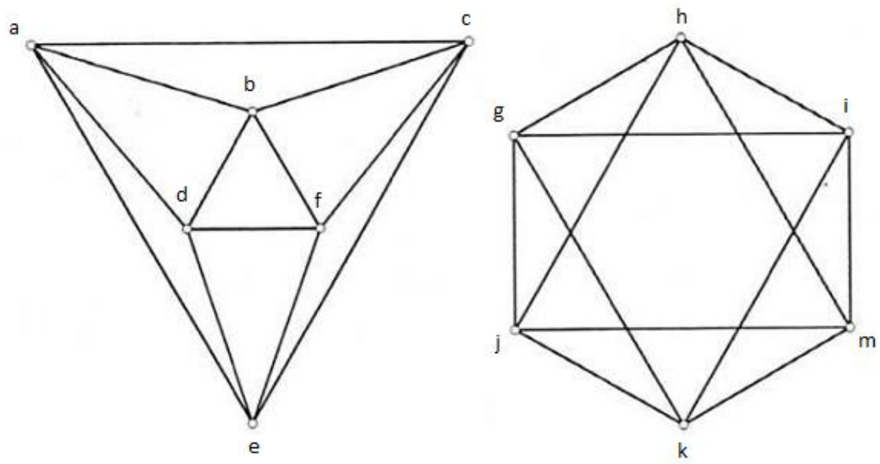
Rekao da stavim rješenja nekih zadataka iz novih ZZV iz teorije grafova (samo prve dvije cjeline, nisam sve riješio, al neke jesam, većina bi trebalo biti točno) ... pisano je nabrzaka, vjerojatno ima grešaka i stavio sam sve šta sam uspio naći u bilježnici (vjerojatno ih ima još, al nisam uspio naći xD)

1. Pojam grafa

2. Označimo grafove, npr.



Vidimo da vrh a lijevo odgovara vrhu g desno, vrh b odgovara vrhu h, itd.

Uglavnom označimo koji vrh lijevo odgovara kojem vrhu desno, ja sam to ovak:

a->g, b->h, c->i, d->j, e->k, f->m

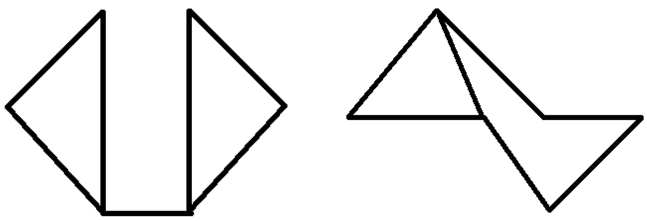
Gledamo jesu li vrhovi koji su susjedni u lijevom grafu susjedni i u desnom grafu (tj. vrhove desno koji odgovaraju vrhovima lijevo, npr. b i f & h i m) i isto tako za one koji nisu susjedni. Kod nas se svi podudaraju pa su grafovi **izomorfni**.

3. $\sum \deg(v) = 2 * |E(G)|$; $\sum \deg(v) = 40$ (zbroj stupnjeva >39)

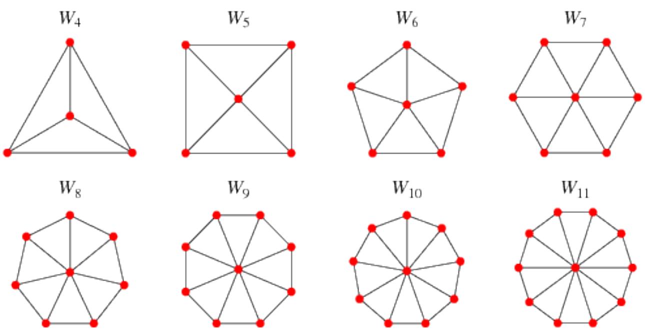
$2 * |E(G)| = 40$
$|E(G)| = 20$ -> dijelimo sa 7 da vidimo koliko može biti grafova sa 7 vrhova: <3, tj. **2 grafa**

4. $n * k = m * k$ (broj mogućih načina pridruživanja ljudi poslovima = broj mogućih načina pridruživanja poslova ljudima) => n=m

5. lijevo originalni graf, desno graf koji nije izomorfan



7.



W_5 -> 4 vrha iz C4 + 1 spojni vrh, stupnjevi (3, 3, 3, 3, 4)

W_6 -> 5 + 1 spojni, stupnjevi (3 ,3, 3, 3, 3, 5)

=> (n-1) vrhova sa stupnjem 3 + 1 vrh sa stupnjem n-1, tj.

