MATEMATIKA 3R

FORMULE

FER, Zagreb

Marko NUFC

FORMULE:

1. FOURIEROV RED

PERIODIČNE FUNKCIJE:
Sinusoida: $\boldsymbol{f(x) = C\sin(\omega x + \varphi)}$
C – amplituda, ω – frekvencija, φ - fazni pomak

Ako postoji T>0 takda da za svaki *x* iz domene funkcije *f* vrijedi:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x+T)}$$

Broj T se naziva period od *f*. Najmanji zajednički period (ako postoji) nazivamo **temeljni/osnovni period.**
Sumjerljivost ako je omjer perioda dvaju periodičnih funkcija T_1 i T_2 racionalan broj.

Parna funkcija: $f(-x) = f(x)$

$$f_p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

Neparna funkcija: $f(-x) = -f(x)$

$$f_n(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$$f(x) = f_p(x) + f_n(x)$$

TRIGONOMETRIJSKI FOURIEROV RED
Ortogonalnost $\boldsymbol{\int_a^b f(x)g(x)dx = 0}$

Dirichletovi uvjeti: *f* po dijelovima neprekinuta i da je *f* monotona ili ima najviše konačni broj strogih ekstrema.

Trigonometrijski Fourierov red: period T=b – a

$$\boldsymbol{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi x}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi x}{T}\right)}$$

Koeficijenti:

$$\boldsymbol{a_0 = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)dx}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{T}dx}$$

$$\boldsymbol{b_n = \frac{2}{T}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{T}dx}$$

Fourierov red parnih funkcija:
$b_n = 0$,

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx}$$

$$\boldsymbol{f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2n\pi x}{T}}$$

Fourierov red neparnih funkcija:
a_0=0, a_n=0,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin\frac{n\pi x}{L}$$

SVOJSTVA FOURIEROVOG REDA

Diskretni spektar periodične funkcije:
Trigonometrijski red se može zapisati kao:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \, cos \, n\omega x + b_n \, sin \, n\omega x) = \pm\frac{1}{2}c_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n sin(n\omega_0 x + \varphi_0)$$

$$c_0 = |a_0|, \quad c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad tg\varphi_0 = \frac{a_n}{b_n}$$

c_n – amplituda n-tog harmonika, φ_0 - fazni pomak n-tog harmonika

Deriviranje Fourierovog reda:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, cos \, nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sin \, nx$$

Derivirani Fourierov red:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, n \, cos \, nx + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) n \, sin \, nx$$

Integriranje Fourierovog reda:
Početna formula koja se integrira:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} sin \, nx, \qquad -\pi < x < \pi$$

$$\int x = 2\int\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} sin \, nx \quad \to \quad x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{cos \, nx}{n} + C$$

Konstanta integracije C je jednaka a_0 (*pogledati kako se računa a_0*).

Parsevalova jednakost:

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{2}{T}\int_a^b |f(x)|^2 dx$$

2. FOURIEROV INTEGRAL

FOURIEROV INTEGRAL:
Predstavlja Fourierov red za NEPERIODIČNE funkcije. Konačan interval postaje beskonačan, a periodičnu funkciju ćemo prikazati pomoću kontinuirano mnogo harmonika.

$$\boldsymbol{f(x) = \int_0^\infty (A(\lambda)cos\lambda x + B(\lambda)sin\lambda x)d\lambda}$$

Kosinusni spektar:
$\boldsymbol{A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)cos\lambda\xi \, d\xi}$

Sinusni spektar:
$\boldsymbol{B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)sin\lambda\xi \, d\xi}$

Amplitudni spektar određuju kosinusni i sinusni spektar: $am(\lambda) = \sqrt{A(\lambda)^2 + B(\lambda)^2}$

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA:

Spektralna funkcija:
Fourierov integral se može zapisati u kompleksnom obliku.

$$f(x) = \int_0^\infty e^{i\lambda x} F(\lambda) d\lambda$$
$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi$$

F(λ) je spektralna funkcija od *f*.

