[MAT3R] UUTG - 1. Pojam grafa

1.1 Motivacija

Koliko vidim, u ovoj lekciji nema nista pitanja ni zadataka, tako da je ovo samo potpunosti radi. :)

1.2 Glavne definicije

(str. 4) Pronađite sami neki drugi izomorfizam.

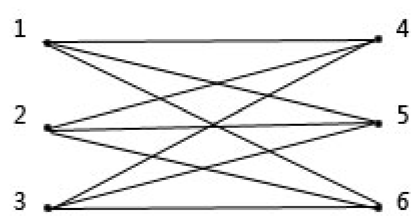
(Odgovor: boysee) Koliko shvacam, da bi se pronasao neki izomorfizam dovoljno je naci graf koji ima jednakobrojan skup vrhova kao i graf kojem on mora biti izomorfan, te da susjedni odnosi moraju biti odrzani.

Vrhove cu preslikati ovako: u -> 1, v -> 2, w -> 3, x -> 4, y -> 5, z -> 6.

Posto je u bio susjedan s x, y i z, u izomorfnom grafu mora biti susjedan s 4, 5 i 6. v je bio susjedan takodjer s x, y i z, te tako 2 mora takodjer biti susjedan s 4, 5 i 6 itd.

Cim se zadovolji to svojstvo, vec vrijedi da je broj bridova jednak (|E(G1)| = |E(G2)|).

Slika:



Takvih obrata bi trebalo biti beskonacno puno...

(str. 5) Vrlo ambicioznim citateljima ostavljamo sa taj problem programski rijese za neke konkretne ne sasvim male n-ove, recimo za n = 8, 9 ili 10.

Ako netko ima volje, samo naprijed...

(str. 7) Mozete li naci primjer dva neizomorfna grafa s 4 vrha koji imaju isti niz stupnjeva?

Odgovor

(str. 8) Razmislite postoji li i kako izgleda 1-regularan graf.

(Odgovor: b0ysee) n-regularan graf je graf kojem su svi vrhovi n-tog stupnja. 1-regularan graf bi morao imati sve vrhove stupnja 1 (susjedan samo s jednim vrhom). Primjer koji meni pada na pamet je graf s 2 vrha i jednim bridom.
Slika:

(str. 11) Sto bi se desilo s matricom incidencije ako biste preimenovali skup vrhova (skup bridova)?

(Odgovor: Matheus) Retci u matrici bi zamijenili mjesta. Npr. ako zamijenimo vrh 1 (kojem odgovara prvi redak u matrici incidencije) i 5 (peti redak) onda moramo zamijeniti i te retke u matrici incidencije. Primjetite da se ovdje nista drugo bitno ne mijenja, posto je vec i samo imenovanje vrhova bilo provedeno proizvoljnim redoslijedom.

(str. 11) Sto bi se desilo s matricom susjedstva ako biste preimenovali skup vrhova?

(Odgovor: Matheus) Odgovarajuci retci i stupci u matrici bi zamijenili mjesta. Npr. ako zamijenimo vrh 2 (kojem u matrici susjedstva odgovara drugi redak i drugi stupac) i vrh 3 (treci redak i stupac) onda i odgovarajuci retci/stupci moraju zamijeniti mjesta. Opet napominjem da redoslijed redova (i stupaca) ovdje nije uopce bitan posto je i samo imenovanje vrhova (i bridova) na pocetku bilo proizvoljno.

(str. 11) Koliko razlicitih rjesenja ima? Jesu li ona sva medjusobno izomorfna?

Odgovor

1.3 Primjeri

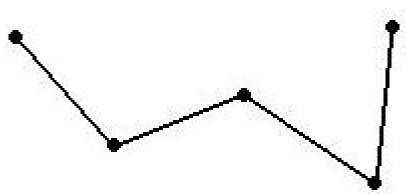
(str. 13) Sto se opcenito moze reci o grafu koji je 2-regularan? Uocite da to ne mora biti ciklus, vec to moze biti i disjunktna unija ciklusa.

Odgovor

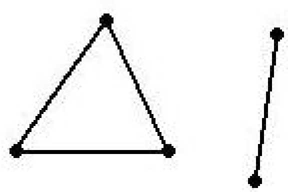
Zadaci

7.

(Odgovor: Pylo) Jednostavan graf koji ima niz stupnjeva (1,1,2,2,2,2...2) može biti lanac ili unija lanca i ciklusa:
Npr. za niz (1,1,2,2,2) može biti:



ili



Dakle već se iz ovog vidi da NIJE jednoznačno određen.

Drugi dio pitanja pretpostavlja da je graf povezan, a u tom slućaju mislim da može biti samo lanac, pa je graf tada jednoznačno određen.

8.

(Odgovor: boysee) Osobno mi je ovakve zadatke najlakse rijesavati tako da idem od nekog konkretnog slucaja prema opcem, pa pogledam sto se dogadja.
Kotac Wn se smatra graf s n vrhova koji je nastao od ciklusa s (n-1) vrhova i to tako da smo svaku tocku tog ciklusa spojili s jednim novim vrhom (slika se moze vidjeti na 14. str.).
Ako imamo kotac koji je nastao od C4 (ciklusa s 4 vrha) onda on sadrzi 5 vrhova i to tako da svaki "vanjski" vrh ima stupanj 3 (dva susjedna od prije zbog ciklusa, te jedan novi stupanj zbog novonastalog vrha), a "unutarnji" vrh ima stupanj 4 jer se spajao s vec 4 tocke koje su postojale. Niz stupnjeva bi bio: (3,3,3,3,4).
Ako imam kotac koji nastaje od C5 onda on sadrzi 6 vrhova. "Vanjski" vrhovi imaju opet stupanj 3 posto imaju susjedne vrhove iz ciklusa i jedan novonastali susjedni vrh.

"Unutarnji" vrh, medjutim, ima stupanj 5 posto se sada vezao na ciklus koji ima 5 vrhova.
Niz stupnjeva bi bio: (3,3,3,3,3,5).
Iz ova se dva primjera lako nadje logika...
Kotac Wn ima (n-1) "vanjskih" vrhova koji svaki ima stupanj 3 (2 susjedna vrha iz ciklus + novi vrh da bi se dobio kotac), te ostaje jedan jedini vrh koji je "u sredini" i on mora imati (n-1) susjeda posto nije susjed sam sebi, tako da bi nas niz stupnjeva izgledao ovako: (3,3,3,3,... (n-1 puta), (n-1)).
Sto se drugog dijela pitanja tice mozemo pogledati nas niz stupnjeva: (3,3,3,3,...(n-1 puta), (n-1)) - sadrzi (n-1) sigurno neparnih stupnjeva (ove silne trojke) sto znaci da nam o tim stupnjevima nikako ne ovisi hoce li svi biti neparni. To dovodi do toga da je bitno samo da zadnji stupanj - (n-1), bude neparan, a to se dobije tako da se unutra uvrsti paran broj, tj. da se radi s kotacem kojem je n (broj vrhova) paran.

