

## Drugi međuispit iz Matematike 3R

02.12.2010

1. (3 boda) Dokažite da su skupovi  $\mathbb{N}$  i  $\mathbb{N}^7$  ekvipotentni.
2. (3 boda) Nad skupom  $\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{10} = \mathbb{Z}^{10}$  svih uređenih desetorki cijelih brojeva definiramo relaciju  $\rho$  na način:  $(a_1, \dots, a_{10}) \rho (b_1, \dots, b_{10})$  ako je  $b_i - a_i$  oblika  $2c_i$ ,  $c_i \in \mathbb{Z}$ , za svaki  $i = 1, \dots, 10$ .
  - (a) (2 boda) Dokažite da je  $\rho$  relacija ekvivalencije.
  - (b) (1 bod) Odredite kardinalni broj kvocijentnog skupa  $\mathbb{Z}^{10}/\rho$ .
3. (3 boda) Koliko se četveroslovnih riječi može sastaviti od 30 slova hrvatske abecede ako se svaki suglasnik smije pojaviti najviše jednom?
4. (4 boda)
  - (a) (1 bod) Iskažite Multinomni teorem.
  - (b) (1 bod) Dokažite Multinomni teorem.
  - (c) (2 boda) Koliko članova u izrazu  $(x_1 + \dots + x_7)^7$  ima koeficijent djeljiv sa 7?

5. (3 boda) Nađite broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 20$$

uz uvjet  $x_k \geq -k$ .

6. (3 boda) U vrtiću je 38 djece, 19 od njih voli bijele bombone, 25 žute, a 24 crvene. Ako 7 djece voli sve bombone koliko djece voli točno 2 vrste (boje) bombona?
7. (3 boda) Odredite funkciju izvodnicu za niz

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{ako je } n = 2k - 1, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{ako je } n = 2k, k \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

8. (3 boda)
  - (a) (1 bod) Iskažite poopćeno Dirichletovo načelo.
  - (b) (2 boda) U jednakostraničan trokut stranice duljine 100 rasporedimo 101 točku. Dokažite da postoji 5 točaka koje se nalaze u krugu polumjera 12.

**Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.**

## Rješenja drugog međuispita iz Matematike 3R

02.12.2010.

### 1. (3 boda)

Konstruirati konkretnu funkciju (npr. kodiranje), pa pokazati ili da je bijekcija ili se pozvati na primjedb 1. knjiga, str. 9.

### 2. (3 boda)

a) Ispitati refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost.

b)  $2^{10}$ .

### 3. (3 boda)

$$25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 + 5 \binom{4}{1} \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 + 5^2 \binom{4}{2} \cdot 25 \cdot 24 + 5^3 \binom{4}{3} \cdot 25 + 5^4$$

### 4. (4 boda)

a) Knjiga, str. 37

b)  $\binom{7+7-1}{7} - 7$

### 5. (3 boda)

$$\binom{41+7-1}{7-1}$$

### 6. (3 boda)

$$|B \cap Z| - |B \cap Z \cap C| + |B \cap C| - |B \cap Z \cap C| + |Z \cap C| - |B \cap Z \cap C| = 16$$

$$7. (3 \text{ boda}) \quad f(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$$

### 8. (3 boda)

a) Knjiga str. 58

b) Podijeliti trokut na 25 jednakostraničnih trokuta stranice 20. Prema Dirichletovom načelu postoji trokut u kojem je bar 5 točaka, upisan je u kružnicu radijusa 12.