

## Matematika 3R

Ljetni rok 08.07.2013. (150 min)

Svaki zadatak nosi 5 bodova.

1. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, \pi] \\ -x & x \in (\pi, 2\pi] \end{cases} \quad \text{razvijte u red sinusima.}$$

2. Prikažite pomoću Fourierovog integrala funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 5 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases} \quad \text{te pomoću toga pokažite da je } \int_0^\infty \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$$

3. Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral  $\int_0^\infty \frac{e^{-x} \sin^2 x}{x} dx$

4. Riješite integralnu jednadžbu

$$y(t) - 2 \int_0^t y'(x) \sin(2(t-x)) dx = 2e^{-2t}, \quad y(0) = 2$$

5. Na skupu kompleksnih brojeva  $C$  definirana je relacija  $\rho$  na sljedeći način:

$$a \rho b \quad |Re(a) - Im(b)| < 5$$

Dokažite ili opovrgnite:

- Relacija  $\rho$  je refleksivna
  - Relacija  $\rho$  je simetrična
  - Relacija  $\rho$  je tranzitivna
  - Je li relacija  $\rho$  relacija ekvivalencije?
6. U kutiji je 10 bijelih, 8 žutih i 9 crnih kuglica. Na koliko načina možemo izvući 5 kuglica tako da točno dvije boje budu zastupljene, a na koliko načina da barem dvije boje budu zastupljene?
7. Tri provalnika ukrala su 25 identičnih dijamantata i 100 000 KN u novčanicama od 100 KN.
- Na koliko načina mogu podijeliti novce ako svaki mora dobiti barem 20 000 KN?
  - Na koliko načina mogu podijeliti dijamante tako da svaki dobije barem 4, ali ne više od 9 dijamantata?
8. Nađite nehomogenu linearnu rekursivnu relaciju s konstantnim koeficijentima čije je opće rješenje  $a_n = A + B_n + C \cdot 2^n + \frac{n}{3} \cdot 2^{n-1}$
9. Za svaki od sljedećih grafova odredite jesu li bipartitni:  $Q_{2013}$ ,  $W_{2013}$ ,  $C_{2013}$ ,  $\overline{W_{2013}}$ ,  $L(K_{2013})$ . Obrazložite svoje tvrdnje. ( $\bar{G}$  označava komplement, a  $L(G)$  bridni graf grafa  $G$ )
10. Koristeći Dijkstrin algoritam pronađite najkraći put od vrha 1 do vrha 6.

