PREGLED FORMULA IZ FIZIKE MATERIJALA

Relativistička mehanika

Lorentzova transformacija

$\beta = \frac{v}{c}, \ \gamma = \sqrt{1-\beta^2}$

Transformacija koordinata:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \ y = y', \ z = z', \ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Slaganje brzina:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \ u_y' = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}, \ u_z' = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{v}{c^2}u_x}$$

Kontrakcija duljine: $\Delta x = \Delta x_0 \sqrt{1-\beta^2}$

Dilatacija vremena: $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Energija i količina gibanja

Energija: $E = E_k + E_0, \ E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

Količina gibanja: $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$E^2 = E_0^2 + p^2c^2$

U slučaju kada je $v \ll c$, $E_k \ll mc^2$ i $p \ll mc$ mogu se koristiti nerelativističke relacije.

Valna mehanika

Fazna brzina: $v_f = \nu\lambda$

Grupna brzina: $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$

De Broglieve relacije

$E = h\nu, \ p = \frac{h}{\lambda}$

Veza valne duljine i energije: $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{E^2 - E_0^2}}$

Veza valne duljine i brzine: $\lambda = \frac{h}{m_0}\sqrt{\frac{1}{v^2} + \frac{1}{c^2}}$

Grupna brzina: $v_g = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}$

Frekvencija mirovanja: $\nu_0 = \frac{mc^2}{h}$

$$\frac{\nu^2}{c^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\nu_0^2}{c^2}$$

De Broglieva jednadžba

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{4\pi\nu_0^2}{c^2}\varphi$$

Klein–Gordonova jednadžba

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi$$

Relacije neodređenosti

Neodređenost položaja i impulsa:

$\Delta x \, \Delta p_x \geq \hbar$

$\Delta y \, \Delta p_y \geq \hbar$

$\Delta z \, \Delta p_z \geq \hbar$

Neodređenost energije i vremena:

$\Delta E \, \Delta t \geq \hbar$

Neodređenost frekvencije: $\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h}$

Neodređenost količine gibanja: $\Delta p = -h\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$

Schrödingerova jednadžba

Vremenski zavisna jednadžba:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Vremenski nezavisna jednadžba:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U\psi = E\psi$$

Valna funkcija ψ treba zadovoljavati sljedeće uvjete:

1. ψ je jednoznačna funkcija;
2. ψ je klase C^1;
3. druge derivacije funkcije ψ su konačne;
4. integral $\int_V \psi^*\psi \mathrm{d}V$ je konačan.

Uvjet normiranja: $\int_V \psi^*\psi \mathrm{d}V = 1$

Granični uvjet: $\lim_{\bar{r}\to\infty} \psi(\bar{r}, t) = 0$

Primjene Schrödingerove jedandžbe

Potencijalni skok

Schrödingerova jednadžba za jednodimenzionalni potencijalni skok:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi\,,\ U(x)=\begin{cases}0, x<0 & (1)\\ U, 0<x & (2)\end{cases}$$

Rješenja:

$$\psi_1(x)=e^{ik_1x}+\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x)=\frac{2k_1}{k_1+k_2}e^{ik_2x}$$

$$k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\,,\ k_2^2=\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}$$

Koeficijent transmisije: $T=\frac{4p_1p_1}{(p_1+p_2)^2}$

Koeficijent refleksije: $R=\frac{(p_1-p_2)^2}{(p_1+p_2)^2}$

$p_1=\sqrt{2mE}$, $p_1=\sqrt{2m(E-U)}$

Potencijalna barijera

Schrödingerova jednadžba za jednodimenzionalnu barijeru:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U\psi=E\psi\,,\ U(x)=\begin{cases}0, x<0 & (1)\\ U, 0<x<a & (2)\\ 0, a<x & (3)\end{cases}$$

