Masovne instrukcije drugi dio 19./20.

Zeroth

2. srpnja 2020.

Sadržaj

1 Vektorska analiza

1.1 Krivuljni integrali

Teorem 1 *Greenov teorem Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i povezan skup omeđen pozitivno orijentiranom jednostavno zatvorenom krivuljom Γ, te neka je $\boldsymbol{f}(x,y) = f_1(x,y)\boldsymbol{i} + f_2(x,y)\boldsymbol{j}$ glatko vektorsko polje. Tada vrijedo Greenova formula*

$$\oint_\Gamma f_1(x,y)dx + f_2(x,y) = \iint_\Omega \left[\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}\right] \tag{1.1}$$

1.2 Plošni integrali

Teorem 2 *Teorem o divergenciji Neka je Σ zatvorena ploha koja omeđuje tijelo V, te neka je $\boldsymbol{f}(x,y,z) = f_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + f_2(x,y,z)\boldsymbol{j} + f_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$ glatko vektorsko polje definirano na nekom podskupu $\mathbb{R}^3$ koji sadrži plogu Σ. Tada je*

$$\iint_\Sigma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V div\boldsymbol{f} dV \tag{1.2}$$

gdje je

$$div\boldsymbol{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \tag{1.3}$$

divergencija vektorskog polja $\boldsymbol{f}$

Teorem 3 *Stokesov teorem Neka je Σ orijentabilna ploha u $\mathbb{R}^3$ čiji je rub određen jednostavnom zatvorenom krivuljom Γ, te neka je $\boldsymbol{f} = f_1\boldsymbol{i}+f_2\boldsymbol{j}+f_3\boldsymbol{k}$ glatko vektorsko polje definirano na nekom podskupu $\mathbb{R}^3$ koji sadrži Σ. Tada vrijedi*

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{r} = \iint_\Sigma (rot\boldsymbol{f}) \cdot d\boldsymbol{S}$$

pri čemu je $\boldsymbol{n}$ jedinični vektor na plohu Σ koji je usmjeren tako da je, gledano sa vrha vektora $\boldsymbol{n}$, krivulja Γ orijentirana pozitivno, tj. suprotno od smjera kretanja kazaljke na satu.

1.3 Zadaci

1. Izračunajte $\int_\Gamma y\cos x ds$, gdje je Γ luk krivulje $y = \sin x, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

2. Izračunajte $\int_\Gamma xyds$, gdje je Γ zadana jednadžbom $|x| + |y| = 1$.

3. Izračunajte $\int_\Gamma (x+y)ds$, gdje je krivulja Γ desna latica leminskate $r^2 = a^2 cos2\phi$.

4. Izračunajte

$$\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+y^2}},$$

gdje je krivulja Γ kardioida $r = 1 + cos\phi$, $\phi \in [0, 2\pi]$

5. Izračunajte $\int_\Gamma (x^2+y^2)ds$, gdje je krivulja Γ presječnica ploha $x^2 + 2y^2 = 4$, $z = y$, $y \geq 1$.

6. Izračunajte

$$\int_\Gamma \frac{x}{y}dx + lnxdy + zdz,$$

gdje je Γ dio pravca koji sadrži točke A(1, 1, 1) i B(2, 3, 4), usmjeren od točke A prema B.

7. Izračunajte

$$\int_\Gamma (\frac{2x}{y} + \frac{y}{x})dx + (lnx - \frac{x^2}{y^2})dy,$$

pri čemu je Γ luk krivulje $x = e^t$, $y = t^2 + t + 1$, od točke A s parametrom $t = 0$, do točke B s paramterom $t = 1$.

8. Primjenom Greenove formule izračunajte integral

$$\int_\Gamma e^{y^2}dx + 2xye^{y^2}dy,$$

pri čemu je Γ dio krivulje $y = \sqrt{x}$ od točke A(4, 2) do točke B(0, 0).

9. Izračunajte $\iint_\Sigma z$, gdje je Σ dio sfere $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$ za koji je $z \leq 2$.

