2.4. Zadaci za vježbu

Zadatak 1. Izračunajte

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

pri čemu je $V = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

Rješenje:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = \left| \begin{matrix} x+y+z+1=t \\ dz=dx \end{matrix} \right| = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_{x+y+1}^{x+y+2} \frac{dz}{\sqrt{t}} =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 \left(\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Bigg|_{x+y+1}^{x+y+2} \right) dy = 2\int_0^1 dx \int_0^1 \left(\sqrt{x+y+2} - \sqrt{x+y+1}\right) dy = \left| \begin{matrix} x+y+2=u & x+y+1=v \\ dy=du & dy=dv \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int_0^1 dx \left(\int_{x+2}^{x+3} \sqrt{u}du - \int_{x+1}^{x+2} \sqrt{v}dv \right) = 2\int_0^1 \left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{x+2}^{x+3} - \frac{v^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Bigg|_{x+1}^{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 \left(\sqrt{(x+3)^3} - 2\sqrt{(x+2)^3} + \sqrt{(x+1)^3} \right) dx = \left| \begin{matrix} x+3=w & x+2=p & x+1=q \\ dx=dw & dx=dp & dx=dq \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\int_3^4 w^{\frac{3}{2}}dw - 2\int_2^3 p^{\frac{3}{2}}dp + \int_1^2 q^{\frac{3}{2}}dq \right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{w^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Bigg|_3^4 - \frac{4}{3} \cdot 2\frac{p^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Bigg|_2^3 + \frac{4}{3} \cdot \frac{qw^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{8}{15}\left(4^{\frac{5}{2}} - 3^{\frac{5}{2}}\right) - \frac{16}{15}\left(3^{\frac{5}{2}} - 2^{\frac{5}{2}}\right) + \frac{8}{15}\left(2^{\frac{5}{2}} - 1\right) =$$

$$= \frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right)$$

Zadatak 2. Izračunajte težište kocke $0 \leq x, y, z \leq a$, ako je gustoća $\rho(x, y, z) = x + y + z$.

Rješenje:

Formula za težište jest:

$$T = \left(\frac{\iiint_V \ x\rho(x,y,z)dxdydz}{m(V)}, \frac{\iiint_V \ y\rho(x,y,z)dxdydz}{m(V)}, \frac{\iiint_V \ z\rho(x,y,z)dxdydz}{m(V)} \right)$$

Izračunajmo masu tijela:

$$m(V) = \iiint_V \ \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x+y+z)dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^a \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a dy = \int_0^a dx \int_0^a \left(xa + ya + \frac{a^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^a \left(xay + \frac{y^2}{2} a + \frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a dx = \int_0^a \left(xa^2 + \frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} a^2 + a^3 x \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{2} + a^4 = \frac{3a^4}{2}$$

Također izračunamo M_{yz}, M_{xz} i M_{xy}.

$$M_{yz} = \iiint_V \ x\rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x^2 + xy + xz)dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^a \left(x^2 z + xyz + x\frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^a dy = \int_0^a dx \int_0^a \left(x^2 a + xya + x\frac{a^2}{2} \right) dy =$$

$$= \int_0^a dx \left(x^2 ay + \frac{xay^2}{2} + x\frac{a^2}{2} y \right) \Big|_0^a = \int_0^a \left(x^2 a^2 + \frac{xa^3}{2} + \frac{xa^3}{2} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3a^2}{3} + \frac{x^2a^3}{2}\right)\Big|_0^a = \frac{5a^5}{6}$$

Analogno se dobije da su M_{xz} i M_{xy} također $\frac{5a^5}{6}$.

Pa nam je težište tijela:

$$T = \left(\frac{\frac{5a^5}{6}}{\frac{3a^4}{2}}, \frac{\frac{5a^5}{6}}{\frac{3a^4}{2}}, \frac{\frac{5a^5}{6}}{\frac{3a^4}{2}}\right)$$

odnosno

$$T = \left(\frac{5a}{9}, \frac{5a}{9}, \frac{5a}{9}\right)$$

Zadatak 3. Izračunajte masu kvadra $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ čija je gustoća $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Rješenje:

$$m(V) = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)dz =$$

$$= \int_0^a dx \int_0^b \left(x^2z + y^2z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^c dy = \int_0^a dx \int_0^b \left(x^2c + y^2c + \frac{c^3}{3}\right)dy =$$

$$= \int_0^a \left(x^2cy + c\frac{y^3}{3} + \frac{c^3}{3}y\right)\Big|_0^b dx = \int_0^a \left(x^2bc + \frac{b^3c}{3} + \frac{bc^3}{3}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^3bc}{3} + \frac{xb^3c}{3} + \frac{xbc^3}{3}\right)\Big|_0^a = \frac{a^3bc}{3} + \frac{ab^3c}{3} + \frac{abc^3}{3} = \frac{1}{3}abc(a^2 + b^2 + c^2)$$

