riješene treće školske

lord of light

2013

$\bigtriangledown$

Zadatak 1

Koliko ima sedmeroznamenkastih brojeva u kojima se svaka znamenka pojavljuje barem 3 puta, a nula se nikad ne pojavljuje?

Zbog uvjeta zadatka traženi broj može imati najviše dvije različite znamenke:

1) broj ima 2 različite znamenke
dvije znamenke možemo odabrati na $\binom{9}{2}$ načina,
uvijek će se jedna pojavljivati 3,
a druga 4 puta (postoje 2 mogućnosti),
a broj različitih razmještaja takve kombinacije brojeva je
(permutacije s ponavljanjem) $\frac{7!}{3!*4!}$

2) broj ima 1 znamenku
$\Rightarrow$ ukupno imamo 9 slučajeva

ukupan broj traženih brojeva je:
$\binom{9}{2} * 2 * \frac{7!}{3!*4!} + 9$

Zadatak 2

Četiri lopova ukrala su 10000kn u novčanicama od 500kn.
Na koliko načina mogu razdijeliti plijen tako da svaki dobije najmanje 1000kn,
a najviše 4000kn?

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
$x_i \geq 2; x_i \leq 8; i = 1, 2, 3, 4$

polinom koji koristimo je
$(x^2+x^3+....+x^8)*(x^2+x^3+....+x^8)*(x^2+x^3+....+x^8)*(x^2+x^3+....+x^8) =$
$= (x^2 + x^3 + ... + x^8)^4 =$
$= x^8 * (1 + .. + x^6)^4$
pa tražimo koeficijent uz x^{12} u $(1 + .. + x^6)^4$,
vrijedi $(1 + .. + x^6) = \frac{1-x^7}{1-x}$

$(1 - x^7)^4$ ima opći član oblika $\binom{4}{k} * (-x^7)^k$
$(1 - x)^{-4}$ ima opći član oblika $\binom{-4}{k} * (-x)^k$
članovi prvog polinoma će se množiti sa članovima drugog,
cilj nam je odrediti one članove koji će imati x^{12}
u prvom možemo odabrati potencije x^0 i x^7 (x^{14} je previše)
sada iz drugog biramo potencije koje će nadopuniti odabrane iz prvog polinoma
lako vidimo da su to x^{12} i x^5(respektivno)

pa je rješenje:

$\binom{4}{0} * \binom{-4}{12} + \binom{4}{1} * \binom{-4}{5}$

$\Rightarrow \binom{4+12-1}{12} * (-1)^{12} + 4 * \binom{4+5-1}{5} * (-1)^5$

$\Rightarrow \binom{15}{12} - 4 * \binom{8}{5}$

$\Rightarrow \frac{15*14*13}{6} - 4 * \frac{8*7*6}{6}$

$\Rightarrow 455 - 224 = 231$

Zadatak 3

$$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 2 * (-2)^{n+2}$$
$$a_1 = 2$$
$$a_2 = 4$$

Homogena
$a_{n+2} + 4a_{n+1} + 4a_n = 0$
rješavamo:
$x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$x_{1,2} = -2$

odavde je:
$a_n^h = A(-2)^n + B * n * (-2)^n$

Partikularni dio

gledamo $2 * (-2)^{n+2}$

$a_n^P = C * n^2 * (-2)^n$
uvrštavamo:
$C(n+2)^2(-2)^{n+2} + 4C(n+1)^2(-2)^{n+1} + 4C * n^2 * (-2)^n = 2 * (-2)^{n+2}$

$C(n+2)^2(-2)^2 + 4C(n+1)^2(-2)^1 + 4C * n^2 * (-2)^0 = 2 * (-2)^2$

$4C(n+2)^2 - 8C(n+1)^2 + 4C * n^2 = 8$

$C(4n^2 + 16n + 16 - 8n^2 - 16n - 8 + 4n^2) = 8$

$C(0n^2 + 0n + 16 - 8) = 8$

$C = 1$

$a_n^P = n^2 * (-2)^n$

sada imamo
$a_n = a_n^h + a_n^p$
$a_n = A(-2)^n + B * n * (-2)^n + n^2 * (-2)^n$

uvrštavamo početne uvjete:
$a_1 = 2$
$2 = -2A - 2B - 2$
$-2A - 2B = 4$
$A + B = -2$
$A = -B - 2$

$a_2 = 4$
$4 = 4A + 8B + 16$
$4A + 8B = -12$
$-4B - 8 + 8B = -12$
$4B = -4$
$B = -1$
$A = -1$

pa je krajnje rješenje: $a_n = -1 * (-2)^n + -1 * n * (-2)^n + n^2 * (-2)^n$

$a_n = (-2)^n(n^2 - n - 1)$

Zadatak 4

Koliko ima neparnih brojeva većih od 30000, a manjih od 80000 kojima je svaka znamenka različita?

