

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R

18.10.2007.

1. (3 boda)

- a) (1b) Iskažite Dirichletove uvjete.
- b) (1b) Da li funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na segmentu $[0, 2]$? Obrazložite!
- c) (1b) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.

2. (3 boda)

Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ -1, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$

- a) (2b) Razvijte f po kosinus funkcijama u trigonometrijski Fourierov red.
- b) (1b) Pomoću Parsevalove jednakosti izračunajte $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. (4 boda)

Funkciju $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala, te koristeći taj prikaz izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

4. (3 boda)

Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^2 \cos x dx.$$

5. (4 boda)

Primjenom Laplaceove transformacije riješite diferencijalnu jednadžbu $y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, u kojoj je funkcija f zadana slikom 1.

6. (5 boda)

- a) (1b) Definirajte konvoluciju dviju funkcija.
- b) (2b) Neka su f i g originali. Dokažite da je $f * g$ eksponencijalnog rasta.
- c) (2b) Riješite integralnu jednadžbu.

$$y(t) = 3 \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau.$$

7. (3 boda)

Nađite struju $i(t)$ električnog kruga zadanog slikom 2 uz priključeni napon $e(t) = 1 + \cos 2t$.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R

18.10.2007.

1. (3 boda)

a) (1b) Funkcija $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[a, b]$, ako vrijedi

- 1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,
- 2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

b) (1b) Funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ne zadovoljava Dirichletove uvjete na segmentu $[0, 2]$ jer u točki 1 ima prekid koji nije prekid prve vrste.

c) (1b) Teorem o konvergenciji Fourierovog reda.

Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:

- (i) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekinuta u točki x
- (ii) $S(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$, ako je x točka prekida za f .

2. (3 boda)

a) (2b) Razvijamo u red parno proširenje funkcije f . $T = 2$, $L = 1$, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{1} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} 1 \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) \, dx \right] = 2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{1} \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x) \, dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (-1) \cos(n\pi x) \, dx \right] = 2 \left[\frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_{x=\frac{1}{2}}^1 \right] = \frac{4}{n\pi} \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right)$$

Uočavamo

$$\Rightarrow a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot (-1)^k$$

pa je traženi trigonometrijski Fourierov red

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)\pi x].$$

b) (1b) Parsevalova jednakost neposredno daje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2k+1)} \right)^2 = \frac{2}{2} \int_{-1}^1 1^2 \, dx \Rightarrow \frac{16}{\pi^2} \cdot s = 2 \Rightarrow s = \frac{\pi^2}{8},$$

gdje smo sa s označili traženu sumu.

3. (4 boda)

$f(x)$ je očito parna funkcija,

$$\Rightarrow B(\lambda) = 0, \quad f(x) = \int_0^{\infty} A(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda$$

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1 - \xi) \cos(\lambda \xi) d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos(\lambda \xi) d\xi - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \underbrace{\xi}_u \underbrace{\cos(\lambda \xi)}_{dv} d\xi \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \left. \frac{\sin(\lambda \xi)}{\lambda} \right|_{\xi=0}^1 - \frac{2}{\pi} \cdot \left[\xi \left. \frac{\sin(\lambda \xi)}{\lambda} \right|_{\xi=0}^1 - \int_0^1 \frac{\sin(\lambda \xi)}{\lambda} d\xi \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \lambda}{\lambda} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin \lambda}{\lambda} + \left. \frac{\cos(\lambda \xi)}{\lambda^2} \right|_{\xi=0}^1 \right] \\ &= \frac{2}{\pi \lambda^2} (1 - \cos \lambda) \end{aligned}$$

Fourierov integral zadane funkcije f je:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Ako uvrstimo točku $x = 0$, iz

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \lambda}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)}{\lambda^2} d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right)}{\left(\frac{\lambda}{2} \right)^2} d \left(\frac{\lambda}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{\lambda}{2} = x \right| \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

4. (3 boda)

$$\cos t \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$f(t) := t^2 \cos t \quad \circ \text{---} \bullet \quad (-1)^2 \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right)'' = \left(\frac{1 - s^2}{(s^2 + 1)^2} \right)' = \dots = \frac{2s \cdot (s^2 - 3)}{(s^2 + 1)^3} =: F(s)$$

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad F(s) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

pa

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^2 \cos x dx = F\left(\frac{1}{2}\right) = \dots = -\frac{176}{125}$$

5. (4 boda)

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$f(t) = (u(t) - u(t-1)) - u(t-1) = u(t) - 2u(t-1) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} - 2 \frac{e^{-s}}{s} = F(s)$$

Preslikavanjem jednačbe u donje područje dobivamo:

$$s^2 Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) + Y(s) = F(s)$$

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = \frac{1}{s} (1 - 2e^{-s})$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 1)} \cdot (1 - 2e^{-s}) + \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} \right) \cdot (1 - 2e^{-s}) + \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-s} + \frac{2s}{s^2 + 1} e^{-s} \quad \bullet \text{---} \circ \quad u(t) - 2u(t-1) + 2 \cos(t-1)u(t-1) = y(t)$$

6. (5 boda)

a) **(1b)**

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau = [\text{alternativno}] = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

b) **(2b)** f i g su originali $\Rightarrow f$ i g su eksponencijalnog rasta

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &\leq \int_0^t |f(\tau)| \cdot |g(t - \tau)| d\tau \leq \begin{bmatrix} \exists M_1, M_2 \\ \exists a_1, a_2 \end{bmatrix} \\ &\leq M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1 \tau} e^{a_2(t - \tau)} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= M_1 M_2 e^{a_2 t} \cdot \int_0^t e^{(a_1 - a_2)\tau} d\tau \\
&= M_1 M_2 e^{a_2 t} \cdot \frac{1}{a_1 - a_2} \left[e^{(a_1 - a_2)t} - 1 \right] \\
&= \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2} (e^{a_1 t} - e^{a_2 t}) = [a = \max\{a_1, a_2\}] \\
&\leq \underbrace{\frac{2M_1 M_2}{a_1 - a_2}}_M e^{at} = M e^{at}
\end{aligned}$$

c) (2b)

$$y(t) = 3 \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau) d\tau$$

Slika jednadžbe u donjem području je:

$$Y(s) = 3 \cdot \frac{1}{s^2 + 1} + 2 \cdot \frac{s}{s^2 + 1} \cdot Y(s)$$

$$Y(s) \left(1 - \frac{2s}{s^2 + 1} \right) = \frac{3}{s^2 + 1}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) = 3$$

$$Y(s) = \frac{3}{(s-1)^2} \quad \bullet \text{---} \circ \quad 3te^t = y(t)$$

7. (3 boda)

$$e(t) = 1 + \cos 2t \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} = E(s)$$

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{Cs}} = \left[\begin{matrix} L = 1 \\ C = 1 \end{matrix} \right] = \dots = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{s^2 + 1}{s} \left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + 4} \right) = \frac{s^2 + 1}{s^2} + \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4} = 1 + \frac{1}{s^2} + 1 - \frac{3}{s^2 + 4}$$

$$I(s) = 2 + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \quad \bullet \text{---} \circ \quad 2\delta(t) + tu(t) - \frac{3}{2} \sin(2t)u(t) = i(t)$$