MATEMATIKA 3R, 3. CIKLUS

- **JEDNOSTAVNI GRAF** sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$ čije elemente zovemo **VRHOVI** grafa G i konačnog skupa $E(G)$ različitih dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo **BRIDOVI**

  $G=(V(G), E(G))$

- brid koji spaja vrh sa samim sobom zovemo **PETLJA**
- za brid $e=\{v,w\}$ ili krače vw kažemo da spaja vrhove v i w, a ti vrhovi su **INCIDENTNI** s bridom e
- za grafove kažemo da su **IZOMORFNI** ako postoji bijektivna korespodencija između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$ takva da je broj bridova koji spajaju neka 2 vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju 2 korespodentna vrha u $V(G_2)$, a takvu bijekciju zovemo **IZOMORFIZAM GRAFOVA**
- graf je **POVEZAN** ako se nemože prikazati kao unija neka 2 grafa, u suprotnom kažemo da je **NEPOVEZAN**
- svaki nepovezani graf se može prikazati kao unija povezanih grafova, a svaki član te unije zovemo **KOMPONENTA POVEZANOSTI**
- **STUPANJ VRHA V** grafa G je broj bridova koji su povezani s v

  $\deg(v)$
  - ako je vrh petlja, tada ima stupanj 2
  - vrh stupnja 0 zovemo **IZOLIRANI VRH**
  - vrh stupnja 1 zovemo **KRAJNJI VRH**
- u svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran (Lema o rukovanju)
- broj vrhova neparnog stupnja u svakom grafu je paran
- graf koji ima sve vrhove istog stupnja zovemo **REGULARAN GRAF**, a broj r zovemo **STUPANJ REGULARNOSTI** $\deg(v)=r$
- graf bez brida e označavamo sa $G-e$
- graf bez vrha v označavamo sa $G-v$
- graf sa sljepljenim vrhovima brida e označavamo sa G/e
- **LISTA BRIDOVA** $\{uv, uy, vw, vy, wx, wy, xy\}$ gdje su (x,y,u,v,w) vrhovi grafa G
- **LISTA SUSJEDSTVA** – $[u:\{v,w\};\ v:\{u,y,w\};\ w:\{v,y,x\};\ x:\{y,w\};\ y:\{u,v,w,x\}]$

- označimo li vrhove zadanog grafa G s $V=\{1,2,\dots,n\}$, onda definiramo **MATRICU SUSJEDSTVA** $A=[a_{ij}]$ kao $n \times n$ matricu gdje je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh i s vrhom j
- označimo li i bridove zadanog grafa G s $E=\{1,2,\dots,m\}$, onda definiramo **MATRICU INCIDENCIJE** kao $n \times m$ matricu $B=[b_{ij}]$ čiji su elementi $b_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{ako je vrh } i \text{ incidentan s bridom } j \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$

- **NUL GRAF** je graf čiji je skup bridova prazan skup
  - svi nulgrafovi s istim brojem vrhova su međusobno izomorfni
  - označavamo ga sa N_n, stupanj svakog vrha jednak je nuli
- **POTPUNI GRAF** je jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna
  - označavamo ga sa K_n, K_n je $(n-1)$-regularan
  - ima $\binom{n}{2}$ bridova, svaki od n vrhova ima $n-1$ susjeda
- **CIKLIČKI GRAF (CIKLUS)** je povezani 2-regularni graf
  - označavamo ga sa C_n, ima n vrhova i n bridova
- **LANAC** je graf kojeg dobijemo brisanjem jednog brida iz cikličkog grafa
  - označavamo ga sa P_n, ima n vrhova i $n-1$ bridova
- **KOTAČ** je graf kojeg dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom
  - označavamo ga sa W_n, ima n vrhova i $|E(W_n)|=2n-2$ bridova
- **BIPARTITNI GRAF** je takav graf kojemu vrhove možemo podijeliti u 2 disjunktna skupa A i B tako da svaki brid od G spaja neki vrh iz skupa A s nekim iz skupa B
  - pojednostavljeno, ako grafu možemo pobojati vrhove u 2 boje tako da je svaki brid povezan s vrhom jedne i druge boje, npr. svaki lanac je bipartitni graf
- **K-KOCKA Q_k** je graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima duljine k te čiji bridovi spajaju binarne nizove koji se razlikuju za 1 mjesto
  - broj vrhova je $|V(Q_k)|=2^k$, a broj bridova $|E(Q_k)|=k\cdot 2^{k-1}$
- ako je G jednostavan graf sa skupom vrhova $V(G)$, onda je njegov **KOMPLEMENT** $\overline{G}$ jednostavan graf sa istim skupom vrhova $V(G)$, a 2 su vrha susjedna u $\overline{G}$ ako nisu susj. u G
- $\overline{\overline{G}}$ je izomorfan sa G $\quad(\overline{N_n}=K_n,\ \overline{K_{r,s}}=K_r \cup K_s \dots)$

