Ponovljeni drugi međuispit iz Matematike 3R
04.02.2010.

1. (4 boda)
a) (**1b**) Definirajte prebrojiv skup.
b) (**3b**) Dokažite da je skup $A = \{(2n, 3m) \quad | \quad n, m \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv.

2. (3 boda)
Na skupu $S = \{(x, y, z) \quad | \quad 0 \leq \ x, y, z \ \leq 90\}$ definirana je relacije

$$(x_1, y_1, z_1)\,\rho\,(x_2, y_2, z_2) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) = 0,$$

odnosno, ako im je barem jedna koordinata jednaka (podudaraju se u barem jednoj koordinati). Je li ρ relacija ekvivalencije? Obrazložite odgovor.

3. (3 boda)
Na koliko načina iz špila od 52 karte možemo odabrati 4 karte, a da među njima bude barem jedna crvena karta (herc ili karo)?

4. (5 bodova)
Na koliko se načina $2n$ različitih predmeta može rasporediti u n različitih kutija tako da
a) (**2b**) u svakoj kutiji budu barem dva predmeta,
b) (**1b**) prva i zadnja kutija budu prazne,
c) (**2b**) prva i zadnja kutija budu prazne, a u ostalim kutijama bude barem jedan predmet.

5. (4 boda)
U studentskom zboru ima 15 predstavnika prve godine, 20 predstavnika druge godine i 10 predstavnika treće godine. Na koliko se načina može odabrati šesteročlana delegacija iz tog studentskog zbora u kojoj mora biti barem jedan predstavnik svake godine?

6. (3 boda)
Neka je $a_n = n^2$. Izračunajte funkciju izvodnicu za niz $(a_n)_n$.

7. (3 boda)
Dokažite da u skupu od 10 prirodnih brojeva postoji dva čiji su zbroj ili razlika djeljivi sa 17.

Zabranjena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

Rješenja ponovljenog drugog međuispita iz Matematike 3R
04.02.2010.

1. (4 boda)
a) Knjiga
b) Konstruirati neku bijekciju, npr. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$, $f(n, m) = (2n, 3m)$.

2. (3 boda)
Nije tranzitivna pa nije relacija ekvivalencije. Dokazati to nekim konkretnim primjerom.

3. (3 boda)
$\binom{52}{4} - \binom{26}{4}$

4. (5 bodova)
a) $\binom{2n}{2}\binom{2n-2}{2} \cdots \binom{4}{2}\binom{2}{2}$
b) $(n-2)^{2n}$
c) $Sur(2n, n-2)$

5. (4 boda)
Koristimo FUI. Neka su $A_i = \{$ nema predstvanika i-te godine $\}$
$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = \binom{45}{6} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

6. (3 boda)
$f(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$

7. (3 boda)
Pretpostavimo suprotno: postoji 10 prirodnih brojeva za koje to ne vrijedi. Pogledamo njihove ostatke pri dijeljenju sa 17. Svi su međusobno različiti, inače bi postojala dva čija je razlika djeljiva sa 17. Skup ostataka ne smije sadržavati parove: 1-16,2-15, 3-14, 4-13, 5-12, 6-11, 7-10, 8-9, inače bi u osnovnom skupu bila dva elementa čiji je zbroj djeljiv sa 17. No tada skup ostataka može imati najviše 9 elemenata, pa i osnovni skup može imati maksimalno 9 elemenata. Kontradikcija.