Specijalistički studij

Formule iz Matematike

Mandi Orlić
Tin Perkov

PLOHE DRUGOG REDA

Ploha II. reda je skup točaka u prostoru određen jednadžbom 2. stupnja u koordinatama x, y, z tj.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

gdje su koeficijenti $A, B, C, D, E, F, G, H, J, K \in \mathbf{R}$ i barem jedan od A, B, C, D, E, F različit od 0. Sve se plohe II. reda mogu prikazati u jednom od sljedećih kanonskih oblika:

1. SFERA
   - $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = r^2}$ jednadžba sfere radijusa r sa središtem u ishodištu
   - $\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2}$ jednadžba sfere radijusa r sa središtem u točki $S = (x_0, y_0, z_0)$

2. ELIPSOID

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}}$$

   (sfera je poseban slučaj elipsoida, za $a = b = c$)

3. JEDNOPLOŠNI HIPERBOLOID

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}}$$

4. DVOPLOŠNI HIPERBOLOID

$$\boxed{-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}}$$

5. ELIPTIČKI PARABOLOID

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz\,, \quad p \neq 0}$$

6. HIPERBOLNI PARABOLOID (sedlasta ploha)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz\,, \quad p \neq 0}$$

7. ELIPTIČKI STOŽAC (konus)

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0\,, \quad a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}}$$

8. CILINDRIČNE PLOHE

Cilindrične plohe dobijemo tako da kroz svaku točku ravninske krivulje $F(x, y) = 0$ povučemo pravac paralelan s osi z. Jednadžba cilindrične plohe je $F(x, y) = 0$ (analogno, zamjenom varijabli, dobivamo plohe oblika $F(x, z) = 0$ i $F(y, z) = 0$). Cilindrične plohe II. reda su:

(a) kružni valjak $x^2 + y^2 = r^2$
(b) eliptički valjak $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(c) hiperbolni valjak $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(d) parabolni valjak $y^2 = 2px$

9. ROTACIJSKE PLOHE

Rotacijske plohe dobijemo rotirajući krivulju $z = f(x)$ oko osi z. Jednadžba rotacijske plohe je $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.
Analogno: $x = f(\sqrt{y^2 + z^2})$, $y = f(\sqrt{x^2 + z^2})$
Rotacijske plohe II. reda su posebni slučajevi elipsoida, hiperboloida, eliptičkog paraboloida i konusa, za $a = b$:

(a) rotacijski elipsoid $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
(b) rotacijski jednoplošni hiperboloid $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
(c) rotacijski dvoplošni hiperboloid $\frac{-x^2-y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
(d) rotacijski paraboloid $x^2 + y^2 = 2pz$
(e) rotacijski stožac $\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

FUNKCIJE OD DVIJE REALNE VARIJABLE

PRIRODNA DOMENA

oblik funkcije	uvjet za prirodnu domenu
$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$	$g(x,y) \neq 0$
$\sqrt{f(x,y)}$	$f(x,y) \geqslant 0$
$\ln f(x,y)$	$f(x,y) > 0$
$\arcsin f(x,y)$ $\arccos f(x,y)$	$-1 \leqslant f(x,y) \leqslant 1$

LIMES

Zamjena koordinata (prelazak na polarni koordinatni sustav):

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}$$

Općenitije, točku u kojoj se traži limes možemo shvatiti kao pol koordinatnog sustava:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= a + r\cos\varphi \\ y &= b + r\sin\varphi \end{aligned}} \Rightarrow \boxed{\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(a + r\cos\varphi, b + r\sin\varphi)}$$

U računanju limesa funkcija od dvije varijable možemo koristiti i poznate limese funkcija jedne varijable:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e}$$

PARCIJALNE DERIVACIJE

- Ako je $z = f(x, y)$ eksplicitno zadana funkcija, tada su:

  1. parcijalne derivacije I. reda:

  $$\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{(varijablu } y \text{ smatramo konstantom)}$$
  $$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{(varijablu } x \text{ smatramo konstantom)}$$

  2. parcijalne derivacije II. reda:

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$
  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

- Ako je jednadžbom $F(x, y) = 0$ implicitno zadana funkcija, pri čemu $F(x, y)$ ima parcijalne derivacije u obje varijable i $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, tada vrijedi:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}$$

