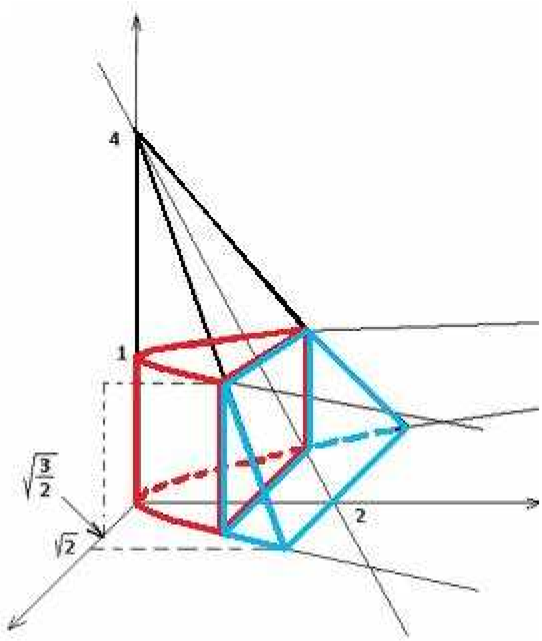
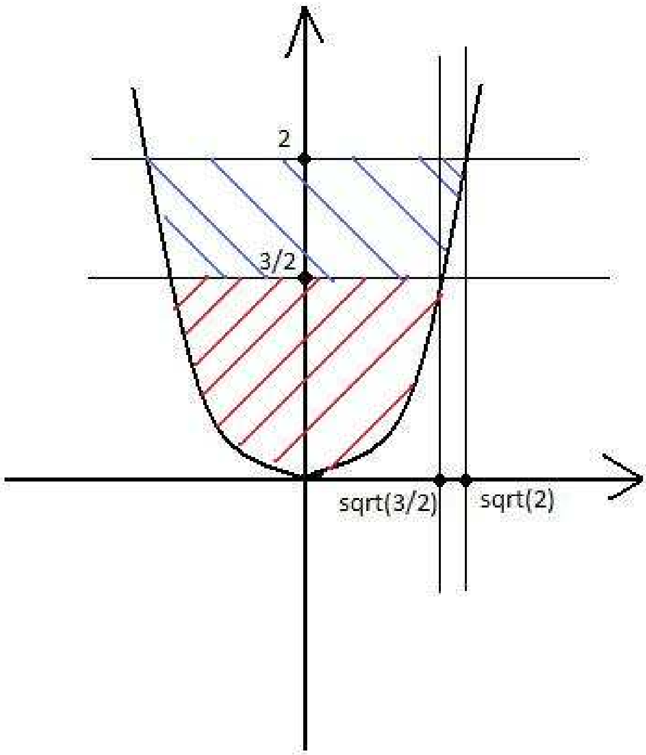
Dopuna, MAT3E – Dvostruki integrali, 1.5. Zadaci za vježbu

~Wolfman

9. Izračunajte volumen tijela određenog nejednadžbama y>=x^2, z<=1, z<=4-2y i z>=0. Nacrtajte sliku!



Na slici se vidi traženo tijelo. Ja sam ga podijelio na 2 manja tijela, crveno i plavo. Nad crvenim tijelom nalazi se ploha z=1, a nad plavim, ploha z=4-2y. Područja integracije se vide na slici 2:



Iz danih slika lako se napišu integralčići :D

$$CRVENO = 2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}\left(\int_{x^2}^{3/2} dy\right)dx\right)$$

$$PLAVO = 2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}\left(\int_{3/2}^{2}(4-2y)\,dy\right)dx\right) + 2\left(\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2}^{2}(4-2y)\,dy\right)dx\right)$$

Malo pojašnjenje. Za crveno je ja mislim jasno: x ide od 0 do sqrt(3/2), a y od parabole y=x^2 do 3/2. Napomena: u ovom slučaju je ploha z=1, pa zato ide samo dy! Također, ta ploha je simetrična iznad lijeve i desne strane područja integracije, pa je zato legalno uzeti x od 0 do sqrt(3/2) i integral pomnožiti s 2. U općenitom slučaju treba uzeti x od – sqrt(3/2) do +sqrt(3/2), jer ne mora biti ploha iznad simetrična, pa ni volumeni jednaki iznad lijeve i desne strane područja integracije.

