Matematika 3R - Uvod u teoriju grafova – sažetak
ak. god. 2008/09

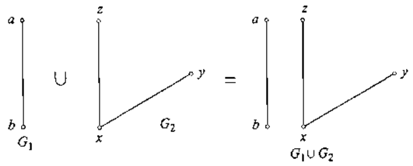
1. Pojam grafa

1.2. Glavne definicije

- **jednostavni graf** *G* sastoji se od nepraznog konačnog skupa *V(G),* čije elemente zovemo **vrhovi** (čvorovi) i konačnog skupa *E(G)* <u>različitih</u> dvočlanih podskupova skupa *V(G)* koje zovemo **bridovi**
  - *V(G)* → skup vrhova (V = eng. *vertex*)
  - *E*(G) → skup bridova (E = eng. *edge*)
  - *f*ormalno: G= (V(G), E(G)) ili kraće G= (V,E)
- **opći (generalizirani) graf** – moguća je višekratnost bridova (dva vrha mogu biti spojena sa više bridova), te petlje (brid koji spaja vrh sa samim sobom)
  - ukratko ga zovemo samo graf
- za brid *e = {v, w}* kažemo da **spaja** vrhove *v* i *w* i bez mogućnosti zabune kraće ga pišemo *vw*
  - vrhovi *v* i *w* grafa G su **susjedni**
  - vrh v je **incidentan** s bridom *e* (naravno, i *w* je također incidentan s bridom *e*)

- **izomorfizam** - za grafove G_1 i G_2 kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijektivna korespondencija (1-1 preslikavanje) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u $V(G_2)$
  - nuždan uvjet izomorfnosti, ali ne i dovoljan: $|V(G_1)| = |V(G_2)|$, $|E(G_1)| = |E(G_2)|$
- broj različitih grafova sa n vrhova je jednak $2^{\binom{n}{2}}$

- **unija grafova** – za zadane disjunktne grafove $G_1 = (V(G_1),E(G_2))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ definiramo njihovu uniju $G_1 \cup G_2$ kao graf $G_1 \cup G_2 = (V(G_l) \cup V(G_2),\ E(G_1) \cup E(G_2))$.



- **povezanost** - graf je **povezan** ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom kažemo da je graf **nepovezan**
  - svaki se nepovezani graf dakle može prikazati kao unija povezanih grafova. Svaki član te unije zovemo **komponenta povezanosti.**
  - nepovezan graf može imati i prazan skup bridova

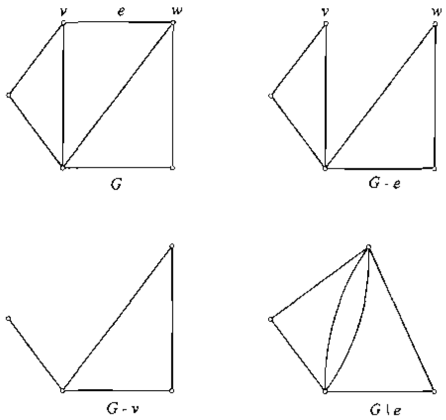
- **stupanj vrha** *v* grafa G je broj bridova koji su incidentni s *v*
  - označavamo ga s *deg(v)*
  - ako je vrh *v* petlja, onda ona broju deg(v) doprinosi s 2
  - **izolirani vrh:** vrh stupnja 0
  - **krajnji vrh:** vrh stupnja 1
  - **niz stupnjeva** - n-torka koja se sastoji od rastućeg niza cijelih brojeva koji predstavljaju stupnjeve svih vrhova u grafu *G* (zajedno s kratnostima)
    - niz stupnjeva ne određuje strukturu grafa
    - dva grafa sa istim nizom stupnjeva nisu nužno izomorfni

- **lema o rukovanju** - u svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj. vrijedi

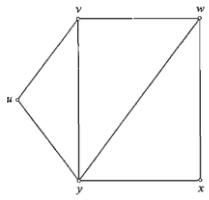
$$\sum_{v \in G} \deg(v) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$$

