2. ciklus matematika 3R

Dakle, probat cu ovdje malo objasnit neke tipove zadataka koji se redovito javljaju na svim ispitima pa mozda pomogne nekim ljudima koji se ili spremaju za ovaj novouvedeni rok ili jednostavno.. neznam, citaju jer im je dosadno :D

**RELACIJE EKVIVALENCIJE**

Dakle, idemo prvo krenut sa relacijama jer ako otvorite meduispite proslih godina vidit cete redovito jedan zadatak sa relacijom ekvivalencije. Nije to nista tesko, cista sablona sa malom dozom razmisljanja, tako da probajte se ne zeznut na razimsljanju ☺

Za pocetak, uzet cemo najlaksi sta moze bit, iz 2006. ponovljenog 2.mi drugi zadatak. On glasi ovako:

Na skupu X = A × A, gdje je A = {0, 1, 2, 3} zadana je relacija ρ sa

(a, b) ρ (c, d) onda i samo onda ako je a + b = c + d.

(a) Dokaži da je ρ relacija ekvivalencije.

(b) Nadi sve elemente razreda [(2, 2)].

(c) Koliko elemenata ima kvocijentni skup X/ρ?

Prvo i osnovno odradujemo onaj dio sablone o kojem sam prico, moramo dokazat relaciju ekvivalencije ρ a to napravimo preko tri koraka: dokazemo refleksivnost, simetricnost i tranzitivnost. Pa, krenimo sa prvim, refleksivnost:

1. **REFLEKSIVNOST**

Ovdje moramo dokazati da je relacija refleksivna tj, da vrijedi uvijet zadatka ako relaciju usporedujemo sa samim sobom. In lack of better words, ovako bi to u praksi izgledalo:

**(x,y) ρ(x,y)**

To ce vrijediti ukoliko vrijedi **x + y = x + y**, a to zdravom logikom vrijedi. To je to za refleksivnost, podvucite, stavite kvacice, dajte do znanja da jer to to jer iako je nesto sto se u principu netreba dokazivat i stvar je zdravog razuma oni inzistiraju na tom pa nemojte lagano izgubit bodove.

1. **SIMETRICNOST**

Svi znate sta je simetrija, gledamo da vrijedi slijedece:

**(x1,y1) ρ(x2,y2) i (x2,y2)ρ (x1,y1)**

A to ce vrijediti ako je **x1 + y1 = x2 + y2**, te **x2 + y2 = x1 + y1**, sto je isto tako tocno pa idemo dalje.

1. **TRANZITIVNOST**

Tranzitivnost vrijedi u slucaju ako pomocu 2 relacije ekvivalencije mozemo zakljuciti da su i ostale 2 relacije ekvivalentne. U praksi to znaci ovo:

**(x1,y1) ρ(x2,y2) i (x2,y2)ρ (x3,y3)**

Te iz toga moramo zakljuciti slijedece:

**(x1,y1) ρ(x3,y3)**

A to cemo lako zakljuciti ako idemo po uvijetima, dakle **x1 + y1 = x2 + y2**, te **x2 + y2 = x3 + y3** a samim tim je i je **x1 + y1 = x3 + y3**.

Nadam se da razumijete jer je ovo korak koji nosi samo jedan bod ali je koristan za shvacanje onog sta dalje ide. I da, nemojte uzimati zdravo za gotovo da ce uvijek biti valjana relacija ekvivalencije jer je sada na ispitu ove godine (2010/11) bilo tako da nema ekvivalencije ☺

Dalje je stvar razmisljanja, i to ne pretjeranog, ali i dalje se mora razmisljati ☹

Prvo i osnovno moramo razjasniti sta nam sve postoji u ovoj fazi zadatka – to su razredi ekvivalencije te kvocijentni skup, i sad cisto da znate kad vas pita u zadatku sta je to X/ ρ – to je kvocijentni skup, to je skup svih razreda koji se pojavljuju. E sad, sta su to razredi - to su nacini na koje mozemo grupirati relacije za koje vrijedi ekvivalencija. Kasnije cete na primjeru tocno vidjeti sto to tocno znaci, zasad neka ostane na tom. Isto tako, mogu vas traziti i kardinalni broj kvocijentnog skupa ili kardinalni broj nekog razreda, a to nije nista drugo nego obican broj koliko elemenata postoji. Dakle ako pita kardinalni broj nekog razreda, ispisete elemente tog razreda, pobrojite i to je rjesenje ☺ isto tako, za kardinalni broj kvocijentnog skupa (btw oznacava se sa |X/ ρ |) prebrojite koliko razreda ima i to napisete ko rjesenje. To je to, mozemo dalje na zadatak.

