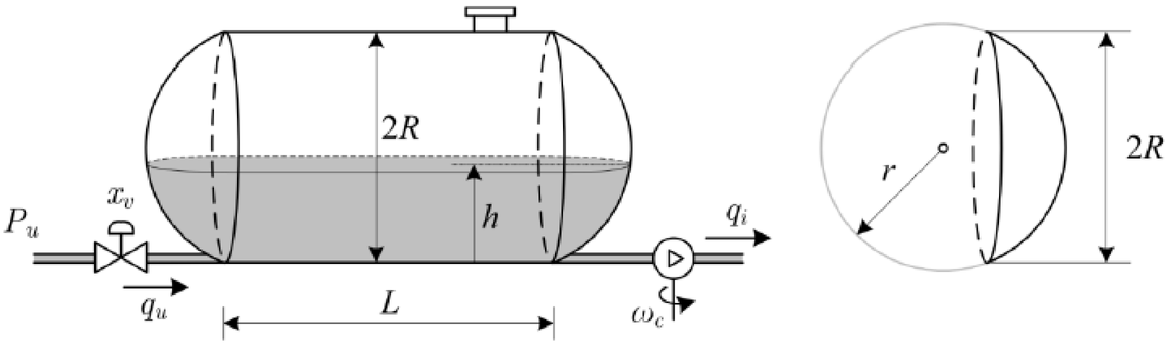
<table>
<tr><td rowspan="3">River Song
10634</td><td>FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo</td><td rowspan="3">16.11.2016.</td></tr>
<tr><td>Modeliranje i simuliranje sustava</td></tr>
<tr><td>4. DOMAĆA ZADAĆA</td></tr>
</table>

Zadan je proces skladištenja tekućine prikazan slikom 1.



Slika 1: Proces skladištenja tekućine

Tlak P_u predstavlja nadtlak prema atmosferskom tlaku, gubici u cijevima su zanemarivi, brzina tekućine u spremnicima zanemariva je u odnosu na brzinu tekućine u cijevima. Sva strujanja su laminarna.

Spremnik se sastoji od tri elementa: središnjeg u obliku cilindra duljine L = 10 m, polumjera R = 3 m, te rubnih dijelova u obliku kuglinog odsječka, pripadnog polumera kugle r = 8 m. Na vrhu spremnika otvor je za prozračivanje tako da je tlak zraka u spremniku iznad tekućine jednak atmosferskom.

Radna točka određena je ulaznim veličinama tlaka, otvora ventila i brzine vrtnje crpke P_{u0} = 1 bar, X_{v0} = 5 cm, Ω_{c0} = 170 okr/min. Zadane su još konstanta ventila K_v = 0.04 $m^3/(cm\ min\ Pa^{1/2})$ i konstanta crpke K_c = 0.05 m^3 te g = 9.81 m/s^2 i ρ = 1000 kg/m^3.

1) Odrediti nelinearni matematički model procesa.

Ulazi u model su otvorenost ventila x_v, nadtlak P_u i brzina crpke ω_c. Pretpostavlja se da tekućina uvijek struji od ulaza prema izlazu, te da će visina tekućine u spremniku h uvijek biti u intervalu [0, 2R].

Kod određivanja matematičkog modela procesa skladištenja tekućine kreće se od jednadžbe dinamičke ravnoteže volumena fluida u spremniku:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_i Q_i = q_u - q_i$$

Volumen u ovisnosti o visini općenito se računa kao:

$$V(h) = \int_0^H A(h)dh$$

Naš spremnik je kombinacija cilindra i dva jednaka kuglina odsječka sa svake strane, odnosno:

$$V = V_{cilindra} + 2V_{odsječka}$$

Za ventil vrijedi:

$$q_u = K_v x_v \sqrt{P_u - \rho g h}$$

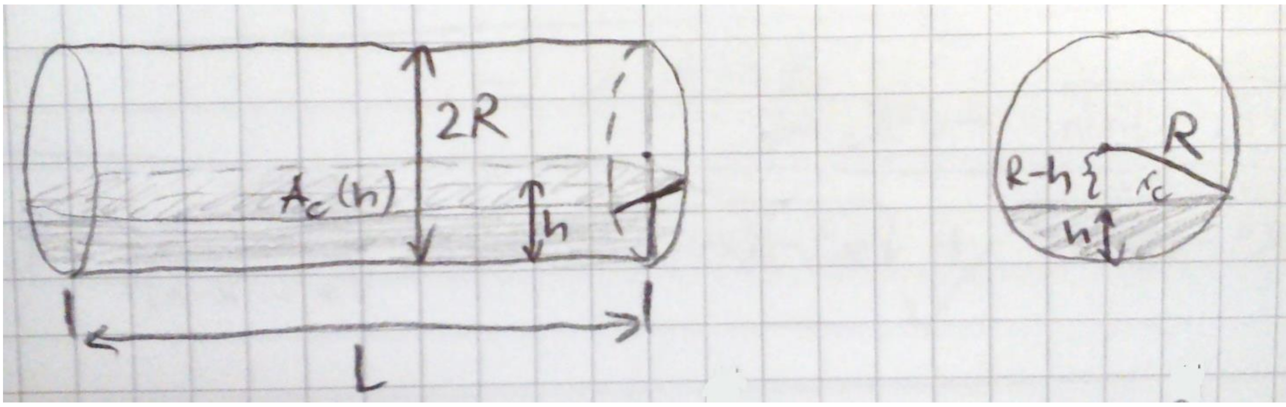
dok za pumpu vrijedi:

$$q_i = K_c \omega_c$$

Potrebno je odrediti volumene cilindričnog i kuglastog dijela spremnika, odnosno njihove presjeke ovisne o visini:

$$\frac{dV}{dh} = A(h)$$

CILINDRIČNI DIO:

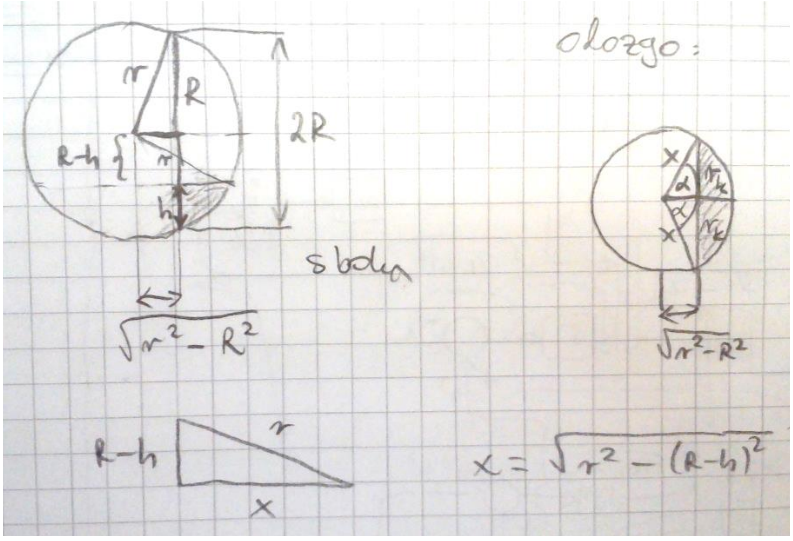


Slika 2: Određivanje površine presjeka cilindra

Iz slike 2 se lako dobije:

$$\frac{dV_{cilindra}}{dh} = A_c(h) = L * 2 * \sqrt{R^2 - (R-h)^2}$$

KUGLIN ODSJEČAK:



Slika 3: Određivanje površine presjeka kuglinih odsječaka.

Iz geometrije sa slike 3 dobije se:

$$\frac{dV_{odsječka}}{dh} = A_k(h) = \alpha\sqrt{r^2 - (R-h)^2} - \sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{2Rh - h^2}$$

