DRUGI MEĐUISPIT IZ MATEMATIKE 3R

12. 12. 2006.

1. (**2 boda**)

   (a) Definiraj partitivni skup n-članog skupa. Dokaži, uporabom isključivo produktnog pravila, da partitivni skup n-članog skupa ima 2^n elemenata.

   (b) Nađi broj injektivnih funkcija $f : B^A \to C$, gdje je $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$, $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7\}$. Objasni odgovor.

2. (**2 boda**)

   (a) Definiraj pojmove refleksivne, simetrične i tranzitivne relacije.

   (b) Zadana je relacija ekvivalencije $\rho = \{(1,1), (2,2), (2,5), (3,3), (3,4), (3,6), (4,3), (4,4), (4,6), (5,2), (5,5), (6,3), (6,4), (6,6)\}$ na skupu $\{1,2,3,4,5,6\}$. Ispiši klase (razrede) ekvivalencije. Ne treba provjeravati svojstva relacije ekvivalencije.

3. (**2 boda**) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od milijun koji imaju sve znamenke različite?

4. (**2 boda**) U ravnini je dano 8 zelenih, 10 žutih i 12 crvenih točaka. Koliko ima dužina s vrhovima u tim točkama, uz uvjet da su im vrhovi raznobojni?

5. (**3 boda**) U studentskom zboru ima 15 studenata prve godine, 20 studenata druge godine, 10 studenata treće godine i 20 studenata četvrte godine. Na koliko se načina može odabrati šesteročlana delegacija iz tog studentskog zbora u kojoj mora biti barem jedan predstavnik svake godine?

6. (**3 boda**) Riješi rekurzivnu relaciju

$$a_n = 4a_{n-1} + 32a_{n-2} - 7n, \; n \geq 2,$$

$$a_0 = \frac{1}{5}, \; a_1 = 1.$$

7. (**3 boda**) Četiri djevojčice, Ane, Mare, Luce i Kate trebaju među sobom podijeliti 24 jednaka bombona. Na koliko načina one to mogu napraviti tako da Ane dobije barem 6, a najviše 11 bombona, a Mare, Luce i Kate barem 2, a najviše 7?

8. (**3 boda**)

   (a) Nađi funkciju izvodnicu za niz $a_n = 5^n$, $n \geq 0$.

   (b) Nađi funkciju izvodnicu za niz $b_n = \frac{n^2+1}{n}$, $n \geq 1$.

Zabranjena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

RJEŠENJA drugog međuispita iz MATEMATIKE 3R
12. 12. 2006.

1. (**2 boda**)

   (a) Partitivni skup zadanog skupa je skup svih podskupova zadanog skupa. Neka je $X = \{x_1, ...x_2\}$, definirajmo karakteristični vektor $y = (y_1, ..., y_n)$ podskupa $Y \subseteq X$ na način $y_i = 1 \Leftrightarrow x_i \in Y$, a inače $y_i = 0$. Pridruživanje $Y \to y$ je bijekcija između skupa svih podskupova od X i skupa svih $\{0,1\}$-nizova dužine n, a takvih je 2^n.

   (b) $|B^A| = 3^2 = 9$, stoga je broj injekcija sa skupa B^A na skup C jednak 0. Skup C ima 7 elemenata.

2. (**2 boda**)

   (a) Relacija $\rho \subseteq X^2$ je refleksivna ako za svaki $x \in X$ vrijedi $(x,x) \in \rho$. Relacija ρ je simetrična ako iz pretpostavke $(x,y) \in \rho$ slijedi $(y,x) \in \rho$, a relacija je tranzitivna ako iz pretpostavki $(x,y) \in \rho$ i $(y,z) \in \rho$ slijedi $(x,z) \in \rho$.

   (b) Razredi ekivavalencije su $\{1\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4,6\}$.

3. (**2 boda**) Prebrajamo sve prirodne brojeve koji imaju maksimalno 6 različitih znamenki. Prva znamenka ne smije biti nula. Traženi broj je

$$9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5 + 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 + 9\cdot 9\cdot 8\cdot 7 + 9\cdot 9\cdot 8 + 9\cdot 9 + 9 = 168570.$$

4. (**2 boda**) Gledamo kombinacije dužina kojima su vrhovi obojeni zeleno-žuto,zeleno-crveno,žuto-crveno. Rezultat je

$$8\cdot 10 + 8\cdot 12 + 10\cdot 12 = 296.$$

   Drugi način je da od ukupnog broja dužina oduzmemo dužine koje imaju jednobojne vrhove, dakle traženi broj je

$$\binom{30}{2} - \left[\binom{8}{2} + \binom{10}{2} + \binom{12}{2}\right] = 296.$$

5. (**3 boda**) $S = \{\text{sve 6-člane delegacije}\}$, $A_i = \{\text{nema predstavnika i-te godine}\}$. Traženi broj je $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}|$.

$$|S| = \binom{65}{6},\ |A_1| = \binom{50}{6},\ |A_2| = \binom{45}{6},\ |A_3| = \binom{55}{6},\ |A_4| = \binom{45}{6},$$

$$|A_1 \cap A_2| = \binom{30}{6},\ |A_1 \cap A_3| = \binom{40}{6},\ |A_1 \cap A_4| = \binom{30}{6},$$

$$|A_2 \cap A_3| = \binom{35}{6},\ |A_2 \cap A_4| = \binom{25}{6},\ |A_3 \cap A_4| = \binom{35}{6},$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{20}{6},\ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \binom{10}{6},\ |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{20}{6},\ |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{15}{6},$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0,$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}| = |S| - \sum_i |A_i| + \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = ... = 29795000.$$

6. (**3 boda**)

(a) karakteristična jednadžba je $x^2-4x-32=0,\ x_1=8,\ x_2=-4$. Rješenje homogene rekurzije je

$$a_n^h = \lambda 8^n + \mu(-4)^n.$$

(b) Partikularno rješenje je oblika $a_n^p = An+B$. Uvrštavanjem u rekurziju dobije se $A=\frac{1}{5},\ B=\frac{68}{175}$. Dakle

$$a_n^p = \frac{1}{5}n + \frac{68}{175}.$$

(c) Iz početnih uvjeta imamo

$$a_0 = \lambda + \mu + \frac{68}{175} = \frac{1}{5},$$

$$a_1 = 8\lambda - 4\mu + \frac{1}{5} + \frac{68}{175} = 1,$$

rješenja sustava su $\lambda = -\frac{1}{35},\ \mu = -\frac{4}{25}$.

$$a_n = -\frac{1}{35}8^n - \frac{4}{25}(-4)^n + \frac{1}{5}n + \frac{68}{175}.$$

7. (**3 boda**) Funkcija izvodnica je

$$f(x) = (x^6+x^7+...+x^{11})(x^2+x^3+...+x^7)^3 = x^{12}(1-x^6)^4(1-x)^{-4},$$

$$f(x) = x^{12}(1-\binom{4}{1}x^6+\binom{4}{2}x^{12}-...)\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{-4}{k}x^k,$$

zbog $\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{-4}{k}x^k = \sum_{k\geq 0}\binom{k+3}{3}x^k$ imamo

$$\langle x^{24}\rangle f(x) = \binom{15}{3} - \binom{4}{1}\binom{9}{3} + \binom{4}{2}\binom{3}{3} = 125.$$

8. (**3 boda**)

(a) $f(x) = \sum_{n\geq 0} 5^n x^n = \frac{1}{1-5x}$.

(b)

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+1}{n}x^n = \sum_{n\geq 1} nx^n + \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} = x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} + \sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x\frac{1}{(1-x)^2} - ln|1-x|.$$