MATEMATIKA 3E – TUTORIAL ZA 2. MI

by Vedax/Rock n Rolla

Sadržaj:

1. Dvostruki integral

1.1. Teorija

Riemmanov integral

Ograničena funkcija $f: P \to \mathbb{R}$ je integrabilna u Riemannovom smislu na pravokutniku P ako je

$$I_*(f,P) = I^*(f,P),$$

pri čemu se taj broj zove Riemmanov integral funkcije f na pravokutniku P i označava

$$\iint_P f(x,y)dxdy\,.$$

Računanje dvostrukog integrala

Ako postoji dvostruki integral funkcije $f: D \to \mathbb{R}$ na zatvorenom području

$$D = \{(x, y): a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

gdje su funkcije g i h neprekinute na $[a, b]$, $D \subseteq P = [a, b] \times [c, d]$ i ako postoji integral

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

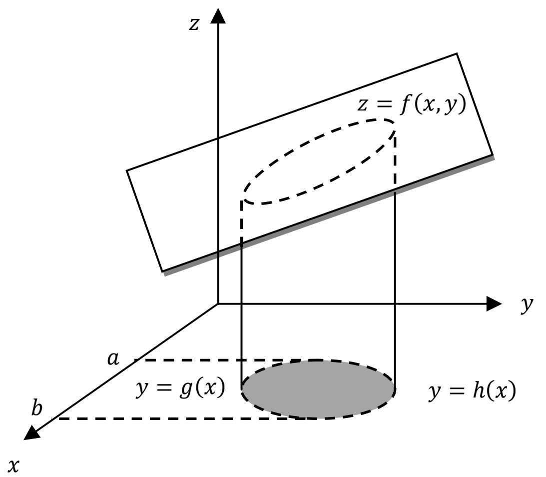
za svaki $x \in [a, b]$ onda je

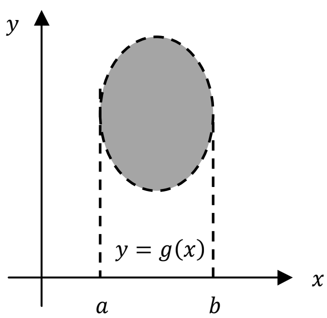
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) dx\,.$$

Dokaz.

Vrijedi:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_P \tilde{f}(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d \tilde{f}(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dx \right) dy\,.$$





Teorem srednje vrijednosti integralnog računa

Neka je funkcija f neprekinuta na zatvorenom području D omeđenom jednostavno zatvorenom krivuljom. Tada postoji točka $(x_0, y_0) \in D$ takva da je

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot \mu(D),$$

pri čemu je $\mu(D)$ površina skupa D.

Dokaz.

Neka je $m = \min_D f(x,y)$ i $M = \max_D f(x,y)$. Onda je

$$m \iint_D dxdy \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \iint_D dxdy$$

Označimo površinu područja D s $\mu(D) = \iint_D dxdy$, gornju nejednakost podijelimo s $\mu(D)$ i dobivamo

$$m \leq \frac{1}{\mu(D)} \iint_D dxdy \leq M.$$

Budući da je funkcija f neprekinuta na zatvorenom skupu D, onda poprima sve vrijednosti između minimuma m i maksimuma M, što znači da postoji neka točka $(x_0, y_0) \in D$ takva da je vrijednost funkcije jednaka broju

$$\frac{1}{\mu(D)} \iint_D dxdy$$

koji se nalazi između m i M. Prema tome, vrijedi

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{\mu(D)} \iint_D f(x,y)dxdy\,.$$

1.2. Zadaci

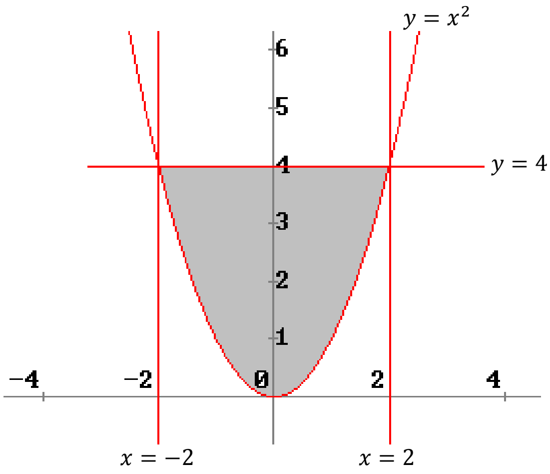
1.2.1. Postavljanje granica i promjena poretka granica

Granice u dvostrukom integralu obično postavljamo ovisno o tome kako nam je u zadatku zadano čime je omeđeno područje integracije D. Uz zadatke iz dvostrukih, ali i iz trostrukih integrala uvijek je lijepo imati skicu koja će olakšati samo rješavanje.

Krenimo s primjerima!

Primjer 1. Postavite granice integracije u dvostrukom integralu $\iint_D f(x,y)dxdy$, ako je područje D omeđeno pravcima $x=-2$, $x=2$, $y=4$ i parabolom $y=x^2$.

Nacrtajmo najprije sliku.



Granice se mogu postaviti u dva poretka.

<u>1. poredak – fiksne granice po x:</u>

Fiksne granice znače konkretni brojevi. Iz slike vidimo da nam x ide od $x=-2$ pa do $x=2$. Na tom intervalu granice za y su $y=x^2$, kao donja, i $y=4$ kao gornja granica. Donju, odnosno gornju granicu gledamo u smjeru kretanja osi. Prema tome, integral bi u ovome poretku izgledao kao:

$$\int_{-2}^{2} dx \int_{x^2}^{4} f(x,y)dy.$$

2. poredak – fiksne granice po y:

Iz slike vidimo da nam y ide od minimalno 0 pa do maksimalno 4. Na tom intervalu, x je omeđen s donje strane lijevom stranom parabole, a s gornje strane s desnom stranom parabole. Kada uzimamo fiksne granice po y, onda za njega uzimamo granice od 0 do 4. Za x moramo parabolu prikazati preko y.

$$x = \pm\sqrt{y}$$

Negativan predznak je donja, a pozitivan predznak je gornja granica za x.

