

Ispit iz Matematike 3R
03.09.2014.

1. **(5 bodova)** Funkciju

$$f(x) = 2 - 2|x|, x \in [-1, 1]$$

razvijte u Fourierov red. Skicirajte dobiveni red i obrazložite poklapa li se red u svim točkama s periodičkim proširenjem zadane funkcije.

2. **(5 bodova)** Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ e^x, & x < 0. \end{cases}$$

- (a) Ispitajte parnost funkcije.
- (b) Odredite Fourierov integral funkcije.
- (c) Koristeći Fourierov integral, izračunajte integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2} dt$$

3. **(5 bodova)**

- (a) Iskažite i dokažite formulu za Laplaceov transformat periodičke funkcije perioda $T > 0$.
- (b) Odredite parametar $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je Laplaceov transformat periodičke funkcije oblika $f(t) = \alpha t$ i temeljnog perioda 2 jednak

$$F(s) = \frac{2 - 2e^{-2s}(1 + 2s)}{s^2(1 - e^{-2s})}$$

4. **(5 bodova)** Primjenom Laplaceove transformacije odredite $y(t)$ u sustavu diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{cases} x' = -2y + x + e^t, \\ y' = x + 3y, \end{cases}$$

uz početne uvjete $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

5. **(5 bodova)** Na skupu kvadratnih matrica reda 3 s elementima iz skupa $\{0, 1, \dots, 98, 99\}$, $\mathbf{M}_{3,3}(\{0, 1, \dots, 98, 99\})$ definirana je relacija ρ

$A \rho B$, ako za svaki par odgovarajućih elemenata vrijedi $a_{ij} - b_{ij} \equiv 0 \pmod{2}$.

Detaljnije obrazložite je li ρ relacija ekvivalencije. Ako jest, odredite kardinalni broj kvocijentnoga skupa $\mathbf{M}_{3,3}(\{0, 1, \dots, 98, 99\})/\rho$, te kardinalni broj svake pojedine klase.

6. **(5 bodova)**

- (a) Iskažite i dokažite poopćeno Dirichletovo načelo.
- (b) U nekoj slastičarni sladoledi se slažu od po 3 kuglice različitih okusa. Na raspolaganju je ukupno 7 okusa. Koliko minimalno ljudi treba kupiti sladoled u slastičarni da bismo sa sigurnošću mogli tvrditi da među njima postoje bar 3 čovjeka sa istim sladoledom?

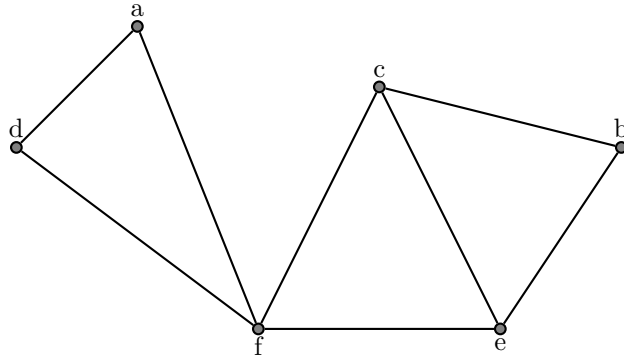
7. **(5 bodova)**

- (a) Precizno iskažite i dokažite formula za broj svih surjekcija sa skupa A na skup B .
- (b) Odredite broj surjekcija sa 3-članog skupa na 2-člani skup.
- (c) Odredite broj surjekcija sa 2-članog skupa na 4-člani skup.

8. (5 bodova) Od znamenki 1,2,3,4,5,6,7 formiramo n -torke sa svojstvom da ispred znamenke 1 može biti bilo koja znamenka, a ispred ostalih znamenki mora biti znamenka 1. Napišite rekursivnu relaciju za broj takvih n -torki, $n \geq 1$, te odredite njihov broj.

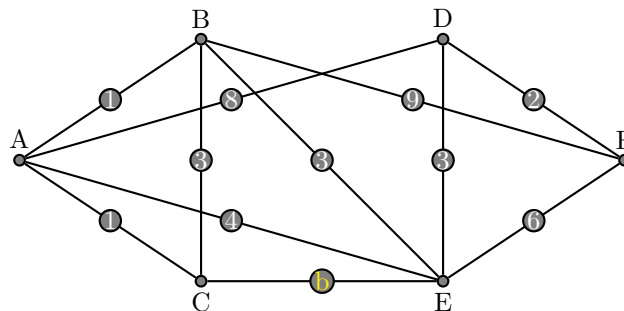
9. (5 bodova)

- (a) Precizno definirajte eulerovski i hamiltonovski graf.
 (b) Zadan je graf sa slike:



Dokažite da brid af ne može biti dio hamiltonovskog ciklusa. Koristeći tu činjenicu, dokažite da zadani graf nije hamiltonovski. Je li dodavanjem brida ab graf postaje hamiltonovski? Obrazložite.

10. (5 bodova) Duljine putovanja (u satima) između pojedinih mjesta dana su težinskim grafom sa slike:



U ovisnosti o parametru b nađite najkraći put (i njegovu duljinu) koji povezuje mjesta A i F . Algoritam obavezno provedite.