Mat 3R

SAŽETAK I POJAŠNJENJA ZADATAKA 2. CIKLUSA

2010/11

by Soudny & gh0c

RELACIJE EKVIVALENCIJE

Dakle, idemo prvo krenut sa relacijama jer ako otvorite međuispite prošlih godina vidit ćete redovito jedan zadatak sa relacijom ekvivalencije. Nije to ništa teško, čista šablona sa malom dozom razmišljanja, tako da probajte se ne zeznut na razmišljanju. ☺

Kažu nam definicije:

Za binarnu relaciju ρ na X kažemo da je :

refleksivna ako vrijedi:

$$(\forall x \in X)\ x\ \rho\ x$$

simetrična ako vrijedi:

$$(\forall x, y \in X)\ x\ \rho\ y \Longrightarrow y\ \rho\ x$$

tranzitivna ako vrijedi:

$$(\forall x, y, z \in X)\ x\ \rho\ y \land y\ \rho\ z \Longrightarrow x\ \rho\ z$$

Binarna relacija $\rho \subseteq X \times X$ zove se **relacija ekvivalencije** ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

PRIMJER 1

NA SKUPU $X = A \times A$, GDJE JE $A = \{0, 1, 2, 3\}$ ZADANA JE RELACIJA ρ SA $(A, B)\ \rho\ (C, D)$ ONDA I SAMO ONDA AKO JE $A + B = C + D$.

DOKAŽI DA JE ρ RELACIJA EKVICALENCIJE
NAĐI SVE ELEMENTE RAZREDA $[(2, 2)]$
KOLIKO ELEMENATA IMA KVOCIJENTNI SKUP X/ρ?

Prvo i osnovno odrađujemo onaj dio šablone o kojem sam pričao, moramo dokazat relaciju ekvivalencije ρ , a to napravimo preko tri koraka: dokažemo **refleksivnost**, **simetričnost** i **tranzitivnost**. Pa krenimo sa prvim:

i) REFLEKSIVNOST
Ovdje moramo dokazati da je relacija refleksivna tj. da vrijedi uvjet zadatka ako relaciju uspoređujemo sa samom sobom. In lack of better words, ovako bi to u praksi izgledalo:

$$(x, y)\rho(x, y)$$

To će vrijediti ukoliko vrijedi $x + y = x + y$, a to zdravom logikom vrijedi. To je to za refleksivnost, podvucite, stavite kvačice, dajte do znanja da je to to jer iako je nešto sto se u principu ne treba dokazivat i stvar je zdravog razuma, oni inzistiraju na tom pa nemojte lagano izgubit bodove.

ii) SIMETRIČNOST
Svi znate što je simetrija, gledamo da vrijedi slijedeće:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2)\ i\ (x_2, y_2)\rho(x_1, y_1)$$

A to će vrijediti ako je $x_1 + y_1 = x_2 + y_2;\ te\ x_2 + y_2 = x_1 + y_1$, što je isto tako točno pa idemo dalje.

iii) TRANZITIVNOST

Tranzitivnost vrijedi u slučaju ako pomoću 2 relacije ekvivalencije mozemo zaključiti da su i ostale 2 relacije ekvivalentne. U praksi to znači ovo:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2)\ i\ (x_2, y_2)\rho(x_3, y_3)$$

Te iz toga moramo zaključiti slijedeće:

$$(x_1, y_1)\rho(x_3, y_3)$$

A to ćemo lako zaključiti ako idemo po uvijetima, dakle $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, te $x_2 + y_2 = x_3 + y_3$ a samim tim je i $x_1 + y_1 = x_3 + y_3$.

Nadam se da razumijete jer je ovo korak koji nosi samo jedan bod ali je koristan za shvaćanje onog šta dalje ide. I da, nemojte uzimati zdravo za gotovo da će uvijek biti valjana relacija ekvivalencije jer je sada na ispitu ove godine (2010/11) bilo tako da nema ekvivalencije. ☺

Dalje je stvar razmišljanja i to ne pretjeranog, ali i dalje se mora razmišljati. ☹

Prvo i osnovno, moramo razjasniti šta nam sve postoji u ovoj fazi zadatka – to su razredi ekvivalencije te kvocijentni skup, i sad čisto da znate kad vas pita u zadatku sta je to X/ρ – to je kvocijentni skup, to je skup svih razreda koji se pojavljuju. E sad, šta su to razredi - to su načini na koje možemo grupirati relacije za koje vrijedi ekvivalencija. Kasnije ćete na primjeru točno vidjeti što to točno znači, zasad neka ostane na tom. Isto tako, mogu vas tražiti i kardinalni broj kvocijentnog skupa ili kardinalni broj nekog razreda, a to nije ništa drugo nego običan broj koliko elemenata postoji. Dakle, ako pita kardinalni broj nekog razreda, ispišete elemente tog razreda, pobrojite i to je rješenje .☺

Isto tako, za kardinalni broj kvocijentnog skupa (btw označava se sa $|\boldsymbol{X}/\boldsymbol{\rho}\ |$) prebrojite koliko razreda ima i to napišete ko rješenje. To je to, možemo dalje na zadatak.

Iako ide b) pa c), ja bi rađe rješio c pa b dio zadatka jer tako i tako moramo ispisati grupe, a čisto radi provjere i utvrđivanja ovog šta smo naučili idemo ispisati sve grupe i sve njezine elemente. Pa započnimo:

RAZREDI

Za početak ćemo staviti razred $[0,0]$ što znači da nam je $x = 0$ i $y = 0$ te gledamo kojom kombinacijom brojeva možemo dobiti $x + y = 0 + 0$, a s obzirom da imamo skup od brojeva 0,1,2,3 očito je kako se radi samo o 0,0. Dakle to je to, razred $[0,0]$ u sebi sadrži samo sebe te možemo prijeći na idući razred.

$$[(0,0)] = (0,0)$$

Uzmimo sada $x = 0$, $y = 1$ – dobivamo da je $x + y = 0 + 1 = 1$, a to možemo dobiti na 2 načina, $0 + 1$ ili $1 + 0$, pa zapišimo to:

$$[(0,0)] = (0,0)$$
$$[(0,1)] = (0,1), (1,0)$$

Mislim da ste do sada skužili način hvatanja grupa pa ću samo ispisati ostale i napomenuti neke stvari koje su bitne da se ne zeznete:

$$[(0,0)] = (0,0)$$
$$[(0,1)] = (0,1), (1,0)$$
$$[(1,1)] = (1,1), (2,0), (0,2)$$
$$[(1,2)] = (1,2), (2,1), (3,0), (0,3)$$
$$\boldsymbol{[(2,2)] = (2,2), (3,1), (1,3)}$$
$$[(2,3)] = (2,3), (3,2)$$
$$[(3,3)] = (3,3)$$

Iz ovoga se lako iščita da je kardinalni broj kvocijentnog skupa $\boldsymbol{X/\rho = 7}$, a elemente skupa $[(2,2)]$ sam podebljao u rješenju.