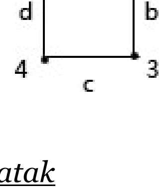
<u>Alternativa</u>

(Odgovor: Vjeko)
- imamo 1 spojnu točku i n-1 ostalih
- sve okolne imaju stupanj 3, a spojna je n-1 stupnja
- bridova koji će spajati vanjske točke ima n-1, a bridova koji spajaju vanjske i spojnu točku ima isto n-1
- ukupno ima |E|= 2n-2
- ovime vidimo da za bilo koji n, E je paran
- Suma [deg(v)]=2|E|*
- budući da smo zaključili da je |E| uvijek paran, cijeli izraz je paran, prema tome i broj vrhova je paran
<u>Alternativa 2</u>

(Odgovor: blackjade) imamo niz stupnjeva oblika (3,3,3,3,3,...(n-1 puta),n-1)
zbroj je 3(n-1)+(n-1)=4(n-1) ,sto je sigurno parno.

9.

(Odgovor: boysee) Nisam siguran sto bi se ovim zadatkom htjelo pokazati, ali evo bar da oblikujem matricu, pa ce mozda netko znati postaviti A^n.
Matrica incidencije je matrica koja pokazuje ovisnost pojedinog brida o vrhovima, tj. je li postoji incidencija izmedju nekog brida i vrhova. Uzet cemo da su 1, 2, 3 i 4 vrhovi grafa, a a, b, c i d bridovi tog istog grafa. Tada bi nas graf izgledao ovako, te mu pripadajuca matrica (s oznacenim retcima i stupcima):



$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array} & \begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}$$

<u>Ostatak</u>

(Odgovor: blackjade) matrica A je regularna, sto znaci da je ekvivalentna jedinicnoj(I), sto znaci da je A^n=I^n=I.

dakle A~I => A^n ~ I^n=I.
jedino tako ima smisla traziti proizvoljnu potenciju.

10.

(Odgovor: boysee) U knjizi pise da se moze reci je li graf bipartitan ako mu oznacimo vrhove s dvije razlicite boje tako da svaki njegov brid ima ranobojne vrhove.
Ako gledamo cikluse i oznacavamo vrhove s crnom i bijelom, pocevsi od najmanjeg C3, imat cemo ciklus s 3 vrha: C-B-C, sto znaci da ce se ova krajnja dva vrha (C i C) ipak spojiti pa taj graf nije bipartitan. Kod C4 se to vec moze ostvariti posto bi onda vrhovi izgledali C-B-C-B, tako da je taj graf sigurno bipartitan. Ako tako idemo za sve veci n vidi se da za parne n-ove mozemo oznaciti vrhove tako da zadovoljavaju to svojstvo. Sto se Wn, grafova kotaca, tice nisam siguran da li se uopce moze ikako napraviti bipartitan graf, ako netko nadje nacin neka ga napise.

<u>Dodatak</u>

(Odgovor: blackjade) Ne moze sigurno zbog sredisnje tocke. Zamislite vanjski dio kotaca(ciklus) kao jedan, te sredisnju tocku(tocku koja je povezana sa svim ostalim tockama[onima u ciklusu]) kao drugi dio kotaca Wn.

Sada, da bude bipartitan, ciklus mozemo "obojati" samo ako je (n-1) paran [broj tocaka u ciklusu].

Nadalje, cak i ako je taj uvjet zadovoljen, bez obzira na izbor "boja" i izbor boje sredisnje tocke, kotac nije bipartitan, jer je sredisnja tocka po definiciji spojena sa svim ostalima, te time, ***sa dvije razlicite*** *, sto narusava bipartitnost.*

Na str.20 teorem nam kaze da je graf bipartitan akko (ako i samo ako) je svaki ciklus u grafu parne duljine. Dakle,

G je bipartitan <=> svaki ciklus u G je parne duljine.

Zasto(malo modificiran dokaz u prvom smjeru)?

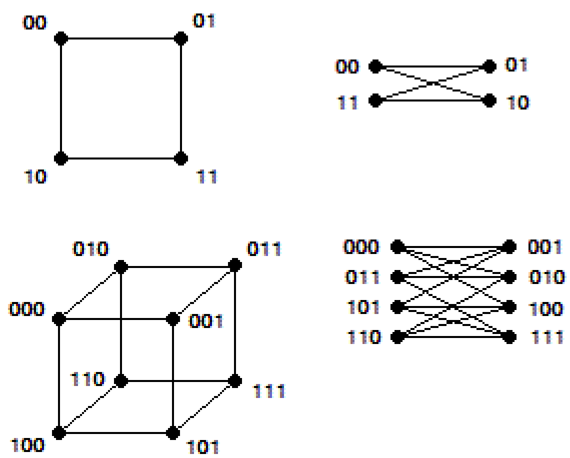
Jer ako je graf bipartitan tada je, kad proizvoljno izaberemo ciklus, on odreden slijedom vrhova (v0->v1->...->vm->v0). Taj ciklus (jer je graf bipartitan) mozemo "obojati" tako da su susjedni vrhovi razliciti.

Sada zapravo imamo proizvoljan ciklus za koji tvrdimo da je bipartitan. Dokazali smo da je Cn bipartitan samo ako je n paran(10. zadatak u ovoj temi). Znaci svaki (jer smo gledali proizvoljne) ciklus u grafu je paran.

Ako nademo trokut, to ocito nije tocno(zapravo, to NAJOCITIJE nije tocno, jer je, naravno, najmanji smislen [ne petlja] neparni ciklus ciklus od 3 tocke).

11.

(Odgovor: Matheus) Ispisimo prvo malo primjera:



Gornja slika prikazuje 2-kocku i 3-kocku. S lijeve strane su njihovi izomorfni grafovi na kojima se jasnije vidi svojstvo bipartitivnosti (koje moramo dokazati za sve k-kocke k>=2).

Podsjetimo se prvo svojstva bipartitivnosti. Za graf kazemo da je bipartitivan ako mu vrhove mozemo podijeliti u dva disjunktna skupa (tj. dva skupa koji nemaju zajednickih elemenata) pri cemu je svaki vrh iz jedne skupine povezan SAMO sa vrhovima iz druge skupine. Zamijetite da nije nuzno da je povezan sa svima iz druge skupine.

Posto ovdje baratamo sa binarnim brojevima (sa k znamenki) koje povezujemo po pravilu da su dva broja povezana ako se jedan moze dobiti iz drugog mijenjanjem samo jedne znamenke, u biti je dovoljno dokazati sljedecu (ekvivalentnu) tvrdnju:

"Dokazi da se skup od 2^k binarnih brojeva sa k znamenki moze podijeliti u dva medjusobno disjunktna skupa tako da se nijedan broj iz jedne skupine NE MOZE dobiti mijenjanjem samo jedne znamenke nekog drugog broja iz te skupine."

Ponovimo jos jednom da su elementi k-kocke povezani po pravilu da se svaki element (tj. vrh) moze dobiti iz njegovih susjeda mijenjanjem samo jedne znamenke. Posto su u bipartitivnim grafovima vrhovi podijeljeni u dvije skupine, pri cemu imaju vezu samo sa vrhovima suprotne, opravdano je zakljuciti se nijedan element iz jedne skupine ne moze dobiti mijenjanjem samo jedne znamenke nekog drugog elementa iz iste skupine.

