Grafovi - X.FER

Smisao ovog dokumenta

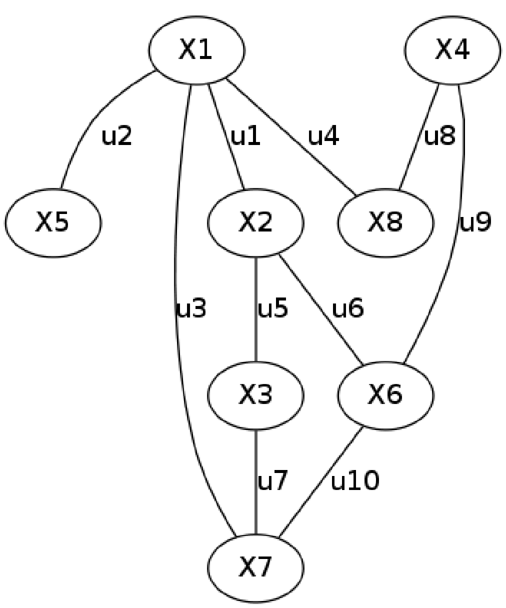
Ovaj dokument je napisan kako bi čitatelju omogućio kratak uvod u teoriju grafova. On **ne služi** za to da ga pripremi za rješavanje zadataka. Ovdje su opisani mnogi pojmovi koji se gotovo nikada ne pojavljuju u informatičkim zadacima, ali su, isto tako, opisani i svi bitniji jednostavni pojmovi. Samo predavanje neće tražiti poznavanje cijelog dokumenta, ali će se na njemu rješavati informatički zadaci u kojem će se spominjati pojmovi iz istoga.

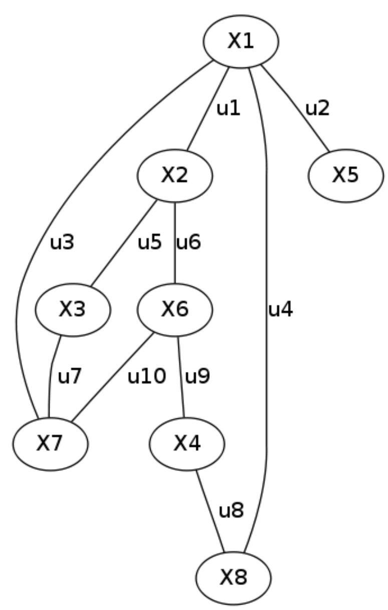
Budući da postoje čitatelji koji su već upoznati s pojmovima, autori im savjetuju da prođu samo kroz podebljane pojmove. Ako naiđu na neki njima nepoznat, mogu pročitati kontekst u kojem se taj pojam nalazi. Kako je većina literature na engleskom jeziku, uz pojmove su u zagradama napisani njigovi engleski nazivi.

Neusmjereni grafovi

Neusmjereni graf (engl. undirected graph) je uređeni par skupova (V, E). Elemente skupa V nazivamo **čvorovima** (nazivaju se i **vrhovima** i **točkama**; engl. vertex ili node), a one skupa E **bridovima** (često se nazivaju i **granama** ili **vezama**; engl. edge) grafa. **Brid** grafa je par elemenata iz skupa V. Za neki brid kažemo da povezuje dva čvora iz skupa V. Ponekad se umjesto oznake za kardinalni broj koristi samo ime skupa (znači umjesto |V| V, a umjesto |E| samo E).

Grafovi se često zamišljaju kao geometrijski oblici (slike na papiru). Kad crtamo graf, posve je nebitan raspored čvorova i veza u prostoru. Prema tome, slike 1 i 2 prikazuju isti graf.



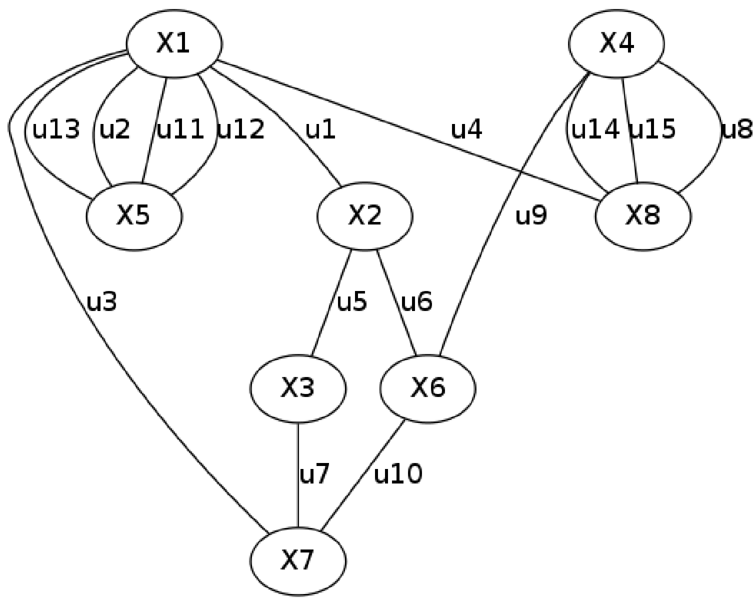


Slika 1 - Primjer grafa G

Slika 2 - Primjer grafa G (isti graf kao na slici 1, samo nacrtan na drugačiji način)