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{\sqrt{r^2 - (R-h)^2}}$$

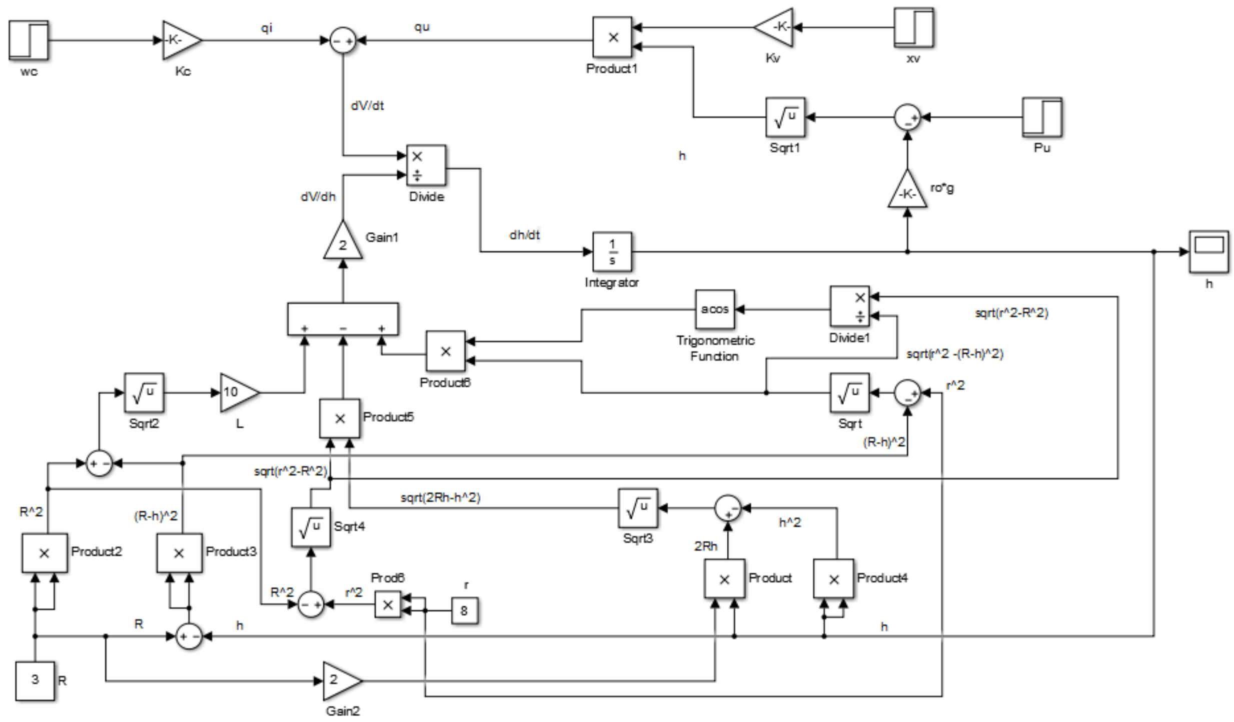
$$A_k(h) = \sqrt{r^2 - (R-h)^2} * \arccos\frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{\sqrt{r^2 - (R-h)^2}} - \sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{2Rh - h^2}$$

Konačno za visinu h slijedi:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{dV}{dh}} = \frac{q_u - q_i}{A_c(h) + 2A_k(h)}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{K_v x_v \sqrt{P_u - \rho g h} - K_c \omega_c}{2 * (L\sqrt{R^2 - (R-h)^2} + \sqrt{r^2 - (R-h)^2} * \arccos\frac{\sqrt{r^2 - R^2}}{\sqrt{r^2 - (R-h)^2}} - \sqrt{r^2 - R^2}\sqrt{2Rh - h^2})}$$

2) Nelinearna blokovska shema procesa u Matlabu



Slika 4: Shema nelinearnog modela u Simulinku.

3) Izračunati iznose volumnih protoka Q_{u0} i Q_{i0} te visine tekućine H_0 u radnoj točki

$$\frac{dh}{dt} = 0 \;\rightarrow\; K_v X_{v0}\sqrt{P_{u0} - \rho g H_0} = K_c \Omega_{c0}$$

$$H_0 = \frac{1}{\rho g}\left(P_{u0} - \left(\frac{K_c \Omega_{c0}}{K_v X_{v0}}\right)^2\right)$$