Posao se sastoji nalazenju nekog pravila po kojem cemo podijeliti elemente u dvije skupine. To cemo pravilo nazvati relacijom % (zao mi je nemam bolje ideje za simbol:-) Pokusat cemo dokazati da je relacija % relacija ekvivalencije. Potom cemo provijeriti razrede ekvivalencije i moliti boga da su ih samo dva. Ako uspijemo u svemu tome, dokazali smo gornju tvrdnju a time i pocetni problem.

E sad, kandidata za trazenu relaciju je mnogo (vjerujte mi izgubio sam na ovome par sati) ali samo jedna uistinu i rjesava problem. To je relacija koja kaze da su dva elementa u relaciji % ako i samo ako imaju jednaku parnost jedinica (tj, ili oba imaju paran ili neparan broj jedinica).

Zasto bas ona? Pa ako malo bolje pogledate gornju sliku vidjet cete da su za slucajeve 2-kocke i 3-kocke vrhovi uistinu podijeljeni u dvije skupine pri cemu svi elementi u jednoj imaju ili paran ili neparan broj jedinica. Pri tome se iz jedne u drugu skupinu prelazi mijenjanjem iskljucivo JEDNE znamenke pojedinog elementa. Zamijetite da se time redovito mijenja parnost jedninica. Npr. ako mijenjamo jedinicu u nulu bit ce jedna jedinica manje i broj jedinica ce iz parnog preci u neparni i obrnuto.

Ostajemo samo da dokazemo da je relacija % uistinu relacija ekvivalencije:
refleksivnost: x%x - x ima jednaku parnost jedinica kao i x (ocito)
simetricnost: x%y --> y%x - ako x i y imaju jednaku parnost jedinica, onda ih imaju i y i x (bedasto ocito)
tranzitivnost: x%y & y%z --> x%z - analogno prijasnjim tvrdnjama, ako x i y imaju jednaku parnost jedinica, i y i z imaju jednaku parnost jedinica, onda i x i z imaju jednaku parnost jedinica (bloody ocito)

Sva tri uvjeta ekvivalencije su zadovoljena, prema tome relacija % je relacija ekvivalencije.

Koliko ima razreda ekvivalencije? Pa upravo dva - oni elementi koji imaju paran broj jedinica i oni koji imaju neparan broj jedinica. Znaci vrhovi svake k-kocke su uistinu podijeljeni u dva disjunktna skupa prema pravilu da su vrhovi jednakih parnosti jedinica u istoj skupini, pri cemu se iz jedne skupine prelazi u drugu mijenjanjem jedne znamenke (zapravo, neparnog broja znamenki, ali to nije bilo trazeno u zadatku:-)

Ovime je dokazana gornja tvrdnja, a time i pocetni problem.

12.

(Odgovor: boysee) Gledat cemo zasebno za svaku vrstu grafa.
Kn: *Kn je jednostavan graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna (tj. sve tocke su pospajane). Posto svi vrhovi moraju biti spojeni logicno je da svaki vrh ima (n-1) susjeda (sve osim sebe). Posto svi imaju upravo taj stupanj - (n-1) tada je ta vrst grafa sigurno regularna. Stupanj regularnosti bi ocito bio (n-1).*

Kr,s: *Kr,s je potpuni bipartitni graf kod kojeg su vrhovi iz svakog od dva grafa iz unije spojeni. Ako pogledate sliku na stranici 15 uocit cete da su svi "lijevi" vrhovi onog stupnja koliko tocaka ima na "desnoj" strani, sto je logicno posto se oni moraju pospajati sa svim tim "desnim" vrhovima. Ista logika vrijedi i za vrhove s "lijeve" strane kod kojih svi imaju isti stupanj, tj. broj vrhova na "lijevoj" strani.*
Jedina logicna mogucnost da bi takav graf bio regularan, tj. da i vrhovi s "lijeve" i vrhovi s "desne" strane budu jednakog stupnja je da na lijevoj i desnoj strani ima jednak broj vrhova.
Tako da mozemo zakljuciti kako je Kr,s regularan samo ako je r = s, a stupanj regularnosti je stupanj svih tih tocaka, a to ce upravo biti broj tocaka na "suprotnoj" strani, tj. moze biti ili r ili s, kako kome drago. :)

Wn: *Wn je kotac, objasnjeno u odgovoru na 8. zadatak. Posto smo bas u tom 8. zadatku zakljucili da je niz stupnjeva od Wn = (3,3,3,3...(n-1 puta),(n-1)), treba gledati posebne slucajeve kod kojih to ne vrijedi.*
Najlaksi nacin bi bio da uvrstimo n koji ce dovesti i taj zadnji stupanj (koji jedini odskace) bas na 3, a to je n=4. Ako se nacrta takav kotac, on ce se sastojati od ciklusa C3 (trokut) kojem smo dodali vrh (npr. u sredinu) i pospojili sve vrhove s tim vrhom. I tocno, svaki vrh ima stupanj 3.
Za vrijednosti n manje od 4 ne treba ni gledati posto se takav kotac ne moze dobiti (ne bi smio postojati ciklus C2 kad se takav slucaj pretvara u lanac P2).
Znaci, Wn je regularan samo za n = 4, a stupanj regularnosti je takodjer 3.

13.

(Odgovor: boysee) Komplement grafa je graf koji ima isti skup vrhova, ali susjedni vrhovi postaju nesusjedni, a nesusjedni postaju susjedni (tj. tamo gdje je linija, ona se brise, a tamo gdje nije, nastaje :)).
Mi imamo jednostavni r-regularni graf s n vrhova. r-regularni graf ima sve vrhove stupnja r, tj. ti vrhovi imaju r susjeda. Ako gledamo komplement takvog grafa, on ce i dalje imati n vrhova, ali ce se broj susjeda tih vrhova promijeniti.
Sad, pitanje je kako ce se taj broj promijeniti.
Najlakse ce to biti pokazati ako uzmemo samo jedan vrh i orijentiramo se na njega, a to smijemo jer imamo regularan graf, tj. bilo sto radimo na tom jednom vrhu identicno ce se reflektirati na sve ostale vrhove.
Taj jedan vrh ima (n-1) potencijalnih susjeda (svi vrhovi osim njega samoga).
Medjutim, on vec jest r-regularan, tj. ima r susjeda. Ako mu gledamo komplement - taj vrh mora postati susjedan sa svim preostalim vrhovima. A broj tih vrhova mora biti (n-1)-r (posto ne smije biti susjedan s vec od prije susjednim vrhovima originalnog grafa).
I tako je dokazano da je komplement r-regularnog grafa ((n-1)-r)-regularni graf.

14.

(Odgovor: boysee) Kocka s 8 vrhova je graf koji se sastoji od 8 vrhova koji su medjusobno spojeni tako da svaki vrh ima stupanj 3 (ma dobro, svatko zna kako kocka izgleda :)).
Komplementaran graf tome bio bio graf koji predstavljaju sve dijagonale unutar kocke (dijagonale stranica + prostorne dijagonale).
Prepoznati geometrijsko tijelo u dobivenom komplementarnom grafu? Ne mogu.
:):):):):):)

<u>*Dodatak*</u>

(Odgovor: Vjeko) Meni to izgleda kao 2 piramide unutar kocke.

15.

(Odgovor: Pylo) Samokomplementaran graf je izomorfan svome komplementu.

