,

(d)  $f(t) = \sin(\sqrt{5}t)$ ,

(e)  $f(t) = \cos(3t)$ ,

(f)  $f(t) = t^4 e^{-t}u(t)$ ,

(g)  $f(t) = e^{-2t}t^2u(t-1)$ ,

(h)  $f(t) = \frac{\cos t}{t}u(t)$ ,

(i)  $f(t) = \operatorname{sgn}(2t)u(t)$ .

### Zadatak 2

Odredi Laplaceovu transformaciju sljedećih funkcija:

(a)  $f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)u(t)$ ,

(b)  $f(t) = (t-2)^3 e^{-t}u(t-2)$ ,

(c)  $f(t) = \frac{(2t-3)^{n+1}e^{-2nt}}{(n+1)!}u\left(t - \frac{3}{2}\right)$ ,

(d)  $f(t) = \frac{1-t^7}{1-t}u(t)$ ,

(e)  $f(t) = e^{-t}u(t-1)e^{-2t}u(t-2)\cdots e^{-100t}u(t-100)$ ,

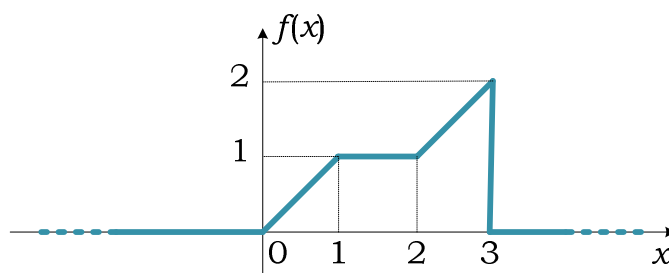
(f)  $f(t) = t^n 3^{\frac{t-1}{2}}u(t)$ ,

(g)  $f(t) = t \sin\left(\frac{t}{3}\right)u(t)$ ,

(h)  $f(t) = t^2 \operatorname{ch}(3t)u(t)$ .

### Zadatak 3

Odredi Laplaceovu transformaciju funkcije zadane slikom.



### Zadatak 4

Izračunaj sljedeće integrale:

(a)  $\int_0^\infty e^{-4t} \operatorname{ch}(t) \operatorname{sh}(t) dt$ ,

(b)  $\int_0^\infty \frac{1}{x} e^{-x} \sin(x) dx$ ,

(c)  $\int_0^\infty e^{-2t} t^2 \sin(t) dt$ ,

(d)  $\int_0^\infty e^{-2t} \cos(4t) dt$ .

### Zadatak 5

Odredi Laplaceovu transformaciju sljedećih funkcija:

(a)  $f(t) = (t - [t])u(t)$ ,

(b)  $f(t) = \operatorname{sgn}[\cos(t)]$ .

**Zadatak 6**

Odredi originale sljedećih funkcija:

(a)  $F(s) = \frac{se^{-2s}}{s^2 + 24s + 169},$

(b)  $F(s) = \frac{1}{s^3 - 6s^2 - 8s},$

(c)  $F(s) = \frac{s}{(s^2 + 1)^2}.$

**Zadatak 7**

Teorem o početnoj vrijednosti glasi:

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s),$$

pri čemu je  $F(s)$  slika originala  $f(t)$ .

Neka je funkcija u donjem području zadana kao

$$F(s) = \frac{1-s}{(s+2)^2(3s+9)} e^{-0.5s}.$$

Odredite nagib funkcije  $f(t)$  u trenutku  $t = 0.5^+ s$ .

**Zadatak 8**

Riješite sljedeće jednačbe:

(a)  $y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = 0, y(0) = 1,$

(b)  $2x''(t) - 3x'(t) = e^t, x(0) = x'(0) = 0,$

(c)  $y(t) = t + 4 \int_0^t (t-\tau)y(\tau) d\tau,$

(d)  $y'(t)e^{-t} = 1 + \int_0^t e^{-\tau}y(\tau) d\tau,$

(e)  $y'(t) = \delta(t) + \int_0^t e^u du, (0) = 1,$

(f)  $y''(t) + y'(t) = te^t, y(0) = 1, y'(0) = 0,$

(g)  $e^t y(t) = 1 + 2 \int_0^t e^u \cos u du,$

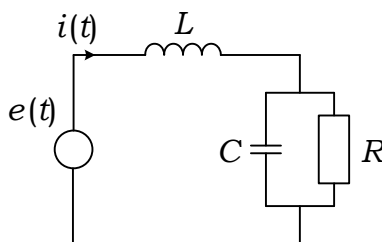
(h)  $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = u(t), y(0) = y'(0) = 0,$

(i)  $y''(t) - y'(t) = 2\delta(-1t), y(0) = y'(0) = 0.$

**Zadatak 9**

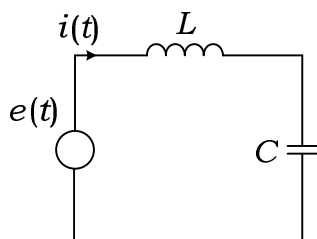
(a) Odredi napon  $e(t)$  kako bi u električnom krugu zadanom slikom tekla struja  $i(t) = e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) u(t)$ .

Zadani su parametri  $R = L = C = 1$ .

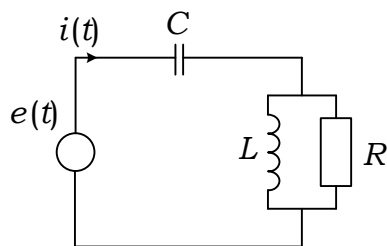


(b) Odredi struju  $i(t)$  u električnom krugu zadanom slikom ako je  $e(t) = \sin(t) u(t)$ . Zadani su parametri

$L = C = 1$ .



(c) Odredi struju  $i(t)$  u električnom krugu zadanom slikom ako je  $e(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ . Zadani su parametri  $R = L = C = 1$ .



## Dvostruki integrali

Zadaci za vježbu iz knjižice i starih ispita.