4. REKURZIVNE RELACIJE

by nradomi

Fibonaccijev slijed

Fibonaccijev slijed F_n se definira sa početnim vrijednostima $F_0=0$, $F_1=1$ i rekurzivnom relacijom $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$. $n=2,3\dots$

Za Fibonaccijev slijed $(F_n)_{n\in N_0}$ vrijedi $F_n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

Linearne rekurzivne relacije

Opći oblik rekurzivne relacije reda r :

$$a_n=c_1a_{n1}+c_2a_{n2}+\dots c_ra_{n-r}+f(n), n\geq r$$

gdje su : $c_1,c_2,\dots c_r$ realni ili kompleksni koeficijenti
$f(n)$ je zadana funkcija koja prirodnim brojevima $n\geq r$ pridružuje realne(ili kompleksne).

Linearne homogene rekurzivne relacije s konstantnim koeficijentima

kažemo da je rekurzivna relacija homogena ako je $f(n)=0\ \forall\ n$

$$a_n=c_1a_{n1}+c_2a_{n2}+\dots c_ra_{n-r}, n\geq r$$

Homogene rekurzivne relacije rješavamo pomoću Eulerove supstitucije:

$$a_n=x^n$$
$$x^n=c_1x^{n-1}+\dots+c_rx^{n-r}\ /:x^{n-r}$$
$$x^r-c_1x^{r-1}-\dots-c_r=0$$

Slučaj r različitih korijena karakteristične jednadžbe $x_1, \dots, x_r$

Primjer:

$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$; $n \geq 3$; početni uvjeti $a_0 = 2, a_1 = 1, a_2 = 5$

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

$x_1 = -1; x_2 = 2; x_3 = 3$
$a_n = A(-1)^n + B2^n + C3^n$

$a_0 = 2$ ... $2 = A(-1)^0 - B2^0 + C3^0$
$a_1 = 1$ ... $1 = -A + 2B + 3C$
$a_2 = 5$ ... $5 = A + 4B + 9C$
$A = 1, B = 1, C = 0$

$a_n = (-1)^n + 2^n$

Slučaj kada postoje višestruki korijeni karakteristične jednadžbe

Npr. ako je karakteristična jednadžba : $x^2 - 6x + 9 = 0$
tada su korijeni : $x_{1,2} = 3$ njegova kratnost $m = 2$
Tada opće rješenje dobivamo: $a_n = (A + Bn)3^n$
Da je kratnost bila $m = 3$ tada bi bilo $A + Bn + Cn^2$, što znači da zavisi o kratnosti veličina polinoma.

Ako su x_1 i x_2 par kompleksno karakterističnih korijena , onda za opće rješenje umjesto x_1^n i x_2^n možemo uzeti $r^n \cos n\varphi$ i $r^n \sin \varphi$

Primjer
$a_n = -2a_{n-2} - a_{n-4}$
$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
$(x^2 + 1)^2 = 0$
$x_1 = i (m_1 = 2)$
$x_2 = -i (m_2 = 2)$
$a_n = (A + Bn)i^n + (C + Dn)(-i)^n$
zamjenjujemo kompleksno konj. par s ekvivalentnim trigonom. parom
$a_n = (A + Bn)\cos n\frac{\pi}{2} + (C + Dn)\sin n\frac{\pi}{2}$

Nehomogene rekurzivne relacije

$$a_n = c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \dots c_r a_{n\_r} + f(n), n \geq r$$

$a_n^{(o)}$ opće rješenje pripadne homogene rekurzivne relacije , a $a_n^{(p)}$ partikularno rješenje. Tada je:

$$a_n = a_n^{(o)} + a_n^{(p)}$$

Partikularno rj. nehomogene jednadžbe

(1) nehomogeni dio $f(n)$ zadan kao polinom k-tog stupnja u n

(a) ako je $x = 1$ (neke kratnosti m) jedan od korijena:

$$a_n^{(p)} = n^m (A_0 + A_1 n + \dots + A_k n^k)$$

(b) ako $x = 1$ (neke kratnosti m) **nije** jedan od korijena:

$$a_n^{(p)} = A_0 + A_1 n + \dots + A_k n^k$$

(2) nehomogeni dio $f(n)$ zadan kao eksponencijalna funkcija u n, tj. $f(n) = Cb^n$

(a) ako je $x = b$ (neke kratnosti m) jedan od korijena:

$$a_n^{(p)} = A n^m b^n$$

(b) ako $x = b$ (neke kratnosti m) **nije** jedan od korijena:

$$a_n^{(p)} = A b^n$$

Tablično:

$x \neq 1(b)$

$$\left|\begin{array}{c|c} f(n) & a_n^{(p)} \\ C & A \\ Cn & An+B \\ P_k(n) & Q_k(n) \\ Cb^n & Ab^n \end{array}\right|$$

$x = 1(b)$ kratnosti m

$$\left|\begin{array}{c|c} f(n) & a_n^{(p)} \\ C & An^m \\ Cn & n^m(An+B) \\ P_k(n) & n^m Q_k(n) \\ Cb^n & An^m b^n \end{array}\right|$$

Napomena! Ako f(n) sadrži polinomni oblik i eksponencijalni oblik tada to rješavamo kao 2 različite nehomogene jednadžbe.

