

Prvi međuispit iz Matematike 3E i 3R

21.10.2009.

1. (4 boda)

Dokažite da je sustav funkcija

$$1, \cos(\pi x), \sin(\pi x), \dots, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x), \dots \quad n \in \mathbb{N}$$

ortogonalan na intervalu $[-1, 1]$.

2. (4 boda)

a) (2b) Razvijte u Fourierov red funkciju zadanu na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \\ -1 & , \quad -\pi < x < -\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < x < \pi \end{cases}$$

b) (1b) Nacrtajte graf dobivenog Fourierovog reda.

c) (1b) Izračunajte sumu reda

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

3. (4 boda)

Funkciju $f(x) = e^{-|x|}$ prikažite pomoću Fourierovog integrala.

4. (1 bod)

Kada za funkciju $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je eksponencijalog rasta?

5. (4 boda)

a) (2b) Izvedite formulu za Laplaceovu transformaciju periodičke funkcije f temeljnog perioda T .

b) (2b) Izračunajte Laplaceovu transformaciju funkcije $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

6. (4 boda)

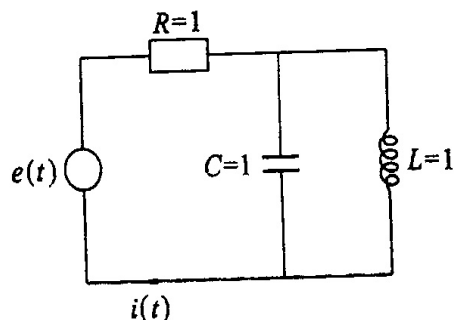
Riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y''(t) + y(t) = 2 \cos t \cdot g_{[0, \pi]}(t)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

7. (4 boda)

Izračunajte struju $i(t)$ u strujnom krugu sa slike uz početni napon $e(t) = u(t - 3)$.



Zabranjena je upotreba kalkulatora i šalabahtera. Ispit se piše 1h i 30 min.

Rješenja prvog međuispita iz Matematike 3E i 3R
21.10.2009.

1. (4 boda)

Potrebno je pokazati

- $\int_{-1}^1 1 \cdot \sin(n\pi x) = 0$
- $\int_{-1}^1 1 \cdot \cos(n\pi x) = 0$
- $\int_{-1}^1 \cos(n\pi x) \sin(m\pi x) = 0$
- $\int_{-1}^1 \cos(n\pi x) \cos(m\pi x) = 0, m \neq n$
- $\int_{-1}^1 \sin(n\pi x) \sin(m\pi x) = 0, m \neq n$

2. (4 boda)

- a) **(2b)** $S(x) = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{5} \cos 5x + \dots \right)$
c) **(1b)** Suma je jednaka $S(0) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

3. (4 boda)

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{1+\lambda^2} d\lambda$$

4. (1 bod)

Knjiga str 67.

5. (4 boda)

- a) **(2b)** Knjiga, str 81.

b) **(2b)** $F(s) = \frac{1}{s(1-e^{-2\pi s})} \left(1 - 2e^{-\frac{\pi}{2}s} + 2e^{-\frac{3\pi}{2}s} - e^{-2\pi s} \right)$

6. (4 boda)

$$y(t) = \sin(t)u(t) + t \sin(t)u(t) + (t - \pi) \sin(t - \pi)u(t - \pi)$$

7. (3 boda) $i(t) = u(t - 3) - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(t - 3)\right)u(t - 3)e^{-\frac{1}{2}(t-3)}$