Iako ide b pa c, ja bi rade rijesio c pa b dio zadatka jer tako i tako moramo ispisati grupe, a cisto radi provjere i utvrdivanja ovog sta smo naucili idemo ispisati sve grupe i sve njezine elemente. Pa zapocnimo:

Razredi – za pocetak cemo staviti razred [0,0] sto znaci da nam je x=0 i y=0 te gledamo kojom kombinacijom brojeva mozemo dobiti x+y=0+0, a s obzirom da imamo skup od brojeva 0,1,2,3 ocito je kako se radi samo o 0,0. Dakle to je to, razred [0,0] u sebi sadrzi samo sebe te mozemo prijeci na iduci razred.

[(0,0)]=(0,0)

Uzmimo sada x=0, y=1 – dobivamo da je x+y=0+1=1, a to mozemo dobiti na 2 nacina, 0+1 ili 1+0, pa zapisimo to:

[(0,0)]=(0,0)  
[(0,1)]=(0,1), (1,0)

Mislim da ste do sada skuzili nacin hvatanja grupa, pa cu samo ispisati ostale i napomenuti neke stvari koje su bitne da se ne zeznete:

[(0,0)]=(0,0)  
[(0,1)]=(0,1), (1,0)  
[(1,1)]=(1,1), (2,0),(0,2)  
[(1,2)]=(1,2), (2,1), (3,0), (0,3)  
**[(2,2)]=(2,2), (3,1), (1,3)**  
[(2,3)]=(2,3), (3,2)  
[(3,3)]=(3,3)

Iz ovoga se lako iscita da je kardinalni broj kvocijentnog skupa **X/ ρ = 7**, a elemente skupa [(2,2)] sam podebljao u rjesenju

Mislim da vidite princip rada, e sad taj bi princip trebalo znati primjeniti i na teze situacije. Npr. veoma je moguce da vam skupovi nece biti **AxA** koji su jednostavni poput ovoga, moguce da ce bit **NxN** pa sta onda? Onda elemenata ima beskonacno, pa kako to zapisat? Jednostavno, pokazete im da ima beskonacno elemenata i onda ne napisete beskonacno nego da ih ima **Alef nula** (onaj N0 cudni koji ste vidli u knjizici, on je za prebrojive elemente) ili **c** (neprebrojive elemente). Opet, mjesto di se lako izgube bodovi a nije tesko za zapamtiti.

Jos jedna stvar koja je bitna a praksa je pokazala da puno ljudi nezna – nacin na koji raspisujete razrede – prva i osnovna stvar, nemojte ici raspisivati apsolutno sve elemente odjednom jer su velike vjerojatnosti da ce zadati zadatak da je nemoguce to napraviti – umjesto toga pocnite pisati jedan po jedan element te kad ispisete one elemente koje se nalaze u njemu, nastavite sa slijedecim (npr nakon 1 nemojte skocit na 8 bez razloga jer cete si samo zadat nepregledan zadatak). I zapamtite da ime razreda nije nista drugo nego odabir jednog od njegovih elemenata kao predstavnika. U gornjem primjeru je razred [(2,3)] mogao lako biti i [(3,2)].

Nadam se da ste shvatili jer to je cijela mudrost ovog tipa zadatka, sad oni mogu zadat prakticki bilo sta ali ako ste ovo shvatili a ne samo naucili ovaj primjer lako cete se snaci i u ostalim zadacima ☺

**KOMBINATORIKA**

Kao sto ste primjetili, ja neam pojma kako se sta zove tako da molio bih bez pitanja sta je od toga zadatak sa permutacijama, sta sa varijacijama a sta sa kombinacijama jer jednostavno neznam, ako vas to zanima procitajte knjizicu :D

Pa zapocnimo, idem onako kako mi zadaci padaju na pamet, a prvo sto mi pada na pamet je broj rijeci koje mozemo sa nekim slovima napravit.

