Ispit iz Matematike 3R
15.02.2012.

1. **(5 bodova)**
(a) Funkciju $f(x) = x \cdot (\pi - x)$ definiranu na $[0, \pi]$ razvijte u Fourierov red samo po sinus funkcijama.
(b) Koristeći dobiveni razvoj, izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)}{(2n-1)^3}$.

2. **(5 bodova)**
(a) Iskažite teorem o postojanju i konvergenciji Fourierovog integrala funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
(b) Parno proširenje funkcije

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2], \\ \frac{\pi}{2}, & x \in [\pi/2, \pi], \\ 0, & x > \pi, \end{cases}$$

prikažite u obliku Fourierovog integrala.

3. **(5 bodova)**
(a) Izvedite Teorem o pomaku u Laplaceovoj transformaciji.
(b) Pomoću tog teorema nađite Laplaceovu transformaciju gate funkcije $g_{[a,b]}(t)$, $0 \le a \le b$.

4. **(5 bodova)**
Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$2y(t) + \int_0^{2t} \sin\tau \cdot e^{2t-\tau} d\tau = y'(t),$$

uz početni uvjet $y(0) = 0$.

5. **(5 bodova)**
Neka je T podskup skupa prirodnih brojeva, kodiran na sljedeći način

$$T = \{2^m \cdot 3^n \cdot 5^p \cdot 7^q \cdot 11^r \cdot 13^s |\ m, n, p, q, r, s \in \{\mathbb{N} \cup 0\}\}.$$

Na skupu T definiramo relaciju ekvivalencije:

$$a,\ b \in T, \quad a\ \rho\ b\ \Leftrightarrow \{i|a\ \Leftrightarrow i|b;\ i \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}\}.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije na skupu T.
(b) Odredite kardinalni broj skupa T, kvocijentnog skupa T/ρ, te kardinalni broj razreda ekvivalencije [1] i [2]. Obrazložite odgovore.

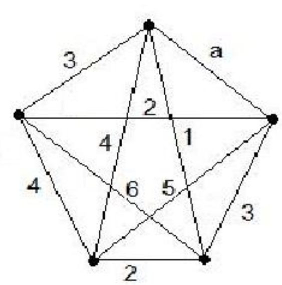
6. **(5 bodova)**
(a) Definirajte kombinacije s ponavljanjem.
(b) Koliko ih ima? Dokažite svoju tvrdnju.

7. **(5 bodova)**
Učenici jednog razreda trebaju pregledati svoje domaće zadaće iz matematike. Sve zadaće se stave na jedan kup, promiješaju i podijele učenicima na pregledavanje. U razredu je 30 učenika, od toga petero ima iz matematike nedovoljan.
Na koliko načina je moguće podijeliti zadaće ako:
(a) svaki nedovoljni treba dobiti na pregledavanje upravo svoju zadaću,
(b) niti jedan nedovoljni ne smije dobiti na pregledavanje svoju zadaću?

8. **(5 bodova)**
Nađite opće rješenje rekurzivne relacije:
$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = (-1)^n + 2n.$$

9. **(5 bodova)**
Graf je *samokomplementaran* ako je izomorfan svome komplementu.
(a) Koliko bridova ima samokomplementaran graf sa n vrhova, $n \geq 4$? Obrazložite.
(b) Koristeći (a)-dio zadatka, dokažite da ne postoji samokomplementarni graf sa 7 vrhova.
(c) Odredite broj vrhova r-regularnog samokomplementarnog grafa, $r \geq 2$. Obrazložite.

10. **(5 bodova)**
U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{N}$ riješite (obosmjernim) pohlepnim algoritmom problem trgovačkog putnika za težinski graf sa slike dolje.



Rješenja ispita 15.02.2012.

1. **(a)** $a_n = 0,\ b_{2k} = 0,\ b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$
   $\Rightarrow\ S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k+1)^3} \sin((2k+1)x)$.
   (b) $S = \frac{\pi}{8} \cdot S(1) = \frac{\pi(\pi-1)}{8}$.

2. **(b)** $A(\lambda) = 0\ \Rightarrow \tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda^2}(\cos\frac{\lambda\pi}{2} - 1) + \frac{\pi}{2\lambda}\sin(\lambda\pi)\right] \cos(\lambda x) d\lambda$.

3. knjiga

4. Laplaceovom transformacijom dobivamo : $2Y(s)+\mathcal{L}(sin(2t)*e^{2t}) = sY(s)$, tj. $2Y(s) + \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{s^2}{4}+1} \cdot \frac{1}{\frac{s}{2}-1}$. Izražavanjem $Y(s)$ i prebacivanjem u donje područje: $y(t) = (\frac{1}{2}te^{2t} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{4}\cos(2t))u(t)$.

5. **(b)** $T \subset \mathbb{N}$ i beskonačan $\Rightarrow |T| = \aleph_0$, T/ρ je zapravo partitivni skup skupa $\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ pa $|T/\rho| = 2^6$. Klasa $[1] = \{1\}$ pa $|[1]| = 1$, a $|[2]| = \aleph_0$ jer je taj skup u bijektivnoj korespondenciji sa $\mathbb{N}$.

6. knjiga

7. **(a)** 25!
   (b) FUI, označimo $A_i = \{$svi rasporedi kad i-ti nedovoljan dobije svoju zadaću$\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Tražimo
   $$|A_1^c \cap \ldots \cap A_5^c| = 30! - 5 \cdot 29! + \binom{5}{2}28! - \binom{5}{3}27! + 5 \cdot 26! - 25!$$

8. Opće rješenje homogene rekurzije $a_n = A \cdot 2^n + Bn \cdot 2^n$, partikularna tražimo u obliku $a_n^{p1} = C\cdot(-1)^n$, $a_n^{p2} = En+F$. Opće rješenje nehomogene rekurzije: $a_n = A \cdot 2^n + Bn \cdot 2^n + \frac{1}{9}(-1)^n + 2n + 4,\ A,\ B \in \mathbb{R}$.

9. **(a)** Graf i njegov komplement imaju zbog izomorfnosti isti broj bridova, zajedno daju potpuni graf $\Rightarrow |E| = \frac{\binom{n}{2}}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$.
   (b) Ako takav postoji, njegov broj bridova $(7 \cdot 6)/4$ nije prirodan broj, kontradikcija.
   (c) Svaki vrh je stupnja r, svaki vrh komplementa stupnja $n-1-r$, zbog izomorfnosti: $n-1-r = r$. Slijedi: $n = 2r+1$.

10. Označimo vrhove sa A, B, C, D, E, od najvišeg u smjeru kazaljke. Krećemo od brida AC (najmanje težine, 1), u oba smjera. Ako je $a \leq 2$, tj. $a = 1, 2$, staza je $D - E - B - A - C - D$, duljine $10 + a$. Ako je $a = 3$, staza je $E - A - C - D - B - E$, duljine 13, ili $E - B - A - C - D - E$, duljine 12. Ako je $a > 3$, staza je $E - A - C - D - B - E$, duljine 13.