(komplement ću označiti sa ')
Ako uzmemo nužan uvijet izomorfnosti: $|E(G)| = |E(G')|$
očito je da takav graf mora imati jednak broj bridova kao i njegov komplement.
E sad, skup svih mogućih bridova (govorimo o jednostavnom grafu) je skup bridova potpunog grafa pa iz toga znamo da ima $|E(Kn)|=n(n-1)/2$ bridova (n je broj vrhova).
Komplementaran graf mora sadržavati sve bridove koje nema izvorni graf, dakle on ima:
$|E(Kn)|-|E(G)|=|E(G')|$
Ako sad u to uvrstimo onu prvu jednadžbu, dobije se:

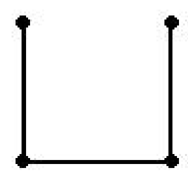
$2*|E(G)|=|E(Kn)|$

$|E(G)|=n(n-1)/4$

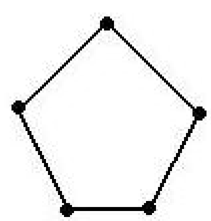
Dakle taj broj očito mora biti cijeli broj da bi uvijet bio zadovoljen pa zato ili n ili (n-1) mora biti djeljivo s 4.
Iz toga proizlazi n=0,1(mod4)

16.

(Odgovor: Pylo) Samokomplementarni grafovi sa 4 vrha moraju imati (iz gornje formule) 3 brida, a ja sam našao samo jedan takav:



Samokomplementarni grafovi sa 5 vrhova moraju imati 5 bridova, našao sam jednog, nisam siguran dal ima još koji:



17.

(odgovor: boysee) Bridni graf nekog grafa jednostavno je pretvorba bridova tog grafa u vrhove bridnog grafa. Npr. ako imamo graf s 3 brida, njegov bridni graf biti ce graf s 3 vrha, medjutim to nije jedini uvjet. Takodjer susjedni vrhovi bridnog grafa, moraju odgovarati susjednim bridovima originalnih grafa (susjedni bridovi se smatraju oni koji imaju zajednicu tocku).
Evo i crteza onoga sto se trazi u zadatku:

Ovo su grafovi K1,3 i K3, no ako idete pretvarati bilo koji od tih grafova u njihov bridni graf dobit cete opet graf K3 (posto ce se svaki brid pretvoriti u novi vrh, a svi su medjusobno icindentni).
<u>Alternativno</u>
(Odgovor: Vjeko) Možda bi ga mogli dokazati i ovako:
Znači trebali bi imati isto bridova i u jednom i drugom slučaju.
*Kod K3 imamo 3 brida, a kod K1,3 imamo isto r*s bridova odnosno 3 brida.*

18.

(Odgovor: boysee) Ovaj zadatak je u biti puno laksi no sto se cini. Bit cijelog zadatka je napraviti bridni graf tetraedra i narihtati tocke tako da dobijete sliku oktaedra (jer je tako najlakse vidjeti izomorfnost).
Prvo je uvijek dobro napraviti malu provjeru je li zadatak uopce zadan.
Oktaedar ima 6 vrhova, a tetraedar ima 6 bridova - to stima. Svi vrhovi oktaedra su stupnja 4, svi bridovi tetraedra imaju po 4 susjedna brida - i to stima. Te neke osnovne provjere prolaze, pa postoji dobra sansa da je tvrdnja istinita.
Necu objasnjavati kako se pretvara iz obicnog u bridni graf, to je samo mijenjanje bridova za tocke i ucrtavanja relacija. Radje cu pokazati kako se pametno mogu raspodijeliti tocke tako da se odmah vidi kako su bridni graf tetraedra i oktaedar izomorfni:

19.

(Odgovor: Pylo) Ako je neki graf G k-regularan znači da svaki negov vrh ima stupanj k, tj. u njemu se spaja k bridova, pa svaki brid ima još (k-1) susjednih bridova u tom vrhu. Budući da svaki brid spaja 2 vrha, on mora imati ukupno 2(k-1) susjednih bridova.*
Pa je time dokazano da je bridni graf L(G) (2k-2)-regularan.

[MAT3R] UUTG - 2. Povezanost

Zadaci

12.

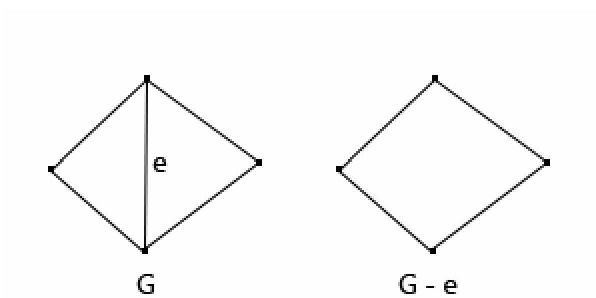
(Odgovor: boysee) Udaljenost kod vrhova (u ovom poglavlju) definira se kao put (tj. broj bridova) koji treba preci od jednog zadanog do drugog, takodjer zadanog, vrha. Prvo pitanje nam kaze kako svaka dva vrha moraju imati udaljenost 1. To znaci da bi svaki vrh morao kao svog susjeda imati sve ostale vrhove (kako bi mu svi bili udaljeni samo za 1 brid), a takav graf ima strukturu potpunog grafa, tj. Kn.
Drugo pitanje trazi da u grafu imamo dva vrha koji su udaljeni za (n-1) bridova. Takav graf takodjer nije tesko naci, ako se sjetimo lanaca (Pn) kod kojih ne postoji nekakav sastrane put, vec da bi dosli s jednog kraja na drugi trebamo proci upravo (n-1) bridova.

13.

(Odgovor: boysee) Struk grafa je duljina najkraceg ciklusa kojeg u njemu mozemo naci. Petersenov graf (slika - str.23) je jednostavni graf, tako da nema ciklusa duljine 1 i 2 (nema petlji i paralelnih bridova). Sada pogledamo sami graf i ustanovljujemo da u njemu nema niti jednog trokuta kojeg bi mogli uzeti kao ciklus duljine 3. Ciklusa duljine 4 takodjer nema (ako ima javite, ja nisam uspio naci), a ciklus duljine 5 nije tesko naci, tako da mu je struk 5.

14.

(Odgovor: boysee) Ovaj dokaz je najlakse zamisliti graficki zato sto je teorem dosta ocigledan ako zamislite cak i neki najjednostavniji sustav ciklusa.
Uzet cemo dva ciklus sa po 3 vrha koji imaju zajednicki brid (2 trokuta sa zajednickom stranicom). Kad bi pobrisali taj zajednicki brid ostao bi neki cetverokut koji je i sam po sebi onda ciklus.



To vrijedi i za sve cikluse ma koliko oni bili veliki - opet ce brisanjem tog brida biti stvoren samo neki veci ciklus jer ce vrhovi s tog pobrisanog brida i dalje "voditi" taj ciklus.

15.

(Odgovor: Pylo) Ako je G jednostavan graf s 2k vrhova bez trokuta, treba dokazati da ima najviše k^2 bridova.