V = {X1, X2, X3, ..., X8}
E = {u1, u2, u3, ..., u10}

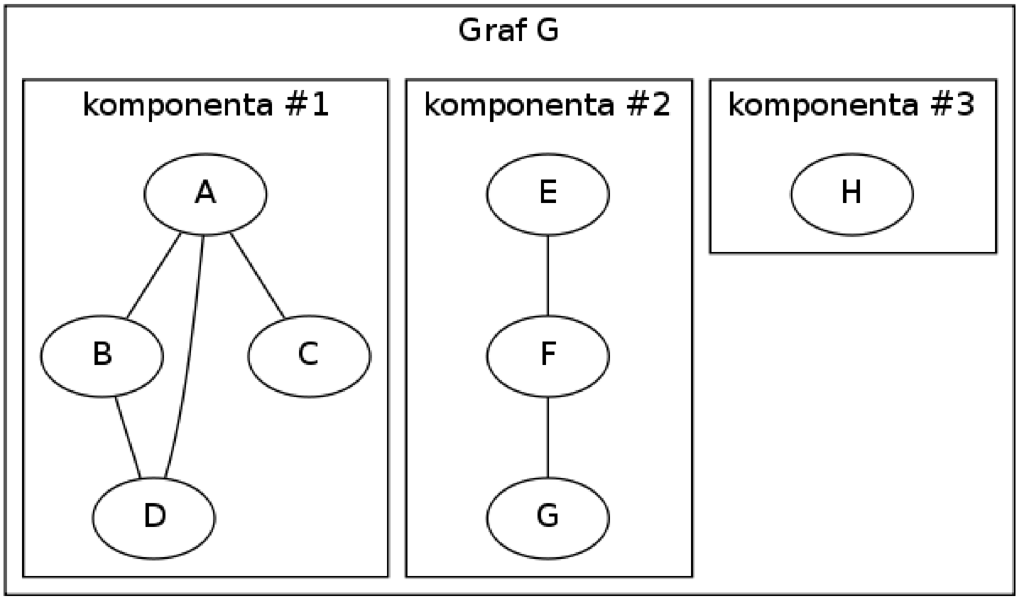
Za granu A kojoj su pridružena neka dva čvora, X i Y, kažemo da ih ona povezuje. Čvorove X i Y smatramo krajnjim točkama te grane. Tada čvorove X i Y još nazivamo i **susjednim čvorovima**, a za brid koji ih povezuje kažemo da je susjedan obima čvorovima. Ako su nekoj grani pridružena dva ista čvora, kažemo da je ona petlja. U grafu koji nema petlji, definira se i stupanj čvora za svaki čvor. **Stupanj čvora** (engl. degree) jednak je broju grana kojima je on krajnja točka. Ako u grafu postoji više grana koje povezuju iste čvorove, kao na Slici 2., tada kažemo da je graf **multigraf** (engl. multigraph). (Multi)graf je **konačan** ako i samo ako su skupovi V i E konačni. **Podgraf** (engl. subgraph) grafa G=(V, E) je graf G'=(V', E'), gdje je V' podskup skupa V, a E' podskup skupa E. Naravno, svaki element E' mora biti važeći, tj. oba čvora svakog brida moraju se nalaziti u V'.



Slika 3 - Primjer multigrafa

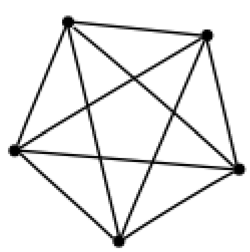
Neka su V = { $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ } i E = { $u_1, u_2, u_3, ..., u_m$ } skup čvorova (V) i skup grana (E) grafa G. Neka je svaki element niza i broj od 1 do n, a svaki element niza j broj od 1 do m. Nazimjenični niz čvorova i grana $x_{i[1]}, u_{j[1]}, x_{i[2]}, u_{j[2]}, x_{i[3]}, ..., u_{j[k]}, x_{i[k+1]}$ naziva se **putom** (engl. path) dužine k u grafu G ako su za svaki s = 1, 2, 3, ..., k čvorovi $x_{i[s]}$ i $x_{i[s+1]}$ susjedni i povezani bridom $u_{j[s]}$. Za put kažemo da **povezuje** čvorove $x_{i[1]}$ i $x_{i[k+1]}$. Ako put počinje i završava u istom čvoru, nazivamo ga **ciklusom** (engl. cycle) ili kružnim putem. Put je **jednostavan** (engl. simple) ako se u nizu ne pojavljuje dva puta isti čvor, a ciklus ako se niti jedan čvor ne pojavljuje dva puta osim prvog (i zadnjeg). **Jednostavan ciklus** (engl. simple cycle) je onaj ciklus koji u sebi ne sadrži dva puta isti brid.

Graf je **povezan** (engl. connected) ako se svaka dva čvora mogu povezati nekim putem. U suprotnom, on je **nepovezan** (engl. disconnected). Svaki maksimalni (kojeg je nemoguće proširiti dodavanjem jednog elementa) povezani podgraf zove se **povezana komponenta** (engl. connected component), ili, jednostavno, **komponenta**. Svaki čvor grafa pripada točno jednoj komponenti. U povezanom grafu definiramo i **promjer** (engl. diameter) grafa kao najduži jednostavni put. Za graf kažemo da je **regularan** (engl. **regular**) stupnja R ako i samo ako svi čvorovi imaju isti stupanj R. Grafovi drugog stupnja nazivaju se još i **ljuskama** ili konturama (engl. hull ili rijeđe outline i shape).

