In[2]:=

```
(* _______________  1. zadatak  _______________ *)
```

In[3]:=

```
(* Za proizvoljne vektore a={a1,a2,a3} i b={b1,b2,b3}:
        1.1  izračunaj P=|a×b|
        1.2  izračunaj Q=Sqrt[|a|^2|b|^2-|a.b|^2]
        1.3  da li su P i Q jednaki?   *)
```

$$1.2\quad \text{izračunaj } Q=\sqrt{|a|^2|b|^2-|a.b|^2}$$

In[4]:=

```
Clear[a, b, P, Q]
```

In[5]:=

```
a = {a1, a2, a3}
b = {b1, b2, b3}
```

Out[5]= {a1, a2, a3}

Out[6]= {b1, b2, b3}

In[7]:=

```
P = Sqrt[FullSimplify[Cross[a, b].Cross[a, b]]]
```

Out[7]= $\sqrt{(a2\, b1 - a1\, b2)^2 + (a3\, b1 - a1\, b3)^2 + (a3\, b2 - a2\, b3)^2}$

In[8]:=

```
Q = Sqrt[FullSimplify[(a.a) * (b.b) - (a.b) * (a.b)]]
```

Out[8]= $\sqrt{-(a1\, b1 + a2\, b2 + a3\, b3)^2 + \left(a1^2 + a2^2 + a3^2\right)\left(b1^2 + b2^2 + b3^2\right)}$

In[9]:=

```
Simplify[P - Q]
```

Out[9]= 0

In[10]:=

```
Print["Brojevi P i Q su jednaki!"]
```

Brojevi P i Q su jednaki!

In[11]:=

```
(* _______________  2. zadatak  _______________ *)
```

In[12]:=

```
(* Neka je A(t)=(1 t 2t-t^2/2; 0 1 -t; 0 0 1):
        1.1  izračunaj P=A(t).A(s)
        1.2  izračunaj Q=A(t+s)
        1.3  da li su P i Q jednaki?   *)
```

$$A(t)=\begin{pmatrix}1 & t & 2t-t^2/2\\ 0 & 1 & -t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

In[13]:=

```
Clear[MA, t, s]
```

In[14]:=

```
MA[t_] = {{1, t, 2 t - (t * t) / 2}, {0, 1, -t}, {0, 0, 1}}
```

Out[14]= $\left\{\left\{1,\ t,\ 2\, t - \frac{t^2}{2}\right\},\ \{0,\ 1,\ -t\},\ \{0,\ 0,\ 1\}\right\}$

In[15]:=

```
P = MA[t].MA[s]
```

Out[15]= $\left\{\left\{1,\ s+t,\ 2\, s - \frac{s^2}{2} + 2\, t - s\, t - \frac{t^2}{2}\right\},\ \{0,\ 1,\ -s-t\},\ \{0,\ 0,\ 1\}\right\}$

In[16]:=
```
Q = MA[t + s]
```
Out[16]= $\left\{\left\{1, s+t, 2(s+t) - \frac{1}{2}(s+t)^2\right\}, \{0, 1, -s-t\}, \{0, 0, 1\}\right\}$

In[17]:=
```
Simplify[P - Q]
```
Out[17]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

In[18]:=
```
Print["Brojevi P i Q su jednaki!"]
```
Brojevi P i Q su jednaki!

In[19]:=

In[20]:=
```
(* ________________  3. zadatak  ________________ *)
```

In[21]:= (* **Za matričnu jednadzbu A.X.B = C znamo da je rjesenje X = A^{-1}.C.B^{-1}.**

Ako su $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **i** $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$:

2.1 pokai da su matrice A i B regularne
2.2 izračunaj rijesenje X
2.3 provjeri da li je dobivena matrica X regularna? *)

In[22]:=
```
Clear[MA, MB, MC, MX]
```

In[23]:=
```
MA = {{2, -3, 1}, {4, -5, 2}, {5, -7, 3}}
MB = {{9, 7, 6}, {1, 1, 2}, {1, 1, 1}}
MC = {{2, 0, -2}, {18, 12, 9}, {23, 15, 11}}
MatrixForm[MA]
MatrixForm[MB]
MatrixForm[MC]
```
Out[23]= {{2, -3, 1}, {4, -5, 2}, {5, -7, 3}}

Out[24]= {{9, 7, 6}, {1, 1, 2}, {1, 1, 1}}

Out[25]= {{2, 0, -2}, {18, 12, 9}, {23, 15, 11}}

Out[26]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Out[27]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Out[28]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$$

In[29]:=
```
Det[MA] == 0
```
Out[29]= False

In[30]:=
```
Det[MB] == 0
```
Out[30]= False

In[31]:=
```
MX = Inverse[MA].MC.Inverse[MB]
MatrixForm[MX]
```

Out[31]= {{1, 1, 1}, {1, 2, 3}, {2, 3, 1}}

Out[32]//MatrixForm=
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

In[33]:=
```
Det[MX] == 0
```

Out[33]= False

In[34]:=
```
Print["Rjesenje ove matrične jednadzbe je regularna matrica X=",
 MatrixForm[MX]]
```

Rjesenje ove matrične jednadzbe je regularna matrica X= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

