$p \to \Box p$ nije valjana

Trebamo dokazati da postoji model $\mathfrak{M} = (W, R, \Vdash)$ i svijet $w \in W$ t.d.

$$w \nVdash p \to \Box p.$$

Definiramo:

$W = \{w, v\}$ $\quad$ $R = \{(w, v)\}$, tj. slikom:

Očito $w \Vdash p$, ali $w \nVdash \Box p$.

Dakle, $w \nVdash p \to \Box p$.

Simetričan okvir:

(W, R), R simetrična relacija

$(\forall w, v \in W)(wRv \Rightarrow vRw)$

$p \to \Box\Diamond p$ valjana

Trebamo dokazati da za svaki simetričan Kripkeov okvir (W, R), te za svaku relaciju forsiranja $\Vdash$ na tom okviru, i svaki svijet $w \in W$ vrijedi

$$w \Vdash p \to \Box\Diamond p.$$

Neka je (W, R) proizvoljan sim. okvir, te neka je $\Vdash$ neka rel. forsiranja na njemu, i $w \in W$ proizvoljan svijet.

Ako $w \not\Vdash p$ tada $w \Vdash p \to \Box\Diamond p$, pa je dokaz gotov.

Promotrimo slučaj kada vrijedi $w \Vdash p$.

(Treba dokazati $w \Vdash \Box\Diamond p$).

tj. da za svaki svijet v t.d. wRv, imamo $v \Vdash \Diamond p$)

„Patološki" primjer simetričnog okvira:

(Promotrimo slučaj kada ne postoji svijet v t.d. wRv.

Nb, tada očito $w \Vdash \Box\Diamond p$.

Neka je $v \in W$ proizvoljan t.d. wRv.

(Treba dokazati $v \Vdash \Diamond p$).

Pošto je po pret. okvir simetričan tada iz wRv slijedi vRw.

Pošto $w \Vdash p$ tada $v \Vdash \Diamond p$.

$p \to \Box\Diamond p$ ~~valj.~~ valjana na svakom simetričnom okviru.

<u>DZ</u> (POKUŠAJ INDIREKTNOG DOKAZA)

Pret. suprotno, tj. da postoji sim. okvir (W, R), rel. forsiranja $\Vdash$ na tom okviru i svijet $w \in W$ t.d.

$$w \not\Vdash p \to \Box\Diamond p$$

Tada $w \Vdash p$ i $\underline{w \not\Vdash \Box\Diamond p}$.

Tada postoji svijet $v \in W$ t.d. $\underline{wRv}$ i $\underline{v \not\Vdash \Diamond p}$.

sim. $\Downarrow$ vRw, otprije $w \Vdash p$

$\Updownarrow$ Ne postoji $x \in W$ t.d. vRx i $x \Vdash p$

$\lightning$

Potpun skup S:
za svaku formulu F vrijedi
$S \vdash F$ ili $S \vdash \neg F$
ili
isključivo

Je li potpun
skup S svih teorema od RS?

NE $S \nvdash p$, a ni $S \nvdash \neg p$

Kada bi vrijedilo $S \vdash p$ tada
iz jakog tm-a potpunosti
slijedi $S \models p$.

No, to ne vrijedi jer uzmemo
int. I t.d. $I(p)=0$ imamo
$I(S)=1$ (zbog tm-a adekvatnosti).

Isto tako $S \nvdash \neg p$.

Je li potpun skup svih prop. varijabli?

$S=\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$

DA Uočimo da postoji samo jedna int. I
t.d. $I(S)=1$.
Uzmemo proizvoljnu formulu F. Tada vrijedi
$I(F)=0$ ili $I(F)=1$

Promatrijmo slučaj $I(F)=0$.

Tada imamo $S \models \neg F$.

Iz jakog tm-a potpunosti slijedi $S \vdash \neg F$.

$\{\neg R \vee Q,\ P \to (Q \to R),\ P \wedge Q\} \vdash R$

Dz

Iz gen. tm-a pot. slijedi jaki tm. potp.:

$$S \vdash F \quad \text{akko} \quad S \models F$$

Dakle, za dokaz tražene tvrdnje dovoljno je provjeriti da li vrijedi

$$\{\neg R \vee Q, \ldots\} \models R.$$

To ćemo provjeriti glavnim testom.

$\neg R \vee Q$	T
$P \to (Q \to R)$	T
$P \wedge Q$	T
R	$\perp$