Fourierova transformacija:
Fourierov transformat:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e^{-i\lambda\xi} f(\xi) d\xi}$$

Preslikavanje koja funkciji *f* pridružuje funkciju $\hat{f}$ naziva se Fourierova transformacija:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{e^{i\lambda x}\, \hat{f}(\lambda) d\lambda}$$

3. LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Laplaceov transformat:

$$\boldsymbol{F(S) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt}$$

f(t) – ORIGINAL ili GORNJA FUNKCIJA, a F(s)=$\mathcal{L}\,(f(t))$ - SLIKA ili DONJA FUNKCIJA

Apsolutna vrijednost kompleksnog broja e^z:

$$z = x + iy$$
$$e^z = e^{x+ij} = e^x * e^{ij} = e^x(cosx + siny)$$
$$|e^z| = |e^{x+ij}| = |e^x| * (\cos x + i \sin y) = e^x\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = e^x$$
$$|e^z| = e^x = e^{Rez}$$

Posebno, za realan broj α: $|\boldsymbol{e^{i\alpha}}| = \mathbf{1}$

Linearnost Laplaceove transformacije:
Ako je $f(t) \multimap F(s)$, $g(t) \multimap G(s)$, tada vrijedi:

$$\boldsymbol{\alpha f(t) + \beta g(t) \multimap \alpha F(s) + \beta G(s)}$$

PRIMJERI LAPLACEOVIH TRASFORMACIJA:

1. Step funkcija

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \quad \textit{zove se STEP FUNKCIJA ili JEDNIČNA FUNKCIJA}$$

$$\boldsymbol{u(t) \multimap \frac{1}{s}}$$

2. Eksponencijalna funkcija
Za svaki realni ili kompleksni broj α vrijedi:

$$\boldsymbol{e^{\alpha} \multimap \frac{1}{s-\alpha}}$$

3. Trigonometrijske i hiperboličke funkcije
Trigonometrijske funkcije:

$$\boldsymbol{\sin \omega t \multimap \frac{\omega}{s^2+\omega^2}} \qquad \boldsymbol{\cos \omega t \multimap \frac{s}{s^2+\omega^2}}$$

Hiperboličke funkcije:

$$\boldsymbol{sh\ \omega t \multimap \frac{\omega}{s^2-\omega^2}} \qquad \boldsymbol{ch\ \omega t \multimap \frac{s}{s^2-\omega^2}}$$

4. Polinomi
Vrijedi:

$$\boldsymbol{1 \multimap \frac{1}{s}}$$

$$\boldsymbol{t \multimap \frac{1}{s^2}}$$

$$\boldsymbol{t^n \multimap \frac{n!}{s^{n+1}},\ \ n \epsilon \mathbb{N}}$$

SVOJSTVA FOURIEROVE TRANSFORMACIJE

1. Množenje varijable konstantom

Ako je *f(t)* ⊶*F(S)*, onda vrijedi:

$$\boldsymbol{f(at) \multimap \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)}$$

$$\boldsymbol{F(bs) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{1}{b}f\left(\frac{t}{b}\right)}$$

2. Teorem o prigušenju

Prigušenjem nazivamo funkciju $e^{-at}f(t)$.

$$\boldsymbol{e^{-at}f(t) \multimap F(s+a)}$$

Prigušenje u gornjem području odgovara pomak ulijevo u donjem području.

3. Teorem o pomaku originala

Pomaku originala udesno odgovara prigušenje u donjem području.

$$\boldsymbol{f(t-a)u(t-a) \multimap e^{-as}F(s)}$$

4. Gate funkcija

$$g_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1\,, a \leq t \leq b \\ 0, inače \end{cases}$$

$$\boldsymbol{g_{[a,b]}(t) = u(t-a) - u(t-b)u(t) \multimap \frac{e^{-sa}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s}}$$

5. Deriviranje originala

$$\boldsymbol{f'(t) \multimap sF(s) - f(0)}$$

$$\boldsymbol{f^{(n)}(t) \multimap s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)}$$

