Zadatak 10.

$$\iint\limits_D \ln(x^2+y^2)\,dxdy$$

Mislim da im se potkrala greška u ovom zadatku jer bi trebalo pisat $e^2>=$, a ne $e^2<=$...

$$e^2 \geq x^2+y^2 \leq e^4$$

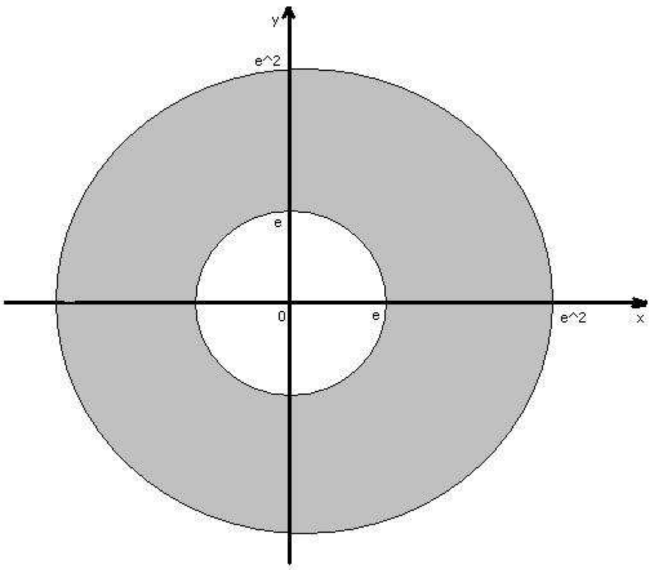
$x=r*\cos\varphi$
$y=r*\sin\varphi$

Uvrstimo x i y u jednadžbu za kružni vijenac te imajući na umu da je $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$ dobivamo:

$$e^2 \geq r^2 \leq e^4$$

$r_1=(+,-)\ e$
$r_2=(+,-)\ e^2$

Zatim uvrstimo x i y u podintegralnu funkciju i dobijemo $\ln(r^2)$.
Pošto je slika grafa identična u svakom kvadrantu, dovoljno je u ovom zadatku izračunati integral od onoga u prvom kvadrantu i pomnožiti ga sa 4.
Kut φ se u prvom kvadrantu proteže od 0 do $\pi/2$.



$$4*\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_e^{e^2} r*\ln(r^2)\,dr = |r^2=t,\ 2*r\,dr=dt,\ rdr=dt/2| = 2\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_e^{e^2} \ln(t)\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} (t*\ln(t)-t)\Big|_e^{e^2} d\varphi = 2\int_0^{\pi/2}((r)*\ln(r^2)-(r^2))\Big|_e^{e^2} d\varphi = 2\int_0^{\pi/2}((e^4)*\ln(e^4)-e^4-(e^2)*\ln(e^2)+(e^2))\,d\varphi=$$

$$=2\int_0^{\pi/2} ((e^4)*4*\ln(e)-e^4-(e^2)*2*\ln(e)+(e^2))\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/2} (3*(e^4)-(e^2))\,d\varphi =$$

$$= 6*(e^4)\int_0^{\pi/2} d\varphi - 2*(e^2)\int_0^{\pi/2} d\varphi = 6*(e^4)\ \varphi\Big|_0^{\pi/2} - 2*(e^2)\ \varphi\Big|_0^{\pi/2} = 6*(e^4)*(\pi/2) - 2*(e^2)*(\pi/2) =$$

$$=3*\pi*(e^4) - \pi*(e^2) = \pi*(e^2)*(3*(e^2) - 1)$$