- Ako je jednadžbom $F(x, y, z) = 0$ implicitno zadana funkcija, pri čemu $F(x, y, z)$ ima parcijalne derivacije u svim varijablama i $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0$, tada vrijedi:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)}$$

TANGENCIJALNA RAVNINA

- Jednadžba tangencijalne ravnine na graf funkcije $z = f(x, y)$ u točki (x_0, y_0, z_0):

$$\boxed{\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) = z - z_0}$$

- Jednadžba tangencijalne ravnine na plohu $F(x, y, z) = 0$ u točki (x_0, y_0, z_0):

$$\boxed{\frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0) = 0}$$

LOKALNI EKSTREMI

Ako funkcija $z = f(x, y)$ u točki $T = (x_0, y_0)$ ima lokalni ekstrem, tada vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0\,.$$

U točkama za koje to vrijedi, računamo:

$$\begin{aligned} A =& \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \\ B =& \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ C =& \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Ako je:

1. $AC - B^2 > 0$, u točki $T = (x_0, y_0)$ postoji lokalni ekstrem i to, ako je:
   (a) $A > 0$, u točki $T = (x_0, y_0)$ je lokalni minimum
   (b) $A < 0$, u točki $T = (x_0, y_0)$ je lokalni maksimum
2. $AC - B^2 < 0$, u točki $T = (x_0, y_0)$ ne postoji lokalni ekstrem
3. $AC - B^2 = 0$, ne možemo dati zaključak o postojanju lokalnog ekstrema u točki $T = (x_0, y_0)$

UVJETNI (VEZANI) EKSTREMI

Dana je funkcija $z = f(x,y)$ uz uvjet $g(x,y) = 0$. Definiramo Lagrangeovu funkciju

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y).$$

Ako je u točki $T(x_0, y_0)$ lokalni uvjetni ekstrem funkcije $z = f(x,y)$ uz uvjet $g(x,y) = 0$, tada vrijedi:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0\,, \quad g(x,y) = 0}$$

U točkama za koje to vrijedi, daljnjim ispitivanjem funkcije (skiciranjem grafa i sl.) utvrđujemo ima li funkcija zaista lokalni uvjetni ekstrem i radi li se o uvjetnom minimumu ili maksimumu.

TAYLOROV I MACLAURINOV RED

Razvoj funkcije $z = f(x,y)$ u Taylorov red u okolini točke (a,b):

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial y}(y-b)\right] + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2\right] + \cdots \end{aligned}$$

Razvoj funkcije $z = f(x,y)$ u McLaurinov red u okolini točke $(0,0)$:

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(0,0) &+ \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}y\right] + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2 + 2\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}xy + \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2\right] + \cdots \end{aligned}$$

VIŠESTRUKI INTEGRALI

DVOSTRUKI INTEGRAL

PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV

$$I = \iint_{D(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Posebni slučajevi:

1. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b\,,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\big\}$

$$I = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

2. $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d\,,\ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\big\}$

$$I = \int\limits_c^d \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Primjena dvostrukih integrala

1. Površina područja $D \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$P = \iint_{D(x,y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. Volumen:

   (a) ispod plohe $z = f(x,y)$:

$$V = \iint_{D(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

   (b) između ploha $z = f_1(x,y)$ i $z = f_2(x,y)$, pod uvjetom da je $f_1(x,y) \geqslant f_2(x,y)$ za sve $(x,y) \in D(x,y)$:

$$V = \iint_{D(x,y)} \big(f_1(x,y) - f_2(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

POLARNI KOORDINATNI SUSTAV

$$\boxed{\begin{array}{lcr} x = r\cos\varphi & \multirow{2}{*}{$\Rightarrow$} & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\sin\varphi & & \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \end{array}}$$

pri čemu je $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$.

