Prvi međuspit iz Matematike 3E i 3R

31.10.2006.

1. (**2 boda**)
a) (**1b**) Napišite definiciju ortogonalnosti funkcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$ na intervalu $[a, b]$.
b) (**1b**) Dokažite da su funkcije $f(x) = \sin mx$ i $g(x) = \sin nx$ ortogonalne za svaki $m, n \in \mathbb{N}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

2. (**3 boda**)
a) (**2b**) Razvijte u Fourierov red $S(x)$ funkciju $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ u red po sinus funkcijama.
b) (**1b**) Izračunajte $S(3\pi)$.

3. (**3 boda**) Pomoću prikaza funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi], \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \tag{1}$$

u obliku Fourierovog integrala, izračunajte $\int_0^\infty \frac{\cos \pi t}{1-4t^2} dt$.

4. (**2 boda**) Neka je $F(s)$ Laplaceov transformat zadanog originala $f(t)$. Pomoću definicije Laplaceovog transformata nađite Laplaceov transformat funkcije:
a) (**1b**) $e^{-\alpha t} f(t)$,
b) (**1b**) $f'(t)$.

5. (**2 boda**) Nađite Laplaceov transformat funkcije $f(t) = (t-2)^3\, e^{-t}\, u(t-2)$.

6. (**2 boda**) Izračunajte integral $\int_0^\infty e^{-t}\, t^{100} dt$.

7. (**3 boda**) Riješite integralnu jednadžbu

$$y(t) = \sin t + \int_0^t \tau \cdot y(t-\tau)\, d\tau.$$

8. (**3 boda**) Pomoću Laplaceove transformacije odredite struju $i(t)$ strujnog kruga sa slike 1 uz priključeni napon $e(t)$ zadan slikom 2.

Rješenja 1. međuspita iz Matematike 3E i 3R

31.10.2006.

1. (**2 boda**)

a) (**1 bod**) Za funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da su ortogonalne na intervalu $[a, b]$ ako vrijedi $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$.

b) (**1 bod**) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{m-n}\sin(m-n)x|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m+n}\sin(m+n)x|_{-\pi}^{\pi}\right] = 0$

2. (**3 boda**)

a) (**2 boda**) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ u red po sinus funkcijama $\Rightarrow$ neparna funkcija $\Rightarrow a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\sin nx\,dx =$

$= -\frac{1}{2n}\cos nx|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}x\,\cos nx|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx = \ldots = \frac{\cos\pi n + 1}{2n}$

za n neparan je $b_n = 0$, a za n paran je $b_n = \frac{1}{n}$ te je Fourierov red

$f(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}\sin(2nx)$

b) (**1 bod**) $S(3\pi) = \frac{1}{2}(f(3\pi+0) + f(3\pi-0)) = 0.$

3. (**3 boda**) funkcija $f(x)$ je parna $\Rightarrow B(\lambda) = 0$

$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos\frac{\xi}{2}\cos\lambda\xi\,d\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\xi(\lambda+\frac{1}{2}) + \cos\xi(\lambda-\frac{1}{2})\,d\xi = \frac{2}{\pi}(\frac{2}{2\lambda+1}\sin\xi(\lambda+\frac{1}{2})|_0^{\pi} + \frac{2}{2\lambda-1}\sin\xi(\lambda-\frac{1}{2})|_0^{\pi}) = \frac{4}{\pi}(\frac{\sin\pi(\lambda+\frac{1}{2})}{2\lambda+1} + \frac{\sin\pi(\lambda-\frac{1}{2})}{2\lambda-1}) = \frac{4}{\pi}(\frac{\cos\pi\lambda}{2\lambda+1} - \frac{\cos\pi\lambda}{2\lambda-1}) = \frac{8}{\pi}\frac{\cos\pi\lambda}{1-4\lambda^2}$, $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}$

Fourierov integral $\quad f(x) = \frac{8}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\pi\lambda}{1-4\lambda^2}\cos\lambda x d\lambda$

$\int_0^{\infty}\frac{\cos\pi t}{1-4t^2}dt = \frac{\pi}{8}f(0) = \frac{\pi}{4}.$

4. (**2 boda**)

a) (**1 bod**) $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$

$\mathcal{L}(e^{-\alpha t}f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{-\alpha t}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t}f(t)dt = F(s+\alpha)$

b) (**1 bod**) $\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st}f'(t)dt = (PI) = e^{-st}f(t)\Big|_0^{\infty} + s\int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt = sF(s) + \lim_{t\to\infty} e^{-st}f(t) - f(0) = sF(s) - f(0)$

