4. DOMAĆA ZADAĆA IZ MATEMATIKE 3R

Rok za predaju zadaće je četvrtak 23. studenog 2006.

1. Dokaži DeMorganovu formulu za skupove

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

2. Koja je od sljedećih funkcija injekcija, surjekcija, bijekcija:

a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad f(k) = k^2 + 1,$

b) $g : \mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}, \quad g(k) = \begin{cases} 4k, & \text{za } k > 0, \\ 4|k| + 2, & \text{za } k \leq 0, \end{cases}$

c) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad h(k) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{za } k \text{ paran}, \\ -\frac{k-1}{2}, & \text{za } k \text{ neparan}. \end{cases}$

Ovdje je $2\mathbb{Z}$ skup svih parnih cijelih brojeva.

3. Neka je A zadani neprazan skup i $f : A \to A$ neka funkcija. Definiramo relaciju ρ na A sa $x \rho y$ onda i samo onda ako je $y = f(x)$. Za koje funkcije f je ρ relacija ekvivalencije?

4. Skup prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2 ekvipotentan je skupu $\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 100\}$. Dokaži!

5. Konstruiraj bijekciju između skupa $\mathbb{Z}$ i skupa prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 1.

6. Obrazloži je li skup svih polinoma stupnja ne većeg od 2 sa koeficijentima iz skupa $\mathbb{Q}$ prebrojiv ili neprebrojiv.

7. Dokaži da je skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ ekvipotentan skupu parnih cijelih brojeva.

8. Dokaži da za binomne koeficijente vrijedi:

a)

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$$

b)

$$\binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{n-k+1}\binom{n}{k},$$

c)

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}.$$

9. Na skupu Y svih nepraznih podskupova skupa $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je relacija ekvivalencije ρ sa $A\,\rho\,B$ onda i samo onda ako postoji bijekcija $f : A \to B$. (a) Izračunaj $|Y/\rho|$ (kardinalni broj kvocjentnog skupa). (b) Ispiši sve elemente razreda $[\{1, 2\}]$.

10. Na skupu parnih cijelih brojeva $\{0, 2, 4, \ldots, 200\}$ zadana je relacija ρ sa $x\,\rho\,y$ onda i samo onda ako je $x - y$ djeljiv s 5. (a) Dokaži da je ρ relacija ekvivalencije. (b) Koliko ima razreda ekvivalencije? (c) Nađi najmanji pozitivni element u razredu kojemu pripada broj 158.

11. Zadan je pravilni mnogokut s 20 vrhova. 7 njegovih vrhova obojano je u crveno, 4 u bijelo i 9 u plavo. Koliko ovaj mnogokut ima upisanih trokutova s jednobojnim vrhovima?

12. Telefonski broj je niz od 7 znamenaka iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ od kojih prva ne smije biti 0. (a) Koliko ima telefonskih brojeva čije su sve znamenke različite? (b) A koliko s barem dvije iste znamenke?

13. Iz snopa od 32 različite karte dijelimo po 4 karte svakom od troje ljudi. Na koliko načina to možemo učiniti?

14. Na koliko načina između 8 muškaraca i 8 žena možemo izabrati 4 (ravnopravna) plesna para, ali tako da među njima nije jedan unaprijed određeni par?

15. Na šahovskom turniru sudjeluje 20 natjecatelja. Na koliko načina ih je moguće podijeliti u dvije (ravnopravne) skupine ako:
a) dva najbolja šahista moraju biti u različitim skupinama,
b) četiri najbolja šahista moraju biti dva i dva u različitim skupinama.

16. Na koliko načina možemo poredati p jedinica i q nula, uz uvjet $p < q$ i ako jedinice ne smiju biti susjedne? Obrazloži odgovor!

17. S jedne strane pravokutnog stola s $2n$ stolica sjeda n žena i n muškaraca. (a) Na koliko načina oni mogu sjesti tako da nikoje dvije žene ne sjede jedna do druge? (b) Na koliko načina oni ovako mogu sjesti za okrugli stol s $2n$ stolica?

18. U hotel u jedno malo planinsko mjesto stiglo je n sudionika nekog savjetovanja. Sve sobe u hotelu su jednokrevetne i imaju krasan pogled na vrhove, ali ih samo b od ukupno n ima balkon. v sudionika savjetovanja su važne osobe i moraju dobiti sobu s balkonom. Među sudionicima savjetovanja je i s studenata kojima se trebaju dati sobe bez balkona. Ostale sudionike može se smjestiti bilo kako. Na koliko načina se mogu tako sudionici savjetovanja smjestiti u sobe, ako je $v \le b$ i $s \le n - b$?

19. U automat se ubacuju kovanice od 1 i 2 kune. Na koliko načina možemo ubaciti n kuna ($n \ge 2$) ako ubacimo točno k kovanica od 2 kune, $k \in \left\{0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right\}$?

20. U automat se ubacuju kovanice od 1 i 2 kune. Na koliko načina možemo ubaciti n kuna ($n \ge 2$)? Naputak: koristi rezultat prethodnog zadatka.

student	zadaci				student	zadaci			
1.	2	10	13	20	**2.**	5	9	13	20
3.	2	8	11	16	**4.**	3	8	12	18
5.	4	6	15	18	**6.**	4	8	15	18
7.	2	6	15	17	**8.**	2	10	15	18
9.	4	7	14	19	**10.**	5	6	14	19
11.	2	9	14	18	**12.**	3	8	13	20
13.	3	9	12	16	**14.**	1	6	13	19
15.	3	9	15	18	**16.**	2	9	13	19
17.	3	10	12	16	**18.**	5	7	15	18
19.	5	9	14	19	**20.**	1	6	14	17
21.	2	7	14	17	**22.**	3	7	14	18
23.	4	7	11	16	**24.**	4	9	12	17
25.	1	9	11	16	**26.**	1	10	13	19
27.	3	7	13	19	**28.**	4	10	15	18
29.	2	9	12	16	**30.**	1	8	14	17
31.	3	9	13	20	**32.**	4	7	15	18
33.	4	10	12	17	**34.**	5	6	11	17
35.	5	8	11	17	**36.**	2	7	13	19
37.	3	8	11	16	**38.**	5	7	11	17
39.	5	9	12	17	**40.**	1	7	12	20
41.	3	7	11	16	**42.**	1	8	12	19
43.	1	9	15	17	**44.**	2	7	12	20
45.	3	10	14	19	**46.**	5	10	13	20
47.	3	6	13	19	**48.**	4	8	11	17
49.	4	6	14	19	**50.**	1	7	15	17
51.	1	8	11	16	**52.**	3	10	15	18
53.	4	9	13	19	**54.**	1	10	12	16
55.	3	8	14	19	**56.**	5	6	15	18
57.	5	10	12	17	**58.**	1	6	12	20
59.	2	7	11	16	**60.**	3	6	14	18
61.	4	9	14	20	**62.**	2	6	12	20
63.	4	6	11	16	**64.**	4	10	14	20
65.	5	7	13	20	**66.**	5	10	15	19
67.	1	7	11	16	**68.**	2	8	13	20
69.	4	8	13	20	**70.**	2	10	12	16
71.	1	10	14	17	**72.**	5	8	15	18
73.	1	6	11	16	**74.**	2	8	15	18
75.	5	8	14	19	**76.**	1	9	13	20
77.	3	6	11	16	**78.**	4	9	15	18
79.	5	10	12	17	**80.**	2	6	11	16