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2 \cdot |E| = 2 \cdot (n-1)$$

  - (u rukovanju nužno sudjeluje paran broj ljudi)
  - broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran
- **regularan graf** - graf G je **regularan** ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja, tj. ako je $\deg(v) = r, \forall v \in V(G)$
  - *r* se naziva **stupanj regularnosti**
- **podgrafove** dobivamo iz danog grafa *G* brisanjem vrhova ili bridova
  - podgraf G – e : graf G bez brida e
    - ako je F ⊆ E(G), onda je G – F = (V(G), E(G) \ F)
  - podgraf G – v : graf dobiven brisanjem vrha v i svih bridova incidentnih s v
  - podgraf G – S : graf dobiven uklanjanjem svih vrhova iz podskupa S, kao i svih bridova koji su incidentni s bilo kojim od uklonjenih vrhova
    - S ⊆ V(G)
  - graf G \ e : graf dobiven kontrakcijom brida e
    - vrhove incidentne s tim bridom slijepimo, uzimljući pritom u obzir sve bridove s kojima su oba slijepljena vrha incidentna.
    - G\e **nije podgraf** od G.



- **lista bridova** za graf na slici: *{uv, uy, vw, vy, wx, wy, xy}*



- **lista susjedstva** je lista gdje je svaki element liste podskup skupa vrhova koji čine susjedi određenog vrha

[u: {v,y}; v: *{u,y,w}; w: {v,y,x}; x* : *{y,w}; y : {u,v,w,x}]*

- **matrica susjedstva** A = [a_{ij}] je *n* x n matrica čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh *i* s vrhom *j.*
  - vrhove zadanog grafa G smo označili s V = {1,2....,n}
  - zbroj elemenata u pojedinom retku (ili stupcu) točno odgovara stupnju odgovarajućeg vrha
  - simetrična je u odnosu na dijagonalu (gdje se uvijek nalaze nule)
- **matrica incidencije** B = [b_{ij}] je *n* x *m* matricu čiji su elementi:

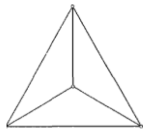
$$\text{bij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je vrh i incidentan s bridom } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

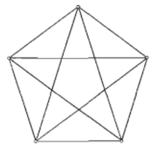
  - bridove zadanog grafa G smo označili s E = {1,2,... ,m}
  - svaki stupac matrice incidencije ima na točno dva mjesta 1, dok su na ostalim mjestima nule. Te dvije jedinice točno kazuju koja dva vrha spaja dotični brid
  - regularan graf ima i regularnu matricu incidencije, a regularne matrice su ekvivalentne jediničnoj matrici, $A \sim I \rightarrow A^n \sim I^n = I$
- **Dirichletov princip** - ako je *G* jednostavni graf s najmanje 2 vrha, *G* mora sadržavati barem 2 vrha istoga stupnja
  - različitih stupnjeva vrhova grafa ima najviše *n* — 1
  - princip golubinjaka – u nekom golubinjaku su barem dva goluba

1.3. Primjeri

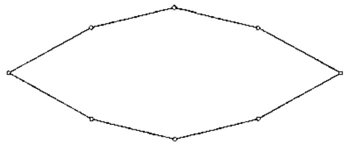
- **nul-graf, N_n** je graf čiji je skup bridova prazan skup
  - svi nul-grafovi s istim brojem vrhova su međusobno izomorfni
  - svaki vrh je izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli

- **potpuni graf, K_n** - jednostavni graf kod kojeg su <u>svaka dva vrha susjedna</u>
  - broj bridova: $E(K_n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$
  - regularnost: (n-1)

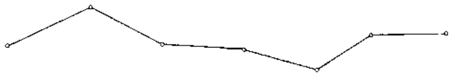

K_4


K_5

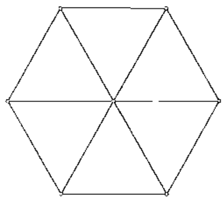
- **ciklički graf / ciklus, C_n** - povezani 2-regularni graf
  - ima n vrhova i n bridova
  - ne mora biti ciklus, već to može biti i disjunktna unija ciklusa


