Ispit iz Matematike 3R

19.09.2012.

1. **(5 bodova)** Funkciju $f(x) = |x-1|$, $x \in [-1,1]$, razvijte u Fourierov red. Skicirajte red. Izračunajte sumu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. **(5 bodova)** Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2}, & |x| \not\leq 2, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

razvijte u Fourierov integral. Odredite vrijednost integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(2u)\sin u}{\pi^2 - 4u^2}\, du.$$

3. **(5 bodova)** Koristeći Laplaceovu transformaciju, bez integriranja, izračunajte sljedeći integral

$$\int_0^{\pi} \sin^2(u) \cdot \mathrm{sh}(3u) du.$$

4. **(5 bodova)**
(**a**) Definirajte periodičnu funkciju.
(**b**) Iskažite i dokažite Teorem o Laplaceovoj transformaciji periodične funkcije.

5. **(5 bodova)**
(**a**) Definirajte ekvipotentne skupove.
(**b**) Dokažite da su skupovi $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ ekvipotentni.

6. **(5 bodova)** Na skupu X zadana je relacija ρ. Ako ρ nije relacija ekvivalencije, obrazložite zašto. Ako jest, odredite broj klasa ekvivalencije $|X/_{\rho}|$ i obrazložite odgovor.

   (a) $X = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $n \ \rho \ m$ ako je n^2 i m^2 daju isti ostatak pri dijeljenju sa 7.

   (b) $X = \{(n,m) : n, m \in \{1,2,3,4,5\}\}$, $(n,m) \ \rho \ (k,l)$ ako je $n+m = k+l$.

   (c) $X = \{1,2,3,4\}$,
   $\rho = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3),(4,1),(1,4)\}$.

7. **(5 bodova)** Deset bračnih parova dolazi na večeru i smještaju se u dvije prostorije oko okruglih stolova sa po 10 mjesta. Koliko različitih rasporeda je moguće napraviti ako:
(**a**) muškarci i žene moraju sjediti za različitim stolovima,
(**b**) svaki bračni par mora sjediti za istim stolom,
(**c**) niti jedna žena ne smije sjediti za istim stolom sa svojim mužem.

8. **(5 bodova)** Riješite rekurzivnu relaciju:

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 3^n$$

uz početne uvjete $a_0 = 0, \ a_1 = 1$

9. (**5 bodova**)
(**a**) Precizno iskažite i dokažite Lemu o rukovanju.
(**b**) Dokažite da je su u k-regularnom bipartitnom grafu particije skupa vrhova jednakobrojne.

10. (**5 bodova**)
U ovisnosti o parametru $m \in \mathbb{N}$, obostranim pohlepnim algoritmom riješite problem trgovačkog putnika za težinski graf sa slike (za svaki parametar m ispišite sve moguće optimalne puteve):