$$H_0 = 2.9248\ m$$

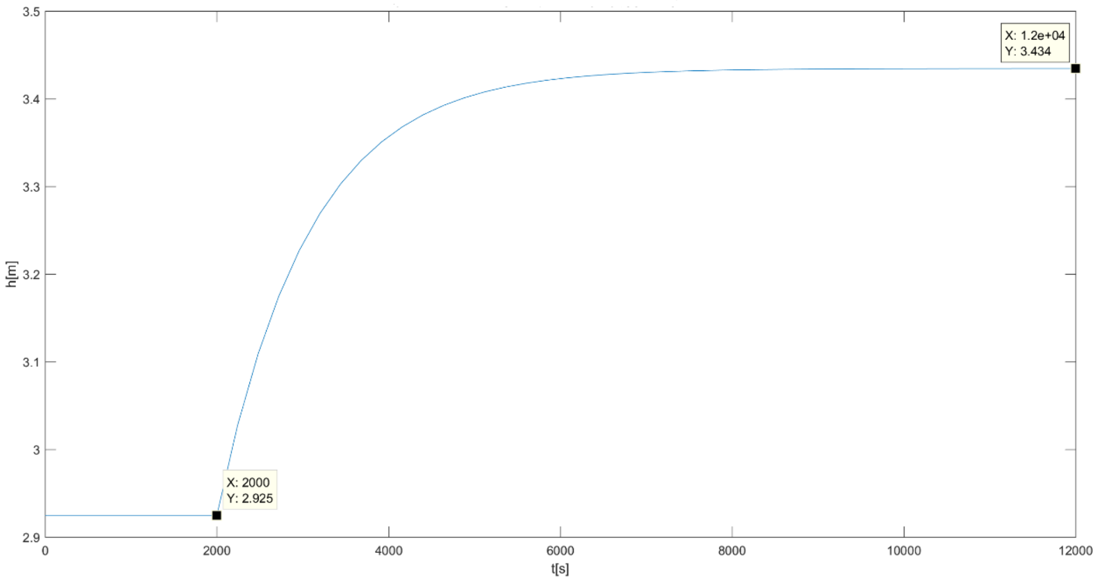
$$Q_{u0} = K_v X_{v0}\sqrt{P_{u0} - \rho g H_0}$$

$$Q_{u0} = 0.8901\ m^3/s$$

$$Q_{i0} = K_c \Omega_{c0}$$

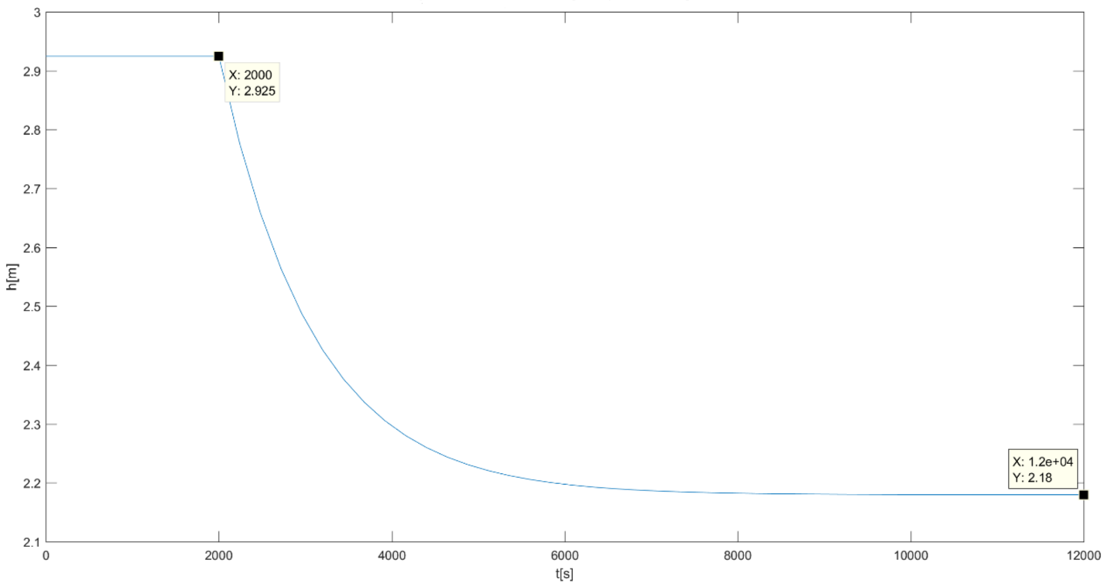
$$Q_{i0} = 0.8901\ m^3/s$$

4) Simulirati model procesa za promjenu ulaznih veličina iz radne točke za +5% (za svaki ulaz posebno)



