

PONOVLJENI ZAVRŠNI ISPIT IZ MATEMATIKE 3R
(pitanja iz trećeg ciklusa nastave)
06. 02. 2007.

1. (3 boda)

- (a) Definiraj izomorfizam grafova.
- (b) Definiraj komplementarni graf zadanog grafa G .
- (c) Nađi graf s pet vrhova koji je izomorfan svom komplementu.

Rješenje: vidi predavanja.

2. (2 boda) Nađi matricu susjedstva A' bridnog grafa određenog grafom G čija je matrica susjedstva reda 4 u kojoj je

$$a_{12} = 1, a_{13} = 1, a_{14} = 1, a_{23} = 0, a_{24} = 1, a_{34} = 1.$$

Rješenje:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. (3 boda)

- (a) Napiši matricu incidencije kotača W_6 .
- (b) Napiši matricu incidencije komplementarnog grafa \overline{W}_6 .
- (c) Nacrtaj \overline{W}_6 .

Rješenje: vidi predavanja.

4. (2 boda) Kolika je bridna povezanost $\lambda(G)$ za potpuni bipartitni graf $K_{3,5}$? Kolika je vršna povezanost $\kappa(G)$ za kotač W_8 ?

Rješenje: $\lambda(K_{3,5}) = 3$, $\kappa(W_8) = 3$.

5. (3 boda)

- (a) Definiraj eulerovski graf.
- (b) Za koje n je potpuni graf K_n eulerovski? Obrazloži.
- (c) Koristeći Fleuryev algoritam nađi jednu eulerovsku stazu u K_5 . Rezultat zapiši s pomoću slijeda vrhova.

Rješenje: Neka su A, B, C, D, E vrhovi postavljeni suprotno kretanju kazaljke na satu. Jedna od eulerovskih staza je

$$A - B - C - D - E - A - C - E - B - D - A.$$

6. (3 boda) Koristeći Dijkstrin algoritam nađi najkraći put od vrha A do vrha G za graf na slici.

Rješenje: Minimalni put je $A - D - F - G$ duljine 7.

7. (4 boda) Problem trgovačkog putnika dan je ovom slikom.

Za koje vrijednosti realnog parametra $w \in \langle 0, +\infty \rangle$ će pohlepni algoritam kao rješenje dati ciklus $A - B - C - D - A$? Za koje vrijednosti $w \in \langle 0, +\infty \rangle$ je taj ciklus optimalno rješenje? Obrazloži tvrdnje.

Rješenje: Za $w \in [2, \infty)$ je zadani ciklus rezultat provedbe pohlepnog algoritma, a za $w \in [4, \infty)$ to je i optimalno rješenje.

PITANJA IZ CIJELOG GRADIVA

1. **(3 boda)** Funkciju $f(x) = \sin x$, $x \in \langle -2, 2 \rangle$ razvij u trigonometrijski Fourierov red. Nacrtaj graf tog reda.

Rješenje:

$$S(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{2n\pi(-1)^{n+1} \sin 2}{n^2\pi^2 - 4} \sin \frac{n\pi x}{2}.$$

2. **(3 boda)**

- (a) Nađi Laplaceovu transformaciju funkcije

$$f(t) = t \cos \frac{t}{2} u(t).$$

- (b) Nađi original transformata

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s}.$$

Rješenje:

- (a)

$$\frac{s^2 - \frac{1}{4}}{(s^2 + \frac{1}{4})^2}.$$

- (b)

$$[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2(t-3)}]u(t-3).$$

3. **(3 boda)** Koliko se peteroznamenastih brojeva može napisati od znamenaka broja 62774277?

Rješenje:

$$3 \cdot \frac{5!}{4! \cdot 1!} + \frac{5!}{3! \cdot 2!} + 3 \cdot \frac{5!}{3! \cdot 1! \cdot 1!} + 2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} + 2 \cdot \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 265.$$

4. **(3 boda)** Koliko cjelobrojnih rješenja ima jednačina

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

uz uvjete

$$0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 7, 0 \leq x_3 \leq 12 ?$$

Rješenje: Pomoću funkcija izvodnica se kao rezultat dobije broj 79.

