(TM)
1. Neka su A i B konačni skupovi, tako da prvi ima n elemenata, a drugi m
tada svih funkcija $f: A \Rightarrow B$ ima ukupno m^n, tj $|B^A| = m^n$

VARIJACIJE – (uključuju i permutacije) poredani n-terci elemenata nekog konačnog skupa u kojima je <u>poredak bitan</u>

KOMBINACIJE – prebrojavanje skupova i multiskupova kod kojih <u>poredak nije bitan</u>

(DEF)
2. **Varijacijom bez ponavljanja** reda k n-članog skupa $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$, $k \leq n$, zovemo bilo koji poredani k-terac različitih elemenata iz A_n
$\Rightarrow k = n \Rightarrow$ **permutacije**

3. **(TM)** Broj varijacija reda $k \leq n$ skupa od n elemenata

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

4. (DEF) **Kombinacija bez ponavljanja** reda k n-članog skupa $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$ je bilo koji njegov k-člani podskup

5. (TM) Broj k-članih podskupova n-članog skupa (broj kombinacija reda k bez ponavljanja)

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

6. (PROP.) BINOMNA FORMULA za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

7. (DEF) PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM

Zadan je skup elemenata $A_n = \{a_1, \dots, a_n\}$. Promatramo sve poredane n-terce elemenata tog skupa u kojima se element a_1 pojavljuje n_1 puta, a_2 n_2 puta … pri čemu je dakako $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$. Takve n-terce zovemo permutacijom n-tog reda s ponavljanjem

8. (TM) Broj permutacija n-tog reda k-članog skupa $\{a_1, \dots, a_k\}$ u kojima se element a_i pojavljuje n_i puta, $i = 1, \dots, k$, $n = n_1 + \dots + n_k$

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

9. (TM) MULTINOMNI TEOREM

Broj načina na koji u potenciji $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ možemo odabrati n_1 puta varijablu x_1, n_2 puta x_2, …, n_k puta x_k, i to po jednu iz svakog od n faktora, $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ jednak je $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$

To je upravo multinomni koeficijent uz $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ u razvoju $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots x_k^{n_k}$$

=> MULTINOMNI KOEFICIJENT

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n=\sum_{|\alpha|=n}\binom{n}{\alpha}x^\alpha$$

10. (DEF) VARIJACIJA S PONAVLJANJEM k-tog reda n-članog skupa $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$ je svaki poredani k-terac elemenata iz A_n. Bilo koji element u k-tercu može se i ponavljati

11. (TM) Poredanih k-teraca n-članog skupa ima ukupno n^k

12. (DEF) KOMBINACIJA S PONAVLJANJEM

Neka je $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$. Kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa A_n je bilo koji neporedani k-terac elemenata iz A_n. Članovi k-teraca mogu se ponavljati.

13. (TM) Broj kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa

$$\binom{n+k-1}{k}$$

9. (TM) MULTINOMNI TEOREM

Broj načina na koji u potenciji $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$ možemo odabrati n_1 puta varijablu x_1, n_2 puta x_2, ..., n_k puta x_k, i to po jednu iz svakog od n faktora, $n_1+n_2+\dots+n_k=n$ jednak je $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$

To je upravo multinomni koeficijent uz $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ u razvoju $(x_1+x_2+\dots+x_k)^n$

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n}\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}\cdots x_k^{n_k}$$

=> MULTINOMNI KOEFICIJENT

$$(x_1+x_2+\dots+x_k)^n=\sum_{|\alpha|=n}\binom{n}{\alpha}x^\alpha$$

10. (DEF) VARIJACIJA S PONAVLJANJEM k-tog reda n-članog skupa $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$ je svaki poredani k-terac elemenata iz A_n. Bilo koji element u k-tercu može se i ponavljati

11. (TM) Poredanih k-teraca n-članog skupa ima ukupno n^k

12. (DEF) KOMBINACIJA S PONAVLJANJEM

Neka je $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$. Kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa A_n je bilo koji neporedani k-terac elemenata iz A_n. Članovi k-terca mogu se ponavljati.

13. (TM) Broj kombinacija s ponavljanjem k-tog reda n-članog skupa

$$\binom{n+k-1}{k}$$

(FUI)

14. (TM) FORMULA UKLJUČIVANJA I ISKLJUČIVANJA ili SYLVESTROV TEOREM

Neka su $A_1, \dots, A_n$ konačni skupovi sadržani u X. Onda vrijedi:

a) $$|A_1 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

b) $$|\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = |X| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

AKO NE TRAŽI CIJELI DOKAZ, KORISNO:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|(A\cup B)\cup C| = |A\cup B| + |C| - |(A\cup B)\cap C| = |A| + |B| - |A\cap B| + |C| - [|(A\cap C)\cup(B\cap C)|] = |A| + |B| - |A\cap B| + |C| + |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C| = |A| + |B| + |C| - (|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|) + |A\cap B\cap C|$