Rješenja Schrödingerove jednadžbe za jednodimenzionalnu debelu barijeru ($e^{-k_2a}\approx 0$):

$$\psi_1(x)=e^{ik_1x}+\frac{k_1-ik_2}{k_1+ik_2}e^{-ik_1x}$$

$$\psi_2(x)=\frac{2k_1}{k_1+ik_2}e^{-k_2x}$$

$$\psi_3(x)=-\frac{4in}{(1-in)^2}e^{-k_2a}e^{ik_3x}$$

$$k_1^2=\frac{2mE}{\hbar^2}\,,\ k_2^2=\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}\,, k_3=k_1,\ n^2=\frac{k_1^2}{k_2^2}$$

Koeficijent transmisije: $T=16\frac{E(U-E)}{U^2}e^{-2k_2a}$

Koeficijent refleksije: $R=1-T$

Koeficijent transmisije za tanku barijeru:

$$T=\left(1+\frac{U^2}{4E(U-E)}\mathrm{sh}^2(k_2a)\right)^{-1}$$

WBK – aproksimacija

Za potencijalne barijere proizvoljnog oblika koeficijent transmisije je proporcionalan s $e^{-\gamma}$, gdje je $\gamma=\frac{2}{\hbar}\int_a^b\sqrt{2m(U(x)-E)}\mathrm{d}x$.

Potencijalna jama

Jednodimenzionalna jama

Schrödingerova jednadžba:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi\,,\ x\in\langle 0,a\rangle$$

Rješenje: $\psi_n=A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$, $A=\sqrt{\frac{2}{a}}$

Energija: $E_n=n^2\frac{h^2}{8ma^2}$

Trodimenzionalna jama

Schrödingerova jednadžba:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=-\frac{2mE}{\hbar^2}\psi$$

$x\in\langle 0,a_1\rangle$, $y\in\langle 0,a_2\rangle$, $z\in\langle 0,a_3\rangle$

Rješenje Schrödingerove jednadžbe za trodimenzionalnu potencijalnu jamu beskonačnih zidova pretpostavljamo u obliku produkta triju nezavisnih funkcija, $\psi(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)$.

Valna funkcija je:

$$\psi=A\sin\left(\frac{n_1\pi}{a_1}x\right)\sin\left(\frac{n_2\pi}{a_2}x\right)\sin\left(\frac{n_3\pi}{a_3}x\right)$$

$$A=A_1A_2A_3,\ E_{n_1,n_2,n_3}=\frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{a_1^2}+\frac{n_2^2}{a_2^2}+\frac{n_3^2}{a_3^2}\right)$$

Vodikov atom

Schrödingerova jednadžba za vodikov atom:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r}\psi=E\psi$$

Schrödingerova jednadžba za vodikov atom u polarnim koordinatama:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right)-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r}\psi=E\psi$$

Rješenje pretpostavljamo u obliku produkta $\psi(r,\theta,\phi)=R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$.

Azimutalna jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+m^2\Phi=0$$

Rješenje je oblika $\Phi(\phi)=A_\phi e^{im\phi}$.

Polarna jednadžba

$$-\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}=\ell(\ell+1)$$

Rješenje je oblika $\Theta(\theta)=A_\theta P_\ell^m(\cos\theta)$, gdje je

$$P_n^m(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(\frac{1}{n!\,2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n\right)$$

pridruženi Legendreov polinom.

Radijalna jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{2mr^2}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)R=\ell(\ell+1)R$$

Rješenje je oblika $R(r)=A_r r^\ell e^{-\frac{r}{nr_0}}L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)$,

gdje je $L_n^m(x)=\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}\left(e^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right)\right)$ pridruženi Laguerrov polinom.

Valna funkcija

$$\psi(r,\theta,\phi)=A_r r^\ell e^{-\frac{r}{nr_0}}L_{n+\ell}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{nr_0}\right)A_\theta P_\ell^m(\cos\theta)A_\phi e^{im\phi}$$

Konstante A_r, A_θ, A_ϕ odrede se iz uvjeta normiranja.

$$A_r=-\left(\frac{2}{nr_0}\right)^{\ell+1}\sqrt{\frac{2}{nr_0}\frac{(n-\ell-1)!}{2n((n+\ell)!)^3}}$$

$$A_\theta=\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!}}$$

$$A_\phi=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

Kvantni brojevi

Kvantni brojevi n (glavni kvantni broj), ℓ (orbitalni kvantni broj) i m (magnetski kvantni broj) moraju zadovoljavati sljedeće uvjete:

$n\in\mathbb{N}$

$\ell\in\mathbb{N}_0$, $0\le\ell\le n-1$

$m\in\mathbb{Z}$, $-\ell\le m\le\ell$

Energija: $E_n=\frac{1}{n^2}\frac{-me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2}$

Orbitalni moment količine gibanja:

$L=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)}$

Bohrov polumjer: $r_0=\frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{me^2}$

Harmonički oscilator

Schrödingerova jednadžba harmoničkog titranja:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla^2\psi+\frac{1}{2}kr^2\psi=E\psi$$

Schrödingerova jednadžba za jednodimenzionalni harmonički oscilator: $-\frac{\hbar^2}{2m_e}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{2}kx^2\psi=E\psi$

Rješenje je oblika $\psi=Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$,

gdje je $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x^2}\right)$ Hermiteov polinom i $A=2^n\,n!\sqrt[4]{\frac{2m}{\hbar}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x}$.

Energija: $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

Kristalna rešetka

Energija

Energija vezanja: $U(r)=-\frac{\alpha}{r^n}+\frac{\beta}{r^m}$

Energija kristalizacije: $E=-\alpha\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{R}$

Energija sublimacije: $E=(\alpha-1)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$

Toplinska svojstva

Toplinski kapacitet elektronskog plina:

$$C_m=R\frac{\pi^2}{2}\frac{T}{T_F}$$

Einsteinov model

Prosječna energija oscilatora:

$$\overline{E}=kT\frac{\hbar\omega/kT}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}+\frac{1}{2}\hbar\omega$$

Unutarnja energija po molu: $U_m=3N_A\overline{E}$

Toplinski kapacitet

$$C_m=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$$

Visoke temperature ($\hbar\omega \ll kT$):
$C_m = 3R$
Niske temperature ($\hbar\omega \gg kT$):
$$C_m = 3R\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

Debyeov model

Unutarnja energija: $U_m = \int_0^{\omega_D} \frac{\hbar\omega g(\omega)}{\exp(\hbar\omega/kT)-1}\mathrm{d}\omega$,

gdje je $g(\omega) = \frac{3V}{2\pi^2 v_0^3}\omega^2$, $\frac{3}{v_0^3} = \frac{1}{v_1^3} + \frac{1}{v_2^3} + \frac{1}{v_3^3}$.

Debyeova frekvencija: $\omega_D = v_0\sqrt[3]{6\pi^2\frac{N}{V}}$

Debyeova temperatura: $T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k}$

Toplinski kapacitet
$$C_m = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$$
Visoke temperature ($\hbar\omega \ll kT$):
$U = 3NkT$, $C_m = 3R$
Niske temeprature ($\hbar\omega \gg kT$):
$$U = \frac{3\pi^4}{5}NkT\left(\frac{T}{T_D}\right)^3,\ C_m = 3R\frac{4\pi^4}{5}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

Toplinska vodljivost

Koeficijent toplinske vodljivosti: $\lambda_t = \frac{1}{3}C_m v\ell$

Gustoća toplinskog toka: $q = \lambda_t\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}$

Elektroni u kristalnoj rešetci

Funkcije raspodjele

Funkcija gustoće dopuštenih energijskih stanja:
$$S(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{\frac{3}{2}}}{h^3}\sqrt{E},\ Z(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{\frac{3}{2}}}{h^3}V\sqrt{E}$$
Funkcija raspodjele slobodnih elektrona po energijama: $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}E} = \frac{8\sqrt{2}\pi m^{\frac{3}{2}}}{h^3}\sqrt{E}\frac{1}{1+\exp\frac{E-E_F}{kT}}$

Fermijeva energija

Fermijeva energija: $E_F = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\rho_0^{\frac{2}{3}}$, gdje je

$\rho_0 = \frac{N}{V}$ gustoća slobodnih elektrona.