Idemo sa klasicnim – imamo rijec **MATEMATIKA** (nasa najdraza). Koliko rijeci mozemo napraviti ako razmjestamo slova ?

Prvo i osnovno sto treba znat je da ne picajzlimo :D dakle, pod rijeci se misli razlicitih kombinacija slova, rijeci ne moraju biti smislene – dakle i **MMAAATTEIK** je rijec koju uzimamo u obzir. Primjetite kako sam odmah grupirao slova koja su nam ista – e pa to nije slucajno – to je vrlo vazan dio zadatka ;) gledamo kolko slova imamo koja ponavljamo:

3x A  
2x M  
2x T  
1x E  
1x I  
1x T

To je to, ta slova moramo razmjestat kako bi dobili sve moguce kombinacije ali pritom, jos jednom napominjem, pazimo da ne brojimo vise puta iste rijeci, a to bi se lako moglo dogoditi.

Recimo da imamo sva slova razlicita, 10 razlicitih slova – ovaj bi zadatak imao rjesenje

**10\*9\*8\*7\*6\*5\*4\*3\*2\*1**

Napisao sam to na ovaj nacin jer ce vas mozda asocirat na nacin koji ste zapisivali u biljeznici, dakle prvo slovo biramo na 10 nacina, drugo na 9 (jedno smo odabrali, preostaje nam 9) i tako dalje. Sveukupno **10!** nacina, nadam se da je to jasno.

E sada, razlika izmedu tog i naseg zadatka je to da mi imamo slova koja se ponavljaju, dakle problem – sta ako smo uzeli rijeci MM... i MM... kao dvije razlicite? E pa tu moramo sada izbaciti ta ponavljanja a to radimo tako da cisto jednostavno podijelimo sa brojem nacina na koje mozemo ispremijesati ta slova. Vec sam rekao, nacin za ispremijesati slova je isti ovaj gore, dakle za slova A ce biti **3\*2\*1**, za slova M ce biti **2\*1** a za T **2\*1**. Pretpostavljam da vidite kako se radi o faktorijelama, pa cemo konacno rjesenje dobit kao da smo gledali sve kombinacije te od njih oduzeli one koje se ponavljaju. Da ne duljim:

**10! / (3!\*2!\*2!)**

Poprilicno sam opsirno isao u objasnjavanje ovog tipa i to iz jednostavnog razloga sto se ovakav zadatak moze pojaviti u vise varijanta a da ni ne primjetite da vas trazi istu stvar.

Tako na primjer imamo zadatke sa sahovskom plocom.

**SAHOVSKA PLOCA**

Podnaslov je tu cisto da malo razdvoji dijelove :P

Dakle, sahovska ploca je obicno, moze biti bilo sta – ideja je da se mozemo pomicati za jedno mjesto u desno i jedno mjesto gore te na koliko nacina mozemo doci od jedne do druge tocke.

Ovakav tip zadatka se lako moze shvatiti i preko slova, s obzirom da takve zadatke sada lagano rjesavamo, cak koristimo neku laganu sablonicu u zadacima za koje inace treba mozak, how cool is that ☺

Dakle, pomake u desno cemo gledati kao slovo **D** a pomake prema gore kao slovo **G**. (mozete vi sta god ocete al ovo je cisto da shvatite :D) E sada, kaze nam zadatak recimo

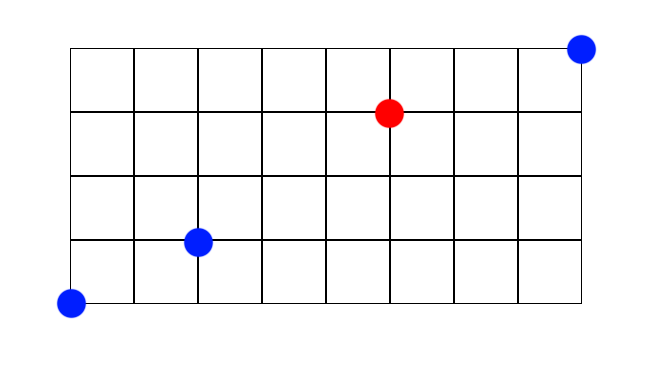
Nalazite se u (0,0) te se mozete pomaknuti samo desno i gore. Na koliko nacina mozete doci do (8,4)?

