**Drugi međuispit iz Matematike 3R**
29.11.2007.

**1. (3 boda)**
Zadan je skup $A$ od $k$ elemenata, $k \geq 4$. Koliki je $k$, ako je poznato da postoji bijekcija iz skupa svih dvočlanih podskupova skupa $A$ u skupu svih četveročlanih podskupova od $A$? Koliko takvih različitih bijekcija u tom slučaju ima?

**2. (4 boda)**
Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definirana je relacija $\rho$ sa:

$$(u_1, v_1)\, \rho\, (u_2, v_2) \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

a) (**1b**) Dokažite da je $\rho$ relacija ekvivalencije.
b) (**1b**) Odredite razrede ekvivalencije relacije $\rho$.
c) (**1b**) Koliki je kardinalitet svakog pojedinog razreda ekvivalencije? Dokažite.
d) (**1b**) Koliki je kardinalitet kvocijentnog skupa $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_{\rho}$? Dokažite.

**3. (3 boda)**
Koliko ima uređenih četvorki $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4$, takvih da je $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 9000$?

**4. (3 boda)**
a) (**1b**) Iskažite binomni teorem.
b) (**1b**) Dokažite da vrijedi

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

c) (**1b**) Zadan je $n$-člani skup. Dokažite da je broj svih podskupova s parnim brojem elemenata jednak broju svih podskupova s neparnim brojem elemenata.

**5. (4 boda)**
a) (**1b**) Koliko ima deseteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od po dvije jedinice, dvije dvojke, dvije trojke, dvije četvorke i dvije petice?
b) (**3b**) Koliko ima deseteroznamenkastih brojeva koji se sastoje od po dvije jedinice, dvije dvojke, dvije trojke, dvije četvorke i dvije petice, te u kojima su susjedne znamenke različite?

**6. (3 boda)**
Ante, Marko i Euzebije dijele 12 jabuka. Ante ne želi manje od 2 jabuke, Marko želi maksimalno 8 jabuka, a Euzebije nema posebnih želja vezanih uz broj jabuka. Na koliko način njih trojica mogu podijeliti jabuke?

**7. (5 bodova)**
Niz $(a_n)$ zadan je rekurzivno sa

$$a_{n+2} = 2a_n - a_{n-1} - 1,\ n \geq 1 \quad a_0 = 3,\ a_1 = -4,\ a_2 = 3.$$

a) (**3b**) Nađite niz $(a_n)$ u zatvorenoj formi.
b) (**2b**) Nađite funkciju izvodnicu za niz $a_n$.

**Zabranjena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.**

**Rješenja drugog međuispita iz Matematike 3R**
29.11.2007.

**1. (3 boda)**

$$\binom{k}{2} = \binom{k}{4} \Rightarrow \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{24}$$

$$\Rightarrow k^2 - 5k - 6 = 0$$

$$\Rightarrow k_1 = 6, \;\; k_2 = -1$$

Konačno rješenje: $k = 6$.

$\binom{6}{2} = 15$. Takvih bijekcija ima 15!.

**2. (4 boda)**
a) (**1b**)
Refleksivnost:

$$(u, v)\rho(u, v) \text{ jer je } v = v.$$

Simetričnost:

$$(u_1, v_1)\,\rho\,(u_2, v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$$
$$\Rightarrow (u_2, v_2)\,\rho\,(u_1, v_1).$$

Tranzitivnost:

$$(u_1, v_1)\,\rho\,(u_2, v_2)\,\&\,(u_2, v_2)\,\rho\,(u_3, v_3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_1 = v_2\,\&\,v_2 = v_3 \Rightarrow v_1 = v_3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (u_1, v_1)\,\rho\,(u_3, v_3).$$

b) (**1b**)
$[(u, v)] = \{(u_1, v_1) : v = v_1\} = \{(u_1, v) : u_1 \in \mathbb{Z}\}$

c) (**1b**)
$|[(u, v)]| = |\{(u_1, v) : u_1 \in \mathbb{Z}\}|$
$f : (u_1, v) \mapsto u_1$ je bijekcija iz $[(u, v)] \mapsto \mathbb{Z}$, dakle $|[(u, v)]| = \aleph_0$.

d) (**1b**)
$g : [(u, v)] \mapsto v$. To je bijekcija iz $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_\rho \to \mathbb{Z}$, dakle $|\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/_\rho| = \aleph_0$.

