Drugi međuispit iz Matematike 3R
02.12.2009.

1. (3 boda)
Dokažite da su skupovi $\langle -4, 4\rangle$ i $\mathbb{R}$ ekvipotentni.

2. (3 boda)
Na skupu $X = \{1, 2, ..., 10\}$ zadana je relacija ekvivalencije ρ sa :

$$x \,\rho\, y \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - y^2 = 7k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

a) (**2b**) Izračunajte $|X/\rho|$.
b) (**1b**) Koliko elemenata ima $[2]$?
Napomena: Ne trebate provjeravati da je ρ relacija ekvivalencije.

3. (4 boda)
U školi ima 502 učenika. 213 ne trenira niti jedan sport, nogomet trenira njih 267, a nogomet i košarku 99. Koliko ima učenika koji treniraju samo košarku? Na koliko se načina mogu sastaviti dvije momčadi od 5 košarkaša ako u svakoj smije biti najviše jedan košarkaš koji trenira i nogomet?

4. (4 boda)
Koliko ima putova u cjelobrojnoj koordinatnoj mreži od točke $(0, 0)$ do točke $(8, 10)$ koji prolaze točkom $(3, 3)$, a ne prolaze točkom $(5, 5)$? Put se sastoji od koraka udesno $(m, n) \to (m+1, n)$ ili gore $(m, n) \to (m, n+1)$.

5. (4 boda)
Pomoću formule uključivanja i isključivanja nađite broj deranžmana n - članog skupa.
Deranžmani su bijekcije $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$ koje nemaju fiksnih točaka, tj. vrijedi $f(i) \neq i, \forall i = 1, ..., n$.

6. (4 boda)
Na koliko načina Anica, Marica, Pero i Ivica mogu podijeliti 40 jabuka, ako Ivica mora dobiti barem jednu, Pero mora dobiti barem dvije, a Marica i Anica ne smiju dobiti više od 5 jabuka?

7. (3 boda)
Zadana je kocka stranice 2 u koju je razmješteno 25 točaka. Dokažite da postoje 4 točke koje se sve nalaze unutar kugle promjera $\frac{7}{4}$.

Zabranjena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

Rješenja drugog međuispita iz Matematike 3R
02.12.2009.

1. (3 boda)
$f(x) = tg\frac{\pi}{8}x$

2. (3 boda)
a) $|X\backslash_\rho| = 4$
b) $|[2]| = 3$

3. (4 boda)
Samo košarku igra 22 učenika. Dvije momčadi mogu se složiti na

$$\frac{1}{2}\left[\binom{22}{5}\binom{17}{5} + \binom{22}{4}\binom{99}{1}\binom{18}{5} + \binom{22}{5}\binom{17}{4}\binom{99}{1} + \binom{22}{4}\binom{99}{1}\binom{18}{4}\binom{98}{1}\right]$$

načina.

4. (4 boda)
$\binom{6}{3}\binom{12}{5} - \binom{6}{3}\binom{4}{2}\binom{8}{3}$

5. (4 boda)
Knjiga, str. 48., primjer 5.

6. (4 boda)
$x^3(1+x+...+x^5)^2(1+x+x^2+...)^2 = x^3(1-x^6)^2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{4+k-1}{k}x^k$
Koeficijent uz x^{40} je

$$\binom{40}{37} - 2\binom{34}{31} + \binom{28}{25}.$$

7. (3 boda) Kocku podijelimo na 8 manjih kocaka. Prema Dirichletovom principu postoji kocka koja sadrži 4 točke. Svakoj je kocki opisana sfera promjera $\sqrt{3}$ pa tvrdnja vrijedi.