10. Izračunajte tok vektorskog polja $\mathbf{f} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, kroz vanjsku stranu plohe $x^2 + y^2 = z^2$ za $0 \leq z \leq 1$

11. Izračunajte plošni integral $\iint_\Sigma \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$, gdje je $\mathbf{f} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Σ vanjska strana

dijela plohe $y = x^2$ za koju je $1 \leq z \leq 4$ i $y \leq 4$

12. Izračunajte $\displaystyle\iint_\Sigma xdydz + zdxdy$, gdje je Σ vanjska strana dijela plohe $x^2 + 4y^2 = 1$ za koju je $-1 \leq z \leq 1$

13. $\displaystyle\iint_\Sigma xdydz + ydxdz + zdxdy$ gdje je Σ vanjski dio plašta plohe $x^2 + y^2 = 1$ (ploha nije zatvorena) koji se nalazi između ravnina $z = 1$ i $z = 2$

14. Primjenom Stokesove formule izračunajte

$$\oint_\Gamma zdx + 2dy - xdz$$

duž presječnice ploha $x^2 + y^2 = 9$ i $y + z = 5$. Krivulja Γ je orijentirana tako da je njena ortogonalna projekcija u xy-ravnini pozitivno orijentirana

15. Primjenom Stokesovog teorema izračunajte

$$\oint_\Gamma ydx + zdy + xdz$$

gdje je Γ presječnica ploha $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0, z = -y$, orijentirana u pozitivnom smjeru. gledano iz točke $(0, a, 0)$

2 Kompleksna analiza

2.1 Teorija

Za skup $G \subset \mathbf{C}$ kažemo da je **otvoren** ako za svaku točku $z \in G$ postoji ϵ-okolina $S_\epsilon(z)$ sadržana u G.
Skup $F \subset \mathbf{C}$ je **zatvoren** ako je njegov komplement $\mathbf{C} \backslash F$ otvoren.

Neka je E bilo koji podskup od $\mathbf{C}$. Točka $z_0 \in E$ je **nutarnja** točka za E ako postoji ϵ-okolina točke z_0 koja je sadržana u E. Točka $z_0 \in \mathbf{C}$ je **rubna** točka za E ako u svakoj ϵ-okolini točke z_0 postoje točke koje pripadaju skupu E, kao i točke koje mu ne pripadaju.
Sa ∂E označavamo **rub(granicu)** skupa E: skup svih rubnih točaka is E

Skup $E \subset \mathbf{C}$ nazivamo **područje** ako je
1) otvoren skup;
2) **putevima povezan**, tj. svake dvije točke iz E mogu se spojiti izlomljenom linijom koja leži u E.
Područje E nazivamo **jednostruko povezano područje** ako je njegov rub ∂E zatvorena, po dijelovima glatka krivulja.

Teorem 4 *Cauchy-Riemannovi uvjeti Neka su funkcije u i v neprekinuto diferencijabilne. Funkcija $f = u + iv$ je diferencijabilna u točki $z = x + iy$ ako i samo ako i i v zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete u točki (x,y)*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Za derivaciju f' vrijedi

$$f'(z) = u'_x + iv'_x = v'_y - iu'_y \tag{2.2}$$

Funkcija $\psi = \psi(x,y)$ je **harmonijska funkcija** u području $G \subset \mathbb{R}^2$ ako je dvaput neprekinuto diferencijabilna i zadovoljava na G Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu:

$$\Delta\psi := \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0 \tag{2.3}$$

Realni i imaginarni dio analitičke ufnkcije su harmonijske funkcije. Dvije takve harmonijske funkcije koje zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete zovemo **konjugirani par** harmonijskih funkcija.

Neka je $f'(z_0 \neq 0)$. Kut

$$\phi = arg f'(z_0) \tag{2.4}$$

naziva se **kut zakreta**, a

$$\lambda = |f'(z_0)| \tag{2.5}$$

naziva se **omjer preslikavanja** f u točki z_0.
Pri preslikavanju funkcijom f element luka krivulje zarotira se za kut ϕ te stegne (rastegne) za faktor λ.

