Zadatci 1.3

Vektorska analiza

By:all3n

Zadatak 1. Parametrizirajte ravnininske krivulje

a) y^2=x-1 parametrizirano: x=1+t^2
   y(t)=t y(t)=t, $t\epsilon R$
   t^2=x-1 x=1+t^2

b) $4x^2+9y^2=36y$
   Ovo je elipsa,samo treba malo preoblikovati ovo,uz kraći račun se dobije

   $4x^2+9(y-2)^2=36/:36$

   $\frac{x^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$

   sada slijedi parametrizacija :

   x(t)=3$\cos t$
   y-2=2 $\sin t$,odnosno y(t)=2+2$\sin t$,t$\in [0,2\pi]$

c) r=1+$\cos\varphi$
   parametrizirano:

   x(t)=r$\cos t$=(1+$\cos t$)$\cos t$
   y(t)=r$\sin t$=(1+$\cos t$)$\sin t$,t$\in R$

Zadatak 2. Parametrizirajte prostorne krivulje

a) $A(1,4,-2)$,$B(3,9,6)$

   Sada koristimo kanonsku jednadžbu pravca

   $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}=t$,pri čemu ćemo uzet $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$

Nakon što uvrstimo točke dobije se

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{5}=\frac{z+2}{8}=t$,i iz ovoga samo izrazimo x,y,z i to je to:

x(t)=2t+1

y(t)=5t+4

z(t)=8t-2,t$\in [0,1]$,ovaj t se dobije lako umjesto x(t) uvrstite x_1,pa onda x_2.Dobiju se dvije lagane jednazbe: 1=2t+1, t=0

3=2t+1,t=1,dakle t može ići između ove dvije vrijednosti,pišemo t$\in$ $[0,1]$

b) $y=x^2$

$z=1-x-y$

Paramteriziramo:

x=t

$y=t^2$

$z=1-t-t^2$,t≥ 0

c) $x^2+y^2+z^2=4$

$z^2=x^2+y^2$, u prvom kvadrantu

Uvrstimo $z^2=x^2+y^2$ u prvu jednadžbu,dobije se:

$2x^2+2y^2=4$ /:4 $\quad \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$

sada izvršimo parametrizaciju:

x(t)=$\sqrt{2}\cos t$

y(t)=$\sqrt{2}\sin t$

z=$+\sqrt{2}$,ovo se dobije sa se x(t) i y(t) uvrste u $z^2=x^2+y^2$,dobiju se 2 rješenja,z=$\pm\sqrt{2}$,ali se uzima +,jer se traži prvi kvadrant,dakle i t$\in$ $[0,\frac{\pi}{2}]$,jer je to kut u prvome kvadrantu.

Zadatak 3. Limes vektorske funkcije

a) **r**(t)=$3(t^2-1)\vec{\imath}+\cos t\,\vec{\jmath}+\frac{1}{1-t}\vec{k}$

$\lim\limits_{t\to 0} 3(t^2-1)\vec{\imath}+\cos t\,\vec{\jmath}+\frac{1}{1-t}\vec{k}$,samo ubacimo 0 umjesto t i dobije se:

$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}+\vec{k}$,pri čemu je samo trebalo znati da je $\cos 0=1$☺

b) **r**(t)=$\cos(t+\pi)\vec{\imath}+\sin(t+\pi)\,\vec{\jmath}+e^{-t^2}\vec{k}$

$\lim\limits_{t\to 0}\cos(t+\pi)\vec{\imath}+\sin(t+\pi)\,\vec{\jmath}+e^{-t^2}\vec{k}$

Dakle uvrstimo t=0

$\lim_{t\to 0}\cos(\pi)\vec{\imath}+\sin(\pi)\,\vec{\jmath}+e^{0}\vec{k}$, rješenje samo ispada ☺

$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=-\vec{\imath}+\vec{k}$

c) **r**(t)=$\frac{\sin 2t}{t}\vec{\imath}+e^{2t}\vec{\jmath}+\frac{t^2}{e^t}\vec{k}$,naravno uvrstimo t=0,jedino kod sinusa moram napraviti malu preinaku

r(t)=2 $\frac{\sin 2t}{2t}\vec{\imath}+e^{2t}\vec{\jmath}+\frac{t^2}{e^t}\vec{k}$,pri čemu je $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$

konačno rješenje glasi:

$\lim_{t\to 0}\vec{r}(t)=2\vec{\imath}+\vec{\jmath}$

Zadatak 4. Deriviranje

Ne budem ovo pisao,valjda znamo derivirat.☺

Zadatak 5. Odredit vektor smjera tangente i jednadžbu tangente

a)**r**(t)=$3t^2\vec{\imath}+(1-t)\vec{\jmath}-(1+t^2)\vec{k},\ T(3,2,-2)$,trebamo odredit t,najlakše je da uzmemo y komponentu od T i izjednačimo s onim uz $\vec{\jmath}$,dakle 1-t=2,slijedi ta je t=-1.

