

## Šesta domaća zadaća iz Matematike 3R

Rok za predaju: na predavanjima 9. siječnja 2007.

1. Može li se jednoznačno (do izomorfizma) odrediti struktura jednostavnog grafa s  $n$  vrhova kojem je zadan niz stupnjeva  $(1, 1, 2, 2, 2, \dots, 2)$ ? Ispitaj što sve može biti takav graf! Što ako se doda uvjet da je graf povezan?
2. Nađi niz stupnjeva za kotač  $W_n$  s  $n$  vrhova. Uvjeri se neposredno da je uvijek broj vrhova neparnog stupnja paran!
3. Neka je  $A$  matrica incidencije grafa  $C_4$  (kojem su vrhovi numerirani slijedom, npr. u smjeru kazaljke na satu). Izračunaj  $A^n$ !
4. Ispitaj za koje  $n$ -ove je ciklus  $C_n$  bipartitan graf. Za koje  $n$ -ove je kotač  $W_n$  bipartitan?
5. Dokaži da je  $k$ -kocka  $Q_k$  bipartitan graf za svaki  $k \geq 2$ .
6. Uz koje uvjete na parametre su grafovi  $K_n$ ,  $K_{r,s}$ ,  $W_n$  regularni? S kojim stupnjem regularnosti?
7. Dokaži da je komplement  $r$ -regularnog jednostavnog grafa  $(n - r - 1)$ -regularan.
8. Što je komplement kocki s 8 vrhova? Nađi matricu susjedstva dobivenog grafa.
9. Za jednostavni graf koji je izomorfan svome komplementu kažemo da je samokomplementaran. Dokaži da ako je  $G$  samokomplementaran, onda mu je broj vrhova  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$
10. Nađi sve samokomplementarne grafove s 4 i s 5 vrhova.
11. Bridni graf  $L(G)$  jednostavnog grafa  $G$  definira se kao graf čiji vrhovi su u bijektivnoj korespondenciji s bridovima grafa  $G$ , pri čemu su dva vrha od  $L(G)$  susjedna onda i samo onda ako su odgovarajući bridovi u  $G$  susjedni (tj. incidentni s jednim zajedničkim vrhom). Pokaži da  $K_3$  i  $K_{1,3}$  imaju iste bridne grafove.
12. Dokaži da ako je  $G$   $k$ -regularan, onda je njegov bridni graf  $L(G)$   $(2k - 2)$ -regularan.
13. Kakvu strukturu ima jednostavni graf s  $n$  vrhova kod kojeg je udaljenost svaka dva vrha jednaka 1? Kakvu strukturu ima jednostavni graf s  $n$  vrhova kod kojeg postoje vrhovi udaljeni za  $n - 1$ ?

14. Koliki je struk Petersenovog grafa?
15. Ako graf  $G$  ima dva različita ciklusa koji sadrže brid  $e$ , dokaži da onda  $G$  ima ciklus koji ne sadrži  $e$ .
16. Neka je  $G$  jednostavni graf s  $2k$  vrhova bez trokutova. Dokaži da  $G$  ima najviše  $k^2$  bridova. Navedi primjer kad se ta gornja granica postiže.
17. Ako u stablu postoji vrh stupnja  $k$ , onda u tom stablu postoji barem  $k$  vrhova stupnja 1. Dokaži ovu tvrdnju!
18. Koliko ima neizomorfnih stabala sa 7 vrhova?
19. Dana je matrica susjedstva jednostavnog grafa  $G$  sa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadi matricu susjedstva nekog razapinjućeg stabla od  $G$ .

20. Konstruiraj graf s 5 vrhova i s najmanjim brojem bridova tako da on ima 2 disjunktne razapinjuća stabla (tj. da ta stabla nemaju zajednički brid). Je li moguće konstruirati graf s tim svojstvom s 4 vrha? A s 3 vrha?