Završni ispit iz Matematike 3R
28.1.2015.

1. **(5 bodova)** U kutiji se nalazi 10 žetona: 3 crvena, 2 plava, 4 žuta i 1 bijeli. Na koliko načina je moguće izabrati neprazan podskup tako da
(a) sadrži barem jedan žuti i barem jedan plavi žeton,
(b) su svi žetoni iz podskupa različite boje,
(c) barem dva žetona u podskupu budu različite boje?

2. **(5 bodova)**
(a) Na koliko načina možemo podijeliti 5 različitih pizza na 3 studenta tako da svaki student dobije barem jednu pizzu? Rezultat napišite u obliku prirodnog broja.
(b) Iskažite i dokažite teorem koji ste koristili.

3. **(5 bodova)** Neka je šahovska ploča standardno označena slovima od A do H i brojevima od 1 do 8. Na koliko načina kralj može doći iz polja A1 do polja H8 ako mora proći poljem D3 i ako se u svakom koraku približava cilju?
Napomena. Kralj se može pomicati za jedno mjesto, uključujući i dijagonalno!

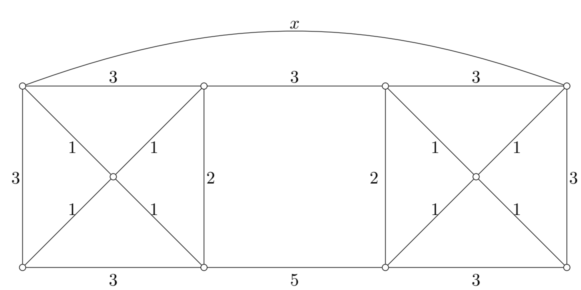
4. **(5 bodova)** Riješite rekurziju
$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n - 2^n,$$
uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 3$.

5. **(5 bodova)** Nađite funkciju izvodnicu za niz zadan rekurzivno s
$$a_{n+2} = a_n - 2a_{n-1} + 2^n,$$
uz početne uvjete $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.

6. **(5 bodova)** Odredite koliko ima različitih jednostavnih regularnih grafova stupnja regularnosti 2 ako je broj vrhova 9.

7. **(5 bodova)** Označimo vrhove grafa K_n s a_j te vrhove grafa K_{2n} s b_j. Graf G dobiven je dodavanjem bridova a_jb_j i a_jb_{n+j} uniji $K_n \cup K_{2n}$ za $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažite da je G hamiltonovski.

8. **(5 bodova)** Za koje vrijednosti parametra $x \in \mathbb{R}^+$ poštar bridom čija je težina x neće proći dvaput u svom optimalnom obilasku?



Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Sretno!

Završni ispit iz Matematike 3R
28.1.2015. - RJEŠENJA

1. (a) U kutiju stavimo 1 žuti i 1 plavi žeton, ostaje 3C, 1P, 3Ž, 1B od kojih biramo podskup (može i prazan) na $4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = 64$ načina.
   (b) Za svaku boju biramo jesmo li ju izabrali ili ne i oduzmemo prazan skup $2^4 - 1$.
   (c) Ukupno nepraznih - oni u kojima su svi žetoni iste boje:
   $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 - 1 - (4 + 3 + 2 + 1)$.

2. Broj surjekcija 5-članog skupa na 3-člani: $3^5 - \binom{3}{1}2^5 + \binom{3}{2}1^5 = 150$.

3. Dozvoljeni potezi su: desno, gore, dijagonalno desno-gore. Od A1 do D3 možemo doći na $\frac{5!}{3!2!} + \frac{4!}{1!2!1!} + \frac{3!}{2!} = 25$ načina, a od D3 do H8 na $\frac{9!}{4!5!} + \frac{8!}{1!3!4!} + \frac{7!}{2!2!3!} + \frac{6!}{3!1!2!} + \frac{5!}{4!1!} = 681$ načina. Ukupno: $25 \cdot 681 = 17025$.

4. $a_n = n(1-n)2^{n-3} + 3^n$.

5. Treba naći $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
   Iz $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = x^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n - 2x^3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^{n-1} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty}(2x)^n$, dobivamo $g(x) = \frac{-2x^3-2x^2+1}{-4x^4+4x^3-x^2-2x+1}$.

6. Ima ih 4. To su $C_3 \cup C_6$, $C_4 \cup C_5$, $C_3 \cup C_3 \cup C_3$ i C_9.

7. Pomoću Oreovog teorema ($\deg(a_j) = n + 1$, $\deg(b_j) = 2n$) ili direktno spajanjem dva hamiltonovska ciklusa u K_n i K_{2n}.

8. Treba naći najkraći put od vrha dolje lijevo do vrha desno dolje. Ako ne prolazi bridom težine x, duljina je (Dijkstra) 1+1+3+1+1=7. Ako prolazi, duljina je $1+1+x+1+1 = 4 + x$. Uvjet daje $4 + x > 7$, tj. $x > 3$.