# LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

## 1. SVOJSTVA DIREKTNE LAPLACEOVE TRANSFORMACIJE

| | | |
|---|---|---|
| | $F(s)$ | $= \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$ |
| 1. Teorem linearnosti | £$[f(t)]$<br>£$[A \cdot f(t)]$ | $= F(s)$<br>$= A \cdot F(s)$ |
| 2. Teorem superpozicije | £$[f_1(t) + f_2(t)]$ | $= F_1(s) + F_2(s)$ |
| 3. Teorem pomaka u vremenskoj domeni | £$[f(t - t_0)]$ | $= e^{-t_0 s} \cdot F(s)$ |
| 4. Teorem o derivaciji slike | £$[t \cdot f(t)]$ | $= -\frac{d}{ds} F(s)$ |
| 5. Teorem pomaka u "s" domeni | £$[e^{\alpha t} \cdot f(t)]$ | $= F(s - \alpha)$ |
| 6. Teorem o preslikavanju derivacije u vremenskoj domeni | £$\left[\frac{df(t)}{dt}\right]$<br>£$\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right]$ | $= s \cdot F(s) - f(0+)$<br>$= s^2 \cdot F(s) - s\, f(0) - f'(0)$ |
| 7. Teorem o integriranju originala | £$[\int f(t)dt + \int f(0)]$ | $= \frac{F(s)}{s} + \frac{\int f(0)}{s}$ |
| 8. Teorem o konačnoj vrijednosti | $\lim_{t \to \infty} f(t)$ | $\lim_{s \to 0} s\, F(s)$ |
| 9. Teorem o početnoj vrijednosti | $\lim_{t \to 0} f(t)$ | $\lim_{s \to \infty} s\, F(s)$ |
| 10. Teorem o preslikavanju konvolucije | £ = £ $\left[\int_0^t f(t - \tau) \cdot g(t) \cdot dt\right]$ | $= F(s)\, G(s)$ |
| 11. Preslikavanje periodičke funkcije s periodom T | £$[f(t)]$ | $= \frac{1}{1 - e^{-T s}} \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) dt$ |

## 2. TABLICA PRESLIKAVANJA

| $f(t) = x(t) \quad za\ t \geq 0$ | $F(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st}\, dt$ |
|---|---|
| 1. $\delta(t)$ ( jedinična impulsna funkcija, Dirac-ova ) | $= 1$ |
| 2. $S(t)$ ( jedinična step funkcija, Haevisideova funkcija, parabola nultog reda ) | $= \frac{1}{s}$ |
| 3. $t \cdot S(t)$ ( funkcija linearnog porasta parabola prvog reda)) | $= \frac{1}{s^2}$ |
| 4. $t^2 \cdot S(t)$ (parabola ) | $= \frac{2}{s^3}$ |
| 5. $t^n \cdot S(t)$ (parabola n-tog reda) | $= \frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 4 $A \cdot e^{\frac{-t}{T}} = A \cdot e^{-\alpha t}$ (funkcija prigušenja u vremenskoj domeni) | $= \frac{A}{s + \frac{1}{T}} = \frac{A}{s+\alpha}$ |
| 5. $S(t - t_0) = S(t - T_m) = S(t - T)$ (funkcija pomaka – kašnjenja u vremenskoj domeni) | $= \frac{1}{s} \cdot e^{-t_0 s} = \frac{1}{s} \cdot e^{-T_m s} = \frac{1}{s} \cdot e^{-T s}$ |
| 6. $\sin(\omega t)$ | $= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| 7. $\cos(\omega t)$ | $= \frac{p}{s^2 + \omega^2}$ |
| 8. $\sin(\omega t \pm \varphi)$ | $= \frac{\omega \cdot \cos\varphi \pm s \cdot \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$ |
| 9. $\cos(\omega t \pm \varphi)$ | $= \frac{s \cdot \cos\varphi \mp \omega \cdot \sin\varphi}{s^2 + \omega^2}$ |
| 10. $e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t)$ | $= \frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$ |
| 11. $e^{-\alpha t} \cdot \cos(\omega t)$ | $= \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$ |
| 12. $t \cdot e^{-\alpha t}$ | $= \frac{1}{(s+\alpha)^2}$ |
| 13. $e^{-\alpha t}$ | $= \frac{1}{s+\alpha}$ |
| 14. $\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$ | $= \frac{1}{s \cdot (s+\alpha)}$ |
| 15. $\frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t)$ <br> $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ | $= \frac{1}{s^2 + 2\varsigma\,\omega_n \cdot s + \omega_n^{\ 2}}$ |

