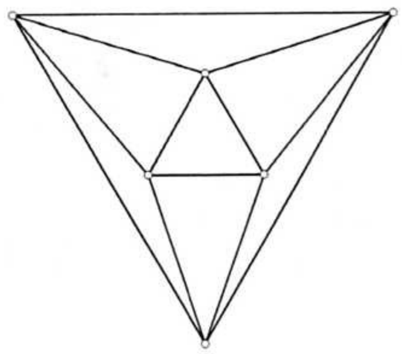
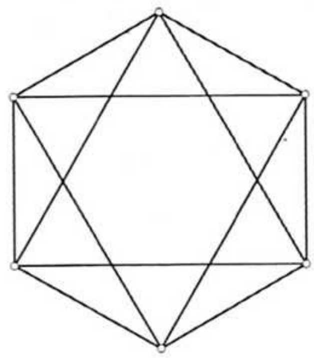
Zadaci za vježbu

1. Koliko ima različitih jednostavnih grafova s n vrhova i n bridova koji su unaprijed obilježeni?

2. Jesu li grafovi sa slike izomorfni?





3. Koliko ima različitih jednostavnih grafova (do izomorfizma) sa 7 vrhova i zbrojem stupnjeva većim od 39?

4. Grupi od n osoba pridruženo je m različitih poslova. Svaka osoba kvalificirana je za obavljanje k poslova, a za obavljanje pojedinog posla kvalificirano je k ljudi. Dokažite da je broj osoba jednak broju poslova.

5. Graf G zadan je matricom susjedstva:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nađite jednostavan povezan graf s istim nizom stupnjeva koji nije izomorfan s G

6. Može li se jednoznačno odrediti struktura jednostavnog grafa s n vrhova kojem je zadan niz stupnjeva $(1, 1, 2, \ldots, 2)$? Ispitajte što može biti takav graf! Što ako se doda uvjet da je graf povezan?

7. Nađite niz stupnjeva za kotač W_n s n vrhova. Uvjerite se neposredno da je broj vrhova neparnog stupnja paran.

8. Postoje li jednostavni grafovi sa sljedećim nizovima stupnjeva? Postoje li bipartitni grafovi sa sljedećim nizovima stupnjeva?

   A. $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5)$;

   B. $(4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$;

   C. $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3)$;

   D. $(3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5)$;

   E. $(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$.

9. Dan je niz stupnjeva jednostavnog povezanog grafa G s n vrhova: $(i_1, \ldots, i_n)$. Nađite niz stupnjeva njegovog komplementa $\overline{G}$

10. Graf G zadan je matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Skicirajte graf G i nađite njegovu matricu incidencije.

11. Neka je A matrica susjedstva grafa C_4 (kojem su vrhovi numerirani slijedom, npr. u smjeru kazaljke na satu). Izračunajte A^n

12. Ispitajte za koje n-ove je ciklički graf C_n bipartitan graf. Za koje n-ove je kotač W_n bipartitan?

13. Dokažite da je k-kocka Q_k bipartitan graf za svaki $k \geqslant 2$.

14. Može li bipartitan graf sadržavati trokut?

15. Uz koje uvjete na parametre su grafovi K_n, $K_{r,s}$ i W_n regularni? S kojim stupnjem regularnosti?

16. Postoji li jednostavan povezan 5-regularan graf sa 6, odnosno 7 i 8, vrhova?

17. Koliko je bridova potrebno dodati 1-regularnom grafu da bi se dobio 3-regularan graf?

18. Koliko vrhova ima 3-regularni graf s 2007 bridova?

19. Dokažite da je komplement r-regularnog jednostavnog grafa $(n-r-1)$-regularan.

20. Što je komplement 3-kocki Q_3? Možete li prepoznati geometrijsko tijelo u dobivenom komplementarnom grafu?

21. Koliko ima različitih samokomplementarnih grafove s 4 i s 5 vrhova?

22. Pokažite da K_3 i $K_{1,3}$ imaju iste bridne grafove.

23. Pokažite da je bridni graf tetraedra izomorfan s oktaedrom.

24. Odredite broj bridova bridnog grafa k-kocke Q_k, $k \geqslant 2$.

25. Triangularni graf $T(n)$ je bridni graf potpunog grafa K_n. Za koje vrijednosti $n \geqslant 3$ je $T(n)$ bipartitan?