gledamo na zadatak kao na odabir 5 znamenki sa nekim pravilima
ako nam je prva znamenka neparna (3,5,7), petu znamenku možemo odabrati na 4 načina
a preostale tri znamenke na 8*7*6 načina
ako nam je prva znamenka parna (4,6), petu znamenku možemo odabrati na 5 načina
a preostale tri znamenke na 8*7*6 načina

pa je traženi broj:
$3 * 4 * 8 * 7 * 6 + 2 * 5 * 8 * 7 * 6$

Zadatak 5

Pet bračnih parova bježi sa Titanica i ukrcavaju se u (identične) čamce za spašavanje tako da u svakom čamcu sjedi po jedan muškarac i žena. Na koliko načina se mogu rasporediti tako da barem jedan od muškaraca bude u čamcu sa svojom suprugom?

ovaj zadatak je jednostavna primjena formule uključivanja-isključivanja

definiramo:
A_i = i-ti muškarac nije u čamcu sa svojom suprugom,$i = 1, 2, 3, 4, 5$
X - ukupan broj načina na koje možemo 10 ljudi smjestiti u čamce
N traženi broj

$N = X - \sum(A_i) + \sum(A_i * A_j) - \sum(A_i * A_j * A_k)....$
$X = 5!$(zato što su u svakom čamcu 1x ž i 1x m)
$\sum(A_i) = \sum_1 = \binom{5}{1} * 4!$ jedan nije sa svojom ženom, za ostale nije bitno
$\sum_2 = \binom{5}{2} * 3!$
$\sum_3 = \binom{5}{3} * 2!$
$\sum_4 = \binom{5}{4} * 1! = 5$
$\sum_5 = \binom{5}{5} * 0! = 1$

pa je rješenje:
$N = 5! - \binom{5}{2} * 3! + \binom{5}{3} * 2! - 5 + 1$

Zadatak 6

$$a_{n+2} + 4a_{n+1} - 5a_n = 14 + 12n$$
$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 1$$

riješavamo homogenu:
$x^2 + 4x - 5 = 0$
$x_1 = -5$
$x_2 = 1$
tako da je
$a_n^h = X(-5)^n + Y$

za $f(n) = 14 + 12n$ partikularno tražimo kao $a_n^p = An + B$
no kako jedna od nultočki iznosi 1, moramo tražiti $a_n^p = An^2 + Bn$

uvrštavamo u početni izraz:

$A(n+2)^2 + B(n+2) + 4A(n+1)^2 + 4B(n+1) - 5A(n)^2 - 5B(n) = 14 + 12n$

$n^2(A+4A-5A) + n(4A+B+8A+4B-5B) + (4A+2B+4A+4B) = 14+12n$

$n(12A) + (8A+6B) = 14 + 12n$

$\Rightarrow A = 1$
$\Rightarrow B = 1$

pa je partikularno rješenje:
$a_n^p = n^2 + n$

krajenje tražimo kao $a_n = a_n^h + a_n^p$
$a_n = X(-5)^n + Y + n^2 + n$
uvrštavamo početne uvjete:

$a_0 = 1$
$1 = X + Y$
$Y = 1 - X$

$a_1 = 1$
$1 = -5X + Y + 2$
$1 = -5X + 1 - X + 2$
$-6X = -2$

$\Rightarrow X = 1/3$
$\Rightarrow Y = 2/3$

pa je krajnje rješenje:
$a_n = \frac{1}{3}(-5)^n + \frac{2}{3} + n^2 + n$

Zadatak 7

Koliko ima permutacija skupa $1, 2, ..., 2n, n > 1$, pri kojima je svaki parni broj na parnoj koordinati, pri čemu broj 1 nije na prvoj koordinati, niti je broj 2 na drugoj koordinati?

kako su parni brojevi na parnim koordinatama, a neparni na neparnim,
imamo dva odvojena skupa koja gledamo
i zapravo vrijede ista pravila za oba skupa,
svaki ima n brojeva koje stavlja na n pozicija
s time da postoji posebno pravilo za prvu poziciju,

recimo da rješavamo za neparne,
prvo broj 1 valja smjestiti na neko od n-1 mjesta (jer ne smije biti samo na prvom)
a zatim preostale neparne stavljamo na preostalih n-1 mjesta na (n-1)! načina
to nam daje sveukupno (n-1)*(n-1)! mogućnosti
a kako isto vrijedi i za parne, traženi broj permutacija skupa 1,2,....,2n je
$((n-1)(n-1)!)^2$

Zadatak 8

Koliko ima rješenja jednadžba $x_1 * x_2 * x_3 * x_4 = 3^7$,
pri čemu je x_i prirodan broj?