Mislim da vidite princip rada. E sad, taj bi princip trebalo znati primjeniti i na teže situacije. Npr. vrlo je moguće da vam skupovi neće biti $A \times A$ koji su jednostavni poput ovoga, moguće da ce biti $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pa šta onda? Onda elemenata ima beskonačno, a kako to zapisati? Jednostavno, pokažete im da ima beskonačno elemenata i onda ne napišete beskonacno nego da ih ima **alef nula**, $\boldsymbol{\aleph_0}$, (on je za prebrojive elemente) ili **kontinuum**, $\boldsymbol{c}$, (neprebrojive elemente). Opet, mjesto di se lako izgube bodovi, a nije teško za zapamtiti.

Još jedna stvar koja je bitna, a praksa je pokazala da puno ljudi ne zna – način na koji raspisujete razrede – prva i osnovna stvar, nemojte ići raspisivati apsolutno sve elemente odjednom jer su velike vjerojatnosti da će zadati zadatak da je nemoguće to napraviti – umjesto toga počnite pisati jedan po jedan element te kad ispišete one elemente koje se nalaze u njemu, nastavite sa slijedecim (npr. nakon 1 nemojte skočit na 8 bez razloga jer ćete si samo zadat nepregledan zadatak). I zapamtite da ime razreda nije nista drugo nego odabir jednog od njegovih elemenata kao predstavnika. U gornjem primjeru je razred $[(2,3)]$ mogao lako biti i $[(3,2)]$.

Nadam se da ste shvatili jer to je cijela mudrost ovog tipa zadatka, sad oni mogu zadat praktički bilo šta ali ako ste ovo shvatili, a ne samo naučili ovaj primjer lako ćete se snaći i u ostalim zadacima. ☺

PRIMJER 2

NA SKUPU $\boldsymbol{X = \{1, 2, \dots, 10\}}$ ***ZADANA JE RELACIJA*** $\boldsymbol{\rho}$ ***SA***

$$\boldsymbol{(a,b)\rho\,(c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

DOKAŽI DA JE $\boldsymbol{\rho}$ ***RELACIJA EKVICALENCIJE***
KOLIKO ELEMENATA IMA RAZRED $\boldsymbol{[(1,1)]}$
KOLIKO ELEMENATA IMA RAZRED $\boldsymbol{[(2,3)]}$

i) REFLEKSIVNOST

$$(a,b)\rho(a,b)$$

mora vrijediti:

$$\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

a to itekako vrijedi ☺

ii) SIMETRIČNOST

Opet simetrija, gledamo da vrijedi slijedeće:

$$(a,b)\rho(c,d)\ i\ (c,d)\rho(a,b)$$

To će vrijediti ako u slučaju da vrijedi

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

vrijedi i

$$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

što je isto tako točno pa idemo dalje.

iii) TRANZITIVNOST

$$(a,b)\rho(c,d)\ i\ (c,d)\rho(e,f)$$
$$\Downarrow$$
$$(a,b)\rho(e,f)$$

Opet idemo po uvjetima zadatka:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \ \frac{c}{d}=\frac{e}{f}\ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{e}{f}$$

štima i to, pa stavljamo kvačicu pored refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti i zaključujemo da je dokazano da je ovo relacija ekvivalencije.

Idemo sad na ove tražene razrede ekvivalencije.

Opet ćemo lagano od početka: razred $[(1,1)]$ a upravo to nam je i jedan od 2 razreda čiji nas broj elemenata zanima.

$[(1,1)]$ znači da nam je $a=1$ i $b=1$ pa gledamo kojom kombinacijom brojeva možemo dobiti $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}=1$.

S obzirom na zadani skup $\{1,2,\dots,10\}$, to može biti:

$$\frac{1}{1},\frac{2}{2},\dots,\frac{10}{10}.$$

pa su nam elementi razreda

$$[(1,1)]=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9),(10,10)\}$$

i ima ih **10 komada**.

ajmo lagano dalje...

$[(1,2)]$ znači da nam je $a = 1$ i $b = 2$ pa je:

$$[(1,2)] = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}$$

i tako dalje, osim ako nam nije baš jako dosadno i nemamo na ispitu vremena za bacanje, idemo i na onaj drugi razred čiji nas broj članova zanima, preskočit ćemo ove *nevažne*

$[(2,3)]$ - elementi će mu biti svi koji zadovoljavaju $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ pa je:

$$[(2,3)] = \{(2,3), (4,6), (6,9)\}$$

i ima ih $\mathbf{3}$.

Ovdje bi bilo malo gadnije računati kardinalni broj kvocijentnog skupa, a kamoli izlistavati sve razrede i njihove elemente pa se ne očekuje da bi tako nešto mogli tražiti od nas.

KOMBINATORIKA

Zadaci sa permutacijama, zadaci sa kombinacijama, sa varijacijama i ponavljanjem... Ako baš patite na te formalnosti proletite knjižicom da vidite tu nomenklaturu, u ovom tutorialu se može nać ponešto od tih tipova zadatak, ali definitivno ne pod tim imenima!

PRIMJER 1

IMAMO RIJEČ <u>MATEMATIKA</u> (NAŠA NAJDRAŽA☺). KOLIKO RIJEČI MOŽEMO NAPRAVITI AKO RAZMJEŠTAMO SLOVA ?

Prvo i osnovno što treba znat je da ne picajzlimo, dakle, pod riječi se misli različitih kombinacija slova, riječi ne moraju biti smislene – dakle i **MMAAATTEIK** je riječ koju uzimamo u obzir. Primjetite kako sam odmah grupirao slova koja su nam ista – e pa to nije slučajno – to je vrlo važan dio zadatka; gledamo kolko slova imamo koja ponavljamo:

3× A
2× M
2× T
1× E
1× I
1× K

To je to, ta slova moramo razmještat kako bi dobili sve moguće kombinacije ali pritom, još jednom napominjem, pazimo da ne brojimo više puta iste riječi, a to bi se lako moglo dogoditi.