In[35]:=

In[36]:=
```
(* ________________  4. zadatak  ________________ *)
```

In[37]:=
```
(* Na slučajnom uzorku od 1500 parova (A,B)
  kvadratnih matrica reda 3 čiji su elementi integeri
  -2, -1, 0 ,1 i 2, ispitati broj pojavljivanja parova (A,B) za koje vrijedi:
```
$\sqrt{\text{Trag}(A.A^{\tau})\text{Trag}(B.B^{\tau})} - (|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3|) \geq 0$,
```
gdje su λi svojstvene vrijednosti od A.B *)
```

In[38]:=

In[39]:=
```
Clear[RA, RB, vu, bp, sv]
```

In[40]:=
```
vu = 1500
```

Out[40]= 1500

In[41]:=
```
bp = 0;
```

In[42]:=
```
For[i = 0, i < vu, i++; RA = Table[Random[Integer, {-2, 2}], {3}, {3}];
 RB = Table[Random[Integer, {-2, 2}], {3}, {3}];
 sv = Eigenvalues[RA.RB];
 If[Sqrt[Tr[RA.Transpose[RA]] * Tr[RB.Transpose[RB]]] -
    (Abs[sv[[1]]] + Abs[sv[[2]]] + Abs[sv[[3]]]) ≥ 0, bp++]]
```

In[43]:=
```
Print["Broj pojavljivanja ovakvih parova matrica je bp=", bp]
```

Broj pojavljivanja ovakvih parova matrica je bp=1500

In[44]:=

```
(* ________________  5. zadatak  ________________ *)
```

In[45]:=
```
(* Na slučajnom uzorku od 500 parova (A,B)
  kvadratnih matrica reda 3 čiji su elementi integeri
  -2, -1, 0 ,1 i 2, ispitati broj pojavljivanja parova (A,B) za koje vrijedi:
   spektar(A.B)=
 spektar(B.A) (spektar matrice je skup njenih svojstvenih vrijednosti) *)
```

In[46]:=

```
In[47]:= Clear[RA, RB, vu, bp, svl, svd]

In[48]:= vu = 500

Out[48]= 500

In[49]:= bp = 0;

In[50]:= For[i = 0, i < vu, i++; RA = Table[Random[Integer, {-2, 2}], {3}, {3}];
          RB = Table[Random[Integer, {-2, 2}], {3}, {3}];
          svl = Eigenvalues[RA.RB]; svd = Eigenvalues[RB.RA];
          If[svl[[1]] == svd[[1]] && svl[[2]] == svd[[2]] && svl[[3]] == svd[[3]], bp++]]

In[51]:= Print["Broj pojavljivanja tvrdnje je bp=", bp]

Broj pojavljivanja tvrdnje je bp=500
```

In[52]:=

```
In[53]:= (* ________________  6. zadatak  ________________ *)

In[54]:= (* Na slučajnom uzorku od 5000 regularnih
           kvadratnih matrica reda 3 čiji su elementi integeri
            -1, 0 i 1  ispitati broj pojavljivanja "unitarnih" matrica,
         te među tim "unitarnim" matricama
            ispisati broj pojavljivanja onih
           za čije svojstvene vrijednosti vrijedi tvrdnja:
            |λ1| = |λ2| = |λ3|  .
              Napomena: regularna matrica je "unitarna" ako je A^τ = A^-1 .*)
```

In[55]:=

```
In[56]:= Clear[RA, vu, bp, bu, sv]

In[57]:= vu = 5000

Out[57]= 5000

In[58]:= bp = 0; bu = 0;

In[59]:= For[i = 0, i < vu, i++;
          RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}]; sv = Eigenvalues[RA];
          If[Det[RA] ≠ 0 && Transpose[RA] == Inverse[RA] , bp++;
           If[Abs[sv[[1]]] == Abs[sv[[2]]] == Abs[sv[[3]]], bu++ ] ] ]

In[60]:= Print["Broj pojavljivanja unitarnih matrica je bp=", bp]

Broj pojavljivanja unitarnih matrica je bp=9

In[61]:=
         Print[
          "Broj pojavljivanja unitarnih matrica među prethodnima sa uvjetom je bu=",
          bu]

Broj pojavljivanja unitarnih matrica među prethodnima sa uvjetom je bu=9
```

In[62]:=

In[63]:=
```
(* _______________  7. zadatak  _______________ *)
```

In[64]:=
```
(* Na slučajnom uzorku od 1000
  kvadratnih matrica reda 2 čiji su elementi integeri
   -1, 0 i 1,  ispitati broj pojavljivanja "normalnih" matrica,
te među tim "normalnim" matricama
   ispisati broj pojavljivanja onih
  za čije svojstvene vrijednosti vrijedi tvrdnja:
   ako su λ1 i λ2 različite tada njihovi
    svojstveni vektori moraju biti okomiti.

     Napomena: matrica A je "normalna" ako komutira
       sa svojom transponiranom odnosno ako je A.Aᵀ = Aᵀ.A  .*)
```

In[65]:=

In[66]:=
```
Clear[RA, vu, bp, bu, sv, vek]
```

In[67]:=
```
vu = 1000
```

Out[67]= 1000

In[68]:=
```
bp = 0; bu = 0;
```

In[69]:=
```
For[i = 0, i < vu, i++; RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {2}, {2}];
  sv = Eigenvalues[RA]; vek = Eigenvectors[RA];
  If[RA.Transpose[RA] == Transpose[RA].RA , bp++; If[ sv[[1]] - sv[[2]] ≠ 0 &&
     Simplify[FullSimplify[vek[[1]]].FullSimplify[vek[[2]]] - 0] == 0, bu++ ]]]
```