Za plavo je ploha iznad z=4-2y, pa to stavljamo kao funkciju koja se integrira. Imamo 2 integrala zbog takvog područja integracije. Ako pogledate sliku 2, interval za x od 0 do sqrt(2) sam podijelio na 2 intervala: od 0 do sqrt(3/2) i od sqrt(3/2) do sqrt(2), jer na prvom intervalu y ima fiksne granice (od 3/2 do 2), a na drugom ide od parabole y=x^2 do 2. To se jasno vidi u granicama integrala.

CRVENO:

$$2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}\left(\int_{x^2}^{3/2} dy\right)dx\right) = 2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}\left(\frac{3}{2} - \mathrm{x}^2\right)dx\right) =$$

$$2\left(\frac{3}{2}x - \frac{x^3}{3}\right) \textit{ ne znam napisat one vražje granice ali idu od 0 do } \sqrt{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{\frac{3}{2}}$$

PLAVO:

$$2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}\left(\int_{3/2}^{2}(4-2y)\,dy\right)dx\right) + 2\left(\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2}^{2}(4-2y)\,dy\right)dx\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}(4y-2y^2)\;[granice\ od y = \frac{3}{2} do\ y = 2]\,dx\right)$$

$$+ 2\left(\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}(4y-2y^2)[granice\ od\ y = x^2 do\ y = 2]\,dx\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{\sqrt{3/2}}\left(8-4-(6-\frac{9}{4})\right)\,dx\right) + 2\left(\int_{\sqrt{3/2}}^{\sqrt{2}}(8-4-4x^2-2x^4)\,dx\right)$$

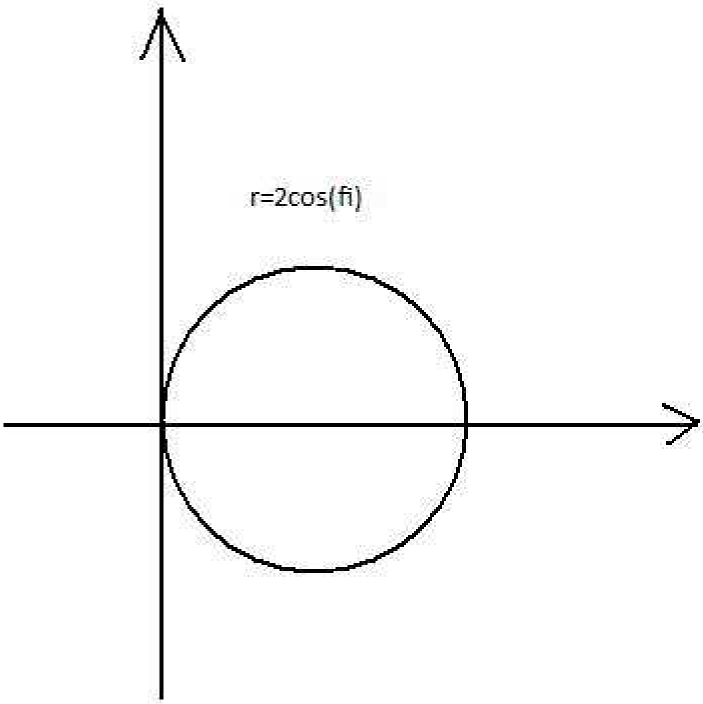
$$= \frac{2}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\left(4x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{5}\right)\left[granice\ od\ \sqrt{\frac{3}{2}}\ do\ \sqrt{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + 2\left(\frac{32\sqrt{2}}{15} - \frac{49\sqrt{\frac{3}{2}}}{20}\right) = \frac{64}{15}\sqrt{2} - \frac{22}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