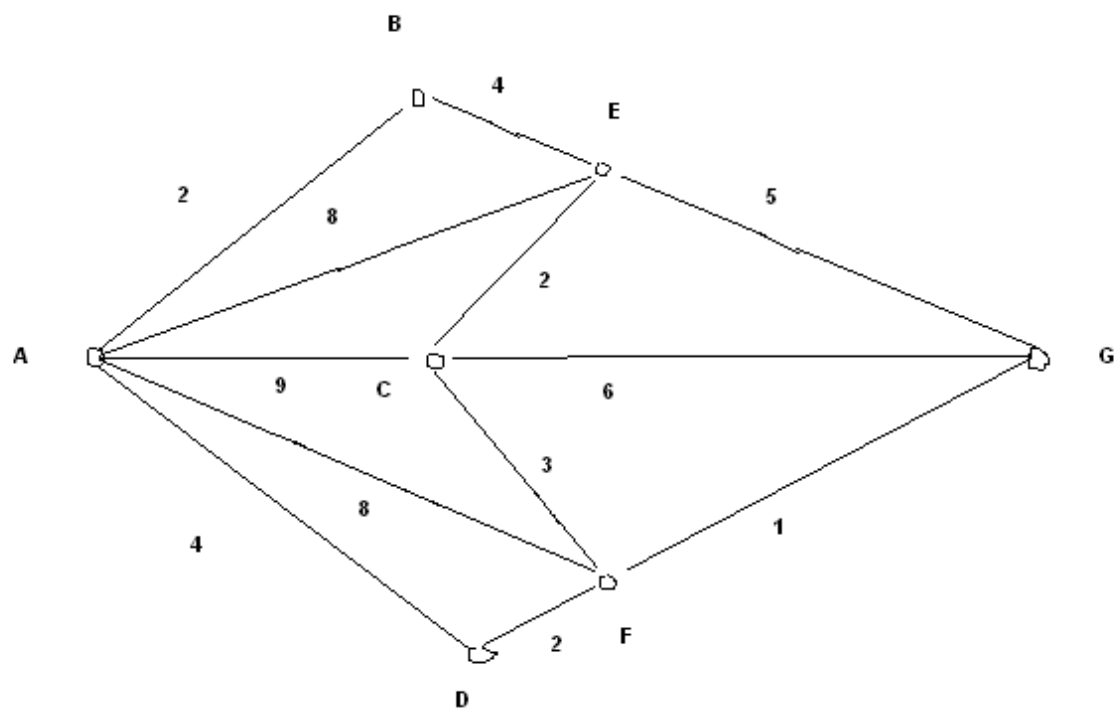
5. **(3 boda)** Riješi kineski problem poštara za graf sa slike. Nađi eksplicitni redoslijed obilaska.

Rješenje: Neka su vrhovi A, B, C, D, E, F, G, H postavljeni na veći kvadrat suprotno kretanju kazaljke na satu. Graf je eulerovski, stoga je potrebno naći eulerovsku stazu, a jedna od takvih staza je

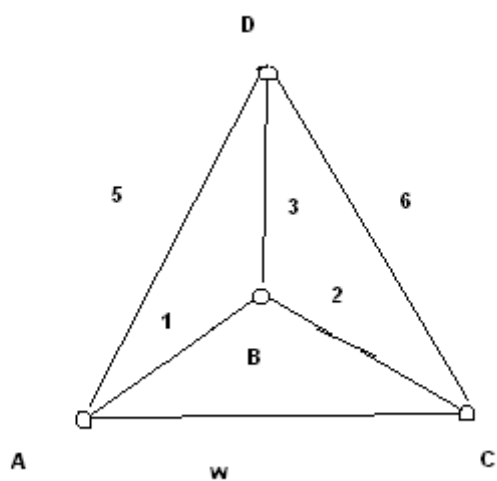
$$A - B - C - D - E - F - G - H - F - D - B - H - A,$$

pri čemu je ukupni put duljine 30.

Graf iz 6. zadatka Ponovljenog završnog ispita iz Matematike 3R, (06/07)



Graf iz 7. zadatka Ponovljenog završnog ispita iz Matematike 3R, (06/07)



Graf iz 5. zadatka Ponovljenog završnog ispita iz Matematike 3R, (06/07) (Pitanja iz cijelog gradiva)