(3, 3, 3, 3, ..., (n-1))

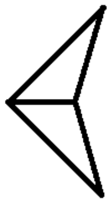
|E|=3(n-1)+n-1 = 4n-4 = 4(n-1)

3*broj stupnjeva sa stupnjem 3 + isto za n-1

8. a) ne, lema o rukovanju nije zadovoljena, b) da, Q4 zato šta imamo 2^4 vrhova, bipartitan jer je svaki ciklus parne duljine, c) zbroj stupnjeva je 16, imamo 10 vrhova => stablo ima 2(n-1) = 18 vrhova (>16) – **ne postoji** => 18 vrhova je minimalni zbroj stupnjeva u povezanom grafu sa 10 vrhova jer je to zbroj stupnjeva stabla, d) da, K3,5 (5 vrhova stupnja 3 i 3 vrha stupnja 5), e) C7, ali nije bipartitan jer ima neparni ciklus

10. Matrica incidencije dolje, graf desno:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



12. C_n je bipartitan graf za sve parne n, dok Wn nije bipartitan graf (ne možemo mu vrhove naizmjence obojati u dvije boje).

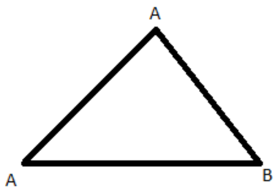
13. Q_k bipartitan graf za svaki n>=2

npr. n=3 -> broj jedinica – parni (0,2), neparni (1,3)

000
001
010
011
100
101
110
111

- npr. 2 skupa:
  A = vrhovi s parnim brojem jedinica (0 je paran ovdje)
  B = vrhovi s neparnim brojem jedinica
- svaki vrh s parnim brojem jedinica ima vrhove s neparnim brojevima jedinica sa svih strana kao susjedne vrhove i obrnuto => sigurno su vrhovi povezani s vrhovima iz druge skupine pa je graf bipartitan

14. Ne može, npr. 2 skupa A i B:



15. K_n – za svaki n je (n-1) regularan

$K_{r,s}$ – kad je r=s jer vrhovi s lijeve strane trebaju isti broj susjeda kao ovi s desne strane

W_n – kad je zadnji član jednak 3 (onda su stupnjevi svih vrhova jednaki 3) => n=4

16. 7 vrhova – ne, lema o rukovanju

6 vrhova – da, K_6

19. k-regularan graf G: (r, r, r, ..., r) – r susjeda, n vrhova

Komplement G: n vrhova, ? susjeda

=> 1 vrh može imati n-1 susjeda, komplement mora biti susjedan sa svim ostalima => (n-1)-r => (n-r-1) regularan

2. Povezanost

1. Jednostavan graf, n vrhova, udaljenost 2 vrha = 1 -> Kn (svaka 2 vrha susjedna)

Vrhovi udaljeni za n-1: Pn (prvi i zadnji član)

2. (1, 1, 1, 2, 2, x, 3) => x=2 ili 3

Za x=3 nije zadovoljena lema o rukovanju, za x=2 zbroj stupnjeva je 12. Struktura od G nije jednoznačno određena.

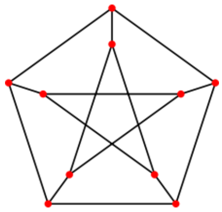
4. Q_3: $\lambda(Q_3)=3$ -> da maknemo 3 brida s jednog vrha, graf bi postao nepovezan jer ne bi bilo puteva do tog vrha

$K_{3,5}$: $\lambda(K_{3,5})=3$ -> stupnjevi (3, 3, 3, 3, 3, 5, 5, 5) -> ako maknemo 3 brida s jednog vrha, graf bi postao nepovezan

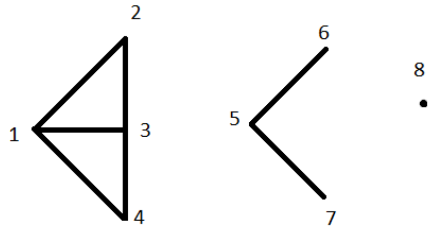
5. $k(W_8) = 3$ -> graf postaje nepovezan ako uklonimo neki od trokutova

6. Q_k, k>=2, pretp. da Qk sadrži mpst

=> neka su u i v vrhovi za koje je brid uv most => nemoguće je da micanjem mosta dobijemo više komponenti povezanosti => Q_k nema mostova



7. najkraći ciklus je kad obiđemo ovu unutrašnju zvijedu pa je struk jednak 5



12. ima 3 komponente povezanosti

13. Šuma sa 67 vrhova i 56 bridova:

n=67, k=59 => n – m = 67 – 59 = 8 komponenti povezanosti

14. G jednostavan povezan 4-regularan graf s n vrhova, n>=5

- Imamo n vrhova i 2n bridova
- ako 1 vrh ima 4 brida, onda u najgorem slučaju uklanjamo n+2 bridova (za n>=5), taj 1 vrh sigurno neće ostati povezan => pošto imamo 2n bridova, uklanjamo više od pola bridova te će sigurno bar 1 vrh ostati nepovezan

