5. DZ

1.

POPOKATEPETL

- zamijenimo podriječ PETAK sa X

PPOOETLX

- imamo 8! permutacija
- ali P i O se pojavljuje 2 puta pa moramo dijeliti sa 2!2!
- konačno : $\frac{8!}{2!2!} = \frac{8!}{4}$

2.

- podskupova skupa $\{1,2,3, \dots 2n\}$ ima 2^{2n}
- podskupova skupa $\{1,2,3, \dots 2n\}$ koji se sastoje samo od parnih brojeva ima 2^n (izbacimo sve neparne)
- konačno : $2^{2n} - 2^n$

3.

a)

- za svako vino biramo 2 čovjeka od 4, pa imamo $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \dots = \binom{4}{2}^7$

b)

- prvo napunimo po 2 čaše svakim vinom, ostaje nam $30 - 7 \cdot 2 = 16$ čaša
- sad to možemo promatrati kao : $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6 + v_7 = 16$
- pa je to : $\binom{16+7-1}{16}$

4.

- 2 načina:

1)

- uvodimo x_5

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2005$$

- budući da $x_1 - x_4$ moraju biti najmanje 1 (zbog uvjeta $\mathbb{N}$) jedn. postaje:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2001$$

- i to je $\binom{2001+5-1}{2001} = \binom{2005}{2001} = \binom{2005}{4}$

2)

- rješavamo jednadžbu:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$$

za a od 4 do 2005 (4 je najmanje moguće rješenje)

- budući da $x_1 - x_4$ moraju biti barem 1, onda imamo ovakvu jedn.:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k \quad , \; k = a - 4$$

- a to je $\binom{4+k-1}{k} = \binom{4+a-4-1}{a-4} = \binom{a-1}{a-4}$

- konačno: $\sum_{a=4}^{2005} \binom{a-1}{a-4}$

5.

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = 2^{10}$$

$$x_i = 2^{y_i}$$

- pa dobivamo:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 10$, $y_i \geq 0$ jer inače x_i neki bio cijeli broj

- za to imamo $\binom{10+4-1}{10}$ načina

- uz to, treba nam paran broj "$-$" predznaka od x_i
- možemo ih izabrati na $\binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 8$ načina da bi rješenje bilo pozitivno
- konačno: $8 \cdot \binom{13}{10} = 8 \cdot \binom{13}{3}$

6.

a)

- prvo svakom djetetu damo 1 krušku, pa imamo:
  10 jabuka i 14 krušaka

- to nam daje: $\binom{10+6-1}{10}\binom{14+6-1}{14} = \binom{15}{5}\binom{19}{5}$ načina

b)

- ukupan broj podjela: $\binom{10+6-1}{10}\binom{20+6-1}{20} = \binom{15}{10}\binom{25}{20}$
- na $\binom{6}{1}$ načina možemo izabrati koje dijete neće dobiti voćku, pa imamo $\binom{14}{10}\binom{24}{20}$ podjela
- na $\binom{6}{2}$ načina biramo 2 djece bez voćke, pa imamo $\binom{13}{10}\binom{23}{20}$ podjela

- ukupno: $\sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{6}{i}\binom{15-i}{10}\binom{25-i}{20}$

7.

- prvo dijelimo kruške:

svako dijete mora dobiti bar jednu, pa imamo $\binom{8+5-1}{8}$

- za jabuke:

onom jednom damo 1 jabuku, ostaje nam 24

tih 24 podijelimo u parovima, znači dijelimo 12 parova jabuka

tako će svi imati paran broj, osim onog jednog koji je na početku dobio jednu

$\binom{12+5-1}{12}$

- ukupno: $\binom{12+5-1}{12}\binom{8+5-1}{8}$

8.

- djeljivih sa 7 ima: $\left\lfloor \frac{850}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor = 121 - 14 = 107 \rightarrow |A_1|$
- djeljivih sa 11 ima: $\left\lfloor \frac{850}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor = 77 - 9 = 68 \rightarrow |A_2|$
- djeljivih sa 13 ima: $\left\lfloor \frac{850}{13} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{13} \right\rfloor = 65 - 7 = 58 \rightarrow |A_3|$
- djeljivih sa 7 i 11 ima: $\left\lfloor \frac{850}{77} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{77} \right\rfloor = 11 - 1 = 10 \rightarrow |A_1 \cap A_2|$
- djeljivih sa 7 i 13 ima: $\left\lfloor \frac{850}{91} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{91} \right\rfloor = 9 - 1 = 8 \rightarrow |A_1 \cap A_3|$
- djeljivih sa 11 i 13 ima: $\left\lfloor \frac{850}{143} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{143} \right\rfloor = 5 - 0 = 5 \rightarrow |A_2 \cap A_3|$
- djeljivih sa 7 i 11 i 13 ima: $\left\lfloor \frac{850}{1001} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{100}{1001} \right\rfloor = 0 \rightarrow |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

- ukupno: $|A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 210$

(9.)

- ukupno ima 3^{10} podjela (za 1. kuglicu biramo 1 od 3 kutije, pa tako za 2., itd.)
- ako je 1 kutija prazna, imamo 2^{10} podjela, a kutiju koja će biti prazna biramo na $\binom{3}{1}$ načina
- ako su 2 kutije prazne, imamo 1^{10} podjela, a kutije biramo na $\binom{3}{2}$ načina
- ukupno: $3^{10} - \binom{3}{1} 2^{10} + \binom{3}{2}$

(10.)

- ukupan broj podjela je: 5^n
- broj podjela u kojima nema praznih kutija je $|Sur(n,5)| = \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{5}{i} (5-i)^n$
- rješenje: $5^n - \sum_{i=0}^{5} (-1)^i \binom{5}{i} (5-i)^n$

(11.)

