

7. CJELENA

Izgovori zadatka

- dokazati da su skupovi kompozitorni
- nati lijskijis

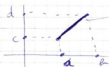
7. PM1 2006.

2.7

Dokazati da su 2 skupa kompozitorni  
Dva skupa - polnopravni  
- neprazni

a) da li su intervali kompozitorni?  $[a, a]$  i  $[c, d]$

9. str., prim 2



treba nati jed. prava

b) 9. str., prim 2 i)

Dokazati da  $(-1, 1)$  i  $\mathbb{R}$  kompozitorni.

Treba pronaći funkciju. thx

Ne treba dokazivati, podrazumijeva se  
da je lijskijis

4. DZ ZAD. 4

neprazni

Dokazati da je skup prirodni brojeva.

Ne možemo koristiti zatvoreni luk

D:  
domena

2, 5, 8, 11, ...

prvi element 5  
drugi element 2

K  
kodomena

100, 107, 112, ...

predikamo 2 u 100, 5 u 107

prvi element u prvog niza u prvi  
element drugog niza, ..

$f: D \rightarrow K$

$$f(n) = 100 + \frac{n-2}{3}$$

## 2. RELACIJE

- dokazati da je nešto relacija ekvivalencije

PMI 2006

$$X = A \times A = \{ (0,0), (0,1) \dots (7,0) \dots \} \quad \begin{matrix} 4 \times 4 \\ \text{elementi} \end{matrix}$$

$$A = \{0,1,2,3\}$$

$$(a,b) \mid (c,d) \quad a+b = c+d$$

npr.

$$(2,2) \mid (1,3) \quad 2+2 = 1+3$$

EKVIVALENCIJA - dokazati:

1. REFLEKSIVNOST

$$(x,y) \mid (x,y)$$

$$x+y = x+y \quad \checkmark$$

2. SIMETRIČNOST

$$(x_1, y_1) \mid (x_2, y_2) \Rightarrow (x_2, y_2) \mid (x_1, y_1)$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \Rightarrow x_2 + y_2 = x_1 + y_1 \quad \checkmark$$

3. TRANZITIVNOST

$$(x_1, y_1) \mid (x_2, y_2) \wedge (x_2, y_2) \mid (x_3, y_3) \\ \Rightarrow (x_1, y_1) \mid (x_3, y_3)$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \wedge x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \\ \Rightarrow x_1 + y_1 = x_3 + y_3 \quad \checkmark$$

"PROVJERI je li relacija ekvivalencija."  $\Rightarrow$   
ne mora li relacija biti

"DOKAŽI je li relacija ekv. ..."  
 $\Rightarrow$  uglavno jest relacija

a)  $[ (2,2) ] = \{ (2,2), (1,3), (3,1) \}$

tri elementa u razredu, ne razlikovani i  
taj element!

c) Koliko elemenata ima KVOCIJENTNI GRUPA?

$$[0,0]$$

$$[1,2]$$

$$[2,3]$$

$$[0,1]$$

$$[2,2]$$

$$[3,3]$$

$$[1,1]$$

~~$$[1,3]$$~~

$$|X/f| = 7$$

### 3. KOMBINATORIKA

**5. DZ** ZAD. 12

U liftu je 8 ljudi, 5 kabina.  
Na koliko načina mogu ići jedna kabinu  
da na svakom katu bude 1 osoba.

"BAREM 1 OSOBA"



računamo suprotno

$A_i = \{ \text{na } i\text{-tom katu nitko nije išao} \}$   
u  $i$ -tu  $y$  se nitko nije prebacao

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4 \cap \bar{A}_5| = ? \quad \text{FV!}$$

$$= X - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_m \cap A_n|$$

=

□ □ □ □ □ □ □ □

$$5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 = 5^8$$

VARIJACIJE SA PONAVLJANJEM

↓  
na koliko načina mogu ići jedna kabinu

OPREZ! - ~~ne~~ ~~ne~~ bolje ne gledati na kabinama, nije  $8^5$ !

