Primjer Završnog ispita iz Naprednih metoda digitalne obrade signala

1. Signal $x(n) = 4n^2 + 2n + 3$ dekomponiramo pomoću ortogonalnog wavelet filtarskog sloga koji ima tri nul-momenta. Skicirajte valićne koeficijente prva dva nivoa dekompozicije. Objasnite kako ste dobili rješenje.
2. Poznata je analizirajuća polifazna matrica sustava s potpunom rekonstrukcijom.
$$H_p(z) = \begin{bmatrix} -1 + z^{-1} & 1 + z^{-1} \\ 1 + z^{-1} & -1 + z^{-1} \end{bmatrix}.$$
Odredite:
    a. Analizirajuće filtre $H_0(z)$ i $H_1(z)$,
    b. Rekonstrukcijsku polifaznu matricu $F_p(z)$ čiji su filtri kauzalni,
    c. Rekonstrukcijske filtre $F_0(z)$ i $F_1(z)$,
    d. Jesu li polifazne matrice paraunitarne?
3. Rastavite polifaznu matricu $H_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ pomoću koraka podizanja, tj. prikažite ju ljestvičastom strukturom. Koliko vam je potrebno koraka podizanja? Prikažite shematski dobivenu strukturu.
4. Cjelobrojnim „pohlepnim“ algoritmom raspodijelite 4 bita u pojasnom koderu s decimiranim ortogonalnim filtarskim slogom s dvije grane. Zadani su analizirajući filtri $h_0 = \{\underline{1}, -1\}$ i $h_1 = \{\underline{1}, 1\}$ i ulazni signal $x = \{\underline{0}, 2, -2, 3, -1, 0\}$. Koliki je dobitak pojasnog kodiranja?
Podsjetnik:
$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (x(n) - \overline{x})^2.$$

Rješenja

1. Kako je zadan ortogonalni wavelet filtarski slog koji ima tri nul-momenta, wavelet će poništiti sve polinom treća reda ili manjeg. Kako je zadani signal drugog reda, valićni koeficijenti će mu biti nula.
2. $H_0(z) = -1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$, $H_1(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$.

   $F_p(z) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 - z^{-1} & 1 + z^{-1} \\ 1 + z^{-1} & 1 - z^{-1} \end{bmatrix}$.

   $F_0(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} + z^{-2} - z^{-3})$, $F_1(z) = \frac{1}{4}(1 + z^{-1} - z^{-2} + z^{-3})$.

   Polifazne matrice su paraunitarne.

3. $H_p(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -S_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -S_1 \\ T_1 & -S_1T_1 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow S_1(z) = -1, T_1 = -\frac{1}{2}$
4. Signal propušten kroz nisko i visokopropusni filtar, te decimirani daje:
   $X_0(z) = -4z^{-1} - 4z^{-2}$, $X_1(z) = 2z^{-2}$.
   Uz $N = 4$ standardna devijacija prve grane: $\sigma_1 = 2.3094$, a druge $\sigma_2 = 1$. $\sigma_1 > \sigma_2 \rightarrow r_1 = 1, r_2 = 0$.
   $\sigma_1 = \frac{\sigma_1}{2} = 1.1547, \sigma_2 = 1 \rightarrow \ \sigma_1 > \sigma_2 \rightarrow r_1 = 2, r_2 = 0,$
   $\sigma_1 = \frac{\sigma_1}{2} = 0.5774, \sigma_2 = 1 \rightarrow \ \sigma_1 < \sigma_2 \rightarrow r_1 = 2, r_2 = 1,$
   $\sigma_1 = 0.5774, \sigma_2 = \frac{\sigma_2}{2} = 0.5 \rightarrow \ \sigma_1 > \sigma_2 \rightarrow r_1 = 3, r_2 = 1.$
   Dobitak $G_{SBC} = \frac{2^{-2\bar{r}} \sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{M} \sigma_k^2 2^{-2r_k}} = 1.1875.$

PRIMJER ZAVRŠNOG ISPITA NADOS

(1.) $x(n) = 4n^2 + 2n + 3$

ortogonalni wavelet filtarski slog

3 nul-momenta

$X(n) \rightarrow$ red $= 2$ } sve se poništi
3 nul-momenta }

Prez 09. slide 35. → wavelet slogovi

Wavelet fja $\psi(t)$ ima mNUL-momenata

Ako je analizirani signal polinom m-tog reda, wavelet koef. će redom biti jednaki ϕ

Takvo wavelet razlaganje PONIŠTAVA polinome – informacija se prenosi isključivo u aproksimacijskim koef

→ s obzirom da se svaka glatka fja može predstaviti

(2.) $$H_p(z) = \begin{bmatrix} -1+z^{-1} & 1+z^{-1} \\ 1+z^{-1} & -1+z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} H_{00}(z) & H_{01}(z) \\ H_{10}(z) & H_{11}(z) \end{bmatrix}$$

b) $\det H_p(z) = (-1+z^{-1})^2 - (1+z^{-1})^2 =$

$= \cancel{1} - 2z^{-1} + \cancel{z^{-2}} \cancel{-1} - 2z^{-1} \cancel{- z^{-2}} =$

$= -4z^{-1}$

Uvjet potpune rekonstrukcije

$F_p(z) \cdot H_p(z) = I$ ili $z^{-L} I$

$F_p(z) = H_p^{-1}(z)$

$$F_p(z) = -\frac{1}{4z^{-1}} \begin{bmatrix} -1+z^{-1} & -1-z^{-1} \\ -1-z^{-1} & -1+z^{-1} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} z-1 & z+1 \\ z+1 & z-1 \end{bmatrix}$$ → to nije kauzalno (ostavljamo z^{1} vani)

Da bi i rekonstrukcijski filtri bili FIR determinanta mora biti oblika $\underline{cz^{-L}}$

$$F_p(z) = \frac{1}{4z^{-1}} \begin{bmatrix} 1-z^{-1} & 1+z^{-1} \\ 1+z^{-1} & 1-z^{-1} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$\det A = (ad-bc)$

c) $F_0(z) = F_{00}(z^2) + z^{-1} F_{01}(z^2)$

$= \frac{1}{4z^{-1}} (1 + z^{-2} + z^{-1} - z^{-3}) =$

$= \frac{z}{4} (1 + z^{-1} + z^{-2} - z^{-3})$

$$F_p(z) = \begin{bmatrix} F_{01}(z) & F_{11}(z) \\ F_{00}(z) & F_{10}(z) \end{bmatrix}$$

a) $H_0(z) = H_{00}(z^2) + z^{-1} H_{01}(z^2)$

$= -1 + z^{-2} + z^{-1} + z^{-3} = -1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$

$F_1(z) = F_{10}(z^2) + z^{-1} F_{11}(z^2)$

$= \frac{z}{4} (1 + z^{-1} - z^{-2} + z^{-3})$

$H_1(z) = H_{10}(z^2) + z^{-1} H_{11}(z^2) =$

$= 1 + z^{-2} - z^{-1} + z^{-3} = 1 - z^{-1} + z^{-2} + z^{-3}$

Paraunitarnost: $H_p^T(z^{-1}) \cdot H_p(z) = c \cdot I$

→ za ortonormalan sustav matrice $H_p(z)$ i $F_p(z)$ su paraunitarne!

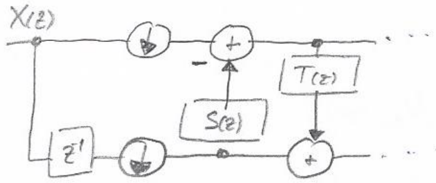
3.
$$H_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$H_p(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -S(z) = 1 \\ T(z) = -1/2 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} S(z) = -1 \\ T(z) = -1/2 \end{matrix}$$

1 korak podizanja gornje grane

1 korak podizanja donje grane



Ljestvičasta struktura

- struktura jamči potpunu rekonstrukciju čak i ako su filtri nelinearni i vremenski promjenjivi
- za filtre visokog reda broj operacija u odnosu na polifaznu realizaciju približno se smanjuje na pola
- Kaskada omogućuje izvršavanje operacija na istom memorijskom prostoru

