

Ispit iz Matematike 3R
07.09.2016.

1. (5 bodova) Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0, 1], \\ x-1, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama na intervalu $[-1, 1]$. Skicirajte graf dobivenog reda i izračunajte $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

2. (5 bodova)

(a) Neka su $A, B > 0$. Neparno proširenje funkcije $f(x) = e^{-Ax} + e^{-Bx}$, $x > 0$, prikazite pomoću Fourierovog integrala.

(b) Pomoću dobivenog integrala izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} dx.$$

3. (5 bodova)

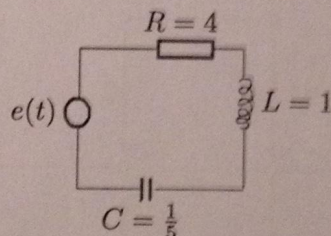
(a) Iskažite i dokažite teorem o integriranju originala Laplaceove transformacije.

(b) Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral:

$$\int_0^{\infty} \int_0^t e^{-(t+\tau)} \cos \tau \, d\tau \, dt.$$

4. (5 bodova) Odredite struju $i(t)$ u strujnom krugu sa slike uz napon na izvoru dan sa

$$e(t) = tu(t) - (t-2)u(t-2).$$



5. (5 bodova) Na skupu $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ definirane su sljedeće relacije:

(a) $x \rho y \iff x - y < 5$,

(b) $x \rho y \iff 0 < |x - y| < 5$,

(c) $x \rho y \iff |x - y| = 2n$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$,

(d) $x \rho y \iff x \leq y$,

(e) $x \rho y \iff |x - y| \leq 0$.

Napišite za svaku relaciju svojstva (refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost) koja ta relacija zadovoljava.

6. (5 bodova) Iz skupa koji se sastoji od 10 studentica i 7 studenata treba odabrati studentski zbor. Na koliko načina je to moguće napraviti ako broj studentica mora biti paran, a broj studenata mora biti 4?

Napomena. Nula je paran broj!

OKRENITE STRANICU!

7. (5 bodova) Na jesenskom roku ispit iz Mat3R i ViS-a je uspjelo položiti točno 5 studenata (svaki od njih je položio oba ispita) koji moraju doći kod profesora na upis ocjena. Kako su profesori jako zaposleni, upis ocjene se može napraviti kroz 5 dana, tako da se u jutranjem terminu može dobiti ocjena iz Mat3R, a u popodnevnom iz ViS-a. Također, profesori u svakom terminu mogu primiti točno jednog studenta. Na koliko je načina moguće rasporediti tih 5 studenata tako da niti jedan ne dobije ocjenu iz Mat3R i ViS-a isti dan?
8. (5 bodova) Za prolaz na ispitu iz Mat3R potrebno je kumulativno skupiti barem 45 bodova. Student je na KPZ-ima i međuispitu skupio 30 bodova. Za završni ispit se baš nije spremio i zna da će na svakom pojedinom zadatku dobiti najviše 3 boda. Ako se završni ispit sastoji od 8 zadataka, na koliko načina se mogu raspodijeliti bodovi tako da student bude točno na granici prolaska, odnosno skupi točno 45 bodova?
9. (5 bodova) Pronađite sve međusobno neizomorfne jednostavne povezane grafove sa nizom stupnjeva $(1, 1, x, 2, y, 3)$, za neke $x, y \in \mathbb{N}$.
10. (5 bodova) Poštar mora svakodnevno obići ulice (i vratiti se u istu točku) koje su dane grafom na slici. Svakoj ulici pridružen je broj koji označava potrebno vrijeme obilaska. Uočite da je jednoj ulici pridružena nepoznanica x . U toj ulici su često radovi i vrijeme obilaska može biti bilo koji strogo pozitivan realan broj o čijoj vrijednosti je poštar obaviješten svako jutro. Odredite optimalnu poštarevu rutu u ovisnosti o x i napišite eksplicitno kojim ulicama poštar mora proći dvaput (ukoliko takve postoje). Algoritme obavezno provesti!