In[70]:=
```
Print["Broj pojavljivanja normalnih matrica je bp=", bp]
```

Broj pojavljivanja normalnih matrica je bp=388

In[71]:=
```
Print[
 "Broj pojavljivanja normalnih matrica među prethodnima sa uvjetom je bu=",
 bu]
```

Broj pojavljivanja normalnih matrica među prethodnima sa uvjetom je bu=273

In[72]:=

```
(* _______________  8. zadatak  _______________ *)
```

In[73]:=
```
(* Na uzorku od 5000 kvadratnih matrica reda 3,
čiji su elementi iz skupa {-1,0,1},
ispitaj koja je od slijedećih tvrdnji vjerojatnija :
      3.1  A^3=0
     3.2  A^3=I ?   *)
```

In[74]:=
```
Clear[RA, MI, M0, vu, bp, bd]
```

In[75]:=
```
vu = 5000
```

Out[75]= 5000

```
In[76]:= MI = IdentityMatrix[3]

Out[76]= {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

In[77]:= M0 = DiagonalMatrix[{0, 0, 0}]

Out[77]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

In[78]:= bp = 0; bd = 0; RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];

In[79]:= For[i = 0, i < vu, i++; If[MatrixPower[RA, 3] == M0, bp++];
          If[MatrixPower[RA, 3] == MI, bd++];
          RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}]]

In[80]:= Print["Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=", bp]

Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=126

In[81]:= Print["Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=", bd]

Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=79

In[82]:= If[bp > bd, Print["1. tvrdnja je vjerojatnija"],
          Print["2. tvrdnja je vjerojatnija"]]

1. tvrdnja je vjerojatnija

In[83]:=

In[84]:= (* _______________  9. zadatak  _______________ *)

In[85]:= (* Na uzorku od 10000 parova kvadratnih matrica (A,B)reda 3,
         čiji su elementi iz skupa {-1,0,1},
         ispitaj koja je od slijedećih tvrdnji
           (o transponiranju matrica i tragu) vjerojatnija :
                3.1  Trag(A.B)= Trag(A)*Trag(B)
               3.2  (A.B)^t = A^t.B^t ?   *)

In[86]:= Clear[RA, RB, vu, bp, bd]

In[87]:= vu = 10000

Out[87]= 10000

In[88]:= bp = 0; bd = 0;

In[89]:= For[i = 0, i < vu, i++; RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
          RB = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
          If[Tr[RA.RB] == Tr[RA] * Tr[RB], bp++];
          If[Transpose[RA.RB] == Transpose[RA].Transpose[RB], bd++]]

In[90]:= Print["Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=", bp]

Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=1659

In[91]:= Print["Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=", bd]

Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=14

In[92]:= If[bp > bd, Print["1. tvrdnja je vjerojatnija"],
          Print["2. tvrdnja je vjerojatnija"]]

1. tvrdnja je vjerojatnija
```

In[93]:=

In[94]:=

```
(* ________________  10. zadatak  ________________ *)
```

In[95]:=
```
(* Na uzorku od 20000 parova kvadratnih matrica (A,B)reda 3,
čiji su elementi iz skupa {-1,0,1},
ispitaj koja je od slijedećih tvrdnji vjerojatnija :
        3.1  Trag(A.B)= Trag(A)*Trag(B)
       3.2  A.B = B.A ?   *)
```

In[96]:=
```
Clear[RA, RB, vu, bp, bd]
```

In[97]:=
```
vu = 20 000
```

Out[97]= 20 000

In[98]:=
```
bp = 0; bd = 0;
```

In[99]:=
```
For[i = 0, i < vu, i++; RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
 RB = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
 If[Tr[RA.RB] == Tr[RA] * Tr[RB], bp++];
 If[RA.RB == RB.RA, bd++]]

Print["Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=", bp]
```

Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=3442

```
Print["Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=", bd]
```

Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=12

```
If[bp > bd, Print["1. tvrdnja je vjerojatnija"],
 Print["2. tvrdnja je vjerojatnija"]]
```

1. tvrdnja je vjerojatnija

```
(* ________________  11. zadatak  ________________ *)

(* Na uzorku od 10000 parova kvadratnih matrica (A,B)reda 3,
čiji su elementi iz skupa {-1,0,1},
ispitaj koja je od slijedećih tvrdnji vjerojatnija :
        3.1  A.B - B.A = I
      3.2  A.B - B.A = 0 ?   *)

Clear[RA, RB, MI, M0, vu, bp, bd]

vu = 10 000
```

10 000

```
MI = IdentityMatrix[3]
```

{{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

```
M0 = DiagonalMatrix[{0, 0, 0}]
```

```
{{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

```
bp = 0; bd = 0; RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
RB = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
```

```
For[i = 0, i < vu, i++; If[RA.RB - RB.RA == MI, bp++]; If[RA.RB - RB.RA == M0, bd++];
 RA = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}];
 RB = Table[Random[Integer, {-1, 1}], {3}, {3}]]
```

```
Print["Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=", bp]
```

Broj pojavljivanja 1. tvrdnje je bp=0

```
Print["Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=", bd]
```

Broj pojavljivanja 2. tvrdnje je bd=11

```
If[bp > bd, Print["1. tvrdnja je vjerojatnija"],
 Print["2. tvrdnja je vjerojatnija"]]
```

2. tvrdnja je vjerojatnija