Teorem 5 *Cauchyjev teorem Ako je f analitička funkcija na području D⊂**C** i G⊂D jednostruko povezano područje omeđeno zatvorenom krivuljom* $\Gamma = \partial G \subset D$*, tada je*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 \tag{2.6}$$

Dokaz. Vrijedi

$$I = \int_\Gamma f(z)dz = \oint_\Gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\oint_\Gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy \tag{2.7}$$

Funkcija f je analitička na D, pa su na $\bar{G}$ ispunjeni Cauchy-Riemannovi uvjeti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.8}$$

i primjenom Green-Gaussova teorema slijedi

$$I = \iint_G (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})dxdy + i\iint_G (\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x})dxdy = 0 \tag{2.9}$$

Teorem 6 *Taylorov teorem Ako je funkcija f jednoznačna i analitička u nekoj okolini G točke $a \in \mathbb{C}$, tada se ona može prikazati pomoću Taylorova reda oko točke a:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Koeficijenti c_n dani su formulom

$$c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

tj.

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

gdje je Γ zatvorena, pozitivno orijentirana Jordanova krivulja koja sadrži točku a i leži u području G.

Teorem 7 *Laurentov red Ako je funkcija f analitička u prstenu*

$$D = z : R_2 < |z-a| < R_1,$$

tada se ona može na jednoznačan način prikazati pomoću Laurentova reda

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Koeficijenti c_n računaju se formulom

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi,$$

gdje je Γ bilo koja pozitivno orijentirana zatvorena krivulja koja obuhvaća točku a i leži unutar D.

2.2 Zadaci

3.10., 3.11. Ispitaj konvergenciju rediva

A) $\sum \frac{\cos(in)}{2^n}$ B) $\sum \frac{n\sin(in)}{3^n}$ C) $\sum \frac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}$ D) $\sum \frac{(1+i)^n}{2^{n/2}\cos(in)}$
E) $\sum \frac{n}{(2i)^n}$ F) $\sum \frac{n!}{(in)^n}$ G) $\sum e^{in}$

4.6. Može li funkcija $v = 3^x \sin(y) + y^2$ biti imaginarni dio neke analitičke funkcije?

4.7. Odredi analitičku funkciju f kojoj je poznat imaginarni dio $v = 2x^2 - 2y^2 + x$

4.8. Pokaži da su sljedeće funkcije harmonijske i odredi pripadne konjugirane funkcije
A) $u = x^2 + 2x - y^2$ B) $u = 2e^x \cos y$ C) $u = \arctan(y/x)$ D) $u = xy$

4.9. Odredi analitičku funkciju f ako je poznat njezin realni ili imaginarni dio:

A) $u = \frac{x}{x^2+y^2}, f(\pi) = 1/\pi$
B) $u = 2\sin x \cosh y - x, f(0) = 0$
C) $v = 2\cos x \cosh y - x^2 + y^2, f(0) = 2$
D) $u = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^2, f(0) = 0$

5.10., 5.12. Izračunaj:

A) $i^{\sin i}$ B) $\mathrm{Ln}(-i)$ C) $1^{1/i}$ D) $\tan(\pi i/2)$ E) $\arccos(i)$ F) $(-1)^{\sqrt{2}}$

8.1. Izračunaj sljedeće krivuljne integrale:

A) $\int_\Gamma e^z dz$, Γ : parabola $y = x^2$ koja spaja točke $z_1 = 0$ i $z_2 = 1+i$
B) $\int_\Gamma e^z dz$, Γ : dio pravca od točke $z_1 = 0$ do $z_2 = 1+i$
C) $\int_\Gamma (z^2 + z\bar{z})dz$, Γ : luk kružnice $z = e^{i\varphi}, \varphi \in [0,\pi]$

8.2. Izračunaj sljedeće integrale integrirajući po zadanim krivuljama u pozitivnom smjeru:
A) $\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$ B) $\int_{|z|=1} \frac{z \text{ sh } z}{z^3} dz$

9.1. Odredi polumjer konvergencije sljedećih redova:

A) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^n}$ C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n$ D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ E) $\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$