Primjer (Zad3. 84.str)

$$a_n+2a_{n1}-8a_{n\_2}=2^n-4, \; n \geq 2$$

(homogeni dio)

$$x^2+2x-8=0$$
$$x_1=-4 \, x_2=2$$

$$a_n^{(o)}=A(-4)^n+B2^n$$

(p1)

$$a_n+2a_{n1}-8a_{n\_2}=-4$$

$a_n^{(p1)}$ je oblika : $a_n^{(p1)}=A$

to uvrstimo umjesto svih a_n

$A+2A-8A=-4$

$A=\frac{4}{5}$

$a_n{}^{(p1)}=\frac{4}{5}$

(p2)
$a_n+2a_{n1}-8a_{n\_2}=2^n$

zbog korijena $x_2=2\;(m=1)\;a_n{}^{(p2)}$ je oblika: $a_n{}^{(p2)}=An2^n$

pišemo :

$An2^n+2A(n-1)2^{n-1}-8A(n-2)2^{n-2}=2^n\,/:2^n$

$A=\frac{1}{3}$

$a_n{}^{(p2)}=\frac{1}{3}n2^n$
Konačno rj. :
$a_n=a_n{}^{(o)}+a_n{}^{(p1)}+a_n{}^{(p1)}=A2^n+B(-4)^n+\frac{1}{3}n2^n+\frac{4}{5}$

PODSJETNIK 1! Ako je kojim slučajem (**a često bude**) nakon uvrštavanja pretpostavljenog partikularnog rj. izgleda :
$An+B=4(A(n-1)+B)-4(A(n-2)+B)-2n$
pokraćeno: $An+B=4A-2n$
tada polinome istog stupnja izjednačimo:
$n ... A=-2$

$1 ... B=4A$

PODSJETNIK 2! Da bih izvukli korijene iz polinoma većih stupnjeva , možemo odredit prvi korijen tako da uvrstimo u jednadžbu djelitelje slobodnog člana, te nakon toga taj polinom dijelimo da bih dobili polinom nižeg stupnja.
Tako možemo ponavljati isti postupak dok ne dobijemo sve korijene.
Npr. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0$
Djelitelji slobodnog člana u ovom slučaju su ± 1 Uvrstimo jedan pa drugi i otkrijemo da je $x_1=1$

Zatim dijelimo: $x^4-4x^3+6x^2-4x+1=0\;/:(x-1)$

Primjeri rješavanja Eulerovom metodom

Kod ovog dijela zapravo nema ništa novo , već su prikazani rekurzivni zadaci u tekstualnom obliku. Poanta svih zadataka je da se iz teksta dobije rekurzivna relacija koju nastavljamo rješavat na standardan način.

Primjer.

Nađimo zbroj $1+2^2+\ldots+n^2$ u zatvorenoj formi, tj. kao zatvorenu funkciju od $n \in N$.
Označimo $a_n = 1+2^2+\ldots+n^2$.
Možemo primijetiti da je:

$$\underbrace{1+2^2+\ldots+(n-1)^2}_{a_{n-1}}+n$$

te tako dobivamo sljedeću nehomogenu relaciju: $a_n = a_n - 1 + n^2$
koju sad nastavimo normalno rješavati.

Rješavanje s pomoću funkcija izvodnica

Za početak nekoliko usporedbi koje mogu kasnije pomoći u daljnjem rješavanju.

$$\sum_{n=0}^{m} a_n = \sum_{n-1=0}^{m} a_{n-1} = \sum_{n=1}^{m+1} a_{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}$$

Odmah ću započeti s primjerima, kako bi što lakše objasnio način rješavanja.

Primjer.1. (89.str.ZAD.1.)

Odredi funkciju izvodnicu za slijed određen rekurzivnom relacijom

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + n*2^n, a_0 = a_1 = 1$$

prvo postavimo da je $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Zatim množimo relaciju:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + n*2^n \Big/ x^{n+2} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty}$$

Dobijemo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} n*2^n x^{n+2}$$

Koristeći već prije spomenute promjene na sumi i "izbacimo" van sume "višak", pišemo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2x)^{n-1}$$

Sada radimo supstituciju suma sa f(x):

(1) $$f(x) - a_0 - a_1 x = x(f(x) - a_0) + 2x^2 f(x) + x^3 \sum_{n=0}^{\infty} 2n(2x)^{n-1}$$

Budući da nismo još riješili nehomogeni dio, izdvajamo ga sa strane :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n(2x)^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n\right)' = \left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{2}{(1-2x)^2}$$

Sad se to vrati nazad u **(1)** i sve pokratimo , izjednačimo itd. da bi dobili rješenje oblika :

$f(x) = \dots$

NAPOMENA!

Drugi oblik za rješavanje pomoću funkcije izvodnice je da ima u nehomogenom dijelu razlomak. Tad se on rješava pomoću integrala.