Ovo zapravo i ne znam dokazati, al evo što sam zaključio:
Uzmemo graf za koji znamo da nema trokuta, a to je bipartitan graf. Takav graf ima najviše bridova, ako je potpun (logično). Kod potpunog bipartitnog grafa K(r,s) svaki vrh iz jedne skupine je spojen sa svakim iz druge. Znači kada bi sad htjeli dodati još jedan brid, morali bi spojiti dva vrha sa iste strane, međutim tako bi sigurno napravili trokut. Dakle zaključio sam da je potpuni bipartitni graf K(r,s) slučaj za koji ćemo dobiti naviše bridova bez da stvorimo trokute.
Sada treba samo još naći za koje r i s taj broj ima maksimum.
*K(r,s) ima r*s bridova, s tim da je u našem slučaju r+s=2k (ukupan broj vrhova)*
Tražimo maksimum funkcije:
r(2k-r)*

*Uz malo deriviranja dobivamo r=k, pa je onda i s=k, a broj bridova r*s=k^2*
A to je ujedno i primjer grafa za tu granicu: K(k,k)

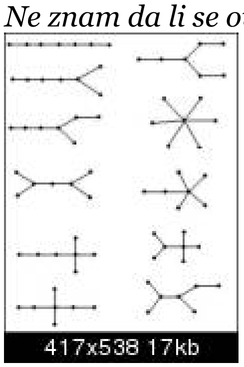
16.

(Odgovor: Pylo) Stablo je povezani graf bez ciklusa. Sličan zadatak imate na strani 26, 4 zadatak. Uzeo sam isti postupak i samo primjenio na naš slučaj.

Dakle zbroj svih stupnjeva vrhova u nekom grafu (ovo vrijedi za sve grafove) je:
S deg(v) = 2|E|
Pri čemu je S oznaka za sumu, a |E| broj bridova u grafu. Stablo sa n vrhova ima n-1 bridova.
Ako jedan od tih vrhova ima stupanj k, onda zbroj stupnjeva ostalih (n-1) vrhova iznosi ukupno [2(n-1)-k] i čega se vidi da će bar k vrhova imati stupanj 1. (dirichletov princip)

17.

Ne znam da li se ovo može računski dobiti, ali ajmo težim putem - crtati.



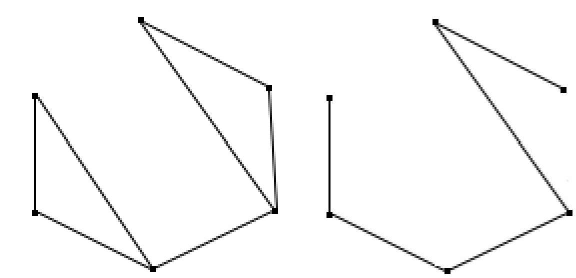
Tu su 11, ak netko nađe još nek javi.

18.

Kod ovog bi zadatka rekao da se radi o krivo zadanoj matrici jer ako pogledamo svojstvo matrice susjedstva koje kaze da ona mora biti simetricna u odnosu na dijagonalu s nulama, ovdje ocito nedostaju dvije jedinice. Prava matrica bi trebala izgledati ovako (crveno je oznaceno gdje nedostaje jedinica):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Razapinjanje grafa je proces brisanja bridova njegovih ciklusa sve dok se ne dobije stablo. Kada se taj graf nacrta i kada mu se maknu dva proizvoljna brida (da bi ga se razapelo) dobije se:

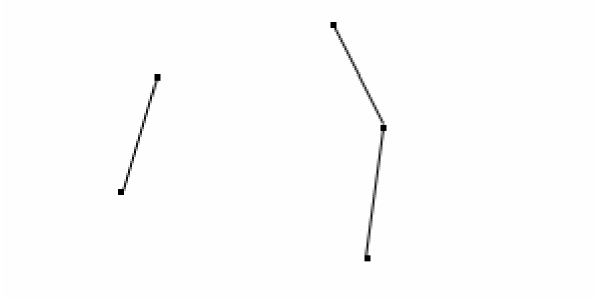


Matrica susjedstva tada je:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

19.

(Odgovor: boysee) Za prvi slucaj trebamo graf koji se sastoji od dva dijela (za svako disjunktno razapinjuca stablo). Rjesenje bi trebalo biti:



Ako imam samo 4 vrha dobiti cemo nesto vrlo slicno ovome gore, samo sto ce desni imati samo 2 vrha i 1 brid manje.
Kod 3 vrha nisam siguran smije li se s jedne strane jednostavno nacrtati sami vrh, a s druge ostaviti graf s 2 vrha i jednim bridom (kao ovaj gore lijevo). Ako smije onda je to rjesenje (a trebalo bi se moci jer je stablo zapravo suma, a suma se definira kao graf bez ciklusa, sto vrh zasebno u biti i jest ako nema petlju).

20.

(Odgovor: b0ysee) Za povezani graf G kazemo da je eulerovski ako postoji zatvorena staza koja sadrzi svaki brid od G. Povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.
Iz ovih tvrdnji moze se za Kr,s reci kako i r i s moraju biti parni posto je Kr,s potpuni bipartitan graf (svaki vrh s jedne strane vezat ce se na sve vrhove s druge, a njegov ce stupanj biti paran samo ako se s druge strane nalazi paran broj vrhova). Takodjer, graf moze biti i skoro eulerovski, a skoro eulerovski je ako staza kroz sve bridove nije zatvorena, te vrijedi da je graf skoro eulerovski ako i samo ako ima dva vrha s neparnim stupnjem. To znaci da ili r ili s mogu biti 2, a onda se s druge strane mora nalaziti neparan broj vrhova (jer tada imamo 2 vrha koja su neparni, zbog druge strane, te sve ostale vrhove koji se vezu na ova dva i time su automatski parni).
Sto se kotaca Wn tice, on nikada nece biti niti eulerovski niti skoro eulerovski. To se najlakse vidi iz toga ako mu pogledamo "vanjske" vrhove. Oni uvijek imaju stupanj 3 posto imaju 2 susjedna "vanjska" vrha i 1 "unutarnji", tako da ce (n-1) vrhova (tj. ovi "vanjski") tog kotaca sigurno biti neparno, a tu vec pada test na eulerovski graf.

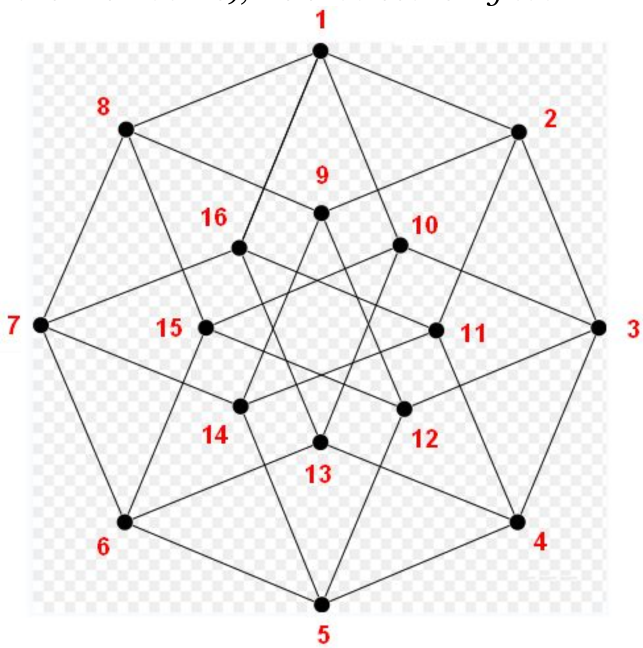
21.