5. (**2 boda**) $f(t) = (t-2)^3\,e^{-t}\,u(t-2)$

$t^3 \circ\!-\!\bullet \frac{3!}{s^4},$

$(t-2)^3 u(t-2) \circ\!-\!\bullet \frac{6}{s^4}e^{-2s}$

$f(t) = (t-2)^3\,e^{-t}\,u(t-2) \circ\!-\!\bullet \frac{6}{(s+1)^4}e^{-2(s+1)}$

6. (**2 boda**) $f(t) = t^{100} \circ\!-\!\bullet \frac{100!}{s^{101}} = F(s)$

$\int_0^{\infty} e^{-t}\,t^{100}dt = F(1) = 100!.$

7. (**3 boda**) $y(t) = \sin t + \int_0^t \tau\, y(t-\tau) d\tau$
$\int_0^t \tau\, y(t-\tau) d\tau = t * y(t) \circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{s^2} Y(s)$
$Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{1}{s^2} Y(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-1} -$
$\frac{1}{4}\frac{1}{s+1}$
$y(t) = (\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-t})u(t)$

8. (**3 boda**) $e(t) = \frac{t}{2}(u(t) - u(t-2)) + u(t-2) = \frac{1}{2}tu(t) - \frac{1}{2}(t-2)u(t-2)$
$E(s) = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s^2}e^{-2s}$
$Z(s) = \frac{1\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$
$I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{s+1}{2s^2}(1 - e^{-2s}) = \frac{1}{2s} + \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{2s}e^{-2s} - \frac{1}{2s^2}e^{-2s}$
$i(t) = \frac{1}{2}(u(t) + tu(t) - u(t-2) - (t-2)u(t-2)) = \frac{1}{2}[(1+t)u(t) + (1-t)u(t-2)]$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
18.10.2007.

1. (3 boda)
a) (**1b**) Iskažite Dirichletove uvjete.
b) (**1b**) Da li funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na segmentu $[0, 2]$? Obrazložite!
c) (**1b**) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.

2. (3 boda)
Zadana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ -1\,, & x \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$
a) (**2b**) Razvijte f po kosinus funkcijama u trigonometrijski Fourierov red.
b) (**1b**) Pomoću Parsevalove jednakosti izračunajte $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

3. (4 boda)
Funkciju $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|\,, & x \in [-1, 1] \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala, te koristeći taj prikaz izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx.$$

4. (3 boda)
Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^2 \cos x \, dx.$$

5. (4 boda)
Primjenom Laplaceove transformacije riješite diferencijalnu jednadžbu
$y'' + y = f(t)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, u kojoj je funkcija f zadana slikom 1.

6. (5 boda)
a) (**1b**) Definirajte konvoluciju dviju funkcija.
b) (**2b**) Neka su f i g originali. Dokažite da je $f * g$ eksponencijalnog rasta.
c) (**2b**) Riješite integralnu jednadžbu.

$$y(t) = 3 \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau) y(\tau)\, d\tau.$$

7. (3 boda)
Nađite struju $i(t)$ električnog kruga zadanog slikom 2 uz priključeni napon $e(t) = 1 + \cos 2t$.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
18.10.2007.

1. (3 boda)
a) (**1b**) Funkcija $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ zadovoljava Dirichletove uvjete na intervalu $[a, b]$, ako vrijedi
1) f je po dijelovima neprekinuta i njezini su prekidi prve vrste,
2) f je monotona ili ima najviše konačan broj strogih ekstrema.

b) (**1b**) Funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ne zadovoljava Dirichletove uvjete na segmentu $[0, 2]$ jer u točki 1 ima prekid koji nije prekid prve vrste.

c) (**1b**) **Teorem o konvergenciji Fourierovog reda.**
Neka je f po dijelovima glatka periodična funkcija s periodom 2π koja zadovoljava Dirichletove uvjete. Tada njezin Fourierov red konvergira u svakoj točki $x \in [-\pi, \pi]$ i za sumu $S(x)$ reda vrijedi:
(i) $S(x) = f(x)$, ako je f neprekinuta u točki x
(ii) $S(x) = \frac{1}{2}\left[f(x-0) + f(x+0)\right]$, ako je x točka prekida za f.

2. (3 boda)
a) (**2b**) Razvijamo u red parno proširenje funkcije f. $T = 2$, $L = 1$, $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} 1\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-1)\,dx\right] = 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] = 0$$

$$a_n = \frac{2}{1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} \cos(n\pi x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-1)\cos(n\pi x)\,dx\right] = 2\left[\left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_{x=0}^{\frac{1}{2}} - \left.\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right|_{x=\frac{1}{2}}^{1}\right] = \frac{4}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Uočavamo

$$\Rightarrow a_{2k} = 0, \quad a_{2k+1} = \frac{4}{(2k+1)\pi} \cdot (-1)^k$$

pa je traženi trigonometrijski Fourierov red

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos[(2k+1)\pi x].$$

b) (**1b**) Parsevalova jednakost neposredno daje:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi(2k+1)}\right)^2 = \frac{2}{2}\int_{-1}^{1} 1^2\,dx \Rightarrow \frac{16}{\pi^2} \cdot s = 2 \Rightarrow s = \frac{\pi^2}{8},$$

gdje smo sa s označili traženu sumu.

