Završni ispit iz Matematike 3R
01.02.2012.

1. **(5 bodova)**
   Zadana je standardna 8×8 šahovska ploča čiji su retci obilježeni slovima a-h, a stupci brojevima 1-8. Figura na ploči može se pomicati za jedan korak u svih osam smjerova (horizontalno, vertikalno i dijagonalno).
   (a) Koliko ima najkraćih putova figure od polja $a3$ do polja $g7$?
   (b) Koliko ima najkraćih putova figure od polja $a3$ do polja $g7$ koji ne prolaze poljem $c4$?
   (c) Koliko ima najkraćih putova od $a3$ do $g7$ ako zabranimo dijagonalne korake?

2. **(5 bodova)**
   Na "Okrugli stol o uvjetima studiranja" došlo je 6 studenata i 6 profesora. Student X ne želi sjediti kraj profesora A, B i C jer kod njih nije dobio prolaznu ocjenu. Na koliko se načina svi sudionici mogu rasporediti oko okruglog stola tako da student X ne sjedi niti kraj jednog od te trojice profesora?

3. **(5 bodova)**
   Odredite niz $\{a_n\}, n \geq 0$, kojem je funkcija izvodnica $f(x) = \sqrt{1-x^3}$. Pomoću dobivenog rezultata izračunajte $f^{(n)}(0),\ n \geq 0$.

4. **(5 bodova)**
   Riješite rekurziju
   $$a_n - 4a_{n-2} = 2^n + 4^n,$$
   uz početne uvjete $a_0 = \frac{1}{3},\ a_1 = \frac{4}{3}$.

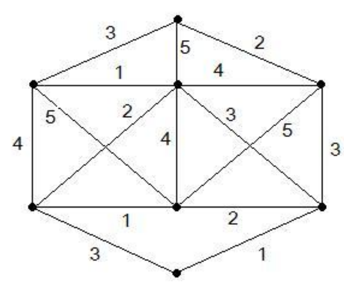
5. **(5 bodova)**
   Zadana je 7-dimenzionalna kocka Q_7 i jedno njeno razapinjuće stablo. Dokažite da u tom razapinjućem stablu barem 19 vrhova ima isti stupanj.

OKRENITE →

6. **(5 bodova)**
Bridni graf $L(G)$ jednostavnog grafa G definira se kao graf čiji vrhovi su bridovi grafa G, pri čemu su dva vrha iz $L(G)$ susjedna onda i samo onda kada su odgovarajući bridovi u G susjedni.
Neka je $L(W_n)$ bridni graf kotača W_n, gdje je n paran broj.
(a) Odredite matricu susjedstva grafa $L(W_6)$.
(b) Za proizvoljni parni broj n, odredite ukupni broj vrhova grafa $L(W_n)$ te stupnjeve vrhova.
(c) Da li je graf $L(W_n)$ eulerovski? Dokažite.

7. **(5 bodova)**
(a) Dokažite da svaki bipartitni hamiltonovski graf ima paran broj vrhova.
(b) Odredite sve prirodne brojeve r i s za koje su potpuni bipartitni grafovi $K_{r,s}$ hamiltonovski.

8. **(5 bodova)**
Riješite kineski problem poštara za težinski graf sa slike. Ispišite poštarovu šetnju.



Rješenja Završnog ispita, 01.02.2012.

1. **(a)** Od $a3$ do $g7$ treba 4 pomaka desno i 6 dolje, najkraći putevi imaju 4 dijagonalna pomaka $\searrow$ i 2 pomaka dolje $\downarrow$ ili 5 dijagonalnih $\searrow$ i 1 dijagonalni $\swarrow$. Ima ih $\binom{6}{4} + \binom{6}{1} = 15 + 6 = 21$.
   (b) Od svih najkraćih putova oduzimamo one koji prolaze kroz c_4,
   $21 - \binom{2}{1}\binom{4}{3} = 13$.
   Napomena: Najkraći putevi se gledaju kao oni sa najmanjim brojem pomaka. Najkraćih puteva gledano geometrijski ima $\binom{6}{4} = 15$ u (a), tj. $15 - \binom{2}{1}\binom{4}{3} = 7$ u (b), pa je i to dobro rješenje.
   (c) Treba 6 pomaka dolje i 4 desno, $\binom{10}{4} = 210$.