```
(* _______________ 12. zadatak _______________ *)
```

```
(* Rijesiti linearni sustav:
     2x1 +  x2  - x3  +  x4 = 1
       3x1 - 2x2 + 2x3 - 3x4 = 2
        5x1 +  x2  - x3 + 2x4 = -1
      2x1 -  x2  + x3 - 3x4 = 4.            *)
```

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1$$
$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2$$
$$5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4.$$

```
Clear[MPS, MRed]
```

```
MPS = {{2, 1, -1, 1, 1}, {3, -2, 2, -3, 2}, {5, 1, -1, 2, -1}, {2, -1, 1, -3, 4}}
MatrixForm[MPS]
```

```
{{2, 1, -1, 1, 1}, {3, -2, 2, -3, 2}, {5, 1, -1, 2, -1}, {2, -1, 1, -3, 4}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
MRed = RowReduce[MPS]
```

```
{{1, 0, 0, 0, 0}, {0, 1, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 1}}
```

```
Print["Nema rjesenja jer je zadnji redak: ", MRed[[4]] ]
```

```
(* _______________ 13. zadatak _______________ *)
```

```
(* Rijesiti linearni sustav:
        x1 - 2x2  + 3x3 - 4x4 = 4
             x2  -  x3 +  x4 = -3
        x1 + 3x2        - 3x4 = 1
           -7x2  + 3x3 + x4 = -3.            *)

Clear[MPS, MRed, rez]

MPS = {{1, -2, 3, -4, 4}, {0, 1, -1, 1, -3}, {1, 3, 0, -3, 1}, {0, -7, 3, 1, -3}}
MatrixForm[MPS]

{{1, -2, 3, -4, 4}, {0, 1, -1, 1, -3}, {1, 3, 0, -3, 1}, {0, -7, 3, 1, -3}}
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

```
MRed = RowReduce[MPS]

{{1, 0, 0, 0, -8}, {0, 1, 0, -1, 3}, {0, 0, 1, -2, 6}, {0, 0, 0, 0, 0}}

rez = Solve[{x == -8, y - u == 3, z - 2 u == 6}, {x, y, z}]

{{x -> -8, y -> 3 + u, z -> 2 (3 + u)}}

Print["Rjesenja su: ", rez[[1, 1]], ",", rez[[1, 2]], ",", rez[[1, 3]] ]

Rjeenja su: x -> -8,y -> 3 + u,z -> 2 (3 + u)
```

```
(* ________________  14. zadatak  ________________ *)

(* Pokazi da lineaarni sustav:
        2x1 + x2  + 4x3 +  x4 = 0
       3x1 + 2x2 - x3  - 6x4 = 0
        7x1 + 4x2 + 6x3 - 5x4 = 0
       x1       + 8x3 + 7x4 = 0
     ima beskonačno mnogo rjesenja. Zatim naći sva rjesenja.          *)

Clear[MPS, MRed, rez]

MPS = {{2, 1, 4, 1, 0}, {3, 2, -1, -6, 0}, {7, 4, 6, -5, 0}, {1, 0, 8, 7, 0}}
MatrixForm[MPS]

{{2, 1, 4, 1, 0}, {3, 2, -1, -6, 0}, {7, 4, 6, -5, 0}, {1, 0, 8, 7, 0}}
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -6 & 0 \\ 7 & 4 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

```
MRed = RowReduce[MPS]

{{1, 0, 0, -1, 0}, {0, 1, 0, -1, 0}, {0, 0, 1, 1, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}

rez = Solve[{x - u == 0, y - u == 0, z + u == 0}, {x, y, z}]

{{x -> u, y -> u, z -> -u}}
```

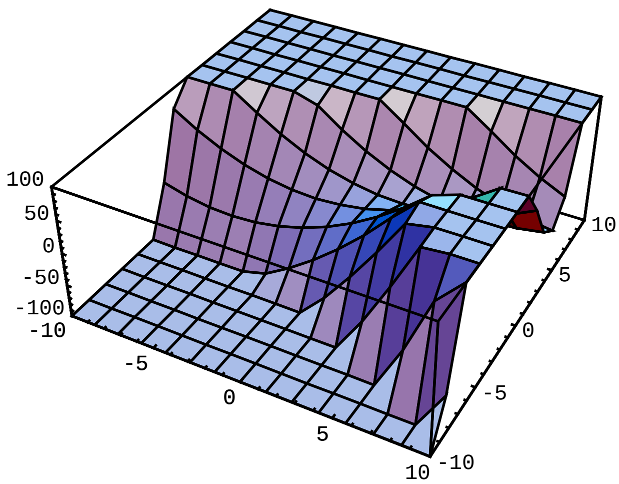
```
Print["Rjeenja su: ", rez[[1, 1]], ",", rez[[1, 2]], ",", rez[[1, 3]]]
```

Rjeenja su: $x \to u, y \to u, z \to -u$

```
(* _______________ 15. zadatak _______________ *)
(* Nacrtati graf funkcije f(x,y)=x^2-6*x*y+y^3+3x+6y. Potom,
koristeći uobičajen Lagrangeov postupak
 naći ekstreme ove funkcije *)

Clear[f, jac]

f[x_, y_] = x^2 - 6 * x * y + y^3 + 3 x + 6 y
```

$3x + x^2 + 6y - 6xy + y^3$

```
Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotRange → {-100, 100}]
```



- SurfaceGraphics -