Kako su svi djelitelji od 3^7 oblika 3^a, gdje je a=0,1,...,
možemo reći da vrijedi $x_i = 3^{y_i}$ te tada rješavamo
$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$
što je standardni zadatak,

odmah vidimo da se radi o 7 "predmeta" i (4-1) "pregrada", pa je rješenje
$\frac{(7+4-1)!}{(7!)*(3)!}$

Zadatak 9

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 6n$$
$$a_0 = 0$$
$$a_1 = 5$$

rješavamo homogenu:
$x^2 = 2x - 1$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0$

$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
pa je homogeno rješenje:
$a_n^h = X + Yn$

partikularno tražimo kao
$a_n^p = (An + B) * n^2$
(množimo sa n^2 zbog dvostrukog korijena iznosa 1)

uvrštavamo a_n^p i imamo:

$(An + B) * n^2 = 2((A(n-1) + B) * (n-1)^2) - ((A(n-2) + B) * (n-2)^2) + 6n$

$An^3 + Bn^2 = 2(A(n-1)^3 + B(n-1)^2) - (A(n-2)^3 + B(n-2)^2) + 6n$

$An^3 + Bn^2 - 2(A(n-1)^3 + B(n-1)^2) + (A(n-2)^3 + B(n-2)^2) = 6n$

$6An - 6A + 2B = 6n$

$\Rightarrow A = 1$
$\Rightarrow B = 3$

$a_n^p = (n+3) * n^2$

krajnje rješenje tražimo kao:
$a_n = a_n^h + a_n^p$

$a_n = X + Yn + (n+3) * n^2$

uvrštavamo početne uvjete:
$a_0 = 0$
$0 = X$

$a_1 = 5$
$5 = Y + 4$
$Y = 1$

$a_n = n + n^3 + 3n^2$

$a_n = n^3 + 3n^2 + n$

Zadatak 10

Koliko se devetslovnih riječi može napisati od 30 slova abecede tako da svaka riječ sadrži točno 3 različita samoglasnika i točno 6 različitih suglasnika?

samoglasnike možemo odabrati na $\binom{5}{3}$ načina

suglasnike možemo odabrati na $\binom{25}{6}$ načina

odabrana slova možemo razmjestiti na 9! načina

traženi broj riječi je:

$\binom{5}{3} * \binom{25}{6} * 9!$

Zadatak 11

Koliko ima različitih sumanada u razvoju izraza
$(x_1 + ... + x_{90})^{99}$

ovaj zadatak rješavamo jednostavnom primjenom multinomnog teorema
znamo da će općenito član imati $\prod x_i^{y_i}$
i da će vrijediti $\sum y_i = 99$, te će broj rješenja tog izraza
definirati broj različitih sumanada u razvoju,

kako ovdje imamo x_{90}, imamo 90 članova,
te problem svodimo na rješavanje zadatka sa pregradama i predmetima

imamo 99 predmeta i (90-1) pregrada pa je rješenje:

$\frac{(99+90-1)!}{(99)!(89)!}$, odnosno

$\frac{(188)!}{(99)!(89)!}$

Zadatak 12

$$a_n = a_{n-2} + 6n^2 + 12n + 6$$
$$a_0 = 1$$
$$a_1 = -1$$

Prvo rješavamo homogenu:
$x^2 = 1$
$x_1 = 1$
$x_2 = -1$

imamo $a_n^h = X(-1)^n + Y$

zbog korijena iznosa 1 partikularno rješenje tražimo kao:
$a_n^p = (An^2 + Bn + C) * n = An^3 + Bn^2 + Cn$

$An^3 + Bn^2 + Cn = A(n-2)^3 + B(n-2)^2 + C(n-2) + 6n^2 - 12n + 6$

$An^3 + Bn^2 + Cn - A(n-2)^3 - B(n-2)^2 - C(n-2) = 6n^2 - 12n + 6$

$n^2(6A) + n(-12A + 4B) + (8A - 4B + 2C) = 6n^2 - 12n + 6$

$A = 1$

$-12 + 4B = -12$
$B = 0$

$8 + 2C = 6$
$C = -1$

$a_n^p = n^3 - n$

krajnje rješenje tražimo kao $a_n = a_n^h + a_n^p$

$a_n = X(-1)^n + Y + n^3 - n$

uvrštavamo početne uvjete:

$a_0 = 1$
$1 = X + Y$

$a_1 = -1$
$-1 = -X + Y$

lako vidimo:
$Y = 0$
$X = 1$

$a_n = (-1)^n + n^3 - n$