V=CRVENO + PLAVO=$2\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{64}{15}\sqrt{2}-\frac{22}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{64}{15}\sqrt{2}-\frac{12}{5}\sqrt{\frac{3}{2}}$

12. Izračunajte površinu lika određenog nejednadžbama:

A) r<=2cos(fi)

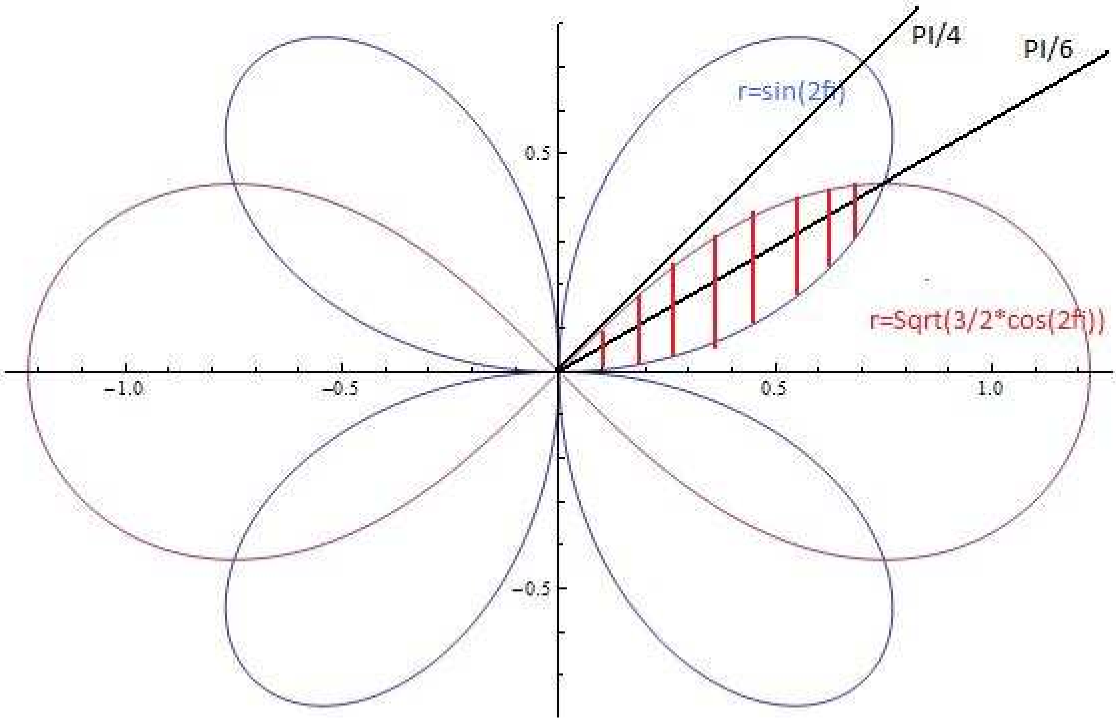


$$D=\iint rdrd\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_{0}^{2cos\varphi}rdr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2cos\varphi)^2}{2}d\varphi=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1+cos2\varphi)\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+cos2\varphi)\,d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}cos2\varphi\,d\varphi$$

$$=\pi$$

B) r<=sin(2fi) i r^2<=3/2*cos(2fi)



Računam površinu lika označenog na slici (crveno iscrtano). Tražena površina je to puta 4.

Prvo nađemo na kojoj zraci leži točka u kojoj se sijeku naše krivulje zadane u polarnim koordinatama.

$$r = \sin(2\varphi)\ i\ r = \sqrt{\frac{3}{2}\cos(2\varphi)}$$
$$\sin^2 2\varphi = \frac{3}{2}\cos(2\varphi)$$
$$1 - \cos^2 2\varphi - \frac{3}{2}\cos(2\varphi) = 0$$
$$t = \cos(2\varphi)$$
$$t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 => t = \frac{1}{2}\ i\ t = -2, negativno\ ne\ može\ biti$$
$$\cos(2\varphi) = \frac{1}{2} => 2\varphi = \frac{\pi}{3} => \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Zraka na kojoj je točka u kojoj je r=0 za krivulju r^2<=3/2*cos(2fi):