Zadatak 4. Izračunajte moment tromosti homogenog $(\rho(x,y,z)=1)$ kvadra sa stranicama duljina a, b i c s obzirom na: **A.** jedan vrh, **B.** stranicu duljine a.

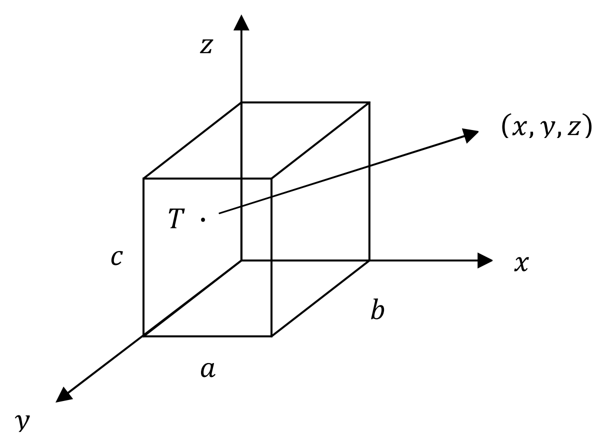
Rješenje:

Najprije napišimo formulu za traženje momenta tromosti s obzirom na neku os ili točku Φ:

$$I_\Phi = \iiint_V d_\Phi^2\,(x,y,z)\rho(x,y,z)dxdydz$$

gdje je d_Φ udaljenost točke (x,y,z) od Φ.

A. Nacrtajmo svoj lik, i neka nam svaka od stranica leži na jednoj koordinatnoj osi.



Ovdje tražimo moment tromosti s obzirom na jedan od vrhova. Zbog jednostavnosti uzmimo vrh $O(0,0,0)$. Tražimo udaljenost bilo koje točke kvadra od O. Neka nam tu bilo koju točku predstavlja $T(x,y,z)$. Onda je udaljenost te točke od O jednaka:

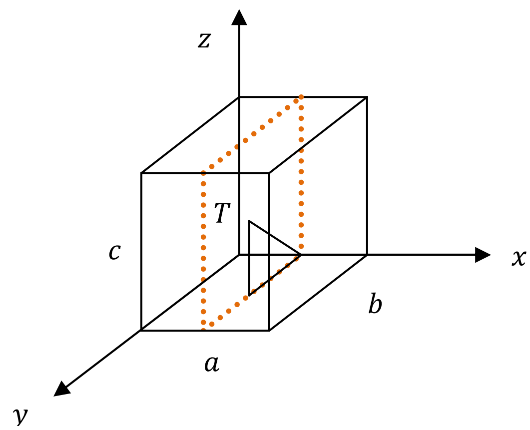
$$d_\Phi = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Pa kad to uvrstimo u integral dobijemo:

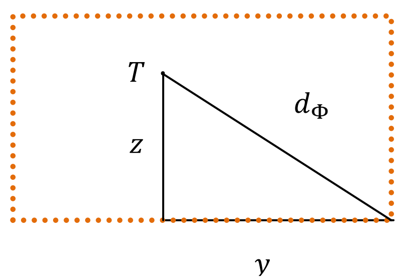
$$I_O = \iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2+y^2+z^2)dz = \int_0^a dx \int_0^b \left(x^2z+y^2z+\frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^c dy =$$

$$= \int_0^a \left(x^2cy+\frac{y^3}{3}c+\frac{c^3}{3}y\right)\Big|_0^b dx = \left(\frac{x^3}{3}bc+x\frac{b^3}{3}c+x\frac{c^3}{3}b\right)\Big|_0^a = \frac{1}{3}abc(a^2+b^2+c^2)$$

B. Ovdje računamo moment tromosti s obzirom na stranicu a. Znači da kao udaljenost od te stranice moramo tražiti točke koje su u dijelu ravnine koja je dio kvadra a okomita je na stranicu a. (Na slici je prikazana jedna ravnina koja je okoita samo na jedan dio stranice a.)



