

Međuispit iz Matematike 3R
25.11.2015.

1. **(5 bodova)** Funkciju $f(x) = |x - \pi|$ razvijte u Fourierov red na intervalu $[-\pi/3, \pi/3]$. Skicirajte graf dobivenog reda.
2. **(5 bodova)** Izvedite Fourierovu integralnu formulu.
3. **(5 bodova)**
(a) Prikažite funkciju

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & -2 \leq x < 0, \\ 1/2, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

pomoću Fourierovog integrala.

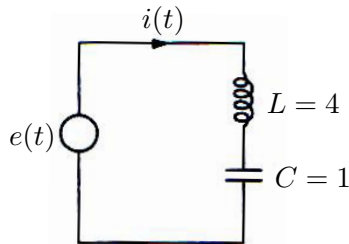
- (b) Izračunajte

$$\int_0^\infty \frac{\sin^3 t}{t} dt.$$

4. **(5 bodova)** Iskažite i dokažite teorem o Laplaceovoj transformaciji prigušenja originala.
5. **(5 bodova)** Koristeći Laplaceovu transformaciju izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{e^{-2t} \sin t \cos t}{t} dt.$$

6. **(5 bodova)** Pomoću Laplaceove transformacije odredite struju $i(t)$ električnog kruga zadanog slikom, uz priključeni napon $e(t) = \sin(t/2)u(t - \pi)$.



7. **(5 bodova)** Konstruirajte bijekciju sa skupa $\langle -1, 1 \rangle$ na skup $\langle 0, \infty \rangle$. Detaljno objasnite zašto je konstruirana funkcija bijekcija!
8. **(5 bodova)** Neka su ρ_1 i ρ_2 relacije ekvivalencije na skupu X .
(a) Mora li $\rho_1 \cap \rho_2$ biti relacija ekvivalencije?
(b) Mora li $\rho_1 \cup \rho_2$ biti relacija ekvivalencije?
Za svaku tvrdnju dokažite da vrijedi ili konstruirajte kontraprimjer.

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Sretno!

Rješenja međuispita iz Matematike 3R
25.11.2015.

1. **(5 bodova)** Funkcija nije ni parna ni neparna, $T = 2\pi/3$.

$$S(x) = \pi + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin(3nx).$$

2. **(5 bodova)** Knjižica, str. 43.

3. **(5 bodova)** Funkcija je neparna pa je $A(\lambda) = 0$. Vrijedi $B(\lambda) = \frac{2\sin^2(\lambda)}{\lambda\pi}$ pa je

$$\tilde{f}(x) = \int_0^{\infty} \frac{2\sin^2(\lambda)}{\lambda\pi} \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Uvrstimo $x = 1$ i dobivamo $\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t} dt = \frac{\pi}{4}$.

4. **(5 bodova)** Knjižica, str. 70.

5. **(5 bodova)** Tražimo $F(2)$, gdje je $f(t) = \frac{\sin t \cos t}{t} = \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{t} \circ \bullet \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{s}{2}) = F(s)$.
Dakle, $F(2) = \pi/8$.

6. **(5 bodova)**

$$Z(s) = \frac{4s^2 + 1}{s}, \quad E(s) = e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}}, \quad I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{1}{4} e^{-\pi s} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4} s^2 + \frac{1}{4}}.$$

Kako je $\frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} \frac{s}{s^2 + \frac{1}{4}} \bullet \circ \cos \frac{t}{2} * \cos \frac{t}{2} = \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}$, zaključujemo da je

$$i(t) = \frac{1}{8} (t - \pi) \cos \frac{t - \pi}{2} u(t - \pi) + \frac{1}{4} \sin \frac{t - \pi}{2} u(t - \pi).$$

7. **(5 bodova)** Npr. definiramo $f: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, $f(x) := \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{4})$.

8. **(5 bodova)**

(a) Da, presjek relacija ekvivalencije je relacija ekvivalencije.

(b) Ne, uzmimo npr.

$$X = \{1, 2, 3\},$$

$$\rho_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)\},$$

$$\rho_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (3, 2)\}.$$

Uočimo, $(1, 2), (2, 3) \in \rho_1 \cup \rho_2$, ali $(1, 3) \notin \rho_1 \cup \rho_2$ pa $\rho_1 \cup \rho_2$ nije tranzitivna relacija.