Masovne instrukcije 19./20.

Zeroth

Contents

1 Laplaceova transformacija

1.1 Izabrani zadaci iz knjižice

1. Izračunaj Laplaceov transformat preko definije i odredi njegovo područje konvergencije.

A. te^t **B.**$e^t sint$ **C.**$ch(2t)$

2. Odredi Laplaceov transformat funkcije

A. $(t+1)^3$ **B.** $3e^t sh(2t)$ **C.** $sint \cdot sin(2t)$ **D.** $(t-3)u(t-3)$
E. $(2t+1)u(t-1)$ **F.** $t^3 e^{-2t} + t^2$ **G.** $e^{2t} sin(3t)$ **H.** $3e^{-t}t^2 - 2tu(t-2)$
I. $ch(2t) \cdot cos(2t)$

3. Odredi sliku funkcije

A. $f(t) = \begin{cases} -t^2, & 0 \leq t < 4, \\ t^2 + 1, & t \geq 4; \end{cases}$ **B.** $f(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-2u} sin(3u) du$

C. $\dfrac{cos(2t) - cos(3t)}{t}$ **D.** $\displaystyle\int_0^t \frac{sh^2 u}{u} du$

4. Primjenom Laplaceove transformacije izračunaj integral

A. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \frac{sinx}{x} dx$ **B.** $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3t} tsintdt$ **C.** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-2t} - e^{-4t}}{t}$

5. Odredi original funkcije

A. $\dfrac{s+3}{s^2+6s+11}$ **B.** $\dfrac{(s+3)e^{-4s}}{s^2+4s+13}$ **C.** $\dfrac{1}{s^4} + \dfrac{1}{(s+3)^4} e^{-2s}$ **D.** $\dfrac{1}{(s+3)^3(s+1)}$

6. Koristeći teorem o konvoluciji, izračunaj original funkcija

A. $\dfrac{1}{s(s+3)}$ **B.** $\dfrac{1}{s(s^2-4+5)}$ **C.** $\dfrac{1}{s^2(s+1)^3}$

7. Primjenom Laplaceove transformacije riješi sljedeće diferencijalne jednadžbe

A. $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
B. $y'' + 4y = e^t, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0$

C. $y'' + 2y' + 2y = e^{-t}sint, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$
D. $y''(t) - 2y'(t) + 5y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 1 y'(0) = 0$

8. Primjenom Laplaceove transformacije riješi integralnu jednadžbu

A. $y(t) = t + \frac{1}{6}\int_0^t (t-u)^3 y(u)du$
B. $y(t) = cost + \int_0^t e^{t-u} y(u)du$
C. $\int_0^t y(\tau)sin(t-\tau)d\tau = 1 - cht$

1.2 Zadaci s starih ispita

1. Koriteći Laplaceovu transformaciju izračunajte integral

$$\int_0^\infty e^{-7x} xsin(x)dx$$

2. Pomoću Laplaceove transformacije riješite sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{aligned}$$

uz početne uvjete $x(0) = 1$i$y(0) = 0$

3.
a) Iskažite idokažite Teorem o prigušenju originala.
b) Iskažite i dokažite Teorem o pomaku originala.

4. Pomoću Laplaceove transformacije odredite struju $i(t)$ strujnog kruga u kojem su serijski spojeni zavojniza induktiviteta $L = 1$ i kondenzator kapaciteta $C = 4$, na napon

$$e(t) = \begin{cases} e^{-2t}, & t \geq 1, \\ 0 & t < 1 \end{cases}$$

5.
a) Definirajte Laplaceov transformat zadane funkcije f.
b) Pomoću definicije izračunajte Laplaceov transformat funkcije

$$f(t) = ch(2t) \quad \text{za } t > 0$$

c) Odredite područje definicije Laplaceovog transformata iz b) dijela zadatka.