Također je bitno od kojeg najmanjeg n počinje slijed. Ako je npr. $n \geq 2$

tad je $f(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_n x^n$

DODATAK by Brzzi

„ok ajmo polako po redu rješavat možda sjedne kome nije do sad...“

---

dakle zadatak glasi:
$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2} - 6a_{n-3}$, uz $n \geq 3$ s početnim uvjetima $a_0 = 2, a_1 = 1$ te $a_2 = 5$,

dakle ideja je da a_n zamijenite sa X^n s time da mijenjate i potencije kako vam idu znači 2. korak je ovo
$X^n = 4X^{n-1} - X^{n-2} - 6X^{n-3} | : X^{n-3}$ dijelimo sa najmanjom potencijom pa dobijemo:
$X^3 - 4X^2 + X + 6 = 0$, sad trebamo naći nultočke, ukoliko postoje cjelobrojne nultočke one dijele cjelobrojni član, znači potencijalne su $\{-1,1,-2,2-3,3,-6,6\}$, mi uzmemo na blef -1 uvrstimo u formulu i skužimo da je $0 = 0 \Rightarrow -1$ je nultočka i dijeli polinom
$\Rightarrow (x+1) | P(x)$
e sad dolazi dijeljenje polinoma
$(X^3 - 4X^2 + X + 6 = 0) : (x+1) = X^2 - 5x + 6$ (ovo bi svi trebali znati podijeliti valjda)
tu smo dobili još 2 nultočke $x_2 = 2, x_3 = 3$ dakle opće rješenje naše jednadžbe je
$a_n = \lambda_1 (-1)^n + \lambda_2 2^n + \lambda_3 3^n$ sada tek uvrštavamo naše početne uvjete dakle
za $n = 0 2 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
za $n = 1 1 = -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3$
za $n = 2 5 = \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3$ kada to sve sredimo dobijemo
$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0$ te uvrstimo natrag u formulu i rješenje je
$a_n = (-1)^n + 2^n$
nadam se da je malo jasnije na tom se skoro baziraju svi zadaci na ovom principu

DODATAK by mali_11

DIFERENCIJSKE JEDNADZBE (rekurzivne relacije)

OPCE RJESENJE(računa se uvijek i to tako da se izbaci funkcija smetnje(ako postoji)):

npr.
a_n = a_n-1 + 2a_n-2 --> ovaj zapis prevodimo u karakteristični polinom i računamo nultočke --> x^2 - x - 2 = 0, x1 = -1, x2 = 2..

zapisujemo rješenje u obliku: a_n = A*(-1)^n + B*(2)^n, pri čemu se A i B mogu odrediti ukoliko su zadani početni uvjeti tipa (a_0 = 2, a_1 = 3 pa se to uvrsti u jednadžbu)..
3 TIPA:
1. SVA RJESENJA RAZLICITA(primjer gore)
2. VISESTRUKA RJESENJA(tipa x1 = x2 = x3 = 2, onda bi a_n = A*2^n + B*n*2^n + C*n^2*2^n)
3. KONJUGIRANO-KOMPLEKSNA RJESENJA(sin i cos zapis)

ako postoji f-ja smetnje(nešto sto nema a_n u sebi tipa: n, 2^n, 5, i slično), računamo partikularno rješenje(naravno opet imamo opće za koje izbacimo tu smetnju i izračunamo, a partikularno računamo posebno)..

npr.
a_n = a_n-1 + 2a_n-2 + 5, 5 je ta smetnja pa ce a_p = K --> pretpostavljeni oblik partikularnog

PARTIKULARNO:
imate onu tablicu u knjizi i ona vam sve kaže. Dakle za neki oblik funkcije smetnje kakvo ce biti vaše pretpostavljeno rješenje

smetnja
1. C
2. C*a^n - a nije rješenje homogene
3. C*a^n - a je jedno od rješenja homogene
4. C*n^m
5. Asin/cos(wn)

a_p
1. K
2. K*a^n
3. K*n*a^n pri čemu se ovaj n potencira na potenciju kolika je kratnost rješenja(koliko puta je a rješenje)
4. K0 + K1n + .. + Km*n^m
5. K1cos(wn) + K2sin(wn)

sad kad smo pretpostavili oblik partikularnog, njega uvrstimo u početnu jednadžbu(ako vam je lakše možete si sa strane izračunati sve posebno(a_n, a_n-1, a_n-2, ..) i onda uvrstiti u početnu jednadžbu(a_n = a_n-1 + 2a_n-2 + 5) i izjednačavanjem koeficijenata naći konstante u pretpostavljenom obliku partikularnog rješenja

UKUPNO RJESENJE:
a_n = a_homogeno + a_partikularno

ZAPAMTITE: U PARTIKULARNOM RJESENJU NEMA NEODREDENIH KOEFICIJENATA (tipa A, B, C, ...), NJIH UVIJEK MORATE IZRACUNATI UVRSTAVANJEM PRETPOSTAVLJENOG RJESENJA U POCETNU JEDNADZBU!!! KOD HOMOGENOG RJESENJA POSTOJE KONSTANTE KOJE SE RACUNAJU UVRSTAVANJEM POCETNIH UVJETA U UKUPNO RJESENJE!!! (ako su početni uvjeti zadani)