riješeni zadaci

lord of light

2013

$\bigtriangledown$

Zadatak 1

$$\log_e a_{n+2} - \log_e a_{n+1} = log_e a_n^6$$
$$a_0 = a_1 = e$$

$\log_e a_{n+2} - \log_e a_{n+1} = 6 log_e a_n$

$b_n = log_e a_n$
$b_{n+2} - b_{n+1} = 6b_n$
$b_{n+2} - b_{n+1} - 6b_n = 0$

uvodimo $b_n = x^n$
iz čega slijedi
$x^2 - x - 6 = 0$
$x_1 = -2$
$x_2 = 3$

odakle imamo
$b_n^h = \lambda_1 * (-2)^n + \lambda_2 * 3^n$
$a_0 = e \Rightarrow \mathrm{b}_0 = 1$
$a_1 = e \Rightarrow \mathrm{b}_1 = 1$

odavde imamo sustav:
$1 = \lambda_1 + \lambda_2$
$1 = -2\lambda_1 + 3\lambda_2$
$\lambda 1 = \frac{2}{5}$
$\lambda 2 = \frac{3}{5}$

pa je $b_n = \frac{2}{5} * (-2)^n + \frac{3}{5} * 3^n$

a odavde je
$a_n = e^{(\frac{2}{5} * (-2)^n + \frac{3}{5} * 3^n)}$

što možemo zapisati i kao

$a_n = e^{(-\frac{1}{5} * (-2)^{n+1} + \frac{1}{5} * 3^{n+1})}$

Zadatak 2

$$a_{n+2}^2 = a_{n+1}^2 + 2a_n^2$$
$$a_0 = a_1 = 1$$

prvo uzimamo:
$b_n = a_n^2$
$b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n$
sada rješavamo karakterističnu jednadžbu:
$x^2 = x + 2$
$x^2 - x - 2 = 0$
$x_1 = 2$
$x_2 = -1$

pa je
$b_n = \lambda_1 * 2^n + \lambda_2 * (-1)^n$
iz početnih uvjeta određujemo b_0 i b_1 koji nam trebaju za određivanje lambdi
$b_0 = b_1 = 1$
što uvrštavamo u izraz za b_n kako bi odredili lambde
$1 = \lambda_1 + \lambda_2$
$1 = 2\lambda_1 - \lambda_2$
odavde je
$\lambda_1 = \frac{2}{3}$
$\lambda_2 = \frac{1}{3}$

pa je
$b_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$

što možemo malo urediti izlučivanjem 1/3
$b_n = \frac{1}{3} * (2^{n+1} + (-1)^n)$

i sada se vraćamo na početni niz a_n

$a_n = \sqrt{\frac{1}{3} * (2^{n+1} + (-1)^n)}$

Zadatak 3

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3} + 1$$
$$a_0 = a_1 = 0$$
$$a_2 = 1$$

prvo rješavamo homogenu
$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$
tražimo nultočke (množim sa x^3 da izgleda bolje)
$x^3 = 3x^2 - 3x + 1$
što je
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$
a to je poznati oblik
$(x-1)^3 = 0$
pa imamo
$x_1 = x_2 = x_3 = 1$
odnosno, naša nultočka je 1, i kratnosti je 3

odavde znamo da je homogena jednadžba oblika
$a_n = \lambda_1 n^2 + \lambda_2 n + \lambda_3$
zbog ove kratnosti nultočke moramo polinom od $f(n)$ (onog nehomogenog dijela zadane rekurzije, u ovom slučaju to je f(n) = 1) koji je partikularno rješenje, pomnožiti sa n^3
pa je
$a_n^p = C * n^3$

sada uvrštavamo to partikularno rješenje u početni izraz i dobivamo
$Cn^3 = 3C(n-1)^3 - 3C(n-2)^3 + C(n-3)^3 + 1$ pa odavde imamo:
$Cn^3 =$
$3C(n^3 - 3n^2 + 3n - 1)$
$-3C(n^3 - 6n^2 + 12n - 8)$
$+C(n^3 - 9n^2 + 27n - 27) + 1$
sve uz n^3 i n^2 se krati pa preostaje samo
$-6C + 1 = 0$
$-6C = -1$
$C = 1/6$

pa je partikularno rješenje
$a_n = \frac{1}{6}n^3$

sada možemo tražiti potpuno rješenje:
(tek nakon što imamo partikularno to smijemo!)

