Prvi međuispit iz kolegija *Matematička logika i izračunljivost* 23. 10. 2009.

1. (a) (1 bod) Definirajte logički ekvivalentne formule u logici sudova.
   (b) (1 bod) Iskažite teorem kompaktnosti za logiku sudova.
   (c) (3 boda) Neka je S neki skup formula logike sudova, te F neka formula. Ako vrijedi $S \vdash_{RS} F$ dokažite da tada vrijedi $S \models F$.

2. (a) (2 boda) Definirajte konjunktivnu normalnu formu u logici sudova i iskažite teorem o normalnim formama.
   (b) (3 boda) Odredite konjunktivnu normalnu formu i disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$((Q \vee \neg R) \leftrightarrow P) \rightarrow R.$$

3. Primjenom glavnog testa ispitajte da li je formula:
   (a) (2 boda) $(Q \leftrightarrow \neg R) \rightarrow (P \vee Q)$ ispunjiva.
   (b) (3 boda) $((Q \vee \neg R) \rightarrow P) \rightarrow R$ valjana.

4. (a) (1 bod) Definirajte pojam dokaza u sistemu RS
   (b) (4 boda) Neka je S skup formula logike sudova i F formula t.d $S \models F$. Dokažite da tada postoji konačan podskup $B_1, \ldots, B_n$ formula iz S t.d je $B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \wedge \neg F$ antitautologija. (Uputa: pretpostavite suprotno + kompaktnost)

5. (a) (1 bod) Definirajte pojam Kripkeovog modela
   (b) (3 boda) Pokažite da je formula $\Diamond p \rightarrow \Box p$ valjana na okviru $\mathcal{F} = (W, R)$ **ako i samo ako** je relacija R na okviru $\mathcal{F}$ parcijalna funkcija. (Relacija R je parcijalna funkcija ako Rxy i Rxz povlači $y = z$, za sve elemente x, y, z od W.)
   (c) (1 bod) Koristeći se prethodnom tvrdnjom pokažite da formula $\Diamond p \rightarrow \Box p$ nije valjana.

Mole se studenti da svaki zadatak rješavaju na zaseban papir.