VEĆI BROJ

MANJI BROJ

unijet se fibonacijski elementi iz polarnog skupa

$A_1 =$  na 1. katu nġo nje vna

□ □ □ □ □ □ □ □

$$A_1 = 4 \ 4 \ 4 \ 4 \ \dots = 4^8 \quad \text{na vna nġo m 4 katu n}$$

$$A_1 \cap A_2 = 3 \ 3 \ 3 \ \dots = 3^8 \quad \text{na nġo vna m 1. u 2. katu}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = 2 \ 2 \ \dots = 2^8$$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \dots = 1^8$$

odolirna: 1 kat od 5 katu  
1 element od 5 elementu

$$= 5^8 - \underbrace{\binom{5}{1} 4^8}_{\sum |A_i|} + \binom{5}{2} 3^8 - \binom{5}{3} 2^8 + \binom{5}{4} 1^8 - \binom{5}{5} \cdot 0$$

Na nġo u vna nġo nġo formula:

$$\text{Sur}(m, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

5.DZ

ZAD. 6

70 salunka

20 knjižica

na 6 djece

bilo da znaka djele dolije barom 7 knjižica

KRUŠKE su iste, LJUDI, DECA nisu isti!  
(ne razlikujemo) (razlikujemo)

znaka djeteta, djece 7 knjižica odmah  
na početku, ostane ih 74, i to  
onda djetetu

komunizacija na razlikovanje

$$\binom{74+6-1}{74} \cdot \binom{70+6-1}{70}$$

74 putu moramo odabrati nešto,  
to je linija, dalje dolje  
više puta

# FUNKCIE IZVODNICE

5.02

24.02.20

$$a_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

korist na parcijalne razlomke:

$$\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$2n+3 = A(n+2) + B(n+1)$$

$$n = -2 \quad -1 = -B \quad B = 1$$

$$n = -1 \quad 1 = A \quad A = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \bigg| \int_0^x dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-x| \quad \bigg| : x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{-\ln|1-x|}{x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \bigg| \cdot x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \quad \bigg| \cdot \int_0^x dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx$$





# PRIMJENA FUNKCIJA IZVODNICE NA KOMBINATORIKU

PMI 2006. (mala promijenjen)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 60$$

$$x \in \mathbb{N}$$

$$x_3 \geq 14$$

ne nije liči 0.

1. korak (umjet)

ne mijenjamo ispravi nejednakost, moramo napraviti jednakost

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 61$$

[kad bi pisali  $x \in \mathbb{N}_0$   
 $x$  može biti nula  
 onda bi bilo  $\dots = 60$ ]

1. NAČIN

2. korak - namjestimo da ne varijable kreću od nule

$$x_1 = y_1 + 1$$

$$x_1 = y_1 + 1$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 = y_3 + 14$$

$$x_3 = y_3 + 14$$

$$x_4 = y_4 + 1$$

$$x_5 = y_5 + 1$$

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 14) + (y_4 + 1) + (y_5 + 1) = 61$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 43$$

3. korak

$$\binom{43 + 5 - 1}{43}$$

$$y \in \mathbb{N}_0$$

mi  $y$  kreću od nule  
 kombinacije sa ponavljanjem

2. NAČIN

$x_1, x_2, x_4, x_5$  imaju isti  
faktorijski deo

$$(x^1 + x^2 + x^3 + \dots)^4 (x^{14} + x^{15} + x^{16} + \dots)$$

$x_3$  kreće od 14

$$= x^4 (x^0 + x^1 + x^2 + \dots)^4 x^{14} (1 + x^1 + x^2 + \dots)$$

ne treba luti oglašiti se  
donošenje na 67  
ovim skupu razlika nije da  
može dobiti negativne \* on je malo  
li više

$$= x^{18} \left( \frac{1}{1-x} \right)^5 = x^{18} (1-x)^{-5}$$

$$(1+x)^d = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{d}{k} x^k$$

$$(1-x)^d = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{d}{k} x^k$$

$$= x^{18} \left[ 1 - \binom{-5}{1} x^1 + \binom{-5}{2} x^2 - \binom{-5}{3} x^3 + \dots \right]$$