$a_n = \lambda_1 n^2 + \lambda_2 n + \lambda_3 + \frac{1}{6}n^3$
uvrštavamo početne uvjete
nakon $a_0 = 0$ dobivamo $\lambda_3 = 0$
pomoću $a_1 = 0$ dobivamo
$\lambda_1 + \lambda_2 + 1/6 = 0$
(koristimo to kao $\lambda_1 = -\lambda_2 - 1/6$)
pomoću $a_2 = 1$ dobivamo
$4\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4/3 = 1$
te uvrštavanjem izraza za λ_1
dobivamo $\lambda_2 = -1/6$,
a uvrštavanjem tog podatka u izraz za λ_1
dobivamo $\lambda_1 = 0$

pa je krajnje rješenje:

$a_n = \frac{n^3}{6} - \frac{n}{6}$

$a_n = \frac{n^3 - n}{6}$

Zadatak 4

$$2\mathrm{a}_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + 2a_{n-3} + 1$$

prvo rješavamo homogenu:
(uvrštavamo $a_n = x^n$, množimo sa x^3 da bolje izgleda)
te imamo
$2x^3 = -x^2 + x + 2$
odnosno
$2x^3 + x^2 - x - 2 = 0$
korijen polinoma trećeg stupnja je najlakše pronaći tako da pogađamo sa faktorima zadnjeg člana, u ovom slučaju to bi bili 1, -2, 2, -1, 1
to ubacivanje možemo napraviti u glavi i lako vidjeti da je jedno od rješenja:
$x_0 = 1$
pa dijelimo taj izraz sa $(x - 1)$
i dobiva se
$(2x^3 + x^2 - x - 2) : (x - 1) = 2x^2 + 3x + 2$
pa nam preostaje pronaći nultočke od
$2x^2 + 3x + 2 = 0$

$Napomena^1$

Potraga za nultočkama polinoma 3. stupnja
1)
znamo da polinomi izgledaju kao
$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + ...$
te da vrijedi
$f(x) = a(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)....$
gdje su $x_0, x_1, x_2....$ nultočke polinoma f(x),
odavde vidimo da množenjem tih zagrada uvijek postoji član koji u sebi neće sadržavati x
već će biti oblika $a * (-1)^t * x_0 * x_1 * ....$
zbog čega traženjem faktora možemo pogoditi nultočke.

2)
kada imamo oblik:
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$
prvo uvodimo $x = y - a/3$ što će uzrokovati gubitak člana x^2,
nakon čega je oblik sveden na
$y^3 + py + q = 0$

ako uzmemo
$d = (\frac{p}{3})^3 + (\frac{q}{2})^2$
nakon raspisivanja imamo rješenje u obliku

$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{d}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{d}}$

vratimo se na kvadratnu jednadžbu
$2x^2 + 3x + 2 = 0$
rješenja su
$x_1 = (-3 + i\sqrt{7})/4$
$x_2 = (-3 - i\sqrt{7})/4$

pa imamo homogeno rješenje oblika
$a_n^h = \lambda_0 + \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n$
funkcija smetnje je $f(n) = 1$, i imamo jednu nultočku jedan, kratnosti 1, pa partikularno rješenje tražimo u obliku $a_n = A * n$ gdje je A neka konstanta

$2An = -A(n-1) + A(n-2) + 2A(n-3) + 1$
nakon malo raspisivanja imamo
$-7A + 1 = 0$ iz čega slijedi
$A = 1/7$
te je partikularno rješenje $a_n^p = n/7$
i sada je potpuno rješenje
$a_n = a_n^h + a_n^p$

samo upišemo podatke koje znamo i zadatak je gotov,
često nas traže da se riješimo imaginarnih jedinica,
što riješimo ovako:
$a + bi = (-3 - i\sqrt{7})/4$
$\tan(\phi) = \frac{b}{a}$
pa slijedi
$\phi = \arctan(\frac{\sqrt{7}}{3})$
te uvrštavanjem toga dobivamo

$a_n = \lambda_0 + \lambda_1 * \sin(n * \arctan(\frac{\sqrt{7}}{3})) + \lambda_2 * \cos(n * \arctan(\frac{\sqrt{7}}{3})) + \frac{n}{7}$

gdje su λ_0, λ_1 i λ_2 neke konstante

Zadatak 5

Pronaći linearnu rekurziju kojoj je rješenje:
$a_n = \alpha * \cos(2n * \frac{\pi}{3}) + \beta * \sin(2n * \frac{\pi}{3}) + \gamma$

kako bi pronašli tu rekurziju prvi korak je odrediti koji su joj korijeni karakteristične jednadžbe
lako vidimo da je rješenje bilo kompleksno, i to
$\cos \frac{2pi}{3} + \imath * \sin \frac{2pi}{3}$
pa su kompleksno konjugirana rješenja
$-\frac{1}{2} \pm \imath * \frac{\sqrt{3}}{2}$