C_8

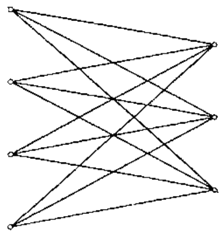
- **lanac, Pn** - graf koji dobijemo iz cikličkog grafa brisanjem točno jednog brida


P_7

- **kotač, W_n** - graf koji dobijemo iz cikJusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom
  - $|E(W_n)| = 2 \cdot (n-1)$
  - regularan je samo za n=4

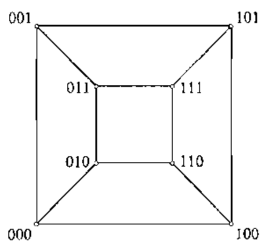

W_7

- **bipartitan graf** – graf u kojem skup vrhova možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa A i B tako da svaki brid spaja neki vrh skupa A s nekim iz skupa B
  - svaki vrh iz jednog skupa povezan je samo sa vrhovima iz drugog skupa
  - alternativno: ako mu vrhove možemo pobojati u dvije boje, npr. crnu i bijelu, tako daje svaki brid incidentan s jednim crnim i s jednim bijelim vrhom
  - lanac je bipartitan graf
  - kotač ne može biti bipartitan graf jer je središnji vrh spojen sa svima ostalima
  - bipartitan graf ne sadrži trokute


$K_{4,3}$

- **potpuni bipartitni graf** - onaj bipartitni graf s particijom skupa vrhova A i B kod kojeg je <u>svaki</u> vrh iz skupa *A* spojen sa <u>svakim</u> iz skupa B
  - $K_{rs} \rightarrow |A| = r, |B| = s$
  - graf K_{rs} ima $r + s$ vrhova i $r \cdot s$ bridova.

- **k-kocka, Q_k** - graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1, a_2, ..., a_k)$, $a_i \in \{0,1\}$, duljine k, te čiji bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju <u>točno na jednom mjestu</u>
  - broj vrhova $\rightarrow$ $|V(Q_k)| = 2^k$
  - k-regularan: svaki vrh ima točno k susjeda
  - broj bridova $\rightarrow$ $|E(Q_k)| = \frac{2^k \cdot k}{2}$

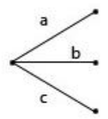


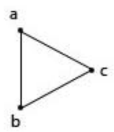
Q_3

- **komplement grafa,** $\overline{G}$ - ako je G jednostavni graf sa skupom vrhova V(G), onda je njegov komplement $\overline{G}$ jednostavni graf s istim skupom vrhova V(G), dok su dva vrha u G susjedna onda i samo onda ako oni <u>nisu</u> susjedni u grafu G
  - $E(\overline{G}) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$, gdje je $\binom{V}{2}$ skup svih dvočlanih podskupova skupa V
  - traženje komplementa je dualna operacija, tj. $\overline{\overline{G}}$ je izomorfan s G
  - matrice susjedstva: $\overline{A} = J - I - A$, gdje je J matrica koja se sastoji od samih jedinica

- **samokomplementaran graf** - jednostavan graf koji je izomorfan svome komplementu
  - izomorfnost: $|V(G)| = |V(\overline{G})|$, $|E(G)| = |E(\overline{G})|$
  - $E(K_n) - E(G) = E(\overline{G})$ → $|E(G)| = \frac{n(n-1)}{4}$

- **bridni graf L(G)** jednostavnog grafa G je graf čiji vrhovi su u bijektivnoj korespondenciji s bridovima grafa G, pri čemu su dva vrha od *L(G)* susjedna onda i samo onda ako su odgovarajući bridovi u G susjedni (tj. incidentni s jednim zajedničkim vrhom).
  - jednostavnije: pretvorba bridova grafa G u vrhove bridnog grafa





  - ako je G k-regularan, onda je L(G) [2*(k-1)]-regularan
    - G je k-regularan, što znači da svaki njegov vrh ima stupanj k, tj. u njemu se spaja k bridova, pa svaki brid ima još (k-1) susjednih bridova u tom vrhu. Budući da svaki brid spaja 2 vrha, on mora imati ukupno 2*(k-1) susjednih bridova.