Odgovori

1. $\binom{\binom{n}{2}}{n}$

2. Da.

3. 2.

6. Disjunktna unija jednog lanca i cikličkih grafova.

7. $(3, \dots, 3, n-1)$.

8. **A.** Ne. **B.** Q_4. **C.** Ne. **D.** $K_{3,5}$. **E.** C_7 je jedini takav graf, nije bipartitan.

9. $(n-1-i_n, \dots, n-1-i_1)$.

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11. $A^{2k} = \begin{bmatrix} 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} & 0 \\ 0 & 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} \\ 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} & 0 \\ 0 & 2^{2k-1} & 0 & 2^{2k-1} \end{bmatrix}, \quad A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 2^{2k} & 0 & 2^{2k} \\ 2^{2k} & 0 & 2^{2k} & 0 \\ 0 & 2^{2k} & 0 & 2^{2k} \\ 2^{2k} & 0 & 2^{2k} & 0 \end{bmatrix}$

12. Ciklički graf C_n je bipartitan kada je n paran. W_n nije bipartitan.

14. Ne.

15. K_n je $(n-1)$-regularan. $K_{r,s}$ je regularan za $r = s$. W_n je regularan za $n = 4$.

16. Postoji za 6 i 8 vrhova.

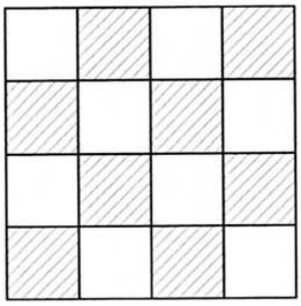
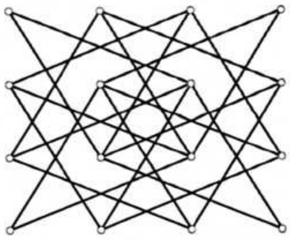
17. n.

18. 1338.

21. Samokomplementarni graf s 4 vrha je jedinstven, s 5 vrhova postoje 2.

24. $k(k-1)2^{k-1}$

25. Nikada.

Odgovoriti na početno pitanje, postoji li traženi obilazak skakača svih polja šahovske ploče, sada je očevidno ekvivalentan pitanju postoji li hamiltonovski ciklus u korespondentnom grafu. Za ploču dimenzije 4×4 očito ne, jer dovoljno je pogledati polja gore lijevo i dolje desno i vidjeti da su nužno sadržani u ciklusu duljine 4. Odgovorite si sada sami na pitanje postoji li ovakav skakačev obilazak za standardnu šahovsku ploču dimenzije 8×8. Ukoliko ste već načinili program za ispitivanje je li zadani graf hamiltonovski, odgovor ćete dobiti brzo. On je, toliko ćemo vam otkriti, potvrdan.

Zadatak 17. Dokaži da ne postoji skakačev obilazak za kvadratne šahovske ploče neparnoga reda.

Rješenje. Uočimo da je graf koji odgovara šahovskoj ploči bipartitan, jer skakač uvijek skačući po ploči mijenja boju polja. Sada se pozovimo na jedan od prethodnih zadataka, u kojem smo dokazali da je bipartitan graf s neparnim brojem vrhova nužno nehamiltonovski. Ako nam je zadana ploča reda $2k-1$, onda je ukupni broj polja ponovno neparan (kvadrat neparnog broja je neparan broj!) prema tome naš graf je upravo bipartitan graf s neparnim brojem vrhova, pa tvrdnja neposredno slijedi.

Zadaci za vježbu

1. Kakvu strukturu ima jednostavni graf s n vrhova kod kojeg je udaljenost svaka dva vrha jednaka 1? Kakvu strukturu ima jednostavni graf s n vrhova kod kojeg postoje vrhovi udaljeni za $n-1$?
2. Neka je $(1,1,1,2,2,x,3)$ rastući niz stupnjeva jednostavnog povezanog grafa G. Koliki je x? Je li ovim nizom struktura od G jednoznačno određena?
3. Koliko najmanje bridova može imati jednostavni povezani graf s n vrhova, $n \geqslant 4$, koji ima podgraf izomorfan s K_4?
4. Odredite bridnu povezanost 3-kocke Q_3 i potpunog bipartitnog grafa $K_{3,5}$.
5. Kolika je vršna povezanost kotača W_8?
6. Dokažite da k-kocka Q_k, $k \geqslant 2$, nema mostova.
7. Koliki je struk Petersenovog grafa?
8. Koliko ima neizomorfnih jednostavnih povezanih grafova s 5 vrhova struka strogo većeg od 3?

