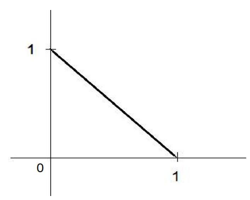
1. međuispit iz Matematike 3R
23.11.2011.

1. **(5 bodova)**
   (a)(2 boda) Iskažite Dirichletove uvjete za funkciju f na intervalu $[a, b]$.
   (b)(2 boda) Iskažite (bez dokaza) Teorem o konvergenciji Fourierovog reda periodične funkcije s periodom 2π.
   (c)(1 bod) Funkcija f zadana sa

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

   razvijena je u Fourierov red $S(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.
   Odredite $S(2011 \cdot \pi)$.

2. **(5 bodova)**
   (a)(3 boda) Parno proširenje funkcije zadane na $(0, 1]$ slikom



   razvijte u Fourierov red.
   (b)(1 bod) Iskažite Parsevalovu jednakost za periodičnu funkciju perioda T.
   (c)(1 bod) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

3. **(5 bodova)**
   Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

   (a)(3 boda) Prikažite funkciju $f(x)$ pomoću Fourierovog integrala.
   (b)(1 bod) Izračunajte amplitudni spektar funkcije $f(x)$.
   (c)(1 bod) Nacrtajte graf dobivenog integrala na čitavoj domeni.

4. **(5 bodova)**
   (a)(1 bod) Definirajte Laplaceov transformat funkcije f.
   (b)(2 boda) Koristeći definiciju, izračunajte $\mathcal{L}(e^{\alpha t})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Detaljno obrazložite za koje $s \in \mathbb{R}$ integral konvergira.
   (c)(2 boda) Koristeći (b) dio zadatka, izvedite Laplaceove transformate funkcija $\operatorname{sh}(\omega t)$ i $\operatorname{ch}(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

5. **(5 bodova)**
   (a)(1 bod) Definirajte konvoluciju originala.
   (b)(1 bod) Iskažite Teorem o konvoluciji originala.
   (c)(3 boda) Riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2,$$

   pri čemu je $f(t)$ proizvoljni original.

6. **(5 bodova)**
   Odredite original funkcije

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

7. **(5 bodova)**
   (a)(1 bod) Definirajte pojam ekvipotentnosti skupova.
   (b)(1 bod) Definirajte prebrojiv skup.
   (c)(3 boda) Dokažite da je skup $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3$ prebrojiv.

8. **(5 bodova)**
   Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadana je relacija

$$\rho = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,3), (4,1), (4,4), (4,5), (5,5)\}.$$

   Nadopunite ρ do najmanje moguće relacije ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije.

Rješenje 1. međuispita iz Matematike 3R

23.11.2011.g.

1. **(c)** $S(2011 \cdot \pi) = S(\pi) = \frac{0-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ (točka prekida!)
2. **(a)** parna $\Rightarrow$ $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \cos((2k+1)\pi x)$
   (c) $\frac{\pi^4}{96}$
3. **(a)** neparna $\Rightarrow A(\lambda) = 0$, $\widetilde{f}(x) = \int_0^\infty \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin\lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos\lambda}{\lambda}\right] \sin(\lambda x) d\lambda$
   (b) $am(\lambda) = |B(\lambda)| = \frac{2}{\pi} \left|\frac{\sin\lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos\lambda}{\lambda}\right|$
5. **(c)** $Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{s}{(s+1)^2+2^2}$
   $\Rightarrow$ $y(t) = \frac{1}{2} f(t) * (e^{-t}\sin(2t)) + e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$

6. $F(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{(s^2+s+1)(s+1)} = ...$(rastav na parcijalne razlomke...)$\Rightarrow$
   $f(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) - e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2))u(t-2) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2))u(t-2)$.

7. **(c)** 2. knjižica, Poglavlje 1.4., dokaz Teorema 1.

8. Prvo, $(2,2), (6,6) \in \rho$ zbog refleksivnosti. Sada klase ekvivalencije možemo iščitati iz zadanih elemenata:

$$[1] = \{1,4,5\},\ [2] = \{2,3\},\ [6] = \{6\}.$$

   U ρ treba dodati najmanje 6 elemenata: $(2,2), (6,6), (5,1), (1,5), (5,4), (3,2)$.