$$x^{18} \cdot \underbrace{x^{43}} = x^{61}$$

broj uz  $x^{43}$ :

$$- \binom{-5}{43} = (-1)^{43} \binom{5+43-1}{43}$$



# Marketing & Technology Summit

bilješke

## Prebrojivost i skupovi

- nadi bijekciju

- dokazi da su ekvipotentni skupovi (ako postoji bijekcija između njih skupovi su ili prebrojivi ili ne)

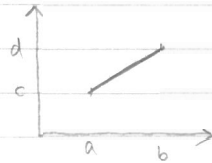
PMI 2006.

1) b)  $[a, b]$

$[c, d]$

- oni su neprebrojivi

ii) 9. str. pr. 2



funkcija: jednačina pravca kroz dvije točke

i) dokazi da su skupovi  $(-1, 1)$  i  $\mathbb{R}$  ekvipotentni

funkcija koja povezuje dva gornja skupa  $f(x) = \tanh x$

4.DZ) 4.)  $\underbrace{2, 5, 8, 11, \dots}_K$  ekvipotentno skupu  $n \geq 100$   
 $\underbrace{100, 101, 102, 103, \dots}_K$

$$f(n) = 100 + \frac{n-2}{2}$$

$$f: D \rightarrow K$$

PMI 2006) 2.) a)  $X = A \times A = \{(0,0) (0,1) (0,2) (0,3) (1,0) (1,1) \dots\}$  16 elemenata

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$(a,b) f(c,d) \quad a+b = c+d$$

$$(2,2) f(1,3)$$

dokaz da je relacija ekvivalencija:

a) refleksivnost:  $(x,y) f(x,y) \Rightarrow x+y = x+y$

b) simetričnost:  $(x_1,y_1) f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_2,y_2) f(x_1,y_1)$

$$x_1+y_1 = x_2+y_2 \Rightarrow x_2+y_2 = x_1+y_1$$

c) tranzitivnost:  $(x_1,y_1) f(x_2,y_2) \wedge (x_2,y_2) f(x_3,y_3) \Rightarrow (x_1,y_1) f(x_3,y_3)$

$$x_1+y_1 = x_2+y_2 \quad x_2+y_2 = x_3+y_3 \Rightarrow x_1+y_1 = x_3+y_3$$

b) nadi sve elemente razreda  $[2,2]^{21} = \{(2,4) (1,3) (3,1)\}$

c) koliko el. ima kvocijentalni skup

$$\text{razredi: } [0,0] = (0,0)$$

$$[0,1] = (1,1) (2,0) (0,2)$$

$$[1,1] = (1,1)$$

$$[1,2] = (1,2) (2,1) (3,0) (0,3)$$

$$[2,2] = (2,2) (3,1) (1,3)$$

$$[2,3] = (2,3) (3,2)$$

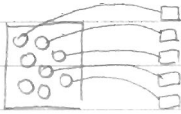
$$[3,3] = (3,3)$$

$$|X/\rho| = 7$$

# Marketing & Technology Summit

bilješke

5.D2) 2.) U lift je ušlo 8 ljudi. Imamo 5 katova  
Na koliko načina mogu ljudi izaći, a da na svakom katu izađe  
bar jedan čovjek?