```
Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{3}{2}, y \to 1\right\}, \left\{x \to \frac{27}{2}, y \to 5\right\}\right\}$

```
jac[x_, y_] =
 D[f[x, y], {x, 2}] * D[f[x, y], {y, 2}] - D[f[x, y], x, y] * D[f[x, y], x, y]
```

$-36 + 12y$

```
jac[3 / 2, 1]
```

-24

```
Print[" točka (3/2,1) nije stacionarna"]
```

točka (0,−6) nije stacionarna

```
D[f[x, y], {x, 2}] /. x → 27 / 2 /. y → 5
jac[27 / 2, 5]
```

2

24

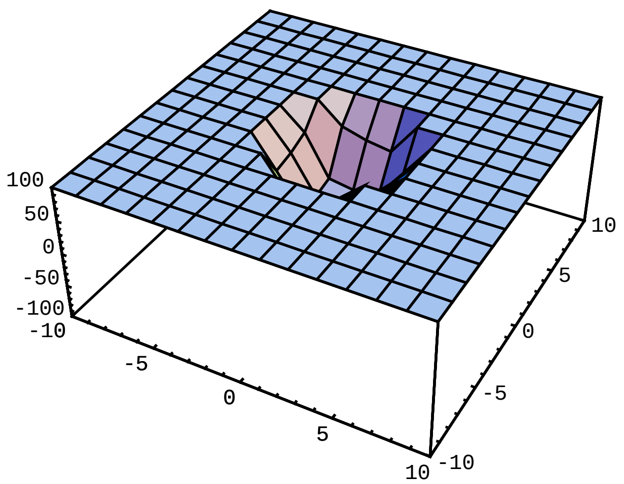
```
Print[" točka (27/2,5) je minimuum "]
```

točka (27/2,5) je minimuum

```
(* _______________ 16. zadatak _______________ *)

(* Nacrtati graf funkcije f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2*x*y-y^2 Potom,
koristeći uobičajen Lagrangeov postupak
 (uz koristenje drugog diferencijala ako je potrebno),
naći ekstreme ove funkcije *)

Clear[f, jac, drugi]

f[x_, y_] = x^4 + y^4 - x^2 - 2 * x * y - y^2
```

$-x^2 + x^4 - 2\,x\,y - y^2 + y^4$

```
Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotRange → {-100, 100}]
```



- SurfaceGraphics -

```
Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}]
```

$$\Big\{\{x\to -1,\ y\to -1\},\ \{x\to 0,\ y\to 0\},\ \{x\to 0,\ y\to 0\},\ \{x\to 0,\ y\to 0\},$$

$$\{x\to 1,\ y\to 1\},\ \Big\{x\to -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}}-\frac{1}{2}\,i\sqrt{3\left(\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}\right)},\ y\to\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}}\Big\},$$

$$\Big\{x\to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}}+\frac{1}{2}\,i\sqrt{3\left(\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}\right)},\ y\to -\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{i\sqrt{3}}{4}}\Big\},$$

$$\Big\{x\to \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4}}-\frac{1}{2}\,i\sqrt{3\left(\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4}\right)},\ y\to -\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4}}\Big\},$$

$$\Big\{x\to -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4}}+\frac{1}{2}\,i\sqrt{3\left(\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4}\right)},\ y\to \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{i\sqrt{3}}{4}}\Big\}\Big\}$$

```
jac[x_, y_] =
 D[f[x, y], {x, 2}] * D[f[x, y], {y, 2}] - D[f[x, y], x, y] * D[f[x, y], x, y]
drugi[x_, y_] = D[f[x, y], {x, 2}] (dx)^2 +
  2 * D[f[x, y], x, y] (dx * dy) + D[f[x, y], {y, 2}] (dy)^2
```

$$-4+\left(-2+12\,x^2\right)\left(-2+12\,y^2\right)$$

$$-4\,dx\,dy+dx^2\left(-2+12\,x^2\right)+dy^2\left(-2+12\,y^2\right)$$

```
jac[0, 0]
```

0

```
Print[" za točku (0,0) moramo ići na drugi diferencijal"]
```

za točku (0,0) moramo ići na drugi diferencijal

```
drugi[0, 0]
```

$$-2\,dx^2-4\,dx\,dy-2\,dy^2$$

```
Print[" točka (0,0) je maximum "]
```

```
D[f[x, y], {x, 2}] /. x → 1 /. y → 1
jac[1, 1]
```

10

96

```
Print[" točka (1,1) je minimuum "]
```

točka (1,1) je minimuum

```
D[f[x, y], {x, 2}] /. x → -1 /. y → -1
jac[-1, -1]
```

10

96

```
Print[" točka (-1,-1) je minimuum "]
```

točka (-1,-1) je minimuum

```
(* ________________ 17. zadatak ________________ *)
```

