Završni međuispit iz Matematike 3R
(pitanja iz trećeg ciklusa nastave)
22.01.2009.

Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 2h i 30 min.

1. (4 boda)
a) (**2b**) Odredite rekurzivnu relaciju za broj nizova duljine n, sastavljenih od znamenki 1, 2, 3, u kojima nikoje dvije neparne znamenke nisu susjedne.
b) (**2b**) Koliko ima takvih nizova duljine 100?

2. (3 boda)
Nađite opće rješenje rekurzije
$$3^{a_n} = 9^n \cdot 3^{-a_{n-2}}.$$

3. (2 boda)
Zadana je matrica susjedstva grafa G s
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
a) (**1b**) Nacrtajte graf G.
b) (**1b**) Napišite matricu incidencije grafa G.

4. (5 bodova)
a) (**1b**) Odredite niz stupnjeva za kotač W_n s n vrhova, $n \geq 4$.
b) (**2b**) Da li je jednoznačno određena struktura jednostavnog grafa s nizom stupnjeva $(3, 3, 3, 3, 4)$? Obrazložite odgovor.
c) (**2b**) Dan je niz stupnjeva jednostavnog povezanog grafa G s n vrhova: $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Nađite niz stupnjeva njegovog komplementa $\overline{G}$.

5. (4 boda)
a) (**2b**) Dokažite lakši smjer Eulerovog teorema: ako je G povezan i eulerovski graf, onda je svaki vrh parnog stupnja.
b) (**2b**) Koristeći Eulerov teorem dokažite : graf G je skoro eulerovski ako i samo ako ima točno dva vrha neparnog stupnja.

6. (4 boda)
a) (**1b**) Iskažite Oreov terem.
b) (**1b**) Iskažite i pomoću Oreovog teorema dokažite Diracov teorem.
c) (**2b**) Kontraprimjerom pokažite da ne vrijedi obrat Diracovog teorema.

7. (3 boda)
Dan je potpuni graf K_6 s vrhovima $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definiramo težinu $w(\{i, j\}) = i+j$. Primjenom pohlepnog algoritma potražite najkraći hamiltonovski ciklus u tom grafu. Kolika je duljina tog ciklusa?

8. (3 boda)
Parnu funkciju f koja je na intervalu $[0,\pi]$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 2, & x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

razvijte u trigonometrijski Fourierov red.

9. (4 boda)
Metodom Laplaceove transformacije riješite integralno-diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{aligned} & y'(t) + 2y(t) = -\int_0^t y(\tau)d\tau + e^t \\ & y(0) = 0. \end{aligned}$$

10. (4 boda)
a) (**2b**) Definirajte multinomni koeficijent i iskažite multinomni teorem.
b) (**1b**) Izračunajte koeficijent uz $a^2b^3c^3d^2$ u razvoju $(a+b+c+d)^{10}$.
c) (**1b**) Koliko se različitih riječi (ne nužno smislenih) može sastaviti od riječi NARANČA?

11. (4 boda)
Željezničkom mrežom je povezano 5 gradova G_1, G_2, G_3, G_4 i G_5. Cijena direktne putničke karte od grada G_i do grada G_j zapisana je kao element na mjestu (i,j) sljedeće matrice (∞ na mjestu gdje ne postoji direktna veza):

$$\begin{bmatrix} 0 & 75 & 60 & 50 & 30 \\ 75 & 0 & \infty & 20 & 40 \\ 60 & \infty & 0 & \infty & 20 \\ 50 & 20 & \infty & 0 & 15 \\ 30 & 40 & 20 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Izračunaj tablicu najjeftinijih karata između svaka dva grada.

Rješenja završnog međuispita iz Matematike 3R
22.01.2009.

1. (4 boda)
a) (**2b**) $s_1 = 3$, $s_2 = 5$, $s_n = s_{n-1} + 2s_{n-2}$
b) (**2b**) $s_n = \frac{4}{3}2^n - \frac{1}{3}(-1)^n$, $s_{100} = \frac{4}{3}2^{100} - \frac{1}{3}$

2. (3 boda) $a_n = A\cos\frac{n\pi}{2} + B\sin\frac{n\pi}{2} + n + 1$

3. (2 boda)
b) (**1b**)
$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. (5 bodova)
a) (**1b**) $(3, 3, ..., 3, n-1)$
b) (**2b**) Da, K_5 bez dva disjunktna brida.
c) (**2b**) $(n-1-i_n, n-1-i_{n-1}, ..., n-1-i_1)$

5. (4 boda)
a) (**2b**) Knjiga, str 28.
b) (**2b**) Knjiga, str 28.

6. (4 boda)
a) (**1b**) Knjiga, str 32.
b) (**1b**) Knjiga, str 33.
c) (**2b**) Obrat ne vrijedi za Q_3.

7. (3 boda) $(1+2)+(2+3)+(3+4)+(4+5)+(5+6)+(6+1) = 42$

8. (3 boda) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\cos x + \frac{6}{3\pi}\cos 3x - \frac{6}{5\pi}\cos 5x + ...$

9. (4 boda) $f(t) = \left[\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{2}\mathtt{sh}t\right]u(t)$

10. (4 boda)
a) (**2b**) $\binom{n}{\alpha} := \frac{n!}{\alpha_1!...\alpha_n!}$
b) (**1b**) $\binom{10}{2,3,3,2} = \frac{10!}{2!3!3!2!} = 25200$
c) (**1b**) $\binom{7}{2,3,1,1} = \frac{7!}{2!3!} = 420$

11. (4 boda)
$$\begin{bmatrix} 0 & 65 & 50 & 45 & 30 \\ 65 & 0 & 55 & 20 & 35 \\ 50 & 55 & 0 & 35 & 20 \\ 45 & 20 & 35 & 0 & 15 \\ 30 & 35 & 20 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$