γ vidimo kao $\gamma * (1)^n$
pa je jedna od nultočaka i $x = 1$

i sada računamo umnožak:
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$
odnosno
$(x - (-\frac{1}{2} + \imath * \frac{\sqrt{3}}{2}))(x - (-\frac{1}{2} - \imath * \frac{\sqrt{3}}{2}))(x - 1) = 0$

$(x^2 + x + 1)(x - 1) = 0$
$x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = 0$
$x^3 - 1 = 0$
i imamo (nakon množenja sa x^n)

$a_{n+3} - a_n = 0$

Zadatak 6

Pronaći linearnu rekurziju kojoj je rješenje:
$$a_n = (\alpha + \beta * n)2^n + \gamma * \sin(2n * \frac{pi}{4}) + \delta * \cos(2n * \frac{pi}{4})$$

ovaj rješavamo isto kao i prošli
znamo da je
$\cos\frac{pi}{2} + \imath * \sin\frac{pi}{2} = i$

također vidimo rješenje kratnosti 2, pa je polinom

$(x-2)(x-2)(x-i)(x+i) =$
$= (x^2 - 4x + 4)(x^2 + 1) =$
$= x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x^2 - 4x + 4 =$
$= x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 + 4x + 4 = 0$

iz čega lako vidimo da je naša rekurzija
$a_{n+4} - 4a_{n+3} + 5a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$

Zadatak 7

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3 - 2^n$$
$$a_0 = a_1 = 1$$

prvo rješavamo homogenu
$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$
ubacivanjem $a_n = x^n$ i uređivanjem sa x^2
$x^2 = 3x - 2$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
homogeno rješenje je:
$a_n^h = \lambda_1 + \lambda_2 * 2^n$

partikularno rješenje se traži u obliku
$a_n^p = A + B * 2^n$ no moramo paziti zbog jednog od korijena, koji je bio 1,
pa partikularno rješenje mora biti n puta veće

$a_n^p = n(A + B * 2^n)$
sada taj oblik ubacujemo u onu prvu rekurziju
članovi uz $nB * 2^n$ se odmah pokrate, isto vrijedi za one uz nA
pa se sve svede na
$A + 3 - (2^n + B * 2^{n-1}) = 0$
i odavde imamo
$A = -3$
$B = -2$

pa je $a_n^p = -3n - n * 2^{n+1}$
i sada je krajnje rješenje $a_n = a_n^h + a_n^p$
$a_n = \lambda_1 + \lambda_2 * 2^n - 3n - n * 2^{n+1}$
u ovom koraku možemo iskoristiti početne uvjete
ubacivanjem $a_0 = 1$
$1 = \lambda_1 + \lambda_2$
ubacivanjem $a_1 = 1$
$1 = \lambda_1 + \lambda_2 * 2 - 3 - 4$
iz čega lako dobijemo
$\lambda_1 = -6$
$\lambda_2 = 7$

pa je rješenje
$a_n = -6 + 7 * 2^n - 3n - n * 2^{n+1}$

Zadatak 8

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} - n,\ n \geq 2$$
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 1$$

standardno, prvo rješavamo homogenu
$a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$
opet ubacujemo x^n i množimo sa x^2
$x^2 = x - 1$
$x^2 - x + 1 = 0$
rješenja su:
$x_{1,2} = (1 \pm \imath * \sqrt{3})/2$
kako bi zapisali realno moramo pronaći ϕ
$\phi = \arctan \frac{b}{a}$
$\phi = \arctan \sqrt{3}$
$\phi = \frac{\pi}{3}$
pa je homogeno rješenje
$a_n = \lambda_1 \cos n * \frac{\pi}{3} + \lambda_2 \sin n * \frac{pi}{3}$
sada tražimo partikularno rješenje,
vrijedi $f(n) = -n$
pa partikularno tražimo u obliku $a_n^p = An + B$, gdje su A i B neke konstante
ubacivanjem u početni izraz dobivamo
$An + B = An - A + B - An + 2A - B - n$
$An + B = A - n$
$A = -1$
$B = -1$
pa je potpuno rješenje oblika
$a_n = \lambda_1 \cos(n * \frac{pi}{3}) + \lambda_2 \sin(n * \frac{pi}{3}) - n - 1$
kada jednom imamo ovaj oblik - možemo iskoristiti početne uvjete
$a_0 = 0$
$0 = \lambda_1 - 1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$
$a_1 = 1$
$1 = \frac{1}{2} + \lambda_2 * \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - 1$
odakle se dobiva
$\lambda_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}$
pa je rješenje $a_n = \cos(n * \frac{pi}{3}) + \frac{5}{\sqrt{3}} \sin(n * \frac{pi}{3}) - n - 1$

