TEME ZA 1. MI

Fourierova transformacija

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Dovoljni uvjeti za postojanje:

1) Dirichletovi uvjeti – $x(t)$ ima konačan broj maksimuma i minimuma te konačan broj diskontinuiteta na bilokojem konačnom intervalu od t

2) $x(t)$ je apsolutno integrabilna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

CENTAR KONCENTRACIJE ENERGIJE

$$\underbrace{t_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |x(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt}}_{\text{vremenska domena}}$$

$$\underbrace{\omega_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \omega |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}}_{\text{frekvencijska domena}}$$

EFEKTIVNA ŠIRINA

$$\underbrace{\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t_c)^2 |x(t)|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2}}_{\text{vremenska domena}}$$

$$\underbrace{\Delta_\omega^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_c)^2 |X(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}}_{\text{frekvencijska domena}}$$

HEISENBERGOV PRINCIP NEODREĐENOSTI

Za svaki transformacijski par $x(t)$, $X(\omega)$ vrijedi:

$$\Delta_t \cdot \Delta_\omega \geq \frac{1}{2} \quad \left(\Delta_t \cdot \Delta_f \geq \frac{1}{4\pi}\right)$$

→ produkt širina je konstanta

DTFT

$$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, d\omega \end{cases}$$

Fourierov red

$$\begin{cases} X[n] = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x_T(t) e^{-jn\Omega t} \, dt \\ x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n] e^{jn\Omega t} \end{cases}$$

$$\omega \Rightarrow n\Omega \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$$

DFT

$$\begin{cases} X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\ x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \end{cases}$$

$$W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

redak

stupac

$$\mathbf{W}_N = \left[W_N^{nk} \right]$$

UNITARNOST

Matrica je unitarna ako vrijedi

$$A^{T*} \cdot A = c \cdot I \quad , \quad c > 0$$

$\Rightarrow$ stupci unitarne matrice su ortogonalni

$$A^{-1} = \frac{1}{c} \cdot A^{T*}$$

DFT je unitarna

$$W_N^{T*} \cdot W_N = N \cdot I$$

$$W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^{T*}$$

transpozicija zapravo ne treba jer je simetrična

FOURIEROVA TRANSFORMACIJA NA VREMENSKOM OTVORU (STFT)

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, g^*(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$\left\{ g_{\tau,f}(t) = g(t-\tau)\, e^{j2\pi f t} \mid \tau, f \in R \right\} \rightarrow \text{skup FUNKCIJA RAZLAGANJA}$$

Izbor otvora: najčešći izbor je otvor g simetričan oko nule jer tada vrijedi $t_c = \tau$, središte koncentracije je u potpunosti određeno vremenskim pomakom τ, a veza je linearna

CENTRI KONCENTRACIJE ENERGIJE

$$\underbrace{t_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t \left| g(t-\tau) e^{j\omega t} \right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(t-\tau) e^{j\omega t} \right|^2 dt}}_{\text{vremenska domena}} \qquad \underbrace{w_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w \left| G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau} \right|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau} \right|^2 dw}}_{\text{frekvencijska domena}}$$

EFEKTIVNE ŠIRINE

širina samog otvora

$$\underbrace{\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-\tau)^2 \left| g(t-\tau) e^{j\omega t} \right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| g(t-\tau) e^{j\omega t} \right|^2 dt} = \Delta_g^2}_{\text{vremenska domena}} \qquad \underbrace{\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (w-\omega)^2 \left| G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau} \right|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} \left| G(w-\omega) e^{j(w-\omega)\tau} \right|^2 dw} = \Delta_G^2}_{\text{frekvencijska domena}}$$

RAZLUČIVOST U T-F ravnini

Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je <u>konstantna</u> i definirana svojstvima vremenskog otvora.

Idealna lokalizacija u jednoj domeni uzrokuje ~~lošu lo~~ lošu lokalizaciju u drugoj

INVERZNA STFT

$$x(t) = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \int_\tau \int_\omega X(\tau,\omega)\, g(t-\tau)\, e^{j\omega t}\, d\omega\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = C$$ ← UVJET: otvor g je konačne energije

NAČINI RAČUNANJA STFT

1) Kao niz Fourierovih transformacija za različite vremenske pomake τ

$$X(\tau,\omega) = \int_t [x(t)\, g^*(t-\tau)]\, e^{-j\omega t}\, dt$$

2) Kao slog filtracija za različite frekvencijske pomake ω

$$X(\tau,\omega) = \int_t [x(t)\, e^{-j\omega t}]\, g^*(t-\tau)\, dt$$

⇒ za $\omega = 0$

$$\underbrace{\int_t x(t) \cdot g^*[-(\tau - t)]\, dt}_{\text{konvolucijski integral fja } x(t) * g(-t)}$$

ovaj minus rezultira time da se kod konvolucije otvor ne zrcali

DISKRETIZACIJA STFT

$\tau = mT$

$\omega = k\Omega$

$$X[mT, k\Omega] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, g^*(t - \underbrace{mT}_{\text{diskretni vremenski pomak}})\, \underbrace{e^{-jk\Omega t}}_{\text{diskretni frekvencijski pomak}}\, dt$$

⇒ jednolika kvantizacija T-F ravnine

GABOROVA EKSPANZIJA – rekonstrukcijska (inverzna) formula za STFT

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X[m,k] \cdot g_{m,k}(t)$$

↳ mjera sadržaja $x(t)$ na lokaciji $mT, k\Omega$

TEORIJA OKVIRA (Frame theory) - uvjet rekonstrukcije STFT

↳ DOVOLJAN UVJET

$$\underbrace{A\|X\|^2}_{\text{energija signala}} \le \underbrace{\sum_{m,k} \|X[m,k]\|^2}_{\text{energija koeficijenata}} \le B\underbrace{\|X\|^2}_{\text{energija signala}}, \quad 0 < A \le B < \infty$$

A, B: zadaju energetski okvir transformacije

NUŽAN UVJET

$$T\Omega \le 2\pi$$

WAVELET TRANSFORMACIJA

CWT

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right)dt$$

skup razlaganja: $\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)$, čest izbor je $\psi(t)$ simetrična oko 0 $\rightarrow t_c = 0$

CENTAR KONCENTRACIJE ENERGIJE

centar težišta same funkcije ψ

$$t_c = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2} = a t_\psi + \tau$$

vremenska domena

$$\omega_c^+ = \frac{\int_0^{+\infty}\omega\left|\sqrt{a}\,\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{\int_0^{+\infty}\left|\sqrt{a}\,\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega} = \frac{\omega_\psi^+}{a}$$

frekvencijska domena

EFEKTIVNE ŠIRINE

$$\Delta_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(t-\tau)^2\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right)\right|^2 dt} = a^2\Delta_\psi^2$$

vremenska domena

$$\Delta_f^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_\psi)^2\left|\sqrt{a}\cdot\Psi(a\omega)\,e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\sqrt{a}\,\Psi(a\omega)e^{-j\omega\tau}\right|^2 d\omega} = \frac{\Delta\psi}{a}$$

frekvencijska domena

$$\Delta_t = a\Delta_\psi$$
$$\Delta_f = \frac{\Delta\psi}{a}$$

CWT razlučivost

Centri koncentracije energije funkcija razlaganja u obje domene su LINEARNO ovisni o $\underline{\tau}$ te NELINEARNO ovisni o skali $\underline{a}$

Efektivna širina funkcija razlaganja u obje domene je PROMJENJIVA, ali je produkt širina KONSTANTAN i određen svojstvima otvora ψ

STFT	CWT
konstantna rezolucija na cijeloj T-F ravnini	finija rezolucija u frekvencijskoj domeni za niske frekvencije finija rezolucija u vremenskoj domeni za visoke frekvencije

INVERZNA CWT

$$x(t) = \frac{1}{C} \int_{\tau}\int_{a} X(\tau,a) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-\tau}{a}\right) da\, d\tau \,, \quad C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

uvjet: $0 < C < \infty$

NAČINI RAČUNANJA CWT

1) U Fourierovoj domeni

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \psi^*\left(\frac{t-\tau}{a}\right) dt$$

$$X(\tau,a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sqrt{a} \cdot \Psi(-a\omega)\, e^{-j\omega\tau} d\omega$$

$$X(\tau,a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(-\omega) \cdot \Psi(a\omega)\, e^{j\omega\tau} d\omega$$

2) Kao slog filtracija za različite skale a

$$X(\tau,a) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \psi^*\left[-\frac{1}{a}(\tau-t)\right] dt}_{\text{konvolucija } x(t) * \psi(-t)}$$

$\boxed{\text{DWT}}$ $\quad a = a_0^k$ logaritamska podjela u skali

$\tau = mTa_0^k$ pomak usklađen s iznosom skale

FUNKCIJE RAZLAGANJA : $\dfrac{1}{\sqrt{a_0^k}}\,\psi\left(\dfrac{t}{a_0^k} - mT\right)$

OUVJET REKONSTRUKCIJE:

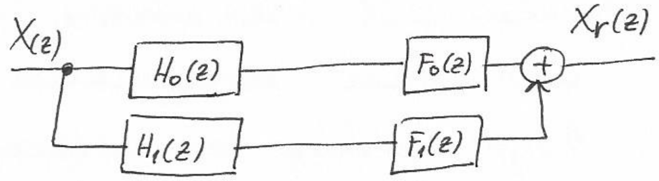
$$A\|X\|^2 \leq \sum_{m,k} \|X[m,k]\|^2 \leq B\|X\|^2$$

$$0 < A \leq B < \infty$$

$$\begin{cases} X[m,k] = \dfrac{1}{\sqrt{a_0^k}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\psi\left(\dfrac{t}{a_0^k} - mT\right) dt \\ x(t) = \displaystyle\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[m,k] \cdot \psi_{m,k}(t) \end{cases}$$

TEME ZA 2MI

FILTARSKI SLOG S DVA FILTRA



OUVJET POTPUNE REKONSTRUKCIJE:

$$F_0(z) \cdot H_0(z) + F_1(z) H_1(z) = z^{-L}$$ → kašnjenje rekonstruiranog signala

ENERGETSKI OKVIR PRESLIKAVANJA:

$|H_0(z)|^2 + |H_1(z)|^2$ → A - minimum dobivenog izraza

→ B - maksimum dobivenog izraza

DECIMACIJA

odbacivanje svakog M-tog uzorka

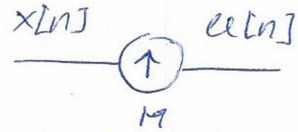
VREMENSKA DOMENA $\quad v[n] = x[Mn]$

FREKVENCIJSKA DOMENA $\quad V(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{M}\left(X(e^{j\frac{\omega}{M}}) + X(e^{j\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi}{M}}) + \dots + X(e^{j\frac{\omega}{M} + \frac{2\pi(M-1)}{M}})\right)$

Z - DOMENA $\quad V(z) = \dfrac{1}{M}\left(X(z^{\frac{1}{M}}) + X(z^{\frac{1}{M}} e^{j\frac{2\pi}{M}}) + \dots + X(z^{\frac{1}{M}} e^{j\frac{2\pi(M-1)}{M}})\right)$

→ spektar se rasteže M puta, a amplituda mu se dijeli s M!

EKSPANZIJA (INTERPOLACIJA)
- umetanje ∅ između susjednih uzoraka



VREMENSKA DOMENA $u[Mn] = x[n]$, drugdje ∅

FREKVENCIJSKA DOMENA $U(e^{j\omega}) = X(e^{jM\omega})$

Z-DOMENA $U(z) = X(z^{M})$

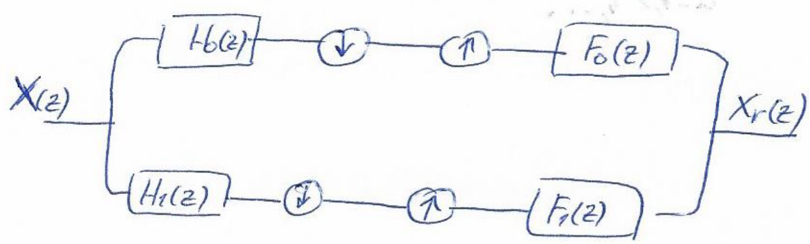
→ sužavanje spektra M puta, amplituda ostaje ista!
(pojava ponavljajućih slika)

FILTARSKI SLOG S DVA KANALA, DECIMACIJOM I EKSPANZIJOM

UVJETI POTPUNE REKONSTRUKCIJE

1) Uvjet rekonstrukcije bez izobličenja

$$F_0(z)H_0(z)+F_1(z)H_1(z) = 2z^{-L}$$



2) Uvjet poništenja aliasinga

$$F_0(z)H_0(-z)+F_1(z)H_1(-z) = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{bmatrix}}_{F_m(z)} \underbrace{\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}}_{H_m(z)} = \begin{bmatrix} 2z^{-L} & 0 \\ 0 & 2z^{-L} \end{bmatrix}$$

$H_m(z)$ – ANALIZIRAJUĆA MODULACIJSKA MATRICA

$F_m(z)$ – SINTETIZIRAJUĆA MODULACIJSKA MATRICA

BIOORTOGONALNOST

filtarski slog je bioortogonalan kada, uz korištenje modulacijskih matrica i $L=0$ uvjet potpune rekonstrukcije glasi:

$$F_m(z) \cdot H_m(z) = 2I$$