2. Povezanost

2.1. Šetnje

- **šetnja** u grafu G je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$
  - ili $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_m$ gdje su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka
  - v_0 zovemo početni vrh (izvor), a v_m završni vrh (ponor)
  - zapis za šetnju nije potpuno jedinstven, ako u grafu ima višestrukih bridova (tada šetnju pišemo kao niz susjednih bridova $e_1 \to e_2 \to \ldots \to e_m$)
- **duljina šetnje** – broj bridova u šetnji (skupa s kratnostima onih bridova kojima smo eventualno više puta prošetali)
  - u nul grafu su šetnje duljine 0

- **staza** - šetnja u kojoj su svi bridovi različiti
- **put** – šetnja u kojoj su svi bridovi i vrhovi različiti (osim eventualno početni i krajnji vrh)
- **zatvorena staza / put** – ako je $v_0 = v_m$
- **ciklus** - zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid
- **petlja** - ciklus koji se sastoji od jednog jedinog brida
  - ciklus od dva brida je dvostruki brid između dva vrha.

- graf je **povezan** onda i samo onda ako postoji šetnja između bilo koja dva vrha tog grafa
- **nepovezan graf** - šetnje su moguće samo po nekoj od njegovih komponenti povezanosti

- **ekvivalencija** - relacija „biti povezan" definirana na skupu vrhova grafa G je relacija ekvivalencije. Razredi ekvivalencije te relacije su komponente povezanosti grafa G.
  - dokaz: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost

- **teorem:** graf je **bipartitan** onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu parne duljine
- **odnos broja vrhova i broja bridova** u nekom jednostavnome povezanome grafu
  - n=broj vrhova, m=broj bridova
  - najmanji broj bridova dobivamo ako vrhove povežemo u lanac (koji je jednostavan graf)
  - najveći broj bridova dobivamo ako su svaka dva vrha susjedna, tj. ako bridova čini skup svih dvočlanih podskupova skupa vrhova od G, a takvih je $\binom{n}{2}$

$$n-1 \le m \le \binom{n}{2}$$

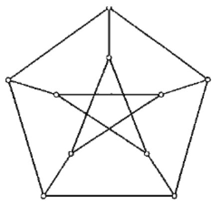
- **teorem:** neka je G jednostavni graf s n vrhova. Ako G ima k komponenata povezanosti, onda za **broj bridova** m od G vrijedi: $n-k \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$ $\binom{n-k+1}{2}$
- svaki jednostavni graf s n vrhova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova je **povezan**

- **<u>povezani grafovi</u>**:
  - **rastavljajući skup** povezanog grafa *G* je skup bridova čijim uklanjanjem *G* postaje nepovezan
  - **rezni skup** – za rastavljajući skup kažemo da je rezni skup ako nijedan njegov pravi podskup <u>nije rastavljajući</u>
  - **most** - rezni skup koji se sastoji od jednog jedinog brida
  - **bridna povezanost** $\lambda(G)$ je veličinu <u>najmanjeg</u> reznog skupa
    - G je k-bridno povezan, ako je $\lambda(G) \geq k$
    - znači da mu možemo ukloniti bilo kojih (k — 1) bridova a da mu se pritom broj komponenata povezanosti pritom neće povećati

  - **separirajući skup** je skup vrhova od čijim uklanjanjem graf postaje nepovezan
  - **separirajući vrh** je jednočlani separirajući skup
  - **vršna povezanost** $\kappa(G)$ je broj elemenata <u>najmanjeg</u> separirajućeg skupa u G
    - najmanji broj vrhova koji treba ukloniti povezanom grafu da bi on postao nepovezan
    - ako je $\kappa(G) > k$, onda kažemo da je G k-povezan graf.

