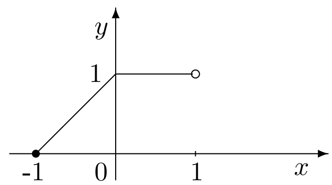
Međuispit iz Matematike 3R
19.11.2014.

1. **(5 bodova)** Zadana je periodična funkcija $f(x)$ perioda duljine 2 grafom



(a) Odredite Fourierov red $S(x)$ funkcije $f(x)$.
(b) Odredite $f(2015) - S(2015)$.

2. **(5 bodova)** Izračunajte

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\pi t)}{1-4t^2}\, dt$$

pomoću prikaza funkcije

$$f(x) := \begin{cases} 2\cos\frac{x}{2}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x \notin [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

u Fourierov integral.

3. **(5 bodova)** Odredite za koje $s \in \mathbb{R}$ konvergira integral

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-st} \sin 2t \, dt.$$

Ako postoji, izračunajte

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-2t} \sin 2t \, dt.$$

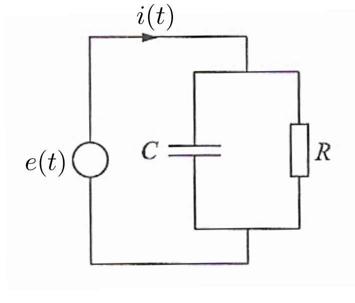
4. **(5 bodova)** Iskažite teorem o integriranju originala, te ga dokažite:
(a) Pomoću teorema o konvoluciji
(b) Bez korištenja teorema o konvoluciji.

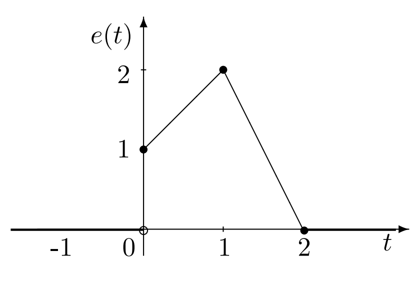
5. **(5 bodova)** Pomoću Laplaceove transformacije riješite sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\begin{cases} y' = 11y - 2z \\ z' = 8y + z \end{cases}$$

uz početne uvjete $y(0) = 2$ i $z(0) = 5$.

6. **(5 bodova)** Pomoću Laplaceove transformacije naći struju $i(t)$ strujnog kruga zadanog slikom gdje je $C = 1$ i $R = 1$. Priključeni napon $e(t)$ zadan je grafom.





OKRENITE!

7. **(5 bodova)** Konstruirajte injekciju sa skupa $\mathbb{Q}$ u $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

8. **(5 bodova)** Na skupu $\mathbb{R}^2$ definiramo relaciju ρ:

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \text{ ako i samo ako } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

(a) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije i skicirajte u ravnini klasu od $(1, 1)$.
(b) Odredite kvocijentni skup $\mathbb{R}^2/\rho$

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljena je upotreba službenog podsjetnika. Sretno!

Međuispit iz Matematike 3R
19.11.2014. - RJEŠENJA

1. (a)
$$S(x)=\frac{3}{4}+\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)\pi x)+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin(n\pi x).$$

   (b) $f(2015)=0$, $S(2015)=\frac{1}{2}$, $f(2015)-S(2015)=-\frac{1}{2}$.

2.
$$f(x)=\int_0^\infty \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\cos(\pi\lambda)}{1-4\lambda^2}\cos(\lambda x)\,d\lambda.$$
   Uvrstimo $x=0$ i dobivamo:
$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi\lambda}{1-4\lambda^2}\,d\lambda=\frac{\pi}{4}.$$

3. Laplaceov integral konvergira za $s>a_0$, gdje je a_0 eksponent rasta. Budući je $|t^2\sin 2t|<t^2$ i $\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{e^{at}}=0$, za svaki $a>0$, zaključujemo da je $a_0=0$, tj. da integral konvergira za svaki $s>0$.
   Dakle, postoji $F(2)$.
   $t^2\sin 2t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}$, pa je $F(2)=1/16$.

4. knjižica

5.
$$Y(s)=\frac{2s-12}{(s-3)(s-9)} \bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{3t}+e^{9t}=y(t),$$
$$Z(s)=\frac{5s-39}{(s-3)(s-9)} \bullet\!\!-\!\!\circ\; 4e^{3t}+e^{9t}=z(t).$$

6.
$$e(t)=(t+1)u(t)+3(1-t)u(t-1)+(2t-4)u(t-2)\circ\!\!-\!\!\bullet\;\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-3\frac{1}{s^2}e^{-s}+2\frac{1}{s^2}e^{-2s}=E(s).$$
   $1/Z(s)=1+s$, pa je $I(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s}-3\frac{1}{s^2}e^{-s}+2\frac{1}{s^2}e^{-2s}+\frac{1}{s}+1-3\frac{1}{s}e^{-s}+2\frac{1}{s}e^{-2s}\bullet\!\!-\!\!\circ$
   $(t+2)u(t)-3tu(t-1)+2(t-1)u(t-2)+\delta(t)=i(t)$.

7. Za svaki $q\in\mathbb{Q}$ postoje jedinstveni $a_q\in\{1,2\}$, $b_q,c_q\in\mathbb{N}$ takvi da je $(b_q,c_q)=1$ i $q=(-1)^{a_q}\frac{b_q}{c_q}$. Definiramo $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sa $f(q)=f((-1)^{a_q}\frac{b_q}{c_q})=(2^{a_q}3^{b_q},5^{c_q})$. Po jedinstvenosti gornjeg rastava i osnovnom teoremu aritmetike zaključujemo da je f injekcija.

8. (a) Klasa od $(1,1)$ je kružnica oko ishodišta polumjera $\sqrt{2}$.
   (b) Elementi kvocijentnog skupa su kružnice oko ishodišta, uključujući i degeneriranu kružnicu $(0,0)$.