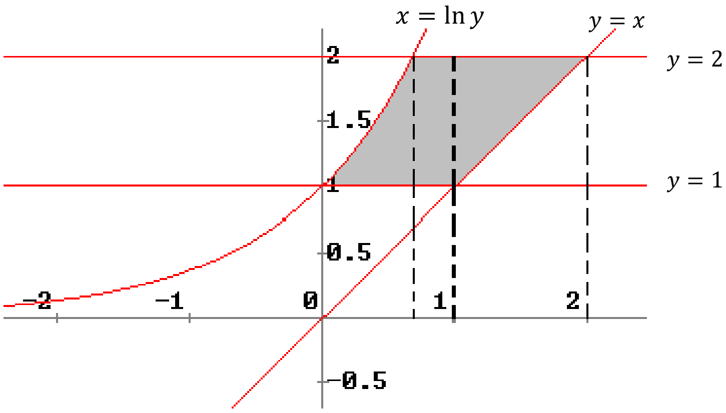
U ovom slučaju nam integralu izgleda ovako:

$$\int_{0}^{4} dx \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dy.$$

Primjer 2. Promijenite poredak integracije u integralu

$$\int_{1}^{2} dy \int_{\ln y}^{y} f(x,y)dx.$$

Najprije nacrtajmo sliku prema zadanim granicama:



Naš početni integral zadan je u fiksnim granicama po y. Kada uzimamo fiksne granice po x, vidimo da x ide od minimalno 0 do maksimalno 2. Očito je da u tom intervalu nećemo moći „potrpati“ sve granice za y. Stoga ćemo naš integral podijeliti na tri dijela (kao što je prikazano na slici pomoću isprekidanih crta).

Pronađimo sjecišta ovih pravaca i krivulje. Iz $y = 2$ i $x = \ln y$, dobivamo da je $x = \ln 2$. U fiksnim granicama po x od 0 do $\ln 2$, y nam je s donje strane omeđen sa 1, a s gornje strane s krivuljom $y = e^x$ (što smo dobili iz $x = \ln y$).

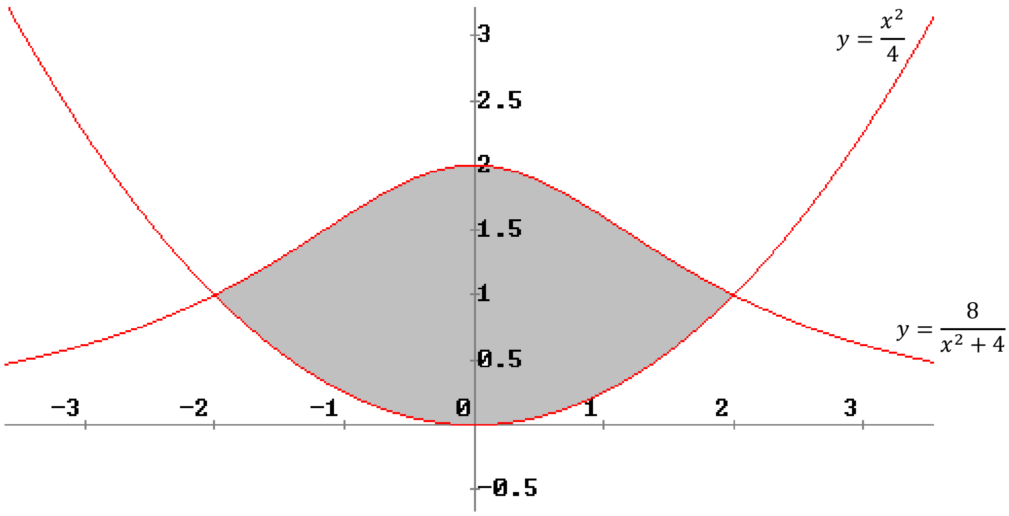
Zatim, od $\ln 2$ pa do 1, y je omeđen s donje strane sa 1, a s gornje sa 2. I konačno, kada x ide od 1 do 2, y je s donje strane omeđen sa $y = x$ a s gornje sa 2. I naš integral je u fiksnim granicama po x jednak:

$$\int_0^{\ln 2} dx \int_1^{e^x} f(x,y)dy + \int_{\ln 2}^{1} dx \int_1^{2} f(x,y)dy + \int_1^{2} dx \int_x^{2} f(x,y)dy$$

Primjer 3. Izračunajte površinu lika omeđenog krivuljama $y = \frac{x^2}{4}$ i $y = \frac{8}{x^2+4}$.

Kada računamo površinu lika omeđenog nekim krivuljama, podintegralna funkcija jednaka je 1.

Nacrtajmo sliku.



Najprije odredimo sjecišta ovih dviju krivulja. Izjednačavanjem izraza $y = \frac{x^2}{4}$ i $y = \frac{8}{x^2+4}$ dobivamo jednadžbu $\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4}$, odnosno $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$. Riješimo tu bikvadratnu jednadžbu supstitucijom $x^2 = t$.

$$t^2 + 4t - 32 = 0$$

$$t_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+32} = -2 \pm 6$$

Uzimamo samo pozitivno rješenje $t = 4$, iz čega dobivamo da su koordinate apscise sjecišta $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$.

