

Ponovljeni završni međuispit iz Matematike 3R

(pitanja iz trećeg ciklusa nastave)

02.02.2009.

Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 2h i 30 min.

1. (4 boda)

Komunikacijskim kanalima mogu se predati poruke koristeći se samo trima slovima a , b i c . Dopustive poruke su one kod kojih se na susjednim mjestima ne pojavljuje simbol a . Koliko ima dopustivih poruka duljine n ?

2. (3 boda)

Odredite rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje

$$a_n = A + B2^n + C2^n \cos \frac{n\pi}{3} + D2^n \sin \frac{n\pi}{3}.$$

3. (4 boda)

- a) **(2b)** Koliko ima jednostavnih grafova s označenim (labeliranim) vrhovima s n vrhova i n bridova?
- b) **(2b)** Može li se za jednostavni povezan graf koji ima n vrhova i n bridova odrediti broj različitih ciklusa u njemu?

4. (5 bodova)

- a) **(1b)** Definirajte stablo.
- b) **(2b)** Dokažite da stablo s n vrhova ima $n - 1$ bridova.
- c) **(2b)** Dokažite da u svakom stablu s n vrhova, $n \geq 2$, postoje barem dva vrha stupnja 1.

5. (4 boda)

Neka je G jednostavan povezan graf takav da je \overline{G} povezan. Neka je $|V(G)| = n, n \geq 4$.

- a) **(2b)** Odredite sve $n \geq 4$, za koje je istinita tvrdnja: G je eulerovski ako i samo ako je \overline{G} eulerovski.
- b) **(2b)** Nađite jednostavan povezan graf G s 4 vrha tako da su G i \overline{G} skoro eulerovski.

6. (2 boda)

- a) **(1b)** Odredite matricu susjedstva grafa K_5 .
- b) **(1b)** Nacrtajte graf K_5 i naznačite Hamiltonov ciklus u tom grafu.

7. (3 boda)

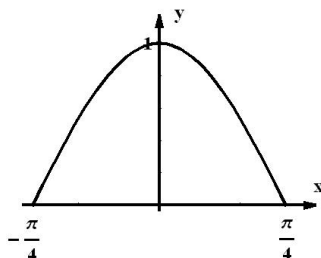
Riješite kineski problem poštara za graf $K_{2,5}$ pri čemu je svakom bridu pridijeljena težina 1. Objasnite da li rješenje ovisi o izboru početnog vrha.

Pitanja iz cijelog gradiva

8. (4 boda)

Pomoću razvoja u Fourierov integral funkcije f zadane slikom, izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{4-x^2} dx.$$



9. (3 boda)

Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^2 \cos x dx.$$

10. (4 boda)

Koliko ima četveroznamenastih brojeva kojima je

- a) **(1b)** prva znamenka paran broj,
- b) **(1b)** prva znamenka neparan broj,
- c) **(1b)** prva i zadnja znamenka paran broj,
- d) **(1b)** prva ili zadnja znamenka paran broj?

11. (4 boda)

Graf G , sa skupom vrhova $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, zadan je matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Za vrhove $i, j \in V(G)$, $i \neq j$ zadana je težina brida među njima $w(\{i, j\}) = i + j$. Koristeći Dijkstrin algoritam nađite stablo najkraćih putova iz vrha 1.

Rješenja ponovljenog završnog međuispita iz Matematike 3R

02.02.2009.

1. $d_n = 2d_{n-1} + 2d_{n-2}$
 $d_n = \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n + \frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n$

2. $a_{n+4} - 5a_{n+3} + 12a_{n+2} - 16a_{n+1} + 8a_n = 0$

3. a) $\binom{n}{2}$
b) Može. Jedan ciklus.

4. a) Povezan graf bez ciklusa zovemo stablo.
b) (2b) Knjiga, str 24.
c) (2b) Knjiga, str. 24

5. a) n neparan.

6. a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

7. Ukupna duljina: $10 + 2 = 12$.

8. $\frac{\pi}{4}$

9. $-\frac{1}{2}$

10. a) 4000
b) 5000
c) 2000
d) 6500

11. $l(2) = 3, l(5) = 6, l(3) = 8, l(6) = 11, l(4) = 15$