JEDNOSTAVNI GRAF ⇒ $G=(V(G),E(G))$ $\begin{cases} V(G) = \text{neprazni konačni skup vrhova} \\ E(G) = \text{konačni skup različitih dvočlanih podskupova skupa } V(G) \end{cases}$

OPĆI (GENERALIZIRANI) GRAF ⇒ dopuštene su i petlje i višekratni bridovi

IZOMORFIZAM – postoji bijektivna korespondencija između $V(G_1)$ i $V(G_2)$
– nužno, ali ne i dovoljno: $|V(G_1)|=|V(G_2)|$, $|E(G_1)|=|E(G_2)|$
– $\{v_1,v_2\}\in E(G_1)$ akko $\{\varphi(v_1),\varphi(v_2)\}\in E(G_2)$, $\forall v_1,v_2\in V(G_1)$
– relacija ekvivalencije na skupu svih grafova

STUPANJ VRHA ($deg(v)$) – broj bridova incidentnih s v
– $deg(v)=0$ ⇒ IZOLIRANI VRH ; $deg(v)=1$ ⇒ KRAJNJI VRH

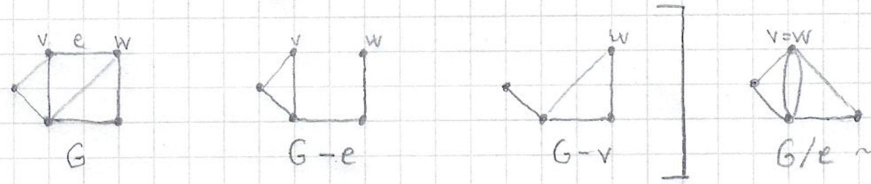
LEMA O RUKOVANJU ⇒ U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran, tj. vrijedi

$$\sum_{v\in G} deg(v) \equiv 0 \pmod 2 = 2\cdot|E(G)|$$

Slijedi da je broj vrhova neparnog stupnja u svakom G paran.

STUPANJ REGULARNOSTI r – $deg(v)=r$, $\forall v\in V(G)$ ⇒ svi vrhovi su istog stupnja r

PODGRAFOVI:



G/e ⇝ nije podgraf od G

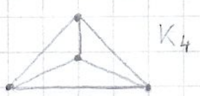
MATRICA SUSJEDSTVA $A[a_{ij}]$ – $n\times n$, a_{ij} = broj bridova koji spajaju vrh i s vrhom j

MATRICA INCIDENCIJE $B[b_{ij}]$ – $n\times m$, $b_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ako je vrh } i \text{ incidentan s vrhom } j \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$

NUL-GRAF (N_n)

→ $E(N_n)=\{\emptyset\}$
→ $\overline{N_n}=K_n$

POTPUNI GRAF (K_n)

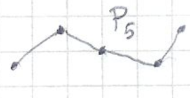


→ ima $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ bridova
→ $(n-1)$-regularan

CIKLIČKI GRAF (C_n)

→ 2-regularan

LANAC (P_n)

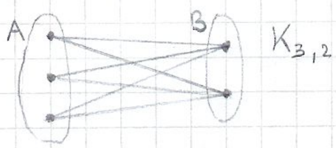


→ dobije se brisanjem jednog brida iz cikličkog grafa

KOTAČ (W_n)

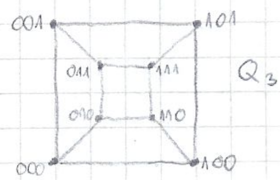
→ $|E(W_n)|=2(n-1)$

POTPUNI BIPARTITNI GRAF ($K_{r,s}$)



→ $V(G)=A\cup B$, $|A|=r$, $|B|=s$
→ $r+s$ vrhova, $r\cdot s$ bridova
→ $\overline{K_{r,s}}=K_r\cup K_s$

k-KOCKA (Q_k)



→ $|V(Q_k)|=2^k$, $|E(Q_k)|=\frac{2^k\cdot k}{2}=k\cdot 2^{k-1}$
→ k-regularna

KOMPLEMENT ($\overline{G}$) – dva vrha u $\overline{G}$ su susjedna onda i samo onda ako nisu susjedni u G
– vrijedi: $E(\overline{G})=\binom{V(G)}{2}\setminus E(G)$; $\overline{A}=J-I-A$

- graf je SAMOKOMPLEMENTARAN kad je izomorfan svom komplementu

BRIDNI GRAF $(L(G))$ - vrhovi su mu u bijektivnoj korespondenciji s bridovima grafa G, pri čemu su 2 vrha u $L(G)$ susjedna akko su susjedni odgovarajući bridovi u G

ŠETNJA - konačan slijed susjednih ili jednakih bridova oblika $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$ $(v_0 \to \dots \to v_m)$
- v_0 = početni vrh šetnje ili izvor, v_m = krajnji vrh šetnje ili ponor, m = duljina šetnje

STAZA - šetnja u kojoj su svi bridovi različiti
PUT - šetnja u kojoj su svi bridovi i svi vrhovi različiti (osim eventualno v_0 i v_m)
- CIKLUS - ZATVORENI PUT $(v_0 = v_m)$

RELACIJA „BITI POVEZAN" $(\sim)$ - $u \sim v$, $u, v \in V(G)$ ako postoji šetnja s početkom u u i završetkom u v $\Rightarrow$ relacija ekvivalencije
- povezani graf ima više od $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ bridova

