KOMBINATORIKA

2. Jednostavni uvodni zadaci prebrojavanja – produktno pravilo

2.1. Na koliko načina se može dobiti različit ishod pri bacanju kocke?

2.2. Na koliko načina se može dobiti različit ishod pri bacanju 2 kocke?

2.3. Na koliko načina se može dobiti različit ishod pri bacanju kocke i novčića?

2.4. U razredu je 15 dječaka i 20 djevojčica. Na koliko se načina se može izabrati 2 dežurna učenika, dječak i djevojčica?

2.5. Lokot na šifru se sastoji iz 6 koluta od po 10 znamenki. Koliko je mogućnosti odabira šifre takvog lokota?

3. Zadaci

- zadan je skup od n elemenata, broj načina odabira k elemenata od tih n je jednak:

$$\binom{n}{k}$$

- **varijacije (***permutacije* kao specijalan slučaj) - *poredani n –terci* elemenata nekog konačnog skupa, u kojima je poredak bitan
- kombinacije – skupovi kod kojih poredak elemenata nije bitan
- 2 mogućnosti: varijacije i kombinacije s ponavljanjem i bez ponavljanja (varijacije bez ponavljanja = permutacije)
- binomna formula:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

- u slučaju da je x = y = 1 imamo:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n}$$

3.1. Koliko bi šahovskih partija odigrali učenici dvaju razreda od po 24 učenika u međusobnom susretu, ako svaki učenik jednog razreda odigra po jednu partiju sa svakim učenikom iz drugog razreda?

3.2. Na koliko se načina 6 putnika može rasporediti u autobus s 15 sjedala?

3.3. Na koliko načina se iz špila od 52 karte može izvući 13 karata?

3.4. Na koliko načina se mogu podijeliti 32 karte na 4 igrača tako da svaki dobije po 8 karata?

3.5. Koliko se različitih riječi može napraviti od slova riječi MATEMATIKA?

3.6. Zadan je pravilni mnogokut s 20 vrhova. 7 njegovih vrhova obojano je u crveno, 4 u bijelo i 9 u plavo. Koliko ovaj mnogokut ima upisanih trokuta s jednobojnim vrhovima?

3.7. Telefonski broj je niz od 7 znamenaka iz skupa {0, ..., 9} od kojih prva ne smije biti 0.
a) Koliko ima telefonskih brojeva čije su sve znamenke različite?
b) A koliko s barem dvije iste znamenke?

3.8. Na koliko načina se može na šahovskoj ploči rasporediti 8 topova tako da se međusobno ne napadaju?

3.9. Na koliko načina se mogu načiniti 4 mješovita para od 10 tenisača i 6 tenisačica?

3.10. Na koliko načina između 8 muškaraca i 8 žena možemo izabrati 4 (ravnopravna) plesna para, ali tako da medu njima nije jedan unaprijed određeni par?

3.11. Na šahovskom turniru sudjeluje 20 natjecatelja. Na koliko načina ih je moguće podijeliti u dvije (ravnopravne) skupine ako:
a) dva najbolja šahista moraju biti u različitim skupinama,
b) četiri najbolja šahista moraju biti dva i dva u različitim skupinama.

3.12. S jedne strane pravokutnog stola s 2*n* stolica sjeda *n* žena i *n* muškaraca.
a) Na koliko načina oni mogu sjesti tako da nikoje dvije žene ne sjede jedna do druge?
b) Na koliko načina oni ovako mogu sjesti za okrugli stol s 2*n* stolica?

3.13. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva N ima nejednadžba

$$x1 + x2 + x3 + x4 < 2006 \,?$$

3.14. Koliko ima brojeva između 1 i 100(uključivo) koji su djeljivi s 3 ili s 5 ili sa 7?

3.15. U studentskom zboru ima 15 studenata prve godine, 20 studenata druge godine, 10 studenata treće godine i 20 studenata četvrte godine. Na koliko se načina može odabrati šestero člana delegacija iz tog studentskog zbora u kojoj mora biti barem jedan predstavnik svake godine?

4. Teži zadaci

- broj načina na koje možemo *m različitih* predmeta smjestiti u *n različitih* kutija tako, da svaka kutija sadrži barem jedan predmet:

$$X = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

- broj načina na koje možemo *m različitih* predmeta smjestiti u *n istovrsnih* kutija tako, da svaka kutija sadrži barem jedan predmet:

$$Y = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^m$$

4.1. Na večeru su došli Ivica, Marica, Snjeguljica, Trnoružica, Vještica, sedam patuljaka i princ na bijelom konju. Na koliko načina mogu sjesti oko okruglog stola tako da Snjeguljica i Trnoružica sjede kraj princa, a Ivica i Marica ne sjede kraj vještice(ne moraju sjediti skupa)? Bijeli konj ne sjedi za stolom, već je privezan za obližnje drvo.