Vrlo jednostavan zadatak, trebamo otici 8 puta desno i 4 puta gore – dakle essentially imamo 8 slova D i 4 slova G. I trazimo sve kombinacije toga – a to je, bas kao i u gornjem zadatku

**12! / (8!\*4!)**

Primjetite kako je to isto sto i 12 povrh 4, tj 12 povrh 8 tako da kada u rjesenjima zadataka vidite taj zapis nemojte misliti da je krivo, samo je drugacije zapisano tocno rjesenje ;)

**SAHOVSKA PLOCA SA ZABRANJENOM TOCKOM**

Ista stvar kao gore, samo recimo u zadatku imamo da nesmijemo proci kroz tocku (5,3) a moramo proci kroz tocku (2,1). Zvuci komplicirano ali zapravo nije – samo trebamo ici jedan po jedan korak. U ovakvim situacijama si je obicno najlakse nacrtati neku mrezu pa gledati kako bi se trebali i mogli kretati. Ovdje bi izgledala ovako:

Dakle krecemo iz skroz donje lijeve tocke i idemo do skroz gornje s tim da izbjegavamo crvenu. Sad je vec lakse rjesavat kad imamo skicu – idemo prvi dio odradit koji moramo – idemo do 2,1. To cemo napravit na **3!/2!** nacina. E sad, najlakse bi nam bilo gledati ovu tocku 2,1 kao nase novo ishodiste jer do nje smo morali doci pa sada od nje gledamo ostale puteve koje moramo ili nesmijemo odraditi. S obzirom da imamo tocku koju nesmijemo dotaknut, napravit cemo sve puteve od nase (2,1) do kraja (8,4) i oduzet one puteve kojima smo slucajno prosli kroz crvenu. To bi dakle bilo

9!/(6!\*3!) – (5!/(3!\*2!))\*(4!/3!)

Dakle crveni dio je put od (2,1)-(8,4)  
Zeleni dio je (2,1)-(5,3)  
Plavi dio je (5,3)-(8,4)

Konacno rjesenje bi onda bilo jednostavno:

[3!/2!]\*[9!/(6!\*3!) – (5!/(3!\*2!))\*(4!/3!)]

**OKRUGLI STOL (+ fiksirani par)**

Dakle jos jedan od cestih tipova zadataka je okrugli stol. Njegova ideja je da je bitan razmjestaj ali ako krenemo gledati isti razmjestaj samo zarotiran za nekoliko mjesta – to smatramo istim i ne smijemo brojati. Uzmimo primjer:

Imamo okrugli stol i na koliko nacina mozemo razmjestiti 7 osoba za stol uz uvijet da Ivica i Marica budu zajedno?

Dakle, postoji 2 nacina rjesavanja ovog tipa zadataka ali u svakom moramo prvo grupirati Ivicu i Maricu da budu zajedno – stavimo ih kao jednu osobu za stol (samim tim nam efektivno ostaje 1 osoba manje) i pogledamo na koliko nacina mozemo sada staviti ostatak za stol. Druga stvar koja je jos bitna je da moramo izmjesati nacine na koje cemo postaviti Ivicu i Maricu, a to smo vec naucili da je 2! nacina. Jos jedino sta nam ostaje je vidjeti kako smjestiti cijelu ekipu za stol bez da zbrojimo po vise puta istu stvar – prvi nacin za to napravit je fiksirati jednu osobu na jedno mjesto i dalje gledamo kao da imamo klupu – dakle uzmemo neku random osobu, kutiju cavla i fino je prikucamo na jedno mjesto. Ostale nakon toga rasporedujemo kao da se radi o ravnoj klupi jer imamo tu neku „referentnu tocku“. Konkretno za ovaj slucaj bi to bilo

5! \* 2!