9. Potpuni tripartitni graf $K_{r,s,t}$ sastoji se od tri disjunktna skupa vrhova koji su kardinaliteta r, s i t redom, pri čemu su vrhovi susjedni ako i samo ako pripadaju različitim skupovima. Koliki je struk grafa $K_{r,s,t}$?

10. Ako graf G ima dva različita ciklusa koji sadrže brid e, dokažite da onda G ima ciklus koji ne sadrži e.

11. Odredite najmanji i najveći broj bridova jednostavnog povezanog grafa G s 15 vrhova. Ako bi G bio sastavljen od dvije komponente povezanosti, koji bi tada bio najmanji odnosno najveći broj bridova?

12. Zadana je matrica susjedstva grafa G,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koliko komponenti povezanosti ima G?

13. Koliko komponenti povezanosti ima šuma sa 67 vrhova i 59 bridova?

14. Neka je G jednostavan povezan 4-regularan graf s n vrhova, $n \geqslant 5$. Dokažite da uklanjanjem bilo kojih $n+2$ bridova G postaje nepovezan.

15. Neka je G jednostavan graf s $2k$ vrhova bez trokutova. Dokažite da G ima najviše k^2 bridova. Navedite primjer kada se ta gornja granica postiže.

16. Ako u stablu postoji vrh stupnja k, onda u tom stablu postoji barem k vrhova stupnja 1. Dokažite ovu tvrdnju!

17. Koliko je bridova potrebno dodati 1-regularnom grafu da bi se dobilo stablo? Može li se svako stablo s parnim brojem vrhova konstruirati na ovaj način, počevši od 1-regularnog grafa dodavanjem bridova?

18. Pronađite primjer dva neizomorfna stabla s istim nizom stupnjeva.

19. Koliko ima lanaca duljine k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, u potpunom grafu K_n?

20. Koliko ima neizomorfnih stabala sa 7 vrhova?

21. Koliko bridova treba ukloniti kotaču W_n da bi se dobilo jedno njegovo razapinjuće stablo? Mogu li se u kotaču W_n naći dva razapinjuća stabla bez zajedničkih bridova?

22. Konstruirajte jednostavni graf s 5 vrhova i s najmanjim brojem bridova tako da on ima dva razapinjuća stabla bez zajedničkih bridova. Je li moguće konstruirati graf s tim svojstvom s 4 vrha? A s 3 vrha?

23. Kako se neposredno iz matrice incidencije grafa može ustvrditi je li graf eulerovski?

24. Uz koje uvjete na parametre su k-kocka Q_k, triangularni graf $T(n)$ i kotač W_n eulerovski grafovi?

25. Ako je G jednostavan eulerovski graf, onda je i njegov bridni graf $L(G)$ također eulerovski. Dokažite.

26. Obilježite vrhove kocke Q_4 sa 16 vrhova i provedite na tom primjeru Fleuryev algoritam, te ispišite dobivenu eulerovsku stazu.

27. Provedite Fleuryev algoritam na grafu G zadanom matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

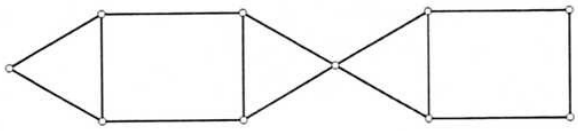
28. Nađite jednostavan povezan graf G s 4 vrha takav da je njegov komplement $\overline{G}$ povezan i da su G i $\overline{G}$ skoro eulerovski.

29. Neka je G jednostavan povezan graf s n vrhova, $n \geqslant 4$, takav da je $\overline{G}$ povezan. Odredite sve $n \geqslant 4$ za koje je istinita tvrdnja: G je eulerovski ako i samo ako je $\overline{G}$ eulerovski.

