# TEORIJA GRAFOVA

1. (DEF) **JEDNOSTAVNI GRAF** $G$ sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$ (vertex) čije elemente zovemo vrhovi grafa $(G)$ i konačnog skupa $E(G)$ (edge) različitih dvočlanih podskupova $V(G)$ koje zovemo bridovi.

2. (DEF) Za brid $e=\{v,w\}$ kažemo da **spaja** vrhove $v$ i $w$ i bez mogućnosti zabune kraće ga pišemo **vw**. U toj situaciji kažemo da su vrhovi $v$ i $w$ grafa $G$ **susjedni**. Također kažemo da je $v$ **incidentan** s bridom $e$

3. (DEF) Za grafove $G_1$ i $G_2$ kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijektivna korespondencija (1-1 preslikavanje) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u $V(G_2)$. Takvu bijekciju zvat ćemo **izomorfizam** grafova.

4. (DEF) Za zadane disjunktne grafove $G_1=(V(G_1)), E(G_1))$ i $G_2(V(G_2), E(G_2))$ definiramo njihovu **uniju** $G_1 \cup G_2$ kao graf $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2)))$

5. (DEF) Graf je **povezan** ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom kažemo da je graf **nepovezan**. Svaki se nepovezani graf dakle može prikazati kao unija povezanih grafova. Svaki član te unije zovemo **komponenta povezanosti**.

6. (DEF) Stupanj vrha $v$ grafa $G$ je broj bridova koji su incidentni s $v$. $[\deg(v)]$
Ako je vrh $v$ petlja, onda ona broju $\deg(v)$ doprinosi s 2. Vrh stupnja 0 zovemo **izolirani vrh**, a vrh stupnja 1 **krajnji vrh**

7. **LEMA O RUKOVANJU**
U svakom grafu $G$ je zbroj stupnjeva svih vrhova paran

$$\sum_{v \in G} \deg(v) \equiv 0 \pmod 2$$

**DOKAZ**

$$\sum_{v \in G} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$$

8. (KOR) Broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran

9. (DEF) Za graf $G$ kažemo da je **regularan**, ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je $G$ $r$-regularan ako je $\deg(v)=r$, $\forall v \in V(G)$. Cijeli broj $r$ tada ćemo zvati **stupanj regularnosti** grafa $G$.

10. (DEF) **Podgraf** grafa $G$ je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi $E(G)$

11. (DEF) Označimo li vrhove zadanog grafa $G$ s $V=\{1,2,\dots,n\}$, onda definiramo **matricu susjedstva** $A=[a_{ij}]$ kao $n\times n$ matricu čiji je element $a_{ij}$ jednak broju bridova koji spajaju vrh $i$ s vrhom $j$

12. (DEF) Označimo li dodatno i bridove zadanog grafa $G$ s $E=\{1,2,\dots,m\}$, onda definiramo **matricu incidencije** kao $n\times m$ matricu $B=[b_{ij}]$ čiji su elementi

$$b_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{ako je vrh } i \text{ incidentan s bridom } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

13. (DEF) Ako skup vrhova grafa $G$ možemo razdvojiti u dva disjunktna skupa $A$ i $B$ tako da svaki brid od $G$ spaja neki vrh skupa $A$ s nekim iz skupa $B$, onda kažemo da je $G$ **bipartitan graf**

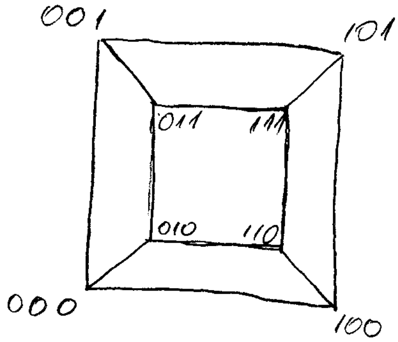
$\Rightarrow$ **potpuni bipartitni graf** je onaj bipartitni graf kod kojeg je svaki vrh iz skupa $A$ spojen sa svakim vrhom iz skupa $B$.

Ako je $|A|=r$ te $|B|=s$, graf označavamo s $K_{r,s}$

14. $k$-kocka $Q_k$ je graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1,a_2,\dots,a_k)$, $a_i\in\{0,1\}$, duljine $k$ te čiji **bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju točno na jednom mjestu**.