2. FUI; označimo skupove:
   A, B, C=svi rasporedi kada student X sjedi kraj profesora A, B odn. C,
   U=svi rasporedi oko okruglog stola;

   $|A^c \cap B^c \cap C^c| = |U| - |A| - |B| - |C| + ... = 11! - 3 \cdot 2 \cdot 10! + 3 \cdot 2 \cdot 9! - 0 = 56 \cdot 9!$

3. $f(x) = (1 - x^3)^{1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} (-1)^k x^{3k}$, pa je

   $$a_{3k} = (-1)^k \binom{1/2}{k},\ a_{3k+1} = a_{3k+2} = 0,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

   Zbog $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$ slijedi

   $$f^{(3k)}(0) = (3k)! \cdot (-1)^k \binom{1/2}{k},\ f^{(3k+1)}(0) = f^{(3k+2)}(0) = 0,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

4. Karakteristična jednadžba $x^2 - 4 = 0$ ima korijene $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, pa je opće rješenje homogene rekurzije

   $$a_n^H = A(-2)^n + B2^n,\ A,\ B \in \mathbb{R}.$$

   Partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n^P = Cn2^n + D4^n$. Uvrštavanjem u rekurziju: $C = 1/2,\ D = 4/3$.
   Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo

   $$a_n = \frac{3}{4}(-2)^n - \frac{7}{4}2^n + n2^{n-1} + \frac{4}{3}4^n,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

5. Razapinjuće stablo ima $2^7 = 128$ vrhova, kao i Q_7. Svi mogući stupnjevi vrhova su $1, 2, 3, \ldots, 7$ (vrh ne može biti stupnja 0 zbog povezanosti stabla). Dirichletov princip: 128 predmeta razmještamo u 7 kutija, postoji kutija sa bar $\lfloor \frac{127}{7} \rfloor + 1 = 19$ predmeta, tj. bar 19 vrhova istog stupnja!

6. **(a)** simetrična matrica 10×10 sa elementima 0 i 1, u 6 redaka/stupaca točno 4 jedinice, u 4 retka/stupca točno 6 jedinica, sama matrica ovisi o označavanju vrhova

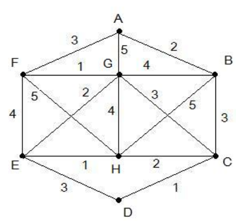
(b) $L(W_n)$ ima vrhova koliko W_n ima bridova, tj. $2(n-1)$. Vrhovi koji reprezentiraju vanjske bridove kotača, njih $n-1$, su stupnja 4 (svaki ima 4 susjedna brida), a preostalih $n-1$ je stupnja $(n-2)+2=n$.
(c) Po dijelu (b) i budući da je n paran, svi vrhovi su parnog stupnja i graf je povezan, pa je eulerovski.

7. **(a)** knjižica
(b) Zbog bipartitnosti da bi se zatvorio ciklus kroz sve vrhove mora biti $r=s$ i $r,s\geq 2$. Zbog potpunosti svaki takav je hamiltonovski.

8. Označimo vrhove kao na slici. Graf je skoro eulerovski jer ima točno 2 vrha neparnog stupnja, A i H.

- Fleuryjevim algoritmom nađemo jednu skoro eulerovsku stazu od A do H, npr. $A-F-G-A-B-G-C-B-H-C-D-E-H-F-E-G-H$, duljina je 48.

- Dijkstrinim algoritmom nađemo najkraći put od H natrag u A:
$S=\{H\}, \underline{l(E)=1},\ l(C)=2,\ l(G)=4,\ l(F)=5,\ l(B)=5 \Rightarrow min=1$;
$S=\{H,E\}, \underline{l(C)=2},\ l(G)=\min\{1+4,1+2\}=3,\ l(F)=\min\{1+4,1+5\}=5,\ l(B)=5,\ l(D)=4 \Rightarrow min=2$;
$S=\{H,E,C\},\ l(B)=\min 2+3,5=5,\ \underline{l(D)=\min\{4,3\}=3},\ l(G)=\min\{5,3,5\}=3,\ l(F)=\min\{5,5\}=5 \Rightarrow min=3$;
$S=\{H,E,C,D\},\ min=3,\ \underline{l(G)=3}$;
$S=\{H,E,C,D,G\},\ \underline{l(F)=\min 5,4=4},\ l(B)=\min\{5,5,7\}=5,\ l(A)=8 \Rightarrow min=4$;
$S=\{H,E,C,D,G,F\},\ \underline{l(B)=5},\ l(A)=\min\{8,7\}=7 \Rightarrow min=5$;
$S=\{H,E,C,D,G,F,B,A\}, l(A)=\min\{7,7\}=7$.



Ukupno: 55.