

**Završni ispit iz MATEMATIKE 3E, 03.02.2015.**

1. **(5 bodova)** Postavite granice integracije u integralu

$$\iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

pri čemu je  $V$  piramida s vrhovima  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(3, 1, 0)$ ,  $B(1, 3, 0)$  i  $C(0, 0, 4)$ .

2. **(6 bodova)**

(a) Definirajte usmjerenu derivaciju glatkog vektorskog polja  $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  u smjeru jediničnog vektora  $\vec{s}$ .

(b) Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja

$$\vec{f}(x, y, z) = xy\vec{i} - xz^2\vec{j} + z^3\vec{k}$$

u točki  $T(1, 1, 1)$  u smjeru vektora  $\vec{s}$  pri čemu je  $\vec{s}$  jedinični vektor u smjeru najbržeg rasta funkcije  $\varphi(x, y, z) = xyz$  u točki  $T(1, 1, 1)$ .

3. **(6 bodova)**

(a) Definirajte rotaciju i divergenciju glatkog vektorskog polja  $\vec{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(b) Izračunajte  $\nabla [\nabla \times (3(\vec{a} \cdot \vec{r})\vec{r}) + 3\vec{r}]$  ako je  $\vec{r}$  radij vektor, a  $\vec{a}$  konstantan vektor.

4. **(6 bodova)** Izračunajte

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \, ds$$

pri čemu je  $\Gamma$  krivulja zadana jednačbom  $x^2 + y^2 = Cx$ , a  $C > 0$ .

5. **(5 bodova)** Izračunajte

$$\iint_S \frac{y \, dS}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$$

ako je  $S$  omeđeni dio plohe  $z = x^2 + y^2$  odsječene ravninom  $z = 2y + 3$ .

6. **(6 bodova)**

(a) Iskažite teorem o divergenciji.

(b) Koristeći teorem o divergenciji izračunajte

$$\iiint_S x^3 \, dy \, dz + \frac{y^3}{4} \, dx \, dz + \frac{3z^3}{4} \, dx \, dy$$

ako je  $S$  vanjska strana elipsoida  $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{3}{4}z^2 = 1$ .

OKRENITE!

7. (6 bodova)

(a) Iskažite Stokesov teorem.

(b) Primjenom Stokesovog teorema izračunajte tok vektorskog polja

$$\vec{v}(x, y, z) = \text{rot}(xz^2\vec{i} + x\vec{j} + y^3\vec{k})$$

kroz dio plašta stošca

$$(z - 3)^2 = 3(x + 1)^2 + 4y^2$$

za koji je  $0 \leq z \leq 3$  i koji je orijentiran tako da normala na plohu zatvara šiljasti kut s pozitivnim dijelom  $z$ -osi. Skicirajte zadanu plohu!

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire, pribor za pisanje i službeni podsjetnik.