3. (4 boda)
$f(x)$ je očito parna funkcija,

$$\Rightarrow B(\lambda) = 0, \quad f(x) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos(\lambda x)\, d\lambda$$

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos(\lambda\xi)\, d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 (1-\xi)\cos(\lambda\xi)\, d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(\lambda\xi)\, d\xi - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \underbrace{\xi}_{u}\underbrace{\cos(\lambda\xi)\, d\xi}_{dv} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda}\right|_{\xi=0}^{1} - \frac{2}{\pi}\cdot\left[\xi\left.\frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda}\right|_{\xi=0}^{1} - \int_0^1 \frac{\sin(\lambda\xi)}{\lambda}\, d\xi\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin\lambda}{\lambda} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \left.\frac{\cos(\lambda\xi)}{\lambda^2}\right|_{\xi=0}^{1}\right] \\
&= \frac{2}{\pi\lambda^2}(1-\cos\lambda)
\end{aligned}$$

Fourierov integral zadane funkcije f je:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\cos(\lambda x)\, d\lambda.$$

Ako uvrstimo točku $x = 0$, iz

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos\lambda}{\lambda^2}\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{2\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\lambda^2}\, d\lambda = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}\, d\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{\lambda}{2} = x\right| \Rightarrow 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx \Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

4. (3 boda)

$$\cos t \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+1}$$

$$f(t) := t^2\cos t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad (-1)^2\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'' = \left(\frac{1-s^2}{(s^2+1)^2}\right)' = \cdots = \frac{2s\cdot(s^2-3)}{(s^2+1)^3} =: F(s)$$

$$f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(s) \qquad \Rightarrow \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

pa

$$s = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} x^2 \cos x\, dx = F(\frac{1}{2}) = \cdots = -\frac{176}{125}$$

5. (4 boda)

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$f(t) = (u(t)-u(t-1)) - u(t-1) = u(t) - 2u(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} = F(s)$$

Preslikavanjem jednadžbe u donje područje dobivamo:

$$s^2 Y(s) - s\cdot y(0) - y'(0) + Y(s) = F(s)$$

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = \frac{1}{s}\left(1 - 2e^{-s}\right)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}\cdot\left(1-2e^{-s}\right) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)\cdot\left(1-2e^{-s}\right) + \frac{s}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{2s}{s^2+1}e^{-s} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad u(t) - 2u(t-1) + 2\cos(t-1)u(t-1) = y(t)$$

6. (5 boda)

a) (**1b**)

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau = [\text{alternativno}] = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\, d\tau$$

b) (**2b**) f i g su originali $\Rightarrow$ f i g su eksponencijalnog rasta

$$\begin{aligned} |(f*g)(t)| \quad &\leq \quad \int_0^t |f(\tau)|\cdot|g(t-\tau)|\, d\tau \leq \begin{bmatrix} \exists M_1, M_2 \\ \exists a_1, a_2 \end{bmatrix} \\ &\leq \quad M_1 M_2 \int_0^t e^{a_1\tau} e^{a_2(t-\tau)}\, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= M_1 M_2 e^{a_2 t} \cdot \int\limits_0^t e^{(a_1-a_2)\tau}\, d\tau \\
&= M_1 M_2 e^{a_2 t} \cdot \frac{1}{a_1 - a_2}\left[e^{(a_1-a_2)t} - 1\right] \\
&= \frac{M_1 M_2}{a_1 - a_2}\left(e^{a_1 t} - e^{a_2 t}\right) = [a = \max\{a_1, a_2\}] \\
&\leq \underbrace{\frac{2M_1 M_2}{a_1 - a_2}}_{M} e^{at} = M e^{at}
\end{aligned}
$$

c) (**2b**)

$$
y(t) = 3\sin t + 2\int\limits_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)\, d\tau
$$

Slika jednadžbe u donjem području je:

$$
Y(s) = 3 \cdot \frac{1}{s^2+1} + 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} \cdot Y(s)
$$

$$
Y(s)\left(1 - \frac{2s}{s^2+1}\right) = \frac{3}{s^2+1}
$$

$$
Y(s)(s^2 - 2s + 1) = 3
$$

$$
Y(s) = \frac{3}{(s-1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 3te^t = y(t)
$$

7. (3 boda)

$$
e(t) = 1 + \cos 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4} = E(s)
$$

$$
Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{Ls} + \frac{1}{\frac{1}{Cs}}} = \begin{bmatrix} L = 1 \\ C = 1 \end{bmatrix} = \cdots = \frac{s}{s^2+1}
$$

$$
I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{s^2+1}{s}\left(\frac{1}{s} + \frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{s^2+1}{s^2} + \frac{s^2+1}{s^2+4} = 1 + \frac{1}{s^2} + 1 - \frac{3}{s^2+4}
$$