Veza polifaznih matrica prije i nakon koraka podizanja:

$$H_{pnew}(z) = \begin{bmatrix} 1 & -S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot H_p(z)$$

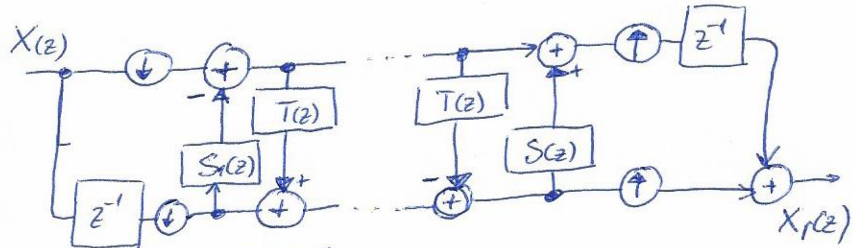
Na rekonstrukcijskoj strani

$$F_{pnew}(z) = H_{pnew}^{-1}(z) = H_p^{-1}(z) \begin{bmatrix} 1 & +S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_{pnew}(z) = F_p(z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & +S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrica $\begin{bmatrix} 1 & \pm S(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ podiže gornju granu

dok matrica $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm T(z) & 1 \end{bmatrix}$ podiže donju (drugu) granu



analizirajući dio

$$H_{pnew}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T(z) & 1 \end{bmatrix} \cdot H_p(z) \quad F_{pnew}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -T(z) & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$N=46$

dvije grane

$h_0 = \{\underline{1}, -1\}$

$h_1 = \{\underline{1}, 1\}$

$x = \{\underline{0}, 2, -2, 3, -1, 0\}$

$X(z) = 2z^{-1} - 2z^{-2} + 3z^{-3} - z^{-4}$

$H_0(z) = (1 - z^{-1})$

$H_1(z) = (1 + z^{-1})$

$X_0(z) = H_0(z)X(z) = (1 - z^{-1})(2z^{-1} - 2z^{-2} + 3z^{-3} - z^{-4})$

$= 2z^{-1} - 2z^{-2} + 3z^{-3} - 2z^{-2} + 2z^{-3} - 3z^{-4} - z^{-4} + z^{-5} =$

$= 2z^{-1} - 4z^{-2} + 5z^{-3} - 4z^{-4} + z^{-5}$

$X_1(z) = H_1(z)X(z) = (1 + z^{-1})(2z^{-1} - 2z^{-2} + 3z^{-3} - z^{-4})$

$= 2z^{-1} - \cancel{2z^{-2}} + 3z^{-3} + \cancel{2z^{-2}} - 2z^{-3} + 3z^{-4} - z^{-4} - z^{-5}$

$= 4z^{-1} + 3z^{-3} + 2z^{-4} - z^{-5}$

nakon decimiranja

$X_0(z) = -4z^{-2} - 4z^{-4} \longrightarrow -4z^{-1} - 4z^{-2}$

$X_1(z) = 2z^{-4} \longrightarrow 2z^{-2}$

$\overline{X}_1 = -\frac{8}{4} = -2 \qquad \overline{X}_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n) - \overline{x})^2$$

broj uzoraka signala prvi na nule!

vrijednost interpoliranog signala u n

srednja vrijednost interpoliranog signala (prvih N vrijednosti)

$$\frac{\sum_{n=0}^{N-1}(x(n))}{N} = \overline{x}$$

broj uzoraka signala prvi na nule!

$\sigma_1 = 2{,}3094 \; \vee \quad \sigma_2 = 1 \quad \Big\} \; r_1 = 1, \; r_2 = 0$

*r - broj bitova dodijeljen grani, njega uvećavamo za 1

$\sigma_{21} = \frac{\sigma_1}{2} = 1{,}1547 \; \vee \quad \sigma_{22} = \sigma_2 = 1 \quad \Big\} \; r_1 = 2, \; r_2 = 0$

$\sigma_{31} = \frac{\sigma_1}{4} = 0{,}57 \; \wedge \quad \sigma_{32} = \sigma_2 = 1 \quad \Big\} \; r_1 = 2, \; r_2 = 1$