- **<u>nepovezani grafovi</u>**:
  - **rastavljajući skup** je skup bridova čijim se uklanjanjem povećava broj komponenata povezanosti
  - **rezni skup** je onaj rastavljajući skup čiji nijedan pravi podskup to nije

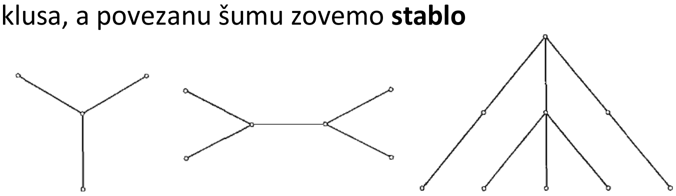
- Petersenov graf →



- **struk grafa** je duljina <u>najkraćeg</u> ciklusa

- **šuma** je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **stablo**

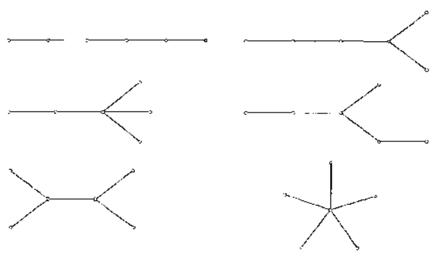
- primjeri stabala:



- stabla su po mnogo čemu najjednostavniji grafovi

- Neka je T graf s n vrhova. Onda su sljedeće izreke ekvivalentne:
  1. T je stablo
  2. T ne sadrži ciklus i ima n — 1 bridova
  3. T je povezan i ima n — 1 bridova
  4. T je povezan i svaki mu je brid most
  5. Svaka dva vrha od T povezana su točno jednim putom
  6. T ne sadrži ciklus, no dodavanjem jednog brida dobit ćemo točno jedan ciklus
- ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti, onda G ima n — k vrhova

- neizomorfna stabla sa 6 vrhova:



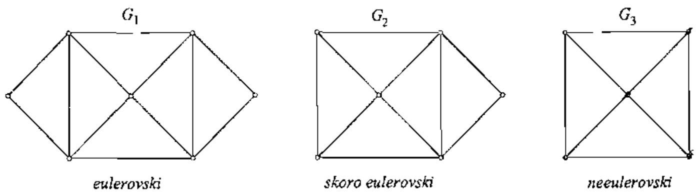
- u svakom stablu postoje barem dva vrha stupnja 1
    - prema Lemi o rukovanju, vrijedi da je $\sum_{v\in G}\deg(v) \equiv 2\cdot|E| = 2\cdot(n-1)$
    - po Dirichletovom principu slijedi tvrdnja
- svako stablo je bipartitan graf

- **razapinjuće stablo** – povezani graf bez ciklus koji nastaje uklanjanjem bridova iz svakog ciklusa u početnome grafu
    - uočimo ciklus i iz tog ciklusa uklonimo jedan brid, iterativno ponavljamo postupak sve dok ima ciklusa

    - brid koji leži u svakom razapinjućem stablu je **most**, jer samo most ni na koji način nismo mogli ukloniti iz početnog grafa
    - brid koji ćemo uvijek ukloniti je onaj koji je sam za sebe ciklus, a to je **petlja**

2.2. Eulerovski grafovi

- **eulerovski graf** je graf u kojemu postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid tog grafa
- neeulerovski graf je **skoro eulerovski** (semi-eulerovski), ako postoji staza koja sadrži svaki brid od *G*



- iz neeulerovskog grafa uvijek možemo doći do eulerovskog dodavanjem bridova
- ponekad je moguće dobiti eulerovski graf i brisanjem bridova

- **lema**: ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus
- **Eulerov teorem**: povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran

- povezani graf je **eulerovski** onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa
- povezani graf je **skoro eulerovski** onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja

- **Fleuryev algoritam** - algoritam za dobivanje eulerovske staze u eulerovskom grafu:
    - započni u bilo kojem vrhu u i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na sljedeća pravila:
    1. prebriši bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, pobriši i njega.
    2. prijeđi mostom samo ako nemaš druge mogućnosti.

