Zad 1 (MI 2007)

a) Koliko ima 10-eroznamenkastih brojeva koji se sastoje od po dvije jedinice, dvije dvojke, dvije trojke, dvije četvorke i dvije petice?

b) 10-eroznam. brojevi kao u a), ali dodatno susjedne znamenke moraju biti različite.

Rj:

a) $2\times 1,\ 2\times 2,\ 2\times 3,\ 2\times 4,\ 2\times 5$

- na raspolaganju imamo 10 elemenata koji dolaze u parovima → kombinacije s ponavljanjem:

$$|S| = \frac{10!}{2!2!2!2!2!} = 113400$$ (broj svih takvih brojeva).

$S = \{$svi brojevi opisani s a)$\}$.

b) $A_i = \{$skup svih brojeva opisanih u a) kojima su znamenke i susjedne$\}$; $i = 1, \dots, 5$.

$A_2 = \{$skup svih onih kojima su znamenke 2 susjedne$\}$.

Primjer: $22z_3 \dots z_{10}$, ili $z_1 22 z_4 \dots z_{10}$.

- Mi tražimo one kojima su ne susjedne znamenke različite, to znači: $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5$

- Za računanje: $|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5|$ koristimo FUI

naime:
$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5}| =$$
$$= |S| - \underbrace{|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|}_{\text{na ovo primjenjujemo FUI}}$$

ovo znamo iz a) dijela.

Zad 2 (KPZ 2014)

Na raspolaganju imamo 7 različitih lopti (različ. tipova lopti). Ana već ima loptu tipa 1, Pero ima loptu tipa 2, Tomi ima loptu tipa 3. Na koliko načina možemo pokloniti po jednu loptu Ani, Peri i Tomiju, ali tako da ne dobiju loptu koju već imaju?

Rj: Mi dijelimo 7 lopti, osobe imaju lopte već otprije.

$A = \{$ ~~i-toj osobi~~ Ani dademo loptu tipa 1 $\}$. skup svih takvih mogućnosti dodjeljivanja

$P = \{$ Peri dademo loptu tipa 2 $\}$

$T = \{$ Tomiju dademo loptu tipa 3 $\}$.

Nas zanima skup $\overline{A} \cap \overline{P} \cap \overline{T}$, odnosno broj elemenata tog skupa $|\overline{A} \cap \overline{P} \cap \overline{T}|$.

Opet FUI: $|\overline{A} \cap \overline{P} \cap \overline{T}| = |S| - |A \cup P \cup T| =$

$$= |S| - \Big(|A| + |P| + |T| - \big(|A\cap P| + |A \cap T| + |P \cap T|\big) + |A \cap P \cap T|\Big)$$

$$= 7\cdot 6\cdot 5 - \big(6\cdot 5 + 6\cdot 5 + 6\cdot 5 - (5+5+5) + 1\big)$$

$$= 7\cdot 6\cdot 5 - 76 = \underline{\underline{134}}.$$

Zad 3 (Z1, 2015) ③

Na koliko načina možemo podijeliti 5 različ. pizza na 3 (različ.) studenta t.d. svaki student dobije barem jednu pizzu?

Rj:

$A_i = \{ i\text{-ti student nije dobio pizzu} \}$.

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3|)$$

$$+ (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$ nije dozvoljena podjela. (tj. nije podjela)

$$= 3^5 - (2^5 + 2^5 + 2^5 - (1+1+1) + 0) =$$

za svaku pizzu imamo 3 mogućnosti kojem studentu pripada.

$$= \underline{150}$$

- Primijetimo da je ovo upravo formula za broj surjekcija s 5 članog skupa na 3-člani.

za svaki element kodomene $\exists$ (barem jedan) element domene koji se u njega preslikava.

Zad 4. (2MI, 2010)

Odredite FI za niz $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = 2k-1 \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (n \text{ neparan}) \\ 0, & n = 2k \quad (n \text{ paran}) \end{cases}$

Rj:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1} \quad (\text{zapis u obliku reda potencija})$$

- Primijetimo: $$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (x^2)^k \overset{\substack{\text{suma geometrijskog} \\ \text{reda.}}}{=} \frac{1}{1-x^2}$$

$\Rightarrow$ integriranjem dobivamo:

$$f(x) = \int_0^x \frac{ds}{1-s^2} + f(0) = \int_0^x \frac{1}{1-s^2}\,ds \quad (\text{jer } f(0) = 0)$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2(1+s)}\,ds + \int_0^x \frac{1}{2(1-s)}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{d(1+s)}{1+s} - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{d(s-1)}{s-1}$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|.$$

Zad 3 Nađite broj cjelobrojnih rješenja nejednadžbe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 8$$

uz uvjete $x_i \geq 0$, $i = 1,2,3,4$ i $x_2, x_3, x_4 \leq 4$.

Rj: • Nejednadžba $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 8$ ekvivalentna je

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7$$

• za svaku četvorku koja zadovoljava (*), $\exists!$ $x_5 \geq 0$ t.d. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$.

• Napišimo funkciju izvodnicu za niz $(a_n)_n$ — broj cjelobrojnih rješenja jedn. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = n$ uz gornje uvjete.

