

7. CIELINA

Izgovori zadatka

- dokazati da su skupovi kompozitorni
- nati lijskijis

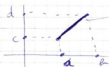
7. PM1 2006.

2.7

Dokazati da su 2 skupa kompozitorni  
Dva skupa - polnopravni  
- neprazni

a) da li su intervali kompozitorni?  $[a, a]$  i  $[c, d]$

9. str., prim 2



treba nati jed. prava

b) 9. str., prim 2 i)

Dokazati da  $(-1, 1)$  i  $\mathbb{R}$  kompozitorni.

Treba pronaći funkciju. thx

Ne treba dokazivati, podrazumijeva se  
da je lijskijis

4.D2

ZAD. 4

neprazni

Dokazati da je skup prirodni brojeva.

Ne možemo koristiti zatvore funk

D: 2, 5, 8, 11, ...

pri dazguzin 5 3  
 dazguzin otkritak 2

K 100, 101, 102 ...  
hachosondos

predikamo 2 u 100, 3 u 707

pari element in paroz nro a pari  
elemento lungo nro, ..

$$f: D \rightarrow K$$

$$f(n) = 100 + \frac{n-2}{3}$$

## 2. RELACIJE

- dokazati da je nešto relacija ekvivalencije

PMI 2006

$$X = A \times A = \{ (0,0), (0,1) \dots (7,0) \dots \} \quad \begin{matrix} 4 \times 4 \\ \text{elementi} \end{matrix}$$

$$A = \{0,1,2,3\}$$

$$(a,b) \} (c,d) \quad a+b = c+d$$

npr.

$$(2,2) \} (1,3) \quad 2+2 = 1+3$$

EKVIVALENCIJA - dokazati:

1. REFLEKSIVNOST

$$(x,y) \} (x,y)$$

$$x+y = x+y \quad \checkmark$$

2. SIMETRIČNOST

$$(x_1, y_1) \} (x_2, y_2) \Rightarrow (x_2, y_2) \} (x_1, y_1)$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow x_2 + y_2 = x_1 + y_1 \quad \checkmark$$

3. TRANZITIVNOST

$$(x_1, y_1) \} (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \} (x_3, y_3) \\ \Rightarrow (x_1, y_1) \} (x_3, y_3)$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \\ \Rightarrow x_1 + y_1 = x_3 + y_3 \quad \checkmark$$

"PROVJERI je li relacija ekvivalencija."  $\Rightarrow$   
ne mora li relacija biti

"DOKAŽI je li relacija ekv. ..."  
 $\Rightarrow$  uglavnom jest relacija

$$a) [ (2,2) ] = \{ (2,2), (1,3), (3,1) \}$$

tri elementa u razredu, ne razlikovani i  
taj element!

c) Koliko elemenata ima KVOCIJENTNI GRUPA?

$$[0,0]$$

$$[1,2]$$

$$[2,3]$$

$$[0,1]$$

$$[2,2]$$

$$[3,3]$$

$$[1,1]$$

~~$$[1,2]$$~~

$$|X/f| = 7$$

### 3. KOMBINATORIKA

**5. DZ**      ZAD. 12

U liftu je 8 ljudi, 5 kabina.  
Na koliko načina mogu ići tako  
da na svakom katu bude 1 čovjek.

"BAREM 1 OSOBA"



računamo suprotno

$A_i = \{ \text{na } i\text{-tom katu nitko nije išao} \}$   
u  $i$ -tu y se nitko nije prebacao

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5| = ? \quad \text{FV!}$$

$$= X - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m \cap A_n|$$

=

□ □ □ □ □ □ □ □

$$5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 = 5^8$$

VARIJACIJE SA PONAVLJANJEM

↓  
na koliko načina mogu ići svi ljudi

OPREZ!

- ~~ne~~ ~~ne~~ bolje ne gledati na  
kabinama, nije  $8^5$ !