30. Koliko je najmanje bridova potrebno ukloniti Petersenovu grafu da bi on bio skoro eulerovski? Nađite u tom slučaju jednu takvu stazu.

31. Može li se dodavanjem bridova Petersenovom grafu dobiti eulerovski graf? Ako da, koliko je najmanje bridova potrebno dodati?

32. Koliko najmanje bridova treba dodati grafu sa slike da bi on postao jednostavan eulerovski graf?



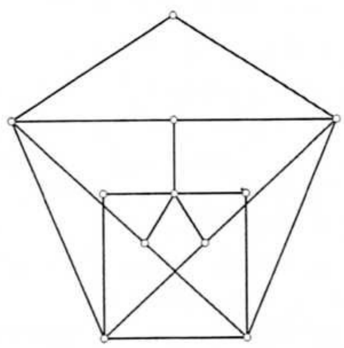
33. Kontraprimjerom pokažite da ne vrijedi obrat Diracovog teorema.

34. Dokažite ili primjerom opovrgnite:

A. Ako je povezan graf eulerovski, tada mu je bridni graf hamiltonovski.

B. Ako je povezan graf hamiltonovski, tada mu je bridni graf eulerovski.

35. Dokažite da je Grötzschov graf sa slike hamiltonovski.



36. Dokažite da je potpuni tripartitni graf $K_{r,2r,3r}$ hamiltonovski.

37. Neka je dan graf $H = Q_3 - v$, $v \in V(Q_3)$. Je li graf H hamiltonovski? Je li skoro hamiltonovski?

38. Odredite sve grafove s n vrhova kojima je eulerovska staza ujedno i hamiltonovski ciklus.

39. Uz koje uvjete na parametar k je k-kocka Q_k hamiltonovski graf?

40. Nađite 4 hamiltonovska ciklusa u potpunom grafu K_9 koji nemaju nijedan zajednički brid. Koliki je najveći broj disjunktnih hamiltonovskih ciklusa u K_{2n+1}?

41. Koliko različitih hamiltonovskih ciklusa imaju potpuni bipartitni graf $K_{n,n}$ i kotač W_n?

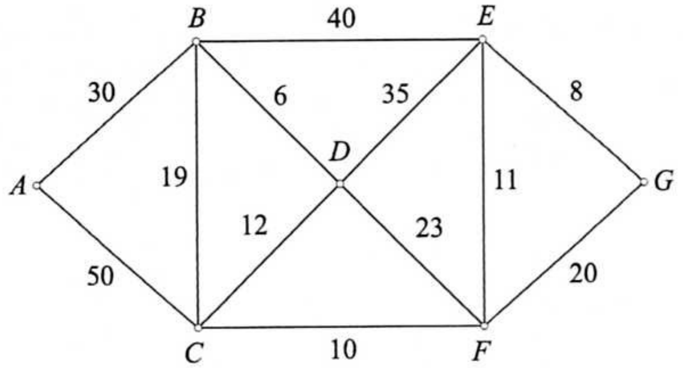
42. Neka je G graf s n vrhova, $n \geqslant 3$, i s $\dfrac{n^2-3n+6}{2}$ bridova. Dokažite da je G hamiltonovski. Nađite nehamiltonovski graf s n vrhova i $\dfrac{n^2-3n+4}{2}$ bridova.

