Završni međuispit iz Matematike 3R

(pitanja iz trećeg ciklusa nastave)

20.01.2011.

Zabranjena je upotreba kalkulatora ili šalabahtera. Ispit se piše 2h i 30 min.

Zadatak 1 (4 boda). Riješite diferencijsku jednadžbu

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 5a_n = n + 5^n, \quad n \geq 0$$

uz početni uvjet $a_0 = 0, a_1 = 5$.

Zadatak 2 (3 boda). Neka je C_n broj različitih načina popločavanja pruge dimenzije $n \times 1$ pločama dimenzije 1×1 i 2×1. Nađite rekurzivnu relaciju za niz C_n, početne uvjete i riješite rekurziju.

Zadatak 3 (3 boda). Graf G zadan je matricom susjedstva

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nacrtajte graf G i napišite niz stupnjeva pridružen tom grafu. Nađite jedan jednostavan povezan graf koji nije izomorfan s G, a ima isti niz stupnjeva kao G. Obrazložite odgovor.

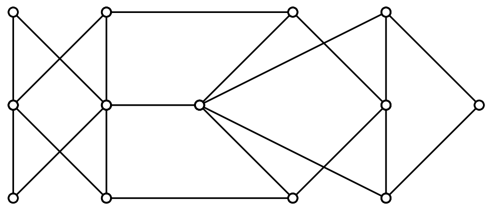
Zadatak 4 (5 bodova). Koliko najmanje bridova treba dodati 3-kocki Q_3 da bi se dobio jednostavni eulerovski graf? Obrazložite odgovor. Za jedan takav nadopunjeni graf provedite Fleuryjev algoritam.

Zadatak 5 (3 boda). Iskažite Lemu o rukovanju. Koristeći se spomenutom lemom dokažite sljedeću tvrdnju: u svakom stablu postoje barem dva vrha stupnja jedan.

Zadatak 6 (4 boda). a) Iskažite Oreov teorem i navedite primjer koji pokazuje da obrat teorema ne vrijedi.

b) Pokažite da je graf na slici bipartitan.

c) Je li graf na slici hamiltonovski? Obrazložite odgovor.



Zadatak 7 (3 boda). Zadan je potpuni graf K_4.

a) Koliko različitih hamiltonovskih ciklusa ima taj graf?

b) Neka su zadane težine bridova u skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i sve su međusobno različite. Postoji li raspodjela težina po bridovima tako da pohlepni algoritam za problem trgovačkog putnika za danu raspodjelu na grafu K_4 ne daje optimalno rješenje?

Pitanja iz cijelog gradiva

Zadatak 8 (3 boda)**.** Funkciju $f(x) = \pi - x$ definiranu na intervalu $[0, \pi]$ razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama.

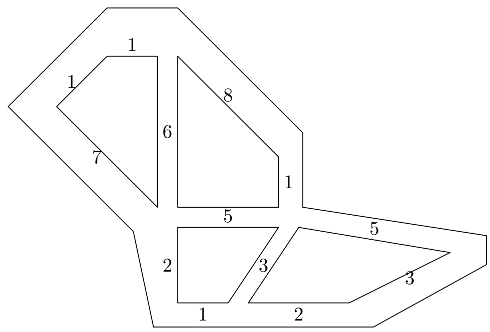
Zadatak 9 (3 boda)**.** Koristeći Laplaceovu transformaciju riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y'' + 4y = 4cos2t + 8t$$

uz početne uvjete $y(0) = 0$ i $y'(0) = 2$.

Zadatak 10 (4 boda)**.** Troje djece treba podjeliti 8 jabuka. Prvo dijete može dobiti samo paran broj jabuka. Drugo dijete može dobiti maksimalno 4 jabuke. Na koliko se načina mogu razdijeliti jabuke tako da svako dijete dobije barem jednu jabuku, a da prethodni uvijeti budu zadovoljeni?

Zadatak 11 (5 bodova)**.** Student FER-a svakog jutra raznosi novine kako bi zaradio za džeparac. Na tlocrtu naselja na karti dana su vremena obilaska pojedinih ulica. Modelirajte graf i nađite minimalno vrijeme obilaska svih stambenih blokova te odredite odgovarajuću stazu.

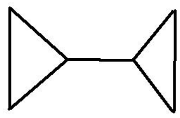


Rješenja završnog međuispita iz Matematike 3R
20.01.2011.

1.
$a_n = -\frac{77}{64} + \frac{77}{64}5^n - \frac{1}{8}n^2 + \frac{1}{16}n + \frac{1}{20}n5^n$

2.
Fibonaccijev niz, $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}, c_1 = 1, c_2 = 2$

3.

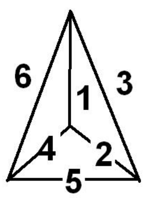


4.
Treba dodati 4 brida.

5.
Knjiga.

6.
a) Knjiga
b) Označiti vrhove tako da se vidi da je graf bipartitan.
c) Graf je bipartitan s neparnim brojem vrhova, pa nije hamiltonovski jer su u bipartitnom grafu svi ciklusi parne duljine.

7. a) $\frac{(4-1)!}{2}$
b)



8.
$f(x) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \cos{(2k+1)x}$

9.
$Y(t) = 2t + t\sin 2t$

10.
$\binom{-2}{4} + \binom{-2}{2} = 8$

11.
Problem kineskog poštara, ukupna duljina 54 min.