(Odgovor: Pylo) Za povezani graf kažemo da je eulerovski graf, ako postoj zatvorena staza koja sadrži svaki njgov brid. U eulerovskom grafu svi vrhovi imaju parni stupanj.

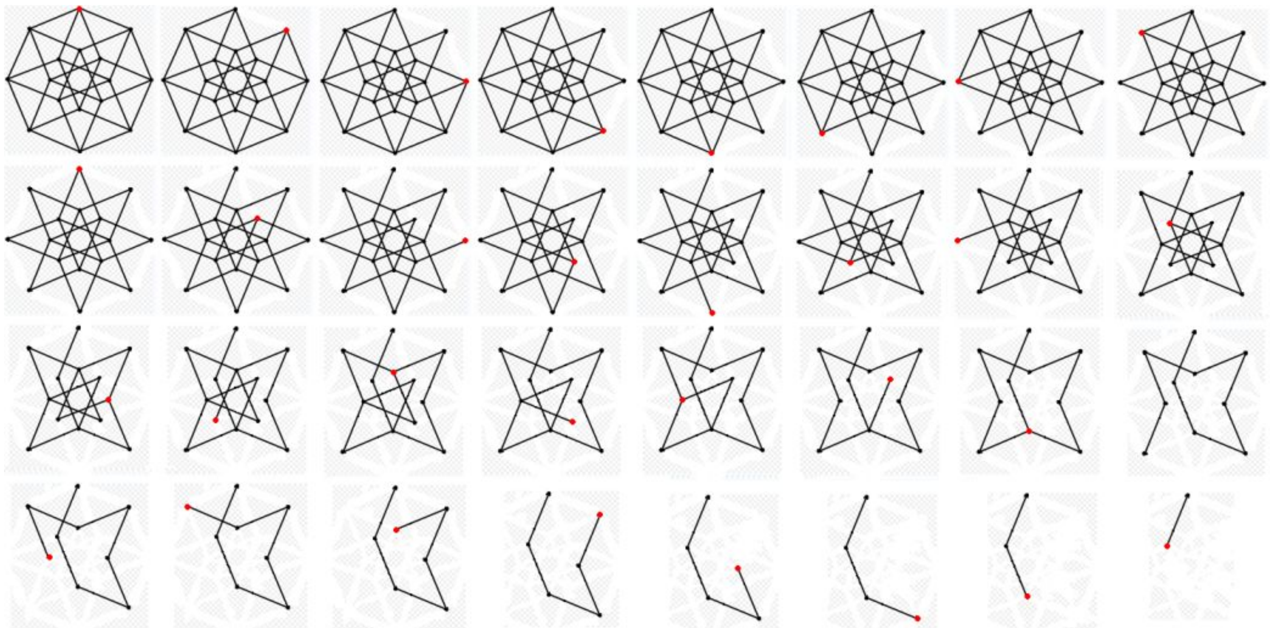
Ako neki vrh ima paran stupanj, znači da je incidentan sa parnim brojem bridova. To znači da će svaki brid u tom vrhu imati neparan broj susjednih bridova, ali kako svaki brid spaja dva vrha, i u svakom ima neparan broj susjednih bridova, ukupno će imati paran broj susjednih (zbroj dva neparna broja = paran).
Bridni graf preslikava te bridove u vrhove, koji će tada također imati jednak broj susjednih vrhova, dakle paran broj, a to je ujedno i stupanj nekog vrha.
Zato je bridni graf jednostavnog eulerovskog grafa također eulerovski.

22.(Odgovor: Pylo) Ovo je jako jednostavno i poprilično dosadno.
Fleuryev aloritam je postupak pronalaženja eulerovske staze (ako postoji), a radi se na slijedeći način:
Počmete u bilo kojem vrhu grafa i "hodate" po grafu bilo kojim redoslijedom uz ova pravila:
1) prebriši bridove kojima si prošao, a ako vrh ostane izoliran, briši i njega
2) prijeđi mostom samo ako nemaš druge mogućnosti.

Sad je jedino problem nacrtati Q4 (to je hiperkocka za sve vas geekove:), ali naravno mi se nećemo time mučiti nego ćemo pogledati na internet.
http://en.wikipedia.org/wiki/Tesseract
Tu sam odabrao graf koji mi se najviše svidio i nasumice označio vrhove (nije važno kako ih označimo), i to onda ovako izgleda:



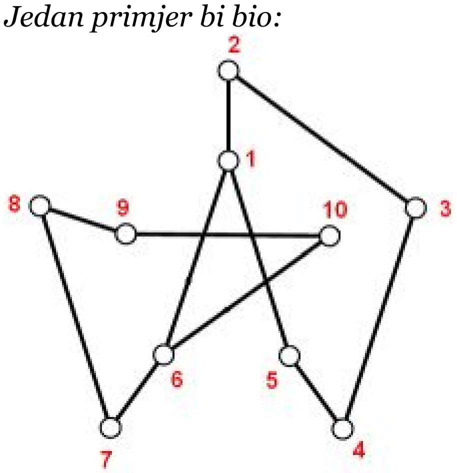
Postupak sam već objasnio, on nije jednoznačan i svatko može ići drugačijim putem.
Ovako sam ja išao:



Eulerovska staza je: 1->2->3->4->5->6->7->8->1->10->3->12->5->14->7->16->11->14->9->12->15->10->13->6->15->8->9->2->11->4->13->16->1

23.

(Odgovor: Pylo) Petersenov graf imate u knjizi na strani 23, ali kome se ne da otvarat može ga vidjet ovdje:
http://en.wikipedia.org/wiki/Petersen_Graph
Možete vidjet da taj graf ima 10 vrhova stupnja 3. Da bi graf bio skoro eulerovski on mora imati samo dva vrha neparog stupnja. Znači moramo od 10 vrhova, 8 smanjih stupanj, a svakim bridom koji maknemo utječemo na dva vrha. Dakle treba maknuti 4 nesusjedna brida, i to se može na ovom grafu.
Jedan primjer bi bio:



A staza je: 1->2->3->4->5->1->6->7->8->9->10->6
Primjetite da kod skoro eulerovskih grafova postoji staza koja prolazi kroz sve bridove, ali ona nije zatvorena. Ta staza počinje u jednom vrhu neparnog stupnja, a završava u

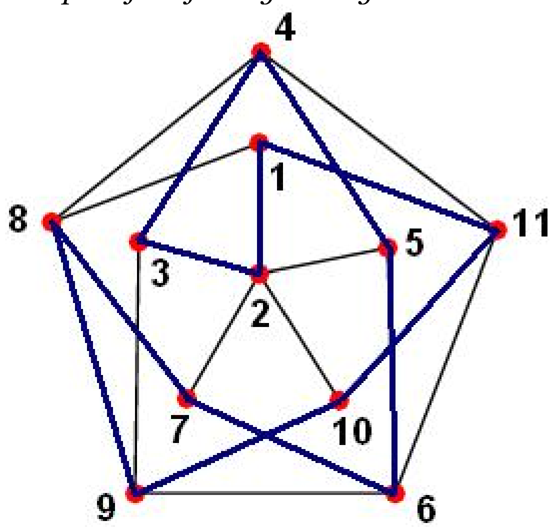
drugom.