$A_i$  - na  $i$ -tom katu nije nitko izašao  
 $i = 1, 2, 3, 4, 5$

$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5} = ?$$

koristi se PNC b)

$$|X| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|$$

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

$$X: 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots$$

- može se dogoditi da svi izađu na istom katu  
 $= 5^8$

$$A_1: 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots$$

- na  $i$ -tom katu nije nitko izašao  
 $= 4^8$

$$A_1 \cap A_2: 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \dots$$

- na prva dva nitko nije izašao  
 $= 3^8$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3: 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots$$

- na prva tri nitko nije izašao  
 $= 2^8$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4: 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots$$

- na prva četiri nije nitko izašao  $= 1^8$

$$= 5^8 - \binom{5}{1} \cdot 4^8 + \binom{5}{2} \cdot 3^8 - \binom{5}{3} \cdot 2^8 + \binom{5}{4} \cdot 1^8 - 0$$

5. DZ) 6.) 10 jabuka, 20 krušaka, 6 djece

svako dijete barem jednu krušku  $\rightarrow$  ostaje 14 krušaka

$$\binom{14+6-1}{14} = \binom{19}{14} = \binom{19}{5}$$

$$\binom{10+6-1}{10} = \binom{15}{10} = \binom{15}{5}$$

$$R_j: \binom{19}{5} \cdot \binom{15}{5}$$

# Marketing & Technology Summit

bilješke

## FUNKCIJE IZVODNICE

- naći funkciju izvodnicu } dva tipa zadatka koji bi mogli doći  
- primjena

$$5.DZ) 20.) a_n = \frac{2n+3}{n^2+3n+2} = \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$An+2A+Bn+B=2n+3$$

$$n=-1 \Rightarrow A=1$$

$$-A+2A-B+B=-2+3$$

$$n=-2 \Rightarrow -B=-1$$

$$B=1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2} x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad | \int dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln|1-x| \quad | :x$$

$$\text{prva suma: } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\ln|1-x|}{x}$$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x} \quad | \cdot x$$

$$\sum x^{n+1} = \frac{x}{1-x} \quad | \int dx \quad - \int \frac{(1-x+1)}{1-x} dx = - \int dx - \int \frac{dx}{1-x}$$

$$\sum \frac{x^{n+2}}{n+2} = -x - \ln|1-x| \quad | :x^2 = -x - \ln|1-x|$$

$$\text{druga suma: } \sum \frac{x^n}{n+2} = \frac{-x - \ln|1-x|}{x^2}$$

$$R): f(x) = -\frac{\ln|1-x|}{x} - \frac{x + \ln|1-x|}{x^2}$$



PMI 2006.)

Koliko rješenja ima nejednadžba?

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 60 \quad x_i \in \mathbb{N}$$

$$x_3 \geq 14$$

korak 1)  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 61$

korak 2)  $y_1 = x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = y_1 + 1$  (svaku varijablu namjestiti da kreće od 0)

$$y_2 = x_2 - 1 \Rightarrow x_2 = y_2 + 1$$

$$y_3 = x_3 - 14 \Rightarrow x_3 = y_3 + 14$$

$\vdots$

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 14 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 61$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 43 \quad y_i \in \mathbb{N}$$

$$\binom{43+5+1}{43} = \binom{49}{43} = \binom{49}{6}$$

2. NAČIN

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 61$$

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^4 (x^{14} + x^{15} + x^{16} + \dots)$$

$$x^4 (1 + x + x^2 + \dots)^4 \cdot x^{14} (1 + x + x^2 + \dots) = x^{18} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^5$$

$$= x^{18} \left( \frac{1}{1-x} \right)^5 = x^{18} (1-x)^{-5}$$

$$(1-x)^{-5} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-5}{k} x^k$$

$$= x^{18} \left[ 1 - \binom{-5}{1} x + \binom{-5}{2} x^2 - \binom{-5}{3} x^3 + \dots \right]$$

$$= x^{18} \cdot \left[ -\binom{5}{43} x^{43} = -x^{61} \binom{5}{43} \right]$$

$$\hookrightarrow R_J: -\binom{5}{43}$$

## Marketing & Technology Summit

*bilješke*

PMI 2006.) 3.) brojeva manjih od 1000000 sa svim različitim znamenkama

$$R: 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 + 9 \cdot 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 + 9$$

4.) vrhovi: 8 zelenih, 10 žutih, 12 crvenih  
na koliko načina spojiti vrhove različitih boja.

$$R: 8 \cdot 10 + 8 \cdot 12 + 10 \cdot 12$$