6. Deriviranje slike

$$\boldsymbol{(-t)f(t) \multimap F'(s)}$$

$$\boldsymbol{(-1)^n f(t) \multimap F^{(n)}(s) \quad ,tj. \qquad t^n f(t) \multimap (-1)^n F^{(n)}(s)}$$

7. Integriranje slike

Ako je original $\frac{f(t)}{t}$ tada vrijedi:

$$\boldsymbol{\frac{f(t)}{t} \multimap \int_s^\infty F(s)ds}$$

8. Integriranje originala

Ako je *f(t)* original, tada je i

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$$

također original i vrijedi:

$$\boldsymbol{\int_0^t f(\tau)d\tau \multimap \frac{F(s)}{s}}$$

9. Preslikavanje periodičkih funkcija

$$\boldsymbol{F(s) = \frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}f(t)dt}$$

T – period

INVERZNA TRANSFORMACIJA
Računanje originala *f(t)* iz poznate slike *F(s)*

$$\boldsymbol{f(t) = \mathcal{L}^{-1}F(s)}$$

Koriste se sva svojstva Laplaceove transformacije, u obrtnutom smjeru.

KONVOLUCIJA
Konvolucija originala f_1 *i* f_2 definirana je integralom:

$$\boldsymbol{(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau}$$

Konvolucija originala odgovara umnožak slika:

$$\boldsymbol{f_1(t) * f_2(t) \multimap F_1(s)F_2(s)}$$

DIFERENCIJALNE I INTEGRALNE JEDNADŽBE
Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantim koeficijentima
Koristi se teorem o deriviranju.
Cauchyjev problem:

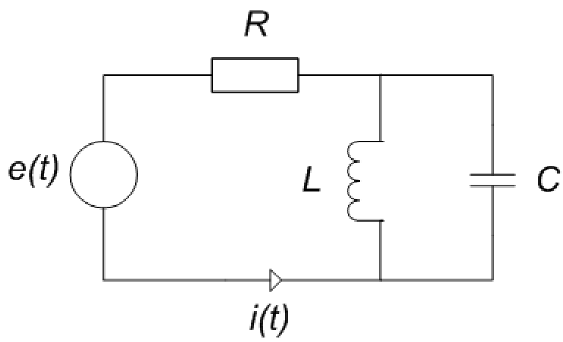
$$\boldsymbol{x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)}$$

$$\boldsymbol{x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}}$$

Preslikavanje u donje područje:
$x(t) \multimap X(s)$
$x'(t) \multimap sX(s) - x(0)$
$x''(t) \multimap s^2X(s) - s\,x(0) - x'(0)$
…
$x^{(n)}(t) \multimap s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - \cdots - sx^{(n-2)}(0) - x^{(n-1)}(0)$
$f(t) \multimap F(s)$

Linearne integralne jednadžbe konvolucijskog tipa
Koristi se teorem o konvoluciji.

PRIMJENE



e(t) – napon u trenutku t
i(t) – jakost struje u trenutku t
R – otpor otpornika
L – induktivitet zavojnice
C – kapacitet kondenzatora

Impedencije u donjem području:
$\boldsymbol{R \multimap R}$
$\boldsymbol{L \multimap Ls}$
$\boldsymbol{C \multimap \frac{1}{Cs}}$

Ohmov zakon:

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{e(t)}{z(t)} \multimap I(s) = \frac{E(s)}{Z(s)}}$$

Serijski spoj:

$$\boldsymbol{Z = \sum_{i=1}^{n} Zi}$$

Paralelni spoj:

$$\boldsymbol{\frac{1}{Z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{Zi}}$$

DIRACOVA FUNKCIJA

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

$$\boldsymbol{\delta(n) \multimap 1, \qquad \delta^n(n) \multimap s^n}$$

4. SKUPOVI

Skup – bilo koja množina elemenata
$\mathbb{N}$ – $skup\ prirodnih\ brojeva\ (1,2,3\ldots)$, $\mathbb{Z} - skup\ cijelih\ brojeva\ (\ldots,-2,-1,0,1,2\ldots), \mathbb{Q} - racionalni\ br.$
$\mathbb{R}$ – $skup\ realnih\ brojeva\ (racionalni\ i\ neracionalni\ brojevi), \mathbb{C} - kompleksni\ brojevi$