4.2. Kako uskoro počinje školska godina, Mirko ne želi ništa prepustiti slučaju te je već sada odlučio kupiti bilježnice. U knjižari se prodaju bilježnice na kvadratiće, te one s crtama, u tri veličine: A3, A4 i A5. Na koliko načina Mirko može kupiti 10 bilježnica? Pretpostavimo da je knjižara opskrbljena neograničenim količinama bilježnica.

4.3. Nakon naporne školske godine, Mirko i njegova obitelj kreću na more. Ne želeći trošiti dragocjeno vrijeme odmora, Mirko je odlučio izračunati najbrži put do mora. Mogući putovi se mogu prikazati cjelobrojnom koordinatnom mrežom. Mirko se nalazi u ishodištu, a apartman njegove bake u točki (10, 10). Obitelj će u dovoljno kratkom roku stići na more u slučaju da prolaze segmentom [(3,3) i (4,3)], a ne prolaze točkom (8, 7). Na koliko načina mogu doći do bake?

4.4. Mirko ima mlađu sestru Anicu. Anica je za rođendan dobila kutiju punu plastičnih slova te po cijele dane slaže razne riječi. Anica ima zločestog psića koji joj je pojeo sva slova osim onih koji čine riječ MATEMATIKA. Mirko misli da to nikako nije slučajnost i sada se i on počeo igrati sa slovima. Budući da Mirko više voli matematiku, njega zanima na koliko načina može složiti preostala slova tako da samoglasnici ne budu jedan kraj drugoga? Koliko ima različitih riječi koje u sebi sadrže podriječ META? Koliko ima riječi u kojima nema susjednih slova A? U koliko rasporeda samoglasnici dolaze abecednim redom?

4.5. Igre sa slovima su zanimljive, no samo u slučaju kada je puno slova na raspolaganju. Iz tog razloga Mirko se više ne želi igrati slovima, već se kao svaki pravi mali matematičar okrenuo brojevima. U njegovoj ulici uskoro slijedi natjecanje u matematici te se želi dobro pripremiti za to. Učiteljica mu je nekoliko zadataka bez rješenja. Mirko želi biti siguran da je dobro naučio pa te zamolio da mu napišeš točna rješenja zadataka.

a) Koliko ima osmeroznamenkastih neparnih prirodnih brojeva u čijem zapisu nema susjednih znamenaka 8?

b) Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100001 koji su djeljivi sa 7, a nisu djeljivi s 10, 12 i 25?

c) Koliko ima šesteroznamenkastih prirodnih brojeva s neparnim brojem neparnih znamenki?

4.6. Na koliko načina možemo rasporediti n jednakih kuglica u m različitih kutija tako da točno dvije kutije ostanu prazne?

4.7. Pustinjom hoda karavana od 9 deva. Na koliko se načina nakon odmora u oazi one mogu presložiti, tako da niti jedna deva ne hoda iza one deve iza koje je hodala prije oaze?

4.8. Dokaži da za svaki prirodni broj postoji njegov višekratnik koji u dekadskom zapisu ima samo znamenke 0 i 1.

5. Vježba

5.1. Koliko ima n-znamenkastih brojeva s:
a) barem jednom parnom znamenkom?
b) točno jednom parnom znamenkom?
c) najviše jednom parnom znamenkom?
d) točno jednom neparnom znamenkom?

5.2. Na koliko načina možemo poredati p jedinica i q nula, uz uvjet $p < q$ i ako jedinice ne smiju biti susjedne?

5.3. Od 7 žena i 4 muškarca treba izabrati delegaciju. Na koliko se načina to može učiniti ako se ta delegacija sastoji od:
a) petero ljudi i to 3 žene i 2 muškarca
b) bilo kojeg broja ljudi, ali jednako žena i muškaraca
c) petero ljudi, od kojih su barem dvije žene
d) petero ljudi s tim da jedan od njih bude već unaprijed određena žena;
e) šestoro ljudi, po troje oba spola, s tim da u delegaciju ne mogu ući zajedno po jedan unaprijed određeni muškarac i žena.

5.4. Na prvoj godini studija formirane su 3 grupe studenata. Grupa R1 ima 34 studenta, grupa R2 37 studenata, a grupa R3 32 studenta.
a) Na koliko načina možemo odabrati dva predstavnika prve godine?
b) Na koliko načina možemo odabrati dva predstavnika ako oni moraju biti iz različitih grupa?

5.5. Na koliko načina se može 10 jabuka i 20 krušaka podijeliti na šestero djece tako da:
a) svako dijete dobije barem jednu krušku,
b) svako dijete dobije barem jednu voćku?

5.6. Na koliko se načina 10 kuglica označenih brojevima 1, 2, …, 10 može raspodijeliti u crvenu, bijelu i plavu kutiju, tako da u svakoj kutiji bude barem po jedna kuglica?

