

## Ispit iz Matematike 3R

17.09.2014.

1. (5 bodova)

(a) Razvijte u Fourierov red periodičnu funkciju  $f$ , perioda  $2\pi$ , definiranu na intervalu  $[0, 2\pi)$  sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \leq x < \frac{3\pi}{2}, \\ 2, & \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(b) Odredite vrijednost Fourierovog reda u točki  $x = \frac{7\pi}{2}$ .

2. (5 bodova)

(a) Precizno iskažite Teorem o Fourierovom integralu i dokažite Fourierovu integralnu formulu.

(b) Skicirajte Fourierov integral gate-funkcije  $g_{[-\pi, \pi]}$ .

3. (5 bodova)

(a) Iskažite i dokažite teorem o pomaku originala kod Laplaceove transformacije.

(b) Odredite sliku funkcije

$$u(t-2) \cdot \int_0^{t-2} \frac{\sinh u}{u} du.$$

4. (5 bodova) Primjenom Laplaceove transformacije, riješite integralno-diferencijalnu jednadžbu:

$$y''(t) + y'(t) + y(t) = \int_0^t (u-t) \cdot y'(u) du,$$

uz početne uvjete  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .

5. (5 bodova) Na skupu svih kvadratnih matrica  $\mathbb{M}$ , sa elementima iz skupa  $\{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ , zadana je relacija ekvivalencije  $\rho$  na sljedeći način:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rho \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ ako vrijedi } a_{11} + a_{22} = b_{11} + b_{22}.$$

(a) Odredite kardinalni broj kvocijentnog skupa  $\mathbb{M}/\rho$ .

(b) Odredite kardinalni broj klase čiji je reprezentant matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Na  $\mathbb{M}$  je definirana relacija  $\lambda$  sa: dvije matrice su u relaciji  $\lambda$  ako na barem tri mjesta imaju iste elemente. Da li je relacija  $\lambda$  na  $\mathbb{M}$  relacija ekvivalencije? Detaljno obrazložite koja svojstva jesu/nisu zadovoljena.

6. (5 bodova) U nekom privatnom studentskom domu ima ukupno 5 soba, a u svakoj sobi živi po 5 studenata. Svaku večer svi studenti kao grupa naručuju 10 pizza iz pizzerije koja radi 4 vrste pizza: sa sirom, sa plodovima mora, miješanu i voćnu.

(a) Na koliko različitih načina je moguće sastaviti narudžbu?

(b) Na koliko različitih načina je moguće sastaviti narudžbu, ako znamo da naručuju barem jednu pizzu sa sirom?

(c) Dokažite da se tijekom jedne godine sigurno mora ponoviti ista narudžba.

(d) Iz svake sobe nasumce biramo 2 ili 3 studenta koji će otići po naručene pizze. Na koliko načina je moguće izabrati skup dostavljača?

(a) Odredite koliko ima brojeva između 1500 uključivo i 2500 uključivo koji su djeljivi sa barem jednim od brojeva 2, 5, 7, ali ne istovremeno sa sva tri.

(b) Koliko ima brojeva koji su djeljivi sa 2, a nisu djeljivi niti sa 5 niti sa 7?

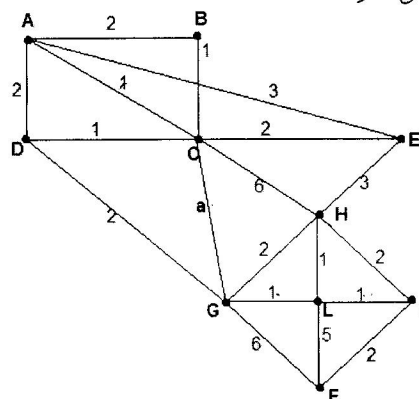
(a) Odredite zatvorenu formu funkcije izvodnice Fibonaccijevog niza definiranog rekurzivnom relacijom:

(b) Služeći se dobivenom funkcijom izvodnicom, izvedite eksplicitnu formulu za  $F_n$ .

(a) Precizno iskažite Oreov teorem i Eulerov teorem.

- Jednostavan povezan graf koji je i eulеровski i hamiltonовski,
- Jednostavni povezani graf koji je eulеровski, ali nije hamiltonовski,
- Jednostavni povezan graf koji je hamiltonовski, ali nije eulеровski.

10. (5 bodova) Duljine puta (u kilometrima) između pojedinih mjesta dane su težinskim grafom sa slike. U ovisnosti o parametru  $a \in \mathbb{N}$ , ~~određite~~ odredite najkraći put (i njegovu duljinu) od mjesta  $A$  do mjesta  $F$ . Algoritam obavezno provedite.



*Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Sretno!*