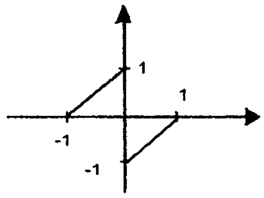
$$
I(s) = 2 + \frac{1}{s^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{s^2+4} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad 2\delta(t) + tu(t) - \frac{3}{2}\sin(2t)u(t) = i(t)
$$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R

16.10.2008

1. (2 boda)

Periodičku funkciju perioda $T = 2$, zadanu slikom na temeljnom periodu, razvijte u Fourierov red.



2. (5 bodova)

Neka je $S(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$ razvoj funkcije $f(x) = x^2, -1 < x < 1$, u Fourierov red.

a) (2b) Pomoću danog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

b) (3b) Pomoću danog razvoja nađite Fourierov red funkcije $f(x) = x^3, -1 < x < 1$. Skicirajte graf dobivenog Fourierovog reda.

3. (3 boda)

Funkciju $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2}x\,, & |x| \le 3 \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala. Pomoću tog prikaza izračunajte integral $\int\limits_0^{\infty} \frac{\cos 3u}{4u^2 - \pi^2}\, du$.

4. (4 boda)

a) (2b) Definirajte original Laplaceove transformacije.

b) (2b) Primjenom Laplaceove transformacije izračunajte $\int\limits_0^{\infty} e^{-2t} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\, dt$.

5. (4 boda)

a) (1b) Definirajte konvoluciju originala i iskažite teorem o konvoluciji.

b) (2b) Odredite original za $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$

c) (1b) Odredite original za $F(s) = \frac{s \cdot e^{-4s}}{(s^2+1)^2}$

6. (4 boda)

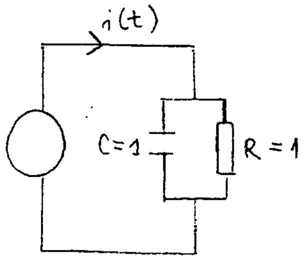
a) (2b) Dokažite teorem o derivaciji originala za prvu derivaciju.

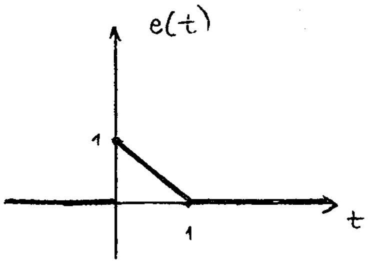
b) (2b) Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'(t) - 5y(t) = e^{1-t}$$
$$y(0) = 3.$$

7. (3 boda)

Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte i skicirajte struju $i(t)$ strujnog kruga zadanog slikom uz priključeni napon $e(t)$.





Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
16.10.2008.

1. (2 boda)
$a_n = 0$
$b_n = 2\int\limits_0^1 (x-1)\sin(n\pi x)dx = ... = -\frac{2}{n\pi}$
$f(x) \sim -\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi x)$

2. (5 bodova)
a) (**2b**) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
b) (**3b**) $f(x) \sim \frac{2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2\pi^2+6}{n^3}\sin n\pi x$

3. (3 boda)
$B(\lambda) = 0$
$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} f(\xi)\cos\lambda\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{3}\cos\frac{\pi}{2}\xi\cos\lambda\xi d\xi = ... = \frac{4\cos 3\lambda}{4\lambda^2-\pi^2}$
$f(x) = \int\limits_0^{\infty}\frac{4\cos 3\lambda}{4\lambda^2-\pi^2}\cos\lambda x dx$
$f(0) = 1 = 4\int\limits_0^{\infty}\frac{4\cos 3\lambda}{4\lambda^2-\pi^2}d\lambda \Rightarrow I = \frac{1}{4}$

4. (4 boda)
a) (**2b**) str 67.
b) (**2b**) $\frac{sh\quad t}{t} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad \int\limits_s^{\infty}\frac{dp}{p^2-1} = \frac{1}{2}ln|\frac{s+1}{s-1}|$
$I = \frac{1}{2}ln|\frac{s+1}{s-1}|$
$F(2) = \frac{1}{2}ln3$

5. (4 boda)
a) (**1b**) str 93.
b) (**2b**) $F(s) = \frac{1}{2}t\sin tu(t)$
c) (**1b**) $F(s) = \frac{1}{2}(t-4)\sin(t-4)u(t-4)$

6. (4 boda)
a) (**2b**) str 76.
b) (**2b**) $y(t) = (3e^{5t} + \frac{e}{6}e^{5t} - \frac{e}{6}e^{-t})u(t)$

7. (3 boda) $i(t) = \delta(t) - t[u(t) - u(t-1)]$

Ponovljeni prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
4.02.2010.