Deriviramo **r**(t) i ubacimo t=-1.Dobijemo :

s(t)=$-6\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k}$

opći oblik je t(u)=r(t)+us(t),samo ubacimo podatke koje imamo i to je to.

t(u)=$3\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}+u(-6\vec{\imath}-\vec{\jmath}+2\vec{k})$

b)da nepišem sve,postupak je isti kao i kod ovoga gore,dakle t=2.

s(t)=$\pi\vec{\jmath}+\vec{k}$

r(t)=$\vec{\imath}+2\vec{k}$

t(u)= $\vec{\imath}+2\vec{k}+u(\pi\vec{\jmath}+\vec{k})$

c)$x^2+y^2=x$, x+z=3 $T(1,0,2)$

Prvo nam je zadana kružnica. Nju sada treba svesti na ''normalan'' oblik,dobije se:

$(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

x-$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos t$,y=$\frac{1}{2}\sin t$

z=3-x,odnosno z=$\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sin t$

r(t)= $(\frac{1}{2}\cos t$+$\frac{1}{2})\vec{\imath} + \frac{1}{2}\sin t\,\vec{\jmath} + (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sin t)\vec{k}$

s(t)=$\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)\vec{\imath} + \frac{1}{2}\cos t\,\vec{\jmath} + \frac{1}{2}\sin t\,\vec{k}$

Derivirati znamo, u ovom slucaju t=0.Dobijemo recimo da 0 =$\frac{1}{2}\sin t$.Nakon sto deriviramo i ubacimo t=0,dobije se **s**=$\frac{1}{2}\vec{\jmath}$,a **r**=$\vec{\imath} + 2\vec{k}$.

t(u)=$\vec{\imath} + 2\vec{k} + u\frac{1}{2}\vec{\jmath}$

Edit:ovaj zadatak ima krivo rješenje u zbirci,pa valjda je ovo točno ☺

Zadatak 6.

r(t)=$t\vec{\imath} + (1+t^2)\vec{\jmath}$

r'(t)=$\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$

a)okomiti

Da bi vektori bili okomiti mora biti ispunjeno $\vec{a}\vec{b} = 0$.To ćemo i napraviti,uvrstimo vektorsku funkciju i njenu derivaciju.

$(t\vec{\imath} + (1+t^2)\vec{\jmath})(\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})$=0,množimo ovo ali tako da $\vec{\imath}$ komponentu množimo sa drugom $\vec{\imath}$ komponentom.

$t + 2t(1+t^2) = 0$,riješimo ovo laganini.

$t = 0$

$\cancel{t^2 = \frac{-3}{2}}$

Uvrstimo t=0 u vektorsku funkciju **r**(t)=$0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath}$,odakle je očigledno da je $T(0,1)$

b)imaju isti smjer

ovdje je t=1.ubacimo u funkciju i dobije se $T(1,2)$

c)imaju suprotan smjer,t=-1 ubacimo u funkciju $T(-1,2)$

Zadatak 7.

Traži se jednadžba tangente koja je paralelna s pravcem koji nam je zadan kanonski. Ako je paralelna,imamo dva slučaju t=1,t=-1.Da bi odredili tangentu moramo derivirati **r**(t).Derivacija iznosi:

r'(t)=$\frac{-2}{\sqrt[3]{t^2}}\vec{\imath}+3t^2\vec{\jmath}-\frac{1}{t^2}\vec{k}$. Ubacite samo ovaj t=1 i t=-1 u derivaciju i u funkciju. I dobiju se dvije tangente i to je to. ☺

Napišete u onom lijepom obliku

$t(u)=r(t)+ur'(t)$

Zadatak 8.

Ako se dvije funkcije sijeku, njihove točke gdje se sijeku pronađemo tako da ih izjenačimo i rješimo jednadžbu. Pošto je ovo vektorska funkcija izjednačit ćemo ono što je uz $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$.

Napravimo traženo dobije se :

$e^t=u$

$2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=2$

$t^2-2=u^2-3$

Moramo odrediti t ili u,najlakše nam je iz druge jednadžbe to napraviti.

$2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=2$ /:2

$\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=1$,sada rastavimo ovaj sinus po formuli

$\sin t\cos\frac{\pi}{2}+\cos t\sin\frac{\pi}{2}=1$

$\cos t=1, t=0$ u=1

Za t=0

r₁(t)=$\vec{\imath}+2\vec{\jmath}-2\vec{k}$

očito je iz ovoga da je točka $T(1,2,-2)$,točka u kojoj se sijeku krivulje. Kut pod kojim se krivulje sijeku računamo kao:

$cos\varphi=\frac{1+2-2}{\sqrt{1+2+2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ ili nakon racionalizacije $\frac{\sqrt{5}}{5}$

Zadatak 9. Strujnice vektorskih polja

a)$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{-y}$,potrebno je samo ovo integrirati i dobije se y=$\frac{C}{x}$

b)$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=dz$

$dz=\frac{dx}{x}, dz=\frac{dy}{y}$.Integrirati ovo i izraziti x te y.

Sada treba odrediti konstante,napravit ću za C_1,a za C_2 je isti postupak. Iz zadane točke ubacimo x,z komponente u prvu jednadžbu i dobije se vrijednost C_1.

x=C_1e^z 1=C_1*0 C_1=1

x=e^z. Isto sve se napravi za y i dobije se y=2e^z.

Bilo kakve pogreške i netočna rješenja javiti na PM.HVALA!!!☺