Završni ispit iz Wolframove Mathematice
07.07.2009.

1. (2+2+2 boda)

(a) Provjeri vrijedi li za sve kvadratne matrice reda 4 jednakost $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$?

(b) Nađi primjer matrica za koje jednakost vrijedi!

(c) Nađi primjer matrica za koje jednakost ne vrijedi (ukoliko takve postoje)!

2. (6 bodova)
Na uzorku od 1000 kvadratnih matrica reda 3, čiji su elementi iz skupa $\{-1, 0, 1\}$, izračunaj koliko matrica ima svoj trag veći od determinante!

3. (2+4 boda)
Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$x_2 - x_3 = 1$$

(a) Riješi sustav korištenjem naredbe Solve.

(b) Riješi sustav Gaussovom metodom eliminacije.

4. (3+3 boda)
Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

(a) Nađi sve njene asimptote.

(b) Nacrtaj funkciju zajedno s njenim asimptotama na istom grafu (u različitim bojama!).

5. (3+3 boda)
Zadana je funkcija $f(x, y) = xy^3 + x^2y + xy$.

(a) Odredi lokalne ekstreme.

(b) Nacrtaj funkciju u okolini svakog dobivenog ekstrema.

```
(* Završni ispit iz Wolframove Mathematice 07.07.2009*)

(* 1. zadatak *)

(* a *)

A =
  {{a11, a12, a13, a14}, {a21, a22, a23, a24}, {a31, a32, a33, a34}, {a41, a42, a43, a44}};
B = {{b11, b12, b13, b14}, {b21, b22, b23, b24},
   {b31, b32, b33, b34}, {b41, b42, b43, b44}};
Simplify[Inverse[A.B]] === Simplify[Inverse[B].Inverse[A]]

(* Vrijedi za sve regularne matrice. *)

(* b *)

While[True,
  A = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {4}, {4}];
  B = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {4}, {4}];
  If[Simplify[Inverse[A.B]] === Simplify[Inverse[B].Inverse[A]],
   Print[" Vrijedi za matrice: ", MatrixForm[A], MatrixForm[B]]; Break[] ];
 ];
```

Vrijedi za matrice: $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

```
(* c *)

(* Ne postoji, navedena jednakost vrijedi za sve regularne matrice. *)

(* 2. zadatak*)

br = 0;
For[i = 0, i < 1000, i++;
  A = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
  If[Tr[A] > Det[A], br++]; ];
Print[" Broj traženih matrica je: ", br];
```

Broj traženih matrica je: 378

```
(*3. zadatak*)

(* a *)
Solve[{x1 + x2 + x3 + x4 == 3, x1 - x2 + x3 == 2, x2 - x3 == 1}, {x1, x2, x3, x4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

$\{\{x1 \to 3,\ x3 \to -1 + x2,\ x4 \to 1 - 2\, x2\}\}$

```
(* b *)

M = {{1, 1, 1, 1, 3}, {1, -1, 1, 0, 2}, {0, 1, -1, 0, 1}};
RowReduce[M]
```

$\left\{\{1, 0, 0, 0, 3\}, \left\{0, 1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \left\{0, 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

```
(* Iz reducirane matrice sustava tražimo konačno rješenje: *)

Solve[{x1 == 3, x2 + 1 / 2 x4 == 1 / 2, x3 + 1 / 2 x4 == -1 / 2}, {x1, x2, x3, x4}]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

{{x1 → 3, x3 → -1 + x2, x4 → 1 - 2 x2}}

```
(* 4. zadatak *)

f[x_] := x^3 / (x^2 - 9);

(* a *)

(* Domena funkcije je R\{-3,3} pa su kandidati za vertikalne asimptote x=-3 i x=3,
provjeravamo pomoću limesa: *)
Limit[f[x], x → -3]
Limit[f[x], x → 3]
```

∞

∞

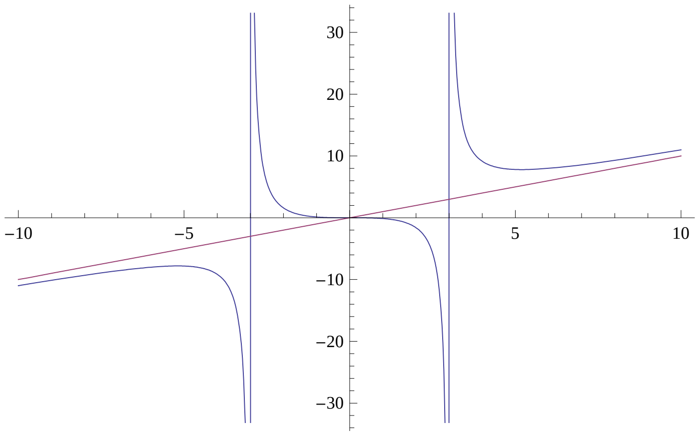
```
(* Dakle, to su vertikalne asimptote. Provjerimo ima li kosih: *)

k = Limit[f[x] / x, x → Infinity]
l = Limit[f[x] - k1 * x, x → Infinity]
kosa[x_] = k * x + l
```

1

0

x

```
(* Imamo kosu asimptotu y=x. *)

(* b *)

Plot[{f[x], kosa[x]}, {x, -10, 10}]
```



```
(* 5. zadatak *)

f[x_, y_] = x * y^3 + x^2 * y + x * y;

(* a *)
fx = D[f[x, y], x];
fy = D[f[x, y], y];
Solve[{fx == 0, fy == 0}, {x, y}]
```

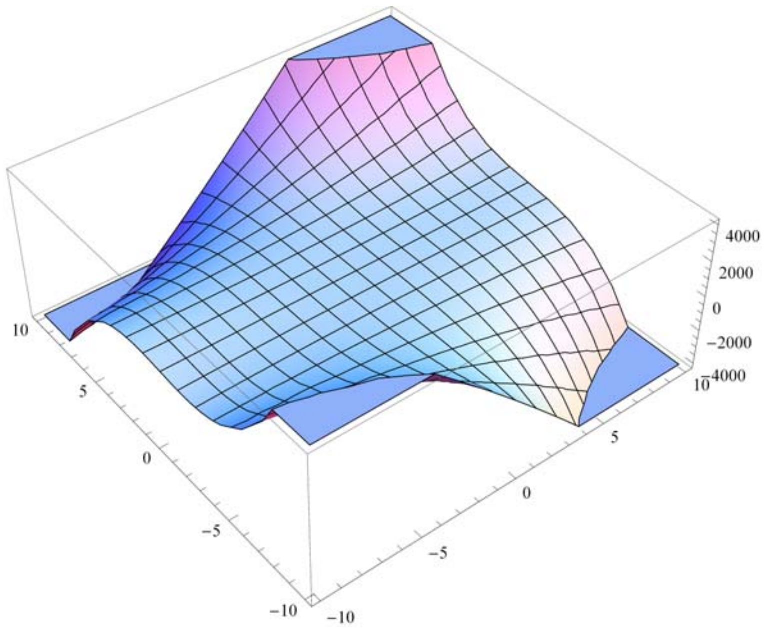
$$\left\{\{x \to -1, y \to 0\}, \{x \to 0, y \to 0\}, \{x \to 0, y \to -i\}, \{x \to 0, y \to i\}, \left\{x \to -\frac{2}{5}, y \to -\frac{i}{\sqrt{5}}\right\}, \left\{x \to -\frac{2}{5}, y \to \frac{i}{\sqrt{5}}\right\}\right\}$$

```
(* Samo su dva realna rjesenja, odnosno kandidata za ekstreme: T1(-1,0) i T2(0,0) *)

fxx[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}];
fyy[x_, y_] = D[f[x, y], {y, 2}];
fxy[x_, y_] = D[f[x, y], x, y];
hess[x_, y_] = fxx[x, y] * fyy[x, y] - fxy[x, y] * fxy[x, y];
hess[-1, 0]
hess[0, 0]
```

-1

-1

```
(* U obje točke nije ispunjen uvjet pozitivnosti hessea pa nemamo ekstrema *)

(* b *)

(* Nema lokalnih ekstrema pa ćemo nacrtati funkciju na proizvoljnom intervalu *)

Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```



Završni ispit iz Wolframove Mathematice
30.06.2010.

1. **(1+2+2 boda)**
Zadana je matrica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunaj $2A^{-1}A^T$.
(b) Provjeri vrijedi li jednakost $(A^T)^2 = (A^2)^T$.
(c) Izračunaj zbroj svojstvenih vrijednosti matrice A.

2. **(5 bodova)**
Na uzorku od 314 random generiranih kvadratnih matrica reda 5, čiji su elementi cijeli brojevi iz intervala $[-5, 5]$, izračunaj koliko ima regularnih, a koliko singularnih matrica. (matrica je regularna ako joj je determinanta različita od nule, inače je singularna)

3. **(1+2+2 boda)**
Zadan je sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(a) Napiši proširenu matricu sustava i svedi je na reducirani oblik po retcima.
(b) Ako ste ispravno napisali (a) dio zadatka, *Mathematica* će izbaciti sljedeći rezultat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz dobivene matrice odredi konačno rješenje sustava.
(c) Riješi sustav korištenjem naredbe Solve.

4. **(1+1+3 boda)**
Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 5x}$.

(a) Izračunaj drugu derivaciju funkcije f u točki 1.
(b) Odredi tangentu na funkciju f u točki 1.
(c) Izračunaj površinu lika kojeg zatvara dobivena tangenta s koordinatnim osima.

5. **(1+2+2 boda)**
Zadana je funkcija $f(x, y) = x^2y + 2xy + xy^2$.

(a) Nacrtaj funkciju s proizvoljnim ograničenjima na koordinatnim osima.
(b) Izračunaj $d^2f(2, 1)$ (drugi diferencijal funkcije f u točki $(2, 1)$).
(c) Izračunaj vrijednost dvostrukog integrala u oba poretka integracije

$$\int\int_D f(x, y)dxdy.$$

pri čemu je D područje omeđeno pravcima $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $y = 2$.

```
(* Završni ispit iz Wolframove Mathematice 30.06.2010. *)

(* 1. zadatak *)

(* a *)

A = {{1, -1, 2}, {3, 1, 4}, {5, 0, -3}};
MatrixForm[2 * Inverse[A].Transpose[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{12}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{46}{21} & -\frac{82}{21} & -\frac{139}{21} \\ -\frac{8}{21} & \frac{4}{21} & \frac{37}{21} \end{pmatrix}$$

```
(* b *)

MatrixPower[Transpose[A], 2] === Transpose[MatrixPower[A, 2]]
```

True

```
(* c *)

N[Eigenvalues[A][[1]] + Eigenvalues[A][[2]] + Eigenvalues[A][[3]]]
```

-1. + 0. i

```
(* 2. zadatak *)

uk = 314;
reg = 0;
sing = 0;
For[i = 0, i < uk, i++;
  A = Table[Random[Integer, {-5, 5}], {5}, {5}];
  If[Det[A] ≠ 0, reg++, sing++];];
Print[" Broj regularnih matrica: ", reg]
Print[" Broj singularnih matrica: ", sing]
```

Broj regularnih matrica: 314

Broj singularnih matrica: 0

```
(* 3. zadatak *)

(* a *)

MP = {{1, -1, 0, 1, 1}, {0, 1, 1, 0, 2}, {1, 0, 1, 1, 3}};
MatrixForm[RowReduce[MP]]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(* b *)

Solve[{x1 + x3 + x4 == 3, x2 + x3 == 2}, {x1, x2, x3, x4} ]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

{{x3 → 2 - x2, x4 → 1 - x1 + x2}}

```
(* c *)

Solve[{x1 - x2 + x4 == 1, x2 + x3 == 2, x1 + x3 + x4 == 3}, {x1, x2, x3, x4} ]
```

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

{{x3 → 2 - x2, x4 → 1 - x1 + x2}}

```
(* 4. zadatak *)
f[x_] = 1 / (x^2 - 5 x);
f''[1]
```

$-\frac{13}{32}$

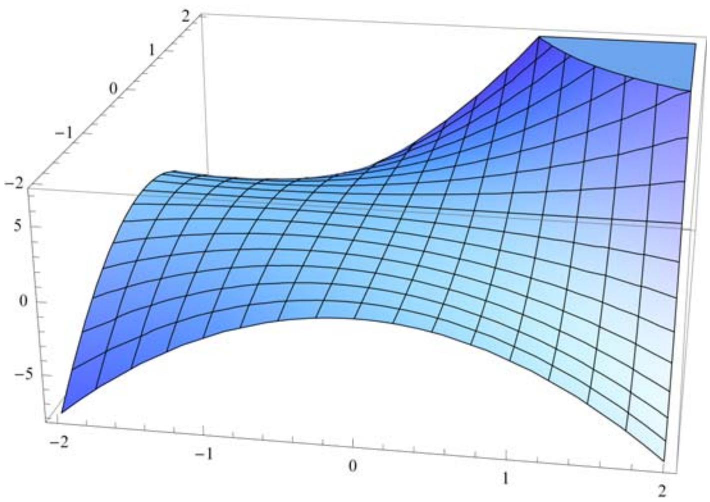
```
(* b *)

x0 = 1;
tang[x_] = f'[x0] (x - x0) + f[x0]
```

$-\frac{1}{4}+\frac{3}{16}(-1+x)$

```
(* c *)
m = tang[0];
n = x0 - f[x0] / f'[x0];
Print[" Površina je: ", Abs[m * n] / 2]
```

Površina je: $\frac{49}{96}$

```
(* 5. zadatak *)

f[x_, y_] = y x^2 + 2 x y + x y^2;

(* a *)

Plot3D[f[x, y], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



```
(* b *)

fxx[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}];
fyy[x_, y_] = D[f[x, y], {y, 1}];
fxy[x_, y_] = D[f[x, y], x, y];
df2[x_, y_] = fxx[x, y] * (dx)^2 + 2 * fxy[x, y] * (dx) * (dy) + fyy[x, y] * (dy)^2;
df2[2, 1]
```

$2\, dx^2 + 16\, dx\, dy + 12\, dy^2$

```
(* c *)

NIntegrate[f[x, y], {x, 1, 2}, {y, 0, 1}]
NIntegrate[f[x, y], {y, 0, 1}, {x, 1, 2}]
```

3.16667

3.16667

```
(* 1. Vektorski racun *)

(* zadavanje vektora *)
a = {a1, a2, a3}
b = {b1, b2, b3}
```

{a1, a2, a3}

{b1, b2, b3}

```
(* zbrajanje, linearna kombinacija i skalarni produkt dva vektora*)
a + b
2 * a - 3 * b
a.b
```

{a1 + b1, a2 + b2, a3 + b3}

{2 a1 - 3 b1, 2 a2 - 3 b2, 2 a3 - 3 b3}

a1 b1 + a2 b2 + a3 b3

```
(* norma (duljina) vektora - po formuli ili koristeci ugradjenu funkciju *)
Sqrt[a.a]
Norm[a]
```

$\sqrt{a1^2 + a2^2 + a3^2}$

$\sqrt{\text{Abs}[a1]^2 + \text{Abs}[a2]^2 + \text{Abs}[a3]^2}$

```
(* vektorski produkt *)
Cross[a, b]
```

{-a3 b2 + a2 b3, a3 b1 - a1 b3, -a2 b1 + a1 b2}

```
(* pozivanje paketa <<Calculus`VectorAnalysis` za koristenje slozenijih naredbi *)
<< VectorAnalysis`
c = {c1, c2, c3}
ScalarTripleProduct[a, b, c]
```

{c1, c2, c3}

-a3 b2 c1 + a2 b3 c1 + a3 b1 c2 - a1 b3 c2 - a2 b1 c3 + a1 b2 c3

```
(* Primjene u geometriji *)

(* ortogonalnost -->
 dva vektora su ortogonalna (okomita) ako je njihov skalarni produkt jednak nuli *)
a = {0, 5, 1, 2};
b = {3, 0, 4, -2};
SameQ[a.b, 0]
```

True

```
(* zakljucak: zadani vektori su okomiti *)

(* kut između dva vektora *)
a = {a1, a2, a3};
b = {b1, b2, b3};
kut = ArcCos[(a.b) / (Sqrt[a.a] * Sqrt[b.b])]
```

$$\text{ArcCos}\left[\frac{a1\ b1 + a2\ b2 + a3\ b3}{\sqrt{a1^2 + a2^2 + a3^2}\ \sqrt{b1^2 + b2^2 + b3^2}}\right]$$

```
(* povrsina paralelograma razapetih sa vektorima a i b *)
a = {a1, a2, a3};
b = {b1, b2, b3};
produkt = Cross[a, b]
povrsina = Sqrt[produkt.produkt]
```

{-a3 b2 + a2 b3, a3 b1 - a1 b3, -a2 b1 + a1 b2}

$\sqrt{(-a2\ b1 + a1\ b2)^2 + (a3\ b1 - a1\ b3)^2 + (-a3\ b2 + a2\ b3)^2}$

```
(* komplanarnost tri vektora i volumen paralelepipeda razapetog sa tri vektora *)
```

```
<< VectorAnalysis`
a = {a1, a2, a3};
b = {b1, b2, b3};
c = {c1, c2, c3};
mjesoviti = ScalarTripleProduct[a, b, c]
Volumen = Abs[mjesoviti]
```

-a3 b2 c1 + a2 b3 c1 + a3 b1 c2 - a1 b3 c2 - a2 b1 c3 + a1 b2 c3

Abs[-a3 b2 c1 + a2 b3 c1 + a3 b1 c2 - a1 b3 c2 - a2 b1 c3 + a1 b2 c3]

```
(* ako je mjesoviti produkt jednak 0 tada su vektori komplanarni *)
<< VectorAnalysis`
u = {1, -1, 0};
v = {0, 3, 4};
w = {2, 3, 1};
mjesoviti = ScalarTripleProduct[u, v, w]
SameQ[mjesoviti, 0]
```

-17

False

```
(* zakljucak: zadani vektori nisu komplanarni *)
```

```
(* 2. Algebra matrica *)

(* zadavanje matrice *)
A = {{a, b}, {c, d}}
```

{{a, b}, {c, d}}

```
(* ispis matričnog oblika matrice *)
MatrixForm[A]
```

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

```
(* drugi redak matrice A *)
A[[2]]
```

{c, d}

```
(* element matrice A u prvom redku i drugom stupcu *)
A[[1, 2]]
```

b

```
(* zbroj matrica *)
B = {{s, t}, {p, q}};
MatrixForm[A + B]
```

$$\begin{pmatrix} a+s & b+t \\ c+p & d+q \end{pmatrix}$$

```
(* linearna kombinacija matrica *)
MatrixForm[2 A - B]
```

$$\begin{pmatrix} 2a-s & 2b-t \\ 2c-p & 2d-q \end{pmatrix}$$

```
(* produkt matrica *)
MatrixForm[A.B]
```

$$\begin{pmatrix} bp+as & bq+at \\ dp+cs & dq+ct \end{pmatrix}$$

```
(* potencija matrice A *)
MatrixPower[A, 2]
MatrixForm[MatrixPower[A, 2]]
```

$\{\{a^2+bc, ab+bd\}, \{ac+cd, bc+d^2\}\}$

$$\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

```
(* jedinična matrica reda 3 *)
IdentityMatrix[3]
MatrixForm[IdentityMatrix[3]]
```

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(* transponirana matrica od A *)
Transpose[A]
MatrixForm[Transpose[A]]
```

{{a, c}, {b, d}}

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

```
(* determinanta od A *)
Det[A]
```

$-b\,c + a\,d$

```
(* inverzna matrica od A *)
Inverse[A]
```

$$\left\{\left\{\frac{d}{-b\,c+a\,d}, -\frac{b}{-b\,c+a\,d}\right\}, \left\{-\frac{c}{-b\,c+a\,d}, \frac{a}{-b\,c+a\,d}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[Inverse[A]]
```

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{-b\,c+a\,d} & -\frac{b}{-b\,c+a\,d} \\ -\frac{c}{-b\,c+a\,d} & \frac{a}{-b\,c+a\,d} \end{pmatrix}$$

```
(* trag matrice A *)
Tr[A]
```

$a + d$

```
(*  3. Svojstvene vrijednosti i vektori *)


(* lista svojstvenih vrijednosti od A *)
A = {{a, b}, {c, d}};
Eigenvalues[A]
```

$$\left\{\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\right\}$$

```
(* dohvat svake pojedine svojstvene vrijednosti *)
Vrijednosti = Eigenvalues[A]
PrvaVr = Vrijednosti[[1]]
DrugaVr = Vrijednosti[[2]]
```

$$\left\{\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

```
(* drugi način nalazenja svojstvenih vrijednosti
 pomoću karakterističnog polinoma tj. "pjeske" po definicji *)
(* karakteristični polinom matrice A ispisan po varijabli t *)
CarPol = CharacteristicPolynomial[A, t]
```

$$-b\,c+a\,d-a\,t-d\,t+t^2$$

```
(* računanje nultočaka jednad□be karakterističnog polinoma *)
Roots[CarPol == 0, t]
```

$$t == \frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\ ||\ t == \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

```
(* karakteristični polinom matrice A ispisan po
 varijabli t ali po definiciji karakterističnog polinoma*)
Polinom = Det[A - t * IdentityMatrix[2]]
Roots[Polinom == 0, t]
```

$$-b\,c+a\,d-a\,t-d\,t+t^2$$

$$t == \frac{1}{2}\left(a+d-\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)\ ||\ t == \frac{1}{2}\left(a+d+\sqrt{a^2+4\,b\,c-2\,a\,d+d^2}\right)$$

```
(* kako vidimo za matrice sa općim elementima
 izrazi za svojstvene vrijednosti su komplicirani,
pa ako zelimo raditi sa pripadnim svojstvenim vektorima bilo
 bi dobro matricu A zadati sto je moguće konkretnije *)
A = {{1, 4}, {2, 3}}
MatrixForm[A]
Eigenvalues[A]
```

{{1, 4}, {2, 3}}

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

{5, -1}

```
(* svojstveni vektori *)
Eigenvectors[A]
```

{{1, 1}, {-2, 1}}

```
(* dohvat svakog pojedinog svojstvenog vektora *)
Vektori = Eigenvectors[A]
PrviVekt = Vektori[[1]]
DrugiVektor = Vektori[[2]]
```

{{1, 1}, {-2, 1}}

{1, 1}

{-2, 1}

```
(* drugi način trazenja svojstvenih vektora pomoću jezgre matrice A-
 t*I to jest po definicji svojstvenih vrijednosti *)
SvojVrijednosti = Eigenvalues[A];
PrvaVr = SvojVrijednosti[[1]];
DrugaVr = SvojVrijednosti[[2]];
```

```
PrviVektor = NullSpace[A - PrvaVr * IdentityMatrix[2]]
DrugiVektor = NullSpace[A - DrugaVr * IdentityMatrix[2]]
MatrixForm[PrviVektor[[1]]]
MatrixForm[DrugiVektor[[1]]]
```

{{1, 1}}

{{-2, 1}}

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
(* automatski i najbrzi način dobivanja svojstvenih vrijednosti i vektora *)
(* zajednička lista svojstvenih vrijednosti i vektora *)
sys = Eigensystem[A]
```

{{5, -1}, {{1, 1}, {-2, 1}}}

```
(* izdvajanje liste svojstvenih vrijednosti iz ukupne liste *)
sys[[1]]
```

{5, -1}

```
(* izdvajanje liste svojstvenih vektora iz ukupne liste *)
sys[[2]]
```

{{1, 1}, {-2, 1}}

```
(* dohvat svojstvenih vrijednosti *)
sys[[1, 1]]
sys[[1, 2]]
```

5

-1

```
(* dohvat svakog pojedinog svojstvenog vektora *)
MatrixForm[sys[[2, 1]]]
MatrixForm[sys[[2, 2]]]
```

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

```
(* 4. Algebarski izrazi i jednadzbe *)
```

```
(* Kompleksni brojevi *)
Clear[z, w]
z = 2 - 3 * I
w = 3 + 4 * I
z + w
z * w
Re[z]
Im[z]
```

$2 - 3 i$

$3 + 4 i$

$5 + i$

$18 - i$

2

-3

```
Abs[3^(1/2) + I]
Arg[3^(1/2) + I]
Conjugate[3^(1/2) + I]
```

2

$\frac{\pi}{6}$

$-i + \sqrt{3}$

```
(* Manipulacije sa algebarskim izrazima*)
(* Faktoriziranje i defaktoriziranje polinoma *)
Factor[x^3 - 2 * x^2 + x - 2]
```

$(-2 + x)\ (1 + x^2)$

```
Expand[(x - 1) * (x ^2 + x - 1)]
```

$1 - 2 x + x^3$

```
(* sređuje algebarski izraz u obliku jednog razlomka *)
Together[2 / x - (3 x - 1) / (x^2 - 1) + 2 x]
```

$$\frac{-2 + x - 3 x^2 + 2 x^4}{x\ (-1 + x^2)}$$

```
(* rastavlja slozeni razlomak na proste razlomke *)
Apart[(2 x - 1) / ((x^2 - 1) * x)]
```

$$\frac{1}{2\ (-1 + x)} + \frac{1}{x} - \frac{3}{2\ (1 + x)}$$

```
(* faktorizira i brojnik i nazivnik te pojednostavljuje cijeli razlomak *)
Cancel[(x^3 - 1) / (x^2 - 1)]
```

$$\frac{1 + x + x^2}{1 + x}$$

```
(* uvrstavanje u izraz konkretne vrijednosti za x *)
izraz = (2 * x + x^2) (x^3 - 1)
izraz /. x → 2
```

$(2 x + x^2)\ (-1 + x^3)$

56

```
(* Rjesavanje algebarskih i transcedentnih jedandzbi *)
(* egzaktno rjesavanje algebarske jednadzbe sa polinomom po varijabli x *)
Roots[ x^2 - 4 * x - 4 == 0, x]
```

$x == 2\left(1-\sqrt{2}\right) \; || \; x == 2\left(1+\sqrt{2}\right)$

```
(* numeričko rjesavanje algebarske jednadzbe sa polinomom po varijabli x *)
NRoots[ x^2 - 4 * x - 4 == 0, x]
```

$x == -0.828427 \; || \; x == 4.82843$

```
(* egzaktno rjesavanje algebarske
 jednadzbe sa algebarskim izrazima po varijabli x *)
Solve[2 / x + (3 x - 1) / x^2 + 2 x == 0, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{\left(9+\sqrt{831}\right)^{1/3}}{6^{2/3}} - \frac{5}{\left(6\left(9+\sqrt{831}\right)\right)^{1/3}}\right\},\right.$$

$$\left\{x \to -\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(9+\sqrt{831}\right)^{1/3}}{2\times 6^{2/3}} + \frac{5\left(1-i\sqrt{3}\right)}{2\left(6\left(9+\sqrt{831}\right)\right)^{1/3}}\right\},$$

$$\left.\left\{x \to -\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(9+\sqrt{831}\right)^{1/3}}{2\times 6^{2/3}} + \frac{5\left(1+i\sqrt{3}\right)}{2\left(6\left(9+\sqrt{831}\right)\right)^{1/3}}\right\}\right\}$$

```
NSolve[2 / x + (3 x - 1) / x^2 + 2 x == 0, x]
```

$\{\{x \to -0.0984722 + 1.59031\, i\}, \{x \to -0.0984722 - 1.59031\, i\}, \{x \to 0.196944\}\}$

```
(* računanje konačnih suma *)
Sum[1 / k^2, {k, 1, 10}]
NSum[1 / k^2, {k, 1, 10}]
```

$$\frac{1968329}{1270080}$$

1.54977

```
(* suma beskonacnih redova *)
Sum[1 / k^2, {k, 1, Infinity}]
NSum[1 / k^2, {k, 1, Infinity}]
```

$$\frac{\pi^2}{6}$$

1.64493

```
(* 5. Linearni sustavi *)

(* rjesavanje linearnih sustava pomocu naredbe Solve *)
Solve[{a1 * x + a2 * y + a3 * z == d,
  b1 * x + b2 * y + b3 * z == e, c1 * x + c2 * y + c3 * z == f }, {x, y, z}]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{b3\,c2\,d - b2\,c3\,d - a3\,c2\,e + a2\,c3\,e + a3\,b2\,f - a2\,b3\,f}{-a3\,b2\,c1 + a2\,b3\,c1 + a3\,b1\,c2 - a1\,b3\,c2 - a2\,b1\,c3 + a1\,b2\,c3},\right.\right.$$
$$y \to -\frac{b3\,c1\,d - b1\,c3\,d - a3\,c1\,e + a1\,c3\,e + a3\,b1\,f - a1\,b3\,f}{a3\,b2\,c1 - a2\,b3\,c1 - a3\,b1\,c2 + a1\,b3\,c2 + a2\,b1\,c3 - a1\,b2\,c3},$$
$$\left.\left.z \to -\frac{-b2\,c1\,d + b1\,c2\,d + a2\,c1\,e - a1\,c2\,e - a2\,b1\,f + a1\,b2\,f}{a3\,b2\,c1 - a2\,b3\,c1 - a3\,b1\,c2 + a1\,b3\,c2 + a2\,b1\,c3 - a1\,b2\,c3}\right\}\right\}$$

```
(* matricno rjesavanje linearnih sustava *)
(* kreirajmo matricu sustava M *)
M = {{a1, a2, a3}, {b1, b2, b3}, {c1, c2, c3}};
MatrixForm[M]
```

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{pmatrix}$$

```
(* kreirajmo slobodni stupac *)
Slobodni = {{d}, {e}, {f}};
MatrixForm[Slobodni]
```

$$\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}$$

```
(* rjesenje je produkt inverza od M  sa slobodnim stupcem  *)
Inverse[M].Slobodni
```

$$\left\{\left\{\frac{b3\,c2\,d - b2\,c3\,d - a3\,c2\,e + a2\,c3\,e + a3\,b2\,f - a2\,b3\,f}{a3\,b2\,c1 - a2\,b3\,c1 - a3\,b1\,c2 + a1\,b3\,c2 + a2\,b1\,c3 - a1\,b2\,c3}\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{b3\,c1\,d - b1\,c3\,d - a3\,c1\,e + a1\,c3\,e + a3\,b1\,f - a1\,b3\,f}{-a3\,b2\,c1 + a2\,b3\,c1 + a3\,b1\,c2 - a1\,b3\,c2 - a2\,b1\,c3 + a1\,b2\,c3}\right\},$$
$$\left.\left\{\frac{b2\,c1\,d - b1\,c2\,d - a2\,c1\,e + a1\,c2\,e + a2\,b1\,f - a1\,b2\,f}{a3\,b2\,c1 - a2\,b3\,c1 - a3\,b1\,c2 + a1\,b3\,c2 + a2\,b1\,c3 - a1\,b2\,c3}\right\}\right\}$$

```
(* rjesavanje sustava Gaussovom metodom eliminacije *)

(* kreirajmo prosirenu matricu sustava MP *)
MP = {{a1, a2, a3, d}, {b1, b2, b3, e}, {c1, c2, c3, f}};
MatrixForm[MP]
```

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & d \\ b1 & b2 & b3 & e \\ c1 & c2 & c3 & f \end{pmatrix}$$

```
(* izračunajmo reducirani oblik matrice MP *)
Reducirana = RowReduce[MP]
```

$$\left\{\left\{1, 0, 0, \frac{-b3\,c2\,d + b2\,c3\,d + a3\,c2\,e - a2\,c3\,e - a3\,b2\,f + a2\,b3\,f}{-a3\,b2\,c1 + a2\,b3\,c1 + a3\,b1\,c2 - a1\,b3\,c2 - a2\,b1\,c3 + a1\,b2\,c3}\right\},\right.$$
$$\left\{0, 1, 0, \frac{-b3\,c1\,d + b1\,c3\,d + a3\,c1\,e - a1\,c3\,e - a3\,b1\,f + a1\,b3\,f}{a3\,b2\,c1 - a2\,b3\,c1 - a3\,b1\,c2 + a1\,b3\,c2 + a2\,b1\,c3 - a1\,b2\,c3}\right\},$$
$$\left.\left\{0, 0, 1, \frac{-b2\,c1\,d + b1\,c2\,d + a2\,c1\,e - a1\,c2\,e - a2\,b1\,f + a1\,b2\,f}{-a3\,b2\,c1 + a2\,b3\,c1 + a3\,b1\,c2 - a1\,b3\,c2 - a2\,b1\,c3 + a1\,b2\,c3}\right\}\right\}$$

```
MatrixForm[Reducirana]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-b3\,c2\,d+b2\,c3\,d+a3\,c2\,e-a2\,c3\,e-a3\,b2\,f+a2\,b3\,f}{-a3\,b2\,c1+a2\,b3\,c1+a3\,b1\,c2-a1\,b3\,c2-a2\,b1\,c3+a1\,b2\,c3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-b3\,c1\,d+b1\,c3\,d+a3\,c1\,e-a1\,c3\,e-a3\,b1\,f+a1\,b3\,f}{a3\,b2\,c1-a2\,b3\,c1-a3\,b1\,c2+a1\,b3\,c2+a2\,b1\,c3-a1\,b2\,c3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b2\,c1\,d+b1\,c2\,d+a2\,c1\,e-a1\,c2\,e-a2\,b1\,f+a1\,b2\,f}{-a3\,b2\,c1+a2\,b3\,c1+a3\,b1\,c2-a1\,b3\,c2-a2\,b1\,c3+a1\,b2\,c3} \end{pmatrix}$$

```
(* rjesenje sustava je zadnji stupac ove matrice *)
```

```
(* prosirenu matricu sustava smo mogli dobiti i dodavanje
 slobodnog stupca matrici sustava M pomocu funkcije "AppendRows"
 koja se nalazi u paketu <<LinearAlgebra`MatrixManipulation`  *)
<< LinearAlgebra`MatrixManipulation`
MP = AppendRows[M, Slobodni]
MatrixForm[MP]
```

{{a1, a2, a3, d}, {b1, b2, b3, e}, {c1, c2, c3, f}}

$$\begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 & d \\ b1 & b2 & b3 & e \\ c1 & c2 & c3 & f \end{pmatrix}$$

```
(* Gaussove elementarne transformacije nad redcima matrice MP *)
Reducirana = RowReduce[MP]
MatrixForm[Reducirana]
```

$$\left\{\left\{1, 0, 0, \frac{-b3\,c2\,d+b2\,c3\,d+a3\,c2\,e-a2\,c3\,e-a3\,b2\,f+a2\,b3\,f}{-a3\,b2\,c1+a2\,b3\,c1+a3\,b1\,c2-a1\,b3\,c2-a2\,b1\,c3+a1\,b2\,c3}\right\},\right.$$
$$\left\{0, 1, 0, \frac{-b3\,c1\,d+b1\,c3\,d+a3\,c1\,e-a1\,c3\,e-a3\,b1\,f+a1\,b3\,f}{a3\,b2\,c1-a2\,b3\,c1-a3\,b1\,c2+a1\,b3\,c2+a2\,b1\,c3-a1\,b2\,c3}\right\},$$
$$\left.\left\{0, 0, 1, \frac{-b2\,c1\,d+b1\,c2\,d+a2\,c1\,e-a1\,c2\,e-a2\,b1\,f+a1\,b2\,f}{-a3\,b2\,c1+a2\,b3\,c1+a3\,b1\,c2-a1\,b3\,c2-a2\,b1\,c3+a1\,b2\,c3}\right\}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-b3\,c2\,d+b2\,c3\,d+a3\,c2\,e-a2\,c3\,e-a3\,b2\,f+a2\,b3\,f}{-a3\,b2\,c1+a2\,b3\,c1+a3\,b1\,c2-a1\,b3\,c2-a2\,b1\,c3+a1\,b2\,c3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-b3\,c1\,d+b1\,c3\,d+a3\,c1\,e-a1\,c3\,e-a3\,b1\,f+a1\,b3\,f}{a3\,b2\,c1-a2\,b3\,c1-a3\,b1\,c2+a1\,b3\,c2+a2\,b1\,c3-a1\,b2\,c3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b2\,c1\,d+b1\,c2\,d+a2\,c1\,e-a1\,c2\,e-a2\,b1\,f+a1\,b2\,f}{-a3\,b2\,c1+a2\,b3\,c1+a3\,b1\,c2-a1\,b3\,c2-a2\,b1\,c3+a1\,b2\,c3} \end{pmatrix}$$

```
(* Primjer: rijesimo sustav
                     -5y-15z+4u=7,
                     x-2y-4z +3u=6,
                     2x+  4z+ 2u=1,
                     3x+4y+18z+u=4.    *)
(* prosirena matrica sustava jednaka je *)
MP = {{0, -5, -15, 4, 7}, {1, -2, -4, 3, 6}, {2, 0, 4, 2, 1}, {3, 4, 18, 1, 4}};
MatrixForm[MP]
```

$$\begin{pmatrix} 0 & -5 & -15 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 18 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

```
(* Gaussove elementarne transformacije nad redcima matrice MP *)
Reducirana = RowReduce[MP];
MatrixForm[Reducirana]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -\frac{25}{4} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
(* dobili smo nul redak --> sustav ima beskonacno rjesenja,
odnosno u nasem slucaju ovisi o jednom parametru,
stoga cemo rijesiti sustav po preostalim retcima *)
```

$$\text{Solve}\left[\left\{x+2\,z==-\frac{25}{4},\ y+3\,z==4,\ u==\frac{27}{4}\right\},\ \{x,\ y,\ z,\ u\}\right]$$

Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. ≫

$$\left\{\left\{x\to-\frac{25}{4}-2\,z,\ y\to 4-3\,z,\ u\to\frac{27}{4}\right\}\right\}$$

```
(* 6. Osnove realnih funkcija *)

(* Popis elementarnih funkcija *)
x^n
x^(m/n)
Abs[x]
Exp[x]
Log[x]
Log[a, x]
Sin[x]
Cos[x]
Tan[x]
Cot[x]
Sinh[x]
Cosh[x]
Tanh[x]
Coth[x]
```

x^n

$x^{m/n}$

Abs[x]

e^x

Log[x]

$$\frac{\text{Log}[x]}{\text{Log}[a]}$$

Sin[x]

Cos[x]

Tan[x]

Cot[x]

Sinh[x]

Cosh[x]

Tanh[x]

Coth[x]

```
(* Inverzne funkcija: *)
```

```
ArcSin[x]
ArcCos[x]
ArcTan[x]
ArcCot[x]
ArcSinh[x]
ArcCosh[x]
ArcTanh[x]
ArcCoth[x]
```

```
ArcSin[x]

ArcCos[x]

ArcTan[x]

ArcCot[x]

ArcSinh[x]

ArcCosh[x]

ArcTanh[x]

ArcCoth[x]
```

```
(* definiranje nove funkcije f(x) po varijabli x *)
f[x_] = x^2 + 2 * x + Sin[x]
```

$2x + x^2 + \mathrm{Sin}[x]$

```
(* egzaktna vrijednost za f(3) i numerički aproksimirana vrijednost za f(3) *)
f[3]
N[f[3]]
```

```
15 + Sin[3]

15.1411
```

```
(* definiranje dvodjelne funkcije *)
(* brisanje bilo kakve vrijednosti na simbolu f *)
Clear[f]
f[x_] := x^3 /; x > 0
f[x_] := -x /; x ≤ 0

(* jedan pogled za zadanu funkciju *)
?f
```

```
Global`f
```

$f[x\_] := x^3 \;/;\; x > 0$

$f[x\_] := -x \;/;\; x \le 0$

```
(* provjera *)
f[2]
f[-2]
```

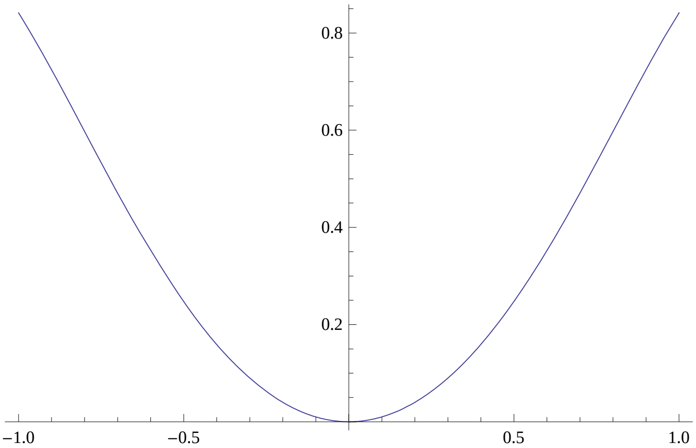
```
8

2
```

```
(* kompozicija funkcija *)
Clear[h]
h[x_] = Exp[Log[2 x]]
h[x / 2]
```

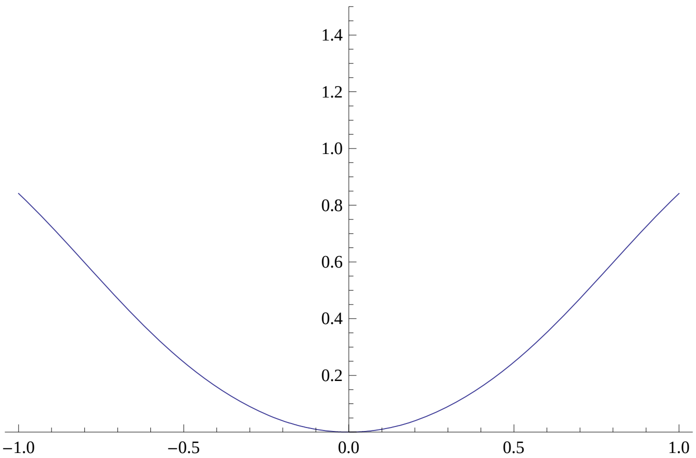
2 x

x

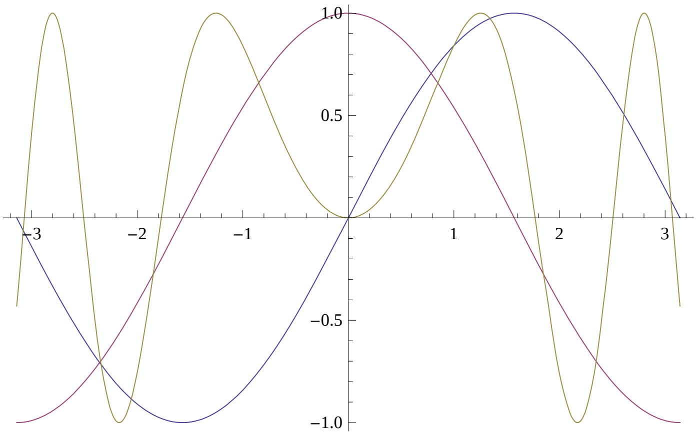
```
(* jednostavno crtanje funkcija uz definirani interval po x *)
Plot[Sin[x^2], {x, -1, 1}]
```




```
(* jednostavno crtanje funkcija uz definirane intervale po x i y *)
Plot[Sin[x^2], {x, -1, 1}, PlotRange → {0, 1.5}]
```



```
(* crtanje vise funkcija na istom grafu *)
Plot[{Sin[x], Cos[x], Sin[x^2]}, {x, -Pi, Pi}]
```



```
(*  7. Racun funkcija jedne varijable *)

(* računanje limesa *)
f[x_] = (x^2 - 1) / (x^3 - 2 * x + 5)
Limit[f[x], x → 2]
```

$$\frac{-1+x^2}{5-2x+x^3}$$

$$\frac{1}{3}$$

```
Clear[f]
f[x_] = (x^2 + x + 1) ^ (1 / 2) - x
Limit[f[x], x → Infinity]
```

$$-x+\sqrt{1+x+x^2}$$

$$\frac{1}{2}$$

```
Clear[f]
f[x_] = (Exp[x]) * x
Limit[f[x], x → -Infinity]
```

$$e^x x$$

0

```
(* računanje jednostranih limesa *)
Clear[f]
f[x_] = (x^(1 / 2)) * Log[x]
Limit[f[x], x → 0, Direction → 1]
```

$\sqrt{x}$ Log[x]

0

```
Clear[f]
f[x_] = (1 - x^2) / (1 - x) ^ (1 / 2)
Limit[f[x], x → 0, Direction → -1]
```

$$\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}$$

1

```
(* prva i druga derivacija *)
Clear[g]
g[x_] = Sin[x]
g'[x]
g''[x]
```

Sin[x]

Cos[x]

-Sin[x]

```
(* ili pomoću simbola D *)
D[g[x], x]
D[g[x], {x, 2}]
D[g[x], {x, n}]
```

Cos[x]

-Sin[x]

$\text{Sin}^{(n)}[x]$

```
(* svojstva derivacija *)
Clear[f, g]
D[f[x] + g[x], x]
D[f[x] * g[x], x]
Drazlomak = D[f[x] / g[x], x]
Together[Drazlomak]
D[g[f[x]], x]
```

$f'[x] + g'[x]$

$g[x]\, f'[x] + f[x]\, g'[x]$

$$\frac{f'[x]}{g[x]} - \frac{f[x]\, g'[x]}{g[x]^2}$$

$$\frac{g[x]\, f'[x] - f[x]\, g'[x]}{g[x]^2}$$

$f'[x]\, g'[f[x]]$

```
(* dokazivanje derivacije po definicji *)
(* hoćemo pokazati po definicji da je derivacija od x^3 jednaka 3x^2 *)
Clear[f]
f[x_] = x^3
Limit[(f[x + h] - f[x]) / h, h → 0]
```

x^3

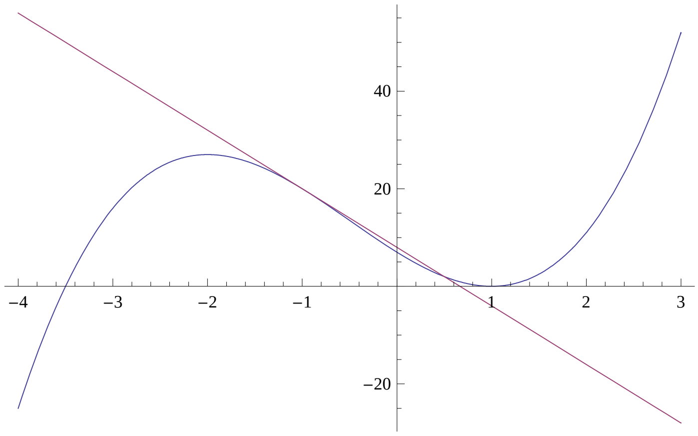
$3\,x^2$

```
(* računanje i crtanje tangente na danu funkciju u danoj točki *)
(* zadajmo konkretnu funkciju f(x) i tocku x=-1 *)
Clear[f, tan]
f[x_] = 2 x^3 + 3 x^2 - 12 x + 7
tan[x_] = f'[-1] (x - (-1)) + f[-1]
```

$7 - 12\,x + 3\,x^2 + 2\,x^3$

$20 - 12\,(1 + x)$

```
(* treba ih zajedno prikazati u istom koordinatnom sustavu *)
Plot[{f[x], tan[x]}, {x, -4, 3}]
```




```
(* implicitno deriviranje funkcije y
   (x) koja je zadana implicitnom jednadzbom F(x,y)=0 *)
Clear[F]
F[x_, y_] = 2 x^2 - 2 x * y + y^2 + x + 2 y + 1
jednakost = F[x, y] == 0
deriv = Dt[jednakost, x]
```

$1 + x + 2 x^2 + 2 y - 2 x y + y^2$

$1 + x + 2 x^2 + 2 y - 2 x y + y^2 == 0$

$1 + 4 x - 2 y + 2 \mathrm{Dt}[y, x] - 2 x \mathrm{Dt}[y, x] + 2 y \mathrm{Dt}[y, x] == 0$

```
rezultat = Solve[deriv, Dt[y, x]]
```

$\left\{\left\{\mathrm{Dt}[y, x] \to \frac{1 + 4 x - 2 y}{2 (-1 + x - y)}\right\}\right\}$

```
(* dobili smo trodimenzionalnu listu iz koje treba "izvući" rjesenje  *)
rezultat[[1]]
rezultat[[1, 1]]
rezultat[[1, 1, 2]]
```

$\left\{\mathrm{Dt}[y, x] \to \frac{1 + 4 x - 2 y}{2 (-1 + x - y)}\right\}$

$\mathrm{Dt}[y, x] \to \frac{1 + 4 x - 2 y}{2 (-1 + x - y)}$

$\frac{1 + 4 x - 2 y}{2 (-1 + x - y)}$

```
(* neodređeni integrali funkcija *)
Clear[f, rjesenje]
f[x_] = (x^3) * Exp[x]
Integrate[f[x], x]
```

$e^x x^3$

$e^x \left(-6 + 6 x - 3 x^2 + x^3\right)$

```
(* određeni integrali *)
Clear[f]
f[x_] = (4 - x^2)^(1 / 2)
Integrate[f[x], {x, 1, 2}]
```

$\sqrt{4-x^2}$

$\frac{1}{6}\left(-3\sqrt{3}+4\pi\right)$

```
NIntegrate[f[x], {x, 1, 2}]
```

1.22837

```
(* Taylorovi redovi *)
Clear[f]
Series[f[x], {x, a, 3}]
```

$f[a]+f'[a]\,(x-a)+\frac{1}{2}f''[a]\,(x-a)^2+\frac{1}{6}f^{(3)}[a]\,(x-a)^3+O[x-a]^4$

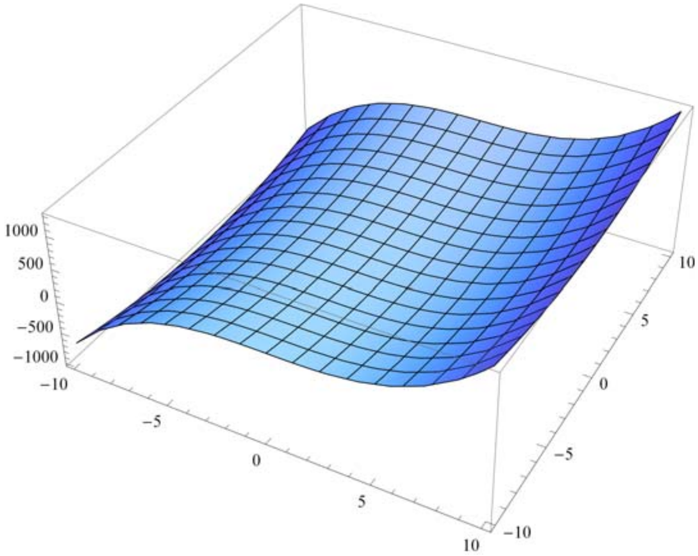
```
Series[Sin[x], {x, 0, 5}]
```

$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+O[x]^6$

```
(*  8. Račun funkcija više varijabli *)

(* zadavanje funkcija dviju varijabli *)
f[x_, y_] = x^3 + 3 y^2
```

$x^3 + 3\, y^2$

```
(* jednostavno crtanje grafa funkcija dviju varijabli *)
Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]
```




```
(* parcijalne derivacije prvog reda *)
D[f[x, y], x]
D[f[x, y], y]
```

$3\, x^2$

$6\, y$

```
(* parcijalne derivacije drugog reda *)
D[f[x, y], {x, 2}]
D[f[x, y], {y, 2}]
D[f[x, y], x, y]
```

$6\, x$

6

0

```
(* tangencijalna ravnina funkcije f(x,y) u tocki (x0,y0) *)
f[x_, y_] = x^2 + y^2;
x0 = 1;
y0 = 1;

p[x_, y_] = D[f[x, y], x];
q[x_, y_] = D[f[x, y], y];
tangen[x_, y_] = p[x0, y0] * (x - x0) + q[x0, y0] * (y - y0) + f[x0, y0]
```

$2 + 2\, (-1 + x) + 2\, (-1 + y)$

```
(* drugi diferencijal *)
f[x_, y_] = x^2 y + y^2;
xx[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}];
yy[x_, y_] = D[f[x, y], {y, 2}];
xy[x_, y_] = D[f[x, y], x, y];
df2[x_, y_] = xx[x, y] * (dx)^2 + 2 * xy[x, y] * (dx) * (dy) + yy[x, y] * (dy)^2

(* drugi diferencijal u tocki (1,2) *)
df2[1, 2]
```

$2\,dy^2 + 4\,dx\,dy\,x + 2\,dx^2\,y$

$4\,dx^2 + 4\,dx\,dy + 2\,dy^2$

```
(* ekstremi funkcija dviju varijabli *)

f[x_, y_] = -2 x^2 + 4 x^2 y^2 - 2 y^2
```

$-2\,x^2 - 2\,y^2 + 4\,x^2\,y^2$

```
(* pronalazenje stacionarnih tocki *)
dfx = D[f[x, y], x];
dfy = D[f[x, y], y];
Solve[{dfx == 0, dfy == 0}, {x, y}]
```

$$\left\{\{x\to 0,\, y\to 0\},\, \left\{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}},\, y\to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\, \left\{x\to -\frac{1}{\sqrt{2}},\, y\to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\, \left\{x\to \frac{1}{\sqrt{2}},\, y\to -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\, \left\{x\to \frac{1}{\sqrt{2}},\, y\to \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}\right\}$$

```
(* klasifikacija ekstrema pomoću Hesseove
 matrice s drugim parcijalnim derivacijama *)
(* budući da imamo pet stacionarnih točaka treba
 definirati opći izraz za klasifikaciju *)

xx[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}];
yy[x_, y_] = D[f[x, y], {y, 2}];
xy[x_, y_] = D[f[x, y], x, y];
hess[x_, y_] = xx[x, y] * yy[x, y] - xy[x, y] * xy[x, y]
```

$-256\,x^2\,y^2 + \left(-4 + 8\,x^2\right)\left(-4 + 8\,y^2\right)$

```
(* provjera da neka od stacionarnih točaka nije ekstrem odnosno da je hess <0 *)
hess[0, 0]
```

$$\text{hess}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\text{hess}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\text{hess}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\text{hess}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

16

-64

-64

-64

-64

```
(* znači samo prva stacionarna točka je ekstrem, ostale nisu *)
(* treba jos ispitati radi li se o minimumu ili maksimumu *)
xx[0, 0]
```

-4

```
(* znači točka (0,0) je lokalni maksimum)


(* dvostruki integrali *)

(* neka je zadana funkcija f(x,y) i neka je
  podrucje integracije odredjeno krivuljama x=0, y=1 i y=x^2 *)

f[x_, y_] = y * Sin[x] - x * Sin[y]
```

y Sin[x] - x Sin[y]

```
(* integriranje u poretku (x,y) *)
Integrate[f[x, y], {x, 0, 1}, {y, x^2, 1}]
```

$$-\frac{512}{945}$$

```
(* integriranje u poretku (y,x) *)
```

$$\text{Integrate}\left[f[x, y], \{y, 0, 1\}, \left\{x, 0, \sqrt{y}\right\}\right]$$

$$-\frac{512}{945}$$

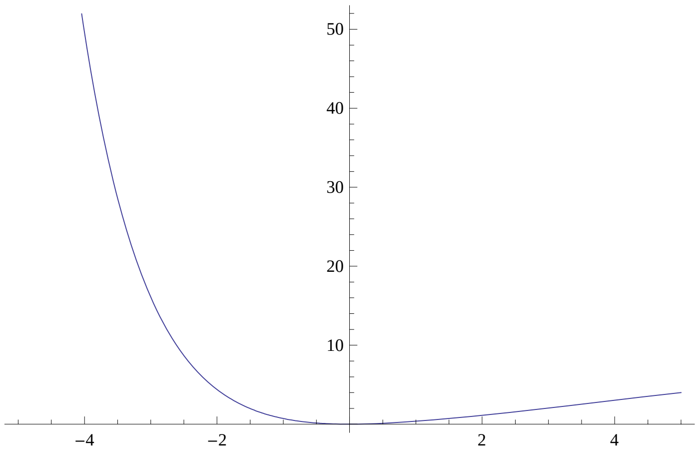
```
(* 9. Diferencijalne jednadzbe *)

(* Rjesimo jednostavnu linearnu diferencijalnu jednadzbu:  y' + y = x *)

DSolve[y'[x] + y[x] == x, y[x], x]
```

$\{\{y[x] \to -1 + x + e^{-x} C[1]\}\}$

```
(* Rjesimo tu istu jednadzbu y' + y = x uz uvjet y(0)=0 *)

DSolve[{y'[x] + y[x] == x, y[0] == 0}, y[x], x]
```

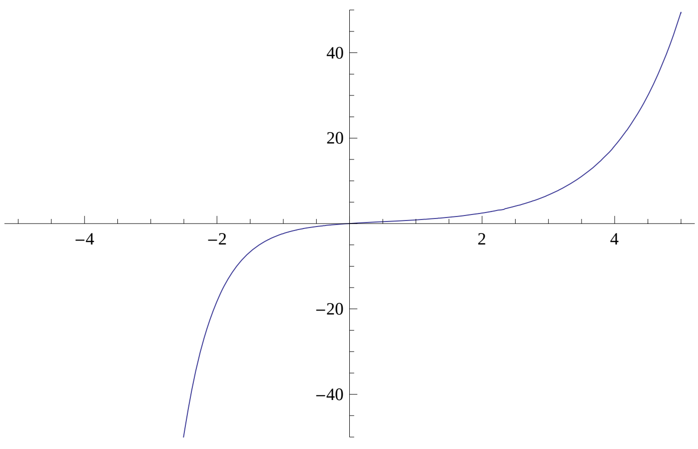
$\{\{y[x] \to e^{-x} (1 - e^{x} + e^{x} x)\}\}$

```
(* ukoliko zelimo nacrtati to rjesenje,
dohvacamo ga iz liste pomoću [1,1,2] i zatim nacrtamo *)

rjesenje = DSolve[{y'[x] + y[x] == x, y[0] == 0}, y[x], x];
Plot[rjesenje[[1, 1, 2]], {x, -5, 5}]
```




```
(* jos jedan primjer y'+2y=e^x uz uvjet y(0)=0 *)

rjesenje = DSolve[{y'[x] + 2 y[x] == E^x, y[0] == 0}, y[x], x]
Plot[rjesenje[[1, 1, 2]], {x, -5, 5}, PlotRange → {-50, 50}]
```

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{3} e^{-2x} \left(-1 + e^{3x}\right)\right\}\right\}$



```
(* Diferencijalne jednadzbe drugog reda *)
(* Primjer linearne homogene drugog reda
   sa konstantnim koeficijentima   3y'' + 2y'- 5y = 0 *)

DSolve[3 * y''[x] + 2 * y'[x] - 5 * y[x] == 0, y[x], x]
```

$\{\{y[x] \to e^{-5x/3} C[1] + e^{x} C[2]\}\}$

```
(* Linearna nehomogena drugog reda  y''-2y'+y = e^x ln(x) *)

DSolve[y''[x] - 2 * y'[x] + y[x] == Exp[x] * Log[x], y[x], x]
```

$\left\{\left\{y[x] \to e^{x} C[1] + e^{x} x\, C[2] + \frac{1}{4} e^{x} x^{2} (-3 + 2 \,\mathrm{Log}[x])\right\}\right\}$

```
(* Rijesimo jednadzbu 2y'' + 5y' + 5y = 0 uz pocetne uvjete y[0]=0,
y'[0]=0.5, te nacrtajmo rjesenje *)

rjesenje = DSolve[{2 * y''[x] + 5 * y'[x] + 5 * y[x] == 0, y[0] == 0, y'[0] == 1 / 2}, y[x], x]
Plot[rjesenje[[1, 1, 2]], {x, -2, 4}]
```

$\left\{\left\{y[x] \to \frac{2 e^{-5x/4} \,\mathrm{Sin}\left[\frac{\sqrt{15}\, x}{4}\right]}{\sqrt{15}}\right\}\right\}$