Odgovori

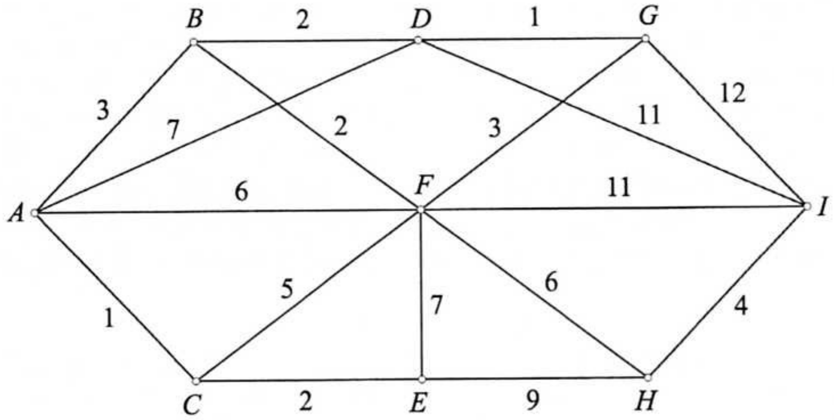
1. K_n, P_n.
2. $x = 2$. Struktura grafa nije jednoznačno određena.
3. $n + 2$.
4. $\lambda(Q_3) = 3$, $\lambda(K_{3,5}) = 3$.
5. $\kappa(W_8) = 3$.
7. 5.
8. 3.
9. 3.
12. 3.
13. 8.
15. $K_{k,k}$.
17. n. Ne.
19. $\dfrac{n(n-2)\ \ldots\ (n-k)}{2}$
20. 11.
21. $n - 1$. Da.
22. Ne postoji graf s 3 vrha i navedenim svojstvom.
23. Suma svakog retka mora biti paran broj.
24. Q_k eulerovski za k paran, $T(n)$ za svaki n, W_n nikada.
29. n neparan broj.
30. 4.
31. Da, najmanje 5 bridova.
32. 3.
34. **A.** Vrijedi. **B.** Ne vrijedi.
37. H nije hamiltonovski. H je skoro hamiltonovski.
38. C_n.
39. Za svaki $k \geqslant 2$.
40. $1-2-3-4-5-6-7-8-9-1$, $1-3-5-7-9-2-4-6-8-1$, $1-4-7-3-9-6-2-8-5-1$, $1-6-3-8-4-9-1-2-7-1$. K_{2n+1} ima najviše n disjunktnih hamiltonovskih ciklusa.

Zadaci za vježbu

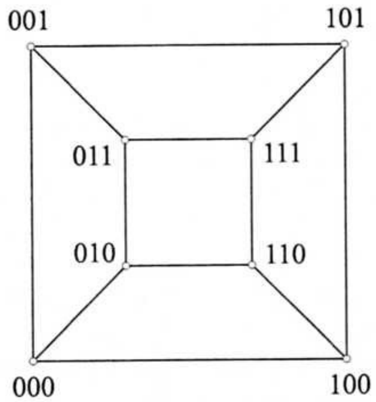
1. Odredite najkraći put od vrha A do vrha G na grafu sa slike.



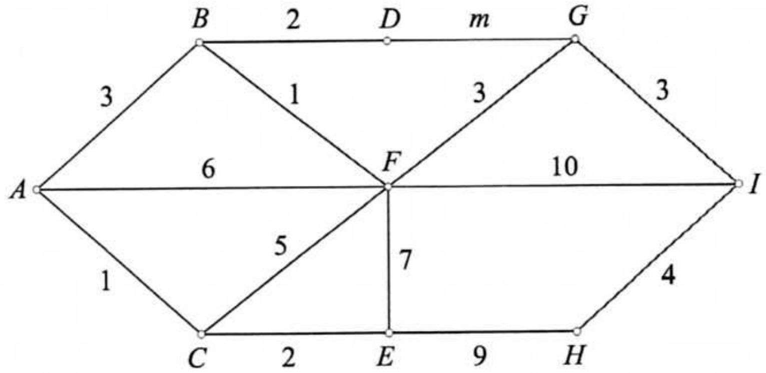
2. Odredite najkraći put od vrha A do vrha I na grafu sa slike.



3. Na slici je zadana 3-kocka Q_3. Svakom bridu $e = v_1v_2$ pridružena je težina $w(e) = (v_1 \text{ xor } v_2)_{10}$. Na primjer, $w(001, 101) = 4$ jer $001 \text{ xor } 101 = 100_2 = 4_{10}$. Nađite nakraći put od vrha 001 do vrha 100.



