1. kratka provjera znanja MAT3R, grupa A, (12 h), 17.10.2014.

1. **(4 boda)** U Fourierov red rastaviti funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle -1, 0] \\ 0, & x \in \langle 0, 1 \rangle \end{cases}$$

i izračunati sumu $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

2. **(4 boda)** Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

razvijte u Fourierov integral i izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi\lambda}{4}}{4-\lambda^2} d\lambda$.

3. **(2 boda)** Je li funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sum_{n\geq 1} 2^n \cdot \cos(3^n x\pi)$$

periodična? Ako je, odredite joj period.

Rješenja

1. $a_0 = 1$, $a_n = 0$ i

$$b_n = \begin{cases} -\frac{2}{n\pi}, & n \text{ neparan} \\ 0, & n \text{ paran} \end{cases}.$$

Dakle,

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\pi x.$$

Uvrstimo li $x = \frac{1}{2}$, dobivamo

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}(-1)^n.$$

pa je tražena suma jednaka $\frac{\pi}{4}$.

2. Funkcija f je parna pa je $B(\lambda) = 0$. Računamo samo $A(\lambda)$

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\xi)\cos(\lambda\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}(\cos(2\xi-\lambda\xi) + \cos(2\xi+\lambda\xi))\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2-\lambda}\sin\frac{(2-\lambda)\pi}{4} + \frac{1}{2+\lambda}\sin\frac{(2+\lambda)\pi}{4}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{4}{4-\lambda^2}\cos\frac{\lambda\pi}{4}$$

i $A(2) = \frac{1}{4}$ (računamo posebno ili kao limes od $A(\lambda)$). Za $x = 0$, funkcija je neprekidna pa vrijedi $1 = f(0) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos 0\lambda \mathrm{d}\,\lambda = \int_0^\infty A(\lambda)\,\mathrm{d}\,\lambda$ pa je

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\pi\lambda}{4}}{4-\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\pi}{4}.$$

3. Periodi funkcija $\cos(3^n x\pi)$ su $\frac{2k}{3^n}$ pa je i 2 period. To znači da je 2 period funkcije f.

1. kratka provjera znanja MAT3R, grupa B, (12 h), 17.10.2014.

1. **(4 boda)** U Fourierov red rastaviti funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1,0] \\ 1, & x \in [0,1] \end{cases}$$

i izračunati sumu $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)}$.

2. **(4 boda)** Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} \sin 3x, & x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

razvijte u Fourierov integral i izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\pi\lambda}{3}}{9-\lambda^2} d\lambda$.

3. **(2 boda)** Je li funkcija

$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{9} + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1} 3^n \cdot \sin(2^n x\pi)$$

periodična? Ako je, odredite joj period.

Rješenja

1. $a_0 = 1$, $a_n = 0$ i

$$b_n = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}, & n \text{ neparan} \\ 0, & n \text{ paran} \end{cases}.$$

Dakle,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)\pi x.$$

Uvrstimo li $x = \frac{1}{2}$, dobivamo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n+1} \sin(2n-1)\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n-1}(-1)^n.$$

pa je tražena suma jednaka $\frac{\pi}{4}$.

2. Funkcija f je neparna pa je $A(\lambda) = 0$. Računamo $B(\lambda)$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(3\xi)\sin(\lambda\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\cos(3\xi-\lambda\xi) - \cos(3\xi+\lambda\xi))\,\mathrm{d}\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{3-\lambda}\sin\frac{(3-\lambda)\pi}{3} + \frac{1}{3+\lambda}\sin\frac{(3+\lambda)\pi}{3}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{6}{9-\lambda^2}\cos\frac{\lambda\pi}{3}$$

i $B(3) = \frac{1}{3}$ (računamo posebno ili kao limes od $B(\lambda)$). Za $x = \frac{\pi}{3}$, funkcija je neprekidna pa vrijedi $0 = f(\frac{\pi}{3}) = \int_0^\infty B(\lambda)\sin\frac{\pi\lambda}{3}\mathrm{d}\,\lambda = \int_0^\infty B(\lambda)\sin\frac{\pi\lambda}{3}\,\mathrm{d}\,\lambda$ pa je

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2\frac{\pi\lambda}{3}}{9-\lambda^2}\,\mathrm{d}\lambda = 0.$$

3. Periodi funkcija $\sin(2^n x\pi)$ su $\frac{2k}{2^n}$ pa je i 1 period. To znači da je 1 period funkcije f.

1. kratka provjera znanja MAT3R, grupa A, (13 h), 17.10.2014.