Fermijeva temperatura: $E_F = T_F \cdot k$

Brzina na Fermijevoj površini: $v_F = \sqrt{\frac{2E_F}{m}}$

Srednja energija slobodnih elektrona: $\overline{E} = \frac{3}{5}E_F$

Kronig – Penneyev model

Schrödingerova jednadžba:
$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + U\psi = E\psi$, gdje je
$$U = \begin{cases} U_0,\ x \in \langle (a+b)n, (a+b)n+a \rangle \\ 0, \text{inače} \end{cases}$$
periodički potencijal, $a, b \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{Z}$

Rješenje je oblika $\psi = e^{ikx}f(x)$, gdje je

$f(x+a+b) = f(x)$ periodička funkcija i $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Uvjet za postojanje rješenja:
$$\mathrm{ch}(\beta b)\cos(\alpha a) + \frac{\beta^2-\alpha^2}{2\alpha\beta}\mathrm{sh}(\beta b)\sin(\alpha a) = \cos(k(a+b)),$$
gdje je $\alpha = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$, $\beta = \sqrt{\frac{2m(U_0-E)}{\hbar^2}}$.

Za tanku i visoku barijeru dobivamo:
$P\frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} + \cos(\alpha a) = \cos(ka)$, gdje je

$P = \frac{m}{\hbar^2}abU_0$ mjera nepropusnosti barijere.

Vrijednost valnog vektora za koju nastupa prijelaz u višu vrpcu: $k = \frac{n\pi}{a}$

Energija elektrona u energijskoj vrpci:
$E(k) = E_a + C + 2A\cos(ka)$

Gibanje elektrona u rešetki

Grupna brzina: $v_g = \frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}k}$

Efektivna masa: $m^* = \frac{\hbar^2}{\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}k^2}}$

Ciklotronska rezonancija: $\omega = \frac{eB}{m^*}$

Električna vodljivost

Usmjerena brzina: $v_u = \frac{eE}{m^2}\tau$

Pokretljivost: $\mu = \frac{v_u}{E}$

Specifična vodljivost: $\sigma = \frac{Ne^2}{m^*}\tau$

Specifični otpor: $\rho = \frac{1}{\sigma}$

Srednji slobodni put: $\ell = v\tau$

Poluvodiči

Pokretljivost elektrona: $\mu_n = \frac{e\tau_e}{m_n^*}$

Pokretljivost šupljina: $\mu_p = \frac{e\tau_p}{m_p^*}$

Specifična vodljivost: $\sigma = e\,(\mu_n \cdot n_n + \mu_p \cdot n_p)$

Intrinsična koncentracija: $n_i^2 = N_c N_v \exp\frac{-E_G}{kT}$,

gdje je $N_c = 2\left(\frac{2\pi m_n^* k}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}$ efektivna gustoća stanja u vodljivom pojasu, a $N_v = 2\left(\frac{2\pi m_p^* k}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} T^{\frac{3}{2}}$ efektivna gustoća stanja u valentnom pojasu.

Supravodljivost

Kritično magnetsko polje: $H_k = H_0\left(1 - \frac{T^2}{T_k^2}\right)$

Izotopni efekt: $T_k \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$

Londonove jednadžbe:

$$\nabla \vec{j} = -\frac{n_s e^2}{m}\vec{B}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} = \frac{n_s e^2}{m}\vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\alpha}\vec{B}, \quad \alpha = \frac{m}{\mu_0 n_s e^2}$$

Londonva dubina prodiranja: $\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}}$

Statističke raspodjele

Maxwell – Boltzmannova raspodjela

$$f_{MB} = \exp\left(-a - \frac{E}{kT}\right)$$

Fermi – Diracova raspodjela

$$f_{FD} = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_F}{kT}\right)}$$

Bose – Einsteinova raspodjela

$$f_{BE} = \frac{1}{1 + \exp\left(a + \frac{E}{kT}\right)}$$

Dielektrična svojstva materijala

Električni dipolni moment: $\vec{p} = q\vec{a}$

Gustoća polarizacije: $\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}$

Gustoća polarizirane struje: $J_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$

Gustoća polariziranog naboja: $\rho_P = -\nabla \vec{P}$

Vektor električnog pomaka: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$,

$\vec{P} = \varepsilon_0 \tilde{\chi}_e \vec{E}$ (za izotropne dielektrike je $\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E}$)

Relativna dielektričnost: $1 + \chi_e = \varepsilon_r$

Dielektrici

Elektronska polarizacija

Elektronska polarizacija: $P_e = n 4\pi\varepsilon_0 R^3 E$

Konstanta elektronske polarizacije: $\alpha_e = 4\pi\varepsilon_0 R^3$

Dipolni moment: $p = \alpha_e E$

Orijentacijska polarizacija

Raspodjela dipola:

$$n = n_0 \exp\frac{pE\cos\theta}{kT}$$

Orijentacijska polarizacija: $P_{or} = pnL\left(\frac{pE}{kT}\right)$, gdje je $L(x) = \operatorname{cth} x - \frac{1}{x}$ Langevinova funkcija (za male vrijednosti x je $L(x) = \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \ldots$).

Za normalne vrijednosti temperature i polja je $n = \frac{n_0}{4\pi}\left(1 + \frac{pE\cos\theta}{kT}\right)$, orijentacijska polarizacija $P_{or} = \frac{np^2 E}{3kT}$ i konstanta orijentacijske polarizacije $\alpha_{or} = \frac{p^2}{3kT}$.

Polarizacija u plinovima

Polarizacija: $\vec{P} = n\alpha_e \vec{E}$

Susceptibilnost: $\chi_e = \frac{n\alpha_e}{\varepsilon_0}$

Polarizacija u čvrstim tijelima

Veza lokalnog i vanjskog polja: $\vec{E}_{\text{lokalno}} = \vec{E} + \vec{E}_L$

Lorentzovo polje: $\vec{E}_L = \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$

Polarizacija: $\vec{P} = n\alpha_e \vec{E}_{\text{lokalno}}$

Susceptibilnost: $\chi_e = \frac{\frac{n\alpha_e}{\varepsilon_0}}{1 - \frac{n\alpha_e}{3\varepsilon_0}}$

Clausius – Mossotijeva jednadžba

$\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{n\alpha_e}{3\varepsilon_0}$

Feroelektrici

Curie–Weissov zakon: $\varepsilon_r = \frac{3}{\beta(T - T_C)}$

Magnetska svojstva materijala

Magnetski moment: $\vec{\mu} = \hat{n} i S$

Gustoća magnetiziranja: $\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{\Delta V} \vec{\mu}_i}{\Delta V}$

Gustoća amperske struje: $\vec{J}_a = \nabla \times \vec{M}$

Vektor jakosti magnetskog polja: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$,

$\vec{M} = \tilde{\chi}_m \vec{H}$ (za izotropne materijale je $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi_m)}$)

Relativna permeabilnost: $1 + \chi_m = \mu_r$

Dijamagnetizam

Larmorova frekencija: $\omega_L = \frac{eB}{2m}$, $\omega = \omega_0 \pm \omega_L$

Konstanta dijamagnetske susceptibilnosti:

$\chi_m = -\mu_0 \frac{ne^2 r^2}{4m}$ (staza elektrona okomita na $\vec{B}$)

$\chi_m = -\mu_0 \frac{ne^2 r^2}{6m}$ (uračunate sve orijentacije staze elektrona prema polju $\vec{B}$)

$\chi_m = -\mu_0 \frac{ne^2}{6m} \sum_{i=1}^{Z} \overline{r_i^2}$, gdje je $\overline{r_i^2} = \int_\tau \Psi^* r^2 \Psi \,\mathrm{d}\tau$

Paramagnetizam

Magentizacija u materijalu: $M = n\mu L\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$, gdje je $L(x)$ Langevinova funkcija.

Paramagnetska susceptibilnost za $\mu B \ll kT$:

$\chi_m = \mu_0 \frac{n\mu^2}{3kT}$

Courieov zakon: $\chi_m = \frac{C}{T}$, gdje je $C = \frac{n\mu_0\mu^2}{3k}$ Courieova konstanta

Magnetski momenti atoma

Bohrov magneton: $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$

Orbitalni magnetski moment:

$\mu_L = \mu_B \sqrt{L(L+1)}$

Spinski magnetski moment:

$\mu_S = 2\mu_B \sqrt{S(S+1)}$

Ukupni kvantni broj spina: $\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i$

Ukupni orbitalni kvantni broj: $\vec{L} = \sum_i \vec{\ell}_i$

$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$

Ukupni magnetski moment atoma:

$\mu_J = g\mu_B \sqrt{J(J+1)}$

Landéov faktor:

$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$

Feromagnetizam

Magnetizacija u materijalu:

$M = n\mu L\left(\frac{\mu_0\mu(H + \omega M)}{kT}\right)$

Maksimalna magentizacija: $M_S = N\mu$

Dipolni magnetski moment (kvantnomehanički izraz): $M = n\mu_B \operatorname{th}\left(\frac{\mu_0\mu_B H}{kT}\right)$

Currieova temperatura: $T_C = \frac{\mu\mu_0\omega M_S}{3k}$

Curie–Weissov zakon: $\chi_m = \frac{\mu_0 N\mu^2}{3k(T - T_C)}$

VAŽNIJE FUNKCIJE I INTEGRALI

Pridruženi Legenderovi polinomi

$P_0^0(x) = 1$

$P_1^0(x) = x$ $\quad$ $P_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}$

$P_2^0(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ $\quad$ $P_2^1(x) = 3x\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$

$P_3^0(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ $\quad$ $P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2 - 1)\sqrt{1-x^2}$ $\quad$ $P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$ $\quad$ $P_3^3(x) = 15\sqrt{(1-x^2)^3}$

Kugline funkcije

$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)$ $\quad$ $Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin(\theta)e^{i\phi}$

$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin(\theta)\cos(\theta)e^{i\phi}$ $\quad$ $Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2(\theta)e^{2i\phi}$

$Y_3^0 = \sqrt{\frac{7}{4\pi}}\left(\frac{5}{2}\cos^2(\theta) - \frac{3}{2}\cos(\theta)\right)$ $\quad$ $Y_3^1 = -\sqrt{\frac{21}{4\pi}}\sin(\theta)(5\cos^2(\theta) - 1)e^{i\phi}$ $\quad$ $Y_3^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{105}{2\pi}}\sin^2(\theta)\cos(\theta)e^{2i\phi}$ $\quad$ $Y_3^3 = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{35}{4\pi}}\sin^3(\theta)e^{3i\phi}$

Radijalne funkcije $R_{n\ell}$

$$R_{10} = 2\sqrt{r_0^{-3}}\, e^{-\frac{r}{r_0}}$$

$$R_{20} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{r_0^{-3}}\left(2 - \frac{r}{r_0}\right)e^{-\frac{r}{2r_0}} \qquad R_{21} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{r_0^{-3}}\,\frac{r}{r_0}\,e^{-\frac{r}{2r_0}}$$

$$R_{30} = \frac{1}{9\sqrt{3}}\sqrt{r_0^{-3}}\left(6 - \frac{4r}{r_0} + \frac{4r^2}{9r_0}\right)e^{-\frac{r}{3r_0}} \qquad R_{31} = \frac{1}{9\sqrt{6}}\sqrt{r_0^{-3}}\,\frac{2r}{3r_0}\left(4 - \frac{2r}{3r_0}\right)e^{-\frac{r}{3r_0}} \qquad R_{32} = \frac{1}{9\sqrt{30}}\sqrt{r_0^{-3}}\left(\frac{2r}{3r_0}\right)^2 e^{-\frac{r}{3r_0}}$$

Hermiteovi polinomi

Hermitovi polinomi	Normirane valne funkcije harmoničkog oscilatora
$H_0(x)=1$	$\psi_0=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{x^2}{2}\frac{m\omega}{\hbar}}$
$H_1(x)=2x$	$\psi_1=\sqrt[4]{\frac{8m^3\omega^3}{\pi\hbar^3}}xe^{-\frac{x^2}{2}\frac{m\omega}{\hbar}}$
$H_2(x)=4x^2-2$	$\psi_2=\sqrt[4]{\frac{m\omega}{4\pi\hbar}}\left(2x^2\frac{m\omega}{\hbar}-1\right)e^{-\frac{x^2}{2}\frac{m\omega}{\hbar}}$