Ako prikažemo samo taj dio ravnine imamo:



Prema Pitagorinom poučku kvadrat naše tražene udaljenost je jednak

$$d_\Phi^2 = y^2 + z^2$$

Kada to uvrstimo u integral dobijemo:

$$I_a = \iiint_V (y^2 + z^2)dxdydz = \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (y^2 + z^2)dz = \int_0^a dx \int_0^b \left(y^2 z + \frac{z^3}{3}\right)\Big|_0^c dy =$$

$$= \int_0^a \left(\frac{y^3}{3}c + \frac{c^3}{3}y\right)\Big|_0^b dx = \left(x\frac{b^3}{3}c + x\frac{c^3}{3}b\right)\Big|_0^a = \frac{1}{3}abc(b^2 + c^2)$$

Zadatak 5. Postavite granice integracije u integralu

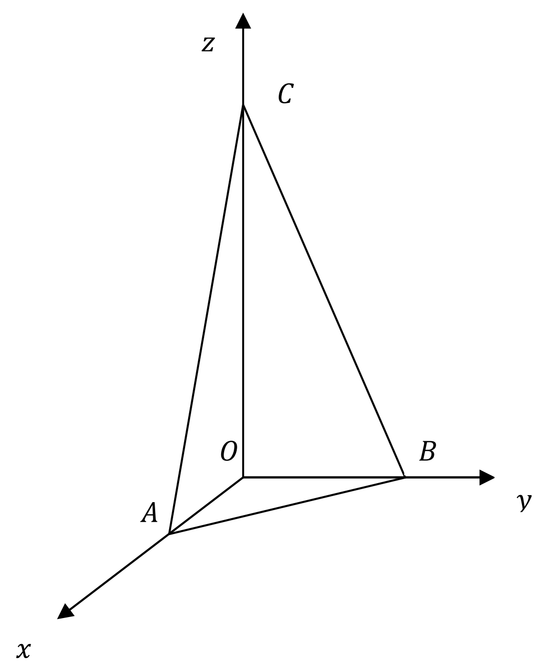
$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$$

ako je V piramida s vrhovima:

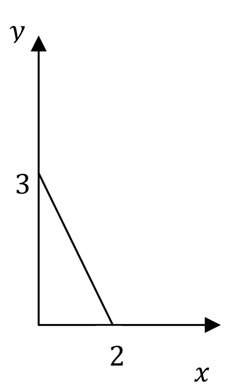
A. $O(0,0,0), A(2,0,0), B(0,3,0), C(0,0,6)$
B. $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,-2,0), C(0,0,3)$
C. $O(0,0,0), A(1,0,1), B(0,1,1), C(0,0,6)$
D. $O(0,0,0), A(1,2,3), B(2,1,3), C(0,0,3)$

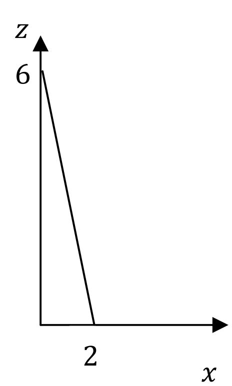
Rješenje:

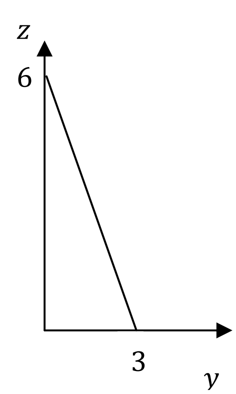
A. Nacrtajmo sliku:



Nacrtajmo projekcije ove piramide u xy, xz i yz koordinatnim sustavima.







Uzmimo da su nam po x granice fiksne. Kao što vidimo, one idu od 0 do 1.

Sad krenimo odrediti granice od y. Njih zapisujemo preko x. Iz slike za xy sustav vidimo da nam je donja granica 0, a gornja granica pravac koji prolazi kroz točke $(0,2)$ i $(3,0)$. Jednadžba tog pravca je $y = -\frac{3}{2}x + 3$.