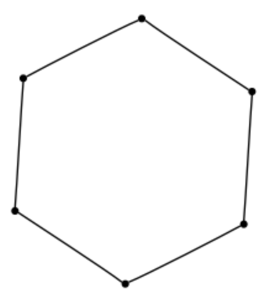


Slika 4 - Graf G podijeljen na 3 povezane komponente ({A, B, C, D}, {E, F, G} i {H})

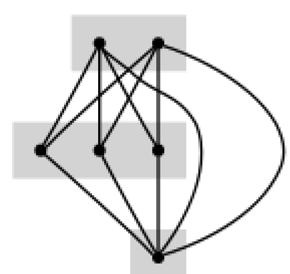
Potpuni graf (engl. complete graph) je onaj u kojem su svi čvorovi međusobno izravno povezani (točno jednim bridom). Iznimno, u potpunom grafu <u>može izostati</u> brid koji povezuje čvorove sa njima samima. Također, često će nas zanimati i **gustoća grafa** (engl. graph density). Za jednostavne grafove bez petlji gustoću grafa definiramo kao 2 * |E| / (|V| * (|V|-1)). Razlikujemo **guste** (engl. dense) i **rijetke** (engl. sparse) grafove, no što ćemo smatrati gustim a što rijetkim grafovima nije jasno definirano. Općenito govoreći, oni grafovi koji su <u>skoro potpuni</u> samtraju se <u>gustim</u>, a oni u kojima je svakom čvoru susjedno <u>svega nekoliko bridova</u> smatramo <u>rijetkim</u>. Graf je **k-potpun** (engl. k-complete) ako vrijedi da se može podijeliti na K dijelova takvih da su svaka dva čvora iz različitih dijelova povezani granom a niti jedna dva čvora iz istog dijela nisu.



Slika 5 - potpuni graf sa 5 čvorova; istodobno i 4-regularan graf



Slika 6 - ljuska grafa sa 6 čvorova; istodobno i 2-regularan graf



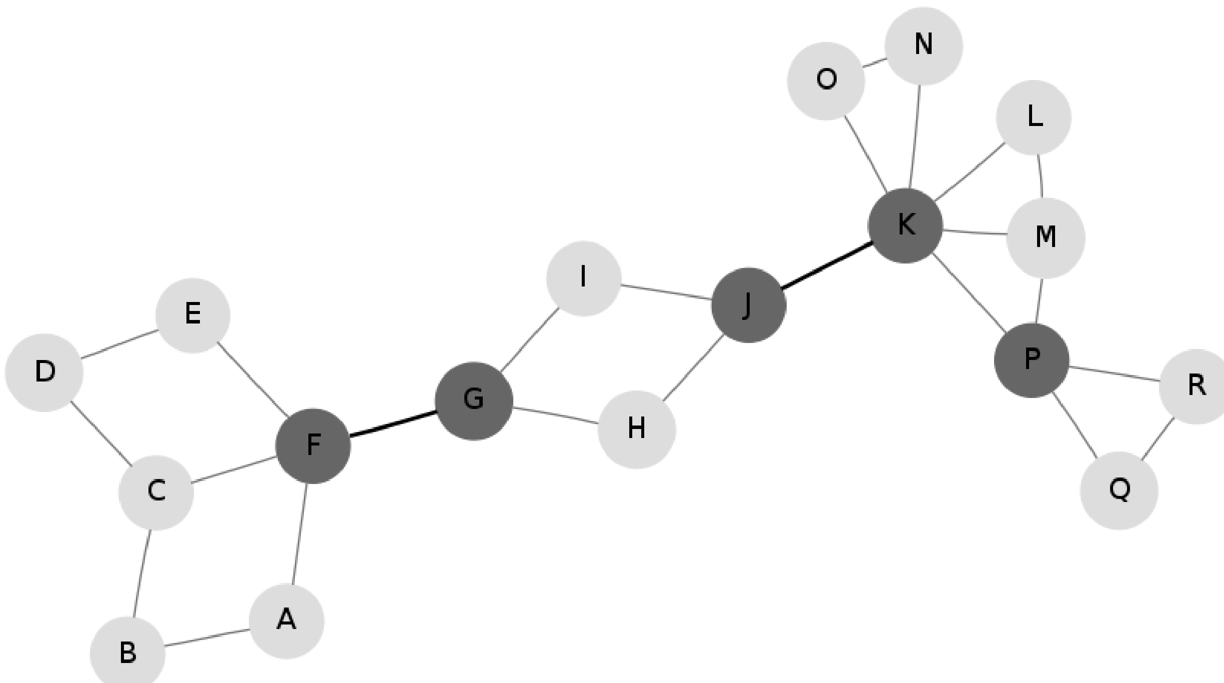
Slika 7 - 3-potpun graf

Za graf kažemo da je **izomorfan** (engl. graph isomorphism) ako vrijedi slijedeće:
Neka za zadana dva grafa (G1 i G2) postoji bijektivna funkicija f koja svakom čvoru G1 pridružuje čvor G2. Osim toga, mora vrijediti da je broj bridova koji povezuju neka dva

čvora x i y iz G1 jednak broju čvorova koji povezuju čvorove f(x) i f(y) u G2. Jednostavnije rečeno, ako se dva grafa G1 i G2 nacrtani mogu dati istu sliku, smatramo da su oni izomorfni.