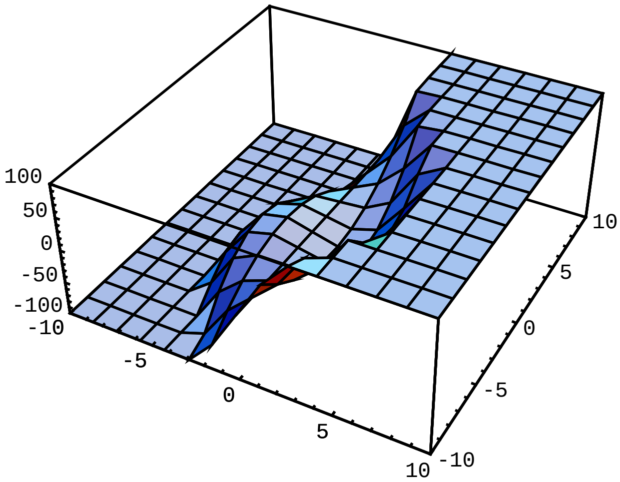
(* Nacrtati graf funkcije $f(x,y)=x^3+x*y^2+6*x*y$. Potom, koristeći uobičajen Lagrangeov postupak
naći ekstreme ove funkcije *)

```
Clear[f, jac]
```

f[x_, y_] = $x^3 + x * y^2 + 6 * x * y$

$x^3 + 6\,x\,y + x\,y^2$

```
Plot3D[f[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, PlotRange → {-100, 100}]
```



- SurfaceGraphics -

```
Solve[{D[f[x, y], x] == 0, D[f[x, y], y] == 0}]
```

$\{\{x \to 0,\ y \to -6\},\ \{x \to 0,\ y \to 0\},\ \{x \to -\sqrt{3},\ y \to -3\},\ \{x \to \sqrt{3},\ y \to -3\}\}$

```
jac[x_, y_] =
 D[f[x, y], {x, 2}] * D[f[x, y], {y, 2}] - D[f[x, y], x, y] * D[f[x, y], x, y]
```

$12\,x^2 - (6 + 2\,y)^2$

```
jac[0, -6]
-36
Print[" točka (0,-6) nije esktrem"]
točka (0,-6) nije stacionarna
```

```
jac[0, 0]
-36
Print[" točka (0,0) nije ekstrem"]
točka (0,0) nije stacionarna
```

```
D[f[x, y], {x, 2}] /. x -> √3
jac[√3, -3]
6 √3
36
Print[" točka (√3,-3) je minimuum "]
točka √3,-3) je minimuum
```

```
D[f[x, y], {x, 2}] /. x → -√3
jac[-√3, -3]

-6 √3
36
Print[" točka (-√3,-3) je maximum "]
```

```
(* ________________ 18. zadatak ________________ *)
```

```
(* Napisati program koji za danu funkciju f[x]=√(x²-3x+2) na
        intervalu [-4,4] u jednom istom koordinatnom sustavu crta:
          1) graf funkcije f(x) u crnoj boji,
          2) graf njene desne asimptote u crvenoj boji,
          3) graf njene lijeve asimptote u plavoj boji.

  Cilj zadatka je da se na izlazu estetski
 vizualizira odnos funkcije f(x) i njenih kosih asimptota *)

Clear[f, LA, DA, k1, l1, k2, l2]

f[x_] = Sqrt[x * x - 3 * x + 2]
```

$\sqrt{2 - 3 x + x^2}$

```
<< Calculus`Limit`

k1 = Limit[(f[x] / x), x → Infinity]
l1 = Limit[ f[x] - k1 * x, x → Infinity]
DA[x_] = k1 * x + l1
```

1

$-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{2} + x$

```
k2 = Limit[(f[x] / x), x → -Infinity]
l2 = Limit[ f[x] - k2 * x, x → -Infinity]
LA[x_] = k2 * x + l2
```

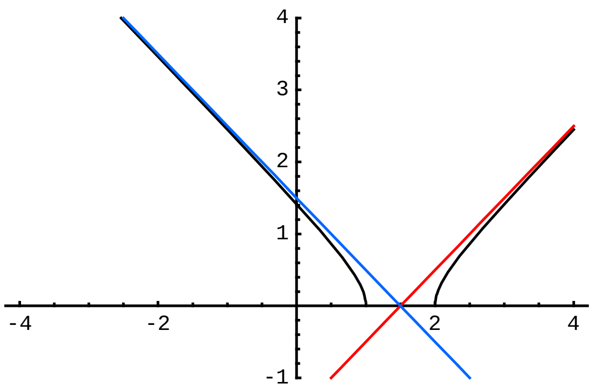
-1

$\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} - x$

```
Clear[plot0, plot1, plot2]
plot0 = Plot[f[x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity,  PlotRange → {-1, 4} ];
plot1 = Plot[DA[x], {x, -4, 4},
   DisplayFunction → Identity, PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-1, 4} ];
plot2 = Plot[LA[x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[0.6],  PlotRange → {-1, 4} ];
Show[plot0, plot1, plot2, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

```
Plot::plnr : f[x] is not a machine-size real number at x = 1.0066176834578677`.

Plot::plnr : f[x] is not a machine-size real number at x = 1.33831267408278`.

Plot::plnr : f[x] is not a machine-size real number at x = 1.0010643333903704`.

General::stop :
 Further output of Plot::plnr will be suppressed during this calculation.
```




```
(* ________________  19. zadatak  ________________ *)

(* Napisati program koji na intervalu [-2,2]
                 u jednom istom koordinatnom sustavu crta:
                  1) astroidu x(t)= cos³(t), y(t)=sin³(t) , u crnoj boji,
                 2) njenu tangentu u točki za koju je t = π/4 ,
          u crvenoj  boji,
                3) njenu tangentu u točki za koju je t = 3π/4 ,
       u crvenoj  boji,
               4) njenu tangentu u točki za koju je t = 5π/4 ,
   u crvenoj  boji,
              5) njenu tangentu u točki za koju je t = 7π/4 ,
u crvenoj  boji.

