# Završni ispit iz Matematike 3R
## 03.02.2016.

1. **(5 bodova)** Koliko se parnih brojeva može složiti od svih znamenaka broja 31037038? (Prva znamenka ne može biti 0!)

2. **(5 bodova)** Izvedite formulu za broj surjekcija sa $m$-članog u $n$-člani skup, gdje je $m \geq n$.

3. **(5 bodova)** Neka je dan skup od 2016 proizvoljnih prirodnih brojeva. Dokažite da postoji barem 6 brojeva iz tog skupa s istim ostatkom pri dijeljenju s brojem 403.

4. **(5 bodova)** Na koliko načina se 20 jabuka može podijeliti Ani, Petru, Ivanu i Anti tako da Ana dobije barem 3, ali ne više od 10, Petar barem 2, ali ne više od 8, a Ivan barem dvije jabuke?

5. **(5 bodova)** Odredi linearnu rekurzivnu relaciju (s pripadnim početnim uvjetima) za niz čija je funkcija izvodnica dana sa

$$g(x) = \frac{10x}{x^2 + x - 6}.$$

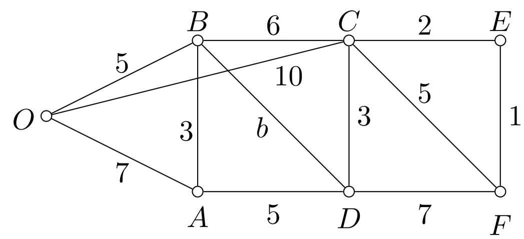
6. **(5 bodova)**
**(a)** Dokažite da u jednostavnom povezanom grafu s $n$ vrhova i $n$ bridova postoji točno jedan ciklus.
**(b)** Odredite sve međusobno neizomorfne grafove sa 6 vrhova i 6 bridova.

7. **(5 bodova)** Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

**(a)** Skicirajte graf $G$ ako mu je $A$ matrica susjedstva.
**(b)** Skicirajte graf $G$ ako mu je $A$ matrica incidencije.
**(c)** Neka je $B$ proizvoljna $n \times n$ matrica takva da je ona matrica susjedstva nekog grafa $H_1$ te matrica incidencije nekog grafa $H_2$. Dokažite da su $H_1$ i $H_2$ eulerovski grafovi.

8. **(5 bodova)** Za težinski graf na slici nađite sve $b \in \mathbb{N}$ tako da najkraći put od $O$ do $F$ nužno prolazi bridom $BD$ i odredite duljinu takvog puta. Algoritam obavezno treba provesti!




*Ispit se piše 120 minuta. Sretno!*

**Završni ispit iz Matematike 3R - Rješenja**
**03.02.2016.**

1. **(5 bodova)** Koliko se parnih brojeva može složiti od svih znamenaka broja 31037038? (Prva znamenka ne može biti 0!)

   Na zadnjem mjestu mora biti 0 ili 8. Ako je na zadnjem mjestu 0, broj svih rasporeda je $\frac{7!}{1!1!3!1!1!}$ od čega oduzmemo one koji počinju s 0, a takvih je $\frac{6!}{1!3!1!1!}$. Ako je na zadnjem mjestu 8, broj svih rasporeda je $\frac{7!}{2!1!3!1!}$, od čega oduzmemo one koji počinju s 0, a takvih je $\frac{6!}{1!1!3!1!}$. Ukupno $\frac{7!}{3!} - \frac{6!}{3!} + \frac{7!}{2!3!} - \frac{6!}{3!} = 1020$.

2. **(5 bodova)** Izvedite formulu za broj surjekcija sa $m$-članog u $n$-člani skup, gdje je $m \geq n$.

   Dokaz je dan u drugoj knjižici, str. 46. Koristite FUI.

3. **(5 bodova)** Neka je dan skup od 2016 proizvoljnih prirodnih brojeva. Dokažite da postoji barem 6 brojeva iz tog skupa s istim ostatkom pri dijeljenju s brojem 403.

   Mogući ostaci pri dijeljenju s 403 su $0, 1, \ldots, 402$. Ima ih ukupno 403. Problem se svodi na razmještaj 2016 "kuglica" u 403 "kutije". Po Dirichletovom načelu postoji kutija koja sadrži bar $\left\lfloor \frac{2016-1}{403} \right\rfloor + 1 = 6$ kuglica. Dakle, postoji bar 6 brojeva koji daju isti ostatak pri dijeljenju s 403.

4. **(5 bodova)** Na koliko načina se 20 jabuka može podijeliti Ani, Petru, Ivanu i Anti tako da Ana dobije barem 3, ali ne više od 10, Petar barem 2, ali ne više od 8, a Ivan barem dvije jabuke?