Recimo da imamo sva slova različita, 10 različitih slova – ovaj bi zadatak imao rješenje:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 10!$$

Napisao sam to na ovaj način jer će vas mozda asocirat na način koji ste zapisivali, dakle prvo slovo biramo na 10 načina, drugo na 9 (jedno smo odabrali, preostaje nam 9) i tako dalje. Sveukupno **10!** načina, nadam se da je to jasno.

E sada, razlika između tog i našeg zadatka je to da mi imamo slova koja se ponavljaju, dakle problem – šta ako smo uzeli riječi MM... i MM... kao dvije različite? E pa tu moramo sada izbaciti ta ponavljanja, a to radimo tako da čisto jednostavno podijelimo sa brojem nacina na koje mozemo ispremiješati ta slova. Već sam rekao, način za ispremiješati slova je isti ovaj gore, dakle za slova A će biti $3 \cdot 2 \cdot 1$, za slova M će biti $2 \cdot 1$ isto kao za T: $2 \cdot 1$. Pretpostavljam da vidite kako se radi o faktorijelama, pa ćemo konačno rješenje dobit kao da smo gledali sve kombinacije te od njih oduzeli one koje se ponavljaju. Da ne duljim:

$$\mathbf{\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}}$$

Poprilično sam opširno išao u objašnjavanje ovog tipa i to iz jednostavnog razloga što se ovakav zadatak može pojaviti u više varijanta, a da ni ne primjetite da vas traži istu stvar.

PRIMJER 2

KOLIKO IMA 20-SLOVNIH RIJEČI SASTAVLJENIH OD 30 SLOVA HRVATSKE ABECEDE U KOJIMA SE SLOVA NE PONAVLJAJU?

Ovo je laganica i nedajte se zbunit biločime zadanom u ovom zadatku...

20 mjesta za slova, 30 mogućih slova

1. mjesto – 30 mogućnosti, 2. mjesto – 1 mogućnost manje jer nema ponavljanja $= 29$, 3. mjesto – 28 mogućnosti... 20. mjesto – $(30-20) = 10$ mogućnosti...

UKUPNO: $\mathbf{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 11 \cdot 10}$

PRIMJER 3

KOLIKO IMA 20-ZNAMENKASTIH BROJEVA U KOJIMA SE SVAKA ZNAMENAKA OD 0, 1, ..., 9 PONAVLJA TOČNO DVAPUT?

20 mjesta, 10 znamenki, svaka se ponavlja TOČNO dvaput

1. mjesto – 9 znamenki mogućih(početna znamenka ne može biti nula, inače nije 20znamenkasti broj!)

ostalih 19 ispermutiramo : $19!$

dijelimo sa $2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2!\,2! \cdot 1!$

(zato jer $xx2xx2\ldots = xx2xx2$ ... bez obzira što nam ove boje o tome govore, broj će bit isti bez obzira koja od dvije iste znamenke je na kojem mjestu ☺)

UKUPNO:

$$\mathbf{9 \cdot \frac{19!}{(2!)^9}}$$

PRIMJER 4 – ŠAHOVSKA PLOČA

Dakle, šahovska ploča je obično, može biti bilo što – ideja je da se možemo pomicati za jedno mjesto u desno i jedno mjesto gore te na koliko načina možemo doći od jedne do druge točke.

Ovakav tip zadatka se lako može shvatiti i preko slova, s obzirom da takve zadatke sada lagano rješavamo, čak koristimo neku laganu šablonicu u zadacima za koje inače treba mozak, how cool is that ☺.

Dakle, pomake u desno ćemo gledati kao slovo **D,** a pomake prema gore kao slovo **G** (možete vi što god hoćete, al ovo je čisto da shvatite).

E sada, kaže nam zadatak recimo

NALAZITE SE U (0,0) TE SE MOŽETE POMAKNUTI SAMO DESNO I GORE. NA KOLIKO NAČINA MOŽETE DOĆI DO (8,4)?

Vrlo jednostavan zadatak, trebamo otići 8 puta desno i 4 puta gore – dakle essentially imamo 8 slova D i 4 slova G. I tražimo sve kombinacije toga – a to je, baš kao i u gornjim zadacima

$$\frac{\mathbf{12}!}{(\mathbf{8}!\,\mathbf{4}!)}$$

Primjetite kako je to isto što i $\binom{12}{4}$, tj $\binom{12}{8}$, tako da kada u rješenjima zadataka vidite taj zapis nemojte misliti da je krivo, samo je drugačije zapisano točno rješenje ☺

Za ovaj stil zadataka, posebno specifičan za ova putovanja po "šahovskoj ploči" odnosno koordinatnom sustavu od točke do točke vrijedi formula:

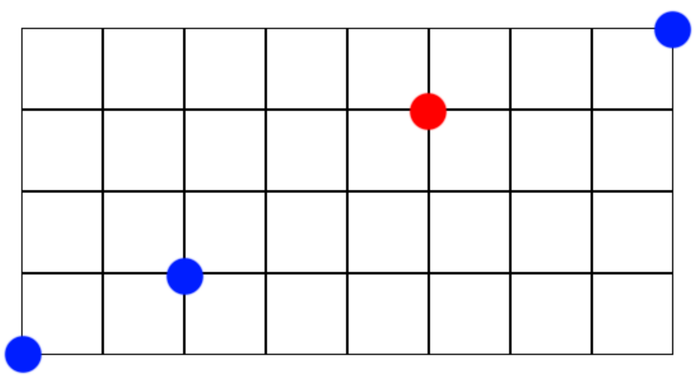
$$\frac{(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n})!}{\boldsymbol{m}!\cdot\boldsymbol{n}!}$$

jer je ukupni broj "staza" jednak broju poredanih $(m+n)$-teraca sastavljenih od m D-ova I n G-ova. Malo glupo zvuči, ali zapravo nije!

PRIMJER 5 – ŠAHOVSKA PLOČA SA ZABRANJENOM I OBVEZNOM TOČKOM PROLASKA

NALAZITE SE U (0,0) TE SE MOŽETE POMAKNUTI SAMO DESNO I GORE. NA KOLIKO NAČINA MOŽETE DOĆI DO (8,4) A DA PRI TOM <u>MORATE</u> PROĆI TOČKOM (2,1) A NE SMIJETE TOČKOM (5,3)?

