Ponovljeni završni međuispit iz Matematike 3R
28.01.2011.

Zadatak 1 (4 boda). Nađite opće rješenje rekurzivne relacije

$$a_n = 2a_{n-1} + 9a_{n-2} - 18a_{n-3},\ n \geq 3$$

pri čemu je $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 10$.

Zadatak 2 (4 boda). Neka je S_n zbroj prvih n kvadrata prirodnih brojeva, tj. $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.
a) Napišite rekurzivnu relaciju koju zadovoljava S_n.
b) Riješite dobivenu rekurzivnu relaciju.

Zadatak 3 (4 boda). Zadane su sljedeće n-torke brojeva:

a) $(1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8)$
b) $(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 8, 8)$
c) $(7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8)$
d) $(4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5)$

Odredite koje od navedenih n-torki mogu biti nizovi stupnjeva nekog jednostavnog povezanog grafa. Obrazložite odgovore i skicirajte pripadajuće grafove ako postoje.

https://www.youtube.com/watch?v=Ds1v18tyBuY
https://www.youtube.com/watch?v=Ds1v18tyBuY

Zadatak 4 (3 boda). Ispitajte daje li pohlepni algoritam rješenje problema trgovačkog putnika za potpuni težinski graf zadan težinskom matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

u kojoj je $a_{ij} = \omega(v_i, v_j)$.

Zadatak 5 (3 boda). Sedam osoba igra turnir u šahu po sljedećem pravilu: svaka osoba može odigrati najviše tri meča i nikad ne igra ponovno s osobom s kojom je već igrala. Odredite maksimalni broj mečeva koji mogu biti odigrani na takvom turniru.

Zadatak 6 (3 boda). Neka je $|V(G)| = 15$. Ako je G jednostavan i povezan, odredite najmanji i najveći mogući broj bridova. Ako bi G bio jednostavan i sastavljen od dviju komponenti povezanosti, koji bi tad bio najmanji odnosno najveći broj bridova? Općenito, ako je $|V(G)| = n$, a G jednostavan graf s k komponenti povezanosti, iskažite analogni teorem.

Zadatak 7 (4 boda). U grupi od 40 studenata svaki student poznaje točno 17 kolega pri čemu su poznanstva uzajamna. Mogu li oni sjesti za okrugli stol tako da svakom studentu susjedna dva su neznanci? Odgovor obrazložite i iskažite teorem koji koristite.

Pitanja iz cijelog gradiva

Zadatak 8 (4 boda). a) Razvijte u Fourierov integral funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2\cos\frac{x}{2} & , \ x \in [-\pi, \pi] \\ 0 & , \ \text{inače} \end{cases}$$

b) Izračunajte

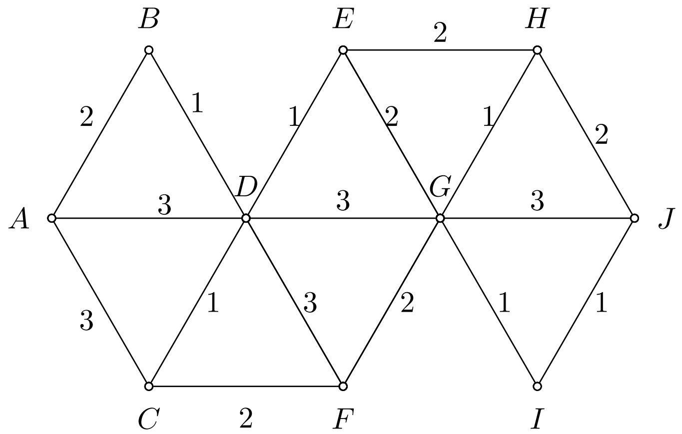
$$\int_0^\infty \frac{\cos(\pi x)}{1-4x^2} dx.$$

Zadatak 9 (3 boda). Na koliko se načina može složiti *password* koji treba imati 8 do 10 znakova, pri čemu početni znak treba biti slovo te najmanje dva znaka moraju biti znamenke? Pretpostavlja se da je na raspolaganju 30 slova i 10 znamenaka.

Zadatak 10 (4 boda). Kvadrat stranice 1 podijelimo dijagonalom na dva pravokutna trokuta, a svaki od ta dva trokuta podijelimo na dva sukladna pravokutna trokuta, itd... novonastale trokutove dijelimo dalje na isti način. Neka je t_n broj trokutova nakon n podjela. Nađite:

a) rekurzivnu relaciju za t_n,
b) funkciju izvodnicu za t_n.

Zadatak 11 (4 boda). Pronađite najkraći put od vrha A do svakog vrha za graf na slici. Dokažite da je unija svih tih puteva razapinjuće stablo.



Rješenja ponovljenog završnog međuispita iz Matematike 3R
28.01.2011.

1.
$a_n = -2 \cdot 2^n + \frac{11}{6} 3^n + \frac{1}{6} \cdot (-3)^n$

2.
$S_n = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$

3.
a) Ne, ne zadovoljava Lemu o rukovanju.
b) Ne, ne mogu biti 2 vrha stupnja 1.
c) K_9 bez 4 brida.
d) $K_{4,5}$

4.
Pohlepni algoritam ne daje optimalno rješenje.

5.
Može biti maksimalno 10 mečeva.

6.
Knjiga, str. 20.

7. Modeliramo graf s 40 vrhova, tako da su povezani vrhovi koji predstavljaju studente koji se ne poznaju. Prema Oreovom teoremu, graf je hamiltonovski pa postoji takav raspored.

8.
a) $f(x) = \int\limits_0^\infty \frac{8 \cos \lambda \pi}{\pi (1 - 4\lambda^2)} \cos(\lambda x) \, dx$
b) $\int\limits_0^\infty \frac{8 \cos x\pi}{1 - 4x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

9.
$\left(30 \cdot 40^7 - 30^8 - 7 \cdot 10 \cdot 30^7\right) + \left(30 \cdot 40^8 - 30^9 - 8 \cdot 10 \cdot 30^8\right) + \left(30 \cdot 40^9 - 30^1 0 - 9 \cdot 10 \cdot 30^9\right)$

10.
a) $t_n = 2^n$
b) $f(x) = \frac{2x}{1 - 2x}$

11.
Dijkstrin algoritam.