Surjekcija – ako za funkciju f: A → B kažemo da je njenja slika jednaka čitavoj kodomeni, tj. f(A)=B.
Svaki element kodomene B je 'pogođen' s bar jednim elementom domene A.
Injekcija – ako za funkciju f: A → B kažemo da različitim vrijednostima argumenta pridružuje različite vrijednosti u slici, tj. $a_1 \neq a_2$, onda je $f(a_1) \neq f(a_2)$.
Bijekcija – funkcija f: A → A preslikava iz skupa A u samog sebe, tj. zove se permutacija skupa A.

Algebra skupova:
Unija – $A \cup B - odnosno\ A\ ili\ B$
Presjek - $A \cap B - odnosno\ A\ i\ B$
Razlika – $A \setminus B$
Komplement - $\overline{A}$

Kardinalni broj skupa |A| - za neprazan skup A koji je konačan ako postoji prirodan broj n – *kardinalni br.*

Ekvipotentan skup – skup A je jednakobrojan sa skupom B ako postoji bijekcija f: A → B.
Svojstva:
1. ***Refleksivnost*** - A~A za svaki skup A
2. ***Simetričnost*** – ako je A~B onda je i B~A
3. ***Tranzitivnost*** – ako je A~B i B~C, onda je A~C
Ako su skupovi ekvipotentni onda imaju isti kardinalni broj: |A|=|B|.

Alef nula – kardinalni broj prebrojivog skupa: $\aleph_0$
Kontinuum – kardinalni broj skupa R: |R|=c

5. BINARNE RELACIJE

Binarna relacija
Binarna relacija na skupu X je bilo koji neprazan podskup $\rho \subseteq X\ x\ X$. Kažemo da su elementi x i y u relaciji ρ (ili x je u relaciji s y) ako je (x,y)∈ ρ. U tom slučaju pišemo x ρ y.

Za binarnu relaciju ρ na X kažemo da je:
1. refleksivna ako vrijedi (∀x ∈ X) x ρ x
2. simetrična ako vrijedi (∀x,y ∈ X) (x ρ y ⇒ y ρ x)
3. tranzitivna ako vrijedi (∀x,y,z ∈ X) (x ρ y ∧ y ρ z ⇒ x ρ z)

Relacija ekvivalencije
Binarna relacija $\rho \subseteq X\ x\ X$ zove se *relacije ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Razred ekvivalencije
Razred (klasa) ekvivalencije |x| elemenata $x \in X$ je skup svih elemenata iz X koji su u relaciji s x.

Kvocijentni skup
Ako je relacija ekvivalencije na skupu X, onda skup svih pripadnih razreda ekvivalencije zovemo kvocijentni skup od X s obzirom na relaciju ρ:

$$\boldsymbol{X/\rho} = \{[\boldsymbol{x}]\}_{x \in X}$$

6. UVOD U KOMBINATORIKU

Pravilo sume: (disjunktni skupovi) $\mathbf{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A_1 + A_2 + \cdots + A_n}$
Pravilo produkta: $\mathbf{A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n}$
Pravilo komplementa: $A \subseteq S$, $\mathbf{|S \setminus A| = |S| - |A|}$

Varijacije bez ponavljanja

Bilo koji poredani k-terac različitih elemenata iz skupa. $\frac{\mathbf{n}!}{(\mathbf{n-k})!}$

Kombinacije bez ponavljanja
Drugi naziv za podskup od skupa.