16. $\sum \deg(v) = 2 * |E(G)| = 2n - 2$

- pretpostavimo suprotno: najviše 1 vrh ima stupanj 1
- $\sum \deg(v) \geq 1 + 2n - 2 = 2n - 1$ => nemoguće => vrijedi početna tvrdnja

17. $|V(Wn)| = n, |E(Wn)| = 2n - 2 = m$

- treba ukloniti m-n+1 brid da bi se dobilo razapinjuće stablo => 2n-2-n+1 = n-1
- Mogu se naći razapinjuća stabla bez zajedničkih bridova jer na razne načine možemo iz nekog ciklusa iz Wn ukloniti brid pa da ima više rješenja, među onima i naša tražena.

23. Matrica incidencije -> da bi graf bio eulerovski, suma elemenata u retku mora biti paran broj

24. Q_k -> za svaki paran k jer je k-kocka k-regularan graf

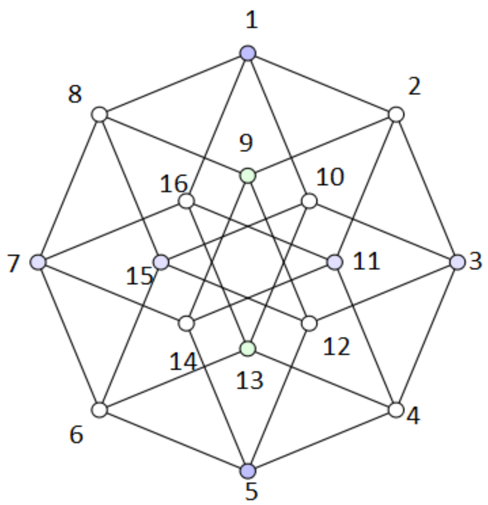
Triangularni graf T(n) -> za svaki n

W_n -> nikad jer su stupnjevi vanjskih vrhova uvijek neparni brojevi

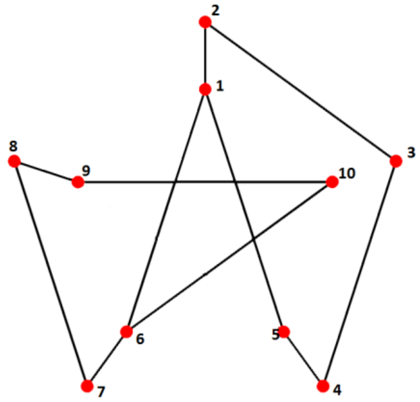
25. G jednostavan eulerovski graf => L(G) također eulerovski

- neki vrh parnog stupnja je incidentan s parnim brojem bridova
- bridni graf preslikava bridove u vrhove => isto paran stupanj vrhova te je bridni graf također eulerovski

26. npr. 1-2-3-10-13-16-11-4-3-12-9-2-11-14-5-4-13-6-5-12-15-6-7-14-9-8-1-10-15-8-7-16-1



30. Petersenov graf – svi vrhovi su stupnja 3, trebamo 8 vrhova stupnja 2 za skoro eulerovski => mičemo 4 nesusjedna brida

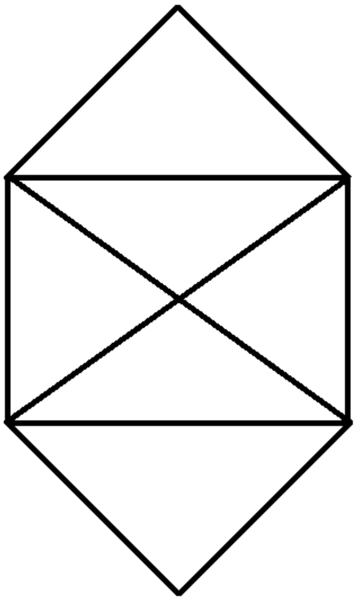


Staza: npr. 1-2-3-4-5-1-6-10-9-8-7-6

31. Može, moramo dodati 5 bridova tako da stupanj svakog vrha bude paran

32. Stupnjevi vrhova:

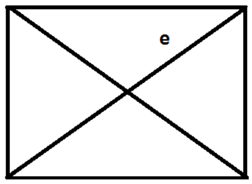
(2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4) -> 6 stupnjeva neparnog stupnja – moramo dodati najmanje 3 brida



33. nisam siguran za ovaj ... fotka skroz desno

npr. vrh najviše gore i ispadne 2>=7/2 što ne vrijedi

34.



a) eulerovska staza => svakih bridom smo prošli jednom => za bridni graf znači da smo svakim vrhom jednom prošli => bridni graf je hamiltonovski ciklus

b) W_5 – bridni graf deg(e)=3+2=5 -> je hamiltonovski, ali nije eulerovski