Zvuči komplicirano ali zapravo nije – samo trebamo ići jedan po jedan korak. U ovakvim situacijama je obično najlakše nacrtati neku mrežu pa gledati kako bi se trebali i mogli kretati. Ovdje bi izgledala ovako:



Dakle, krećemo iz skroz donje lijeve točke i idemo do skroz gornje s tim da izbjegavamo crvenu. Sad je već lakše rješavat kad imamo skicu – idemo prvi dio odradit koji moramo – idemo do (2,1). To ćemo napraviti na $\frac{3!}{2!}$ načina.

E sad, najlakše bi nam bilo gledati ovu točku (2,1) kao naše novo ishodište jer do nje smo morali doći pa sada od nje gledamo ostale puteve koje moramo ili ne smijemo odraditi. S obzirom da imamo točku koju ne smijemo dotaknuti, napravit ćemo sve puteve od naše (2,1) do kraja – (8,4) i oduzet one puteve kojima smo slučajno prošli kroz crvenu. To bi dakle bilo:

$$\frac{9!}{6!\,3!} - \left(\frac{5!}{3!\,2!}\right)\left(\frac{4!}{3!\,1!}\right)$$

Dakle; crveni dio je put od (2,1) do(8,4)
Zeleni dio je (2,1) - (5,3)
Plavi dio je (5,3) - (8,4)

Konačno rješenje bi onda bilo jednostavno:

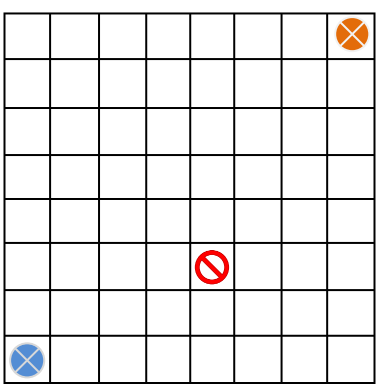
$$\left[\frac{\mathbf{3}!}{\mathbf{2}!}\right] \cdot \left[\frac{\mathbf{9}!}{\mathbf{6}!\,\mathbf{3}!} - \left(\frac{\mathbf{5}!}{\mathbf{3}!\,\mathbf{2}!}\right)\left(\frac{\mathbf{4}!}{\mathbf{3}!}\right)\right]$$

PRIMJER 6

Tehnički, ova 2 zadatka su sa koordinatnim sustavom, a kod „prave“ šahovske ploče su nam figure unutar polja, a ne na ovim nazovi spojevima pa pazite da se ne prebrojite u brojanju poteza. Evo jednog takvog zadatka za utvrđivanje gradiva:

ZADANA JE STANDARDNA ŠAHOVSKA PLOČA 8×8 . NA KOLIKO RAZLIČITIH NAČINA MOŽE FIGURA IZ LIJEVOG DONJEG U DESNO GORNJE POLJE TAKO DA NE PROĐE POLJEM NA PRESJEKU TREĆEG RETKA I PETOG STUPCA AKO SE FIGURA MOŽE POMICATI SAMO ZA JEDNO POLJE I DESNO ILI JEDNO POLJE PREMA GORE?

Opet će nam skica uvelike olakšati posao, jedino u slučaju ovakvog zadatka bilo bi OK pitati asistenta ili koga već da preciziraju koji je to treći redak, dal kreću s brojanjem od dole di nam je u početku figura ili ipak odozgora prema dolje, rezultati se razlikuju. Za ovaj zadatak mi ćemo gledati da nam je prvi redak najdoljnji, onaj u kojem nam je na početku figura.



Prvo ćemo pobrojati sve načine za dolazak iz početnog u traženo polje, a zatim od njih oduzeti one zabranjene!

Za dolazak iz donjeg lijevog u gornje desno polje potrebno nam je $7 \times$ pomaka u desno i $7 \times$ prema gore pa će nam to biti $\frac{(7+7)!}{(7!7!)}$ načina.

Broj puteva za dolazaka iz početne u zabranjenu točku zahtjeva $4 \times \boldsymbol{D}$ **i** $2 \times \boldsymbol{G}$ pa je to ukupno $\frac{(4+2)!}{(4!2!)}$ načina(puteva). Iz zabranjene točke do odradišne imamo $3 \times \boldsymbol{D}$ **i** $5 \times \boldsymbol{G}$ što dovodi do $\frac{(3+5)!}{(3!5!)}$ načina. Ukupno:

$$\frac{(4+2)!}{(4!\,2!)} \cdot \frac{(3+5)!}{(3!\,5!)}$$

I kao što je napomenuto i pokazano u prethodnom zadatku, sada od ukupnog mogućeg broja puteva kojima može prijeći figurica oduzimamo broj zabranjenih

$$\frac{\mathbf{14!}}{\mathbf{7!\,7!}} - \frac{\mathbf{6!}}{\mathbf{4!\,2!}} \cdot \frac{\mathbf{8!}}{\mathbf{3!\,5!}}$$

Za vježbu, izračunajte broj različitih načina za dolazak iz donjeg lijevog u gornje desno uz zabranjen prolazak poljem na presjeku 3. retka i 5. stupca ako kao prvi redak uzimamo najgornji!

PRIMJER 7 – OKRUGLI STOL

Još jedan od čestih tipova zadataka je okrugli stol. Njegova ideja je da je bitan razmještaj ali ako krenemo gledati isti razmještaj samo zarotiran za nekoliko mjesta – to smatramo istim i ne smijemo brojati. Uzmimo primjer:

IMAMO OKRUGLI STOL I NA KOLIKO NAČINA MOŽEMO RAZMJESTITI 7 OSOBA ZA STOL UZ UVIJET DA IVICA I MARICA BUDU ZAJEDNO?

Dakle, postoje2 načina rješavanja ovog tipa zadataka ali u svakom moramo prvo grupirati Ivicu i Maricu da budu zajedno – stavimo ih kao jednu osobu za stol (samim tim nam efektivno ostaje 1 osoba manje) i pogledamo na koliko načina možemo sada staviti ostatak za stol. Druga stvar koja je još bitna je da moramo izmješati načine na koje ćemo postaviti Ivicu i Maricu, a to smo već naučili da je 2! načina. Još jedino što nam ostaje je vidjeti kako smjestiti cijelu ekipu za stol bez da zbrojimo po vise puta istu stvar.

