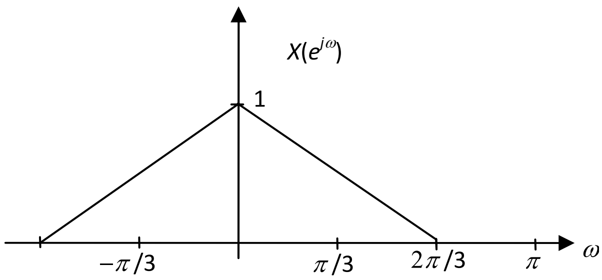
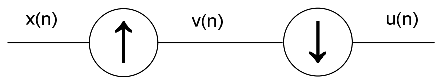
Primjer 1. međuispita iz Naprednih metoda digitalne obrade signala

1. Navedite opći izraz i svojstva DFT matrice. Napišite primjer matrice za *N=4*. Matričnim množenjem transformirajte signal $x = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 1]^T$. Definirajte unitarnost i provjerite na ovom primjeru.
2. Navedite transformacijski par kod diskretizirane STFT. Objasnite diskretizaciju T-F ravnine.
3. Navedite funkciju razlaganja i transformacijski izraz za DWT. Koji uvjet mora biti zadovoljen kako bi bila moguća potpuna rekonstrukcija kod DWT-a?
4. Zadan je filtarski slog sa dva pojasa. Filteri prvog pojasa su $H_0(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$ i $H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}$. Odredite filtere drugog pojasa $F_0(z)$ i $F_1(z)$ koji imaju po dva uzorka impulsnog odziva, a koji omogućuju potpunu rekonstrukciju uz dozovoljeno kašnjenje rekonstruiranog signala *L=2*. Odredite energetski okvir preslikavanja.

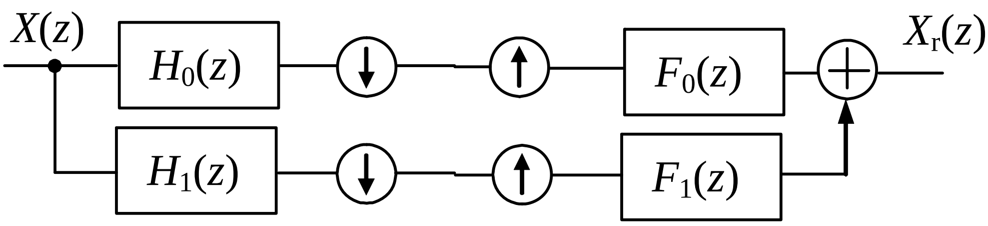
Primjer 2. međuispita iz Naprednih metoda digitalne obrade signala

1. Nad spektrom prikazanim slikom obavljena je decimacija i interpolacija faktorom M=3. Skicirajte tako dobivene spektre *v(n)* i *u(n)*. Navedite svojstva u vremenskoj, frekvencijskoj i Z-domeni.





2. Filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom, decimatorom i interpolatorom za faktor 2 zadan je slikom. Poznati su impulsni odzivi analizirajućih filtara $h_0(n) = [1\ 1\ 1]$ i $h_1(n) = [1\ -1\ 1]$. Odredite biortogonalne sintetizirajuće filtre $f_0(n)$ i $f_1(n)$ koji zadovoljavaju uvjet potpune rekonstrukcije bez izobličenja, te uvjet poništenja aliasinga. Odredite analizirajuću i sintetizirajuću modulacijsku matricu. Što znači da je slog biortogonalan?

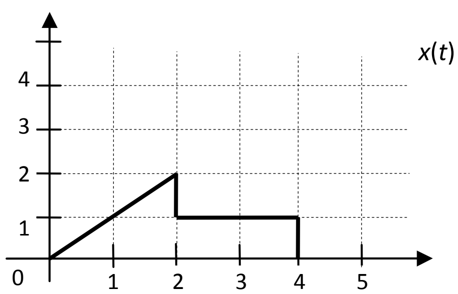


3. Filtarski slog s potpunom rekonstrukcijom zadan je slikom iz zadatka 2. Ako je produkt filtar

$$P_0(z) = \frac{1}{16}(1+z^{-1})^4(c-z^{-1})(-c^{-1}+z^{-1})$$

odrediti filtre biortogonalnog filtarskog sloga tako da dobijete linearnu fazu. Skicirajte nultočke i impulsne odzive svih filtara sloga uz $c = 2-\sqrt{3}$.