1. (3 boda)
Razvijte u Fourierov red funkciju $f(x) = \dfrac{x}{2}$, $x \in \langle 0, 2\rangle$, perioda $T = 2$.

2. (3 boda)
a) (**1b**) Definirajte Parsevalovu jednakost.
b) (**2b**) Neka je

$$S(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

razvoj funkcije $f(x) = x^2$ definirane na intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$ u Fourierov red. Pomoću danog razvoja i Parsevalove jednakosti izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

3. (5 bodova)
a) (**4b**) Neparna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana je na intervalu $\langle 0, \infty\rangle$ formulom $f(x) = e^{-2x}$. Prikažite funkciju f u obliku Fourierovog integrala.
b) (**1b**) Izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 4}\, dx.$$

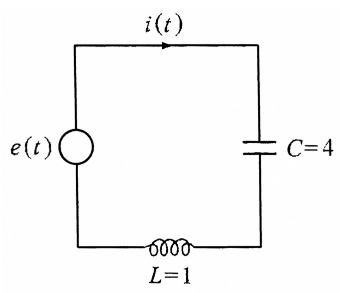
4. (3 boda)
a) (**1b**) Definirajte Laplaceovu transformaciju.
b) (**2b**) Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} t \cos\left(\frac{2t}{3}\right) e^{-2t}\, dt.$$

5. (3 boda)
Odredite sliku Laplaceove transformacije funkcije $f(t) = \begin{cases} \cos t\,, & 0 \le t \le \pi/2, \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$

6. (3 boda)
Odredite original Laplaceove transformacije funkcije $F(s) = \dfrac{s}{s^2 + 6s + 34}$.

7. (5 bodova)
Pomoću Laplaceove transformacije odredite struju $i(t)$ strujnog kruga sa slike uz priključeni napon $\mathrm{e}(t) = e^{-2t}u(t-1)$.



Napomena: Vrijeme pisanja je **1 sat i 30 minuta**.

Rješenja ponovljenog prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
4.02.2010.

1. (3 boda)

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x)}{n}.$$

2. (3 boda)
a) (**1b**) Knjiga, str. 32, Parsevalova jednakost.
b) (**2b**)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

3. (5 bodova)
a) (**4b**)

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin(\lambda x)}{\lambda^2+4}\,d\lambda.$$

b) (**1b**) Uvrstimo $x=1$. Slijedi

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+4}\,dx=\frac{\pi}{2e^2}.$$

4. (3 boda)
a) (**1b**) Knjiga, str. 60.
b) (**2b**)

$$\int_0^{\infty}t\cos\left(\frac{2t}{3}\right)e^{-2t}\,dt=\frac{9}{50}.$$

5. (3 boda)

$$f(t)\quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\quad \frac{s}{s^2+1}+\frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s^2+1}.$$

6. (3 boda)

$$F(s)=\frac{s}{s^2+6s+34}\quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\quad \cos(5t)e^{-3t}u(t)-\frac{3}{5}\sin(5t)e^{-3t}u(t).$$

7. (5 bodova)

$$i(t)=-\frac{8}{17}e^{-2t}u(t-1)+\frac{8}{17}e^{-2}\cos\left(\frac{t-1}{2}\right)u(t-1)+\frac{2}{17}e^{-2}\sin\left(\frac{t-1}{2}\right)u(t-1).$$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
21.10.2009.

1. (4 boda)
Dokažite da je sustav funkcija

$$1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \dots, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x), \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

ortogonalan na intervalu $[-1, 1]$.

2. (4 boda)
a) **(2b)** Razvijte u Fourierov red funkciju zadanu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3} \\ -1 & , \ -\pi < x < -\frac{2\pi}{3}, \ \frac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

b) **(1b)** Nacrtajte graf dobivenog Fourierovog reda.
c) **(1b)** Izračunajte sumu reda

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots.$$

3. (4 boda)
Funkciju $f(x) = e^{-|x|}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala.

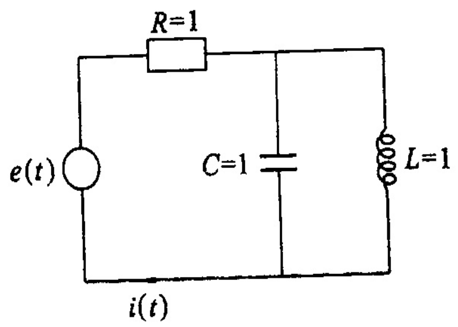
4. (1 bod)
Kada za funkciju $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ kažemo da je eksponencijalog rasta?