2.3. Hamiltonovski grafovi

- **hamiltonovski ciklus** – ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa
- **hamiltonovski graf** – graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus
- **skoro hamiltonovski graf** – nehamiltonovski graf u kojem možemo naći put kroz svaki vrh (ali koji nije zatvoren, pa nije ciklus)

- potpuni graf s n vrhova je uvijek hamiltonovski
- ukupan broj hamiltonovskih ciklusa u potpunom grafu sa n vrhova: $\frac{(n-1)!}{2}$

- **<u>Oreov teorem</u>:** ako je G jednostavni graf s n vrhova (n ≥ 3), te ako vrijedi $\deg(v)+\deg(w)\geq n$ za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski
  - ako je zbroj stupnjeva < n onda ne znamo ništa, <u>ne znači</u> da tada graf nije hamiltonovski

- **<u>Diracov teorem</u>:** ako je G jednostavni graf s n (n ≥ 3) vrhova, te ako je $\deg(v)\geq\frac{n}{2}$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski
  - dokaz: Oreov teorem $\deg(v)+\deg(w)\geq\frac{n}{2}+\frac{n}{2}=n$

- bipartitan graf s neparnim brojem vrhova je nužno nehamiltonovski
  - ne postoji hamiltonovski ciklus, jer je r ≠ s
- Petersenov graf nije hamiltonovski, ali je skoro hamiltonovski

- samo kod ciklusa (C_n) je eulerovska staza ujedno i hamiltonovski ciklus

3. Algoritmi optimizacije

3.1. Problem najkraćeg puta

- **težinski graf** – jednostavni povezani graf u kojem je svakome bridu *e* pridružen realni broj *w(e)*, odnosno težina brida
  - težina je funkcija $w : E(G) \to \mathbb{R}$ koju možemo interpretirati na razne načine (duljina ceste, kapacitet cijevi ...)
- svaki graf možemo interpretirati kao težinski graf, na način da svakom bridu pridijelimo težinu 1
- **udaljenost** dva vrha u težinskom grafu možemo definirati kao duljinu najkraćeg puta između njih, $d(u_0, u_0)$

$$d(u_0, v) = d(u_0, u_r) + w(u_r v)$$
$$d(u_0, \bar{S}) = \min_{\substack{u \in S \\ v \in \bar{S}}} d(u_0, u) + w(u, v)$$

- **<u>Dijkstrin algoritam</u>** najkraćeg puta

3.2. Kineski problem poštara

- pronaći zatvorenu šetnju koja počinje i završava u zadanome vrhu a da je ona minimalne ukupne duljine (težine)
- ako je graf eulerovski treba pronaći eulerovsku stazu
- ako graf nije eulerovski: kombiniranjem Fleuryevog algoritma za nalaženje skoro eulerovske staze i Dijkstrinog algoritma za nalaženje najkraćeg puta dolazimo do minimalne zatvorene šetnje koja prolazi svakim bridom barem jednom
- najgori mogući slučaj je stablo, jer nema ciklusa i kroz svaki brid moramo proći točno dva puta

3.3. Problem trgovačkog putnika

- trgovački putnik treba obići nekoliko gradova i vratiti se natrag, a da pri tome sveukupno prijeđe najmanju udaljenost
- pretpostavka je da su svaka dva grada neposredno povezana i da se zna kolika je (najkraća) udaljenost među njima
- formulacija u teoriji grafova: *U potpunom težinskom grafu nađi hamiltonovski ciklus minimalne duljine*

- **<u>pohlepni algoritam</u>**: gradimo ciklus brid po brid, birajući uvijek kao sljedeći brid onaj koji je dopustiv (dakle, koji se nadovezuje na već formiran lanac, i koji ne zatvara ciklus prije nego se prođe svim vrhovima), a koji je najmanje duljine
  - krenemo od najkraćeg brida
  - ne daje u svim slučajevima najkraći hamiltonovski ciklus