- **ŠETNJA** u G je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1 \dots v_{m-1}v_m$ ili $v_0 \to v_1 \dots \to v_m$ u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka
  - v_0 - početni vrh šetnje ili izvor, v_m - završni vrh šetnje ili ponor
  - broj bridova u šetnji zovemo **DULJINA ŠETNJE**
- **STAZA** je šetnja u kojoj su svi bridovi različiti (osim eventualno v_0 i v_m)
- **PUT** je šetnja u kojoj su svi vrhovi i svi bridovi različiti
- ako je $v_0 = v_m$, onda govorimo o **ZATVORENOM** putu ili stazi
- zatvoreni put koji sadrži barem 1 brid zovemo **CIKLUS**
- ciklus koji se sastoji od 1 brida zovemo **PETLJA**
- G je bipartitni graf onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu parne duljine
- neka je G jednostavni graf s n vrhova, ako G ima k komponenata povezanosti, onda za broj bridova m od G vrijedi

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

- svaki jednostavni graf s n vrhova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova je povezan
- **RASTAVLJAJUĆI SKUP** povezanog grafa G je skup bridova čijim uklanjanjem G ostaje nepovezan
- za rastavljajući skup kažemo da je **REZNI SKUP** ako njedan njegov pravi podskup nije rastavljajući
- rezni skup koji se sastoji od ~~jednog~~ jedinog brida zovemo **MOST**
- za povezani graf G definiramo **BRIDNU POVEZANOST** $\lambda(G)$ kao veličinu najmanjeg reznog skupa, kažemo da je G k-bridno povezan ako je $\lambda(G) \geq k$
- **SEPARIRAJUĆI SKUP** povezanog grafa G je skup vrhova od G čijim uklanjanjem G ostaje nepovezan
- **VRŠNA POVEZANOST** $\kappa(G)$ je broj elemenata najmanjeg separirajućeg skupa u G
- **ŠUMA** je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **STABLO**
- neka je T graf s n vrhova: T je stablo, T ne sadrži ciklus i ima $n-1$ bridova, T je povezan i ima $n-1$ bridova, T je povezan i svaki mu je brid most, svaka 2 vrha od T povezana su točno jednim putom, T ne sadrži ciklus, ali dodavanjem 1 brida dobivamo 1 ciklus
- ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti, onda G ima $n-k$ bridova
- **STRUK GRAFA** je duljina njegovog najkraćeg ciklusa

- za povezani graf G kažemo da je **EULEROVSKI** ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G, takvu stazu zovemo **EULEROVSKA STAZA**
- neeulerovski graf je **SKORO EULEROVSKI** ako postoji staza koja sadrži svaki brid od G
- ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus
- povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran
- povezani graf je eulerovski onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa
- povezani graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja
- **FLEURYEV ALGORITAM** – neka je G eulerovski graf, tada je sljedeća konstrukcija uvijek moguća i dovodi do eulerovske staze od G.
  - počni u bilo kojem vrhu i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći na sljedeća pravila:
    - prebriši bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, briši i njega
    - prijeđi mostom samo ako nemaš druge mogućnosti
- ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa zovemo **HAMILTONOVSKI CIKLUS**, graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus zovemo **HAMILTONOVSKI GRAF**
- nehamiltonovski graf u kojem možemo naći put kroz svaki vrh (ali koji nije zatvoren, pa nije ciklus) zovemo **SKORO HAMILTONOVSKI GRAF**
- ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi $deg(v) + deg(w) \geq n$ za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski (Ore, 1960)
- ako je G jednostavni graf s n ($n \geq 3$) vrhova, te ako je $deg(v) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski (Diracov teorem)

- algoritme za nalaženje najkraćeg puta, kineski problem poštara, problem trgovačkog putnika proučite sami, stvarno nije problem skužiti
- također i dokaze, svi su i više nego logični, a puno će vam pomoći pri rješavanju zadataka

RABBIT 16