Za rješavanje ovog integrala uzet ćemo fiksne granice po x, od -2 do 2. U tom intervalu, granice za y su $\frac{x^2}{4}$ (donja granica) i $\frac{8}{x^2+4}$ (gornja granica). Pa je površina našeg lika jednaka:

$$P = \int_{-2}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}}^{\frac{8}{x^2+4}} dy = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \cdots = 2\pi - \frac{4}{3}$$

1.2.2. Zamjena varijabli u dvostrukom integralu. Jacobijan

Prelaskom na nove varijable, ili zamjenom varijabli, možemo sebi znatno olakšati rješavanje integrala. Prelaskom na nove varijable mijenjamo:
a) granice integracije,
b) podintegralnu funkciju i
c) područje integracije.

U zadatku nam obično zadaju koju zamjenu da upotrijebimo, tako da neće biti problem mijenjanje granica ni mijenjanje podintegralne funkcije. Jedina stvar koju treba znati jest promjena područja integracije. Početna površina po kojoj integriramo razlikovat će se za određeni faktor od površine po kojo ćemo integrirat nakon zamjene varijabli. Taj faktor naziva se *Jacobijanova determinanta* ili *Jacobijan*. Recimo da su nam zadali sljedeće: $u = 2x - y$ i $v = -x + 2y$. Naše početne varijable x i y, postat će ovisne o novim varijablama, u i v. Znači, za funkcije $x = x(u, v)$ i $y = y(u, v)$, Jacobijan se definira jednakošću:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix}$$

U našem slučaju, iz zadanih jednadžbi dobijemo da je $x = \frac{1}{3}(2u + v)$ i $y = \frac{1}{3}(u + 2v)$. Jacobijan je:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

U općem slučaju, dešava se sljedeće. Neka je D početno područje integracije, a D' područje integracije nakon prelaska na nove varijable. Po definiciji je:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} |J| \cdot f\big(x(u,v), y(u,v)\big)dudv$$

Primjer 4. Izračunajte

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2dxdy,$$

pri čemu je D kvadrat omeđen pravcima $x+y=1$, $x+y=$, $x-y=-1$ i $x-y=1$.
Naputak. Uvedite nove varijable $u=x+y$ i $v=x-y$.

Kao što vidimo, u zadatku nam je zadano koju zamjenu varijabli napraviti. Najprije uočimo da iz zadanih pravaca možemo odrediti koje će biti nove granice integracije. Za u će to biti od 1 do 3, a za v od -1 do 1.

Podintegralna funkcija nam postaje: $(x+y)^3(x-y)^2 = u^3v^2$.

I još samo da odredimo Jacobijan. Iz zadane promjene varijable možemo dobiti x i y.

$$x = \frac{u+v}{2}$$

$$y = \frac{u-v}{2}$$

Pa je Jacobijan jednak:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

I naš integral je jednak:

$$\int_1^3 du \int_{-1}^1 |J|u^3v^2dv = \frac{1}{4}\int_1^3 u^3du \int_{-1}^1 v^2dv = \cdots = \frac{20}{3}$$

1.2.3. Polarne koordinate. Crtanje u polarnim koordinatama

Prelaskom na polarne koordinate dešava se ista stvar kao i kod zamjene varijabli. Moramo odrediti nove granice integracije, novu podintegralnu funkciju i Jacobijan.

Polarne koordinate definiraju se na sljedeći način:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Jacobijan je jednak:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r(\cos\varphi)^2 + r(\sin\varphi)^2 = r$$

Polarne koordinate obično koristimo kada nam je područje integracije i podintegralna funkcija kružnica, odnosno elipsa (tad se nazivaju eliptičkim koordinatama; takovi zadaci se kod nas najčešće pojavljuju).

Kod elipse ćemo imati samo malo razliku, a ta je što ćemo kod x, odnosno y množiti $r\cos\varphi$ sa a, odnosno $r\sin\varphi$ sa b pa će nam Jacobijan biti abr.

*Kada tražimo a i b, jednažbu elipse zapišemo si u obliku $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Inače, r je radij-vektor, i on nikada ne smije biti negativan! (Duljina nikad nije negativna!)

U općem slučaju, dešava se sljedeće. Neka je D početno područje integracije, a D' područje integracije nakon prelaska na nove varijable. Po definiciji je:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} |J| \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi = \iint_{D'} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi$$

odnosno kod elipse

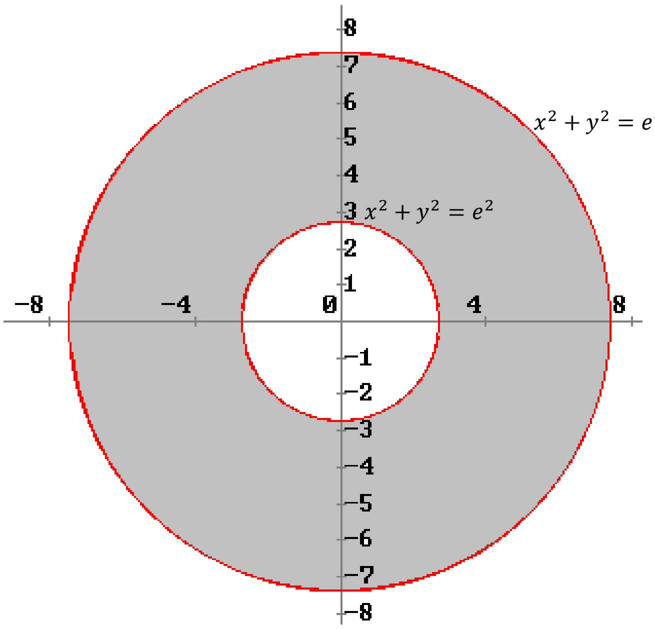
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D'} abr \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)drd\varphi$$

Primjer 5. Izračunajte

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2)dxdy,$$

pri čemu je D kružni vijenac $e^2 \leq x^2 + y^2 \leq e^4$, gdje je e baza prirodnog logaritma.

Nacrtajmo najprije sliku.