Graf je **planaran** (engl. planar graph) ako se može nacrtati u ravnini bez da mu se bridovi sijeku. Slike 1, 2, 3, 4 i 6 su primjer planarnih grafova, a slike 5 i 7 onih koji to nisu.

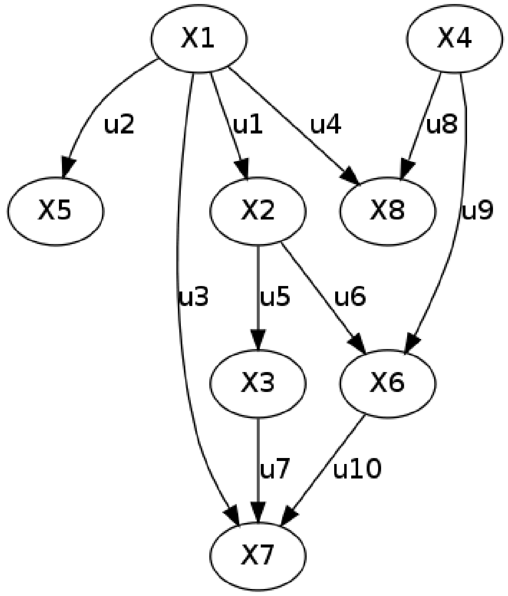
Definirat ćemo još dva pojma: **rezna točka** (artikulacijska točka, točka naglaska; engl. articulation point) i **most** (engl. bridge). Artikulacijska je točka svaki čvor koji bi razdvojio graf na barem dva odspojena podgrafa kad bismo je maknuli. Most je, slično, svaki brid koji bi razdvojio graf na dva podgrafa kada bismo ga maknuli.



Slika 8 - na slici su zatamnjene artikulacijske točke i mostovi

Usmjereni grafovi

Osnovna razlika između usmjerenih i neusmjerih grafova je tome što je **brid** u **usmjerenom grafu** (engl. directed graph -> DiGraph) uređeni par čvorova. Usmjereni grafovi često se nazivaju i **digrafovima**. Stoga, za brid X = (A, B) kažemo da povezuje **čvor A sa čvorom B**, ali ne nužno i obrnuto. Kažemo da brid X počinje u čvoru A, a završava u čvoru B. Primijetite da od neusmjerenog grafa možemo dobiti usmjereni ako svaki brid zamijenimo sa dva - jednim u jednom smjeru i jednim u drugom ((A,B) i (B,A)). Oni pojmovi koji nisu posebno naznačeni, definirani su na isti (ili vrlo sličan) način kao i kod neusmjernih grafova.

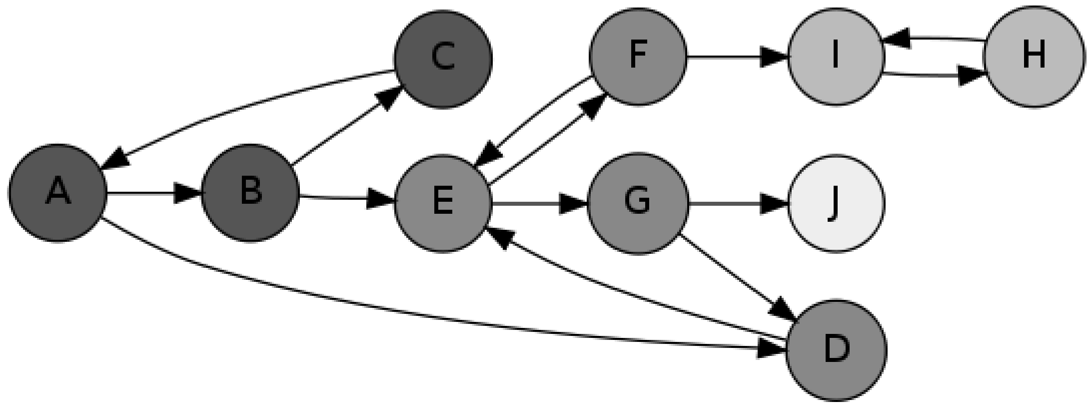


Slika 9 - Primjer usmjerenog grafa. Kada bi se svaki usmjereni brid zamijenio neusmjerenim, dobili bismo graf izomorfan onima sa slika 1 i 2

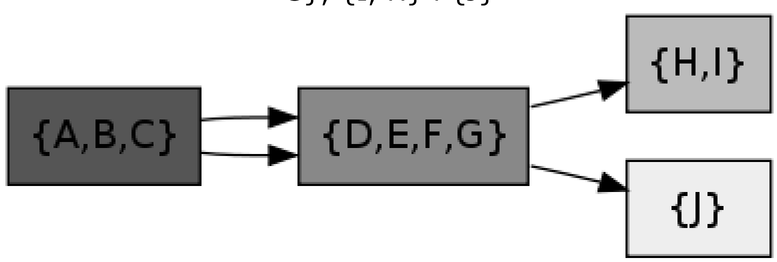
Usmjereni aciklički graf (engl. directed acyclic graph - DAG) je onaj graf koji u sebi <u>ne sadrži ciklus</u>. Graf sa slike 9 primjer je takvog grafa.

