# Službeni podsjetnik iz gradiva prvog ciklusa predmeta Multimedijske tehnologije

**Osnovni pojmovi iz teorije slučajne varijable**

Kumulativna funkcija distribucije vjerojatnosti (cdf): $\Phi_X(x_0) = p(x \in X, x < x_0)$

Funkcija gustoće vjerojatnosti (pdf): $f_X(x) = \frac{d}{dx}\Phi_X(x)$, odnosno $\Phi_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(z) \cdot dz$

Očekivanje slučajne varijable: $\bar{x} = E(x) = \int_x x \cdot f_X(x) \cdot dx$

Varijanca slučajne varijable: $\sigma_x^2 = E(\,(x - E(x))^2\,) = \int_x (x - E(x))^2 \cdot f_X(x) \cdot dx$

**Par jednostavnih procesa**

Proces jednolike (uniformne) gustoće vjerojatnosti sa varijancom $\sigma_x^2$ i očekivanjem $E(x) = \mu$ :

(vrijedi i za trokutni ili pilasti signal vršne vrijednosti $A = \sqrt{3\sigma_x^2}$ uz $E(x) = \mu = 0$)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{12\sigma_x^2}} & \text{za} |x-\mu| < \sqrt{3\sigma_x^2} \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \qquad \Phi_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-\mu) + \sqrt{3\sigma_x^2}}{\sqrt{12\sigma_x^2}} & \text{za } |x-\mu| < \sqrt{3\sigma_x^2} \\ 0 & \text{inace} \end{cases} \qquad h(X) = \frac{1}{2}\log_2(12\sigma_x^2)$$

Proces Gaussove (normalne razdiobe) sa varijancom $\sigma_x^2$ i očekivanjem $E(x) = \mu$ :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad \Phi_{X_{norm}}(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2\sigma_x^2}}\right)\right), \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2} dt \qquad h(X) = \frac{1}{2}\log_2(2\pi \cdot e\sigma_x^2)$$

Sinusni proces $Y$; $y = A\sin(\tau)$, gdje kut $\tau$ ima uniformnu gustoću na intervalu 0 do $2\pi$, $f_T(\tau) = 1/(2\pi)$

$$\bar{y} = E(y) = 0,\ \sigma_y^2 = \frac{A^2}{2}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{2\sigma_y^2 - y^2}} & \text{za } \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \le 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}, \quad \Phi_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\operatorname{acos}\frac{-y}{\sqrt{2\sigma_y^2}} & \text{za } \frac{y^2}{2\sigma_y^2} \le 1 \\ 0 & \text{inace} \end{cases}, \quad h(Y) = \frac{1}{2}\log_2\frac{\pi^2\sigma_y^2}{2}$$

**Entropije diskretnih i kontinuiranih izvora**

Entropija izvora $S$ sa simbolima $s \in \{S_1, S_2, S_3, .. S_N\}$ i pripadnim vjerojatnostima opažanja $\{p_1, p_2, p_3, \dots p_N\}$: $H(S) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log(p_i)$

Diferencijalna entropija procesa $X$ kontinuirane varijable $x$: $h(X) = -\int_x f_X(x) \cdot \log(f_X(x))\, dx$

**Skalarni kvantizator**

Vjerojatnost pojave $i$-tog izlaznog simbola za uniformni skalarni kvantizator koraka $\Delta$: $p_I(i) = \int_{x \in C_i} f_X(x) dx = \int_{\Delta i - \Delta/2}^{\Delta i + \Delta/2} f_X(x) dx$

…. ili korištenjem cdf funkcije ulaznog procesa: $p_I(i) = \Phi_X(\Delta i + \Delta/2) - \Phi_X(\Delta i - \Delta/2)$

Ukupna distorzija proizvoljnog skalarnog kvantizatora zbrojena preko kvantizac. razreda: $D = \sum_i D_i = \sum_i \int_{x \in C_i} f_X(x) \cdot (x - x_{q_i})^2 dx$

Ukupna distorzija uniformnog skalarnog kvantizatora s korakom $\Delta$: $D = \frac{\Delta^2}{12}$

Odnos signala i kvantizacijske pogreške *SQNR* za proizvoljni kvantizator s pogreškom $D$: $SQNR = 10\log_{10}\frac{\sigma_x^2}{D}\ [dB]$

**ECSQ kvantizator i pripadni HR model**

Odnos izlazne entropije indeksa i pogreške ECSQ kvantizatora uz HR pretpostavku: $H(I) = h(X) - \frac{1}{2}\log_2(12D)$

Odnos signala i kvantizacijske pogreške *SQNR* za ECSQ uz HR pretpostavku: $SQNR = (20\log_{10} 2)H(I) + SQNR_0\ [dB]$

Pomak HR modela ECSQ kvantizatora: $SQNR_0 = 20\log_{10}(\sqrt{12\sigma_x^2}\, 2^{-h(X)})\ [dB]$

