DZ2. Koji od sljedećih f-ja injekcija, surjekcija, bijekcija

a) $f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}$ $f(k) = k^2 + 1$

$\Rightarrow$ nije injekcija jer npr. $f(2) = f(-2) = 5$ $\Rightarrow$ ako postoje 2 broja koja daju ista vrijednost onda f-ja nije injekcija

* da je bilo zadano $f: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ onda bi f-ja bila injekcija

$\Rightarrow$ surjekcija - ako se mogu dobiti svi brojevi iz kodomene

tj $f: \mathbb{Z} \Rightarrow \mathbb{N}$. Ovo nije surjekcija jer ne postoji $\nexists k \in \mathbb{Z}$ koji daje $f(k) = 3$

$\Rightarrow$ nije bijekcija (injekcija + surjekcija

b) $g: \mathbb{Z} \Rightarrow 2\mathbb{Z} \Rightarrow \{...-4, -2, 0, 2, 4 ...\}$

$$g(k) = \begin{cases} 4k, & k > 0 \Rightarrow 4, 8, 12, 16 \\ 4|k| + 2, & k \leq 0 \Rightarrow 2, 6, 10, 14 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f-ja je injekcija, jer za svaki $k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(k_1) \neq f(k_2)$

$\Rightarrow$ f-ja nije surjekcija, jer ne možemo dobiti 0 i neg. br.

* da je bilo zadano $g: \mathbb{Z} \Rightarrow 2\mathbb{N}$ onda bi f-ja bila surjekcija

** paziti na NULU u zadacima!

$\Rightarrow$ nije bijekcija, jer nije surjekcija

c) $h: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{Z}$

$$h(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & k \text{ paran} \Rightarrow 1, 2, 3, 4, 5 \\ \frac{-k-1}{2}, & k \text{ neparan} \Rightarrow 0, -2, -1, -3, -4, -5 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f-ja je injekcija i surjekcija = bijekcija

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q} \Rightarrow$ prebrojivi skupovi, $\mathbb{R} \Rightarrow$ neprebrojiv

Kartezijev skup prebrojivih skupova je prebrojiv

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow$ prebrojiv

$\mathbb{N} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \Rightarrow$ ako je samo 1 skup neprebrojiv tipa $\mathbb{R}$ onda kartezijev skup nije prebrojiv

DZ 6. Skup polinoma ne većeg od 2 s koef iz skupa $\mathbb{Q}$

$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow (a,b,c) \Rightarrow$ svaki polinom je određen koef.

$a,b,c \in \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ prebrojiv i kartezijev produkt prebrojiv

npr. Skup svih pravaca kroz ishodište s realnim koef. smjera

$y = kx \Rightarrow k \in \mathbb{R}$ koji nije prebrojiv, pa ni skup nije prebrojiv

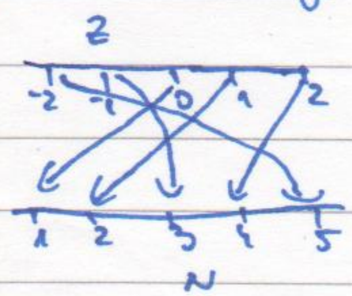
ili  elipsa $\left.\begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\}$ nije prebrojiv

Dva skupa su ekvipotentna, ako postoji bijekcija između njih

$A \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B$ $\quad |A| = |B| \Rightarrow$ isti broj elemenata

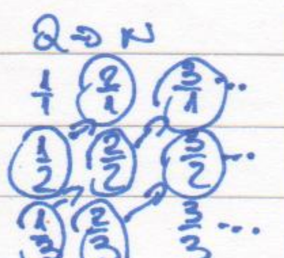
$|\mathbb{N}| = $ alef 0

DZ 7. Dokaži da je skup $\mathbb{Q}$ ekvipotentan parnim cijelim brojevima



$$f(k) = \begin{cases} 2k, & k \geq 0 \\ 2|k|+1, & k \leq 0 \end{cases}$$

$\mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{N}$



ili OSNOVNI TEOREM ARITMETIKE: svaki prirodni broj se može rastaviti na proste faktore

$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$. $\quad (24 = 2^3 \cdot 3^1)$

$\mathbb{Q} = p \frac{m}{n}$ $\quad m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$
predznak

zbog parnosti

$f(p,m,n) = ② \cdot 2^{p+1} \cdot 3^m \cdot 5^n$

$= 2^{p+2} \cdot 3^m \cdot 5^n$

ili $= 2 p_1 p_2 p_3$, $p_1, p_2, p_3 \Rightarrow$ bilo koji prosti broj

DZ 5. $\quad \mathbb{Z} \Rightarrow S \quad S = \{3n+1, n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 4, 7, 10 \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

$1 \quad 4 \quad 7 \quad 10 \quad 13 \quad 16$

$$f(k) = \begin{cases} 6k-2, & k > 0 \\ 6|k|+1, & k \leq 0 \end{cases}$$