$a_n = \cos(n * \frac{pi}{3}) + \frac{5\sqrt{3}}{3} \sin(n * \frac{pi}{3}) - n - 1$

Zadatak 9

$$a_{n+2}^2 - 5a_{n+1}^2 + 4a_n^2 = 0$$
$$a_0 = 4$$
$$a_1 = 13$$

koristimo $b_n = a_n^2$
pa imamo
$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 4b_n = 0$
dalje rješavamo
$x^2 - 5x + 4 = 0$
$x_1 = 4$
$x_2 = 1$
$b_n = A + B * 4^n$

početne vrijednosti za niz b_n su
$b_0 = 16$
$b_1 = 169$

$16 = A + B$
$169 = A + 4 * B$
$A = 16 - B$
$16 - B + 4B = 169$
$3B = 153$
$B = 51$

i sada dalje imamo
$A = 16 - 51 = -35$
$b_n = -35 + 51 * 4^n$

i traženi a_n je onda
$a_n = \sqrt{-35 + 51 * 4^n}$

Zadatak 10

Pronaći linearnu rekurziju kojoj je rješenje:
$a_n = A + B2^n + C2^n * \cos\frac{n\pi}{3} + D2^n \sin\frac{n\pi}{3}$

ponovno određujemo nultočke iz izraza
prvo uočimo A, koji je $A * 1^n$
zatim lako možemo odrediti značenje $B * 2^n$
i iz ta 2 znamo da su
$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
iz ovog ostalog izvlačimo
$\phi = \frac{\pi}{3}$
zbog ovih sin i cos znamo da se sigurno radi o nekom kompleksnom rješenju
no ovoga puta imamo i 2^n pa kada tražimo rješenje moramo gledati

$2(\cos\frac{\pi}{3} + \imath * sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \imath * \frac{(\sqrt{(3)})}{2}) = 1 + \imath * \sqrt{3}$

sada imamo dovoljno informacija za polinom:
$(x-1)(x-2)(x-1-\imath\sqrt{3})(x-1+\imath\sqrt{3}) = 0$
$(x^2-3x+2)(x^2-2x+1+3) = 0$
$(x^2-3x+2)(x^2-2x+4) = 0$
$x^4-2x^3+4x^2-3x^3+6x^2-12x+2x^2-4x+8 = 0$
$x^4-5x^3+12x^2-16x+8 = 0$

nakon množenja sa x^n i uređivanja imamo:
$a_{n+4} - 5a_{n+3} + 12a_{n+2} - 16a_{n+1} + 8a_n = 0$

Zadatak 11

Pronaći linearnu rekurziju kojoj je rješenje:
$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + n$, $n \geq 2$
$a_0 = 2$
$a_1 = 4$

prvo rješavamo samo
$a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$
jednadžba je
$x^2 = 2x - 2$
$x_1 = 1 + \imath$
$x_2 = 1 - \imath$
odavde je
$\phi = \frac{\pi}{4}$
$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$
pa je
$1 + i = \sqrt{2}(\cos\phi + isin\phi)$
nama treba taj izraz na n-tu potenciju
$\sqrt{2^n} = 2^{\frac{n}{2}}$ a $(\cos\phi + isin\phi)$ potencirano sa n je: $\cos(n * \phi) + isin(n * \phi)$
pa je
$a_n^h = \lambda_1 2^{n/2} * \cos(n * \frac{\pi}{4}) + \lambda_2 2^{n/2} * \sin(n * \frac{pi}{4})$
zbog $f(n) = n$ partikularno tražimo kao
$a_n^p = An + B$
$An + B = 2A(n-1) + 2B - 2A(n-2) - 2B + n$
$An + B = -2A + 4A + n$
$An + B = n + 2A$
$A = 1$
$B = 2$
$a_n^p = n + 2$
$a_n = \lambda_1 2^{n/2} * \cos(n * \frac{\pi}{4}) + \lambda_2 2^{n/2} * \sin(n * \frac{pi}{4}) + n + 2$
za $a_0 = 2$
$2 = \lambda_1 + 0 + 2 \Rightarrow \lambda_1 = 0$
za $a_1 = 4$
$4 = 0 + \lambda_2 2^{1/2} * \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 2$
$\lambda_2 = 1$
pa je krajnje rješenje

