

Ispit iz Matematike 3R
06.07.2016.

- (5 bodova) Funkciju $f(x) = x(\pi - x)$ razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama na intervalu $(0, \pi)$. Pomoću dobivenog razvoja sumirajte $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$
- (5 bodova) Zadana je funkcija $f(x) = |x| \{ \sin(x+1) - \sin(x-1) \}$.
(a) Odredite Fourierov integral \hat{f} funkcije f .
(b) Koliko je $\hat{f}(1)$?

3. (5 bodova)

- Izkažite i dokažite teorem o deriviranju slike Laplaceove transformacije.
- Pomoću Laplaceove transformacije izračunajte integral:

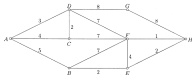
$$\int_0^{\infty} e^{-2t} \cos^2 t \, dt.$$

4. (5 bodova) Pomoću Laplaceove transformacije riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2 e^t,$$

uz početne uvjete $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

- (5 bodova) Konstruirajte bijekcija sa skupa prirodnih brojeva na skup cjelobrojnih rješenja jednadžbe $x_1 + x_2 = 0$.
- (5 bodova) Koliko ima $(2n)$ -znamenastih brojeva koji se sastoje od n parnih i n neparnih znamenaka, pri čemu se nikoje dvije parne znamenke ne nalaze na susjednim pozicijama?
- (5 bodova) Na koliko načina možemo podijeliti 4 jabuke, 5 krušaka i 3 šljive na petero djece, tako da niti jedno dijete ne dobije istovremeno i krušku i jabuku? (Nije nužno da svako dijete dobije neku voćku)?
- (5 bodova) Kvadrat podijelimo dijagonalama na četiri pravokutna trokuta. Zatim svaki od tih trokuta podijelimo ponovno na dva pravokutna (tako da poručimo dužinu od pravog kuta do hipotenuze) i tako nastavimo dalje. Ako s t_n označimo broj trokuta nakon n podjela, odredite:
(a) rekursivnu relaciju za niz t_n
(b) funkciju izvodnicu za niz t_n .
- (5 bodova) Odredite sve moguće vrijednosti parametara $x, y \in \mathbb{N}$ takve da graf s nizom stupnjeva $\langle 1, 1, 1, 2, x, 3, y \rangle$ ima točno jedan ciklus.
- (5 bodova) Odredite najkraći put od vrha A do vrha H na grafu sa slike. Algoritam obavezno provedite!



Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljena je upotreba sličnog podjeteška. Sretno!