Iz slike, ali i iz podintegralne funkcije, vidimo da bi bilo najlakše prijeći na polarne koordinate:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Jacobijan je jednak r. Uvrstimo li u jednadžbe zadanih krivulja poalrne koordinate dobijemo:

$$r^2 = e^2 \rightarrow r = e$$
$$r^2 = e^4 \rightarrow r = e^2$$

Granice za r su od e pa do e^2.

S obzirom da imamo kružni vijenac, kut φ je puni kut i ide od o do 2π.

Podintegralna funkcija jednaka je $\ln r^2$.

Naš integral je sada jednak:

$$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{e}^{e^2} r \ln r^2 \, dr = \left| r^2 = t \quad rdr = \frac{dt}{2} \quad e^2 \leftrightarrow e^4 \right| = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{e^2}^{e^4} \ln t \, dt =$$

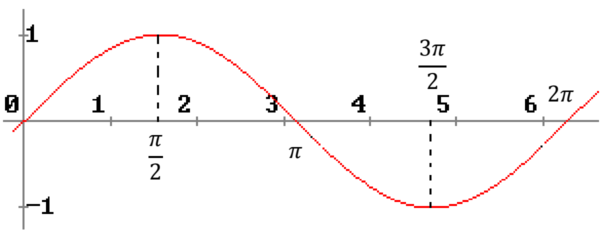
$$= \left| \begin{matrix} u = \ln t & dv = dt \\ du = \dfrac{dt}{t} & v = t \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} \left(t \ln t \Big|_{e^2}^{e^4} - \int_{e^2}^{e^4} dt \right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} (4e^4 - 2e^2 - e^4 + e^2) d\varphi = \pi(3e^4 - e^2)$$

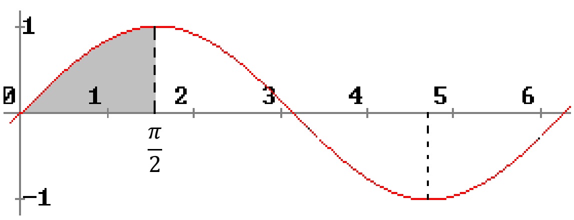
Što se tiče crtanja u polarnim koordinatama, prikazat ćemo to na sljedećem primjeru.

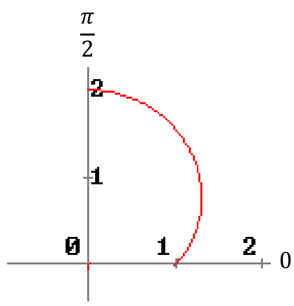
Primjer 6. Nacrtajte kardioidu $r = 1 + \sin\varphi$.

Kada crtate u polarnim koordinatama, uvijek si nacrtajte onu trigonometrijsku funkciju koja vam je zadana na početku (u našem slučaju sinus).

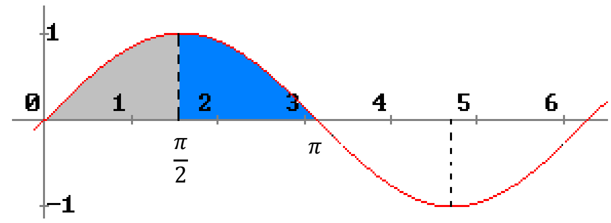


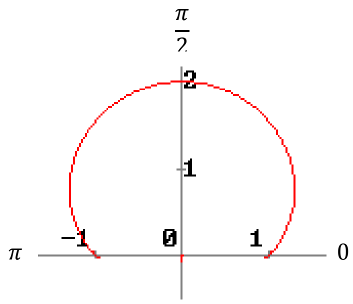
Najprije gledamo kako se sinus ponaša u intervalu $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Za vrijednost 0, $\sin\varphi = 0$, pa je $r = 1$. Kada se krećemo od 0 prema $\frac{\pi}{2}$, vidimo da vrijednost sinusa raste sa 0 prema 1. To znači i da će se duljina radij-vektora povećavati sve do 2, to jest kada je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, duljina radij-vektora bit će upravo $r = 1 + \sin\varphi = 1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$.



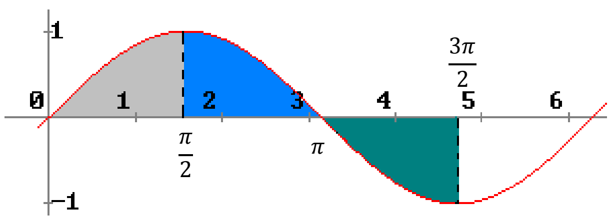


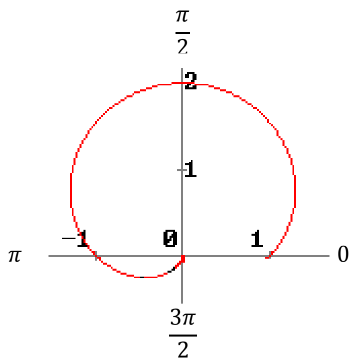
Zatim, na intervalu $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, vrijednsot sinusa pada sa 1 do 0, odnosno, duljina radij-vektora se smanjuje sa 2 na 1.



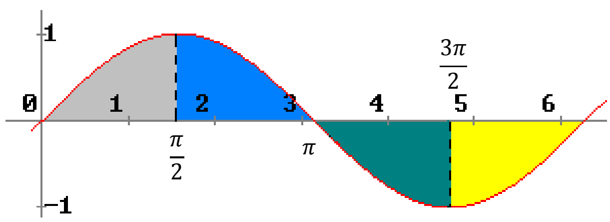


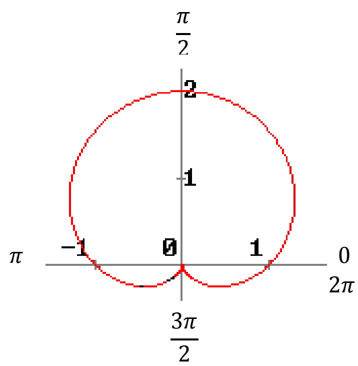
Nadalje, na intervalu $\varphi \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, sinus nam se smanjuje od vrijednosti 0 do vrijednosti -1. Znači, i duljina radij-vektora će se smanjiti sa 1 pa do 0. Odnosno, pod kutem π duljina radij-vektora je $r = 1$, a pod kutem $\frac{3\pi}{2}$ je $r = 1 + \sin\varphi = 1 + \sin\frac{3\pi}{2} = 1 - 1 = 0$.