4. U ovisnosti o parametru $m \in \mathbf{N}$ odredite najkraći put od vrha A do vrha I na grafu sa slike.

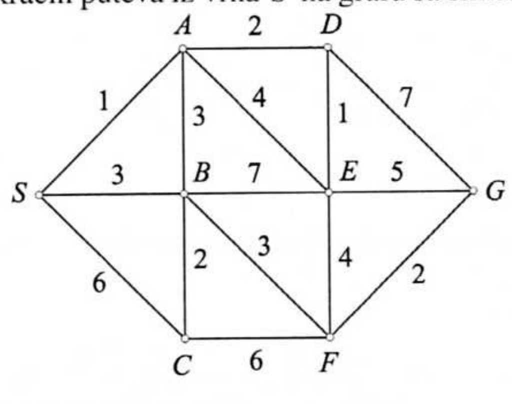


5. Graf G, sa skupom vrhova $V(G) = \{1,2,3,4,5,6\}$ zadan je matricom susjedstva

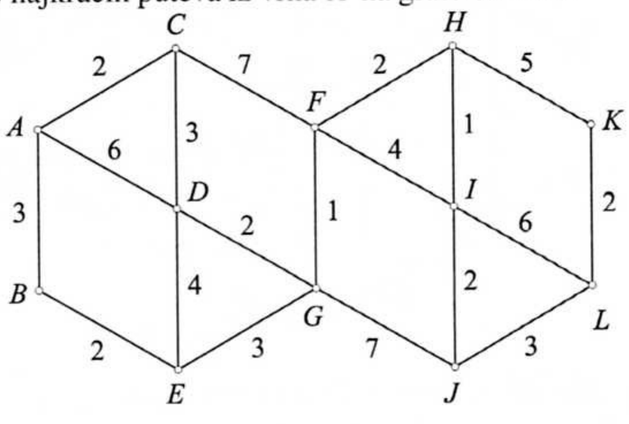
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Za vrhove $i,j \in V(G)$, $i \neq j$, zadana je težina brida među njima $w(i,j) = i + j$. Nađite stablo najkraćih puteva iz vrha 1.

6. Pronađite stablo najkraćih puteva iz vrha S na grafu sa slike.



7. Pronađite stablo najkraćih puteva iz vrha A na grafu sa slike.



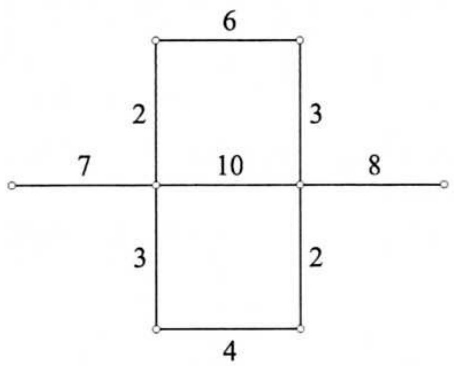
8. Korporacija ima ogranke u 6 gradova $G_1, G_2, \ldots, G_6$. Cijena direktnog leta od grada G_i do grada G_j zapisana je kao element na mjestu (i,j) sljedeće matrice (znak ∞ zapisan je na mjestima gdje direktan let ne postoji)

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

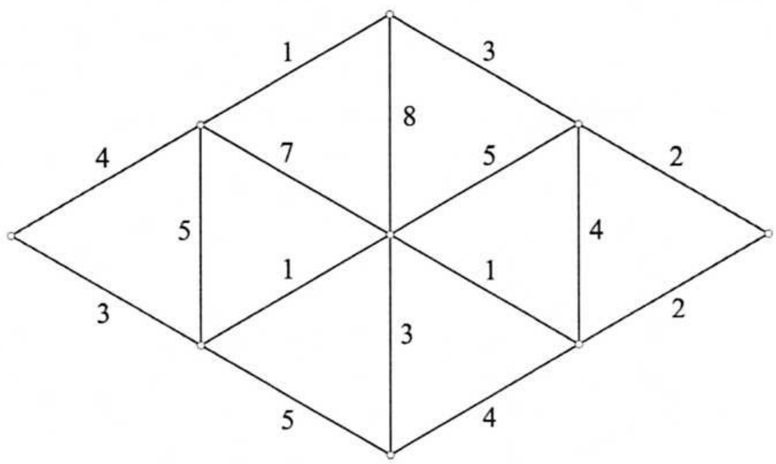
Izračunajte tablicu najjeftinijih zrakoplovnih ruta između svaka dva od ovih 6 gradova.