Drugi nacin cu samo spomenut jer ga ne koristim nikad, ali moze se razmisljati i na nacin da pogledamo sve apsolutno kombinacije i od toga oduzmemo ono sta smo vise puta ponavljali, dakle (6!\*2! / 6) jer 6 razlicitih nacina ima za napraviti taj krug. U principu se dobije isti rezultat pa samo pisite kako vam je lakse razmisljat.

**NALAZENJE BROJA RJESENJA NEJEDNADZBE/JEDNADZBE**

Klasik zadatak, dolazi na svakom ispitu, moze biti zadan bas tekstom „nadite rjesenja nejednadzbe bla bla“ ili „imamo 4 klinke i sad svaka moze odredeno bombona dobit“. Ovaj zadatak je pretty much sablonski tako da nemojte tu izgubit bodove. Kao primjer cu uzet neki svoj zadatak da pokazem na cake koje se mogu pojavit

Dakle trazimo broj rjesenja nejednadzbe

x1 + x2 + x3 < 5;  
xi > -i ; i != 3  
x3 = 1,2,3

i to je to sto je zadano. Sad krecemo s rjesavanjem, i na prvi pogled neznamo sta treba napravit, imamo tu neke i-eve, neke manje, x-eve i sve nesto zbunjujuce, al ajde idemo po redu, prvo i osnovno, idemo malo drugacije zapisat ovu jednadzbicu

x1 + x2 + x3 < 4

e super al svejedno je to jos malo nedefinirano pa bi trebali dodati jos jednu nepoznanicu kako bi dobili jednakost – x4

x1 + x2 + x3 + x4 = 4

to je to sto nam je potrebno za racunanje, idemo jos samo vidit intervale koje nam x-evi mogu, tj moraju poprimit.

x1 > -1 => x1 > 0   
x2 > -2 => x2 > -1  
x3 = 1,2,3   
x4 > 0

Da, prvo pitanje koje vam mozda padne na pamet je zasto je x4 > 0? E pa to je zato sto smo mi taj x mogli nazvat bilo kako i on nam predstavlja svojevrsni amortizer tako da dobijemo uvijek vrijednost koju trazimo, u nasem slucaju 4. Npr., kada bi nam x1 + x2 + x3 bili jednaki 4 onda bi nam x4 morao poprimiti svoju minimalnu vrijednost, a to je 0. S druge strane, ako bi nam zbroj x-va bio minimalan (u ovom slucaju 0, nebitno opce) onda pustimo x da ide u beskonacnost pa cemo samo probrati one vrijednosti koje nam pasu. Isto tako, nek bude napomena da kada bi u zadatku bilo nesto tipa „imamo 5 jabuka i jedna cura treba dobiti barem 3 jabuke“ to ne znaci da morate zapisati da bas mora dobiti 3, 4 ili 5 jabuka (iako ce se na to efektivno svest) nego bez problema pustite nek ide u beskonacnost. Jedino kad ogranicavate je kad vam u zadatku bas kazu mora dobit vise od i manje od. Lakse ce vam bit rjesavat zadatke ☺

E sad kad smo to razjasnili, idemo raspisivat ovo sve – trazimo koeificijente uz x^4 (jer nam je rjesenje jednadzbe = 4)

X^4 = (1 + x + x^2 + x^3 +... ) \* (1/x + 1 + x + ...) \* (x + x^2 + x^3) \* (1 + x + x^2 + ...)

E sada sve te intervale treba svest tako da pocinju kao 1 + x + .. jer od tuda znamo napisat njihovu sumu ako idu u beskonacnost ili u odreden broj. Znaci iz druge zagrade izlucujemo 1/x a iz trece x sto na kraju ostavlja s lijeve strane i dalje x^4.

X^4 = (1 + x + x^2 + x^3 +... ) \* ( 1 + x + ...) \* (1 + x + x^2) \* (1 + x + x^2 + ...)

Napisemo kolke su sume toga, i grupiramo sta mozemo

X^4 = (x - 1)^-4 \* (1 – x^3)

Te to raspisujemo po onom binomnom zakonu, pravilu, sta li je vec.