Jacobian: $J = r$

$$I = \iint_{D(x,y)} f(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Površina:

$$P = \iint_{D(r,\varphi)} r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

Volumen:

$$V = \iint_{D(r,\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \quad \text{ili} \quad V = \iint_{D(r,\varphi)} (f_1 - f_2)\, r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

TROSTRUKI INTEGRAL

PRAVOKUTNI KOORDINATNI SUSTAV

$$I = \iiint_{\Omega(x,y,z)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\limits_a^b \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y)\mathrm{d}z$$

gdje je

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \leqslant x \leqslant b\,,\ \ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\,,\ \ \psi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \psi_2(x,y)\right\}$$

Volumen područja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$V = \iiint_{\Omega(x,y,z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

CILINDRIČNI KOORDINATNI SUSTAV

$$\boxed{\begin{array}{lcr} x = r\cos\varphi & & r = \sqrt{x^2+y^2} \\ y = r\sin\varphi & \Rightarrow & \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = z & & \end{array}}$$

pri čemu je $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$.

Jacobian: $J = r$

$$I = \iiint_{\Omega(x,y,z)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega(r,\varphi,z)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$$

SFERNI KOORDINATNI SUSTAV

$$\boxed{\begin{array}{lcr} x = r\cos\varphi\sin\vartheta & & r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y = r\sin\varphi\sin\vartheta & \Rightarrow & \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x} \\ z = r\cos\vartheta & & \cos\vartheta = \dfrac{z}{r} \end{array}}$$

pri čemu je $r \geqslant 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$, $\vartheta \in [0, \pi]$.

Jacobian: $J = r^2 \sin\vartheta$

$$I = \iiint_{\Omega(r,\varphi,z)} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta)\, r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\vartheta$$

PRIMJENA VIŠESTRUKIH INTEGRALA U FIZICI

- MASA

  Neka materijalno tijelo T zauzima u prostoru područje Ω, te neka je gustoća mase tijela u točki $(x, y, z) \in \Omega$ jednaka $\rho(x, y, z)$. Tada je masa tijela T:

$$\boxed{m(T) = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

- STATIČKI MOMENTI

  1. Neka tijelo T zauzima područje Ω u prostoru i neka je $\rho(x, y, z)$ gustoća mase tijela T. Statički momenti tijela T u odnosu na ravnine xy, xz i yz su:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{\Omega} z\,\rho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ M_{xz} &= \iiint_{\Omega} y\,\rho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ M_{yz} &= \iiint_{\Omega} x\,\rho(x, y, z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \end{aligned}}$$

  2. Neka tanka ploča T zauzima područje D u ravnini i neka je $\rho(x, y)$ gustoća mase ploče T. Statički momenti ploče T u odnosu na osi x i y su:

$$\boxed{\begin{aligned} M_{x} &= \iint_{D} y\,\rho(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ M_{y} &= \iint_{D} x\,\rho(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

  3. Neka tanki štap T zauzima interval $[a, b]$ na pravcu i neka je $\rho(x)$ gustoća mase štapa T. Statički moment štapa T u odnosu na ishodište:

$$\boxed{M_0 = \int_a^b x\,\rho(x)\ \mathrm{d}x}$$

- TEŽIŠTE

1. Neka tijelo T zauzima područje Ω u prostoru. Težište tijela T je točka S u kojoj je suma svih momenata sila jednaka nuli. Koordinate točke S su:

$$\boxed{x_s = \frac{M_{yz}}{m(T)}\,, \quad y_s = \frac{M_{xz}}{m(T)}\,, \quad z_s = \frac{M_{xy}}{m(T)}}$$

2. Neka tanka ploča T zauzima područje D u ravnini. Težište ploče T je točka S u kojoj je suma svih momenata sila jednaka nuli. Koordinate točke S su:

$$\boxed{x_s = \frac{M_y}{\iint_D \rho(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}\,, \quad y_s = \frac{M_x}{\iint_D \rho(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y}}$$

3. Neka tanki štap T zauzima interval $[a,b]$ na pravcu. Težište štapa T je točka S u kojoj je suma svih momenata sila jednaka nuli. Koordinate točke S su:

$$\boxed{x_s = \frac{M_0}{\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x}\,, \quad y_s = 0}$$

- MOMENT INERCIJE

Neka tijelo T zauzima područje Ω u prostoru i neka je $\rho(x,y,z)$ gustoća mase tijela T i $d(x,y,z)$ udaljenost točke (x,y,z) od osi rotacije, tada je moment inercije I jednak:

$$\boxed{I = \iiint_\Omega (d(x,y,z))^2 \rho(x,y,z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$