9. Osmislite algoritam za nalaženje struka zadanog jednostavnog grafa.

10. Kolika je duljina rješenja kineskog problema poštara za graf sa slike?



11. Kolika je duljina rješenja kineskog problema poštara za graf sa slike?

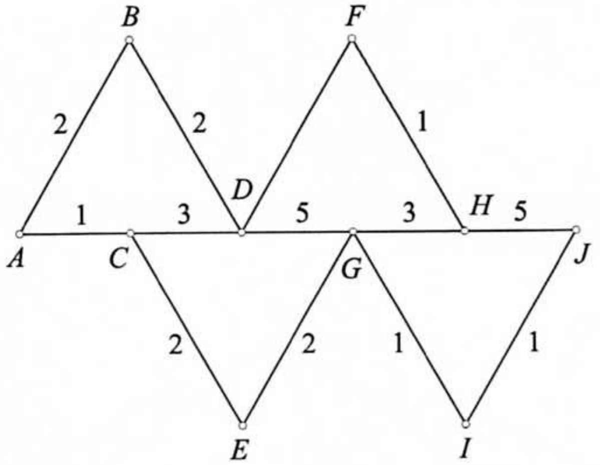


12. Graf je zadan težinskom matricom susjedstva

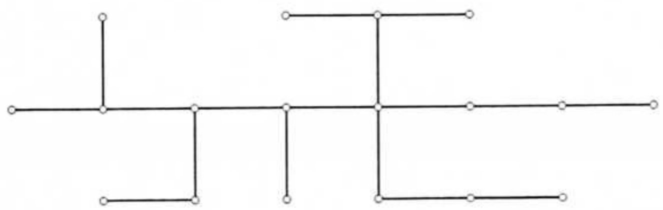
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 3 & \infty & \infty & 11 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 12 & \infty & 7 & 7 \\ 1 & \infty & 4 & 0 & \infty & 21 & 9 & \infty \\ \infty & 3 & 12 & \infty & 0 & 16 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 21 & 16 & 0 & 2 & \infty \\ \infty & \infty & 7 & 9 & \infty & 2 & 0 & 3 \\ \infty & 11 & 7 & \infty & 2 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Kolika je duljina rješenja kineskog problema poštara za ovaj graf?

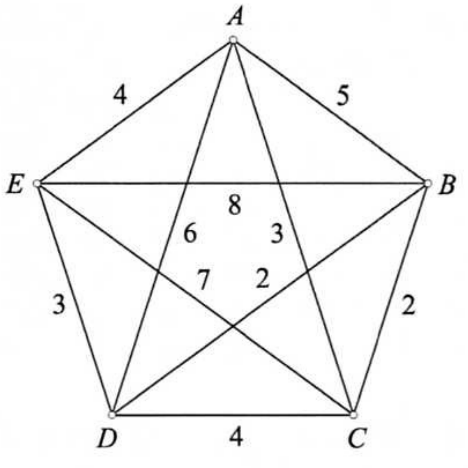
13. Grafom je zadan kineski problem poštara. Kolika mora biti cjelobrojna težina pridijeljena bridu DF da bi poštar tim bridom sigurno prošao dvaput?



14. Uz pretpostavku da su sve ulice jednako dugačke (npr. da im je duljina 1), riješite kineski problem poštara za graf sa slike.



15. Ispitajte daje li pohlepni algoritam rješenje problema trgovačkog putnika za težinski graf sa slike.

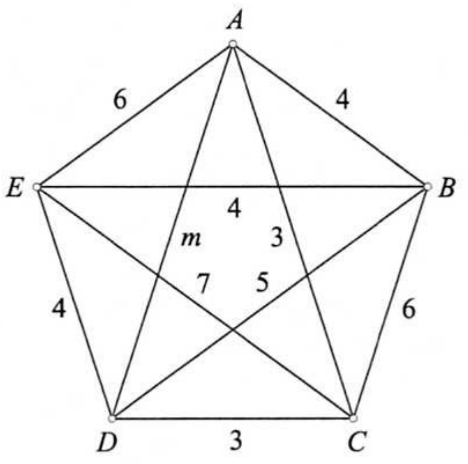


16. Nađite hamiltonovski ciklus najveće ukupne duljine za težinski graf iz prethodnog zadatka.

17. Ispitajte daje li pohlepni algoritam rješenje problema trgovačkog putnika za težinski graf zadan težinskom matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

18. U ovisnosti o parametru $m \in \mathbf{N}$ riješite pohlepnim algoritmom problem trgovačkog putnika za težinski graf sa slike.