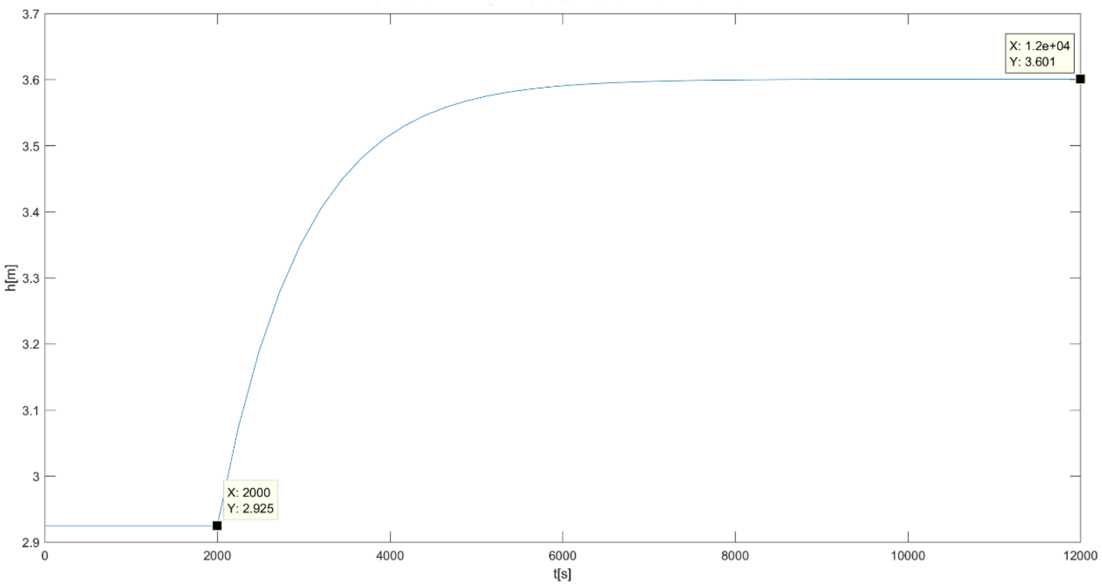
Slika 5: Visina uz povećanje nadtlaka Pu za 5% u odnosu na radnu točku

Povećanjem nadtlaka, visina tekućine u spremniku raste.



Slika 6: Visina uz povećanje brzine crpke za 5% u odnosu na radnu točku

Povećanjem brzine crpke, tekućina se brže odvodi iz spremnika te se visina smanjuje.



Slika 7: Visina uz povećanje otvora ventila za 5% u odnosu na radnu točku

Povećanjem otvora ventila visina tekućine u spremniku se povećava.

5) Odrediti linearni model procesa u prostoru stanja za zadanu radnu točku

$$\frac{dh}{dt} = f(h, \omega_c, x_v, P_u)$$

$$Ustaljeno\ stanje\text{:}\ \frac{dh}{dt} = 0 \ \rightarrow \ f(H_0, \Omega_{c0}, X_{v0}, P_{u0}) = 0$$

$$Perturbacije\ (općenito)\text{:}\ \Delta u = u - u_0, \quad \Delta\dot{u} = \dot{u}$$

$$\Delta\dot{h} = \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)_0 * \Delta h + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_c}\right)_0 * \Delta\omega_c + \left(\frac{\partial f}{\partial x_v}\right)_0 * \Delta x_v + \left(\frac{\partial f}{\partial P_u}\right)_0 * \Delta P_u$$

Pomoću funkcije linmod:

[A,B,C,D] = linmod('shema')

A = [-9.4659e^{-04}]

B = [-8.0945e^{-05} 0.0028 9.6493e^{-08}]

C = [1]

D = [0 0 0]

$$[\Delta\dot{h}] = [-9.4659e^{-04}] * \Delta h + [-8.0945e^{-05} \quad 0.0028 \quad 9.6493e^{-08}] \begin{bmatrix} \Delta\omega_c \\ \Delta x_v \\ \Delta P_u \end{bmatrix}$$

$$[\Delta h] = [1]\Delta h + [0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} \Delta\omega_c \\ \Delta x_v \\ \Delta P_u \end{bmatrix}$$

6) Odrediti prijenosne funkcije pomoću Matlaba

$$[num1\ den1] = ss2tf(A, B, C, D, 2);$$

$$G1 = tf(num1, den1)$$

$$G_1(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta X_v(s)} = \frac{0.002752}{s + 0.0009466}$$