| | |
|---|---|
| 16. $\sqrt{\frac{(z-a)^2+\omega^2}{\omega^2}} \cdot e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$<br>$\varphi = arctg \frac{\omega}{z-a}$ | $= \frac{s+z}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| $\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n \cdot \omega_d} \cdot e^{-\zeta \cdot \omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \varphi)$<br>17. $\omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{1-\zeta^2}$ ;<br>$\varphi = \arccos(\varsigma) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right)$ | $= \frac{1}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2)}$ |
| 18. $\frac{z}{\omega^2} - \sqrt{\frac{z^2+\omega^2}{\omega^4}} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$<br>$\varphi = arctg \frac{\omega}{z}$ | $= \frac{s+z}{s(s^2+\omega^2)}$ |
| | |
| | |

## 3. INVERZNA LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Inverzna Laplaceova transformacija služi za određivanje originalne funkcije f(t) na osnovi poznate slike F(s) u kompleksnoj domeni. Od nekoliko načina ovdje predlažemo dva praktična postupka :

**A)** Određivanje originala funkcije f(t) pomoću tablica Laplaceovih transformata pri čemu je poznatu racionalnu funkciju F(s) potrebno prikazati u obliku sume parcijalnih razlomaka te iz tablica transformata odabrati originalne funkcije $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, a originalna funkcija jest: $f(t)= f_1(t)+ f_2(t)+ f_3(t)$.

**B)** Određivanje originala funkcije f(t) pomoću Heavisideovih teorema i Eulerovih formula

### A) RASTAVLJANJE NA PARCIJALNE RAZLOMKE

Polinom $\mathcal{L}\,[\,f(\,t\,)\,] = F(\,s\,) = Y(\,s\,) = \dfrac{A(s)}{B(s)}$ može se jednoznačno rastaviti u sumu parcijalnih razlomaka u obliku: $\dfrac{A}{(s-s_i)^k}$ *ili* $\dfrac{D\cdot s+E}{(s^2+c_1\cdot s+d)^l}$ pri čemu su moguća ***četiri slučaja***:

**I.** Nazivnik B(s) je takav da jednadžba B(s) = 0 ima *samo realne jednostruke* korijene $s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Rastavljanje se vrši na slijedeći način:

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m\cdot s^m+\cdots+a_1\cdot s+a_0}{(s-s_1)\cdot(s-s_2)\cdots(s-s_n)}=\frac{A}{s-s_1}+\frac{B}{s-s_2}+\cdots+\frac{C}{s-s_n}$$

**II.** Nazivnik B(s) je takav da su korijeni jednadžbe B(s)=0 *realni* ali među njima ima *višestrukih*.
Rastavljanje se vrši na slijedeći način:

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m\cdot s^m+\cdots+a_1\cdot s+a_0}{(s-s_1)^{k_1}\,(s-s_2)^{k_2}}=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(s-s_1)^{k_1}}+$$
$$+\frac{B_1}{s-s_2}+\frac{B_2}{(s-s_2)^2}+\cdots+\frac{B_{k_2}}{(s-s_2)^{k_2}}$$

**III.** Nazivnik B(p) je takav da među korjenima jednadžbe B(p)=0 postoje *jednostruki kompleksni korjeni i višestruki realn korjeni*.
Rastavljanje se vrši na slijedeći način:

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m\cdot s^m+a_{m-1}\cdot s^{m-1}+\cdots+a_1\cdot s+a_0}{(s-s_1)^{k_1}\cdot(s^2+c\cdot s+d)}= \quad =$$

$$=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(s-s_1)^{k_1}}+\frac{D_1\cdot s+E_1}{(s^2+c_1\cdot s+d_1)}$$

**IV.** Nazivnik B(s) je takav da među korjenima jednadžbe B(s)=0 postoje višestruki realni i višestruki kompleksni korjeni.
Rastavljanje se vrši na slijedeći način:

$$\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_m\cdot s^m+a_{m-1}\cdot s^{m-1}+\cdots+a_1\cdot s+a_0}{(s-s_1)^{k_1}\cdot(s^2+c_1\cdot s+d_1)^{l_1}}=$$

$$=\frac{A_1}{s-s_1}+\frac{A_2}{(s-s_1)^2}+\cdots+\frac{A_{k_1}}{(s-s_1)^{k_1}}+\frac{D_1\cdot s+E_1}{(s^2+c_1\cdot s+d_1)}+\frac{D_2\cdot s+E_2}{(s^2+c_1\cdot s+d_1)^2}$$

**B). HEAVISIDEOVI TEOREMI**

Heavisideovi teoremi razvoja za određivanje vremenske funkcije **f(t) = y(t)** uz poznatu sliku **F(s) = Y(s)** mogu se primijeniti na slijedeće načine:

**1.** Korijeni nazivnika funkcije F(s) su jednostruki realni ili kompleksni tada vrijedi:

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}$$

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot(s-s_i)\right]_{s=s_i}\cdot e^{s_i t}$$

**2.** Korijeni nazivnika funkcije F(s) su jednostruki realni i jedan dvostruki

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s-s_1)^2(s-s_3)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}$$

$$f(t)=\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot(s-s_1)^2\right]_{s=s_1}\cdot t\cdot e^{s_1 t}+\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot(s-s_1)^2\right]\right\}_{s=s_1}\cdot e^{s_1 t}+\sum_{i=3}^{n}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot(s-s_i)\right]_{s=s_i}\cdot e^{s_i t}$$

**3.** Korijeni nazivnika funkcije F(s) su jednostruki realni i jedan konjugirano kompleksni

$$F(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{A(s)}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)\cdots(s-s_i)\cdots(s-s_n)}$$

$$f(t)=\frac{\left|K_{(\sigma+j\omega_d)}\right|}{\omega_d}\cdot e^{\sigma t}\cdot\sin(\omega_d\cdot t+\varphi)+\sum_{i=3}^{n}\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot(s-s_i)\right]_{s=s_i}\cdot e^{s_i t}$$

gdje je: $\left|K_{(\sigma+j\omega_d)}\right|$ modul, a $\varphi$ fazni kut (argument) slijedećeg kompleksnog broja

$$K_{(\sigma+j\omega_d)}=\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot(s-\sigma-j\omega_d)(s-\sigma+j\omega_d)\right]_{s=\sigma+j\omega_d}=\left[\frac{A(s)}{B(s)}\cdot\left(s^2-2s\sigma+\sigma^2+\omega_d^{\;2}\right)\right]_{s=\sigma+j\omega_d}$$

**C. Eulerove formule za trigonometrijske funkcije**

1. $e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\cdot\sin(\omega t)$
2. $\sin(\omega t)=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2\cdot j}$
3. $\cos(\omega t)=\dfrac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$

**D) Formula za zbrajanje sinusoida iste frekvencije**

$$A_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_1)+A_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_2)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$$

gdje je:

$$A=\sqrt{A_1^{\;2}+A_2^{\;2}+2\cdot A_1\cdot A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

$$tg(\varphi)=\frac{A_1\cdot\sin\varphi_1+A_2\cdot\sin\varphi_2}{A_1\cdot\cos\varphi_1+A_2\cdot\cos\varphi_2}$$

Treba zapamtiti i slijedeće relacije:

$$arctg(\varsigma)=arccos\frac{1}{\sqrt{1+\varsigma^2}}\qquad i\qquad arccos(\varsigma)=arctg\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}$$