Ponovljeni završni međuispit iz Matematike 3R
(pitanja iz trećeg ciklusa nastave)
04.02.2010.

Zabranjena je upotreba kalkulatora ili šalabahtera. Ispit se piše 2h i 30 min.

1. (5 bodova)
Riješite rekurzivnu jednadžbu

$$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + n,\ n \geq 2,\ a_0 = 2,\ a_1 = 4$$

i rješenje zapišite bez korištenja kompleksnih brojeva.

2. (4 boda)
Koliko postoji jednostavnih grafova (do na izomorfizam) sa sedam vrhova i zbrojem stupnjeva većim od 39?

3. (4 boda)
Odredite broj razapinjućih stabala potpunog bipartitnog grafa $K_{2,n}$, $n \geq 3$ (smatramo da su zadanom grafu unaprijed označeni vrhovi).

4. (4 boda)
Zadan je 1-regularan graf G s n vrhova.
a) (**1b**) Koliko je bridova potrebno dodati grafu G da bi se dobio 3-regularan graf?
b) (**1b**) Koliko je bridova potrebno dodati grafu G da bi se dobilo stablo?
c) (**2b**) Može li se svako stablo s parnim brojem vrhova konstruirati na taj način, počevši od 1-regularnog grafa dodavanjem bridova?
Sve odgovore detaljno obrazložite.

5. (4 boda)
Zadan je graf $K_{2,9}$. Vrhovima neparnog stupnja pridružene su redom labele a_1, a_2, a vrhovima parnog stupnja b_1, b_2, ..., b_9. Svakom je bridu pridružena težina $w(a_i, b_j) = \lceil \frac{i+j}{2} \rceil$ (najmanji cijeli broj veći ili jednak $\frac{i+j}{2}$). Riješite problem kineskog poštara za zadani graf i detaljno ispišite korake provedenog postupka.

6. (4 boda)
Avionska kompanija ima letove između 6 gradova $G_1, ..., G_6$. Cijene letova između gradova dane su u matrici susjedstva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

Pronađite najjeftinije letove iz grada G_1 do svih ostalih gradova. Detaljno ispišite korake provedenog postupka.

7. (4 boda)
Pomoću razvoja funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \cos(2x) & , x \in \langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \rangle \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

u Fourierov integral izračunajte

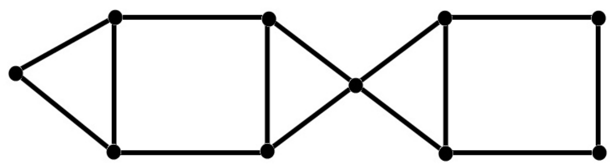
$$\int_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{4 - x^2}\, dx.$$

8. (4 boda)
Pomoću Laplaceove transformacije riješite integralnu jednadžbu

$$x(t) = e^{-t} - 2\int_0^t \cos(t-u) x(u)\, du.$$

9. (3 boda)
Koliko ima prirodnih brojeva većih od 1000 koji u oktalnom brojevnom sustavu imaju zapis od točno 4 znamenke?

10. (4 boda)
Koliko najmanje treba dodati bridova grafu sa slike da bi on postao jednostavan eulerovski graf?



Nađite eulerovsku stazu za nadopunjeni eulerovski graf.

Rješenja ponovljenog završnog međuispita iz Matematike 3R
04.02.2010.

1. (5 bodova)
$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4} + n + 2$

2. (4 boda)
Postoje 2 takva grafa: K_7 i K_7 bez jednog brida.

3. (4 boda)
Ima ih $n \cdot 2^{n-1}$

4. (4 boda)
a) n bridova
b) $\frac{n}{2} - 1$ bridova
c) Ne, zvijezda nema 1-regularan podgraf.

5. (4 boda)
Fleuryev + Dijkstrin algoritam

6. (4 boda)
Dijkstrin algoritam s početnim vrhom G_1.

7. (4 boda)
$\int\limits_0^\infty \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{4-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

8. (4 boda)
$X(s) = e^{-t}(1-t)^2$

9. (3 boda)
3095.

10. (3 boda)
Graf ima 6 vrhova neparnog stupnja, potrebno je dodati minimalno 3 brida, označiti na grafu koji su to bridovi.