$$[num2\ den2] = ss2tf(A, B, C, D, 3);$$

$$G2 = tf(num2, den2)$$

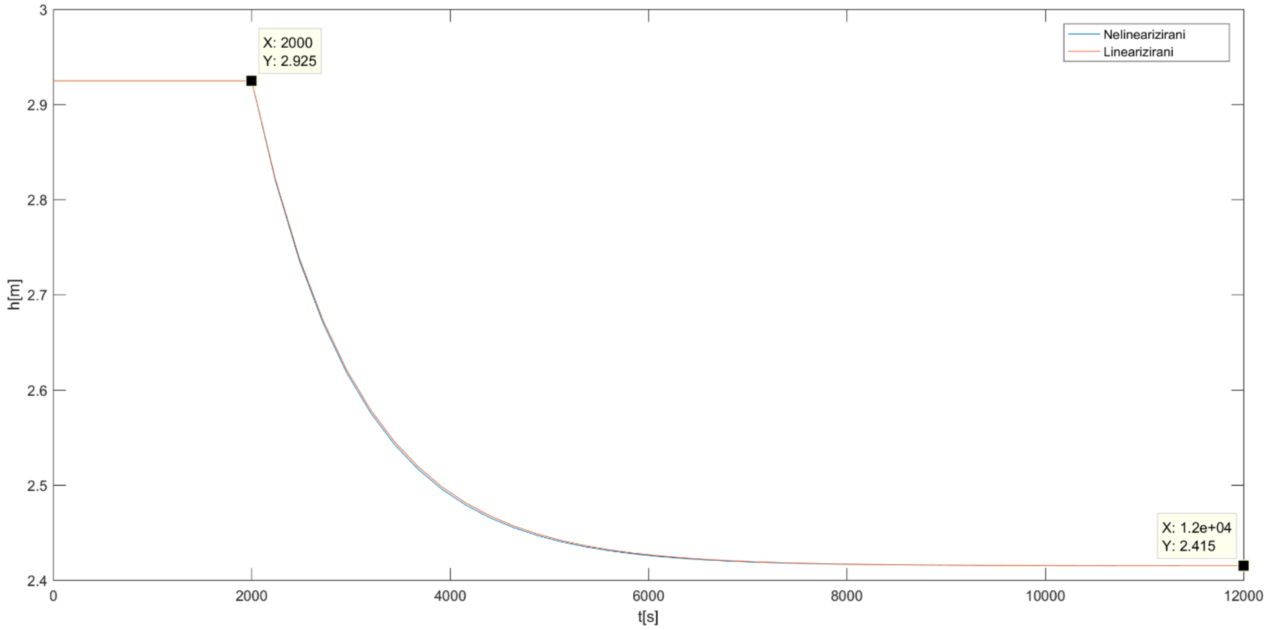
$$G_2(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta P_u(s)} = \frac{9.6493e^{-08}}{s + 0.0009466}$$