1. **(4 boda)** Odredite Fourierov red neparne periodične funkcije f s periodom 2 ako je

$$f(x) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

i korištenjem Parsevalove jednakosti izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

2. **(4 boda)** Neka je $a > 0$. Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} -ae^{x}, & x < 0 \\ ae^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

razvijte u Fourierov integral i izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \sin(ax)}{1+x^2} dx$.

3. **(2 boda)** Je li funkcija

$$f(x) = 3 \cdot \sum_{n=0}^{5} \operatorname{tg}((n+1)\pi x)$$

periodična? Ako je, odredite joj period.

Rješenja

1. Funkcija je neparna pa je $a_n = 0$ za sve $n \geq 0$ i

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ neparan} \\ 0, & n \text{ paran} \end{cases}.$$

Dakle,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\left((2n-1)\pi x\right).$$

Iz Parsevalove jednakosti dobivamo

$$2 = \int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

pa je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Funkcija je neparna pa je $A(\lambda) = 0$. Računamo samo $B(\lambda)$:

$$B(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ae^{-x} \sin(\lambda x) \mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2+1}$$

Za $x = a > 0$ funkcija je neprekidna pa je $ae^{-a} = f(a) = \int_0^\infty B(\lambda) \sin(\lambda a) d\lambda = \frac{2a}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda \sin(\lambda a)}{\lambda^2+1} d\lambda$. Stoga je traženi integral jednak $\frac{\pi}{2} e^{-a}$.

3. Periodi funkcija $\operatorname{tg}((n+1)\pi x)$ su $\frac{k}{n+1}$ pa je i 1 period za svaki $n = 0, \ldots, 5$. Stoga je 1 period funkcije f.

1. kratka provjera znanja MAT3R, grupa B, (13 h), 17.10.2014.

1. **(4 boda)** Odredite Fourierov red neparne periodične funkcije f s periodom 4 ako je
$$f(x) = -1, \quad x \in [0,2]$$
i korištenjem Parsevalove jednakosti izračunajte sumu $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

2. **(4 boda)** Neka je $a > 0$. Funkciju
$$f(x) = \begin{cases} ae^{x}, & x < 0 \\ ae^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$
razvijte u Fourierov integral i izračunajte $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx$.

3. **(2 boda)** Je li funkcija
$$f(x) = 1 + \sum_{n=3}^{10} \operatorname{ctg}(2^n x)$$
periodična? Ako je, odredite joj period.

Rješenja

1. Funkcija je neparna pa je $a_n = 0$ za sve $n \geq 0$ i
$$b_n = \begin{cases} -\frac{4}{n\pi}, & n \text{ neparan} \\ 0, & n \text{ paran} \end{cases}.$$
Dakle,
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{(2n-1)\pi} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right).$$
Iz Parsevalove jednakosti dobivamo
$$2 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2},$$
pa je
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Funkcija je parna pa je $B(\lambda) = 0$. Računamo samo $A(\lambda)$:
$$A(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty ae^{-x}\cos(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{2a}{\pi}\frac{1}{\lambda^2+1}$$
Za $x = a > 0$ funkcija je neprekidna pa je $ae^{-a} = f(a) = \int_0^\infty A(\lambda)\cos(\lambda a)d\lambda = \frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos(\lambda a)}{\lambda^2+1}d\lambda$. Stoga je traženi integral jednak $\frac{\pi}{2}e^{-a}$.

3. Periodi funkcija $\operatorname{ctg}(2^n x)$ su $\frac{k\pi}{2^n}$ pa je i π period za svaki $n = 3, \ldots, 10$. Stoga je π period funkcije f (to nije temeljni period!).