Ulazni stupanj čvora (engl. in-degree) je broj bridova koji završavaju u njemu. **Izlazni stupanj čvora** (engl. out-degree) je broj bridova koji počinju u njemu. Čvor koji ima ulazni stupanj nula nazivamo **izvorom** (engl. source), a onaj koji ima izlazni stupanj jednak nuli **ponorom** (engl. sink).

Usmjereni se **graf** smatra **čvrsto povezanim** (engl. strongly connected) ako za njega vrijedi da se iz svakog čvora može doći u svaki drugi. Ako bi, pak, graf postao povezan kad bi se bridovi zamijenili neusmjerenima, smatramo ga **slabo povezanim** (engl. weakly connected). Za usmjerene grafove <u>ne definiramo povezane komponente</u>, već čvrsto povezane komponente. **Čvrsto povezane komponente** (engl. strongly connected component) su najveći čvrsto povezani podgrafi tog grafa. Naravno, isti čvor smije pripadati samo jednoj (najvećoj) čvrsto povezanoj komponenti. Kad bismo svaku čvrsto povezanu komponentu predstavili s jednim čvorom, a bridove među čvorovima različitih komponenti bridovima među komponentama, dobili bismo usmjereni aciklički graf.



Slika 10 - usmjereni graf podijeljen na čvrsto povezane komponente - {A, B, C}, {D, E, F, G}, {I, H} i {J}

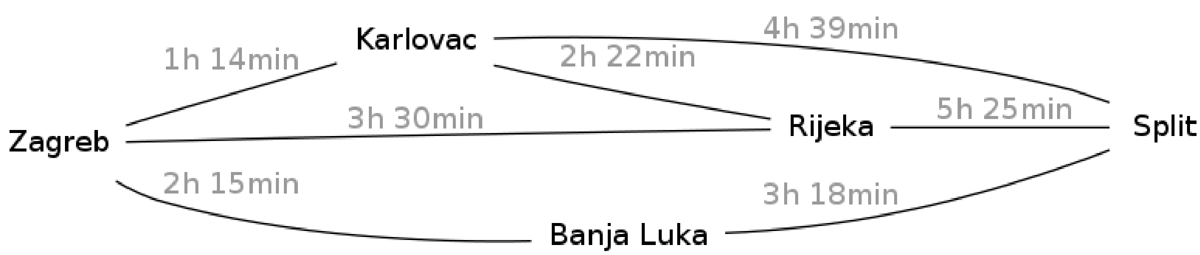


Slika 11 - kada bismo komponente grafa sa slike 10 prikazali kao čvorove, dobili bismo ovaj usmjereni aciklički graf

Promjer grafa nećemo definirati za usmjerene grafove. Za usmjereni graf kažemo da je **regularan stupnja R** ako mu svaki čvor ima isti ulazni i izlazni stupanj R. **Usmjerena ljuska** (ili, kratko, ljuskaka, ako je iz konteksta očito da se radi o usmjerenom grafu) je jednostavan ciklus koji povezuje sve čvorove grafa.

Težinski grafovi

Težinski grafovi (engl. weighted graphs) definiraju se kao uređeni par skupova (V, E). Skup V je skup čvorova, a skup E skup bridova. Razlikuju se od bestežinskih po tome što svaki brid ima pridruženu **težinu** (engl. weight) prolaska (ponekad se umjesto pojma težina koristi pojam **cijena** (engl. cost)). Oni, također, mogu biti usmjereni i neusmjerni. Bestežinske grafove (dakle one opisane do ovog dijela) često ćemo zamišljati kao težinske kojima su svi bridovi iste težine. **Težina puta** (engl. path weight) jednaka je sumi bridova na putu. **Težina grafa** (engl. jednaka je sumi svih bridova u njemu.

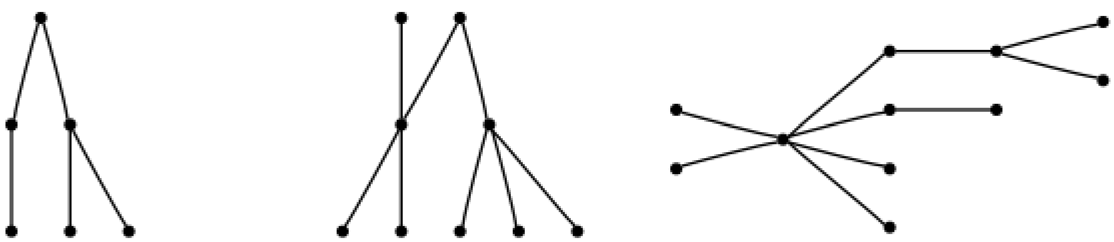


Slika 12 - primjer težinskog grafa; prikazuje vrijeme putovanja automobilom među gradovima prije izgradnje autocesta

Za dva težinska grafa kažemo da su **izomorfni** ako vrijedi sve navedeno za bestežinske grafove i da je cijena brida koja povezuje x i y ista kao i cijena brida koji povezuje f(x) i f(y). Ostali pojmovi, za težinske usmjerene i težinske neusmjerene grafove, mogu se definirati na vrlo sličan način kao i za one bestežinske.