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Permutacije s ponavljanjem
Broj permutacije (premještanja) n-tog reda k-članog skupa u kojima se element pojavljuje n puta:

$$\frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}$$

Varijacije s ponavljanjem
Poredani k-terci n-članog skupa: n^k

Kombinacije s ponavljanjem
Broj kombinacija s ponavljanjem jednak je broju načina biranja k predmeta od ukupno n, s koliko god ponavljanja istog predmeta u kombinaciji:

$$\binom{n+k-1}{k}$$

FORMULA UKLJUČIVANJA I ISKLJUČIVANJA

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$
$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap |$$

FUNKCIJE IZVODNICE

Funkcije izvodnice služe za što sažetije zapisivanje slijed realnih brojeva.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

Dodatne formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{n+1})' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(x\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \left(x\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

DIRICHLETOVO NAČELO

Ako je n predmeta smješteno u m kutija, onda postoji kutija koja sadrži barem $\frac{n-1}{m} + 1$ predmeta.

7. REKURZIVNE RELACIJE

Fibonaccijev niz definira se početnim vrijednostima $F_0=0$ i $F_1=0$ i rekurzivnom relacijom:

$$\boldsymbol{F_n = F_{n-1} + F_{n-2}}, \quad n = 2,3,\ldots$$

Vrijedi za Fibonaccijev niz 'zatvorena' formula:

$$\boldsymbol{F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Zlatni prerez

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$$

LINEARNE REKURZIVNE RELACIJE

Opći oblik rekurzivne relacije reda r :

$$\boldsymbol{a_n = C_1 a_{n-1} + C_2 a_{n-2} + \cdots C_r a_{n-r} + f(n)}, \qquad n \geq r$$

gdje su $C_1, C_2, C_3, \ldots$ realni ili kompleksni koeficijenti.

LINEARNE, HOMOGENE REKURZIVNE RELACIJE S KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Pomoću Eulerove supstitucije $a_n=x^n$ uvrštavamo u početnu homogenu jednadžbu, te daljnim rješavanjem te jednadžbe dobivamo **karakterističnu funkciju**:

$$x^r - C_1 x^{r-1} - C_2 x^{r-2} - \cdots - c_r = 0$$

SLUČAJEVI RJEŠENJA:

1. Slučaj *r* različitih korijena karakteristične jednadžbe

Neka su $x_1, x_2, \ldots x_n$ karakteristični korijeni i da su međusobno različiti. Rješenje opće homogene rekurzivne jednadžbe:

$$a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \cdots + \lambda_r x_r^n, \qquad n = 0,1,2\ldots$$

2. Slučaj kada postoje višestruki korijeni karakteristične jednadžbe

Ako je x_0 k-struki korijen karakteristične jednadžbe, onda svaki od k nizova

$$a_n = x_0^n, \qquad a_n = nX_0^n, \quad \ldots \qquad , a_n = n^{k-1} x_0^n$$

NEHOMOGENE REKURZIVNE RELACIJE

Opće rješenje nehomogene jednadžbe je zbroj općeg rješenja homogne rekurzivne relacije i partikularnog rješenja.

$$\boldsymbol{a_n = a_n^{(0)} + a_n^{(p)}}$$

PARTIKULARNO RJEŠENJE NEHOMOGNE JEDNADŽBE:

Ako x=1 (u zadnjem slučaju x=b) nije korijen karakteristične jednadžbe onda partikularno rješenje:

f(n)	$\boldsymbol{a_n^{(p)}}$
C (konst.)	*A*
Cn	*An+B*
$P_k(n)$	$Q_k(n)$
$C\,b^n$	$A\,b^n$

Ako je x=1 (u zadnjem slučaju x=b) jest korijen karakteristične jednadžbe kratnosti m:

f(n)	$\boldsymbol{a_n^{(p)}}$
C (konst.)	$A\,n^m$
Cn	$n^m\,(An+B)$
$P_k(n)$	$n^m\,Q_k(n)$
$C\,b^n$	$A\,n^m\,b^n$

8. POJAM GRAFA

Jednostavni graf *G* sastoji se od nepraznog skupa *V(G)*, čije elemente zovemo **vrhovi** (čvorovi) grafa G i konačnog skupa *E(G)* različitih podskupova skupa *V(G)* koje zovemo **bridovi**.
V(G) → skup vrhova (*eng. vertex*)
E(G) → skup bridova (*eng. edge*)
G=(V,E)

Opći graf – mogućnost višekratnost bridova, te petlje

Bridovi – Za brid *e={v,w}* kažemo da SPAJA vrhove *v* i *w*. Vrhovi *v* i *w* su SUSJEDNI. Vrh *v* je INCIDENTAN s bridom *e*.