24.

(Odgovor: Pylo) Graf vam je na slici (str. 36.) treba dokazati da je hamiltonovski. Hamilonovski grafovi imaju ciklus koji prolazi svim vrhovima (samo jednom).
U knjizi piše:
Ako je G jednostavni graf s n vrhov, n>=3, te ako vrijedi:
deg(v)+deg(w)>=n
za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

Drugim riječima mi bi trebali uzet svaka dva nesusjedna vrha u grafu, zbrojit njihove stupnjeve i provjerit da li je taj zbroj >= n (n=11 u grafu iz zadatka)
To je nekih 11! računica, pa neće biti problem. NOT!

Ali već ćemo na prvom pokušaju zbrajanja stupnjeva nesusjednih vrhova dobiti manje od 11, pa očito ova pretpostavka ne pomaže. Što nam preostaje? Da baš to, crtanje. Evo primjera jednog takvog ciklusa. Ide od 1 do 11, pa se vrati na 1.



25.

(Odgovor: boysee) Takvi grafovi su upravo ciklus grafovi - Cn. Da bi graf imao eulerovsku stazu mora postojati zatvorena staza koja prolazi kroz sve bridove - to vrijedi za Cn. Da bi graf bio hamiltonov, tj. imao hamiltonovu stazu mora imati zatvorenu stazu koja prolazi kroz sve vrhove, a i to Cn ocito ima.

26.

(Odgovor: Pylo) Potpuni graf K(2k+1) ima [(2k+1)(2k)/2] = k(2k+1) bridova. Budući da svaki disjunktni hamiltonovski ciklus zauzima (2k+1) bridova (jer prolazi kroz sve vrhove), može ih biti najviše:

k(2k+1)/(2k+1) = k

27.

(Odgovor: Pylo) Pretpostavimo da imamo potpuni graf sa n vrhova, n>=3. On ima n(n-1)/2 bridova i stupanj svakog vrha mu je (n-1).
Zanima nas koliko mu bridova trebamo maknuti, da bi dobili graf sa (n^2-3n+6)/2 koji je zadan u zadatku.

[n(n-1)/2] - [(n^2-3n+6)/2] = n-3

Znači početnom potpunom grafu maknemo (n-3) brida i dobijemo graf sa zadanim svojstvima.

Sada pogledajmo da li takav graf zadovoljava dovoljan uvijet za sve nesusjedne vrhove v i w:
deg(v)+deg(w)>=n

U potpunom grafu taj će zbroj uvijek biti 2(n-1) što je veće od n. Ako maknemo (n-3) bridova, u najgorem slučaju nekom će se vrhu stupanj smanjit za (n-3).
Treba predvidjeti još jednu mogućnost, a to je da je jedan od bridova koje smo maknuli spajao oba promatrana vrha, pa je zato i drugom vrhu stupanj pao za 1.
Dakle od dva promatrana nesusjedna vrha moguće je da im se zbroj stupnjeva smanjio najviše za [(n-3)+1]=n-2
Zbroj stupnjeva će tada biti:
2(n-1) - (n-2) = n >=n

Uvijet je zadovoljen, a pretpostavka dokazana.

[MAT3R] UUTG - 3. Algoritmi optimizacije

2.

(Odgovor: boysee) Ovakvi zadaci najlakse se rijesavaju Dijsktrinim algoritmom s 41. str). Ukratko, ideja je da se usporedjuju susjedni vrhovi i bira najkraci put (s time da se uvodi varijabla l koja sadrzi ukupni najkraci put do trenutnog vrha), ali tako da se usporedjuje i sa korakom "unazad" (da se slucajno ne bi nasao u konacnici mozda povoljniji put). Na 42. str. ima lako pratljiv postupak, pa necu puno ulaziti u to, vec samo napisati po uzoru na taj primjer kako rjesiti ovaj zadatak.

l(A) = 0, l(B) = inf, l(C) = inf, ..., l(G) = inf, S0 = A, i = 0 (pocetno stanje)

l(B) = 30, l(C) = 50, min{30,50,inf} = 30, u1 = B, S1 = {A,B}, i = 1 (izabrali smo najkraci put do vrha B).

l(C) = 49, l(D) = 36, l(E) = 70, min{50, 49, 36, 70, inf} = 36, u2 = D, S2 = {A,B,D}, i = 2 (sljedeci vrh je vrh D posto on daje najkraci put, logicno)

l(C) = 48, l(F) = 59, l(E) = 71, min{49, 70, 48, 59, 71, inf} = 48, u3 = C, S3 = {A,B,D,C}, i = 3 (ovo je zanimljivo, naime, dosli smo u vrh C preko dva medjuvrha umjesto da smo *isli direktno iz A, ali zato bas Dijkstrin algoritam ovako odlicno pali jer smo medjuputevima do C-a dosli sa "samo" 48 jedinica, a ovako bi nam trebalo 50. Takodjer, treba vidjeti da smo uzeli sve podatke iz proslog koraka kad smo trazili min kako ne bismo izgubili kakvo mozebitno rjesenje).*

l(F) = 58, min{59, 58, inf} = 58, u4 = F, S4 = {A,B,D,C,F}, i = 4 (opet smo "ustedjeli" jednu jedinicu! :) Osim toga, usporedjivanje s E-om iz proslog koraka svodi se na usporedbu s inf. jer E nije susjedan vrh)

l(E) = 69, l(G) = 88, min{71, 69, 88} = 69, S5 = {A,B,D,C,F,E}, i = 5 (ovdje smo ipak morali usporediti s onim prijasnjim E-om jer je opet moglo doci do gubljenja rjesenja)

l(G) = 77, min{88, 77} = 77, S6 = {A,B,D,C,F,E,G}, i = 6, KRAJ!
(Dosli smo do G-a, naravno usporedjivali smo i s onom drugom varijantom da ne izgubimo koje rjesenje)

3.

(Odgovor: boysee) Ovaj zadatak moze se naravno rijesiti i Dijkstrinim algoritmom (pogotovo za udaljenije tocke), ali ne vjerujem da ce mi se dati, pa cu samo proci kroz vrhove gledajuci sliku jer se vecina vidi na prvi pogled. :)

** A*

1 je najmanja tezina brida, pa ce to biti direktan put.

S -> A

** B*

Moze se doci i preko A i preko C, ali nijedan takav put ne nudi tezinu manju od 3, tako da ce i to biti direktno.

S -> B

** C*

Moze se doci preko A, no ta ruta bilo kako bilo nudi vrlo brzo put veci od 6, medjutim, preko vrha B moze se doci za 5 jedinica, tako da biramo taj put!

S -> B -> C

** D*

Ovdje stvarno ne treba puno mozgati da bi se vidjelo kako se preko vrha A dodje za 3 jedinice do vrha D, tako da je to dosta ocito.

S -> A -> D

** E*

E, ovdje vec ima malo vise mogucnosti, medjutim, put preko A i D nudi put od 4 jedinice. Ako krenemo preko B u startu imamo bar 3 jedinice (koje ce sigurno dati bar 4 kasnije), a ako krenemo preko C u startu imamo 6 jedinica, tako da je i tu odluka vrlo laka.