Kvantizacijski korak ECSQ kvantizatora za zadanu izlaznu entropiju $H(I)$: $\Delta = 2^{h(X) - H(I)}$

Potrebna izlazna entropija za postizanje željene kvalitete $SQNR_{min}$: $H(I)_{\min} = \dfrac{SQNR_{\min} - SQNR_0}{20\log_{10} 2}$

**Linearna predikcija iz općenitih vektorskih izvornih procesa X**

Predikcija procesa y: $\tilde{y} = [\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\ ] \cdot \begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix}$, varijanca predikcijske pogreške $\sigma_e^2(\boldsymbol{\alpha}) = E[(y - \boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}}\mathbf{x})^2]$

Optimalni prediktor: $\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \arg\min_{\boldsymbol{\alpha}}(\sigma_e^2(\boldsymbol{\alpha}))$

Uvjet ortogonalnosti: $E[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} \cdot e] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{aligned} e &= y - \overline{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ &= y - \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\overline{\boldsymbol{\alpha}} \end{aligned}$ daje optim. prediktor: $\boldsymbol{\Phi}_{xx}\overline{\alpha} = \boldsymbol{\Psi}_{xy}$

Matrica kovarijance i stupac korelacija izvora i cilja: $\boldsymbol{\Phi}_{xx} = E[\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^{\mathsf{T}}] = E[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} \cdot [\ \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\ ]\ ]$, $\boldsymbol{\Psi}_{xy} = E[\mathbf{x} \cdot y] = E[\begin{bmatrix} \\ \mathbf{x} \\ \\ \end{bmatrix} \cdot y\ ]$

**Linearni prediktor za vremenski korelirane signale $x[n]$**

Pripadna kovarijancijska matrica i stupac korelacija:

$$\boldsymbol{\Phi}_{xx} = E[\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}^{\mathsf{T}}] = E\left[\begin{bmatrix} x[n-1] \\ x[n-2] \\ \vdots \\ x[n-p] \end{bmatrix} \cdot [x[n-1]\ x[n-2]\ \cdots\ x[n-p]]\ \right], \qquad \boldsymbol{\Psi}_{xy} = E[\mathbf{x} \cdot y] = E\left[\begin{bmatrix} x[n-1] \\ x[n-2] \\ \vdots \\ x[n-p] \end{bmatrix} \cdot x[n]\ \right]$$

Za ergodične procese:

$$\boldsymbol{\Phi}_{xx}(i,k) = E[x[n-i] \cdot x[n-k]]\ \cong\ \phi(i,k) = \frac{1}{N}\sum_n x[n-i] \cdot x[n-k], \qquad \boldsymbol{\Psi}_{xy}(i) = E[x[n-i] \cdot x[n]]\ \cong\ \phi(i,0) = \frac{1}{N}\sum_n x[n-i] \cdot x[n]$$

Matrični sustav jednadžbi:

$$\begin{bmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,2) & \ldots & \phi(1,p) \\ \phi(2,1) & \phi(2,2) & \ldots & \phi(2,p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \phi(p,1) & \phi(p,2) & \ldots & \phi(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\alpha}_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ \overline{\alpha}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1,0) \\ \phi(2,0) \\ \ldots \\ \ldots \\ \phi(p,0) \end{bmatrix} \quad \text{sa članovima} \quad \phi(i,k) = \frac{1}{N}\sum_n x[n-i] \cdot x[n-k]$$

Pogreška linearnog prediktora: $e[n] = x[n] - \tilde{x}[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x[n-k]$

Prijenosne funkcije prediktora i inverznog filtra: $P(z) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k}$, $A(z) = \dfrac{E(z)}{X(z)} = 1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k} = 1 - P(z)$

Prijenosna funkcija rekonstrukcijskog filtra: $H(z) = \dfrac{1}{A(z)} = \dfrac{X(z)}{E(z)} = \dfrac{1}{1-P(z)} = \dfrac{1}{1 - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k z^{-k}}$

Autokorelacija signala konačnog trajanja za pomak $j$: $R(j) = \sum_{m=0}^{N-1-j} x[m] \cdot x[m+j]$

Određivanje linearnog prediktora autokorelacijskim postupkom:

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & R(2) & \ldots & R(p-1) \\ R(1) & R(0) & R(1) & \ldots & R(p-2) \\ R(2) & R(1) & R(0) & \ldots & R(p-3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R(p-1) & R(p-2) & R(p-3) & \ldots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\alpha}_1 \\ \overline{\alpha}_2 \\ \overline{\alpha}_3 \\ \ldots \\ \ldots \\ \overline{\alpha}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(3) \\ \ldots \\ \ldots \\ R(p) \end{bmatrix}$$

Predikcijski dobitak u zatvorenoj i otv. petlji

$$PG = 10 \cdot \log_{10}\frac{\sigma_x^2}{\sigma_{ec}^2}\ [dB] \qquad PG_{\infty} = 10 \cdot \log_{10}\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\ [dB]$$