9.11. Razvij u Maclaurinov red sljedeće funkcije

A. $\dfrac{1}{(1+z^3)^2}$ B) $\dfrac{1}{1+z+z^2+z^3}$ C) $\ln(z^2-3z+2)$ D) $\sqrt{z+i}$ $(\sqrt{1}=1)$

9.13. Razvij u Taylorov red oko točke z_0:

A) $f(z)=\sin(3z-1),\ z_0=-1$ B) $f(z)=\mathrm{ch}^2 z, z_0=0$
C) $f(z)=\cos\, z, z_0=\frac{\pi}{4}$ D) $f(z)=\ln(3-z), z_0=-1$

9.16. Odredi nultočke i njihove kratnosti za funkcije

A) z^6+9z^4 B) $z^3\sin\, z$ C) $(z-i)\mathrm{sh}\, z$ D) $\dfrac{1-\mathrm{ch}\, z}{z}$

9.17. Odredi kratnost nultočke $z_0=0$ za funkcije

A) $2(\mathrm{ch}\, z-1)-z^2$ B) $z^2(e^{z^3}-1)$ C) $e^{\sin z}-e^{\tan z}$ C) $\dfrac{\sinh^2 z}{z}$

10.2. Razvij sljedeće funkcije u Laurentov red oko zadane točke i u zadanim područjima

A) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)},\ z_0=0,\ D_1=2<|z|<3, D_2=3<|z|$

B) $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2},\ z_0=0,\ D_1=1<|z|<2, D_2=2<|z|$

C) $\dfrac{1}{z^2+1},\ z_0=i,\ D=0<|z-i|<2$

10.3. Razvij sljedeće funkcije u Laurentov red u okolini točke $z_0=0$:

A) $\dfrac{\sin^2 z}{z^3}$ B) $\dfrac{e^{2z}-1}{z^2}$ C) $\dfrac{e^z}{z(1-z)}$

10.8., 10.9. Odredi singularitete i njihov karakter za funkcije:

A) $\dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$ B) $z\cdot e^{1/z}$ C) $\exp\dfrac{z}{1-z}$ D) $\sin(e^{1/z})$ E) $\dfrac{z^3}{1+z^6}$

F) $\dfrac{z-2}{z(z^2+9)^3}$

11.1., 11.2. Odredi reziduume u svim singularitetima sljedećih funkcija:

A) $\dfrac{z^2+z+1}{z^2(z+1)}$ B) $\dfrac{1}{z-z^3}$ C) $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$ D) $\dfrac{1-\cos z}{z^3(z-1)}$ E) $\dfrac{1}{e^z-1}$

F) $z^4\sin\dfrac{1}{z-2}$ G) $\dfrac{1}{\sin 1/z}$ H) $\sin\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z}$

11.3. Odredi reziduum u točki ∞, za funkcije:

A) $\dfrac{1}{z^4(z+1)}$ B) $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$ C) $\dfrac{\cos z}{(z^4-1)^2}$ D) $\sin z \sin\dfrac{1}{z}$

11.14., 11.15., 11.16. Izračunaj integrale

A) $\displaystyle\int_C \frac{zdz}{(z-2)(z+1^2)},\ C=\{z:|z+2|=2\}$ B) $\displaystyle\int_C \frac{e^{2z}dz}{z^3-1},\ C=\{z:|z-1|=1\}$

C) $\displaystyle\int_C \sin\frac{1}{z-1}dz,\ C=\{z:|z-1|=1\}$ D) $\displaystyle\int_C z\sin\frac{z+1}{z-1}dz,\ C=\{z:|z|=2\}$

E) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^4(z^8-16)},\ C=\{z:|z|=2\}$ F) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)},\ C=\{z:|z|=2\}$

G) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)},\ C=\{z:|z|=2\}$ H) $\displaystyle\int_C \frac{z^5dz}{z^6-1},\ C=\{z:|z|=2\}$