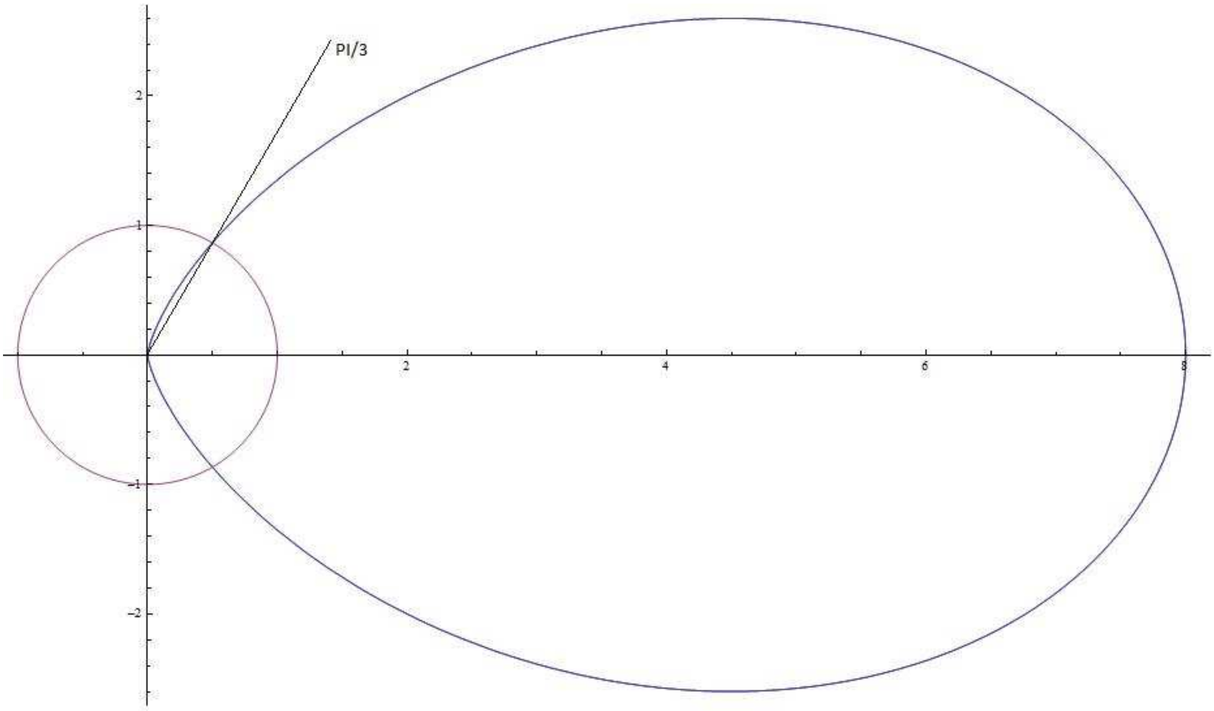
$$0 = \frac{3}{2}\cos(2\varphi) => \cos(2\varphi) = 0 => 2\varphi = \frac{\pi}{2} => \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Možemo pisati:

$$\frac{P}{4}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\varphi\int_0^{\sin(2\varphi)}rdr+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}\cos(2\varphi)}}rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2 2\varphi\,d\varphi+\frac{3}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(2\varphi)\,d\varphi$$

$$=\cdots=\frac{\pi}{24}+\frac{3}{8}-\frac{7\sqrt{3}}{16}=>P=\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{8}$$

C) (x^2+y^2)^2<=8x^3 i x^2+y^2<=1



Prijelazom u polarne koordinate naše krivulje postaju:

$$(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi)^2=8r^3\cos^3\varphi$$
$$r^4=8r^3\cos^3\varphi=>r=8\cos^3\varphi$$