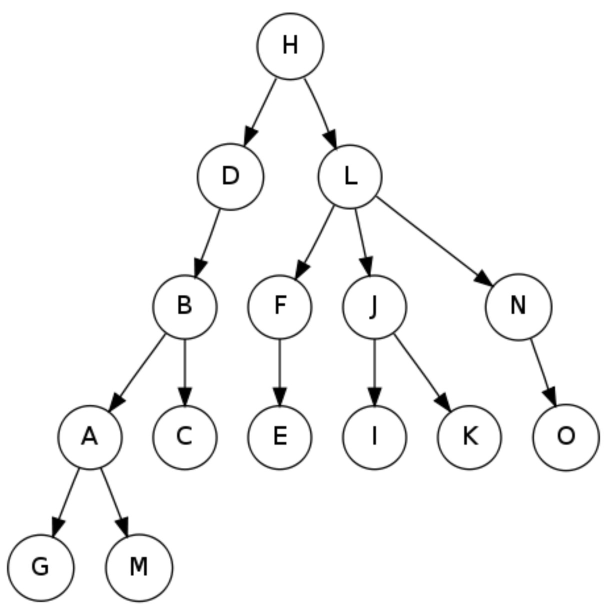
Stabla

Vrlo specifična klasa grafova su stabla. **Šuma** (engl. forest) je graf (bilo usmjeren ili neusmjeren, težinski ili bestežinski) bez ciklusa, a povezana šuma zove se **stablo** (**drvo**; engl. tree). Ako je graf usmjeren, stablom smatramo svaku šumu koja je slabo povezana.



Slika 13 - primjeri stabala

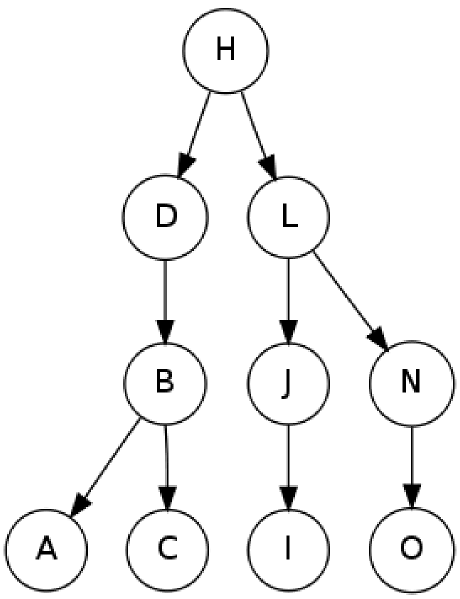
U stablu može postojati poseban čvor koji se naziva **korijenom** (engl. root). Takvo se stablo naziva **ukorijenjenim** (engl. rooted). Njih ćemo dalje razmatrati. Od trenutka kad ukorijenimo stablo, svi bridovi postaju usmjereni. Njihov je smjer intuitivan - uvijek će biti usmjereni od čvora bližeg korijenu prema čvoru daljem od korijena. Ako postoji veza između dva čvora, onaj koji je bliži korijenu nazivamo **roditeljem** (engl. parent), a onaj dalji **dijetetom** (engl. child).



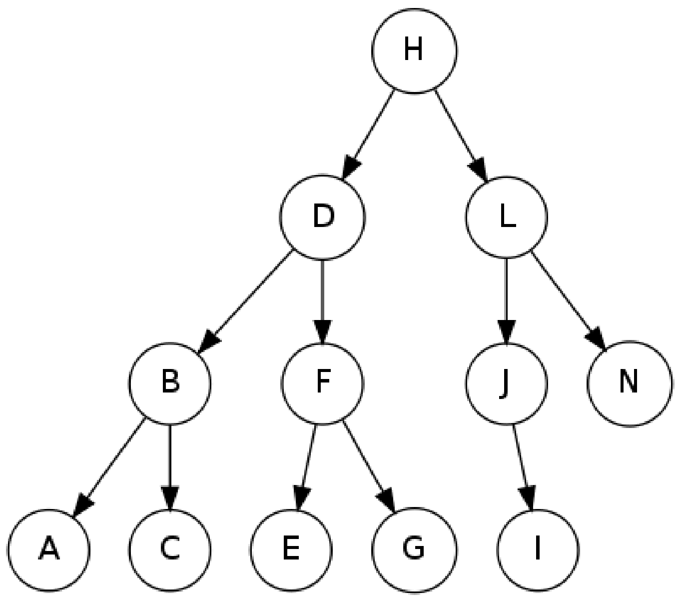
Slika 14 - primjer ukorijenjenog stabla

List (engl. leaf) je čvor koji nema djece. **Unutrašnji čvor** (engl. internal ili inner node) jest čvor koji ima barem jedno dijete - znači nije list. **Stupanj čvora** (engl. node degree) jednak je broju djece koje ima čvor. **Stupanj stabla** (engl. tree degree) jest najveći stupanj čvora u stablu. **Razina** (ponekad se može pronaći pojam **dubina**; engl. level, depth) korijena je 1, a za sve ostale čvorove razina je jednaka razini roditelja uvećanoj za jedan. **Visina stabla** (engl. **height**) jednaka je najvećoj razini od svih čvorova u stablu.