$|V(Q_k)|=2^k$ $\Rightarrow$ BROJ VRHOVA

$|E(Q_k)|=\frac{2^k\cdot k}{2}=k\cdot 2^{k-1}$ $\Rightarrow$ BROJ BRIDOVA




$Q_3$

**15.(DEF)** Ako je $G$ jednostavni graf sa skupom vrhova $V(G)$, onda je njegov **komplement** $\overline{G}$ jednostavni graf s istim skupom vrhova $V(G)$, dok su dva vrha u $\overline{G}$ susjedna onda i samo onda ako oni nisu susjedni u grafu $G$

**16. (DEF)** za jednostavni graf koji je izomorfan svome komplementu kažemo da je **samokomplementaran**. Ako je $G$ samokomplementaran, onda mu je broj vrhova $n \equiv 0,1 \pmod 4$)

**17.(DEF)** **Bridni graf** $L(G)$ jednostavnog grafa $G$ definira se kao graf čiji vrhovi su u bijektivnoj korespondenciji s bridovima grafa $G$, pričemu su dva vrha od $L(G)$ susjedna onda i samo onda ako su odgovarajući bridovi u $G$ susjedni (tj. incidentni s jednim zajedničkim vrhom)

**18.(DEF)** Neka je dan graf $G$. **Šetnja** u $G$ je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$ u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka

početni vrh šetnje

završni vrh šetnje

**DULJINA ŠETNJE** = broj bridova u šetnji

**19.(DEF)** Šetnju u kojoj su svi bridovi različiti zovemo **staza**. Ako su, uz to, i svi vrhovi $v_0, v_1, \dots, v_m$ različiti (osim eventualno početni vrh $v_0$ i krajnji $v_m$), onda takvu stazu zovemo **put**. Za stazu ili put kažemo da su **zatvoreni** ako je $v_0 = v_m$. Zatvoreni put koji sadrži barem 1 brid zovemo **ciklus**.

**20.(TM)** $G$ je **bipartitan** graf **onda i samo onda** ako je svaki ciklus u grafu $G$ parne duljine.

=> graf je bipartitan i ako nema ciklusa

**21.(TM)** Neka je $G$ jednostavni graf s **$n$ vrhova**. Ako $G$ ima **$k$ komponenata** povezanosti, onda za broj **bridova $m$** od $G$ vrijedi

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

**22. (KOR)** Svaki jednostavni graf s $n$ vrhova. i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova **je povezan**

**23.(DEF)** **Rastavljajući skup** povezanog grafa $G$ je skup bridova čijim uklanjanjem $G$ postaje **nepovezan**.

24. (DEF) Za rastavljajući skup kažemo da je **rezni skup**, ako nijedan njegov podskup nije rastavljajući

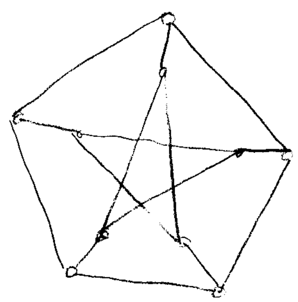
25. (DEF) Rezni skup koji se sastoji od jednog jedinog brida zovemo **most**

26. (DEF) Za povezani graf G definiramo **bridnu povezanost** $\lambda(G)$ kao veličinu najmanjeg reznog skupa. Često kažemo da je G k-bridno povezan, ako je $\lambda(G) \geq k$

27. (DEF) **Separirajući skup** povezanog grafa G je skup vrhova od G čijim uklanjanjem G postaje nepovezan

28. (DEF) **Vršna povezanost** $\varkappa(G)$ je broj elemenata najmanjeg separirajućeg skupa u G.

29. PETERSENOV GRAF



30. (DEF) **Struk** grafa G definiramo kao duljinu njegovog najkraćeg ciklusa

31. (DEF) **Šuma** je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **stablo**

32. (TM) Neka je T graf s n vrhova, slijedeće izreke su **ekvivalentne**:
1) T je stablo
2) T ne sadrži ciklus i ima n-1 bridova
3) T je povezan i ima n-1 bridova
4) T je povezan i svaki mu je brid most
5) Svaka dva vrha od T povezana su točno jednim putom
6) T ne sadrži ciklus, no dodavanjem jednog brida (uz isti broj vrhova) dobit ćemo točno jedan ciklus

33. (KOR) Ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti, onda G ima n-k bridova.

34. (DEF) Za povezani graf kažemo da je **eulerovski**, ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G. Takvu stazu zovemo eulerovska staza. Neeulerovski graf je **skoro eulerovski**, ako postoji staza koja sadrži svaki brid od G

35. (LEMA) Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje dva, onda G sadrži ciklus.

36. (TM) Euler 1736.

Povezani graf G je **eulerovski** onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran

37. (KOR) Povezani graf je **eulerovski** onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti na disjunktnu uniju ciklusa

38. (KOR) Povezani graf je **skoro eulerovski** onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja

39. (TM) FLEURYEV ALGORITAM

Neka je G eulerovski graf. Tada je slijedeća konstrukcija uvijek moguća i dovodi do eulerovske staze od G. Započni u bilo kojem vrhu i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na slijedeća pravila

1) Pobriši bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, pobriši i njega
2) Prijeđi mostom trenutnog grafa samo ako nemaš druge mogućnosti

40. (DEF) Ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa zovemo **hamiltonovski ciklus**. Graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus zovemo **hamiltonovski graf**

41. (TM) ORE

Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$ te ako vrijedi

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

42. (TM) DIRAC

Ako je G jednostavan graf s n ($n \geq 3$) vrhova te ako je $\deg(v) \geq n/2$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski.