```
(*  2.4  LABOS: EigenValuesVectors.nb *)

(* zadavanje matrice *)
A = {{a, b}, {c, d}}
MatrixForm[A]
```

{{a, b}, {c, d}}

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

```
(* lista svojstvenih vrijednosti od A *)
Eigenvalues[A]
```

$$\left\{\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\right\}$$

```
(* dohvat svake pojedine svojstvene vrijednosti *)
Vrijednosti = Eigenvalues[A]
PrvaVr = Vrijednosti[[1]]
DrugaVr = Vrijednosti[[2]]
```

$$\left\{\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

```
(* drugi način nalaenja svojstvenih vrijednosti pomoću
 karakterističnog polinoma to jest "pjeke" po definicji *)
(* karakteristični polinom matrice A ispisan po varijabli t *)
CarPol = CharacteristicPolynomial[A, t]
```

$$-b\,c+a\,d-a\,t-d\,t+t^2$$

```
(* računanje nultočaka jednadbe karakterističnog polinoma *)
Roots[CarPol == 0, t]
```

$$t == \frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\ \| \ t == \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

```
(* jo jedan način nalazenja svojstvenih vrijednosti
 pomoću karakterističnog polinoma to jest "pjeke" po definicji *)
(* karakteristični polinom matrice A ispisan po varijabli
 t ali po definiciji karakterističnog polinoma*)
Polinom = Det[A - t * IdentityMatrix[2]]
Roots[Polinom == 0, t]
```

$$-b\,c+a\,d-a\,t-d\,t+t^2$$

$$t == \frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\ \| \ t == \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

```
(* kako vidimo za matrice sa općim elementima izrazi za svojstvene
 vrijednosti su komplicirani, pa ako elimo raditi sa pripadnim svojstvenim
 vektorima bilo bi dobro matricu A zadati sto je moguće konkretnije *)
A = {{1, 4}, {2, 3}}
MatrixForm[A]
Eigenvalues[A]
```

{{1, 4}, {2, 3}}

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

{-1, 5}

```
Eigenvectors[A]
```

{{-2, 1}, {1, 1}}

```
(* dohvat svakog pojedinog svojstvenog vektora *)
Vektori = Eigenvectors[A]
PrviVekt = Vektori[[1]]
DrugiVektor = Vektori[[2]]
```

{{-2, 1}, {1, 1}}

{-2, 1}

{1, 1}

```
B = {{0, -5, -15}, {1, -2, -4}, {2, 0, 4}}
MatrixForm[B]
```

{{0, -5, -15}, {1, -2, -4}, {2, 0, 4}}

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -15 \\ 1 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
(* jezgra matrice B *)
NullSpace[B]
```

{{-2, -3, 1}}

```
(* dobili smo da je jezgra jednodimenzionalna te jednu bazu jezgre *)
(* da je jezgra jednodimenzionalna mogli smo otkriti pomoću reduciranog oblika *)
MatrixForm[RowReduce[B]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(* drugi način traenja svojstvenih vektora pomoću jezgre matrice A-
 t*I to jest po definicji svojstvenih vrijednosti *)
SvojVrijednosti = Eigenvalues[A]
PrvaVr = SvojVrijednosti[[1]]
DrugaVr = SvojVrijednosti[[2]]
```

{-1, 5}

-1

5

```
PrviVektor = NullSpace[A - PrvaVr * IdentityMatrix[2]]
DrugiVektor = NullSpace[A - DrugaVr * IdentityMatrix[2]]
MatrixForm[PrviVektor[[1]]]
MatrixForm[DrugiVektor[[1]]]
```

{{-2, 1}}

{{1, 1}}

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
(* automatski i najbri način dobivanja svojstvenih vrijednosti i vektora *)
(* zajednička lista svojstvenih vrijednosti i vektora *)
sys = Eigensystem[A]
```

{{-1, 5}, {{-2, 1}, {1, 1}}}

```
(* izdvajanje liste svojstvenih vrijednosti iz ukupne liste *)
sys[[1]]
```

{-1, 5}

```
(* izdvajanje liste svojstvenih vektora iz ukupne liste *)
sys[[2]]
```

{{-2, 1}, {1, 1}}

```
(* dohvat svojstvenih vrijednosti *)
sys[[1, 1]]
sys[[1, 2]]
```

-1

5

```
(* dohvat svakog pojedinog svojstvenog vektora *)
MatrixForm[sys[[2, 1]]]
MatrixForm[sys[[2, 2]]]
```

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
(* matrica sastavljena od svojstvenih vektora,
koja je vazna u dijagonalizaciji matrica *)
MatrixForm[sys[[2]]]
```

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

```
(* numerička aproksimacija svojstvenih vrijednosti i vektora pomoću funkcije N *)
(* ovo je korisno ali nije egzaktno *)
Eigensystem[N[A]]
```

{{5., -1.}, {{-0.707107, -0.707107}, {-0.894427, 0.447214}}}

```
(* primjetimo da svojstveni vektori mogu biti multiplicirani nekom
 konstantom pa moemo reći da smo dobili isti prostor svojstvenih vektora *)
```

```
(* zadavanje nove matrice A *)
A = {{1, 0, 1, -1, 1}, {-1, 0, 1, 2, 0}, {0, 3, 1, 1, -5}, {0, 1, 0, 0, 0}}
MatrixForm[A]
```

{{1, 0, 1, -1, 1}, {-1, 0, 1, 2, 0}, {0, 3, 1, 1, -5}, {0, 1, 0, 0, 0}}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(* defekt matrice A po definiciji *)
defekt = Length[NullSpace[A]]
```

1

```
(* rang po teoremu o "rangu i defektu" *)
rang = Length[Transpose[A]] - defekt
```

4