Prva školska zadaća iz Matematike 3E i 3R

Grupe E1, E3, R1, R3

12.10.2006.

Grupa A

1. (**3 boda**) Ako su a_n i b_n Fourierovi koeficijenti u razvoju periodične funkcije f s periodom 2π u Fourierov red, kako tada glase Fourierovi koeficijenti u razvoju periodičke funckije $f(x-a)$, za neki realni broj $a \neq 0$.

2. (**4 boda**) Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} |\sin(\pi x)|, & x \in [-1,1], \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{1}$$

prikažite pomoću Fourierovog integrala. Odredite joj amplitudni spektar.

3. (**3 boda**) a) Odredite Laplaceov transformat funkcije $f(t) = \text{sh}\ 2t \cdot \cos 3t$.
b) Odredite original funkcije $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$.

Prva školska zadaća iz Matematike 3E i 3R

Grupe E1, E3, R1, R3

12.10.2006.

Grupa B

1.(**3 boda**)Funkcija $f(x) = 1 - x^2$, $x \in \langle 0, 1\rangle$ razvijena je po sinus funkcijama u Fourierov red $S(x)$. Skicirajte graf tog reda $S(x)$, $x \in \mathbb{R}$, te izračunajte $S(5\pi)$ (red ne treba izračunati eksplicitno).

2.(**4 boda**) Funkciju $f(x) = 1 - |x|$ definiranu na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ razvijte u Fourierov red. Primjenom Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \ldots$.

3.(**3 boda**) Odredite Laplaceove transformate sljedećih funkcija:
a) $t \cdot e^t \cdot \text{sh}\, t$
b) $\cos t \cdot g_{[0,\pi]}(t)$.

Rješenja prve školske zadaće iz Matematike 3E i 3R

Grupe E1, E3, R1, R3

12.10.2006.

Grupa A

1.(3 boda) $A_n = a_n \cos na - b_n \sin na$, $B_n = a_n \sin na + b_n \cos na$

2.(4 boda) $A(\lambda) = \frac{2(\cos\lambda+1)}{\pi^2-\lambda^2}$, $\lambda \neq \pi$, $f(x) = \int_0^\infty \frac{2(\cos\lambda+1)}{\pi^2-\lambda^2}\cos(\lambda x)d\lambda$, $am(\lambda) = |A(\lambda)| = 2|\frac{\cos\lambda+1}{\pi^2-\lambda^2}|, \lambda \neq \pi, am(\pi) = 0$

3.(3 boda)
a) (1 bod) $F(s) = \frac{s-2}{2((s-2)^2+9)} - \frac{s+2}{2((s+2)^2+9)}$
b) (2 boda) $f(t) = (1-\cos t)u(t)$

Rješenje prve školske zadaće iz Matematike 3E i 3R

Grupe E1, E3, R1, R3

12.10.2006.

Grupa B

1. (3 boda) $S(5\pi) = (5\pi - 16)^2 - 1$

2. (4 boda) parna funkcija, $b_n = 0$, $a_n = \frac{-2(\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2}$, $f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{4\cos(2n+1)\pi x}{\pi^2(2n+1)^2}$, $1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{96}$

3. (3 boda)
a) (1 bod) $F(s) = \frac{1}{2(s-2)^2} - \frac{1}{2s^2}$
b) (2 boda) $F(s) = \frac{s(1+e^{-\pi s})}{s^2+1}$

Prva školska zadaća iz Matematike 3E i 3R

Grupe E2, E4, R2, R4, R6

12.10.2006.

Grupa A

1. (**3 boda**) Funkcija $f(x) = \mathrm{sgn}(x^2 - 4)$, $x \in \langle -3, 3 \rangle$ razvijena je u Fourierov red $S(x)$. Skicirajte graf tog reda $S(x)$, $x \in \mathbb{R}$ te izračunajte $S(\sqrt{111})$ (red ne treba izračunati eksplicitno).

2. (**4 boda**) Periodičnu funkciju temeljnog perioda $T = 2$ zadanu s $f(x) = \frac{x}{2}$, $x \in \langle 0, 2 \rangle$ razvijte u Fourierov red. Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu reda $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$.

3. (**3 boda**) a) Izračunajte $\int_0^\infty e^{-3t} \cos(5t) dt$.
b) Odredite original Laplaceovog transformata $F(s) = \frac{e^{-8s}}{(s-1)^4}$.

Prva školska zadaća iz Matematike 3E i 3R

Grupe E2, E4, R2, R4, R6

12.10.2006.

Grupa B

1.(**3 boda**) Za funkciju $f(x) = 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x$ izračunajte amplitudu, kružnu frekvenciju i fazni pomak. Nacrtajte graf funkcije $f(x)$.

2.(**4 boda**) Funkciju zadanu slikom prikažite pomoću Fourierovog integrala. Pomoću dobivenog prikaza izračunajte $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

3.(**3 boda**) a) Izračunajte $\int_0^\infty e^{-4t} t^7 dt$.
b) Odredite original Laplaceovog transformata $F(s) = \frac{s}{s^2+8s+41}$.

Rješenje prve školske zadaće iz Matematike 3E i 3R

Grupe E2, E4, R2, R4, R6

12.10.2006.

Grupa A

1. (**3 boda**) $S(\sqrt{111}) = -1$

2. (**4 boda**) $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $b_n = \frac{-1}{n\pi}$, $f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}$, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots = \frac{\pi}{4}$

3.(**3 boda**) a) (1 bod) $I = \frac{3}{34}$
b)(2 boda) $f(t) = \frac{1}{6}(t-8)^3 e^{t-8} u(t-8)$

Rješenje prve školske zadaće iz Matematike 3E i 3R

Grupe E2, E4, R2, R4, R6

12.10.2006.

Grupa B

1.(**3 boda**) $\omega = 1$, amplituda$= 4$, $\varphi = \frac{-\pi}{6}$, $f(x) = 4\sin(x - \pi/6)$

2.(**4 boda**) $f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} + \frac{\cos(\lambda x) - \cos(\lambda(x-2))}{2\lambda^2}\right)d\lambda$, $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi f(1) = \pi/2$

3. (**3 boda**) a) (1 bod) $I = F(4) = \frac{7!}{4^8}$
b)(2 boda) $f(t) = e^{-4t}(\cos 5t - \frac{4}{5}\sin 5t)u(t)$