

**Ispit iz Matematike 3R**  
**13.09.2012.**

1. (5 bodova) Funkciju  $f(x) = x \sin x$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ , razvijte u Fourierov red.

2. (5 bodova) Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & |x| < 1, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

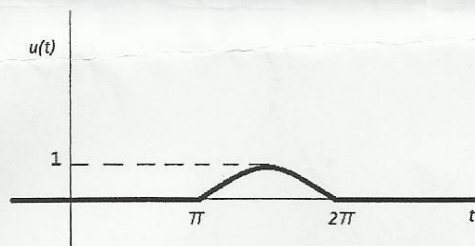
razvijte u Fourierov integral te odredite vrijednost tog integrala u točki  $x = 1$ .

3. (5 bodova)

(a) Definirajte konvoluciju originala.

(b) Dokažite Teorem o Laplaceovoj transformaciji konvolucije.

4. (5 bodova) U strujnom krugu serijski su spojeni otpornik otpora 2 i zavojnica induktiviteta 1. Na krug je narinut sinusni napon  $e(t)$  zadan slikom. Odredite jakost struje koja teče krugom.



5. (5 bodova) Neka je  $S$  skup svih funkcija  $f : X \rightarrow Y$  sa domenom  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  i kodomenom  $Y = \{1, 2, \dots, 20\}$ . Za svaku funkciju  $f \in S$ , definiramo relaciju ekvivalencije  $\rho_f$  na skupu  $X$  sa

$$x, y \in X, \quad x \rho_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

(a) Odredite najmanji mogući i najveći mogući broj klasa ekvivalencije za relaciju  $\rho_f$ ,  $f \in S$ .

(b) Odredite nužne i dovoljne uvjete na funkciju  $f$  tako da broj klasa ekvivalencije bude najveći/najmanji mogući.

(c) Koliko ima različitih funkcija  $f$  u skupu  $S$  čije relacije  $\rho_f$  imaju maksimalni broj klasa ekvivalencije?

Obrazložite odgovore.

**OKRENITE!**

6. (5 bodova) Martin i Marko su dva brata blizanca koji idu u isti razred od 30 učenika.
- (a) Na koliko načina možemo podijeliti 30 učenika tog razreda u 3 jednakobrojne skupine od kojih će jedna kositi travu, jedna saditi drveće, a jedna skupljati smeće?
- (b) Kao pod (a), ali uz uvjet da Martin i Marko nisu u istoj skupini?
7. (5 bodova)
- (a) Iskažite i dokažite multinomni teorem (tj. formulu za računanje  $n$ -te potencije multinoma,  $n \geq 1$ ).
- (b) Odredite koeficijent uz  $x^3y^5z^6$  u razvoju  $(2x - y + z^2 + 1)^{30}$ .
8. (5 bodova) Neka  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , označava sumu prvih  $n$  prirodnih brojeva koji pri dijeljenju sa 3 daju ostatak 2. Odredite rekursivnu relaciju za  $a_n$  te početne uvjete. Riješite rekurziju i izračunajte  $a_{100}$ .
9. (5 bodova) Neka je  $G$  jednostavni graf sa  $n$  vrhova i  $\frac{n^2-3n+6}{2}$  bridova,  $n \geq 3$ . Dokažite da je  $G$  hamiltonovski graf.
10. (5 bodova) Grafom na slici zadan je kineski problem poštara. Odredite koje sve pozitivne cjelobrojne težine mogu biti pridijeljene bridu  $DF$  da bi poštar tim bridom sigurno prošao dvaput.