Izomorfizam – broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespondentna dva vrha u $V(G_2)$.
Povezanost – ukoliko se graf može prikazati kao UNIJA neka dva grafa.
Stupanj vrha *v* grafa *G* je broj bridova koji su incidentni s *v* → deg(*v*)
IZOLIRANI VRH – stupanj vrha 0,   KRAJNJI VRH – stupanj vrha 1

Lema o rukovanju – U svakom grafu *G* je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj.

$$\sum_{v \in G} deg(v) = 0 \ (mod\ 2)$$

Regularan graf – svi vrhovi istog stupnja

Matrica susjedstva $A=[a_{ij}]$ je $n \times n$ matrica čiji je element a_{ij} jednak br. bridova koji spajaju vrh *i* s vrhom *j*.
Matrica incidencije $B=[b_{ij}]$ je $n \times m$ matrica čiji su elementi $b_{ij} = 1$ ukoliko je vrh *i* incidentan s bridom *j*, te $b_{ij} = 0$ u suprotnom.

PRIMJERI
Nul-graf (N_n) - graf čiji je skup bridova prazan skup, svaki vrh je izoliran, tj. stupanj svakog vrha je 0

Potpuni graf (K_n) – jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna
Broj bridova *n(n-1)/2*
Regularnost: *n-1*

Ciklički graf (C_n)– povezani 2-regularni graf, ima *n* vrhova i *n* bridova
Lanac (P_n) – graf koji dobijemo iz cikličkog brisanjem točno jednog brida
Kotač (W_n) – graf koji dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom
$|E(W_n)| = 2(n-1)$,   regularan samo za n=4

Bipartitan graf – svaki brid spaja neki vrh skupa A s nekim iz skupa B

Potpuno bipartitan graf ($K_{r,s}$) – svaki vrh iz skupa A spojen sa svakim vrhom iz skupa B.
Graf $K_{r,s}$ ima *r+s* vrhova i *r-s* bridova.

k-kocka (Q_k) – graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima duljine *k*, te čiji bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju točno na jednom mjestu. Broj vrhova = 2^k, broj bridova = $2^k\, k/2$

Komplement – ukoliko su dva vrha u *G* susjedna onda oni nisu susjedni u komplementu grafa *G*.
Samokomplementaran graf – jednostavan graf koji je izomorfan svome komplementu.

Bridni graf L(G) – dva vrha od *L(G)* susjedna samo i ako su odgovarajući bridovi u *G* susjedni.

9. POVEZANOST

Šetnja – konačan slijed bridova oblika $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow ... \rightarrow v_n$
Staza – šetnja u kojoj su svi bridovi različiti
Put – šetnja u kojoj su svi bridovi i vrhovi različiti. **Zatvoreni put** – staza ili put gdje je $v_0 = v_m$.
Ciklus – zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid.

Povezanost – graf je povezan samo ako postoji šetnja između bilo koja dva vrha tog grafa.
Graf je **bipartitan** onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu parne duljine.

Odnos broja vrhova i broja bridova u nekom jednostavnog grafu - n=broj vrhova, m=broj bridova

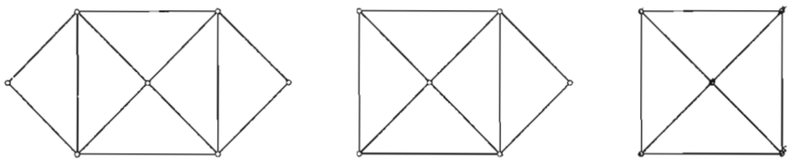
$$\boldsymbol{n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}}$$

Svaki jednostavni graf s n vrhova i više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova je povezan.
Most – rezni skup koji se sastoji od jednog jedinog brida
Bridna povezanost $\lambda(G)$ je veličina najmanjeg reznog skupa
Separirajući skup povezanog grafa G je skup vrhova od G čijim uklanjanjem postaje nepovezan.
Vršna povezanost $\kappa(G)$ je broj elemenata najmanjeg separirajućeg skupa u G.

