# Završni ispit iz Matematike 3R
**27.01.2014.**

1. (**5 bodova**) Dana su dva konačna skupa $A$ i $B$, $|A| = m$ i $|B| = n$, $m, n \in \mathbb{N}$. Iskažite nužne i dovoljne uvjete na parametre $m$ i $n$ za postojanje injektivne funkcije $f : A \to B$, te nužne i dovoljne uvjete za postojanje surjektivne funkcije $f : A \to B$. Uz tako postavljene uvjete, odredite kardinalne brojeve skupa svih injekcija sa skupa $A$ u skup $B$, odnosno skupa svih surjekcija sa skupa $A$ na skup $B$ (nije potrebno dokazivati).

2. (**5 bodova**) U jednoj vrlo perspektivnoj firmi zaposleno je 5 direktora i 10 radnika. Na koliko načina ih je moguće podijeliti na jednog suca i dvije rukometne momčadi (u svakoj momčadi po 7 igrača), ako:
   **(a)** nema dodatnih uvjeta na momčadi,
   **(b)** sudac mora biti radnik,
   **(c)** svi direktori moraju biti u istoj momčadi (sudac mora biti radnik),
   **(d)** u jednoj od momčadi treba biti više direktora nego radnika?

3. (**5 bodova**) Nađite broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 8,$$
   uz uvjete $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, te $x_2, x_3, x_4 \leq 4$.

4. (**5 bodova**) Konačan niz znamenaka iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ smatra se valjanom šifrom ako sadrži paran broj jedinica. Neka je $a_n$ broj valjanih šifri duljine $n$, $n \geq 1$.
   **(a)** Odredite rekurzivnu relaciju za $a_n$.
   **(b)** Odredite $a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

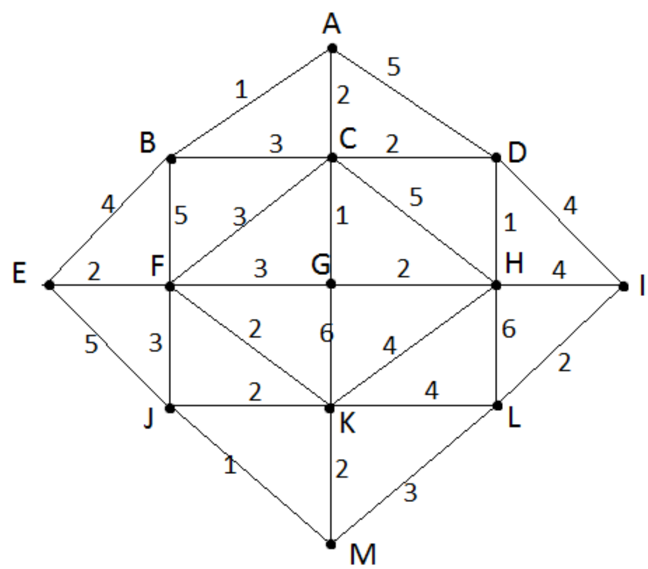
5. (**5 bodova**) Neka je $G$ graf s $2n$ vrhova i $n^2 - 3n$ bridova, $n \geq 4$. Pokažite da u njegovoj matrici susjedstva postoji redak čija je suma elemenata strogo veća od $n - 4$.

6. (**5 bodova**)
   **(a)** Definirajte izomorfizam grafova.
   **(b)** Odredite (i obrazložite) koliko postoji neizomorfnih jednostavnih povezanih grafova s nizom stupnjeva $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3)$.

OKRENITE!

7. (**5 bodova**) Na kongresu su sva poznanstva sudionika uzajamna. Ako se neka dva sudionika ne poznaju, tada od preostalih sudionika barem dvojica poznaju obojicu, a ostali barem jednoga.
**(a)** Dokažite da se svi sudionici mogu smjestiti za okrugli stol tako da jedan do drugoga sjede sudionici koji se poznaju.
**(b)** Dokažite teorem koji ste iskoristili u prvom dijelu zadatka.

8. (**5 bodova**) Zadan je težinski graf sa slike. Neka je $Z = \{I, J, K, L\}$. Izračunajte $d(A, Z)$. Algoritam obavezno treba provesti.




Ispit se piše 2 sata. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Nije dozvoljena upotreba kalkulatora.

# Završni ispit iz Matematike 3R, rješenja
## 27.01.2014.

1. postojanje injekcije $\leftrightarrow$ $m \leq n$, $|Inj(A,B)| = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$, postojanje surjekcije $\leftrightarrow$ $m \geq n$, $|Surj(A,B)| = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^m$.

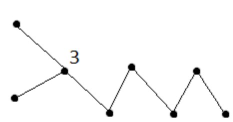
2. **(a)** $\frac{15\cdot\binom{14}{7}}{2}$,
   **(b)** $\frac{10\cdot\binom{14}{7}}{2}$,
   **(c)** $10\cdot\binom{9}{2}$,
   **(d)** $5\cdot\binom{10}{3} + 10\cdot\left(\binom{9}{2}+\binom{5}{4}\binom{9}{3}\right)$.

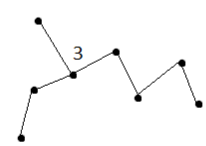
3. (**5 bodova**) Preko fja izvodnica. $[x^7](x^8-1)^2(x^5-1)^3(x-1)^{-5} = \ldots = 285$.

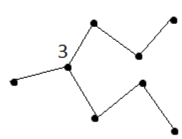
4. **(a)** $a_n = 4^{n-1} + 2a_{n-1},\ a_1 = 3$, **(b)** $a_n = 2^{n-1} + 2^{2n-1},\ n \in \mathbb{N}$.

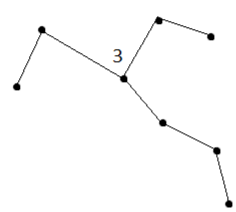
5. Treba pokazati da postoji barem jedan vrh stupnja strogo većeg od $n-4$. Pretpostavimo suprotno, tj. da su svi vrhovi stupnja $\leq n-4$. Tada je $\sum deg(v_i) \leq 2n(n-4)$,što je u kontradikciji s Lemom o rukovanju, $\sum deg(v_i) = 2\cdot(n^2-3n)$.

6. **(a)** Knjiga, **(b)** Po lemi o rukovanju, grafovi su stabla. Postoje 4 neizomorfne konfiguracije (središnji vrh stupnja 3, konfiguracije se razlikuju po broju vrhova u pojedinim *granama*):




7. **(a)** Ako ima $n$ sudionika, problem modeliramo grafom s $n$ vrhova, a bridovima označavamo poznanstva. Treba pokazati da je graf hamiltonovski, što jest po Oreovom teoremu (suma stupnjeva nesusjednih vrhova je barem $n$). **(b)** Oreov teorem o hamiltonovskim grafovima.

8. $d(A,Z) = 7$. Dijkstrin algoritam provodimo iz vrha $A$, dovoljno do prvog ulaska u skup $Z$.