Za granice od z pogledajmo slike za xz i yz. Vidimo da su ravnine koje prolaze točkama A, O i C, te točkama B, O i C paralelne sa osi z. Znači da trebamo odrediti jednadžbu ravnine koja prolazi točkama A, B i C, jer će nam upravo ona biti gornja granica za z. (Donja granica je naravno ploha $z = 0$.)

Za određivanje ravnine upotrijebit ćemo vektorski produkt.

$$CA^{\rightarrow} \times CB^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} i^{\rightarrow} & j^{\rightarrow} & k^{\rightarrow} \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 18i^{\rightarrow} + 12j^{\rightarrow} + 6k^{\rightarrow}$$

Pa je jednadžba ravnine

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$18(x - 0) + 12(y - 0) + 6(z - 6) = 0$$

$$18x + 12y + 6z - 36 = 0$$

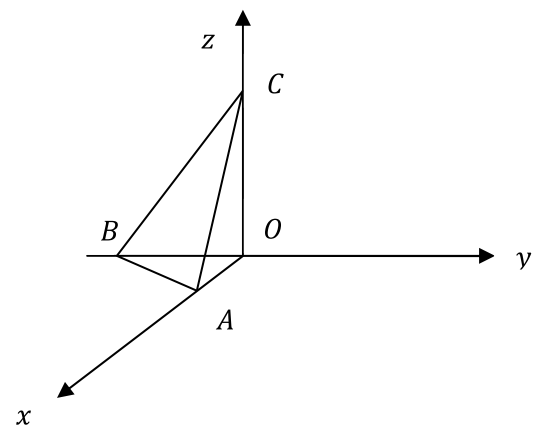
$$z = -3x - 2y + 6$$

gdje smo kao točku (x_0, y_0, z_0) uvrstili točku $C(0,0,6)$.

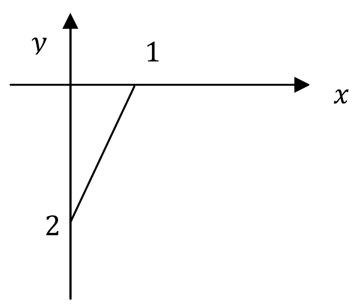
Pa nam je naš integral jednak

$$\int_0^1 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int_0^{6-3x-2y} f(x,y,z)dz$$

B. Nacrtajmo sliku:



Ovaj i sljedeće zadatke ćemo riješiti crtanjem samo xy koordinatnog sustava. Naime, tako ćemo dobiti fiksne granice za x i granice za y, i još će nam samo preostati određivanje granica za z.



Granice za x nam idu od 0 do 1. Gornja granica za y nam je 0. Donja granica je pravac $y = 2x - 2$.

Iz prve slike vidimo da nam je donja granica za z jednaka 0. Gornja granica će biti ravnina koja prolazi točkama A, B i C, (jer smo rekli da su one dvije ravnine paralelne sa osi z i da ih ne gledamo).

$$CA^{\rightarrow} \times CB^{\rightarrow} = \begin{vmatrix} i^{\rightarrow} & j^{\rightarrow} & k^{\rightarrow} \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6i^{\rightarrow} + 3j^{\rightarrow} - 2k^{\rightarrow}$$

