Završni međuispit iz Matematike 3R
(pitanja iz trećeg ciklusa nastave)
27.01.2010.

Zabranjena je upotreba kalkulatora ili šalabahtera. Ispit se piše 2h i 30 min.

1. (4 boda) Vrijeme potrebno za predaju signala s_1 je t_1 sekundi, signala s_2 je t_2 sekundi, ..., a signala s_m je t_m sekundi, $t_i \in \mathbb{N}$. Neka je b_n broj različitih poruka (nizova signala) čije slanje traje točno n sekundi, $n \in \mathbb{N}$.
a) (**1b**) Nađite rekurzivnu relaciju za b_n.
b) (**3b**) Izračunajte b_{2010}, $n \in \mathbb{N}$, ako je zadano $m = 3$, $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_3 = 1$.

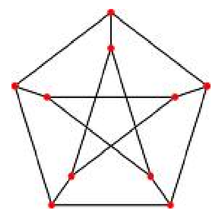
2. (3 boda) Nađite rekurzivnu relaciju s realnim koeficijentima čije je opće rješenje

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-1)^n + D, \quad n \geq 0.$$

3. (4 boda) Dokažite da u k-kocki Q_k, $k \geq 2$, uklanjanjem bilo kojeg brida, Q_k ostaje povezan graf, tj. da u Q_k nema mostova.

4. (3 boda) Pronađite primjer dva neizomorfna stabla s istim nizom stupnjeva. Dokažite njihovu neizomorfnost.

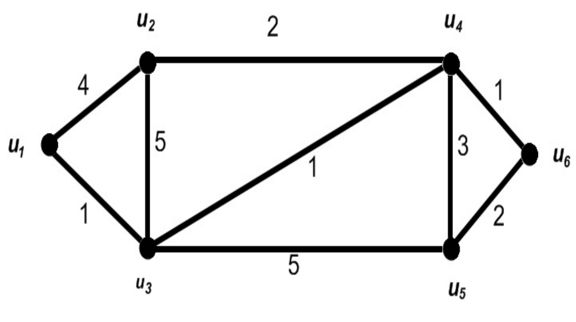
5. (4 boda)
a) (**2b**) Je li komplement Petersenovog grafa eulerovski? Zašto?
b) (**2b**) Je li bridni graf Petersenovog grafa eulerovski? Zašto?



Slika 1: Petersenov graf

6. (4 boda) Koliko različitih hamiltonovskig ciklusa imaju grafovi (smatramo da su zadanim grafovima unaprijed označeni vrhovi):
a) (**1b**) W_n,
b) (**1b**) K_n,
c) (**2b**) $K_{n,n}$?

7. (3 boda) Koristeći Dijkstrin algoritam odredite najkraću udaljenost od vrha u_1 do svih ostalih vrhova za težinski graf na slici. Detaljno ispišite sve korake provedenog algoritma.



Pitanja iz cijelog gradiva

8. (4 boda) Razvijte u Fourierov red funkciju $f(x) = x$, $x \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Koristeći dobiveni razvoj izračunajte sumu reda

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

9. (4 boda) Pomoću Laplaceove transformacije riješite integralno-diferencijalnu jednadžbu

$$y'(t) \cdot e^{-t} = 1 + \int_0^t e^{-\tau} y(\tau) d\tau$$
$$y(0) = 0.$$

10. (3 boda) Nađite broj rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 = 80,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 1, \quad x_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

11. (4 boda) Zadan je graf $G = (V, E)$ sa skupom vrhova $V = \{u_1, u_2, ..., u_{10}\}$ i matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Odredite stazu koja prolazi svakim bridom točno jednaput.

Rješenja završnog međuispita iz Matematike 3R
27.01.2010.

1. (4 boda)
a) (**1b**)

$$b_n = \begin{cases} 0 & , n < 0 \\ 1 & , n = 0 \\ b_{n-t_1} + b_{n-t_2} + ...b_{n-t_m} & \end{cases}$$

b) (**3b**) $b_{2010} = \frac{1}{4}\left[(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{2010} + (2-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})^{2010}\right]$

2. (3 boda)
$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} - 4a_{n-3} + 4a_{n-4}$

3. (4 boda)
Dovoljno je pokazati da se svaki brid nalazi u ciklusu. Ako brid e povezuje dva vrha koja se razlikuju samo u i-toj koordinati, mozemo odabrati $j \neq i$ i pomocu variranja vrijednosti na te dvije koordinate dobiti ciklus.

4. (3 boda)
Rješenje nije jednoznačno. Npr. možemo iskonstruprati 2 stabla s nizom vrhova $(1, 1, 2, 2, 3)$, a da nisu izomorfni jer dva vrha stupnja 2 nisu susjedna u oba grafa.

5. (4 boda)
a) (**2b**) Komplement je 6-regularan pa je prema Eulerovom teoremu eulerovski.
b) (**2b**) Bridni graf je 4-regularan pa je prema Eulerovom teoremu eulerovski.

6. (4 boda)
a) (**1b**) $(n-1)$
b) (**1b**) $\frac{(n-1)!}{2}$
c) (**2b**) $n(n-1)^2(n-2)^2....3^2 \cdot 2$

7. (3 boda)
Provesti Dijkstrin algoritam.

8. (4 boda)
$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}$

9. (4 boda)
$y(s) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(-e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}t} + e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}t}\right)u(t)$

10. (3 boda)
$\binom{81}{79}$

11. (4 boda)
$u_3 \to u_2 \to u_1 \to u_{10} \to u_2 \to u_9 \to u_3 \to u_4 \to u_5 \to u_6 \to u_7 \to u_5 \to u_8 \to u_4 \to u_7 \to u_8 \to u_9 \to u_{10}$.