5.7. U hotel u jedno malo planinsko mjesto stiglo je n sudionika nekog savjetovanja. Sve sobe u hotelu su jednokrevetne i imaju krasan pogled na vrhove, ali ih samo b od ukupno n ima balkon. v sudionika savjetovanja su važne osobe i moraju dobiti sobu s balkonom. Medu sudionicima savjetovanja je i s studenata kojima se trebaju dati sobe bez balkona. Ostale sudionike može se smjestiti bilo kako. Na koliko načina se mogu tako sudionici savjetovanja smjestiti u sobe, ako je $v <= b$ i $s <= n - b$?

5.8. Na nekom turističkom putovanju bilo je ukupno 17 turista. Utvrđeno je da su bilo koja dvojica od njih međusobno na ti ili na vi, ili uopće nisu razgovarali. Dokaži da među tih 17 ljudi postoje bar trojica koji su međusobno bili na vi ili bar trojica koji su međusobno bili na ti ili bar trojica koji nisu međusobno razgovarali.

5.9. Šest otoka povezano je linijama jednog trajektnog i jednog hidrogliserskog poduzeća. Svaka dva otoka povezana su (u oba smjera) linijom točno jednog poduzeća. Dokažite da je moguće ciklički posjetiti četiri otoka koristeći linije samo jednog poduzeća, tj. da postoje četiri otoka A, B, C i D i poduzeće čiji brodovi plove na linijama A - B, B - C, C - D i D - A.

5.10. Svaka točka ravnine obojana je crvenom ili plavom bojom, pri čemu postoji bar jedna crvena I barem jedna plava točka. Da li je moguće da svaka kružnica polumjera 1 sadrži točno:
a) jednu plavu točku
b) dvije plave točke?

5.11. Imamo 8 kockica duljine brida 1 čije su 24 strane obojene plavo, a preostale 24 crveno. Dokažite da se od tih kockica može složiti kocka (2x2x2) na čijem oplošju će biti jednak broj plavih i crvenih kvadrata (1x1).

5.12. Učenik u toku godine rješava zadatke iz matematike. Svaki dan riješi barem 1 zadatak, ali da se ne bi premorio svaki tjedan najviše 12 zadataka. Dokaži da postoji nekoliko uzastopnih dana u godini u toku kojih će učenik riješiti točno 20 zadataka.

5.13. Među bilo koja četiri učesnika nekog izleta nalazi se jedan koji se od ranije poznavao sa ostalom trojicom. Dokažite da u proizvoljnoj četvorci učesnika postoji bar jedan koji se od ranije poznavao sa svim učesnicima izleta.

5.14. Neka je S podskup skupa { 1,2….,2008 } koji se sastoji od 756 različitih brojeva. Dokaži da postoje dva različita elementa a, b skupa S takva da je $a + b$ djeljivo s 8.

5.15. U državi postoji N gradova koji su međusobno povezani ili cestom ili prugom. Turist želi posjetiti sve gradove točno jednom i vratiti se u grad u kojem je započeo put. Dokaži da je moguće odabrati početni grad tako da je navedeni put moguće napraviti mijenjajući sredstvo prijevoza najviše jednom.

6. Rješenja

2. Jednostavni uvodni zadaci prebrojavanja – produktno pravilo

2.1. 6

2.2. 36

2.3. 12

2.4. 15*20 = 300

2.5. 60466176

3. Zadaci

3.1. 24*24

3.2. 3 603 600

3.3. $\binom{52}{13}$

3.4. $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8}$

3.5. 151200

3.6. 123

3.7. a) 544320

b) 8455680

3.8. 8!

3.9. $\binom{10}{4}\binom{6}{4}4!$

3.10. 110250

3.11. a) 97240

b) 77220

3.12. a) (n+1)!n!

b) (n-1)!n!

3.13. 7!

3.14. $\binom{2005}{4}$

3.15. 55 (Ful)

3.16. 29 795 000 (Ful)

4. Teži zadaci

4.1. 2*(10! - 4*9! + 2*8!)

4.2. $\binom{15}{5}$

4.3. 20320

4.4. 3600.

4.5. -

4.6. $\binom{m}{2}\binom{n-1}{m-3}$

4.7. 148 329 (Ful – 8p0 * 9! – 8p1 * 8! + 7p1 * 7! - ….)

4.8. Dirichletov princip

5. Vježba

5.1. a) $9 * 10^{n-1} - \ 5^n$

b) $(5n - 1) * 5^{n-1}$

c) $(5n + 4) * 5^{n-1}$

d) $(4n + 1) * 5^{n-1}$

5.2. $\binom{q+1}{p}$

5.3. a) 210

b) 329

c) 455

d) 210

e) 95

5.4. a) $\binom{103}{2}$

b) 37*34 + 37*32 + 32*34

5.5. a) 34918884

b) FUI

5.6. 55980 (FuI)

5.7. $\binom{n-v-s}{b-v} b!\,(n-b)!$