S -> A -> D -> E

** F*

Put preko tocke A u najboljem slucaju iznosi 9 jedinica (samo 2 moguca puta koja su kolko tolko "stedljiva"). Put preko tocke C je nuzno veci od 9, pa nas ni ne zanima, ali preko tocke B mozemo stici s 3+3 jedinice, pa cemo to i izabrati! :)

S -> B -> F

** G*

Kod G-a treba upotrijebiti do sada dobivene podatke i pogledati sto je najpametnije iskoristiti. Do vrha D dosli smo preko A najbrze za 3 jedinice. Ako skratimo put preko E dodat cemo mu samo 1+5 jedinica i on ce iznositi sve skupa 9. Do vrha E smo dosli najbrze preko E-a, no on je ukljucen u put od D (ovaj prvi promatrani), tako da nas ne zanima vise. Do vrha F smo dosli za 6 jedinica (preko tocke B), no on ima put koji nosi samo 2 jedinice, tako da moze ukupno doci za 8 jedinica do vrha G i ociti je pobjednik! :)

S -> B -> F -> G

Ovaj zadnji primjer (vrh G) zapravo je mini primjena Dijkstrinog algoritma bez pisanja svih onih varijabli.

4.

(Odgovor: b0ysee) Za ovaj zadatak nisam u potpunosti siguran, ali ja bio napravio sljedece modifikacije (koje su oznacene bold tekstom):

(algoritam s 41. strane)

1. Stavi l(u0) = 0, l... (ovdje ne bih nista mijenjao)
*2. Za svaki vrh v E kompl(Si), zamijeni l(v) s **max{l(v), l(ui) + w(u,v)}**. Izračunaj **max{l(v)}**, te odredi ui+1 kao onaj vrh za koji se taj **maksimum***
3. Nema promjene postize. Stavi...

5.

(Odgovor: b0ysee) Placeholder, valjda ce mi se dati rijesiti, ovo je samo drilanje postupaka koji su vec navedeni. Dobije se graf gradova i treba naci sve moguce kombinacije najkracih puteva izmedju dvaju tocaka.

6.

-za svako razapinjujuce stablo G1

-za svaki brid koji postoji u G ali ne u G1 radi

preslikaj ga u G1;
provjeri je li duljina dobivenog ciklusa manja od zadnje dobivene;
ako je onda zapamti novu vrijednost;
inace nista;
izbrisi zadnji brid koji si dodao u G1;

--

napomena: "provjeri je li duljina dobivenog ciklusa..."
pri izvrsavanja algoritma u tom koraku dobit cemo graf sa samo jednim ili nula ciklusa. njegovu duljinu zato lako odredimo:

korak 1: provjeri imal li u grafu vrhova stupnja 1; ako ima makni ih (i pripadajuce bridove) i vrati se na korak 1
korak 2: zbroji vrijednosti preostalih bridova

---

upozorio me toxfish (hvala, kolega!) da stari algoritam i program ispod ne rade za neke grafove kod kojih minimalno razapinjujuce stablo nije jedinstveno; to znaci da bi trebalo provjerit sva razapinjujuca stabla zadanog grafa, sto je onda okej ali slozenost algoritma jako raste pa vise nije bas praktican, jer istih moze biti jako puno...

7.

(Odgovor: boysee) Za ovaj graf se lako da vidjeti da je skoro eulerovski jer ima tocno dva vrha neparnog stupnja. To nam olaksava problem kineskog postara ekstremno, zato sto onda mozemo naci eulerovsku stazu (tako da postar svaki brid prodje samo jednom dok raznosi postu), a nakon toga ga vratimo u sjediste najkracim mogucim putem (cak i u knjizici kazu da ako dobijemo takav graf da se on svodi na: nalazenje eulerovske staze + Dijsktrin algoritam kako bi se sto brze vratili u bazu).

Eulorovskih staza ovdje ima koliko hocete, samo da podsjetim - to je put kojem su svi bridovi razliciti. Evo, ja cu ici (po tezinama bridova) ovako: 7 -> 2 -> 6 -> 3 -> 10 -> 3 -> 4 -> 2 -> 8 (Sve skupa: 45).
Za nalazenje puta natrag kod ovako jedostavnog grafa cijeli Dijsktrin algoritam stvarno nije potreban, biti ce dovoljno samo se posluziti tim principima i naci ga odoka. Prvo se vratimo bridom tezine 8 natrag. Sada imamo 3 izbora: gornja staza iznosi (3+6+2) 11, srednja iznosi 10, a doljnja iznosi (2+4+3) 9, sto znaci da cemo izabrati donju. Tome pridodamo jos i ovih zadnjih 7 i imamo: 45 + 8 + 9 + 7 = 69, sto je i najkraci put kojim kineski postar moze ici.

8 zadatak

Da bi došli iz početka do kraja imamo duljinu 27. Kako je došlo do toga? Budući da je svaki brid veličine 1, prebrojimo broj bridova a to je 17. Budući da imamo "slijepe ulice" odnosno bridove kojima se moramo vraćati na prvotni put znači da njima moramo 2 *puta proći (doći do kraja i vratiti se natrag). Pa prebrojimo i broj bridova koji su "slijepe ulice". Njih ima 10. Ukupno je 17+10=27. Sada se nalazimo na kraju pa se trebamo vratiti natrag. Natrag ćemo se vratiti najkraćim putem i taj put je duljine 7.*

*Ukupno je 27+7=**34***

9.

(Odgovor: boysee)Pohlepni algoritam ovdje daje rjesenje.
Pohlepni algoritam je nacin trazenja najkraceg puta po grafu na nacin da gledamo koji nam je u tom trenutku put dalje najbolji, tj. u svakom vrhu ponovno gledamo kud cemo dalje i biramo najbolji izbor.

Krenimo iz vrha A, ici cemo u vrh D zato sto je tezina tog brida 3, nakon toga idemo u vrh E jer ovdje imamo tezinu 2, pa zatim u vrh C jer je tezina opet 2, pa zatim u vrh B jer je tezina 3 i nakon toga se vracamo u vrh A (preko brida tezine 4).
Ukratko: A -> D -> E -> C -> B -> A (tj. 3+2+2+3+4 = 14)

Sad, kako najbrze provjeriti jesmo li stvarno isli najboljim putem. Nakon sto sam dosta gledao taj problem cini mi se da je najjednostavnije pogledati sve tezine bridova i popisati ih u jednom redu. Nakon toga pogledamo koliko bridova moramo proci, te vidimo u kolikoj mjeri koristimo bridove najmanje tezine.

Konkretno za ovaj primjer,
imamo bridove tezina: 2,2,3,3,4,4,5,6,7,8; ako pogledamo nas put gore mi smo koristili bridove tezina 2,2,3,3 i 4 sto je upravo najmanje sto smo i mogli! :)

10.

(Odgovor: boysee) Kako bi sto brze dosli do rjesenja mozemo opet krenuti s pohlepnim algoritmom (ali trazeci najvece vrijednosti), pa pogledati zadovoljava li to nase apetite. :)

Krenimo iz A:
A -> C (tezina 6)
C -> D (tezina 4)
D -> B (tezina 7)
B -> E (tezina 8)
E -> A (tezina 5)

Tezine bridova u nasem grafu: 2,2,3,3,4,4,5,6,7,8, a mi smo koristili 4,5,6,7 i 8 - problem rjesen! :)