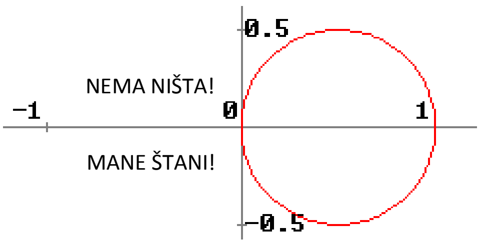


I konačno, na intervalu $\varphi \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, sinus raste sa vrijednosti -1 do vrijednosti 0, pa nam se i radij vektor produljava od 0 pa do 1, to jest pod kutem 2π jednak je 1.





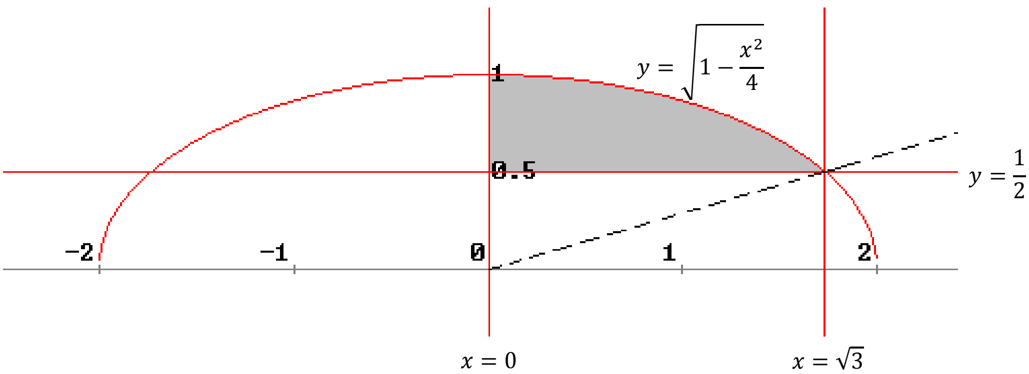
Napomena!!! Da smo imali zadano nacrtati $r = \cos\varphi$, na intervalu od $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ne bismo crtali ništa jer bi u tom slučaju duljina radij-vektora bila negativna (a već smo prije napomenuli da je ona uvijek pozitivna).



Primjer 7. Prijelazom na eliptičke koordinate izračunajte

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} \frac{dy}{\left(\frac{x^2}{4}+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

U zadanom integralu fiksne granice po x su od 0 do $\sqrt{3}$, a y je omeđen sa $\frac{1}{2}$ i $\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$. Nacrtajmo sliku.



Uočimo da nam je podintegralna funkcija elipsa, a područje integracije je jednim dijelom omeđeno elipsom. Znači, ovdje će nam najlakše bit prijeći na eliptičke koordinate:

$$x = 2r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

Jacobijan nam je u ovom slučaju $2r$. Iz slike vidimo da će nam kut φ ići od sjecišta između $x = \sqrt{3}$ i $y = \frac{1}{2}$, pa do $\frac{\pi}{2}$. Uvrstimo te dvije točke u eliptičke koordinate da izračunamo φ:

$$\sqrt{3} = 2r\cos\varphi$$
$$\frac{1}{2} = r\sin\varphi$$

pa kad te dvije jednadžbe podijelimo dobijemo da je $\operatorname{ctg}\varphi = \sqrt{3}$, pa je $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

r nam ide od jednadžbe pravca $y = \frac{1}{2}$, što je u eliptičkim koordinatama $r = \frac{1}{2\sin\varphi}$, pa do jednadžbe elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, što je u eliptičkim koordinatama jednako $r^2 = 1$, odnosno $r = 1$.

Naša podintegralna funkcija je $\frac{1}{(r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^3}$.

I konačno, integral je jednak:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} 2r\frac{dr}{r^3} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{2\sin\varphi}}^{1} \frac{dr}{r^2} = 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^{-1}}{-1}\right) d\varphi = -2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin\varphi) d\varphi =$$

$$= -2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\varphi \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2\pi}{3} + 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

2. Trostruki integral

2.1. Teorija

Teorem srednje vrijednosti za trostruki integral

Neka je funkcija f neprekinuta na zatvorenom području V omeđenom plohom bez samopresijecanja. Tada postoji točka $(x_0, y_0, z_0) \in V$ takva da je

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \mu(V),$$

pri čemu je $\mu(V)$ volumen skupa V.

Gornju formulu možemo pisati i kao

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \iiint_V dV$$

Fizikalno značenje tog teorema je da je masa tijela V jednaka volumena tijela pomnoženom gustoćom u nekoj točki tog tijela.

2.2. Zadaci

2.2.1. Postavljanje granica

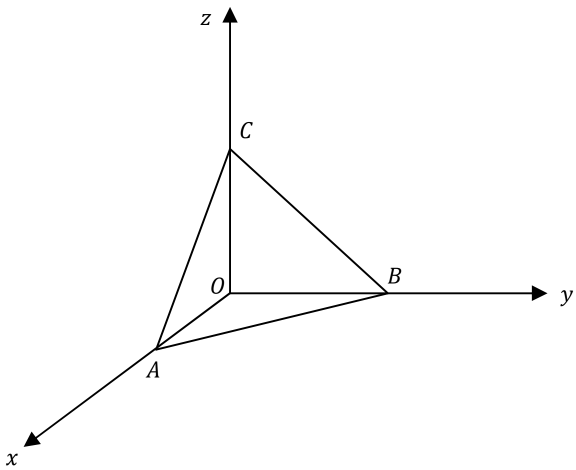
Kod postavljanja granica, jedina razlika u odnosu na dvostruki integral bit će ta što moramo još odrediti i granice za treću varijablu (obično je to varijabla z).
Na jednom primjeru ilustrirat ću kako odrediti granice za trostruki integral (koristit ću primjer sličan onima koji su se pojavljivali na dosadašnjim međuispitima).