6.
a) Izračunajte integral

$$\int_0^\infty e^{-t}\frac{sint}{t}$$

b) Izračunajte integral

$$\int_0^\infty \frac{sint}{t}$$

7. Pomoću Laplaceove transformacije riješite sustav

$$\dot{x} = -x + y$$
$$\dot{y} = -x - y$$

uz početne uvjete $x(0) = 0 i y(0) = 1$

8. U strujni krug su paralelno spojeni zavojnica induktiviteta $L = 1$ i otpornik $R = 4$ na napon

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ e^{-t}, & t \geq 1 \end{cases}$$

9.
a) Definirajte Laplaceov transformat funkcije $f : (0, \infty] \to \mathbb{R}$
b) Računajući preko definicije Laplaceovog transformata, odredite sliku funkcije $f(t) = t \cdot sh(2t), t > 0$. Napišite područje definicije slike

10. Pomoću Laplaceove transformacije riješite sustav

$$x'(t) = -3x(t) + 3y(t) + 2$$
$$y'(t) = -6x(t) - 1$$

us početne uvjete $x(0) = 0, y(0) = -1$

11. Pomoću Laplaceove transformacije riješite Cauchyev problem

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = -2u(t - 1)$$

us početne uvjete $(y'(0) = 0)$ i $y(0) = 0$

12. U strujni krug spojeni su u seriju kondenzator kapaciteta $C = 1/2$ i zavojnica induktiviteta $L = 1$ na napon

$$e(t) = sin(\sqrt{2}t)$$

Pomoću Laplaceove transformacije nadite stuju u tom strujnom krugu.

2 Fourierov red

2.1 Izabrani zadaci iz knjižice

1. Razvij u Fourierov red na intervalu $< -\pi, \pi >$

A. $f(x) = |x|$ **B.** $f(x) = x$ **C.** $f(x) = e^x$ **D.** $f(x) = x^3$ **E.** $f(x) = 2x-3$

2. Razvij u Fourierov red na intervalu $< -L, L >$

A. $f(x) = 5x - 3, -5 < x < 5$ **B.** $f(x) = 3 - |x|, -5 < x < 5$

3. Razvij u Fourierov red po sinus funkcijama na intervalu $< 0, \pi >$

$$f(x) = x^2$$

4. Koristeći razvoj u Fourierov red funkcije $f(x) = |x|$ u intervalu $[-1, 1]$ izračunaj sumu reda

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

5. Funkciju $f(x) = x^2$ $x \in [0, 1]$ razvij u Fourierov red po kosinus funkcijama i pomoću dobivenog razvoja izračunaj sumu reda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$

2.2 Zadaci s starih ispita

1. Funkciju $f(x) = |x-2|$ razvijte u Fourierov red na intervalu [-1,1] te pomoću tog razvoja izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$$

2.
a) Iskažite osnovni teorem o konvergenciji Fourierovg reda
b) Razvijte u Fourierov red funkciju zadanu s

$$f(x) = \pi^2 - x^2 \quad \text{za} \quad x \in (-\pi, \pi)$$

c) Skicirajte graf Fouriervog reda iz b) dijela zadatka.
d) Koristeći Fourierov red iz b), izračunajte sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

3.
a) Razvijte u Fourierov red funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi - 2x}{\pi}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right] \end{cases}$$

po kosinus funkcijama. Za koje $x \in \mathbb{R}$ se Fourierov red podudara s funkcijom?

3 Fourierova transformacija

3.1 Izabrani zadaci iz knjižice

1. Prikaži Fourierovim integralom funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

2. Odredi integral parne funkcije $f(x) = e^{-px}$ zadana na intervalu $< 0, \infty >$ te izračunaj

$$\int_0^\infty \frac{cos\lambda}{1+\lambda^2} d\lambda$$

3. Izracunaj Fourierov transformat gate funkcije

4. Neka su $A, \omega > 0$ dvije fiksirane konstante. Izračunajte Fourierov transformat funkcije

$$f(x) = \begin{cases} A(1 + cos(\omega x)), & |x| \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0, & inace \end{cases}$$

5. Neka je $a > 0$ pozitivna realna konstanta. Odretite funkciju čiji Fourierov transformat glasi $\pi(a - |\lambda|)g_{[-a,a]}(\lambda)$.

6. Odredite transformat

$$\mathcal{F}\{g_{[-7/2,-5/2]}(x) + g_{[-3/2,-1/2]}(x) + g_{[1/2,3/2]}(x) + g_{[5/2,7/2]}(x)\}$$

7. Izračunajte funkciju kojoj je Fourierov transformat $\hat{f}(\lambda) = e^{-|\lambda|}$ te pomoću toga odredite $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}$.