3 Rješenja

3.1 Vektorska analiza

1. $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$
2. 0
3. $a^2\sqrt{2}$
4. $\pi\sqrt{2}$
5. $3\pi - 2$
6. $\frac{1}{4}\ln 3 + 4\ln 2 + 6$
7. $2 + \frac{1}{3}e^2$
8. $-4e^4$
9. 6π
10.-$\frac{\pi}{10}$
11. 16
12. π
14. 18π
15. $-a^2\pi\sqrt{2}$

3.2 Kompleksna analiza

3.10., 3.11.
A) Divergira
B) Konvergira apsolutno
C) Divergira
D) Konvergira apsolutno
E) Konvergira apsolutno
F) Konvergira apsolutno
G) Divergira

4.6. Ne može

4.7. $f(z) = (-4xy - y + C) + i(2x^2 - 2y^2 + x) = 2iz^2 + iz + C$

4.8.
A) $v = 2xy + 2y + C$
B) $2e^x \sin y + C$
C) $v = -\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C$ D) $v = -\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + C$

4.9.
A) $f(z) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + iC = \frac{1}{z} + iC \quad f(\pi) = 1/\pi \to C = 0 \to f(z) = \frac{1}{z}$
B) $f(z) = 2\sin x \cosh y - x + i(2\cos x \sinh y - y + C) \quad f(0) = 0 \to C = 0$
C) $f(z) = 2\sin x \sinh y + 2xy + C + 2i(\cos x \cosh y - x^2 + y^2) \quad f(0) = 2 \to C = 2 - 2i$
D) $f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^2 + i(-2x^3 + 3x^2 + 6y^2x - y^3 + C) \quad f(0) = 0 \to C = 0$

5.10., 5.12.
A) $e^{-(\pi/2+2k\pi)\sinh 1}, \quad k \in \mathbb{Z}$
B) $(3\pi/2 + 2k\pi)i, \quad k \in \mathbb{Z}$
C) $e^{2k\pi}$
D) $i \tanh \pi/2$
E) $\pi/2 + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} - 1), \quad k \in \mathbb{Z}$
F) $\cos[\sqrt{2}(\pi + 2k\pi)] + i\sin[\sqrt{2}(\pi + 2k\pi)]$

8.1. A), B) $e(\cos 1 + i\sin 1) - 1$ C) -8/3

8.2. A) 0 B) $2\pi i$

9.1.
A) 0
B) ∞
C) 2
D) 1/4
E) 1

9.11.
A) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{3n}$
B) $\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} - \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n+1} = 1 - z + z^2 - z^5 + z^8 - \dots$
C) $\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n} + \frac{1}{2^n n}] \cdot z^n$
D) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n}(-1)^n i^n \cdot z^n$

9.13.
A) $\cos 4 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{[3(z+1)]^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sin 4 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{[3(z+1)]^{2n}}{(2n)!}$
B) $\frac{1}{2}(1 + \sum n = 0\infty \frac{4^n}{(2n)!} \cdot z^{2n})$
C) $f(z) = \cos[(z - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4}] = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(z - \frac{\pi}{4}) - \sin(z - \frac{\pi}{4}))$, sada razvijemo sinus i kosinus prema formulama
D) $\ln 4 - \sum n = 1\infty(-1)^{2n-1}\frac{(z+1)^n}{n \cdot 4^n}$

9.16.
A) $z_1 = 0$, kratnosti 4, $z_2 = 3i, z_3 = -3i$, kratnosti 1.
B) $z_0 = 0$, kratnosti 4, $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}, \neq 0$, kratnosti 1 C) $z_1 = i, z_k = 2k\pi i$, sve kratnosti 1

D) $z_0 = 0$, kratnosti 1, $z_k = 2k\pi i$, kratnosti 2

9.17.
A) $z_0 = 0$, kratnosti 4
B) $z_0 = 0$, kratnosti 5
C) $z_0 = 0$, kratnosti 3
D) $z_0 = 0$, kratnosti 1

10.2.
A) -$\sum n = 0\infty \frac{2^n}{z^{n+1}} - \sum_{n=0} \infty \frac{z^n}{3^{n+1}}, z \in D_1$ $\qquad \sum_{n=0} \infty \frac{3^n - 2^n}{z^{n+1}}$
B)