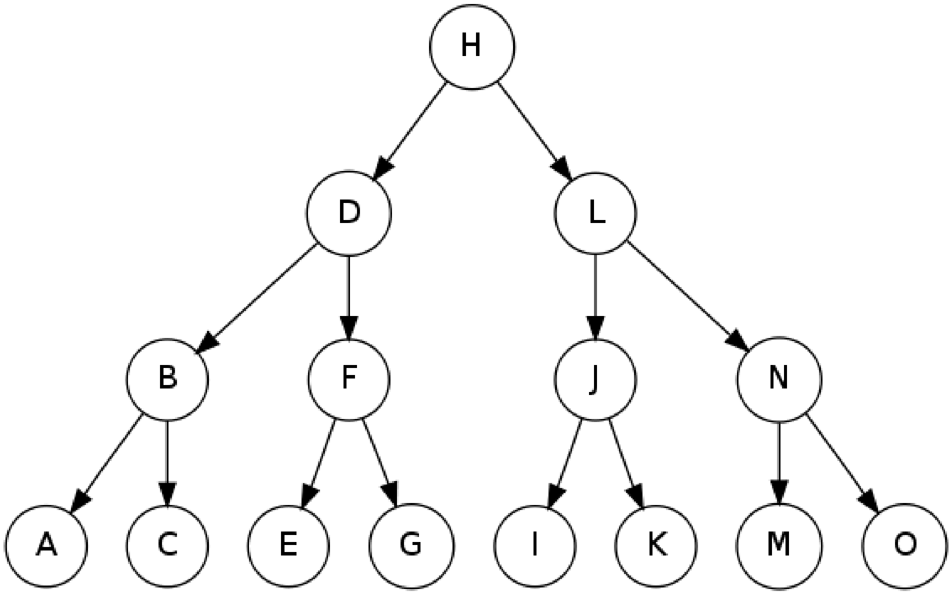
Specifičan slučaj ukorijenjenih stabala su binarana stabla. **Binarna stabla** (engl. binary tree) su stabla u kojima svaki čvor ima stupanj najviše 2. Binarno stablo koje je visine k ima 2^k-1 elemenata nazivamo **punim binarnim stablom** (engl. full binary tree). **Potpuno binarno stablo** (engl. complete binary tree) razine k je puno do razine k-1 te se na razini k nalaze, s lijeva nadesno, svi čvorovi koji su preostali (dakle ako stablo ima n čvorova, na zadnjoj se razini nalazi n-2^{k-1}-1 čvorova).



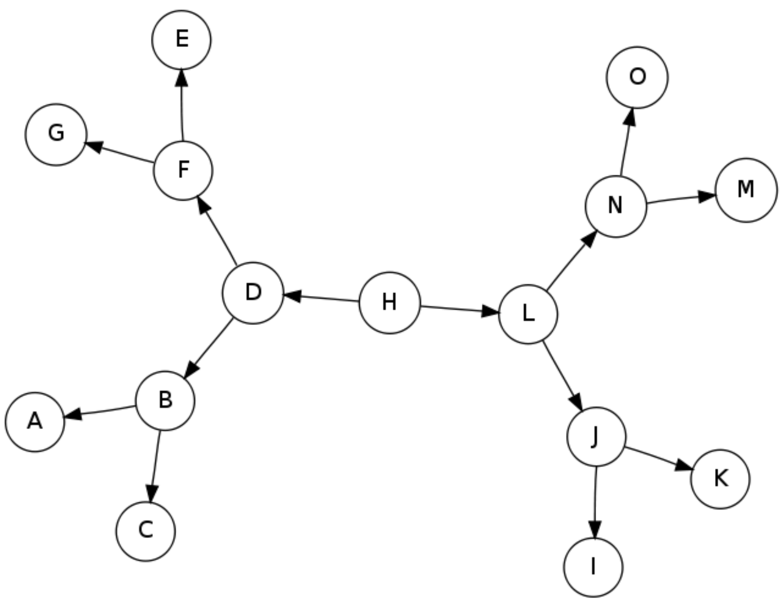
Slika 15 - primjer binarnog stablo



Slika 16 - primjer potpunog binarnog stabla



Slika 17 - primjer punog binarnog stabla



Slika 18 - primjer punog binarnog stabla sa slike 15 nacrtanog na atipičan način; kao što je moguće vidjeti, mnogo je teže uvidjeti pravilnost kada se ono crta na ovakav način

Poopćenje binarnih stabala su **k-stabla** (engl. k-ary tree). To su stabla u kojima je stupanj čvora jednak najviše k (binarna stabla su zato poznata i kao 2-stabla). Sva k-stabla mogu se transformirati na binarna stabla.

