DRUGI (ponovljeni) MEĐUISPIT IZ MATEMATIKE 3R
12. 12. 2006.

1. (**2 boda**)
   (a) Definiraj pojam ekvipotentnosti dvaju skupova.
   (b) Da li su segmenti $[a, b]$ i $[c, d]$, pri čemu je $a < b,\ c < d$ ekvipotentni. Dokaži!

2. (**3 boda**) Na skupu $X = A \times A$, gdje je $A = \{0, 1, 2, 3\}$ zadana je relacija ρ sa $(a, b)\rho(c, d)$ onda i samo onda ako je $a + b = c + d$.
   (a) Dokaži da je ρ relacija ekvivalencije.
   (b) Nađi sve elemente razreda $[(2, 2)]$.
   (c) Koliko elemenata ima kvocijentni skup X/ρ?

3. (**2 boda**) Na koliko se načina može rasporediti 7 muškaraca i 2 žene u red ako:
   (a) žene nisu susjedne,
   (b) između žena se nalaze točno dva muškarca

4. (**3 boda**)
   (a) Definirati multinomni koeficijent i formulirati multinomni teorem.
   (b) Odredi koeficijent uz x^{12} u razvoju $(1 + x + x^4)^{15}$.

5. (**2 boda**) Koliko ima djelitelja broja 4800 koji su djeljivi s 3 ili 4?

6. (**2 boda**) Riješi rekurzivnu relaciju
$$a_{n+3} - 5a_{n+2} + 7a_{n+1} - 3a_n = 0,$$
uz početne uvjete $a_0 = -1,\ a_1 = 3,\ a_2 = 7$.

7. (**3 boda**) Na koliko se načina može 10 jabuka i 15 čokoladica raspodijeliti na šestero djece tako da svako dijete dobije jednu ili dvije jabuke i ne više od 4 čokoladice?

8. (**3 boda**) Koliko ima cjelobrojnih rješenja nejednakosti
$$30 \le x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \le 60,$$
gdje su svi $x_i \in \mathbb{N}$?

Zabranjena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

RJEŠENJA drugog (ponovljenog) međuispita iz MATEMATIKE 3R
12. 12. 2006.

1. (**2 boda**)

   (a) Skupovi A i B su ekvipotentni ako postoji bijekcija $f : A \to B$.

   (b) Pravac koji prolazi točkama (a, c) i (b, d) predstavlja bijekciju koja preslikava segment $[a, b]$ na $[c, d]$. Jednadžba te funkcije je

   $$f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x-a) + c.$$

2. (**3 boda**)

   (a)

   $$(a, a)\rho(a, a) \Leftrightarrow a + a = a + a \Rightarrow \text{refleksivnost}$$
   $$(a, b)\rho(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d \Leftrightarrow c + d = a + b \Rightarrow \text{simetričnost},$$
   $$(a, b)\rho(c, d)\wedge(c, d)\rho(e, f) \Rightarrow a+b = c+d \wedge c+d = e+f \Rightarrow a+b = c+d \Leftrightarrow (a, b)\rho(e, f) \Rightarrow \text{tranzitivnost}.$$

   (b) Zbrojevi elemenata u promatranoj klasi moraju biti jednaki $2 + 2 = 4$, pa je stoga

   $$[(2, 2)] = \{(2, 2), (1, 3), (3, 1)\}.$$

   (c) Zbrojevi mogu biti $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, zato imamo 7 klasa (razreda), tj

   $$|X/\rho| = 7.$$

3. (**2 boda**)

   (a) Broj redova u kojima su žene susjedne je $8! \cdot 2!$, a broj svih redova je $9!$, stoga je traženi broj

   $$9! - 2! \cdot 8! = 282240.$$

   (b) Neka su mjesta u redu numerirana brojevima $1, 2, ..., 9$. Pozicije žena su $(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9)$ a za svaki par imamo $2! \cdot 7!$ razdioba, stoga je ukupni broj razdioba $6 \cdot 2! \cdot 7! = 60480$.

4. (**3 boda**)

   (a) Neka je $n_1 + ... + n_k = n,\ n_i \in \mathbb{N}_0$, definiramo multinomni koeficijent kao

   $$\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}.$$

   (b)

   $$(1 + x + x^4)^{15} = \sum_{n_1+n_2+n_3=15} \binom{15}{n_1, n_2, n_3} x^{n_2+4n_3},$$

   odavde je

   $$\langle x^{12}\rangle(1 + x + x^4)^{15} = \binom{15}{12, 0, 3} + \binom{15}{9, 4, 2} + \binom{15}{6, 8, 1} + \binom{15}{3, 12, 0} = 121030.$$

5. (**2 boda**) Vrijedi $4800 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^2$. Neka je

   $$A = \{n : n \text{ dijeli } 4800,\ n \text{ djeljiv brojem} 3\},$$
   $$B = \{n : n \text{ dijeli } 4800,\ n \text{ djeljiv brojem} 4\},$$

   tada je traženi broj

   $$|A \cup B = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 7 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 36.$$

6. (**2 boda**) Karakteristična jednadžba je

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0,$$

nultočke su $x_1 = 1$ (dvostruka),$x_2 = 3$. Opće rješenje rekurzije je

$$a_n^h = A + Bn + C3^n,$$

nakon uvrštavanje u početne uvijete dobijemo

$$A = -1,\ B = 4,\ C = 0,$$

pa je opće rješenje

$$a_n = 4n - 1.$$

7. (**3 boda**) Jabuke dijelimo na $\binom{6}{2} = 15$ načina. Funkcija izvodnica za problem podjele čokoladica je

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^6 = (1 - x^5)^6(1 - x)^{-6}.$$

Broj razdioba čokoladica odgovara koeficijentu uz x^{15}, dakle broj razdioba čokoladica je

$$\langle x^{15}\rangle f(x) = -\binom{6}{3}\binom{-6}{0} - \binom{6}{2}\binom{-6}{5} - \binom{6}{1}\binom{-6}{10} - \binom{-6}{15} = 1246.$$

Ukupno, broj razioba je

$$15 \cdot 1246 = 18690.$$

8. (**3 boda**) Broj rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 60$$

jednak je broju rješenja jednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 60,\ x_6 \in \mathbb{N}_0,\ x_i \in \mathbb{N}$$

tj. $\binom{55+6-1}{55} = \binom{60}{5}$. Da bi dobili traženi broj rješenja od broja $\binom{60}{5}$ treba oduzeti broj rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 29,$$

a sličnim zaključivanjem taj je broj jednak $\binom{24+6-1}{24} = \binom{29}{5}$. Dakle, traženi broj je

$$\binom{60}{5} - \binom{29}{5} = 5342757.$$