   Treba odrediti $[x^{20}](x^3+x^4+\ldots+x^{10})(x^2+x^3+\ldots+x^8)(x^2+x^3+\ldots)(1+x+x^2+\ldots) = [x^{13}](1+x+\ldots+x^7)(1+x+\ldots+x^6)(1+x+\ldots)(1+x+\ldots) = [x^{13}](1-x^8)(1-x^7)(1-x)^{-4} = [x^{13}](1-x^7-x^8+x^{15})\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-4}{k}(-1)^k x^k = \binom{16}{13} - \binom{9}{6} - \binom{8}{5} = 420$.

5. **(5 bodova)** Odredi linearnu rekurzivnu relaciju (s pripadnim početnim uvjetima) za niz čija je funkcija izvodnica dana sa

   $$g(x) = \frac{10x}{x^2+x-6}.$$

   $g(x) = \frac{6}{x+3} + \frac{4}{x-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(2(\frac{-1}{3})^k - 2(\frac{1}{2})^k\right)x^k$. Dakle, $a_n = 2(\frac{-1}{3})^n - 2(\frac{1}{2})^n$, $n \geq 0$. To je opće rješenje rekurzije čija je karakteristična jednadžba $(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2}) = 0$, odnosno $6x^2 - x - 1 = 0$. Dakle rekurzija je $6a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$. Još odredimo početne uvjete $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{5}{3}$.

6. **(5 bodova)**
   **(a)** Dokažite da u jednostavnom povezanom grafu s $n$ vrhova i $n$ bridova postoji točno jedan ciklus.
   **(b)** Odredite sve međusobno neizomorfne grafove sa 6 vrhova i 6 bridova.

   Po teoremu s predavanja, jednostavni povezani graf s $n$ vrhova i $n$ bridova nije stablo pa sadrži ciklus. Ako bi sadržavao više od jednog ciklusa, onda iz grafa možemo ukloniti bar dva brida tako da on ostane povezan. No time dobivamo povezan graf s $n$ vrhova i $< n-2$ brida, što nije moguće.

   Međusobno neizomorfnih jednostavnih povezanih grafova sa 6 vrhova i 6 bridova ima 13. Po (a) znamo da takav graf sadrži ciklus pa ih možemo sistematično ispisati ovisno o duljini tog ciklusa. Nađemo 1 graf koji sadrži ciklus duljine 6, 1 koji sadrži ciklus duljine 5, 4 koji sadrže ciklus duljine 4 i 7 koji sadrže ciklus duljine 3.

7. **(5 bodova)** Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

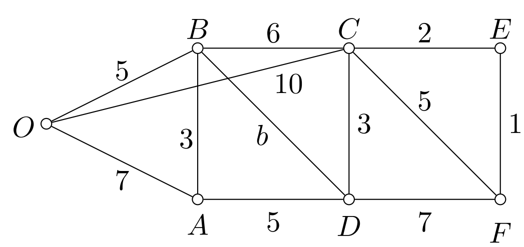
**(a)** Skicirajte graf $G$ ako mu je $A$ matrica susjedstva.
**(b)** Skicirajte graf $G$ ako mu je $A$ matrica incidencije.
**(c)** Neka je $B$ proizvoljna $n \times n$ matrica takva da je ona matrica susjedstva nekog grafa $H_1$ te matrica incidencije nekog grafa $H_2$. Dokažite da su $H_1$ i $H_2$ eulerovski grafovi.

U (a) i (b) dobivamo graf $C_5$.
U (c) dijelu zadatka tvrdnja vrijedi uz pretpostavku da su $H_1$ i $H_2$ povezani. Naime, matrica $B$ ima točno dvije jedinice u svakom stupcu, ostalo su nule. Ona je i matrica susjedstva grafa $H_1$ pa je simetrična iz čega slijedi da i u svakom retku ima točno dvije jedinice. Dakle, stupanj svakog vrha u $H_1$ je 2. Uz pretpostavku da je $H_1$ povezan po Eulerovom teoremu slijedi da je $H_1$ eulerovski. Kako u svakom retku matrice postoje točno dvije jedinice, to za matricu incidencije znači da iz svakog vrha u $H_2$ izlaze točno dva brida. Dakle, i graf $H_2$ je 2-regularan. Uz pretpostavku povezanosti po Eulerovom teoremu slijedi da je $H_2$ eulerovski.
Bez pretpostavke povezanosti tvrdnja ne vrijedi. Npr. ako je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onda su $H_1$ i $H_2$ 2-regularni nepovezani grafovi (pa ne mogu biti eulerovski). Zadatak smo priznavali i ako ste pretpostavili povezanost i ako ste pokazali da tvrdnja bez pretpostavke povezanosti ne vrijedi.

8. **(5 bodova)** Za težinski graf na slici nađite sve $b \in \mathbb{N}$ tako da najkraći put od $O$ do $F$ nužno prolazi bridom $BD$ i odredite duljinu takvog puta. Algoritam obavezno treba provesti!




Za $b = 1$ najkraći put je $O - B - D - C - E - F$ duljine 12. Ako je $b \geq 2$, najkraći put je $O - C - E - F$ duljine 13 i on ne prolazi bridom $B - D$. Dakle, najkraći put nužno prolazi bridom $B - D$ samo za $b = 1$.