• FI: $f(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots)^2}_{x_1 \text{ i } x_5} \underbrace{(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3}_{x_2,\, x_3,\, x_4}$

• tražimo $[x^7]$ u f:

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \left(\frac{1-x^5}{1-x}\right)^3 = \frac{(1-x^5)^3}{(1-x)^5} =$$

$$= (1 - 3x^5 + 3x^{10} - x^{15}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-5}{k} \overset{(-x)^k}{(-1)^k x^k}$$

$$= (1 - 3x^5 + 3x^{10} - x^{15}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k$$

• $[x^7] f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ k=7}}{\binom{11}{4}} - 3 \underset{\substack{\uparrow \\ k=2}}{\binom{6}{4}} = \underline{\underline{285}}.$

Zad 2: (MI, 2009)

Na koliko načina Anica, Marica, Pero i Ivica mogu podijeliti 40 jabuka, ako Ivica mora dobiti barem jednu, Pero barem dvije, a Marica i Anica ne smiju dobiti više od 5 jabuka?

Rj:

Anica može dobiti : $0, 1, \dots, 5$

Marica —||— : $0, 1, \dots, 5$

Pero —||— : $2, 3, 4, \dots$

Ivica —||— : $1, 2, \dots$

- odredimo FI za niz a_n, gdje je a_n = broj razdioba n jabuka na A, M, P, I prema gornjim pravilima.

$$f(x) = \underbrace{(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2}_{\text{Anica i Marica}} \underbrace{(x^2+x^3+x^4+\dots)}_{\text{Pero}} \underbrace{(x+x^2+x^3+\dots)}_{\text{Ivica}}$$

$$= \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^2 x^2 (1+x+x^2+\dots)\, x\, (1+x+x^2+\dots)$$

$$= \frac{(1-x^6)^2}{(1-x)^2}\, x^3 \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = x^3 \frac{(1-x^6)^2}{\cancel{(1-x)^4}} (1-x)^{-4} =$$

$$= x^3 (1-x^6)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4+k-1}{k} x^k =$$

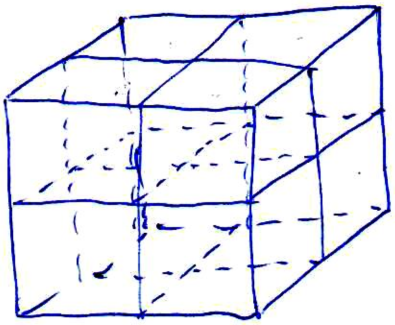
$$= x^3 (1-2x^6+x^{12}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{k} x^k$$

$$[x^{40}]f(x) = \binom{40}{37} - 2\binom{34}{31} + \binom{28}{25} = \underline{1188}.$$

$k=37$ $\quad$ $k=31$ $\quad$ $k=25$

Zad 4. Zadana je kocka stranice duljine 2 u koju je razmješteno 25 točaka. Dokažite da postoje 4 točke koje se nalaze unutar kugle promjera 7/4.

Rj:



- podijelimo kocku na 8 manjih kocki duljine stranice 1.
- prema PDP: postoji kocka koja sadrži barem 4 točke.
- kugla opisana toj kocki ima promjer dijagonale te kocke tj. $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$. pa su te točke sadržane u kugli promjer $\frac{7}{4}$.

(DZ) Na raspolaganju imamo 8 kovanica od 1 kune, 6 kovanica od dvije kune i 4 kovanice od 5 kuna. Na koliko načina možemo isplatiti svotu od 14 kuna?

$$f(x) = (1+x+\dots+x^8)(1+x^2+x^4+\dots+x^{12})(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})$$

$[x^{14}]f(x) = ?$

Tipični član $x^{n_1+2n_2+5n_3}$, $0 \le n_1 \le 8$, $0 \le n_2 \le 6$, $0 \le n_3 \le 4$.

Zad 5. (MI, 2008)

a) Nađite FI za niz $a_n = \frac{2n}{n^2+4n+3}$, $n \geq 0$.

b) Nađite niz čija je FI $f(x) = \frac{2x}{x^2+4n+3}$.

Rj:

a) $a_n = \frac{2n}{n^2+4n+3} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+3} = \underbrace{-\frac{1}{n+1}}_{b_n} + \underbrace{\frac{3}{n+3}}_{c_n}$ (DZ).

$=: b_n + c_n$.

Promotrimo: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n = -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

odnosno $-xg(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ / deriviramo $\Rightarrow$

$-(xg(x))' = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ / $\int_0^x$

$-xg(x) = -\log|x-1| \Rightarrow g(x) = \frac{\ln|x-1|}{x}$

Nadalje, slično:

$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} x^n = \frac{3}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} x^{n+3}$

odnosno $\frac{x^3 h(x)}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+3} x^{n+3}$ / $'$ deriviramo $\Rightarrow$

$\left(\frac{x^3 h(x)}{3}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) - 1 - x = \frac{1}{1-x} - 1 - x$ / $\int_0^x$

$\frac{x^3 h(x)}{3} = -\ln|x-1| - x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow h(x) = \frac{3}{x^3}\left(-\ln|x-1| - x - \frac{x^2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ Konačno $f(x) = g(x) + h(x) = \frac{\ln|x-1|}{x} - \frac{3\ln|x-1|}{x^3} - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{2x}$

b) $$f(x) = \frac{2x}{x^2+4x+3} = -\frac{1}{1+x} + \frac{3}{3+x} =$$

$$= -\frac{1}{1-(-x)} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\left(1-\frac{-x}{3}\right)} =$$ / formula geom. reda.

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(-(-1)^n + (-1)^n\frac{1}{3^n}\right)}_{a_n} x^n$$

$$\rightarrow \quad a_n = (-1)^n\left(3^{-n}-1\right) \; ; \quad n \geq 0.$$

ivan.cekovic@fer.hr