      Cilj zadatka je da se na izlazu "estetski" vizualizira odnos astroide
 i njenih tangenata povučenim u njenim najinteresantnijim točkama *)

Clear[X, Y, x, T, t, plot0, plot1, plot2, plot3, plot4]
```

```
X[t_] = (Cos[t])^3
Y[t_] = (Sin[t])^3
```

$\mathrm{Cos}[t]^3$

$\mathrm{Sin}[t]^3$

```
T[x_, t_] = Y[t] + (Derivative[1][Y][t] / Derivative[1][X][t]) (x - X[t])
```

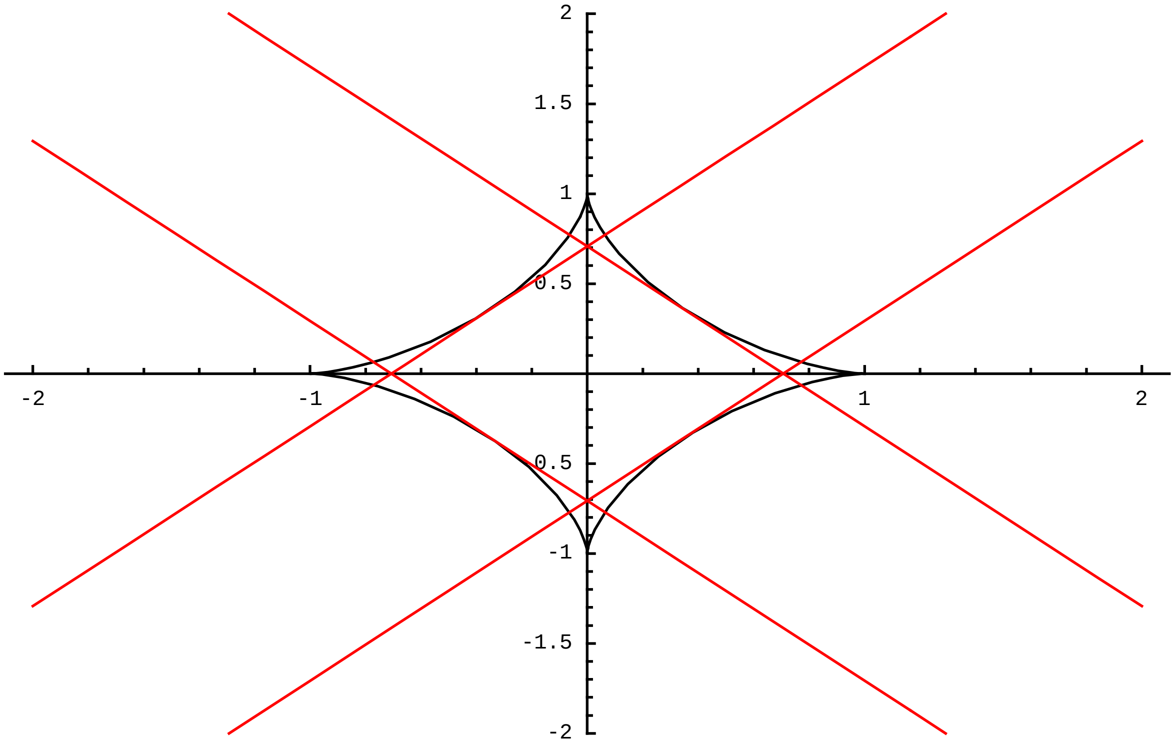
$\mathrm{Sin}[t]^3 - \left(x - \mathrm{Cos}[t]^3\right)\,\mathrm{Tan}[t]$

```
T[x, π / 4]
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - x$$

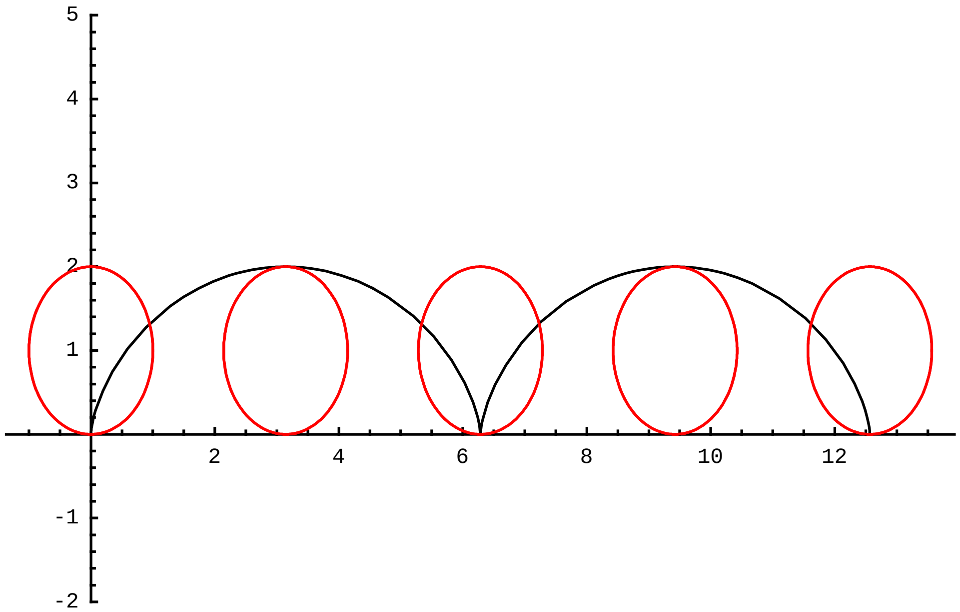
```
plot0 = ParametricPlot[{(Cos[t])^3, (Sin[t])^3},
   {t, 0, 2 π}, DisplayFunction → Identity,  PlotRange → {-2, 2} ];
plot1 = Plot[T[x, π / 4], {x, -2, 2}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 2} ];
plot2 = Plot[T[x, 3 π / 4], {x, -2, 2}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 2} ];
plot3 = Plot[T[x, 5 π / 4], {x, -2, 2}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 2} ];
plot4 = Plot[T[x, 7 π / 4], {x, -2, 2}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 2} ];
```

```
Show[plot0, plot1, plot2, plot3, plot4, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