**3. (3 boda)**
Kako je $9000 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^3$, svaki $x_i$ je oblika $x_i = 2^{\alpha_i} 3^{\beta_i} 5^{\gamma_i}$, $0 \leq \alpha_i \leq 3$, $0 \leq \beta_i \leq 2$, $0 \leq \gamma_i \leq 3$ i vrijedi

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3 \Rightarrow \#\binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3}$$

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 2 \Rightarrow \#\binom{2+4-1}{4-1} = \binom{5}{3}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 = 3 \Rightarrow \# \binom{3+4-1}{4-1} = \binom{6}{3}$$

$\Rightarrow$ Ukupno $\binom{6}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{6}{3} = 4000$

**4. (3 boda)**

a) (**1b**)

Za sve $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

b) (**1b**)

Stavimo $x = 1$ i $y = 1$ i dobijemo

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = 2^n.$$

c) (**1b**)

Za $x = -1$ i $y = 1$ dobivamo

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0.$$

tj. $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + ... + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + ... + \binom{n}{n}$.

**5. (4 boda)**

a) (**1b**)

Skup svih znamenaka je

$$M = \{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5\}$$

Ako je $S$ skup svih takvih brojeva, tada je

$$|S| = \binom{10}{2, 2, 2, 2, 2} = 113400.$$

b) (**3b**)

Neka je $A_i, i = 1, ..., 5$ skup svih deseteroznamenkastih brojeva kojima su znamanke $i$ susjedne.

$$A_i = \{ \text{ znamenke } i \text{ su susjedne } \}.$$

Tada je broj deseteroznamenkastih brojeva sa traženim svojstvom jednak

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$$

Kako bismo izračunali $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$ koristimo formulu uključivanja i isključivanja.

$$|A_i| = \binom{9}{2, 2, 2, 2, 1} = 22680,$$

$$|A_i \cap A_j| = \binom{8}{2,2,2,1,1} = 22680,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{7}{2,2,1,1,1} = 1260,$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{6}{2,1,1,1,1} = 360,$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_5| = 5!.$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5| =$$

$$= |S| - (\binom{5}{1}\binom{9}{2,2,2,2,1} - \binom{5}{2}\binom{9}{2,2,2,1,1} +$$

$$+\binom{5}{3}\binom{9}{2,2,1,1,1} - \binom{5}{4}\binom{9}{2,1,1,1,1} + \binom{5}{5}\binom{9}{1,1,1,1,1}) = 39480.$$

**6. (3 boda)**

Ante $\rightarrow$ 2,3,4,... $\Rightarrow a(x) = x^2 + x^3 + ...$
Marko $\rightarrow$ 0,1,2,..., 8 $\Rightarrow m(x) = 1 + x + ... + x^8$
Euzebije $\rightarrow$ 0,1, 2,..., 12 $\Rightarrow e(x) = 1 + x + ... + x^{12}$

$$N(x) = [x^{12}]a(x)e(x)m(x) =$$

$$= [x^{12}]x^2 \cdot \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^9}{1-x} \cdot \frac{1-x^{13}}{1-x} =$$

$$= [x^{10}](1-x^9)(1-x^{13})(1-x)^{-3} =$$

$$= (-1) \cdot \binom{-3}{1} \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot \binom{-3}{10} \cdot (-1)^{10} = -3 + 66 = 63.$$

**7. (5 bodova)**

a) (**3b**) Relacija je nehomogena. Prvo rješavamo karakterističnu jednadžbu pripadajuće homogene jednadžbe:

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$(x-1)(x^2 + x - 1 = 0) \Rightarrow x_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow a_n^{(h)} = c_1 + c_2 \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3 \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

S obzirom da je $x = 1$ korišten pripadajuće karakteristične jednadžbe, partikularno rješenje je sljedećeg oblika:

$$a_n^{(p)} = A \cdot n$$

Uvrštavamo $a_n^{(p)}$ u početnu relaciju:

$$A(n+2) = 2An - A(n-1) - 1$$

$$2A = A - 1 \Rightarrow A = -1$$

I dobivamo

$$a_n = c_1 + c_2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_3\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - n.$$

Tražimo $c_1, c_2, c_3$ pomoću $a_0, a_1, a_2$

$$3 = c_1 + c_2 + c_3$$

$$-4 = c_1 + c_2\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + c_3\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 1$$

$$3 = c_1 + c_2\frac{3-\sqrt{5}}{2} + c_3\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2$$

$$\Rightarrow c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 2$$

Konačno rješenje je

$$a_n = -1 + 2\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + 2\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - n.$$

b) (**2b**)

$$a_{n+3} = 2a_{n+1} - a_n - 1 / \cdot x^3 / \sum_{x=0}^{\infty}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} a_{n+3}x^{n+3} = 2x^2\sum_{x=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} - x^3\sum_{x=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{x=0}^{\infty} x^{n+3}$$

Ako je $f(x) = \sum\limits_{x=0}^{\infty} a_n x^n$, onda vrijedi

$$f(x) - 3 + 4x - 3x^2 = 2x^2(f(x) - 3) - x^3 f(x) - x^3\frac{1}{1-x}$$

$$f(x)[1 - 2x^2 + x^3] = 3x^2 - 4x + 3 - \frac{x^3}{1-x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3 - x - x^2 + 2x^3}{(1-x)(1-2x^2+x^3)}.$$