Međuispit iz MATEMATIKE 3R, 18.11.2013.

1. **(5 bodova)**

   (a) Razvijte u Fourierov red funkciju definiranu na intervalu $[-3, 3]$ formulom:
   $$f(x) = 2 \cdot \operatorname{sgn}(e^x - 1).$$

   (b) Pomoću dobivenog razvoja, izračunajte sumu:
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

2. **(5 bodova)** Iskažite teorem o Fourierovom integralu, te izvedite Fourierovu integralnu formulu.

3. **(5 bodova)**

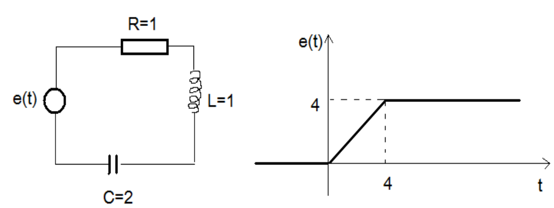
   (a) Iskažite i dokažite teorem o deriviranju originala Laplaceove transformacije.
   (b) Koristeći gornji teorem, odredite $\mathcal{L}(\cos(3t))$.

4. **(5 bodova)** Riješite (po nepoznanici $y(t)$) sljedeću integralnu jednadžbu:
   $$\int_0^t y(u) \cdot (t-u)\, du = y(t) + t^4 - 24.$$

5. **(5 bodova)**

   (a) Iskažite i dokažite teorem o deriviranju slike Laplaceove transformacije.
   (b) Pomoću Laplaceove transformacije, izračunajte integral:
   $$\int_0^{\infty} e^{-2t} t \cos^2 t\, dt.$$

6. **(5 bodova)** Odredite struju $i(t)$ u strujnom krugu sa slike, uz napon na izvoru $e(t)$ dan slikom.



OKRENITE!

7. **(5 bodova)**

   (a) Definirajte prebrojiv skup.

   (b) Dokažite da je disjunktna unija dva prebrojiva skupa prebrojiv skup.

   (c) Dokažite da je skup $S = \{(n, 0) :\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(0, n) :\ n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv.

8. **(5 bodova)** Neka je X skup od 10 elemenata i $\rho \subseteq X \times X$ relacija ekvivalencije na X.

   (a) Koliki je maksimalan broj elemenata u ρ?

   (b) Koliki je maksimalan broj elemenata u ρ, ako je $\rho \neq X \times X$?

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika.

Rješenja međuispita iz MATEMATIKE 3R, 18.11.2013.

1. **(a)** Funkcija je neparna, $a_n = 0,\ n \in \mathbb{N}_0$.

   $b_{2k} = 0,\ b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)},\ k \in \mathbb{N}_0,$

   $$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)} \sin\left(\frac{\pi}{3}(2k+1)x\right),\ x \in \mathbb{R}.$$

   (b) $S(2/3) = f(2/3) = 2\ \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

2. 1. knjižica, str. 42.-43.

3. **(b)** Vrijedi: $\frac{d^2}{dt^2}\cos(3t) = -9\cos(3t)$. Prebacivanjem diferencijalne jednadžbe u donje područje, i korištenjem teorema o deriviranju originala, dobivamo:
   $$s^2F(s) - s = -9F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{s}{s^2+9}.$$

4. $y(t) = 12t^2u(t) + 24u(t)$.

5. Tražimo $F(2)$, za $f(t) = t\cos^2 t$. $F(s) = \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{2}\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}, F(2) = 1/8$.

6. $e(t) = t(u(t) - u(t-4)) + 4u(t-4)$, $i(t) = 2u(t) - 2\cos(t/2)e^{-t/2}u(t) - 2\sin(t/2)e^{-t/2}u(t) - 2u(t-4) + 2\cos\left(\frac{t-4}{2}\right)e^{-\frac{t-4}{2}}u(t-4) + 2\sin\left(\frac{t-4}{2}\right)e^{-\frac{t-4}{2}}u(t-4)$.

7. **(b)** Neka su A i B disjunktni prebrojivi skupovi. Tada postoje bijekcije $f : \mathbb{N} \to A$ i $g : \mathbb{N} \to B$. Definiramo bijekciju $h : A \cup B \to \mathbb{N}$, s
   $$h(2n) = f(n),\ h(2n-1) = g(n),\ n \in \mathbb{N}.$$

   (c) Postoji direktna bijekcija sa $\mathbb{N}$ na oba skupa, $f(n) = (0, n)$, tj. $g(n) = (n, 0)$, pa su oba skupa prebrojiva. Zaključak slijedi direktno po (b) dijelu.

8. **(a)** $\rho = X \times X$, $|\rho| = 10 \cdot 10 = 100$.
   (b) Postoje barem dva elementa koji nisu u relaciji, $(x, y) \notin \rho$. Maksimalan broj elemenata u relaciji se ostvaruje s najmanjim mogućim brojem klasa ekvivalencije, dakle, dvije, $[x] \neq [y]$, i to na način da jedna bude jednočlana, a druga 9-člana. Elementi u različitim klasama nisu u relaciji, pa ρ sadrži maksimalno $100 - 9 \cdot 2 = 82$ para.