Tablica integrala $I_n=\int_0^\infty x^n e^{-ax^2}\,dx$

n	Vrijednost integrala	n	Vrijednost integrala
0	$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$	4	$\frac{3}{8}\left(\frac{\pi}{a^5}\right)^{\frac{1}{2}}$
1	$\frac{1}{2a}$	5	$\frac{1}{a^3}$
2	$\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}$	$2n+1$	$\frac{n!}{2a^{n+1}}$
3	$\frac{1}{2a^2}$	$2n$	$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$

FIZIKALNE KONSTANTE

brzina svjetlosti u vakuumu	c	=	$2{,}99792458\cdot10^{8}$ m/s
dielektrična konstanta vakuuma	ε_0	=	$8{,}854\cdot10^{-12}$ F/m
permeabilnost vakuuma	μ_0	=	$4\pi\cdot10^{-7}$ H/m
elementarni električni naboj	e	=	$1{,}60217733\cdot10^{-19}$ C
Planckova konstanta	h	=	$6{,}6260755\cdot10^{-34}$ Js
	$\hbar$	=	$1{,}054573\cdot10^{-34}$ Js
Avogadrov broj	N_A	=	$6{,}0221367\cdot10^{23}$ mol^{-1}
plinska konstanta	R	=	$8{,}314510$ Jmol^{-1}K^{-1}
Boltzmannova konstanta	k	=	$1{,}380658\cdot10^{-23}$ J/K
	k	=	$8{,}617\cdot10^{-11}$ MeV/K
Loschmidtov broj	n_L	=	$2{,}68675\cdot10^{25}$ m^{-3}
molni obujam idealnog plina	V_o	=	$22{,}4138\cdot10^{-3}$ m^{3}mol^{-1}
Stefan-Boltzmannova konstanta	σ	=	$5{,}67051\cdot10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}
Rydbergova konstanta	R_∞	=	$1{,}0973731534\cdot10^{7}$ m^{-1}
konstanta fine strukture	α	=	$0{,}00729735308$
	α^{-1}	=	$137{,}0359895$
Bohrov polumjer	r_0	=	$5{,}29177249\cdot10^{-11}$ m
Bohrov magneton	μ_B	=	$9{,}2740154\cdot10^{-24}$ JT^{-1}
nuklearni magneton	μ_N	=	$5{,}0507866\cdot10^{-27}$ JT^{-1}
kvant magnetskog toka	ϕ_0	=	$2{,}06783461\cdot10^{-15}$ Wb
masa mirovanja elektrona	m_e	=	$9{,}1093897\cdot10^{-31}$ kg
	m_ec^2	=	$0{,}511003$ MeV
specifični naboj elektrona	$-\frac{e}{m_e}$	=	$1{,}75881962\cdot10^{11}$ Ckg^{-1}
Comptonova valna duljina elektrona	$\lambda_{C,e}$	=	$2{,}42631058\cdot10^{-12}$ m
klasični polumjer elektrona	r_e	=	$2{,}81794092\cdot10^{-15}$ m
magnetski moment elektrona	μ_e	=	$1{,}001159652193$ μ_B
masa mirovanja protona	m_p	=	$1{,}67265\cdot10^{-27}$ kg
	m_pc^2	=	$938{,}28$ MeV
Comptonova valna duljina protona	$\lambda_{C,p}$	=	$1{,}32141002\cdot10^{-15}$ m
masa mirovanja neutrona	m_n	=	$1{,}67495\cdot10^{-27}$ kg
	m_nc^2	=	$939{,}57$ MeV
Comptonova valna duljina neutrona	$\lambda_{C,n}$	=	$1{,}31959110\cdot10^{-15}$ m
atomska masena konstanta	m_u	=	$1{,}6605402\cdot10^{-27}$ kg
	m_uc^2	=	$931{,}49432$ MeV