Odgovori

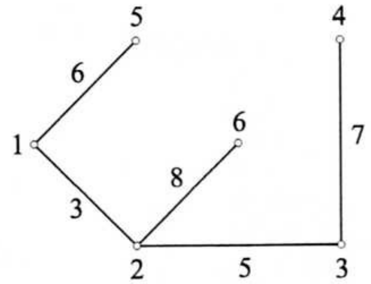
1. $A - B - D - C - F - E - G$.

2. $A - B - F - H - I$

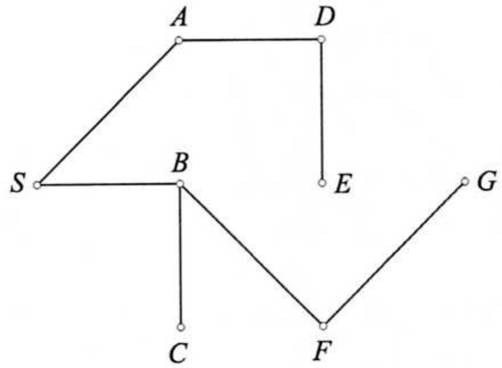
3. $001 - 101 - 100$.

4. Za $m = 1, 2$ najkraći put je $A - B - D - G - I$ Za $m \geqslant 3$ najkraći put je $A - B - F - G - I$

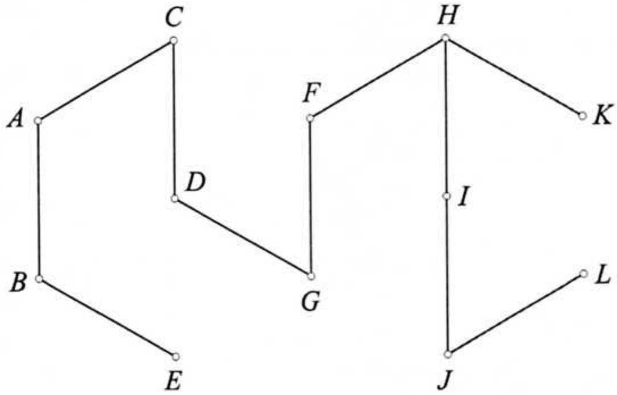
5.



6.



7.



8. $$\begin{bmatrix} 0 & 35 & 45 & 35 & 25 & 10 \\ 35 & 0 & 15 & 20 & 20 & 25 \\ 45 & 15 & 0 & 10 & 20 & 35 \\ 35 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & 20 & 20 & 10 & 0 & 35 \\ 10 & 25 & 35 & 25 & 35 & 0 \end{bmatrix}$$

10. 69.

11. 68.

12. 117.

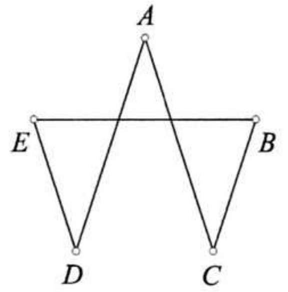
13. Najviše 2.

15. Da.

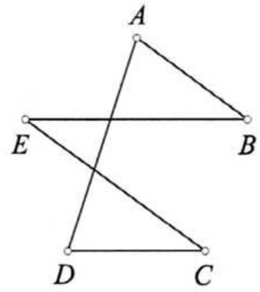
16. $A - C - D - B - E - A$.

17. Ne.

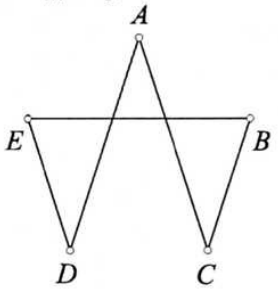
18. $m = 1, 2$



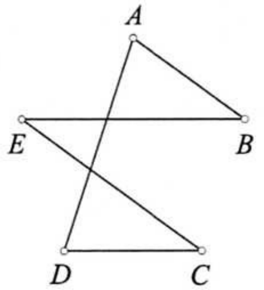
ili



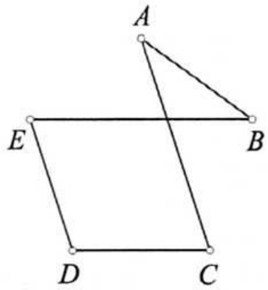
$m = 3$



ili



ili



$m \geqslant 4$