$\sigma_{41} = \frac{\sigma_1}{4} = 0{,}57 \; \vee \quad \sigma_{42} = \frac{\sigma_2}{2} = 0{,}5 \quad \Big\} \; r_1 = 3, \; r_2 = 1$

DOBITAK

$\overline{r} = \frac{r_1 + r_2}{2}$ *M - broj razina filt. sloga

$$G_{SBC} = \frac{2^{-2\overline{r}}\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^2}{\sum_{k=1}^{M}\sigma_k^2 2^{-2r_k}} = 1{,}1875$$

sigma svake razine (početna)

3

Cjelobrojni algoritam

- uvećavanje r_k bita tako da u svakom koraku imamo najveće smanjenje distorzije

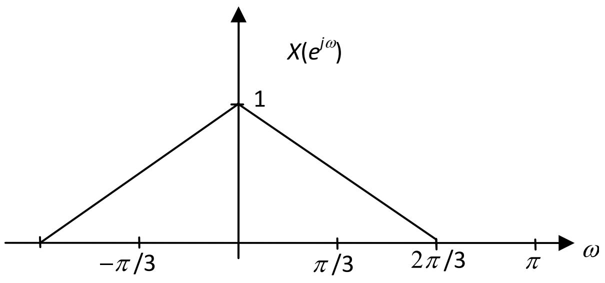
1) Pronađe se pojas s najvećom standardnom devijacijom σ_k i dodjeljuje mu se 1 bit $r_k = r_k + 1$

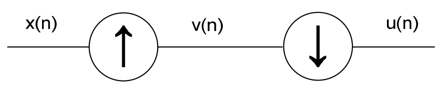
2) σ_k pripadnog pojasa se reducira na $\sigma_k = \frac{\sigma_k}{2}$

→ dok se ne potroše svi raspoloživi bitovi ili dok se ne postigne po želji mala distorzija

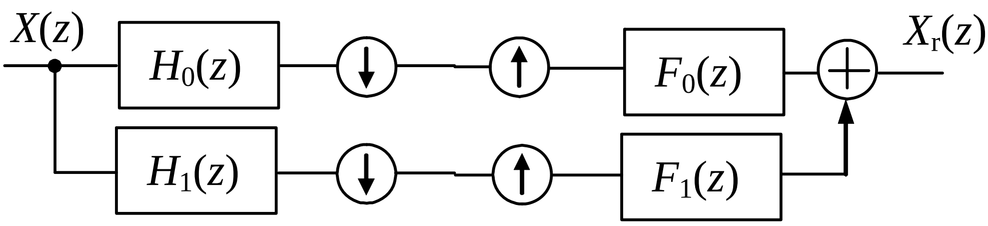
Primjer 2. međuispita iz Naprednih metoda digitalne obrade signala

1. Nad spektrom prikazanim slikom obavljena je decimacija i interpolacija faktorom M=3. Skicirajte tako dobivene spektre *v(n)* i *u(n)*. Navedite svojstva u vremenskoj, frekvencijskoj i Z-domeni.





2. Filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom, decimatorom i interpolatorom za faktor 2 zadan je slikom. Poznati su impulsni odzivi analizirajućih filtara $h_0(n) = [1\ 1\ 1]$ i $h_1(n) = [1\ -1\ 1]$. Odredite biortogonalne sintetizirajuće filtre $f_0(n)$ i $f_1(n)$ koji zadovoljavaju uvjet potpune rekonstrukcije bez izobličenja, te uvjet poništenja aliasinga. Odredite analizirajuću i sintetizirajuću modulacijsku matricu. Što znači da je slog biortogonalan?

