

Završni ispit iz Matematike 3R
28.1.2015.

1. **(5 bodova)** U kutiji se nalazi 10 žetona: 3 crvena, 2 plava, 4 žuta i 1 bijeli. Na koliko načina je moguće izabrati neprazan podskup tako da
- (a) sadrži barem jedan žuti i barem jedan plavi žeton,
 - (b) su svi žetoni iz podskupa različite boje,
 - (c) barem dva žetona u podskupu budu različite boje?

2. **(5 bodova)**

(a) Na koliko načina možemo podijeliti 5 različitih pizza na 3 studenta tako da svaki student dobije barem jednu pizzu? Rezultat napišite u obliku prirodnog broja.

(b) Iskažite i dokažite teorem koji ste koristili.

3. **(5 bodova)** Neka je šahovska ploča standardno označena slovima od A do H i brojevima od 1 do 8. Na koliko načina kralj može doći iz polja A1 do polja H8 ako mora proći poljem D3 i ako se u svakom koraku približava cilju?

Napomena. Kralj se može pomicati za jedno mjesto, uključujući i dijagonalno!

4. **(5 bodova)** Riješite rekurziju

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n - 2^n,$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

5. **(5 bodova)** Nađite funkciju izvodnicu za niz zadan rekurzivno s

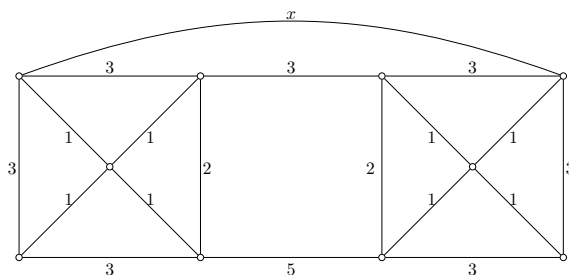
$$a_{n+2} = a_n - 2a_{n-1} + 2^n,$$

uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

6. **(5 bodova)** Odredite koliko ima različitih jednostavnih regularnih grafova stupnja regularnosti 2 ako je broj vrhova 9.

7. **(5 bodova)** Označimo vrhove grafa K_n s a_j te vrhove grafa K_{2n} s b_j . Graf G dobiven je dodavanjem bridova $a_j b_j$ i $a_j b_{n+j}$ uniji $K_n \cup K_{2n}$ za $j \in \{1, \dots, n\}$. Dokažite da je G hamiltonovski.

8. **(5 bodova)** Za koje vrijednosti parametra $x \in \mathbb{R}^+$ poštara bridom čija je težina x neće proći dvaput u svom optimalnom obilasku?



Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Sretno!

Završni ispit iz Matematike 3R
28.1.2015. - RJEŠENJA

1. (a) U kutiju stavimo 1 žuti i 1 plavi žeton, ostaje 3C, 1P, 3Ž, 1B od kojih biramo podskup (može i prazan) na $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ načina.
(b) Za svaku boju biramo jesmo li ju izabrali ili ne i oduzmemo prazan skup $2^4 - 1$.
(c) Ukupno nepraznih - oni u kojima su svi žetoni iste boje:
 $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 - 1 - (4 + 3 + 2 + 1)$.
2. Broj surjekcija 5-članog skupa na 3-člani: $3^5 - \binom{3}{1}2^5 + \binom{3}{2}1^5 = 150$.
3. Dozvoljeni potezi su: desno, gore, dijagonalno desno-gore. Od A1 do D3 možemo doći na $\frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{3!}{2!} = 25$ načina, a od D3 do H8 na $\frac{9!}{4!5!} + \frac{8!}{1!3!4!} + \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{6!}{3!1!2!} + \frac{5!}{4!1!} = 681$ načina. Ukupno: $25 \cdot 681 = 17025$.
4. $a_n = n(1 - n)2^{n-3} + 3^n$.
5. Treba naći $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
Iz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n$, dobivamo
 $g(x) = \frac{-2x^3 - 2x^2 + 1}{-4x^4 + 4x^3 - x^2 - 2x + 1}$.
6. Ima ih 4. To su $C_3 \cup C_6$, $C_4 \cup C_5$, $C_3 \cup C_3 \cup C_3$ i C_9 .
7. Pomoću Oreovog teorema ($\deg(a_j) = n + 1$, $\deg(b_j) = 2n$) ili direktno spajanjem dva hamiltonovska ciklusa u K_n i K_{2n} .
8. Treba naći najkraći put od vrha dolje lijevo do vrha desno dolje. Ako ne prolazi bridom težine x , duljina je (Dijkstra) $1+1+3+1+1=7$. Ako prolazi, duljina je $1+1+x+1+1=4+x$. Uvjet daje $4+x > 7$, tj. $x > 3$.