$$[num3\ den3] = ss2tf(A, B, C, D, 1);$$

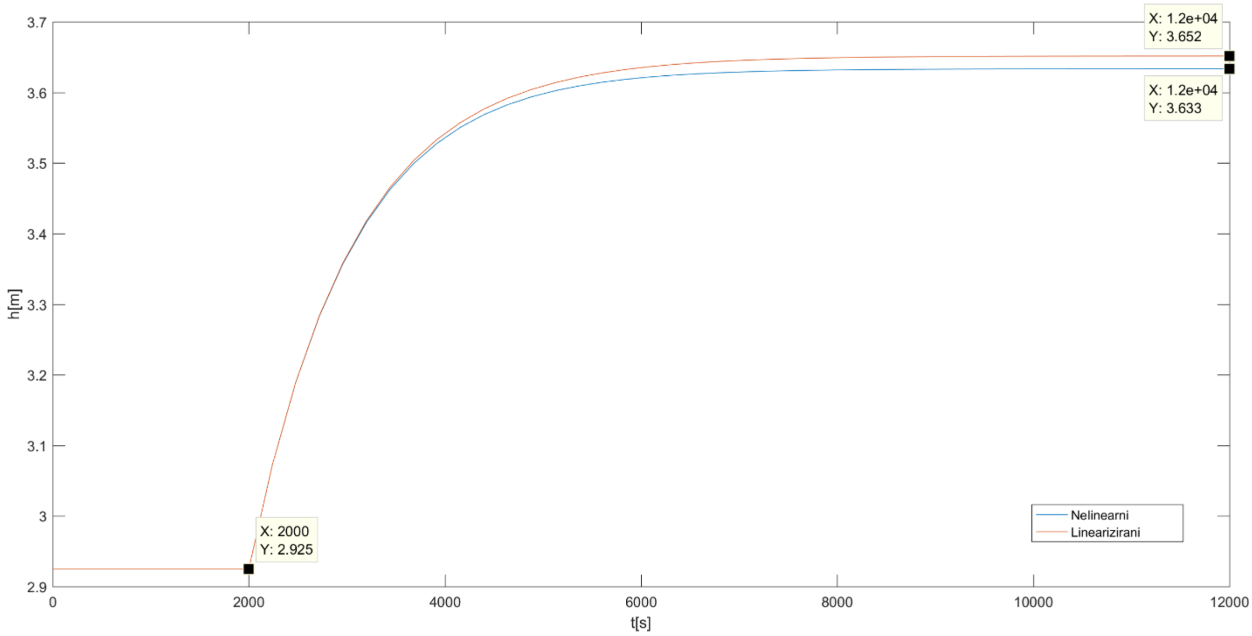
$$G3 = tf(num3, den3)$$

$$G_3(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta \Omega_c(s)} = \frac{-8.0949e^{-05}}{s + 0.0009466}$$

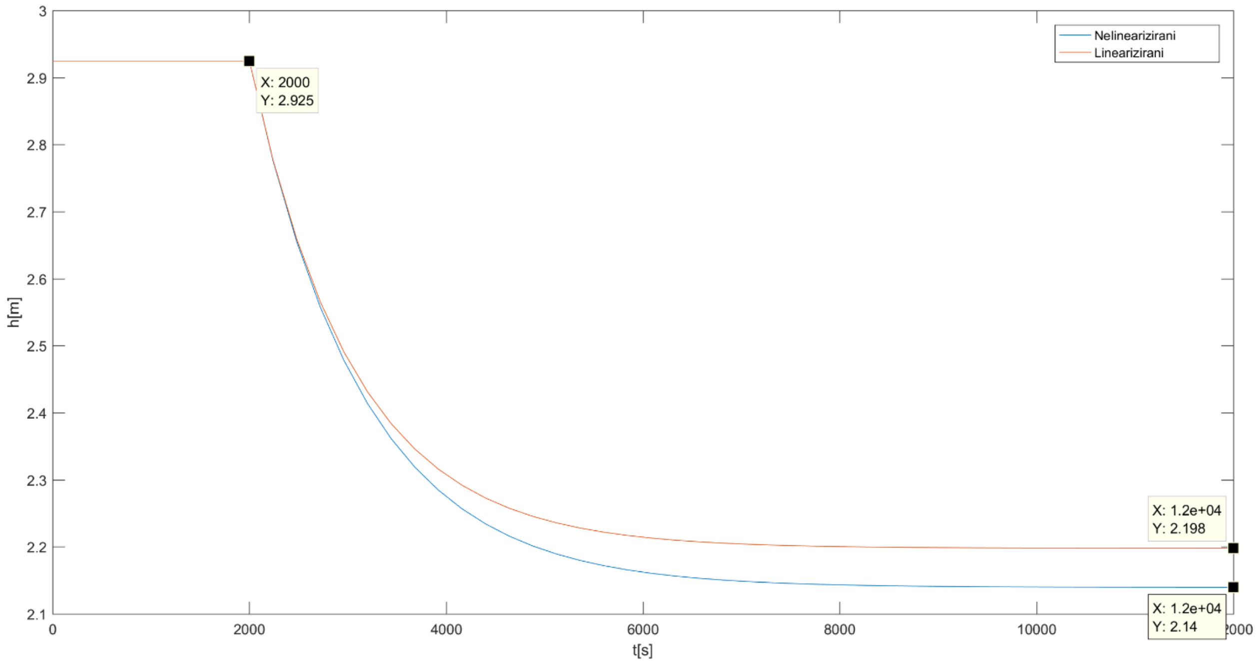
7) Usporedba odziva visine h nelinearnog modela i linearnog u zadanoj radnoj točki pri promjeni ulaznih veličina za –5%



Slika 8: Usporedba odziva nelinearng modela i lineariziranog modela za smanjenje nadtlaka Pu za 5%



Slika 9: Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za smanjenje brzine crpke za 5%



Slika 10: Usporedba nelinearnog i lineariziranog modela za smanjenje otvora ventila za 5%

Na slikama od 8 do 10 vidimo da udaljavanjem od radne točke linearizirani model slabije prati stvarni odziv nelinearnog sustava.