Grafovi na informatičkim natjecanjima

Mogli ste se do sada pitati gdje se mogu pronaći grafovi u stvarnom životu. Navest ćemo nekoliko primjera:

- mreža gradova i cesta među njima - gradove možemo zamisliti kao čvorove, a ceste kao bridove
- mreža cesta i raskrižja - raskrižja su čvorovi, a ceste su bridovi
- tramvajska mreža - stanice su čvorovi, a tračnice bridovi
- Internet - serveri se predstavljaju čvorovima, a kablovi bridovima
- vodovod - cijevi su bridovi, a njihova čvorišta čvorovi

Upravo kao takvi primjeri iz stvarnog života grafovi se pojavljuju u zadacima. Konkretno, to znači da tekst zadatka najčešće neće biti dan kao "Zadan je neusmjereni težinski graf..." nego kao "U nekoj državi postoji mreža dvosmjernih cesta. Za svaku cestu znamo vrijeme potrebno da odvozimo od početka do kraja...". Stoga je vrlo važno znati primjetiti grafove kad se pojavljuju u zadacima jer primjena algoritama koje ćete upoznati na predavanju bit će vam od ogromne koristi u rješavanju.

Grafovi u zadatku često mogu biti prikriveni. Jedan od takvih primjera je i ovaj (često neformalno znan i kao labirint):

- Zadana je matrica sa N stupaca i M redaka
- U svakom polju matrice nalazi se po jedan znak
    - Ako se na polju nalazi znak '#', tada je to polje neprohodno
    - Ako se na polju nalazi znak '.', tada je to polje prohodno
    - Ako se na polju nalazi znak '1', tada je to polje mjesto na kojem se na početku nalazimo
    - Ako se na polju nalazi znak '2', tada je to polje mjesto do kojega moramo doći
- U svakom trenutku možemo se pomaknuti na polje koje je neposredno gore, dolje, lijevo ili desno od polja na kojem se trenutno nalazimo
- Pitanja su najčešće u obliku za koliko najmanje trenutaka, ako je uopće moguće, možemo doći sa polja označeno sa '1' do polja označenog sa '2'

Grafovi u memoriji

Grafove ćemo u memoriji pamtiti najčešće kao matricu susjedstva ili kao listu susjedstva.
Matrica susjedstva (engl. adjacency matrix) je matrica u kojoj u retku x i stupcu y piše:

- koliko bridova postoji koji povezuju čvor x sa čvorom y ako je graf bestežinski
- težinu brida koji povezuje čvor x sa čvorom y ako je graf težinski (ako ga nema, obično stavimo ili -1 ili beskonačno)

Lista susjedstva (engl. adjacency list) je lista koja je pridružena svakom čvoru a u kojoj pišu susjedni čvorovi i težine bridova do njih, ako je graf težinski.

Teorijski zadaci za ponavljanje:

(njihovo rješavanje nije obavezno ali će pomoći u shvaćanju gradiva)

1. Dokaži da je broj čvorova neparnog stupnja u neusmjerenom grafu (naravno, bez jednočlanih ciklusa (petlji)) uvijek paran.
2. Koji od sljedećih iskaza ekvivalentni su ekvivalentni iskazu "Neusmjerni graf je stablo"?
    a. Neusmjereni graf je povezan i ne sadrži ljusku kao podgraf.
    b. Neusmjereni graf je povezan i ne sadrži jednostavan ciklus.
    c. Neusmjereni graf je povezan i ima n-1 bridova.

d. Neusmjereni graf nema ciklus i ima n-1 bridova.
e. Neusmjereni graf ne sadrži jednostavne cikluse, ali se dodavanjem točno jednog brida između bilo koja dva čvora dobiva bar jedan jednostavan ciklus.
f. Neusmjereni graf je 1-potpun.
g. Neusmjereni graf je 2-potpun.
h. Svaka dva čvora u neusmjerenom grafu spojena su točno jednim jednostavnim putem.
i. Neusmjereni graf nije povezan i ne sadrži jednostavne cikluse.
j. Neusmjereni graf je povezan, ali ne ostaje takav ako se makne bilo koji brid.
k. Promjer neusmjerenog grafa veći je od najvećeg stupnja nekog čvora u tom grafu.
l. Svi čvorovi neusmjerenog grafa su u istoj komponenti.

3. Dokaži da svako neusmjereno stablo sa barem dva čvora sadrži bar dva čvora koji imaju stupanj 1.
4. Dokaži da svaki čvor neusmjerenog grafa pripada točno jednoj komponetni.
5. Dokaži da je suma stupnjeva u neusmjerenom grafu jednaka 2|E|.
6. Koji je najveći broj bridova u neusmjerenom grafu da on ne bude povezan (izraziti u ovisnosti o broju čvorova)?
7. Pokaži da bilo koja 2 najdulja jednostavna puta u neusmjerenom grafu imaju barem jedan zajednički vrh.
8. Pokaži da ako neusmjereni graf G ne sadrži cikluse, da jednakost |V| = broj komponenti + |E|.
9. Dokaži da kad bi čvor usmjerenog grafa pripadao dvama različitim čvrsto povezanim komponentama, tada bismo te dvije mogli spojiti u jednu veću.

Literatura

1. Dragoš Cvetković: Kombinatorna teorija matrica; Naučna knjiga, Beograd, 1980.
2. Dragoš Cvetković: Diskretne matematičke strukture; Naučna knjiga, Beograd, 1983.
3. Robert Sedgewick: Algorithms in C++, Part 5 - Graph Algorihtms; Addison Wesley, SAD, 2007.
4. Cormen, Lieserson, Rivest, Stein: Introduction to Algorithms; MIT Press, SAD, 2001.