Druga školska zadaća, 23. XI. 2006.
grupe R1, R3; varijanta **A**

1. (**2 boda**) Pokažite da je skup svih prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1 ekvipotentan sa skupom svih prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 2.

   Rješenje: $A = \{3k+1 \ : k \geq 0\}$, $B = \{5k+2 \ : \ k \geq 0\}$. Funkcija $f : A \to B$, $f(3k+1) = 5k+1$ je bijekcija.

2. (**3 boda**) Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija ρ sa $x \, \rho \, y$ onda i samo onda ako je $\lfloor \frac{5}{x} \rfloor = \lfloor \frac{5}{y} \rfloor$, pri čemu je $\lfloor r \rfloor$ najveći cijeli dio realnog broja r (tj. $\lfloor r \rfloor$ je najveći cijeli broj a takav da je $a \leq r$). Dokaži da je ρ relacija ekvivalencije. Nađi najmanji element u razredu [100]. Koliko razreda ekvivalencije postoji?

   Rješenje: Ako je $x \in \mathbb{N}$ onda je $\lfloor \frac{5}{x} \rfloor \in \{0, 1, 2, 5\}$, broj klasa je 4, a $min[100] = 6$.

3. (**2 boda**) Zadana su dva različita paralelna pravca, te na svakom od njih po n točaka. Koliko postoji trokuta s vrhovima u tih $2n$ točaka?

   Rješenje: $2n\binom{n}{2}$.

4. (**3 boda**) Bacamo 5 kocaka različitih boja. Na stranama svake kocke upisani su brojevi od 1 do 6. Koliko mogućih ishoda bacanja ima? Koliko od tih ishoda ispunjava uvjet da je umnožak dobivenih brojeva jednak 200?

   Rješenje: Broj ishoda je 6^5, a uz dodatni uvjet broj ishoda je $\binom{5}{3} + \binom{5}{2} \cdot 3! = 70$, jer jedine mogućnosti za traženi ishod slučajevu u kojima se jave brojevi $2, 2, 2, 5, 5$ i $1, 2, 4, 5, 5$.

Druga školska zadaća, 23. XI. 2006.
grupe R1, R3; varijanta **B**

1. (**3 boda**) Zadani su skupovi $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Postoji li bijekcija iz skupa $A \times A \times A$ na skup 2^B? Ako da, konstruiraj jednu takvu bijekciju.

   Rješenje: $|A \times A \times A| = |2^B| = 2^9$, pa bijekcija postoji. Neka je $(x, y, z) \in A \times A \times A$. Napišimo x, y, z u binarnom obliku, tj. $x = (x_1 x_2 x_3)_2$, $y =$

$(y_1y_2y_3)_2$, $z = (z_1z_2z_3)_2$. Binarni broj $(x_1x_2x_3y_1y_2y_3z_1z_2z_3)_2$ možemo shvatiti kao karakteristični vektor nekog podskupa skupa B. Navedeno pridruživanje je bijekcija.

2. (**2 boda**) Na skupu $A = 3\mathbb{Z}$ svih cijelih brojeva djeljivih s 3 zadana je relacija ρ sa $x \,\rho\, y$ onda i samo onda ako je $x \equiv y \pmod 8$. Dokaži da je to relacija ekvivalencije. Nađi najmanji prirodni broj u razredu $[150]$.

   Rješenje: $min([150] \cap \mathbb{N}) = 6$.

3. (**2 boda**) U ravnini je zadano n točaka od kojih k leži na jednom pravcu, a osim tih k ne postoje tri točke na istom pravcu. Koliko postoji trokuta s vrhovima u tih n točaka?

   Rješenje: $k\binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}(n-k) + \binom{n-k}{3}$.

4. (**3 boda**) Koliko ima poredanih četveraca (x_1, x_2, x_3, x_4), gdje su $x_i \in \mathbb{N}_0$, tako da vrijedi
$$10 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30\ ?$$

   Rješenje: Broj rješenja nejednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 30$ jednak je broju rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30, x_i \in \mathbb{N}_0$, a takvih ima $\binom{30+5-1}{30} = \binom{34}{4}$, a broj rješenja nejednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9$ jednak je broju rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9,\ x_i \in \mathbb{N}_0$, a takvih je $\binom{9+5-1}{9} = \binom{13}{4}$, dakle ukupni broj rješenja početne nejednadžbe je $\binom{34}{4} - \binom{13}{4} = 45661$.