DOKAZ Mat. indukcija

1) Vrijedi za $n=2$
2) Pretp. vrijedi za n
3) Dokaz da vrijedi za $n+1$

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$$

$$= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}| =$$

$$= |A_1 \cup \dots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})|$$

Jer tvrdnja vrijedi za dva skupa (tj $n=2$)

$$|A_1 \cup \dots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n|$$

$$+ |A_{n+1}| - \Big[\sum_{i=1}^{n} |A_i \cap A_{n+1}| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_{n+1} \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_{n+1} \cap A_j \cap A_k| + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap \dots \cap A_n \cap A_{n+1}|\Big]$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{n} |A_1 \cap \dots \cap A_{n+1}|$$

15. SURJEKCIJA 1) m različitih predmeta u n različitih kutija

$$|Sur(m,n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

2) m različitih predmeta u n istih kutija

$$|Sur(m,n)| = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

16. (DEF) FUNKCIJA IZVODNICA slijeda $(C_n)_{n \geq 0}$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

17. BINOMNI RED

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k \quad \text{JER} \quad \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

18. (TM) DIRICHLETOVO NAČELO:
Neka je n predmeta smješteno u m kutija i $n > m$. Onda postoji kutija s barem 2 predmeta

19. (TM) Neka je $f: A \to B$ funkcija između konačnih skupova i $|A| > |B|$. Onda f nije injekcija, tj. postoje dva različita elementa a_1 i $a_2 \in A$ t.d. $f(a_1) = f(a_2)$

20. (TM) POOPĆENO DIRICHLETOVO NAČELO
Ako je n predmeta smješteno u m kutija, onda postoji kutija koja sadrži barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ predmeta.

21. (TM) Neka je $f: A \to B$ funkcija među konačnim skupovima $n = |A|$ i $m = |B|$. Onda postoji element $b \in B$ u koji se preslika barem $\left\lfloor \frac{n-1}{m} \right\rfloor + 1$ elemenata iz A

22. (DEF) FIBONACCIJEV SLIJED (F_n) definira se s početnim vrijednostima

$F_0=0$ i $F_1=1$ i rekurzivnom relacijom

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \quad n=2,3,\ldots$$

23. (PROP) ZATVORENA FORMULA ZA FIBONACCIJEV SLIJED

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n=0,1,2\ldots$$

LINEARNE HOMOGENE REKURZIVNE RELACIJE

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ra_{n-r} \quad , n\geq r$$

LINEARNE NEHOMOGENE REKURZIVNE RELACIJE

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+\ldots+c_ra_{n-r}+f(n) \quad , n\geq r$$

24. (PROP) Opće rješenje neke nehomogene rekurzivne jednadžbe je zbroj općeg rješenja njenog homogenog djela te partikularnog rješenja

$$a_n=a_n^{(0)}+a_n^{(p)}$$

25 (TM) PARTIKULARNO RJEŠENJE NEHOMOGENE JEDNADŽBE

1) Neka je nehomogeni dio $f(n)$ rekurzivne relacije zadan kao polinom k-tog stupnja u n. Ako $x=1$ __nije__ korijen karakteristične jdbe $x^r-c_1x^{r-1}-c_2x^{r-2}\ldots-c_r=0$, onda ta rek. rel ima partikularno rješenje koje je također polinom k-tog stupnja u n

$$a_n^{(p)}=A_0+A_1n+\ldots+A_kn^k$$

gdje se konstante A_i određuju uvrštavanjem $a^{(p)}$ u relaciju i izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije od n. Ako $x=1$ __jest__ korijen karakteristične jdbe, i to kratnosti m, onda relacija posjeduje partikularno rješenje oblika

$$a_n^{(p)}=A_0n^m+A_1n^{m+1}+\ldots+A_kn^{m+k}$$

2) Neka je nehomogeni dio od relacije eksponencijalna fja u n, tj $f(n)=C\cdot b^n$. Ako $x=b$ __nije__ korijen karakteristične jdbe, onda postoji partikularno rješenje oblika $a_n^{(p)}=A\cdot b^n$
Ako $x=b$ __jest__ korijen karakteristične jdbe, i to kratnosti m, onda možemo uzeti $a_n^{(p)}=An^mb^n$

$x \neq 1$, $x = b$ (u zadnjem slučaju)

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C (konstanta)	A
Cn	$An+B$
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C \cdot b^n$	$A \cdot b^n$

$x = 1$, $x = b$ (u zadnjem slučaju)

$f(n)$	$a_n^{(p)}$
C (konstanta)	$A \cdot n^m$
Cn	$n^m(An+B)$
$P_k(n)$	$n^m Q_k(n)$
Cb^n	$An^{m}b^n$

$\rightarrow$ kratnost korijena $x = b$