- smatrajući da su sve jabuke jednake, ukupan broj podjela je: $\binom{27+10-1}{27}$
- ovdje, su uključena i rješenja kad sva djeca dobivaju jabuke
- kad svako dijete mora dobiti bar jednu jabuku imamo jedn.: $x_1 + \dots + x_{10} = 27-10$
- a to je $\binom{17+10-1}{17}$ načina

- naše rješenje: $\binom{36}{27} - \binom{26}{17}$ načina

(12.)

- ovo je isto kao da 8 razl. predmeta dijelimo na 5 razl. kutija, tako da u svakoj bude bar 1 predmet

$$|Sur(8,5)| = \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} (5-k)^8$$

13.

a)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (m-1)^{n-k} = (\text{množim sa } 1^k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k (m-1)^{n-k} = (x_1=1,\ x_2=m-1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^{k} x_2^{n-k} = (k=n_1) = \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} x_1^{n_1} x_2^{n-n_1} = (n_2 = n-n_1) =$$

$$= \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} = (x_1+x_2)^n = m^n$$

b)

$$\sum_{\substack{n_i \geq 0 \\ n_1+n_2+\dots+n_k=n}} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} = (\text{množim s } 1^{n_1}\cdot 1^{n_2}\cdot\ldots\cdot 1^{n_k}) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} \cdot 1^{n_1}\cdot\ldots\cdot 1^{n_k} =$$

$$= (x_i=1) = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!\,n_2!\dots n_k!} \cdot x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k} = (x_1+x_2+\dots+x_k)^n = k^n$$

14.

- biramo jednu koja će biti prazna : 4 načina
- ostale preostale dijelim na $|Sur(9,3)|$ načina
- rješenje: $4\sum_{k=0}^{3} (-1)^k \binom{3}{k} (3-k)^9$

15.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1$$

$a_n = b_n + c_n$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n}$

$$b(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - 1 = e^{-x} - 1$$

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln|x+1|$$

$$h(x) = b(x) + c(x) = e^{-x} - \ln|x+1| - 1$$

16.

$a_n = n^2 \binom{100}{n} \quad , n \geq 1$

$b_n = \binom{100}{n}$

$g(x) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{100}{n} - 1 = (1+x)^{100} - 1$

$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^n$

$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1}$

$x \cdot g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n$

$(x g'(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^{n-1}$

$x (x g'(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 b_n x^n$

$h(x) = x(xg'(x))' = x\left(x \cdot 100(1+x)^{99}\right)' = x\left(100(1-x)^{99} + 100 \cdot 99x(1+x)^{98}\right) =$

$= 100x \, (1+x)^{98} \left((1+x) + 99x\right)$

17.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$

$-4 \leq x_1, x_4 \leq 4 \quad , -5 \leq x_2 \leq 5 \; , x_3 \geq 0$

$x_1 \ldots \; (x^{-4} + x^{-3} + \ldots + x^4) = x^{-4}(1 + x + \ldots + x^8)$

$x_2 \ldots \; (x^{-5} + x^{-4} + \ldots + x^5) = x^{-5}(1 + x + \ldots + x^{10})$

$x_3 \ldots \; (x^0 + x + \ldots) = (1 + x + \ldots)$

$x_4 \ldots \; (x^{-4} + x^{-3} + \ldots + x^4) = x^{-4}(1 + x + \ldots + x^8)$

$x^{-13}(1+x+\ldots+x^8)^2 (1+x+\ldots+x^{10})(1+x+\ldots) = x^{-13}(1-x^9)^2(1-x^{11})(1-x)^{-4} =$

$= x^{-13}(1-2x^9+x^{18})(1-x^{11})(1-x)^{-4} = x^{-13}(1-2x^9+x^{18}-x^{11}+2x^{20}-x^{29})(1-x)^{-4}$

- treba nam koef. na $x^{21-(-13)} = x^{34}$, a to su redom: $\binom{-4}{34} + 2\binom{-4}{25} + \binom{-4}{16} + \binom{-4}{23} + 2\binom{-4}{14} + \binom{-4}{5}$

- ukupno 831 kombinacija

(18.)

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=40$$

$$2 \leq x_1 - x_5 \leq 12$$

$x_1 - x_5 \in 2n$ (parni)

$$(x^2+x^4+x^6+\ldots+x^{12})^5$$

$$x^{10}(1+x^2+\ldots+x^{10})^5$$

- tražimo koef. uz $x^{40-10} = x^{30}$

$$(1-x^{12})^5 (1-x^2)^{-5} = \left[1-\binom{5}{1}x^{12}+\binom{5}{2}x^{24}-\binom{5}{3}x^{36}+\ldots\right]\left[1-\binom{-5}{1}x^2+\binom{-5}{2}x^4-\ldots\right]$$

$$-\binom{-5}{15}+\binom{5}{1}\binom{-5}{9}-\binom{5}{2}\binom{-5}{3}=651$$

(19.)

$$a_n = n(n-1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad /'$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad /' \qquad (1-x)^{-1} = -(1-x)^{-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

(20.)

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{(n+2)(n+1)} = \frac{A}{n+2} + \frac{B}{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1}$$

$$2n+3 = A(n+1) + B(n+2)$$

$A = 1$

$B = 1$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad / \int$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-x| \quad / : x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{-\ln|1-x|}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 \quad / \int$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = -\ln|1-x| - x \quad / \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \frac{-\ln|1-x|}{x^2} - \frac{1}{x}$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}\ln|1-x| - \frac{1}{x^2}\ln|1-x| - \frac{1}{x}$$