

Ispit iz Matematike 3R
11.2.2015.

1. (5 bodova) Razvijte u Fourierov red funkciju definiranu na intervalu $[-3, 3]$ formulom $f(x) = 2 \operatorname{sgn}(e^x - 1)$. Pomoću dobivenog razvoja izračunajte sumu $\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-2}$.

2. (5 bodova) Nacrtajte graf funkcije zadane sa

$$f(x) := \begin{cases} 1 - \cos x, & x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i prikažite ju u obliku Fourierovog integrala.

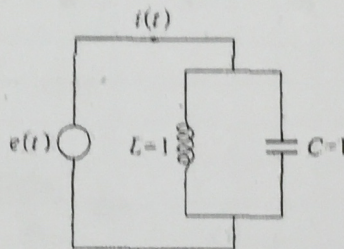
3. (5 bodova)

(a) Iskažite i dokažite teorem o Laplaceovoj transformaciji konvolucije.

(b) Koristeći se teoremom o konvoluciji odredite original funkcije

$$F(s) = \frac{1}{(s^2 + 2s + 2)^2}.$$

4. (5 bodova) Pomoću Laplaceove transformacije nađite struju $i(t)$ električnog kruga zadanog slikom uz priključeni napon $e(t) = 2 \cos^2 t$.



5. (5 bodova) Na skupu $\{1, 2, \dots, 99\} \times \{1, 2, \dots, 99\}$ definirane su dvije relacije, ρ i φ , na sljedeći način:

$$((a, b), (c, d)) \in \rho \iff a + b \equiv c + d \pmod{3}.$$

$$((a, b), (c, d)) \in \varphi \iff a + c \equiv b + d \pmod{3}.$$

Koje od tih relacija su relacije ekvivalencije? Za relacije ekvivalencije odredite kardinalni broj klase $[(1, 10)]$. Sve tvrdnje detaljno argumentirajte!

6. (5 bodova)

(a) Koliko ima permutacija n -tog reda k -članog skupa $\{a_1, \dots, a_k\}$, u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, \dots, k$, $n = n_1 + \dots + n_k$? Dokažite svoju tvrdnju!

(b) Koliko se različitih riječi može sastaviti od svih slova riječi MATEMATIKA tako da ne počinju i završavaju istim slovom?

7. (5 bodova) Desetero studenata je ušlo u predavaonu s kišobranima i odložilo ih na ulazu. Na kraju predavanja je svatko uzео jedan kišobran ne brinući se kome pripada. Na koliko načina su studenti mogli podijeliti kišobrane ako znamo da je točno troje uzelo svoj kišobran?

OKRENITE!

8. (5 bodova) Riješite rekursiju

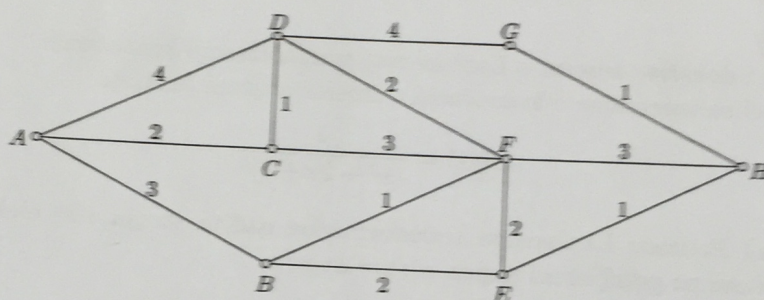
$$\frac{2}{a_{n+2}} - \frac{5}{a_{n+1}} + \frac{2}{a_n} = n - 1,$$

uz početne uvjete $a_0 = 1/6$, $a_1 = -1/2$.

9. (5 bodova) Dokažite da je komplement nepovezanog grafa povezan. Vrijedi li obrat?

10. (5 bodova) Za težinski graf G i vrh $v \in V(G)$ definiramo stablo najkraćih puteva iz vrha v kao razapinjuće stablo T od G takvo da je udaljenost od v do $u \in V(G)$ u T najmanja udaljenost od v do u u G .

Pronađite stablo najkraćih puteva iz vrha A na grafu:



Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Sretno!