X^4 = [1 – (-4 povrh 1)\*x + (-4 povrh 2)\*x^2 - ...] \* [1 – (1 povrh 1)\* x^3]

I gledamo kojim kombinacijama mozemo doci do x^4, a to su tako da gledamo koeificijent uz x^4 u prvoj zagradi \* 1 iz druge zagrade ili koeificijent uz x u prvoj i x^3 u drugoj

Konacno, to bi bilo ovako:

(-4 povrh 4) + (-4 povrh 1) \* (1 povrh 1)

I to bi bilo rjesenje zadatka, naravno sada jos treba to malo urediti da nemamo ove negativne povrhe nego samo konkretan broj sto bi na kraju ispalo

(4+4-1 povrh 4) + (4+1-1 povrh 1)

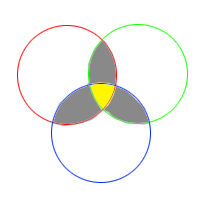
I to je to, zadatak jednostavno rijesen ☺

**FUI**

Best for last, ono sta ljudima najveci problem radi jer se jednostavno nemogu prebacit na taj nacin razmisljanja, a sve je rjesivo uz laganu skicu. Nije nista tesko ali ovo se ne moze sablonski naucit nego se treba razumjet sta se radi pa cu vam oko toga pomoc. Konkretno idealan zadatak je iz ovogodisnjeg ispita da se vidi kako fui opce funkcionira i sta se tu tocno dogada, dalje bi trebali skuzit princip i rjesavat ko od sale ;)

U vrtiću je 38 djece, 19 od njih voli plave bombone, 25 zelene, a 24 crvene. Ako 7 djece voli sve bombone koliko djece voli točno 2 vrste (boje) bombona?

Prvo i osnovno, nacrtat – vennovi dijagrami, pretpostavljam da svi znate sta su – oni su bogomdani u ovakvim zadacima



Dakle to nam je to, (malo sam promijenio boje zadatka da bi ih mogo nacrtat jer bijela se tesko vidi na bijeloj :D). Znaci, ovi krugovi sa obrubom su djeca koja vole tu boju bombona. Sveukupno imamo 38 djece, a zuto nam je onih 7 koji vole sve.

I idemo sad rapisivat zdravom logikom, ako zbrojimo zelene (Z) + crvene (C) + plave (P) dobit cemo malo vise od 38, jelda? E pa sad bacite oko na dijagram i pogledate sta smo vise puta prebrojali u toj cijeloj prici – prebrojali smo 1 put presjek CZ, 1 put CP i 1 put ZP. Isto tako, primjetite kako svaki od tih presjeka ima u sebi sivi dio i zuti dio, dakle brojali smo sveukupno 3 puta zuti dio i jednom svaki sivi dio, pa bi bilo u redu da oduzmemo to kako bi dobili dobru racunicu. Sada oduzimamo te presjeke, te dolazimo do ovog dijela

(Z+C+P) – (ZP+ZC+CP)

Primjetite kako smo opet napravili overkill, sada ne da smo oduzeli kolko nam je trebalo zutih, nego smo ih oduzeli toliko da smo ih na 0 sveli, pa bi trebali dodati jos taj zuti kako bi imali pun zbroj. Dakle dodajemo presjek svih

(Z+C+P) – (ZP+ZC+CP) + (ZPC)

I to je jednako 38, nas pocetni broj. S obzirom da nas trazi samo ova siva podrucja, ona se nalaze u ovim presjecima u drugoj zagradi, ali su sivi u njima zbrojeni sa zutima, to smo vec rezimirali. Konacna racunica ispada ovakva

(19 + 25 + 24) – (7 + s1 + 7 + s2 + 7 + s3) + 7 = 38

A s obzirom da nas trazi tocno s1+s2+s3 jednostavnom osnovnoskolskom matematikom dobijemo da je rjesenje = 16. Bar mislim.

To bi bilo to, mislim da sam prosao kroz tipicne zadatke koji bi se trebali pojavit, pa ako na ovom ciljate samo na prag ovo bi vam trebalo pomoc oko rjesavanja zadataka. Ako ima gresaka ili neceg slicnog samo javite da promjenim da ljudi ne citaju krivo ☺ u svakom slucaju sretno vam bilo dabog da svi prosli :P

(i naravno ako sam neki tip zadataka preskocio recite mi jer ih ima puno pa sam se pogubio u njima :D)