Primjer 8. Izračunajmo integral

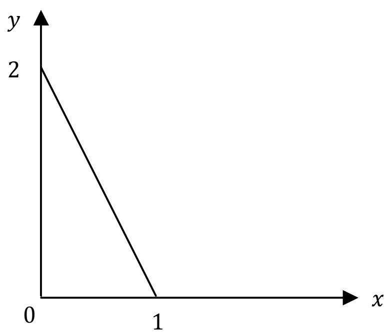
$$\iiint_V (x + y + z)dxdydz\ ,$$

pri čemu je V tetraedar s vrhovima $O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0)$ i $C(0,0,1)$.

Najprije nacrtajmo tetraedar.



Kada određujemo granice, najlakše nam je projicirati sliku na xy ravninu kako bismo odredili granice za x i y.



Iz slike vidimo da nam x ide od 0 do 1. U tim granicama nam je y s donje strane omeđen sa 0, a s gornje s pravcem koji prolazi kroz točke (1,0) i (0,2). Njegova jednadžba je $y = 2 - 2x$. I još nam samo ostaje odrediti granice za z. Iz prve slike je vidljivo (bode u oči), da nam je donja granica za z zapravo ravnina $z = 0$. Što se tiče gornje granice, uvijek odabirete onu ravninu koja nije paralelna sa osi z (ili možda jednostavnije rečeno, koja je nagnuta za neki kut prema osi z). U ovom slučaju je to ravnina koja prolazi točkama A, B i C.

Jednadžba ravnine je

$$A_0(x-x_0)+B_0(y-y_0)+C_0(z-z_0)=0$$

gdje su A_0 , B_0 i C_0 koeficijenti iz vektora normale ravnine, $T(x_0,y_0,z_0)$a Njega ćemo u ovim slučajevima računati kao vektorski produkt vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$. Vektorski produkt jest:

$$\vec{n}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ (x_c-x_A) & (y_c-y_A) & (z_c-z_A)\\ (x_c-x_B) & (y_c-y_B) & (y_c-y_B)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$$

Iz vektora normale očitamo: $A_0=1$, $B_0=1$ i $C_0=1$. Kao točku ravnine uzmimo recimo $A(1,0,0)$.

Pa je jednadžba ravnine:

$$(x-1)+(y-0)+1(z-0)=0$$

odnosno $z=1-x-y$.

I naš integral je jednak:

$$\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dy=\cdots=\frac{1}{8}$$

2.2.2. Cilindrične koordinate. Sferne koordinate

Cilindrične koordinate su dosta slične polarnim koordinatama. Stvar je ista, samo što imamo i treću varijablu z koju zapisujemo kao samu sebe:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

Jacobijan je r.

Cilindrične koordinate obično koristimo kada nam je područje integracije i podintegralna funkcija rotacijski paraboloid, stožac, valjkasta ploha i plohe takovih oblika (ak me razmete).

U općenitom slučaju, cilindrične koordinate prikazujemo kao (ako nam npr. imamo eliptički stožac/valjak(paraboloid i sl.):

$$x = ar\cos\varphi$$
$$y = br\sin\varphi$$
$$z = z$$

Jacobijan je abr.

Što se tiče sfernih kordinata, njih obično koristimo kada nam je područje integacije i podintegralna funkcija sfera ili elispoid. Sferne koordinate su:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\theta$$

Jacobijan je $r^2\sin\theta$.

U općenitom slučaju (npr. kod elipsoida), sferne koordinate su:

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi$$
$$y = br\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = cr\cos\theta$$

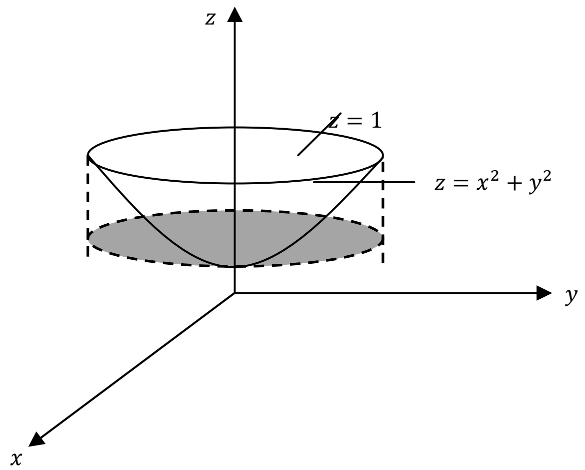
Jacobijan je $abcr^2\sin\theta$.

Primjer 9. Izračunajmo integral

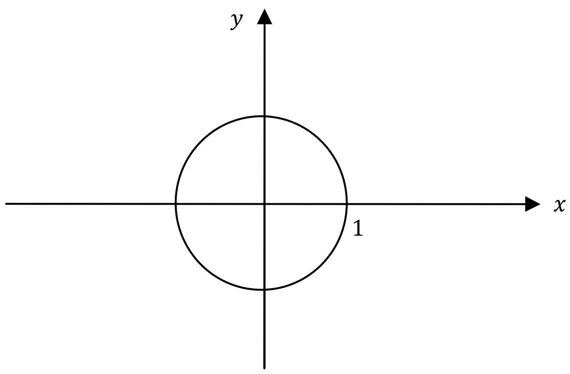
$$\iiint_V zdxdydz$$

pri čemu je V omeđen rotacijskim paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i ravninom $z = 1$.