Prvi način za to napraviti je fiksirati jednu osobu na jedno mjesto i dalje gledamo kao da imamo klupu – dakle uzmemo neku random osobu, kutiju čavla i fino je prikucamo na jedno mjesto ☺. Ostale nakon toga raspoređujemo kao da se radi o ravnoj klupi jer imamo tu neku „referentnu točku“. Konkretno za ovaj slučaj bi to bilo

$$\mathbf{5!} \cdot \mathbf{2!}$$

Drugi način ću samo spomenut jer ga ne koristim nikad, ali može se razmisljati i na način da pogledamo sve apsolutno kombinacije i od toga oduzmemo ono što smo više puta ponavljali, dakle

$$\left(\frac{\mathbf{6!\,2!}}{\mathbf{6}}\right)$$

jer 6 različitih načina ima za napraviti taj krug. U principu se dobije isti rezultat pa samo pišite i rješavajte kako vam je lakše razmišljat.

DIRICHLET

Ovo je u biti ponovno izmišljanje tople vode i ukoliko je zadatak zadan nedvosmisleno bodovi moraju kapnut. Naime, pravilo (načelo) koje povezujemo sa Dirichletom kaže:

Neka je n predmeta smješteno u m kutija. $n > m$. Onda postoji kutija s barem 2 predmeta. ☺

Vrlo očigledno, i ako nađete način za primjenit na zadatak, sav posao ste odradili. Dosta često će vas sami zadani podaci navoditi na koji način naštimati rješenje.

PRIMJER 1

U SKUPU OD PRVIH OSAM BROJEVA $\mathbf{1, 2, \ldots, 8}$ ODABEREMO NJIH PET. DOKAŽIMO DA MEĐU TIH PET POSTOJE DVA ČIJI ZBROJ JE JEDNAK 9 .

Zbroj 9 dobiva se za svaki od ova 4 dvočlana podskupa početnog skupa:

$$A = \{1,8\}, \qquad B = \{2,7\}, \qquad C = \{3,6\}, \qquad D = \{4,5\}$$

Svakom od **5** odabranih brojeva (predmeta) možemo pridružiti **točno jedan od ova 4** podskupa (kutija) u kojem se on nalazi. Prema tome **postoje dva broja kojima će biti pridružen isti** skup.

Zbroj ta dva broja je 9.

PRIMJER 2

TABLICA $\mathbf{5 \times 5}$ POPUNI SE BROJEVIMA IZ SKUPA $\mathbf{\{-1, 0, 1\}}$. IZRAČUNAJU SE SUME POJEDINIH REDAKA, STUPACA I NA DVIJE GLAVNE DIJAGONALE. DOKAŽITE DA KAKO GOD TABLICA BILA POPUNJENA MEĐU TIM SUMAMA POSTOJE DVIJE JEDNAKE.

Prvo gledamo koliko ima mogućnosti za dobivene sume. U slučaju da je dati red/stupac/dijagonala ispunjena svim *minus jedinicama*, suma će iznostiti -5. Ako je pak ispunjena jedinicama, suma će biti 5. Ostale moguće vrijednosti su negdje između ove dvije, dakle ukupno 11 mogućnosti. $(-5, -4, \ldots 0, \ldots, 4, 5)$

Broj izračunatih suma je: 5 komada po stupcima, 5 po retcima/recima/ ☺, i dvije sume po dijagonalama. Ukupno 12 komada.

Dakle, imamo **12 suma** koje poprimaju **vrijednosti iz 11-članog skupa**.

Među njima mora biti jednakih!

Kod Dirichleta je poželjno znati i njegovo POOPĆENO NAČELO:

Neka je n predmeta smješteno u m kutija. Onda postoji kutija koja sadrži **barem** $\boldsymbol{\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor+1}$ predmeta.

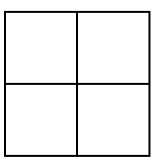
PRIMJER 3

UNUTAR KVADRATA STRANICE DULJINE 1 ZADANO JE 9 TOČAKA. DOKAŽITE DA POSTOJE 3 OD NJIH KOJE SU SADRŽANE U KRUGU POLUMJERA $\frac{2}{5}$.

Ajmo si prvo zadat podzadatak da smislimo što nam je to točno potrebno da bi u nekom dijelu kvadrata bile barem 3 točke.

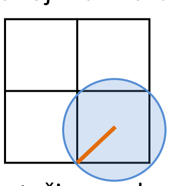
$$\left\lfloor\frac{n-1}{m}\right\rfloor+1=3$$

n nam je broj točaka, pa imamo $\left\lfloor\frac{9-1}{m}\right\rfloor=2$ gdje je m broj "nekakvih kutija" u koje smještamo te točke (predmete). U našem slučaju laganom računicom dolazimo do $m=4$. To nam znači da moramo imati 4 "kutije" u koje smještamo ovih 9 točaka. Podijelimo zato naš kvadrat na 4 jednaka dijela da bi dobili željene 4 "kutije".



S obzirom da nam je stranica početnog kvadrata duljine 1, stranica svakog od ova 4 nova kvadrata bit će $\frac{1}{2}$. U jednom od ta 4 novonastala manja kvadrata su po Dirichletovom poopćenom načelu nužno bar 3 točke.

Sad u priču ubacimo ovaj zadani polumjer $\frac{2}{5}$. Ako su u kvadratu stranice duljine $\frac{1}{2}$ 3 točke, onda su i u njemu opisanoj kružnici te 3 točke (ako ne i više njih jer je površina kruga veća od površine tog kvadrata).



Ovi crteži nam dosta često olakšavaju posao! Uočavamo da je radijus opisane kružnice jednak polovici dijagonale malog kvadrata.

$$r'=\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{2}{4}}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

a s obzirom da je $\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{2}{5}$ te **3 točke** se sigurno nalaze i **u krugu polumjera $\frac{2}{5}$**.

PRIMJER 4

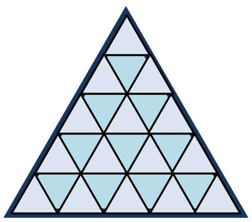
U JEDNAKOSTRANIČNI TROKUT STRANICE DULJINE 100 RASPOREDIMO 101 TOČKU. DOKAŽITE DA POSTOJI 5 TOČAKA KOJE SE NALAZE U KRUGU POLUMJERA 12 .

Zadatak na isti kalup kao i gore, pomognite si crtežima.