5. (4 boda)
a) (**2b**) Izvedite formulu za Laplaceovu transformaciju periodičke funkcije f temeljnog perioda T.
b) (**2b**) Izračunajte Laplaceovu transformaciju funkcije $f(x) = \text{sgn}(\cos x)$.

6. (4 boda)
Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''(t) + y(t) = 2\cos t \cdot g_{[0,\pi]}(t)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

7. (4 boda)
Izračunajte struju $i(t)$ u strujnom krugu sa slike uz početni napon $e(t) = u(t-3)$.



Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
21.10.2009.

1. (4 boda)
Potrebno je pokazati

- $\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \sin(n\pi x) = 0$
- $\int\limits_{-1}^{1} 1 \cdot \cos(n\pi x) = 0$
- $\int\limits_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\sin(m\pi x) = 0$
- $\int\limits_{-1}^{1} \cos(n\pi x)\cos(m\pi x) = 0, m \neq n$
- $\int\limits_{-1}^{1} \sin(n\pi x)\sin(m\pi x) = 0, m \neq n$

2. (4 boda)
a) (**2b**) $S(x) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x - \frac{1}{5}\cos 5x + ...\right)$
c) (**1b**) Suma je jednaka $S(0) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3. (4 boda)
$f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{1+\lambda^2} d\lambda$

4. (1 bod)
Knjiga str 67.

5. (4 boda)
a) (**2b**) Knjiga, str 81.
b) (**2b**) $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2\pi s})}\left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}s} + 2e^{-\frac{3\pi}{2}s} - e^{-2\pi s}\right)$

6. (4 boda)
$y(t) = \sin(t)u(t) + t\sin(t)u(t) + (t-\pi)\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

7. (3 boda) $i(t) = u(t-3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-3)\right)u(t-3)e^{-\frac{1}{2}(t-3)}$

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
21.10.2010.

1. (2 boda)
Odredite temeljni period funkcije

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cos \frac{3n\pi x}{4} + D_n \sin \frac{3n\pi x}{4} \right)$$

2. (4 boda)
Razvojem funkcije $f(x) = |\sin x|$ u Fourierov red izračunajte sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.

3. (4 boda)
a) Prikažite funkciju $f(x) = g_{[-\pi,\pi]}(x)$ pomoću Fourierovog integrala.
b) Skicirajte graf dobivenog prikaza.
c) Izračunajte integral

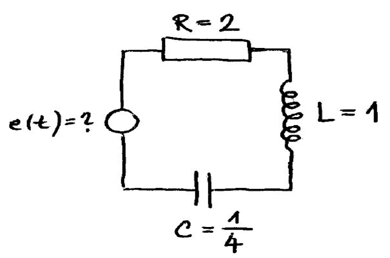
$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \pi\lambda}{\lambda} d\lambda.$$

4. (7 bodova)
Zadana je funkcija $f(t) = t^n \cdot u(t)$.
a) Dokažite da je $f(t)$ original.
b) Pomoću definicije Laplaceove transformacije izračunajte $\mathcal{L}(f(t))$.
c) Korištenjem Teorema o deriviranju slike nađite $\mathcal{L}(f(t))$.
U odgovorima pod b) i c) se pretpostavlja da je poznat Laplaceov transformat funkcije $u(t)$.

5. (4 boda)
Primjenom Laplaceove transformacije riješite diferencijalno - integralnu jednadžbu

$$y'(t) + \int_0^t y(\tau) d\tau = \sin t, \; y(0) = 2.$$

6. (4 boda)
Odredite i skicirajte napon na izvoru u strujnom krugu sa slike ako je jakost struje dana s $i(t) = e^{-t} \left(\cos \sqrt{3}t - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \sqrt{3}t \right)$.



Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
21.10.2010.

1. (2 boda)
$T = \frac{8}{3}$

2. (4 boda)
$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}$

3. (4 boda)
$f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \lambda\pi \cos \lambda\pi}{\lambda} d\lambda$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin \lambda\pi}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2}$

4. (7 bodova)
a) Ispitati sva 3 svojstva iz definicije.
b) Knjiga
c) Knjiga

5. (4 boda)
$y(t) = \left(2\cos t + \frac{1}{2} t \sin t\right) u(t)$

6. (4 boda)
$y(t) = \sin(t)u(t) + t\sin(t)u(t) + (t-\pi)\sin(t-\pi)u(t-\pi)$

6. (4 boda) $e(t) = \delta(t)$

Ponovljeni prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R
28.01.2011.

1. (6 bodova)
a) Razvijte u Fourierov red funkciju $f(x) = |x|$, $-6 < x < 6$.
b) Skicirajte graf dobivenog Fourierovog reda.
c) Koristeći dobiveni razvoj i Parsevalovu jednakost izračunajte sumu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

2. (5 bodova)
a) Je li funkcija $g(x) = 2\cos\frac{x}{2}$ apsolutno integrabilna na $\mathbb{R}$?
b) Razvijte u Fourierov integral funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\frac{x}{2} & , \ x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$$

c) Izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{1-4x^2} dx.$$

3. (3 boda)
Izračunajte integral

$$\int_0^{\infty} e^{-2x} x \sin x dx.$$

4. (4 boda)
Izvedite Teorem o derivaciji originala u Laplaceovoj transformaciji.