Nacrtajmo sliku.



Zbog oblika područja integracije, najlakše je prijeći na cilindrične koordinate. Također, kada projiciramo tijelo na xy ravninu, moći ćemo odrediti granice za r i za φ.



Vidimo da je φ puni kut, pa su granice za njega od 0 do 2π. r nam ide od o pa do jednadžbe rotacijskog paraboloida, $z = r^2$ (u cilindričnim koordinatama). Također, z nam ide maksimalno do 1, pa će gornja granica za r biti 1.

Za z nam je donja granica rotacijski paraboloid, $z = r^2$, a gornja granica je $z = 1$.

Jacobijan je r, podintegralna funkcija se ne mijenja. Integral je jednak:

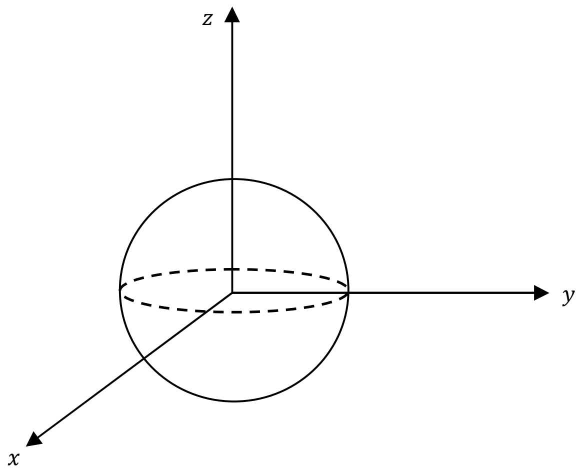
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 rdr \int_{r^2}^1 zdz = \cdots = \frac{\pi}{3}$$

Primjer 10. Izračunajmo integral

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$$

gdje je V kugla $x^2+y^2+z^2 \leq R$.

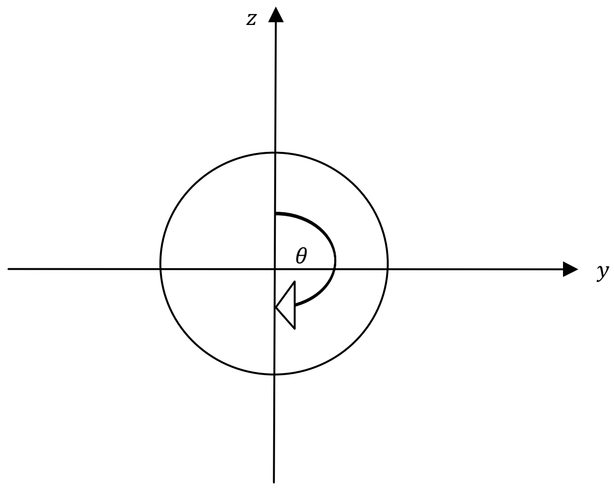
Nacrtajmo sliku.



Zbog oblika područja integracije, i podintegralne funkcije, najlakše je prijeći na sferne koordinate. Jacobijan je jednak $r^2 \sin\theta$, a podintegralna funkcija je $\sqrt{r^2} = r$.

Ovdje, kao i kod cilindričnih koordinata, za određivanje granica za r i za φ, projiciramo tijelo na xy ravninu (ovdje to nećemo napraviti jer je očito da φ ide od 0 do 2π, a r od 0 pa do jednadžbe sfere, odnosno do R).

Za određivanje granica za θ, projicirajmo tijelo na yz. Inače, što se tiče θ, ona uvijek poprima vrijednosti između 0 i π, a mjeri se od z (tamo je $\theta = 0$).

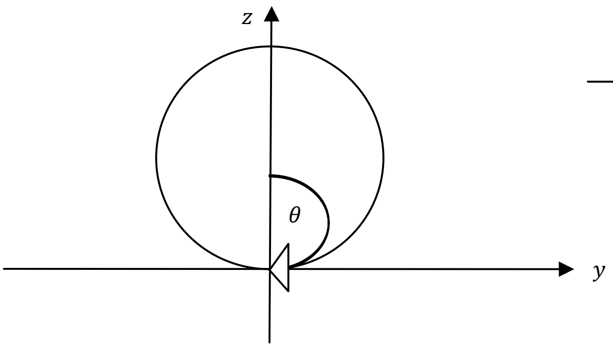


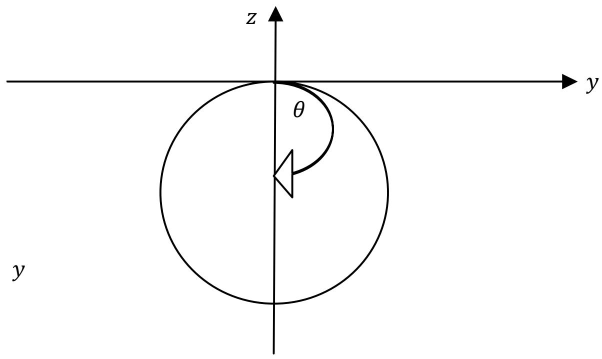
Vidimo da u našem slučaju θ ide od 0 do π.