Druga krivulja je naravno kružnica r=1 ☺

Nađimo zraku na kojoj leži točka u kojoj se kružnica i krivulja sijeku. Uvrstimo r=1 u drugu krivulju:

$$1=8\cos^3\varphi=>cos\varphi=\frac{1}{2}=>\varphi=\frac{\pi}{3}$$

Računamo površinu koja je zajednička kružnici i krivulji. Ja ću računati pola te površine (gornja polovica) i onda to sve pomnožiti s dva. Svoju površinu dijelim na dva dijela: od zrake fi=0 do zrake fi=PI/3 integriram po kružnici, a od zrake PI/3 do PI/2 po drugoj krivulji:

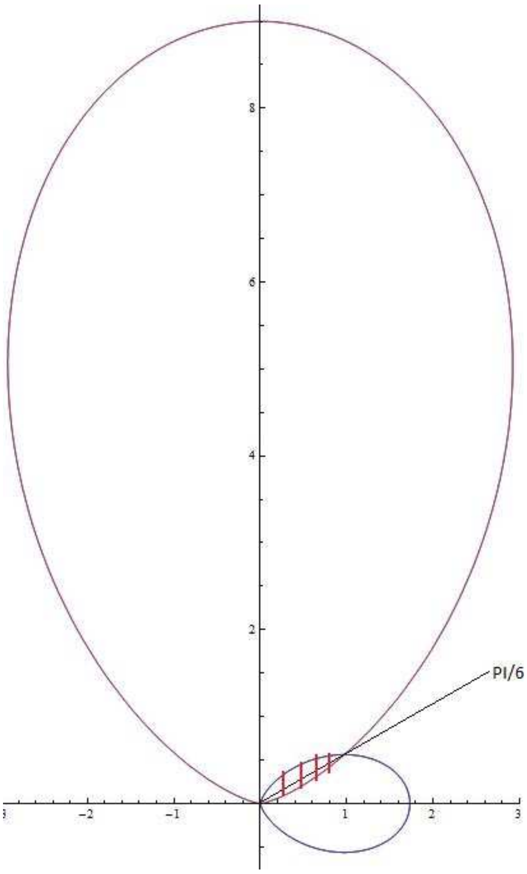
$$\frac{P}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_0^1 rdr+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{8\cos^3\varphi} rdr=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\varphi+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}64\cos^6\varphi\, d\varphi=\cdots$$

$$=\frac{\pi}{6}-3\sqrt{3}+\frac{5\pi}{3}=\frac{11\pi}{6}-3\sqrt{3}$$

$$=>P=\frac{11\pi}{3}-6\sqrt{3}$$

Onaj integral cos^6(fi) mi se naravno nije dalo pisati, ali „lako" (ali mukotrpno) se da riješit upotrebom razno raznih trigonometrijskih formula, ili ako želite možete izvesti i rekurzivnu formulu i tako :D Ali to ostavljam vama ☺

14. Izračunajte $\iint\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pri čemu je područje integracije određeno nejednadžbama (x^2+y^2)^2<=Sqrt(3)x^3 i (x^2+y^2)^2<=9y^3



Prijelazom na polarne koordinate dobivamo krivulje:

$$r=\sqrt{3}\cos^3\varphi\;\; i\; r=9\sin^3\varphi$$

Izjednačavanjem dobivamo zraku fi na kojoj leži točka u kojoj se krivulje sijeku:

$$\sqrt{3}\cos^3\varphi=9\sin^3\varphi$$

$$tg^3\varphi=\frac{\sqrt{3}}{9}=>\;\varphi=\frac{\pi}{6}$$

Funkcija $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ je u polarnim koordinatama $f(r,\varphi)=\frac{1}{r}$

Dakle, integral je:

I=$\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_0^{9\sin^3\varphi} \frac{1}{r} r dr + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}\cos^3\varphi} \frac{1}{r} r dr = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3\varphi \, d\varphi + \sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \, d\varphi = \cdots =$
$6-\frac{19\sqrt{3}}{6}$