5. (3 boda)
Nađite original funkcije

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2+8s+19}.$$

6. (4 boda)
Primjenom Laplaceove transformacije riješite integralnu jednadžbu

$$y(t) = t^2 + \int_0^t y(\tau) d\tau.$$

Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.

Rješenja ponovljenog prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
28.01.2011.

1.
a) $f(x) = 3 - \frac{24}{\pi^2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{6}$

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

2.
a) Nije.

b) $f(x) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{8 \cos \lambda\pi}{\pi(1-4\lambda^2)} \cos(\lambda x)\, dx$

c) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{8 \cos x\pi}{1-4x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

3.
$\frac{4}{25}$

4.
Knjiga

5. (4 boda)
$f(t) = \left(\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\sin\sqrt{3}t\right) e^{-4t} u(t)$

6. (4 boda)
$y(t) = (-2 - 2t + 2e^t)u(t)$

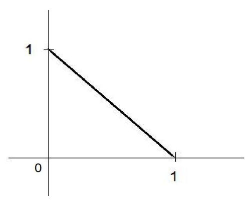
1. međuispit iz Matematike 3R
23.11.2011.

1. **(5 bodova)**
(a)(2 boda) Iskažite Dirichletove uvjete za funkciju f na intervalu $[a, b]$.
(b)(2 boda) Iskažite (bez dokaza) Teorem o konvergenciji Fourierovog reda periodične funkcije s periodom 2π.
(c)(1 bod) Funkcija f zadana sa

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

razvijena je u Fourierov red $S(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.
Odredite $S(2011 \cdot \pi)$.

2. **(5 bodova)**
(a)(3 boda) Parno proširenje funkcije zadane na $(0, 1]$ slikom



razvijte u Fourierov red.
(b)(1 bod) Iskažite Parsevalovu jednakost za periodičnu funkciju perioda T.
(c)(1 bod) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

3. **(5 bodova)**
Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a)(3 boda) Prikažite funkciju $f(x)$ pomoću Fourierovog integrala.
(b)(1 bod) Izračunajte amplitudni spektar funkcije $f(x)$.
(c)(1 bod) Nacrtajte graf dobivenog integrala na čitavoj domeni.

4. **(5 bodova)**
(a)(1 bod) Definirajte Laplaceov transformat funkcije f.
(b)(2 boda) Koristeći definiciju, izračunajte $\mathcal{L}(e^{\alpha t})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Detaljno obrazložite za koje $s \in \mathbb{R}$ integral konvergira.
(c)(2 boda) Koristeći (b) dio zadatka, izvedite Laplaceove transformate funkcija $\mathrm{sh}(\omega t)$ i $\mathrm{ch}(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

5. **(5 bodova)**
(a)(1 bod) Definirajte konvoluciju originala.
(b)(1 bod) Iskažite Teorem o konvoluciji originala.
(c)(3 boda) Riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t),\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2,$$

pri čemu je $f(t)$ proizvoljni original.

6. **(5 bodova)**
Odredite original funkcije

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

7. **(5 bodova)**
(a)(1 bod) Definirajte pojam ekvipotentnosti skupova.
(b)(1 bod) Definirajte prebrojiv skup.
(c)(3 boda) Dokažite da je skup $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2 \cup \mathbb{N}^3$ prebrojiv.

8. **(5 bodova)**
Na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ zadana je relacija

$$\rho = \{(1,1), (1,4), (2,3), (3,3), (4,1), (4,4), (4,5), (5,5)\}.$$

Nadopunite ρ do najmanje moguće relacije ekvivalencije i odredite klase ekvivalencije.

Rješenje 1. međuispita iz Matematike 3R

23.11.2011.g.

1. **(c)** $S(2011 \cdot \pi) = S(\pi) = \frac{0-\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ (točka prekida!)
2. **(a)** parna $\Rightarrow$ $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, $S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \cos((2k+1)\pi x)$
   (c) $\frac{\pi^4}{96}$
3. **(a)** neparna $\Rightarrow A(\lambda) = 0$, $\widetilde{f}(x) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin\lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos\lambda}{\lambda}\right] \sin(\lambda x) d\lambda$
   (b) $am(\lambda) = |B(\lambda)| = \frac{2}{\pi} \left|\frac{\sin\lambda}{\lambda^2} - \frac{\cos\lambda}{\lambda}\right|$
5. **(c)** $Y(s) = F(s) \cdot \frac{1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{s}{(s+1)^2+2^2}$
   $\Rightarrow$ $y(t) = \frac{1}{2} f(t) * (e^{-t}\sin(2t)) + e^{-t}\cos(2t) - \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$