Idemo identičnom računicom:

$$\left\lfloor\frac{101-1}{m}\right\rfloor+1=5$$

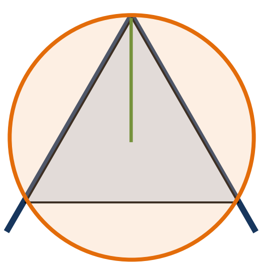
dobijamo da je m kao broj nekakvih kutija u koje moramo strpati 101 predmet da bi u svakoj bilo barem 5 predmeta $m=25$. Znači da dijelimo svoj jednakostranični trokut na 25 manjih jednakostraničnih trokuta:



i u jednom od tih manjih trokuta je nužno bar 5 točaka!

Slikica nam pomaže da uočimo da mali trokuti nastali podjelom imaju stranicu duljine $\frac{100}{5}=20$.

Opet koristimo caku sa **opisivanjem** kružnice malom trokutu jer ako je unutar trokuta 5 točaka, onda je i unutar tom trokutu opisane kružnice sigurno 5 točaka. Da bi nam bilo malo lakše odrediti radijus, evo zoom trokuta koji nas zanima! ☺



Postoji i gotova formula koja kaže da je radijus jednakostraničnom trokutu opisane kružnice $R=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, a ako nam ona nije poznata, do nje se vrlo lako dođe uz malo pitagore i geometrije jer bi trebali znati barem da je taj radijus jednak $\frac{2}{3}$ visine na stranicu a. Nama je $a=20$ pa je $R\ =\frac{20\sqrt{3}}{3}$ i unutar kružnice ovog radijusa nalazi se 5 točaka.

Kako je $\frac{\mathbf{20\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}<12$ tih **5 točaka** nalazi se **unutar kruga polumjera 12**.

IZVODNICE

Izvodnice nam služe da bi neke nizove realnih brojeva zapisali u što sažetijem obliku.
U tom postupku glavna formula na koju bi se sve trebalo svoditi je:

$$\boldsymbol{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n}$$

i ona nam u biti kaže da je $f(x)$ funkcija izvodnica slijeda (niza) a_n.
Postoji još i formula eksponencijalne izvodnice slijeda $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}$, ali nisam primjetio zadatak u kojem se zahtjeva korištenje ove formule, može se pojaviti u slučaju da nam daju neki niz koji u sebi ima $n!$ pa nas traže eksponencijalnu izvodnicu u kojoj nam ova formula olakšava posao u računanju sume jer se faktorijele pokrate.
Neke važne formule koje bi morali znati i koje nam ubrzavaju rješavanje zadataka:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots=\frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'=\left(x\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=\left(x\cdot\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{k}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^k=\frac{1-x^{k+1}}{1-x}$$

npr. $1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}$

PRIMJER 1

NAĐITE FUNKCIJU IZVODNICU ZA NIZ

$$\boldsymbol{a_n=\frac{2n}{n^2+4n+3},\quad n\geq 0}$$

Kod ovih zadataka dosta često je poanta uočavanje nekih stvari koje nam olakšavaju posao i na kraju svode situaciju na poznatu nam formulu $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Da se sa postojećim podacima bacimo na posao i ubacimo ih u formulu za računanje funkcije izvodnice dobili bi popriličan bućkuriš jer nije baš čas posla izračunati

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n}{n^2+4n+3}x^n$$

Zato si idemo olakšati posao, uočavamo da nazivnik slijeda a_n možemo napisati kao $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$ pa imamo $2n/(n+1)(n+3)$. Metodom parcijalnih razlomaka to treba dodatno pojednostaviti na oblik $\frac{A}{n+1}+\frac{B}{n+3}$ i nakon malo računanja $\{2n=A(n+3)+B(n+1)\to 2n=An+Bn,\ 0=3A+B\}$ dobijamo puno *pregledniji* oblik

$$a_n=-\frac{1}{n+1}+3\cdot\frac{1}{n+3}$$

Sada sa ovim oblikom idemo u glavnu formulu:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+1}+3\frac{1}{n+3}\right)x^n$$

a to je jednako

$$f(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}x^n$$

Potrebno je opet malo naštimavanja da bi dobili neki poznati oblik. Ove nazivnike smo mogli dobiti jedino nekom integracijom pa da vidimo što smo to trebali integrirati da bi dobili oblik $\sum_0^\infty \frac{x^y}{y}$.

Prvi dio:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int x^n=-\frac{1}{x}\int\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$
$$=-\frac{1}{x}\int\frac{1}{1-x}=-\frac{1}{x}(-\ln|1-x|)=\frac{\ln|1-x|}{x}$$

Drugi dio:

$$3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}x^n=\frac{3}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}x^{n+3}=\frac{3}{x^3}\sum_{n=0}^{\infty}\int x^{n+2}=\frac{3}{x^3}\int\sum_{n=0}^{\infty}x^2x^n=\frac{3}{x^3}\int x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{3}{x^3}\int\frac{x^2}{1-x}$$
$$=\frac{3}{x^3}\int\frac{1}{1-x}-x-1=\frac{3}{x^3}\left(-\ln|1-x|-\frac{x^2}{2}-x\right)$$

I vraćanjem u početnu jednadžbu i stavljanjem svega zajedno na svoje mjesto dobijemo

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+3}x^n=\frac{\ln|1-x|}{x}+\frac{3}{x^3}\left(-\ln|1-x|-\frac{x^2}{2}-x\right)$$
$$=\boldsymbol{\frac{\ln|1-x|}{x}-3\frac{\ln|1-x|}{x^3}-\frac{3}{2x}-\frac{3}{x^2}}$$

Ovo je baš gadan i dugačak zadatak, ali pojavio se na jednom ispitu u još i nešto opširnijem obliku sa b) dijelom zadatka tako da nikad ne znate što nas čeka, ali dobar je kao primjer jer se može na njemu pokazati dosta caka i ovih prilagođavanja.

PRIMJER 2 – NALAŽENJE BROJA RJEŠENJA JEDNADŽBE/NEJEDNADŽBE

Klasik zadatak, dolazi na svakom ispitu, može biti zadan baš tekstom „Nađite broj rješenja nejednadžbe bla bla“ ili „imamo 4 klinke i sad svaka moze dobiti određeno bombona …“ Ovaj zadatak je pretty much šablonski tako da nemojte tu izgubit bodove. Kao primjer ću uzet neki svoj zadatak da pokažem na cake koje se mogu pojaviti.