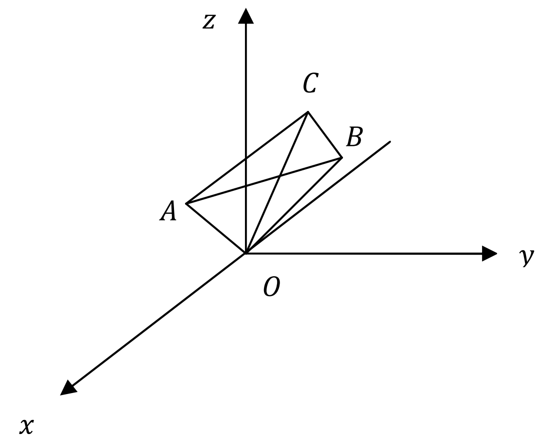
Pa je jednadžba ravnine

$$z = 3 - 3x + \frac{3}{2}y$$

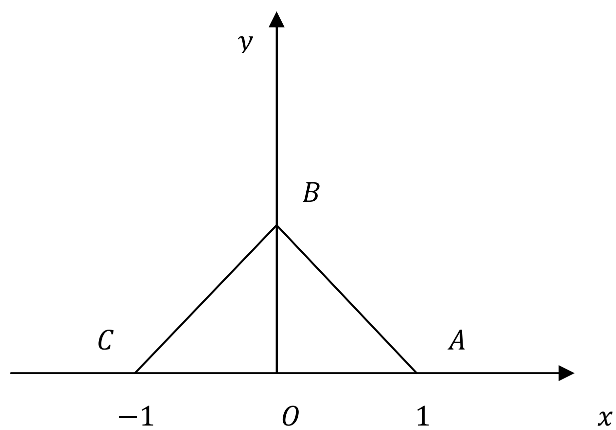
I naš integral je

$$\int_0^1 dx \int_{2x-2}^{0} dy \int_0^{3-3x+\frac{3}{2}y} f(x, y, z)dz$$

C. Nacrtajmo sliku:



Napravit ćemo projekciju u xy sustav da odredimo granice za x i y.

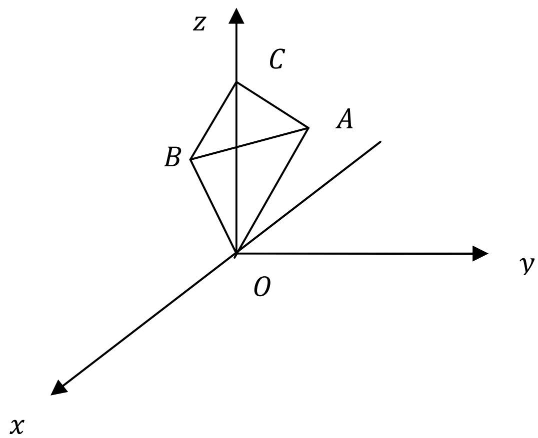


Integral ćemo podijeliti na dva dijela. Lijevi dio ima fiksne granice po x od -1 do 0, a za y je omeđen sa $y = x + 1$ odozgor i sa 0 odozdol. Desni dio nam ima fiksne granice po x od 0 do 1, a za y je omeđen sa $y = -x + 1$ odozgor i sa 0 odozdol.
Još su nam potrebne granice za z. Iz prve slike vidimo da je gornja granica ploha $z = 1$, a donja granica ravnina koja prolazi točkama B, C i O za lijevi integral ($z = y - x$), odnosno A, B i O za desni integral ($x + y$).

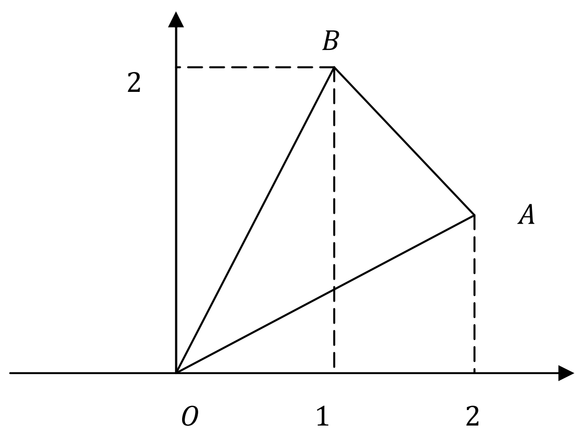
Pa je naše rješenje:

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x+1} dy \int_{y-x}^{1} f(x,y,z)dz + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} dy \int_{x+y}^{1} f(x,y,z)dz$$

D. Nacrtajmo sliku:



Napravit ćemo projekciju u xy sustav da odredimo granice za x i y.



Integral ćemo podijeliti na dva dijela. Lijevi dio ima fiksne granice po x od 0 do 1, a za y je omeđen sa $y = 2x$ odozgor i sa $y = \frac{x}{2}$ odozdol. Desni dio nam ima fiksne granice po x od 1 do 2, a za y je omeđen sa $y = 3 - x$ odozgor i sa $y = \frac{x}{2}$ odozdol.
Još su nam potrebne granice za z. Iz prve slike vidimo da je gornja granica ploha $z = 3$, a donja granica ravnina koja prolazi točkama A, B i O: $z = x + y$ (za obadva integrala).

Pa je naše rješenje:

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \int_{x+y}^{3} f(x,y,z)dz + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} dy \int_{x+y}^{3} f(x,y,z)dz$$