6. $F(s) = e^{-2s} \cdot \frac{1}{(s^2+s+1)(s+1)} =$ ...(rastav na parcijalne razlomke...)$\Rightarrow$
   $f(t) = e^{-(t-2)}u(t-2) - e^{-\frac{1}{2}(t-2)} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2))u(t-2) + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}(t-2)} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}(t-2))u(t-2)$.
7. **(c)** 2. knjižica, Poglavlje 1.4., dokaz Teorema 1.
8. Prvo, $(2,2),(6,6) \in \rho$ zbog refleksivnosti. Sada klase ekvivalencije možemo iščitati iz zadanih elemenata:

   $$[1] = \{1,4,5\},\ [2] = \{2,3\},\ [6] = \{6\}.$$

   U ρ treba dodati najmanje 6 elemenata: $(2,2),(6,6),(5,1),(1,5),(5,4),(3,2)$.

Prvi međuispit iz Matematike 3R
19.11.2012.

1. (5 bodova)
a) Navedite Dirichletove uvjete.
b) Zadovoljava li funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{1-x^2} & , \text{inače} \end{cases}$$

Dirichletove uvjete na intervalu $[0, \pi]$? Tvrdnju detaljno obrazložite.
c) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.

2. (5 bodova)
Zadana je periodična funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) = |x - 2|, \quad \text{za } -1 \leq x < 1.$$

Pomoću razvoja funkcije f u Fourierov red izračunajte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}.$$

3. (5 bodova)
a) Definirajte Fourierov integral funkcije f i njezin sinusni spektar.
b) Pomoću prikaza funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & -1 < x < 0 \\ 1\,, & 0 < x < 1 \\ 0\,, & \text{inače} \end{cases}$$

u obliku Fourierovog integrala, izračunajte

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\, dx.$$

4. (5 bodova)
Iskažite i dokažite teorem o Laplaceovoj transformaciji periodičke funkcije.

OKRENITE!

5. (5 bodova)
Ispitajte za koje vrijednosti realnog broja α nepravi integral

$$\int_0^{\infty} e^{\alpha t} t \sin 3t \, \mathrm{d}t$$

konvergira, te ga za dotične vrijednosti od α izračunajte.

6. (5 bodova)
Pomoću Laplaceove transformacije riješite jednadžbu

$$f'(t) - 4\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u + 6\int_0^t e^{t-u} f(u)\,\mathrm{d}u = 0, \quad f(0) = 1.$$

7. (5 bodova)
a) Kada kažemo da su dva skupa ekvipotentna?
b) Dokažite da su $\mathbb{R}$ i $A = \{r \in \mathbb{R} \,:\, r > 1\}$ ekvipotentni.
c) Dokažite da su $\mathbb{N}$ i $B = \{z \in \mathbb{Z} \,:\, |z| > 2\}$ ekvipotentni.

8. (5 bodova)
Neka je $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Neka su ρ_5 i ρ_7 relacije ekvivalencije na X definirane na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x\,\rho_5\,y \;&\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = 5k, \; k \in \mathbb{Z}, \\ x\,\rho_7\,y \;&\Leftrightarrow\; x^2 - y^2 = 7k, \; k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Pokažite da je $|X/\rho_5| = |X/\rho_7|$.

Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 2h.

Međuispit iz MAT3R 13h - RJEŠENJA

19.11.2012.

1. b) Ne zadovoljava. U 1 ima prekid koji nije prve vrste.

2. $S(x) = 2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n\pi x$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} = -\frac{\pi}{4}$.

3. $f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\lambda}{2}}{\lambda} \sin \lambda x \, \mathrm{d}\lambda$, $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x} \, dx = \frac{\pi}{4}$.

5. Konvergira za $\alpha > 0$. $\int\limits_0^{\infty} e^{\alpha t} t \sin 3t \, \mathrm{d}t = -\frac{6\alpha}{(\alpha^2+9)^2}$.

6. $f(t) = \frac{1}{7} u(t) \left(2e^{-t} + 5e^t \cos \sqrt{3}t - \sqrt{3}e^t \sin \sqrt{3}t\right)$.

7. b) Primjer bijekcije $f : \mathbb{R} \to A$, $f(x) = 1 + e^x$.
c) Primjer bijekcije $f : \mathbb{N} \to B$, $f(2k) = k + 2, f(2k-1) = -k - 2$.

8. $X/\rho_5 = \{[1]_{\rho_5}, [2]_{\rho_5}, [5]_{\rho_5}\}$, $X/\rho_7 = \{[1]_{\rho_7}, [2]_{\rho_7}, [3]_{\rho_7}\}$.