8. Koristeći Parsevalovu jednakost izračunajte vrijednost integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{sin^2 ax}{x^2}, \quad \text{za}(a > 0)$$

3.2 Zadaci s starih ispita

1.
a) Iskažite osnovni teorem o Fourierovom integralu
b) Prikažite funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1), \\ -1, & x \in (-1,0), \\ 0, & inace \end{cases}$$

u obliku Fourierovog integrala

2.
a) Isti zadatak...
b) Izračunajte ponašanje spektra za velike λ

3.
a) Teorem o integralu
b) Za koje $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x) = e^{ax-x}$, $x > 0$, zadovoljava uvjete teorema? Obrazložite!
Za dobivene $a \in \mathbb{R}$ skicirajte graf Fourierovog integrala funkcije f.

4 Vektorska analiza

4.1 Izabrani zadaci iz knjižice

1. Parametriziraj krivulju

A. $y^2 = x - 1$ **B.** $4x^2 + 9y^2 = 36$ **C.** $r = 1 + cos\varphi$
D. dio pravca od točke $A(1, 4, -2)$ do točke $B(3, 9, 6)$
E. presječnicu ploha $y = x^2$ i $z = 1 - x - y$, za $x > 0$

2. Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $f(x, y, z) = xyz$ u točki $A(5, 1, 2)$, a u smjeru jediničnog vektora $\overrightarrow{AB}$, gdje je $B(9, 4, 14)$

3. Zadano je vektorsko polje $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + xyz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$, te vektori $\boldsymbol{s} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ i $\boldsymbol{b} = \sqrt{3}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k})$.

A. Izračunajte $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{s}}$

B. Odredite točku T za koju vrijedi $\dfrac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{s}} = \boldsymbol{b}$

4.2 Zadaci s starih ispita

1.
a) Definirajte usmjerenu derivaciju skalarnog polja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, u smjeru vektorskog polja $\vec{\boldsymbol{s}}$

b)Izračunajte $\frac{\partial(r^2 ln(r))}{\partial \vec{\boldsymbol{s}}}$, pri čemu je $\vec{\boldsymbol{s}} = \frac{\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}}}{\sqrt{2}}$, a r iznos radijvektora $\vec{\boldsymbol{r}}$

c) Izračunajte $\frac{\partial \vec{\boldsymbol{r}}}{\partial \vec{\boldsymbol{s}}}$, pri čemu je $\vec{\boldsymbol{s}} = \frac{\vec{\boldsymbol{i}} + \vec{\boldsymbol{j}}}{\sqrt{2}}$

2. Zadano je vektorsko polje $\vec{\boldsymbol{f}}(x, y) := e^{xy}(xy + 1)\vec{\boldsymbol{i}} + e^{xy}x^2\vec{\boldsymbol{j}}$.
a) Provjerite da je polje $\vec{\boldsymbol{f}}$ potencijalno
b) Izračunajte potecijal vektorskog polja $\vec{\boldsymbol{i}}$.

3. Neka je $\vec{\boldsymbol{r}} = x\vec{\boldsymbol{i}} + y\vec{\boldsymbol{j}} + z\vec{\boldsymbol{k}}$ radijvektor, $r = ||\vec{\boldsymbol{r}}||$, a $\vec{\boldsymbol{a}}$ konstantan vektor.
a) Definirajte divergencjiu glatkog vektorskog polja $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
b) Defnirajte rotaciju glatkog vektorskog polja $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
c) Izračunajte: $\nabla \times [(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{a}]$

d) Izračunajte: $div\left[\left(\frac{1}{r^4}+2\right)\vec{r}\right]$

4.
a) Definirajte potencijalno vektorsko polje $\vec{f}$.

b) Izvedite formulu za računanje potencijala glatkog vektorskog polja $\vec{f}(x,y)$ u $\mathbb{R}^2$.

c) Navedite kriterij za potencijalnost glatkog vetorskog polja $\vec{f}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. d) Izračunajte rot(grad(p)) pri čemu je p glatko vektorsko polje.

5. Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabilna funkcija i $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ konstantan vektor. Izračunajte

$$div((\vec{a}\cdot\vec{r})f(r)\vec{r})$$

gdje je $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, a $r=||\vec{r}||$.

6.
a) Definirajte rotaciju vektorskog polja $\vec{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\vec{i}+F_2(x,y,z)\vec{j}+F_3(x,y,z)\vec{k}$.
b) Neka je $\vec{F}(x,y,z)=f(z)\vec{i}+f(y)\vec{j}+f(z)\vec{k}$ gdje je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivablna funkcija. Odredite sve funkcije f tako da jednakost

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{s_0}}=\vec{s_0}$$

gdje je $\vec{s_0}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$ vrijedi u svim točkama $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.