$a_n = 2^{n/2} * \sin(\frac{npi}{4}) + n + 2$

Zadatak 12

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = n + 5^n,\ n \geq 0$$
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 5$$

prvo rješavamo
$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = 0$
$x^2 - 6x + 5 = 0$
$x_1 = 5$
$x_2 = 1$
$a_n^h = A5^n + B$

partikularno rješenje možemo tražiti tako da gledamo kao da imamo dvije $f(n)$

$a_n^{p_1} = Cn^2 + Dn$, (zbog $x_2 = 1$)
$C(n+2)^2 + D(n+2) - 6C(n+1)^2 - 6D(n+1) + 5Cn^2 + 5Dn = n$
$n^2(C - 6C + 5C) + n(4C + D - 12C - 6D + 5D - 1) + (4C + 2D - 6C - 6D) = 0$
prva zagrada iznosi 0, iz druge imamo
$-8 * C = 1$
$C = -\frac{1}{8}$
iz treće imamo
$\frac{2}{8} - 4D = 0$

iz čega slijedi $D = \frac{1}{16}$

$a_n^{p_1} = -\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n$

za drugu $f(n)$ uzimamo $a_n^{p_2} = E * n5^n$
(zbog $x_1 = 5$)

$E * (n+2) * 5^{n+2} - 6E * (n+1) * 5^{n+1} + 5E * n * 5^n = 5^n$
$E(25n + 50 - 30n - 30 + 5n) = 1$
$E(20) = 1$
$E = \frac{1}{20}$

$a_n^{p_2} = \frac{1}{20} * n * 5^n$

$a_n^p = a_n^{p_1} + a_n^{p_2}$

$a_n^p = -\frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20} * n * 5^n$

a krajnje rješenje: $a_n = a_n^h + a_n^p$
$a_n = A5^n + B - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20} * n * 5^n$
iz $a_0 = 0$ imamo
$0 = A + B + 0$
a iz $a_1 = 5$
$5 = 5A + B - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}$
$5 = 4A + \frac{3}{16}$
$4A = \frac{77}{16}$
$A = \frac{77}{64}$
$B = -\frac{77}{64}$

rješenje:
$a_n = \frac{77}{64}5^n - \frac{77}{64} - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20} * n * 5^n$

Zadatak 13

Pronaći linearnu rekurziju kojoj je rješenje:
$a_n = A * 2^n + B * n * 2^n + C * (-1)^n + D$, $n \geq 0$

po redu čitamo nultočke:
uz A je $x_1 = 2$
uz B vidimo drugu $x_2 = 2$
uz C vidimo $x_3 = -1$
uz D vidimo $x_4 = 1$

tražimo polinom
$(x-2)(x-2)(x-1)(x+1) = 0$
$(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 1) = 0$
$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - x^2 + 4x - 4 = 0$
$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$

pa je naša rekurzija:
$a_{n+4} - 4a_{n+3} + 3a_{n+2} + 4a_{n+1} - 4a_n = 0$

Zadatak 14

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n,\ n \geq 0$$
$$F_0 = 0$$
$$F_1 = 1$$

prvo rješavamo $F_n = x^n$
$x^2 = x + 1$
$x^2 - x - 1 = 0$
$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$F_n = \lambda_1 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \lambda_2 * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

za $F_0 = 0$ imamo
$0 = \lambda_1 + \lambda_2$
a za $F_1 = 1$ imamo
$1 = \lambda_1 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + \lambda_2 * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$

uvrštavamo rezultat dobiven prvim uvjetom
$1 = \lambda_1 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) - \lambda_1 * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$
$1 = \lambda_1 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$
$1 = \lambda_1 * (\frac{2\sqrt{5}}{2})$
$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$
$\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

tako da je naše rješenje

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}} * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n)$

$Napomena^2$
često se koristi
$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

također vrijedi
$\phi^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$
$\phi^{-1} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}$
$\phi^{-1} = \frac{2-2\sqrt{5}}{-4}$
$\phi^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

zbog čega možemo pisati

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} * ((\phi)^n - (-\phi)^{-n})$