MAT3 E/R

Mass instrukcije

Fourierov red i integral

10. 10. 2011.

Fourierov red

(1) Za funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da su ortogonalne na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

(2) Izvod koeficijenata Fourierovog reda započinjemo od formule

$$f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) + b_m \sin\left(\frac{2m\pi x}{T}\right) \right]$$

(3) Kažemo da funkcija zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi:
1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,
2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema

(4) Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ vrijedi:
1) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekinuta u točki x,
2) $S(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, ako je x točka prekida za f

(5) Trigonometrijski Fourierov red može se napisati u obliku

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right] = \pm\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega_0 x + \varphi_n)$$

gdje je

$$c_0 = |a_0|, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}$$

c_n je amplituda, a φ_n fazni pomak n-tog harmonika. Niz (c_n) predstavlja (diskretni) amplitudni spektar, a nizovi (a_n) i (b_n) (diskretni) kosinusni, odnosno sinusni spektar funkcije f.

(6) Pretpostavimo da je periodična funkcija f perioda 2π neprekinuta na $\mathbb{R}$ i ima sljedeći Fourierov prikaz

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right]$$

Ako f' zadovoljava Dirichletove uvjete, onda se ona može prikazati u obliku

$$f'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n n \cos(nx) - a_n n \sin(nx) \right]$$

(7) Za Fourierove koeficijente $a_0, a_1, \ldots$ i $b_0, b_1, \ldots$ vrijedi Parsevalova jednakost

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2\, dx$$

1. Izvedite formule za koeficijente a_n i b_n, $n \geq 0$, trigonometrijskog Fourierovog reda zadane funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po trigonometrijskome sustavu

$$\frac{1}{2}, \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right), \ldots, \cos\left(\frac{2n\pi x}{T}\right), \sin\left(\frac{2n\pi x}{T}\right), \ldots$$

gdje je $T = b - a$.

2. Ako su a_n i b_n Fourierovi koeficijenti u razvoju funkcije f s periodom 2π Fourierov red, kako tada glase Fourierovi koeficijenti u razvoju periodičke funkcije $f(x - a)$, $(a \in \mathbb{R},\, a \neq 0)$?

3. Odredite temeljni period funkcije

$$f(x) := A + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos\left(\frac{5n\pi x}{6}\right) + C_n \sin\left(\frac{5n\pi x}{6}\right)\right]$$

4. Provjerite zadovoljavaju li sljedeće funkcije Dirichletove uvjete:
   (a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$, na intervalu $[0, 2]$,
   (b) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, na intervalu $[-1, 1]$

5. Razvijte funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 1 < |x| < 2 \\ \frac{x+1}{2}, & -1 \leq x < 0 \\ \frac{x-1}{2}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

zadanu na intervalu $\langle -2, 2\rangle$ u Fourierov red i skicirajte njegov graf.

6. Razvijte funkciju $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$ zadanu na intervalu $\langle 0, 3\rangle$ u Fourierov red po kosinus funkcijama. Također odredite sumu reda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots$$

te vrijednost $S\left(\sqrt{111}\right)$.

7. Funkcija $f(x) = 1 - x^2$, $x \in \langle 0, 1\rangle$, razvijena je po sinus funkcijama u Fourierov red $S(x)$. Izračunajte $S(5\pi)$. (Red ne treba eksplicitno računati.)

8. Razvij funkciju $f(x) = |x - 1|$ zadanu na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ u Fourierov red.

9. Razvoj funkcije $f(x) = 2$, $x \in \langle 0, 2\rangle$, u Fourierov red po sinus funkcijama je

$$S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n+1)x\right]}{2n+1}$$

Odredi pomoću Parsevalove jednakosti sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

10. Razvoj funkcije $f(x) = \cosh x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$, u Fourierov red je

$$S(x) = \sinh 1 + 2 \sinh 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi x)}{n^2\pi^2 + 1}$$

Odredi razvoj funkcije $f(x) = \sinh x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$, u Fourierov red.

11. Odredite razvoj funkcije $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ u Fourierov red.

Fourierov integral

(1) Integral

$$\tilde{f}(x) := \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]$$

naziva se Fourierov integral funkcije f. Funkcije $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ nazivaju se kosinusni, odnosno sinusni spektar od f.

Ukoliko je funkcija parna, računamo na sljedeći način:

$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\lambda x)dx$$

$$B(\lambda) = 0$$

Ukoliko je funkcija neparna, računamo na sljedeći način:

$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\lambda x)dx$$

$$A(\lambda) = 0$$

Ako funkcija nije ni parna ni neparna, računamo na sljedeći način:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\cos(\lambda x)dx$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(x)\sin(\lambda x)dx$$

(2) Kosinusni i sinusni spektar određuju amplitudni spektar

$$am(\lambda) := \sqrt{A^2(\lambda) + B^2(\lambda)}$$

1. Prikažite pomoću Fourierovog integrala funkciju $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Također odredite amplitudni spektar.

2. Parnu funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 5x, & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{5}{2}, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

prikažite pomoću Fourierovog integrala.

3. Odredite Fourierov integral funkcije $f(x) = \text{sgn}(x)$, $x \in [-1, 1]$ ($f(x) = 0$, $x \notin [-1, 1]$) te pomoću dobivenog prikaza izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x} dx$$