TRAŽIMO BROJ RJEŠENJA NEJEDNADŽBE

$\boldsymbol{x_1+x_2+x_3}<5$

$\boldsymbol{x_i}>-i,\quad i\neq 3$

$\boldsymbol{x_3=1,2,3}$

I to je to što je zadano. Sad krećemo s rješavanjem i na prvi pogled ne znamo što treba napravit, imamo tu neke i-jeve, neke manje, x-eve i sve nešto zbunjujuće, ali ajde idemo po redu, prvo i osnovno, idemo malo drugacije zapisat ovu jednadžbicu:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$

E super, al svejedno je to još malo nedefinirano pa bi trebali dodati još jednu nepoznanicu kako bi dobili jednakost pa uvodimo x_4.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$$

To je to što nam je potrebno za računanje, idemo još samo vidjet intervale koje nam x-evi mogu, tj. moraju poprimiti:

$x_1 > -1$
$x_2 > -2$
$x_3 = 1,2,3$
$x_4 \geq 0$

Da, prvo pitanje koje vam možda padne na pamet je zašto je $x_4 \geq 0$? E pa to je zato što smo mi taj x mogli nazvat bilo kako i on nam predstavlja svojevrsni amortizer tako da dobijemo uvijek vrijednost koju tražimo, u našem slučaju 4. Npr. kada bi nam $x_1 + x_2 + x_3$ bili jednaki 4 onda bi nam x_4 morao poprimiti svoju minimalnu vrijednost, a to je 0. S druge strane, ako bi nam zbroj x-eva bio minimalan (u ovom slucaju 0, nebitno opće) onda pustimo x da ide u beskonačnost pa ćemo samo probrati one vrijednosti koje nam pašu. Isto tako, nek bude napomena da kada bi u zadatku bilo nešto tipa „imamo 5 jabuka i jedna cura treba dobiti barem 3 jabuke“ to ne znači da morate zapisati da baš mora dobiti 3, 4 ili 5 jabuka (iako će se na to efektivno svesti) nego bez problema pustite nek ide u beskonačnost. Jedino kad ograničavate je kad vam u zadatku baš kažu –mora dobit više od i manje od. Lakše će vam biti rjesavat zadatke☺.

E sad kad smo to razjasnili, idemo raspisivat ovo sve – tražimo koeficijente uz x^4 (jer nam je rješenje jednadžbe $=\ 4$).

$$x^4 = (x^0 + x^1 + x^2 + \cdots)(x^{-1} + x^0 + x^1 + x^2 + \cdots)(x^1 + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \cdots)$$

Ako vam nije bilo jasno šta točno predstavlja to $x_1 > -1$ i slično, nadam se da su ove potencije u boji malo razjasnile stanje.

E sada sve te intervale treba svest tako da počinju kao $1 + x + x^2 + \cdots$ jer od tuda znamo napisat njihovu sumu ako idu u beskonačnost ili u određeni broj. Znači, iz druge zagrade izlučujemo $\frac{1}{x}$, a iz treće x što se pokrati pa na kraju ostavlja s lijeve strane i dalje x^4.

$$x^4 = (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \cdots)$$

Ovo su nam poznate sume, imamo:

$$x^4 = (1 + x + x^2 + \cdots)^3(1 + x + x^2) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)^3 \sum_{n=0}^{2} x^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3 \frac{(1-x^3)}{1-x} = \frac{(1-x^3)}{(1-x)^4}$$
$$= (1-x)^{-4}(1-x^3)$$

Sad dolazimo do još 2 važne i često iskoristive formule, a one kažu:

Kada imamo $(\mathbf{1} + \boldsymbol{x})^{\boldsymbol{n}}$ **koeficijent uz** $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ **jednak je** $\binom{n}{k}$. Kod ovoga obratite pozornost da će u našim slučajevima uglavnom biti situacija $(1-x)^n$ pa će kod traženja kofova uz x „na neparni k“ ispred $\binom{n}{k}$ stajati minus!

Druga bitna formula je sljedeća:

$$\binom{-\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = (-\mathbf{1})^{k}\binom{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}}{\boldsymbol{k}}$$

Vratimo se na zadatak, da si olakšamo stvari raspišemo po binomnoj formuli:

$$x^4 = \left[1-\binom{-4}{1}x+\binom{-4}{2}x^2-\binom{-4}{3}x^3+\cdots\right][1-x^3]$$

I gledamo kojim kombinacijama možemo doći do x^4, a to su tako da gledamo koeificijent uz x^4 u prvoj zagradi $\times 1$ iz druge zagrade; ili koeficijent uz x u prvoj i x^3 u drugoj.

Konačno, to bi bilo ovako:

$$\binom{-4}{4}\cdot 1-\binom{-4}{1}(-1)=\binom{-4}{4}+\binom{-4}{1}$$

I to bi bilo rješenje zadatka, naravno sada još treba to malo urediti da nemamo ove negativne "povrhe" nego samo konkretan broj što bi na kraju ispalo (prema gore navedenoj formuli)

$$\binom{4+4-1}{4}+(-1)\binom{4+1-1}{1}=\binom{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}-\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{1}}=\mathbf{31}$$

PRIMJER 3

TROJE DJECE TREBA PODJELITI 8 JABUKA. PRVO DIJETE MOŽE DOBITI SAMO PARAN BROJ JABUKA. DRUGO DIJETE MOŽE DOBITI MAKSIMALNO 4 JABUKE. NA KOLIKO SE NAČINA MOGU RAZDIJELITI JABUKE TAKO DA SVAKO DIJETE DOBIJE BAREM JEDNU JABUKU, A DA PRETHODNI UVIJETI BUDU ZADOVOLJENI?

Ovakav zadatak može se riješiti uporabom malo logike i zdravog razuma dok su u pitanju ovako malo brojevi i mali broj kombinacija, ali kada nam zadaju neke brojeve koje puste u beskonačnost ili stave velik broj ljudi koji „dijele“ nešto, situacija se rješava na način opisan u primjeru 2, sa ovim funkcijama i koeficjentima uz članove.

Ajmo prvo zdravoseljački.

8 jabuka na 3 djece, svako dijete MORA dobiti barem jednu, znači unaprijed ide 1 svakome, ostaje nam 5 za podjelu. Prvi jazavac može dobiti samo paran broj jabuka, znači 2, 4 ili 6 (ako dobije 8 onda neće biti za ostala 2 tuljana, a uvijet nam je da svaki mora dobit).