BIPARTITAN GRAF - sadrži dva disjunktna skupa A i B, svaki brid od G spaja neki vrh skupa A s nekim iz skupa B
- onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu parne duljine

• za broj bridova m u jednostavnom grafu s n vrhova i k komponenata povezanosti vrijedi:

$$n-k \leq m \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \binom{n-k+1}{2}$$

RASTAVLJAJUĆI SKUP - skup bridova čijim uklanjanjem povezani graf postaje nepovezan
- REZNI SKUP - nijedan njegov pravi podskup nije rastavljajući
- MOST - rezni skup je jedan jedini brid
- BRIDNA POVEZANOST $(\lambda(G))$ - veličina najmanjeg reznog skupa; G je k-bridno povezan ako je $\lambda(G) \geq k$

SEPARIRAJUĆI SKUP - skup vrhova čijim uklanjanjem povezani graf postaje nepovezan
- VRŠNA POVEZANOST $(\kappa(G))$ - veličina najmanjeg separirajućeg skupa; G je k-povezan ako je $\kappa(G) \geq k$

UDALJENOST $d(v,w)$ - duljina najkraće šetnje između vrhova v i w
STRUK GRAFA - duljina najkraćeg ciklusa

STABLO - povezani graf s n vrhova i $n-1$ bridova koji ne sadrži ciklus
- svaki mu je brid most, a svaka 2 vrha povezana su točno jednim putem
- dodavanjem jednog brida (uz isti broj vrhova) dobit ćemo točno jedan ciklus
- ŠUMA - ima stabla kao komponente povezanosti ('ko bi reko)
- RAZAPINJUĆE STABLO - graf dobiven uklanjanjem bridova iz uočenih ciklusa u nekom grafu $\rightarrow$ ukupno $(m-n+1)$ bridova

EULEROVSKI GRAF - postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G
- akko je stupanj svakog vrha paran
- akko se skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa

SKORO EULEROVSKI GRAF - postoji nezatvorena staza koja sadrži svaki brid od G
- akko ima točno dva vrha neparnog stupnja

FLEURYEV ALGORITAM za nalaženje eulerovske staze u eulerovskom grafu:
započni bilo gdje i idi bilo kamo, pritom brišući bridove i izolirane vrhove i pazeći da mostom prijeđeš samo ako nemaš druge mogućnosti.

HAMILTONOVSKI GRAF - sadrži ciklus koji prolazi svakim vrhom grafa

ORECOV TEOREM : Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi

$$deg(v) + deg(w) \geq n$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

DIRACOV TEOREM : Ako je G jednostavni graf s n ($n \geq 3$) vrhova, te ako je $deg(v) \geq n/2$, $\forall v \in V(G)$, onda je G hamiltonovski.

TEŽINA BRIDA ($w(e)$) - funkcija $w: E(G) \to \mathbb{R}^+$, pozitivan realan broj pridružen bridu grafa

- TEŽINA GRAFA $(w(G)) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$

ALGORITAM ZA NALAŽENJE NAJKRAĆEG PUTA :

1.) $S_0 = \{u_0\}$; $\bar{S}_0 = V(G) \setminus S$; $k = 0$;

2.) izračunaj $d(u_0, \bar{S}_k) = \min_{\substack{u_j \in S_k \\ u_{k+1} \in \bar{S}_k}} \{ d(u_0, u_j) + w(u_j u_{k+1}) \}$, za $j \leq k$;

izaberi u_{k+1} za koji vrijedi $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \bar{S}_k)$;
premjesti u_{k+1} iz skupa $\bar{S}_{k+1}$ u skup S_{k+1} ;
put P_{k+1} konstruiraj tako da putu P_j dodaš brid $u_j u_{k+1}$;

3.) $k := k+1$; ako je $(k == n-1)$ stani ; ako je $k < n-1$ vrati se na korak 2. ;

DIJKSTRIN ALGORITAM ZA PROBLEM NAJKRAĆEG PUTA :

1.) $\ell(u_0) = 0$; $\ell(v) := \infty, \forall v = u_0 \in V(G)$; $S_0 = \{u_0\}$; $\bar{S}_0 = V(G) \setminus S$; $i = 0$;

2.) $\ell(v) := \min \{ \ell(v), \ell(u_i) + w(u_i v) \}$, $\forall v \in \bar{S}_i$;
$u_{i+1} :=$ v za koji se postiže $\min_{v \in \bar{S}_i} \{ \ell(v) \}$;

$S_{i+1} := S_i \cup \{u_{i+1}\}$; $\bar{S}_{i+1} := \bar{S}_i \setminus \{u_{i+1}\}$;

3.) $i := i+1$; ako je $(i == n-1)$ stani ; ako je $i < n-1$ vrati se na korak 2. ;

→ svim vrhovima v pridijeljena je vrijednost $\ell(v)$ koja predstavlja $d(u_0, v)$

KINESKI PROBLEM POŠTARA - kombinacija Fleuryevog algoritma za nalaženje skoro eulerovske staze i Dijkstrinog algoritma za nalaženje najkraćeg puta

PROBLEM TRGOVAČKOG PUTNIKA - hamiltonovski ciklus minimalne duljine u potpunom grafu ⇒ $(n-1)!/2$ kombinacija
- POHLEPNA STRATEGIJA