

Ispit iz Matematike 3R
10.02.2014.

1. (5 bodova) Neka je

$$S(x) = \frac{3}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

Fourierov red funkcije f razvijene na intervalu $(-\pi, \pi)$. Pomoću danog razvoja, izračunajte vrijednost integrala:

(a) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$,

(b) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(3x) dx$.

2. (5 bodova) Odredite Fourierov integral parnog proširenja funkcije $f(x) = 2^{-x}$, $x \geq 0$.
3. (5 bodova)
- (a) Definirajte konvoluciju originala.
 - (b) Iskažite teorem o Laplaceovoj transformaciji konvolucije.
 - (c) Za $f(t) = t^2 u(t)$ i $g(t) = t^4 u(t)$, izračunajte $f * g$ isključivo korištenjem definicije konvolucije.
 - (d) Za iste funkcije, izračunajte $f * g$ korištenjem gornjeg teorema.
4. (5 bodova) Pomoću Laplaceove transformacije, odredite struju $i(t)$ u serijskom L-C krugu, $L = C = 1$, uz narinut napon $e(t) = e^{-3t} u(t-1)$.
5. (5 bodova) Zadan je skup $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Na skupu $\mathcal{P}(X)$ svih njegovih podskupova definirana je relacija ρ sa:

$$A, B \in \mathcal{P}(X), \quad A \rho B \iff |A \setminus B| = |B \setminus A|.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Detaljno obrazložite sva svojstva.

(b) Odredite $|\mathcal{P}(X)/_{\rho}|$.

6. (5 bodova)

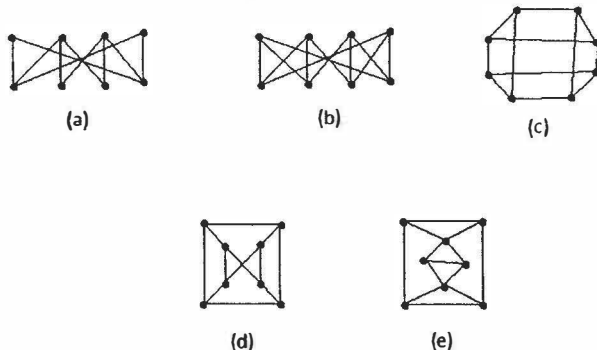
(a) Odredite koeficijent uz x^5 u izrazu $(1 + x + x^2 + x^3 + x^5)^5$.

(b) Izračunajte sumu:

$$\sum_{i,j,k \in \mathbb{N}_0, i+j+k=7} (-1)^{i+j} \frac{7!}{i!j!k!}.$$

OKRENITE!

7. (5 bodova) Odredite koliko ima prirodnih brojeva koji dijele broj 360 000, a ne dijele broj 4 900.
8. (5 bodova) Neka je Q_n , $n \geq 1$, n -dimenzionalna kocka i neka je a_n broj bridova u Q_n .
- (a) Odredite a_n , $n \geq 1$.
- (b) Odredite eksplicitno funkciju izvodnicu niza (a_n) .
9. (5 bodova) Odredite koji od skiciranih grafova su izomorfni 3-kocki Q_3 . Za one koji jesu, odredite izomorfizam grafova. U protivnom, obrazložite zašto nisu.



10. (5 bodova) Provodeći algoritam, odredite sve vrijednosti parametra $m \in \mathbb{N}$ za koje najkraći put od vrha A do vrha G obavezno prolazi vrhom D . Odredite i duljine najkraćih puteva u tim slučajevima.