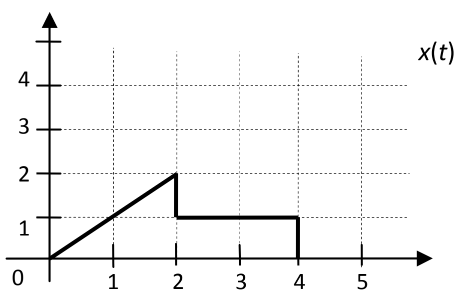


3. Filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom zadan je slikom iz zadatka 2. Ako je produkt filtar

$$P_0(z) = \frac{1}{16}(1 + z^{-1})^4(c - z^{-1})(-c^{-1} + z^{-1})$$

odrediti filtre biortogonalnog filtarskog sloga tako da dobijete linearnu fazu. Skicirajte nultočke i impulsne odzive svih filtara sloga uz $c = 2 - \sqrt{3}$.

4. Izračunajte brzu oktavnu Haarovu DWT kontinuiranog signala na slici i skicirajte postupak. Računanje krenite od razine *k* = 0; odnosno za $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$.



PRIMJER 2.MI IZ NMDOS-a

3. $P_0(z) = \frac{1}{16}\underbrace{(1+z^{-1})^4}\underbrace{(C-z^{-1})}(-C^{-1}+z^{-1})$

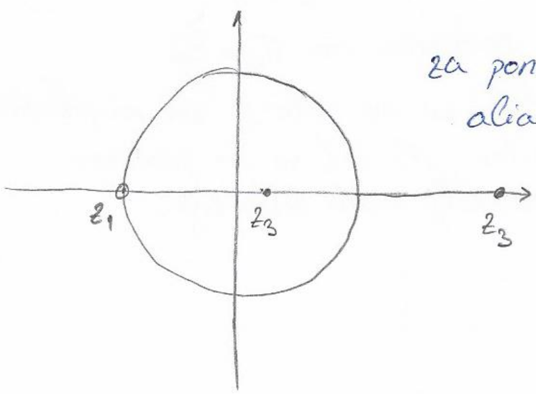
$\hookrightarrow z^{-1} = \frac{1}{C} \to z_3 = C = 2-\sqrt{3}$

$\underline{C = 2-\sqrt{3}}$

$\hookrightarrow z^{-1} = C$

$z_2 = \frac{1}{C} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$

4 nultočke $z_1 = -1$



$P_0(z) = H_0(z) \cdot F_0(z)$

za poništenje aliasinga $\left\{ \begin{array}{l} F_0(z) = H_1(-z) \\ F_1(z) = -H_0(-z) \end{array} \right.$

$\Rightarrow P(z) = H_0(z^{-1})\, H_0(z)$

$P_0(z) = (1+z^{-1})^{2p}\, Q_{2p-2}(z)$

$P_0(z) = \frac{1}{16}(1+z^{-1})^4 \overbrace{(-1+Cz^{-1}-C^{-1}z^{-1}-z^{-2})}^{Q} = \frac{1}{16}(1+z^{-1})^4(-1+(C-C^{-1})z^{-1}-z^{-2})$

$P_0(z)$ rastavimo na umnožak dvije fje od z, takve da im stupanj polinoma bude jednak.

Q dio ne smijemo rastavljati jer svaki zasebno nema linearnu fazu

$H_0(z) = \frac{1}{4}(1+z^{-1})(-1+(C-C^{-1})z^{-1}-z^{-2}) = \frac{1}{4}(-1+(C-C^{-1})z^{-1}-z^{-2}-z^{-1}+(C-C^{-1})z^{-2}-z^{-3}) =$

$= \frac{1}{4}(-1+(-1+C-C^{-1})z^{-1}(-1+C-C^{-1})z^{-2}-z^{-3}) \Rightarrow h_0 = \{\overset{0}{-0{,}25}, \overset{1}{0{,}75}, \overset{2}{0{,}75}, \overset{3}{-0{,}25}\}$

$\boxed{f_1 = h_0 \cdot (-1)^{n+1}} = \{0{,}25, 0{,}75, -0{,}75, -0{,}25\}$

$F_0(z) = \frac{1}{4}(1+z^{-1})(1+2z+z^{-2}) = \frac{1}{4}(1+3z^{-1}+3z^{-2}+z^{-3})$

$f_0 = \{0{,}25, 0{,}75, 0{,}75, 0{,}25\}$

$\boxed{f_0 = h_1(-1)^n}$

$h_1 = \{-0{,}25, 0{,}75, -0{,}75, 0{,}25\}$