Pa je integral jednak:

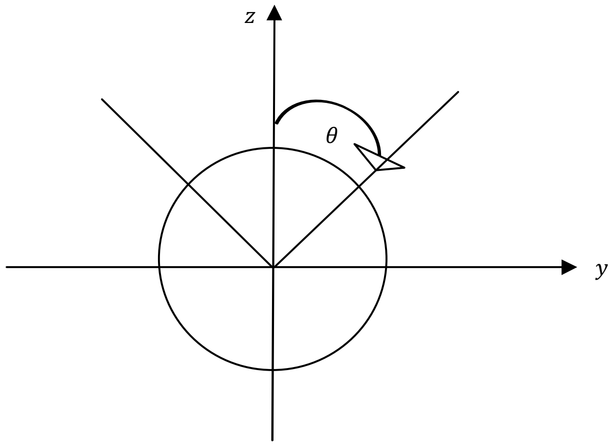
$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{R} r^3 dr = \cdots = R^4\pi$$

Inače, možda će najteže biti određivanje θ u ovakvim zadacima. Pa evo par primjera određivanja θ.





Na slici lijevo, θ ide od 0 do $\frac{\pi}{2}$, a na slici desno od $\frac{\pi}{2}$ do π.



Na slici iznad prikazano je presjecite između rotacijskog paraboloida $z = x^2 + y^2$ i sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. U ovom slučaju θ ide od 0 do $\frac{\pi}{4}$.

Inače, ako imate neki drugačiji slučaj, uvijek koristite pomaknute sferne koordinate tako da si tijelo dovede u onaj položaj u kojem vam je najlakše očitati θ.

3. Vektorske funkcije skalarnog argumenta

3.1. Teorija

Limes vektorske funkcije

Neka je $\vec{r}(t) = f_1(t)\vec{\imath} + f_2(t)\vec{\jmath} + f_3(t)\vec{k}$ i $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k}$. Tada je $\vec{a} = lim_{t\to t_0} \vec{r}(t)$ onda i samo onda ako je

$$a_1 = lim_{t\to t_0} f_1(t), a_2 = lim_{t\to t_0} f_2(t), a_3 = lim_{t\to t_0} f_3(t).$$

Dokaz. Vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lim_{t\to t_0} \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + (f_3(t) - a_3)^2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(a_1 = \lim_{t\to t_0} f_1(t), a_2 = \lim_{t\to t_0} f_2(t), a_3 = \lim_{t\to t_0} f_3(t)\right)$$

Derivacija vektorske funkcije

Za vektorsku funkciju $\vec{r}(t)$ kažemo da je derivabilna u točki t ako postoji vektor

$$\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}.$$

Taj vektor nazivamo derivacija vektorske funkcije $\vec{r}(t)$ u točki t i označavamo s $\vec{r}\,'(t)$.

Dokažimo da se derivacija vektorske funkcije $\vec{r}(t)=f_1(t)\vec{\imath}+f_2(t)\vec{\jmath}+f_3(t)\vec{k}$ može računati pomoću derivacija njezinih komponenti, tj. da vrijedi:

$$\vec{r}\,'(t)=f_1{}'(t)\vec{\imath}+f_2{}'(t)\vec{\jmath}+f_3{}'(t)\vec{k}$$

Dokaz.

$$\vec{r}\,'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{r}(t+h)-\vec{r}(t)}{h}=$$

$$=\left(\lim_{h\to 0}\frac{f_1(t)(t+h)-f_1(t)(t)}{h}\right)\vec{\imath}+\left(\lim_{h\to 0}\frac{f_2(t)(t+h)-f_1(t)(t)}{h}\right)\vec{\jmath}+\left(\lim_{h\to 0}\frac{f_3(t)(t+h)-f_1(t)(t)}{h}\right)\vec{k}$$

a to je upravo $f_1{}'(t)\vec{\imath}+f_2{}'(t)\vec{\jmath}+f_3{}'(t)\vec{k}$.

3.2. Zadaci

Što se tiče zadataka, obično se pojavi računanje vektora smjera tangente, računanje derivacije vektora, parametrizacija krivulje (ali i još neke stvari vezane uz vektore, pa bi bilo lijepo da ponovite što je skalarni produkt vektora i slične stvari).

Idemo najprije jedan zadatak sa derivacijom.

Primjer 11. Izračunajte vektorsku derivaciju funkcije $\vec{f}(t)=e^t\vec{\imath}+\ln t\,\vec{\jmath}+\operatorname{tg} t\,\vec{k}$ u točki za koju je $t=\pi$.

$$\vec{f}\,'(t)=e^t\vec{\imath}+\frac{1}{t}\vec{\jmath}+\frac{1}{\cos^2 x}\vec{k}$$

$$\vec{f}\,'(\pi)=e^\pi\vec{\imath}+\frac{1}{\pi}\vec{\jmath}+\vec{k}$$

Primjer 12. Odredite vektor smjera tangente i tangentu na krivulju $\vec{r}(t) = t\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + 2t^3\vec{k}$ u točki za koju je $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

Vektor smjera tangente je

$$\vec{r}'\left(t_0 = \frac{\pi}{2}\right) = \vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + 6t^2\vec{k} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \frac{3\pi^2}{2}\vec{k}$$

Tangenta je

$$\vec{r}(u) = \vec{r}'(t_0) + \vec{r}(t_0)\cdot u = \left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \frac{3\pi^2}{2}\vec{k}\right) + \left(\frac{\pi}{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \frac{\pi^3}{4}\right)\cdot u$$

Primjer 13. Parametrizirajte krivulju $(x-1)^2 + y^2 = 1$ tako da bude orijentirana suprotno od gibanja kazaljke na satu.

$$x - 1 = \cos t$$
$$y = \sin t$$

gdje je $t \in [0,2\pi]$.

Uzmemo da je $t = 0$, pa imamo da je $x = 2$ i $y = 0$. Zatim uzmemo da je $t = \frac{\pi}{2}$, pa dobijemo da je $x = 1$ i $y = 1$. Kada to nacrtamo, vidimo da kako povećavamo t gibamo se od točke (2,0) prema točki (1,1). To je gibanje suprotno od gibanja kazaljke na satu pa vidimo da smo napravili dobru parametrizaciju.

Eto, to bi bilo to od mene. Sretno na 2. međusipitu!