Struk grafa G definiramo kao duljinu njegovog najkraćeg ciklusa.
Šuma je graf bez ciklusa.
Stablo je povezana šuma.

EULEROVSKI GRAFOVI

Eulerovski graf je graf u kojemu postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid tog grafa.
Neeulerovski graf je **skoro eulerovski** ako postoji staza koja sadrži svaki brid od G.



Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus.
Euler – povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.
Povezani graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja.

Fleuryev algoritam – Neka je G eulerovski graf. Konstrukcija dovodi do eulerovske staze od G. Započni u bilo kojem vrhu u i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na sljedeća pravila:
a) prebriši bridove kojima si prošao, a ako onda nakon prolaska vrh ostane izoliran, prebriši i njega
b) prijeđi mostom samo ako nemaš druge mogućnosti

HAMILTONOVSKI GRAFOVI

Hamiltonovski ciklus – ciklus koji prolazi svih vrhovima zadanog grafa
Hamiltonovski graf – graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus

Teorem Ore: Ako je G jednostavan graf s n vrhova, n≥3, te ako vrijedi:

$$\boldsymbol{deg(v) + deg\ (w) \geq n}$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

Teorem Dirac: Ako je G jednostavni graf s n (n≥3) vrhova, te ako je deg(v) ≥n/2 za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski.

10. ALGORITMI OPTIMIZACIJE

PROBLEM NAJKRAĆEG PUTA – DIJKSTRIN ALGORITAM

Težinski graf – jednostavni povezani graf koji je u svakom bridu e pridružen realni broj *w(e)*, odnosno težina brida.

Udaljenost dva vrha u težinskom grafu možemo definirati kao duljinu najkraćeg puta između njih – *d(u,v)*

Dijsktrin algoritam:

1. Stavo $l(u_0) = 0$, $l(v) = \infty$, za $v \neq u_0$. Stavi $S_0 = \{u_0\}$,te i=0.
2. Za svaki vrh $v \in \overline{S_i}$, zamijeni $l(v)$ s $\min\{l(v), l(u_i)+w(u_i v)\}$. Izračunaj min $\{l(v)\}$, te odredi u_{i+1} kao onaj vrh za koji se taj minumum postiže. Stavi $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$.
3. Zamijeni i s $i+1$. Ako je $i = n - 1$, stani. Ako je $i < n - 1$ vrati se na korak 2.

KINESKI PROBLEM POŠTARA

Pronaći zatvorenu šetnju koja počinje i završava u zadanome vrhu a da je ona minimalne ukupne duljine (težine).

Ako je graf eulerovski treba naći eulerovsku stazu.

Ako graf nije eulerovski, kombiniranjem Fleuryevog algoritma za nalaženje skoro eulerovske staze i Dijsktrinog algoritma za nalaženje najkraćeg puta dolazimo do minimalne zatvorene šetnje koja prolazi svakim bridom barem jednom.

Najgori mogući slučaj je *stablo*, jer nema ciklusa i kroz svaki brid se mora proći točno dva puta.

PROBLEM TRGOVAČKOG PUTNIKA

Trgovački putnik treba obići nekoliko gradova i vratiti se natrag, a da pritom sveukupno prijeđe najmanju udaljenost.

Zapravo, znači da u potpunom težinskom grafu treba naći hamiltonovski ciklus minimalne duljine.

Pohlepni algoritam:

Gradimo ciklus brid po brid, birajući uvijek kao sljedeći brid onaj koji je dopustiv, dakle, onaj koji se nadovezuje na već formiran lanac i koji ne zatvara ciklus prije nego se prođe svim vrhovima, a koji je najmanje duljine.
Kreće se od najkraćeg brida, te na kraju zna biti da ne daju u svim slučajevima najkraći hamiltonovski ciklus.