

# ***Mathematica***

## **- uvod za početnike -**

Područja:

- osnovne operacije s matricama -
- rješavanje linearnih sustava -
- definiranje funkcije, derivacija, tangenta -
- crtanje funkcija -

Sastavio: Tomislav Župan, 3.godina, smjer: Energetika



# Osnovne operacije s matricama, rješavanje linearnih sustava

- zbrajanje, linearna kombinacija, množenje, potenciranje, transponiranje, determinanta i inverz matrice, linearni sustavi

Za osnovni uvid što Mathematica sve može i kako se u njoj snalaziti pokrenite Help > Tutorial...

Svaku naredbu pokrećemo tako da kursor pomaknemo na željenu naredbu te pritisnemo Shift+Enter.

Osnovne informacije, kao i potrebne parametre svake ugrađene funkcije možemo saznati tako da, držeći kursor na toj funkciji, pritisnemo "F1"

Za upis matrice koristimo nekoliko načina. Najjednostavniji je:

$A = \{\{2, 7, 6\}, \{8, 4, 0\}, \{1, 5, 4\}\}$

$\{\{2, 7, 6\}, \{8, 4, 0\}, \{1, 5, 4\}\}$

Drugi način je desni klik > Create Table/Matrix/Palette... u kojem odaberete broj stupaca i redaka te popunjavate dobivenu matricu

$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$\{\{4, 3, 5\}, \{1, 2, 7\}, \{6, 7, 8\}\}$

Ispis pojedinog retka odnosno pojedinog elementa:

$A[[3]]$

$\{1, 5, 4\}$

$B[[2, 1]]$

1

Često zbog preglednosti koristimo naredbu MatrixForm[], koja nam rezultate ispisuje u matričnom obliku.

Nekoliko primjera zbrajanja ( $A+B$ ), linearne kombinacije ( $nA+mB$ ) i množenja ( $A.B$ )

$A + B$

$\{\{6, 10, 11\}, \{9, 6, 7\}, \{7, 12, 12\}\}$

**MatrixForm[3 A - 2 B]**

$$\begin{pmatrix} -2 & 15 & 8 \\ 22 & 8 & -14 \\ -9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

**MatrixForm[A.B]**

$$\begin{pmatrix} 51 & 62 & 107 \\ 36 & 32 & 68 \\ 33 & 41 & 72 \end{pmatrix}$$

Naredbe možemo spajati te ih pridruživati drugim varijablama. Znak ";" dodajemo iza onih naredbi za koje ne želimo da se ispiše rezultat (korisno kod npr. međurezultata). Naredbu N[što, na koliko decimala] koristimo kada želimo ispisati rezultat u decimalnom prikazu. Ponekad je korisno upotrebljavati znak "%", koji nam zamjenjuje posljednji rezultat.

Pokažimo nekoliko primjera s potenciranjem (MatrixPower[A, potencija] ili  $A^n$ ), transponiranjem (Transpose[A]), pronalaženjem inverza (Inverse[A]) i računanjem determinante (Det[A])

**MatrixForm[Inverse[A]]**

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{12} & -1 \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{12} & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{8} & -2 \end{pmatrix}$$

**MatrixForm[N[%]]**

$$\begin{pmatrix} 0.666667 & 0.0833333 & -1. \\ -1.33333 & 0.0833333 & 2. \\ 1.5 & -0.125 & -2. \end{pmatrix}$$

**Det[A + B]**

64

**F = A<sup>2</sup> - B;**

**G = Transpose[A] + Det[B] \* A;**

**MatrixForm[F.G]**

$$\begin{pmatrix} -21437 & -18461 & -6466 \\ -12523 & -24850 & -19145 \\ -7646 & -4203 & 7 \end{pmatrix}$$

**H = Inverse[%] + MatrixPower[Transpose[B], 2];**

**MatrixForm[N[H, 12]]**

$$\begin{pmatrix} 49.0009261203 & 47.9996864043 & 78.9977862828 \\ 52.9983178510 & 56.0005695095 & 88.0037834502 \\ 81.0015776233 & 74.9994136771 & 142.996537145 \end{pmatrix}$$

Linearne sustave rješavamo pomoću naredbe Solve[{jednadžbe odvojene zarezom}, {nepoznanice za koje želimo rješenje}]. Obratite pažnju da se znak jednakosti označava s "==".

**Solve[{3 a + 4 b - c == 8, 2 a - b + c == 9, a + b - c == 3}, {a, b, c}]**

{ {a → 4, b → -1, c → 0} }

**N[Solve[{33 x + 7 y - 5 z == 18, 2 x + 11 y + 7 z == 91, x - 56 y - 13 z == 13}, {x, y, z}]]**

{ {x → 4.36886, y → -4.53746, z → 18.882} }



# Definiranje funkcije, derivacija, tangenta

- definicija funkcije, definicija funkcije s uvjetima, derivacija funkcije, pronalaženje tangente funkcije u zadanoj točki i njene normale

Prilikom upisa određenih "matematičkih" simbola (npr.  $a^b$ ,  $\sum$ ,  $i$ ,  $\infty$ ) možete koristiti paletu znakova koja se nalazi uz desni rub ekrana. Ukoliko je nema, aktivirati je možete ovako: File > Palettes > 4 BasicInput (pogledajte i sadržaj ostalih paleta!).

Naravno, neke često korištene simbole možete upisivati i direktno s tipkovnice, npr. za upis znaka  $\pi$  pritisnite Esc, pa slovo p i ponovno Esc. Ako postavite kursor iznad određenog znaka u paleti BasicInput na desno, možete u njenom donjem rubu vidjeti način kako taj znak upisati pomoću tipkovnice.

Popis elementarnih funkcija možete pronaći na: Help > Help Browser... > Built-in Functions > Mathematical Functions > Elementary Functions

Argument trigonometrijskih (Sin[], Cos[],...), kao i rezultat ciklometrijskih funkcija (ArcCos[], ArcTan[],...) je u radijanima.

Naredbom Clear[] brišemo sadržaj varijable.

Potenciju možete pisati koristeći BasicInput paletu, ili pomoću znaka ^ (AltGr+3).

Na sljedećih nekoliko primjera pokažimo kako se definira funkcija (parametar funkcije se u uglatim zagradama piše s "donjom crticom \_"):

```
f[x_] = Sin[x] + 5 x^2
```

```
5 x^2 + Sin[x]
```

```
g[x_] = 6 Cos[x] - 9 x + 2
```

```
2 - 9 x + 6 Cos[x]
```

```
Clear[g]
```

```
g[x_] = e^x + Sinh[x]
```

```
e^x + Sinh[x]
```

Određivanje vrijednosti funkcije  $f[x]$  u nekoj točki a radimo jednostavnim pozivom te funkcije:  $f[a]$ . Ukoliko želimo dobiti aproksimiranu numeričku vrijednost koristimo već poznatu naredbu N[].

```
f[2]
```

```
20 + Sin[2]
```

```
N[f[2]]
```

```
20.9093
```

```
N[g[4]]
```

```
81.8881
```

```
f[g[x]]
```

```
Sin[ex + Sinh[x]] +  
5 (ex + Sinh[x])2
```

Ako hoćemo definirati funkciju koja je zadana različito za pojedine intervale, iza funkcije dodajemo znak `"/;"`, nakon kojeg upisujemo uvjet, odnosno interval. Pripazite, ovdje umjesto znaka `"="` pišemo `":="`.

```
Clear[h]
```

```
h[x_] := x^2 /; x ≥ 0
```

```
h[x_] := - (x^2) /; x < 0
```

```
h[2]
```

```
4
```

```
h[-2]
```

```
-4
```

Derivaciju možemo pisati na dva načina: naredbom `D[što deriviram, po kojoj varijabli deriviram]` ili, jednostavnije, pomoću znaka derivacije, `'`.

```
f' [x]
```

```
10 x + Cos[x]
```

```
D[g[x], x]
```

```
ex + Cosh[x]
```

```
f' [2]
```

```
20 + Cos[2]
```

```
N[f' [1] + g' [1], 10]
```

```
14.80166477
```

Iskoristimo dosad naučeno i pronađimo jednadžbu tangente i njene normale u točki  $x_1=1$  funkcije  $f(x)=x^2$ .

Prisjetimo se, prva derivacija funkcije  $f(x)$  u točki  $x_1$  nam daje koeficijent smjera ( $k$ ) tangente na  $y_1=f(x_1)$ . Jednadžba pravca (u našem slučaju tangente) s poznatim koeficijentom smjera i jednom točkom je  $y_t - y_1 = k(x_t - x_1)$ . Normala je pravac okomit na tangentu koji prolazi točkom dirališta tangente i funkcije  $f(x)$ :  $y_n - y_1 = -\frac{1}{k}(x_n - x_1)$ .

```
Clear[f]
x1 = 1;
f[x_] = x^2;
y1 = f[x1];
k = f'[x1];
Solve[yt - y1 == k (xt - x1), yt]      (* tangenta *)
Solve[yn - y1 == (-1 / k) (xn - x1), yn]  (* normala *)
```

```
{ {yt -> -1 + 2 xt} }
```

```
{ {yn -> 1/2 (3 - xn) } }
```



# Crtanje funkcija

## - crtanje funkcija, više funkcija na istom grafu, mijenjanje boja

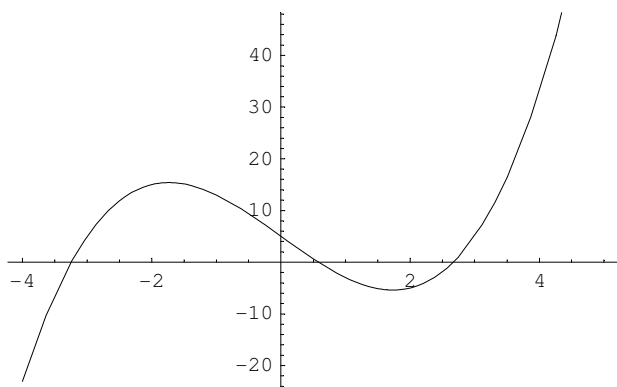
**Crtanje i grafičko predočavanje funkcija je jako važno i, pomoću Mathematice, vrlo zanimljivo.**

**Za crtanje koristimo naredbu `Plot[]`. Detaljan opis i nekoliko primjera možete pronaći u `Help > Help Browser... > Graphics and Sound > 2D Plots > Plot`. Za sve mogućnosti ove naredbe upišite `Options[Plot]`.**

**Osnovno definiranje izgleda ovako:** `Plot[funkcija, {parametar, donja granica, gornja granica}]`.

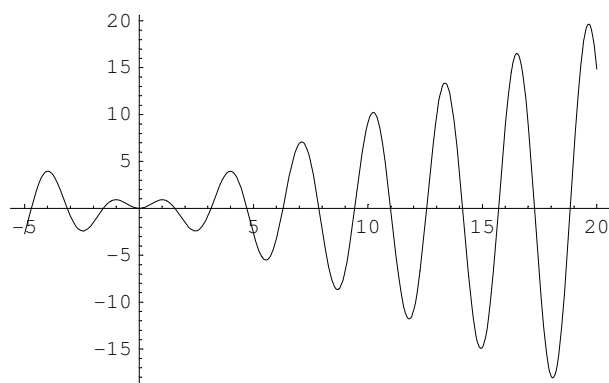
**Pokažimo nekoliko jednostavnih primjera:**

`Plot[x3 - 9 x + 5, {x, -4, 5}]`



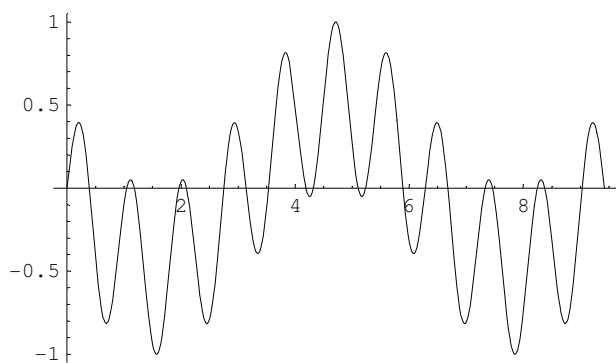
- Graphics -

`Plot[x * Sin[2 x], {x, -5, 20}]`



- Graphics -

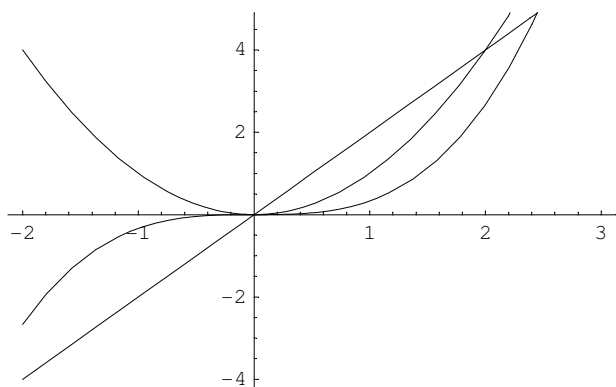
```
Plot[{Cos[4 x] * Sin[3 x]}, {x, 0, 3 π}]
```



- Graphics -

Ukoliko želimo, možemo više funkcija nacrtati na istom grafu. Funkcije tada pišemo u vitičastim zagradama i odvajamo ih zarezom.

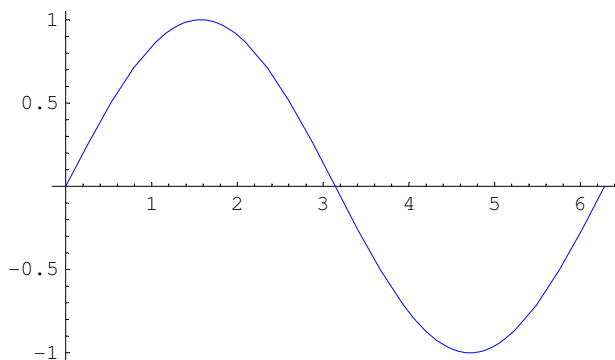
```
Plot[{ $\frac{x^3}{3}$ ,  $x^2$ ,  $2x$ }, {x, -2, 3}]
```



- Graphics -

Kada na grafu crtamo više funkcija, preglednije je da su različitih boja. To radimo tako da u naredbi Plot dodamo dio PlotStyle → RGBColor[a, b, c], gdje su a, b i c brojevi od 0 do 1 i označavaju postotak crvene, zelene i plave boje (Red, Green, Blue).

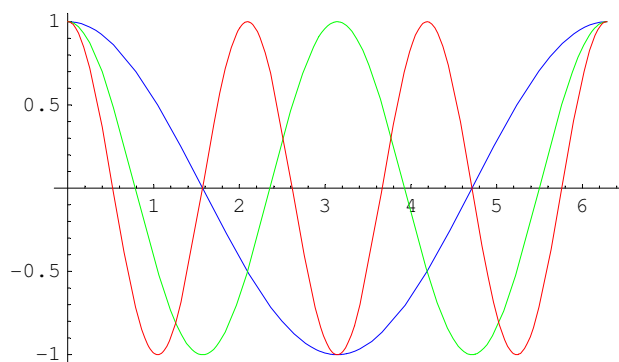
```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 π}, PlotStyle → RGBColor[0, 0, 1]]
```



- Graphics -



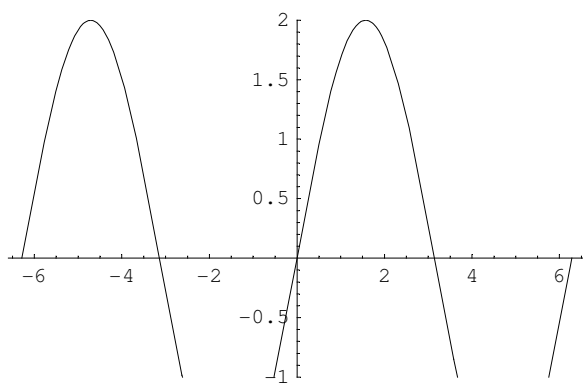
```
Plot[{Cos[x], Cos[2 x], Cos[3 x]}, {x, 0, 2  $\pi$ },
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}]
```



- Graphics -

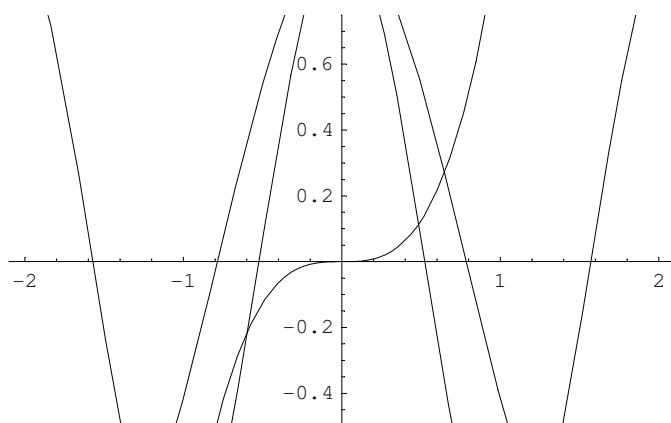
Ako želimo ograničiti crtanje grafa po ordinati, dodajemo dio `PlotRange -> {donja granica, gornja granica}`.

```
Plot[2 Sin[x], {x, -2  $\pi$ , 2  $\pi$ }, PlotRange -> {-1, 2}]
```



- Graphics -

```
Plot[{Cos[2 x], Cos[3 x], x^3}, {x, -2, 2}, PlotRange -> {-0.5, 0.75}]
```



- Graphics -

Prisjetimo se primjera u kojem smo tražili jednadžbe tangente i normale na funkciju  $f(x)=x^2$  i grafički provjerimo jesu li rješenja točna.

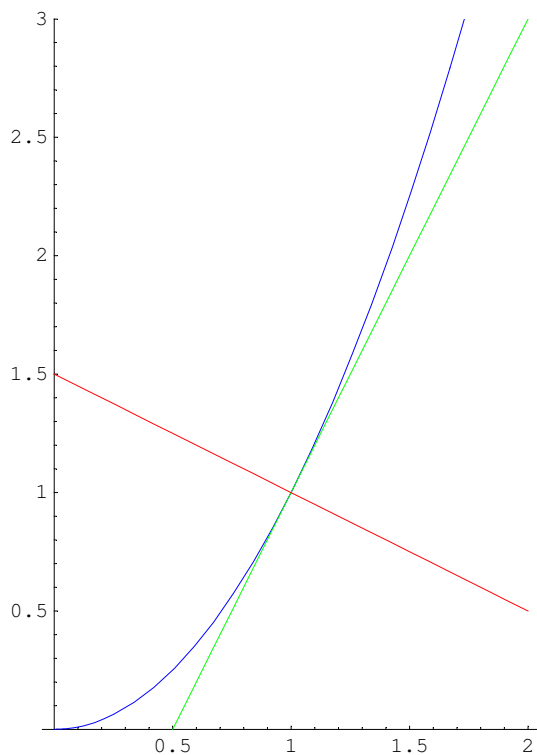
Kako bismo mogli "vidjeti" okomicu između tangente i normale mora nam jedinična duljina i na x i na y osi biti istog iznosa. Budući da Plot naredba standardno pravi određen omjer između te dvije osi, dodajemo dio `AspectRatio → Automatic`.

**funkcija:**  $f(x)=x^2$

**tangenta:**  $y_t=2x_t-1$

**normala:**  $y_n=-1/2x_n+3/2$

```
Plot[{x^2, 2 x - 1, -1/2 x + 3/2}, {x, 0, 2}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle →
{RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 0]}, PlotRange → {0, 3}]
```



▪ Graphics ▪