```
(* _______________  20. zadatak  _______________ *)

(* Napisati program koji na intervalu [0,4π]
                    u jednom istom koordinatnom sustavu crta:
                     1) cikloidu x(t)= t – sin(t), y(t)=
                 1 – cos(t) , u crnoj boji,
                    2) prvu kruznicu   x(t)= cos(t),
             y(t)= 1 + sin(t) ,   u crvenoj  boji,
                   3) drugu  kruznicu  x(t)= π + cos(t),
          y(t)= 1 + sin(t) ,    u crvenoj boji,
                  4) treću  kruznicu    x(t)= 2π + cos(t),
       y(t)= 1 + sin(t) ,     u crvenoj boji,
                 5) četvrtu  kruznicu    x(t)= 3π + cos(t),
    y(t)= 1 + sin(t) ,     u crvenoj boji,
                6) zadnju kruznicu         x(t)= 4π + cos(t),
y(t)= 1 + sin(t) ,     u crvenoj  boji.


  Cilj zadatka je da se na izlazu estetski
 vizualizira odnos cikloide i danih kruznica *)


Clear[f, x, plot0, plot1, plot2, plot3, plot4, plot5]

plot0 = ParametricPlot[{t - Sin[t], 1 - Cos[t]},
   {t, 0, 4 π}, DisplayFunction → Identity,  PlotRange → {-2, 5} ];
plot1 = ParametricPlot[{Cos[t], 1 + Sin[t]}, {t, 0, 4 π},
   DisplayFunction → Identity, PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 5} ];
plot2 = ParametricPlot[{π + Cos[t], 1 + Sin[t]}, {t, 0, 4 π},
   DisplayFunction → Identity, PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 5} ];
plot3 = ParametricPlot[{2 π + Cos[t], 1 + Sin[t]}, {t, 0, 4 π},
  DisplayFunction → Identity, PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 5} ];
plot4 = ParametricPlot[{3 π + Cos[t], 1 + Sin[t]}, {t, 0, 4 π},
  DisplayFunction → Identity, PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 5} ];
plot5 = ParametricPlot[{4 π + Cos[t], 1 + Sin[t]}, {t, 0, 4 π},
  DisplayFunction → Identity, PlotStyle → Hue[1],  PlotRange → {-2, 5} ];
```

```
Show[plot0, plot1, plot2, plot3,
  plot4, plot5,  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```




```
(* _______________  21. zadatak  _______________ *)

(* Napisati program koji za danu funkciju f[x] na
            intervalu [-4,4] u jednom istom koordinatnom sustavu crta:
             1) funkciju f[x] u crnoj boji,
             2) njen prvi Taylorov polinom oko nule T1[x] u narandzastoj boji,
             3) njen drugi Taylorov polinom oko nule T2[x] u crvenoj boji,
             4) njen treći Taylorov polinom oko nule T3[x] u zelenoj boji,
             5) njen četvrti Taylorov polinom oko nule T4[x] u plavoj boji.

  Cilj zadatka je da se na izlazu estetski
 vizualizira činjenica da Taylorovi polinomi većeg reda bolje
  aproksimiraju danu funkciju. Potom,
program isprobati na eksponencijalnoj funkciji f(x)=e^x .
    Napomena: Tn[x] = f[0] + Σ_{k=1}^{n} f^(k)[0] x^k / k! . *)
```

```
Clear[f, x, T, k, n, plot0, plot1, plot2, plot3, plot4]
```

```
f[x_] = Exp[x]
```

e^x

```
T[n_, x_] = f[0] + Sum[Derivative[k][f][0] x^k / Factorial[k] , {k, 1, n}]
```

$$1+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}[0]\, x^k}{k!}$$

```
T[3, x]
```

$$1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$$

```
plot0 = Plot[f[x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity, PlotRange → {-2, 4}];
plot1 = Plot[T[1, x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity,
  PlotStyle → Hue[0.1], PlotRange → {-2, 4} ];
plot2 = Plot[T[2, x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity,
  PlotStyle → Hue[1] , PlotRange → {-2, 4}];
plot3 = Plot[T[3, x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[0.3] , PlotRange → {-2, 4}];
plot4 = Plot[T[4, x], {x, -4, 4}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → Hue[0.7] , PlotRange → {-2, 4}];

Show[plot0, plot1, plot2, plot3, plot4, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```