U slučaju kada prvi ima 6 jabuka, sve je jasno; 2. dobije jednu i 3. dobije jednu

U slučaju kada prvi dobije 4 opcije su: drugi dobije 1 a treći 3, drugi i treći dobiju 2, drugi dobije 3 a treći jednu. Ukupno 3 mogućnosti za ovaj slučaj.

I u slučaju kada prvi dobije 2 – drugi dobije 1, a treći 5; ili: drugi dobije 2 a treći 4; drugi – 3, treći – 3; drugi 4, treći 2. I to je to, drugi ne može dobiti više od 4 pa su to sve 4 mogućnosti za ovaj slučaj.

UKUPNO: $1\ +\ 3\ +\ 4\ =\ \mathbf{8}$ načina

Ajmo sad pomoću funkcija da se uvjerimo da nas zdravi razum nije prevario i za vježbu:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

gdje su x-evi brojevi koliko jabuka je dobilo određeno dijete. Slijedi određivanje uvjeta: prvi dobija barem jednu i koliko god ih dobio, mora dobiti paran broj, drugi ne smije dobiti više od 4 a mora dobiti barem jednu, a sve što je uvijet za trećega je da dobije barem jednu

$x_1 > 0$, parnost $(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)$
$0 < x_2 \leq 4$
$x_3 > 0$

$$(x^2 + x^4 + x^6 + \cdots)(x + x^2 + x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + \cdots)$$

Skužili ste ono sa izlučivanjem zbog dobijanja poznatih suma, tražimo kof uz x^8.

$$\begin{aligned} x^2(1 + x^2 + x^4 + \cdots)x(1 + x + x^2 + x^3)x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ = x^4(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \end{aligned}$$

S obzirom da s lijeve strane imamo x^8 to kratimo s ovih x^4 pa u biti tražimo kof uz x^4 ali od ovog dijela funkcije $(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$

To su nam poznate sume:

$$x^4 = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \sum_{n=0}^{3} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1-x^4}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{(1-x^2)(1-x)^2} = \frac{(1+x^2)}{(1-x)^2}$$
$$= (1+x^2)(1-x)^{-2}$$

Kof uz x^4 dobijemo ili umnoškom kofova uz x^2 iz prve zagrade i x^2 druge zagrade, ili jedinicom prve zagrade pomnoženom sa kofom uz x^4 druge zagrade.

$$1 \cdot \binom{-2}{2} + 1 \cdot \binom{-2}{4} = 1 \cdot \binom{2+2-1}{2} + 1 \cdot \binom{2+4-1}{4} = \binom{3}{2} + \binom{5}{4} = 3 + 5 = \mathbf{8}$$

Etogac, nije nas još ovaj fax tolko ispilio da ne možemo malo bućnut glavom i neke banalne stvari uočit.

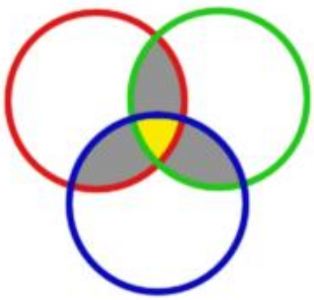
FUI

Best for last, ono šta ljudima radi najveći problem jer se jednostavno ne mogu prebaciti na taj način razmišljanja, a sve je rješivo uz laganu skicu. Nije ništa teško ,ali ovo se ne može šablonski naučit nego se treba razumjet šta se radi pa ću vam oko toga pomoć. Konkretno, idealan zadatak je iz ovogodišnjeg ispita da se vidi kako FUI (formula uključivanja i isključivanja) opće funkcionira i šta se tu točno događa, dalje bi trebali skužit princip i rješavat ko od šale ;)

PRIMJER 1

U VRTIĆU JE 38 DJECE, 19 OD NJIH VOLI PLAVE BOMBONE, 25 ZELENE, A 24 CRVENE. AKO 7 DJECE VOLI SVE BOMBONE KOLIKO DJECE VOLI TOČNO 2 VRSTE (BOJE) BOMBONA?

Prvo i osnovno, nacrtat – **Vennovi dijagrami**, pretpostavljam da svi znate šta su – oni su bogomdani u ovakvim zadacima!



Ovi krugovi sa obrubom su djeca koja vole tu boju bombona. Sveukupno imamo 38 djece, a žuto nam je onih 7 koji vole sve.

I idemo sad rapisivat zdravom logikom, ako zbrojimo zelene (Z) + crvene (C) + plave (P) dobit ćemo malo više od 38, jelda? E pa sad bacite oko na dijagram i pogledate šta smo više puta prebrojali u toj cijeloj priči – prebrojali smo 1 put presjek CZ, 1 put CP i 1 put ZP. Isto tako, primjetite kako svaki od tih presjeka ima u sebi sivi dio i žuti dio, dakle brojali smo sveukupno 3 puta žuti dio i jednom svaki sivi dio, pa bi bilo u redu da oduzmemo to kako bi dobili dobru računicu. Sada oduzimamo te presjeke, te dolazimo do ovog dijela
(Z+C+P) – (ZP+ZC+CP)

Primjetite kako smo opet napravili *overkill*, sada ne da smo oduzeli kolko nam je trebalo žutih, nego smo ih oduzeli toliko da smo ih na 0 sveli pa bi trebali dodati još taj žuti kako bi imali pun zbroj. Dakle dodajemo presjek svih
(Z+C+P) – (ZP+ZC+CP) + (ZPC)

I to je jednako 38, naš početni broj. S obzirom da nas traži samo ova siva područja, ona se nalaze u ovim presjecima u drugoj zagradi, ali su sivi u njima zbrojeni sa žutima, to smo vec rezimirali.
Konačna računica ispada ovakva:
(19 + 25 + 24) – (7 + s1 + 7 + s2 + 7 + s3) + 7 = 38

A s obzirom da nas trazi točno s1+s2+s3 jednostavnom osnovnoškolskom matematikom dobijemo da je rješenje = **16**. Bar mislim. ☺

Za one ambiciozne i one kojima bez neke formule crno na bijelo sve ovo ništa ne znači, evo i nje (formule):

Neka su $A_1, \ldots, A_n$ konačni skupovi sadržani u $\boldsymbol{X}$. Onda vrijedi:

$$\boldsymbol{|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_i \cap \ldots \cap A_n|}$$

odnosno

$$|\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n} |A_i \cap \ldots \cap A_n|$$