VEĆI BROJ

MANJI BROJ

unijeti se fiksno iz elementa iz polarnog skupa

$A_1 =$  na 1. katu nġo nje vna

□ □ □ □ □ □ □ □

$$A_1 = 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad \dots = 4^8 \quad \text{na vna nġo m 4 katu n}$$

$$A_1 \cap A_2 = 3 \quad 3 \quad 3 \quad \dots = 3^8 \quad \text{na nje vna m 1. u 2. katu}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 2 \quad 2 \quad \dots = 2^8$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \dots = 1^8$$

oddeljemo: 1 kat od 5 katu  
1 element od 5 elementu

$$= 5^8 - \underbrace{\binom{5}{1} 4^8}_{\sum |A_i|} + \binom{5}{2} 3^8 - \binom{5}{3} 2^8 + \binom{5}{4} 1^8 - \binom{5}{5} \cdot 0$$

Na nje u vna nje nje nje formula:

$$\text{Sur}(m, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

5.DZ

ZAD. 6

70 salunka

20 knjiška

na 6 djece

bilo da znaka djele dolije barom 7 knjiška

KRUŠKE su iste, LJUDI, DECA nisu isti!  
(ne razlikujemo) (razlikujemo)

znaka djele, samo 7 knjiška odmah  
na početku, ostane ih 74, i to  
onda djele

kombinacije su razlikovane

$$\binom{74+6-1}{74} \cdot \binom{70+6-1}{70}$$

74 putu moramo odabrati nešto,  
to je linija, dalje dolje  
više puta

# FUNKCIE IZVODNICE

5.02

24.02.20

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

korist na parcijalne razlomke:

$$\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$2n+3 = A(n+2) + B(n+1)$$

$$n = -2 \quad -1 = -B \quad B = 1$$

$$n = -1 \quad 1 = A \quad A = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \bigg| \int dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-x| \quad \bigg| : x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{-\ln|1-x|}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \bigg| \cdot x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \quad \bigg| \cdot \int dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx$$



$$\int \frac{x}{1-x} dx$$

$$= \int \frac{-x-1+1}{1-x} dx = \int \frac{1-x}{1-x} dx + \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$= -x + \ln|1-x|$$

2. <sup>u</sup>  $\frac{1}{1-x}$   
 $1-x=t$   
 $x=1-t$  i. unstim u. normiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = -x + \ln|1-x| \quad / : x^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{-x + \ln|1-x|}{x^2}$$

$$f(x) = -\ln|1-x| + \frac{\ln|1-x| - x}{x^2}$$

# PRIMJENA FUNKCIJA IZVODNICE NA KOMBINATORIKU

PMI 2006. (mala promijenjen)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 60$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$x_3 \geq 14$$

ne nije liči 0.

1. korak (umjet)

ne mijenjamo ispr. nejednakost, moramo napraviti jednakost

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 61$$

[kad bi pisali  $x \in \mathbb{N}_0$   
 $x$  može biti nula  
 onda bi bilo  $\dots = 60$ ]

1. NAČIN

2. korak - namjetimo da ne varijable kreću od nule

$$x_1 = y_1 + 1$$

$$x_1 = y_1 + 1$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 = y_3 + 14$$

$$x_3 = y_3 + 14$$

$$x_4 = y_4 + 1$$

$$x_5 = y_5 + 1$$

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 14) + (y_4 + 1) + (y_5 + 1) = 61$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 43$$

3. korak

$$\binom{43 + 5 - 1}{43}$$

$$y \in \mathbb{N}_0$$

mi  $y$  kreću od nule  
 kombinacije sa ponavljanjem

2. NAČIN

$x_1, x_2, x_4, x_5$  imaju isti  
faktorijski deo

$$(x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^4 (x^{14} + x^{15} + x^{16} + \dots)$$

$x_3$  kreće od 14

$$= x^4 (x^0 + x^1 + x^2 + \dots)^4 x^{14} (1 + x^1 + x^2 + \dots)$$

ne treba luti ogromnim  
desmo da se na 67  
ovim skupu razmatra više da  
može dobiti negativne \* on je malo  
li više

$$= x^{18} \left( \frac{1}{1-x} \right)^5 = x^{18} (1-x)^{-5}$$

$$(1+x)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} x^k$$

$$(1-x)^d = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{d}{k} x^k$$

$$= x^{18} \left[ 1 - \binom{-5}{1} x^1 + \binom{-5}{2} x^2 - \binom{-5}{3} x^3 + \dots \right]$$

$$x^{18} \cdot \underbrace{x^{43}} = x^{61}$$

broj uz  $x^{43}$ :

$$- \binom{-5}{43} = (-1)^{43} \binom{5+43-1}{43}$$