4. Izračunajte brzu oktavnu Haarovu DWT kontinuiranog signala na slici i skicirajte postupak. Računanje krenite od razine *k* = 0; odnosno za $\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{drugdje} \end{cases}$.



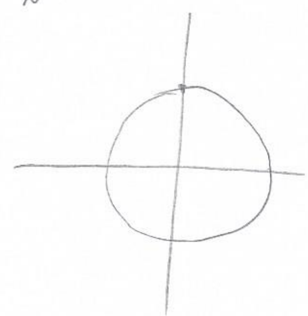
(1.) $$DFT_{matrica} = \begin{bmatrix} W_N^{nk} & \cdots & W_N^{n(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ W_N^{(N-1)nk} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \qquad W_N^{nk} = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$$

DFT matrica je <u>unitarna</u> $W_N^{T*} \cdot W_N = N \cdot I$

- stupci su međusobno ortogonalni

DFT matrica je <u>simetrična</u> $W_N^{-1} = \frac{1}{N} W_N^{*}$

$$W_4^{nk} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}$$



$x = [0\ 1\ 0\ 1]^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Provjera unitarnosti

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \overset{N}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.)

$$X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, g^{*}(t-\tau)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi \|g\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau,\omega)\, g(t-\tau)\, e^{j\omega t}\, dt$$

Smanjenje efektivne širine u jednoj domeni (povećanje rezolucije) dovodi do povećanja u drugoj (smanjenje rezolucije)

→ zato što je geometrija funkcija razlaganja u T-F ravnini konstanta

(3.)

Funkcija razlaganja DWT:

$$\psi_{m,k} = \frac{1}{\sqrt{a_0^k}}\, \psi\left(\frac{t}{a_0^k} - mT\right)$$

DWT transformacijski izraz:

$$X[m,k] = \frac{1}{\sqrt{a_0^k}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \psi\left(\frac{t}{a_0^k} - mT\right) dt$$

Uvjet moguće rekonstrukcije:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{m,k} \|X[m,k]\|^2 \leq B\|x\|^2 \quad , 0 < A \leq B < \infty$$

4.

$$\begin{cases} H_0(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \\ H_1(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} \end{cases} \quad \dots$$

$$H_0(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{3}e^{-2j\omega} = \frac{1}{3}e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} - 1 + e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}\left(2\cos(\omega) - 1\right)$$

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}\left(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}\right) = \frac{1}{3}e^{-j\omega}\left(2\cos(\omega) + 1\right)$$

$$|H_0|^2 + |H_1|^2 = \frac{1}{9}\left(4\cos^2(\omega) - 4\cos(\omega) + 1\right) + \frac{1}{9}\left(4\cos^2(\omega) + 4\cos(\omega) + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(8\cos^2(\omega) + 2\right) \Rightarrow \min \rightarrow \cos(\omega) = 0 \Rightarrow A = \frac{2}{9}$$

$$\max \rightarrow \cos(\omega) = 1 \Rightarrow B = \frac{10}{9}$$

NIJE SE TRAŽILO SAMO ZA VJEŽBU

traže se samo dva uzora filtarskog sloga

$$F_0(z) = f_0[0] + f_0[1]z^{-1}$$

$$F_1(z) = f_1[0] + f_1[1]z^{-1}$$

Uvjet potpune rekonstrukcije:

$$X_r(z) = z^{-L}X(z)$$

$$H_0(z) = h_0[0] + h_0[1]z^{-1} \qquad F_0(z) = f_0[0] + f_0[1]z^{-1}$$

$$H_1(z) = h_1[0] + h_1[1]z^{-1} \qquad F_1(z) = f_1[0] + f_1[1]z^{-1}$$

$$H_0(z)F_0(z) + H_1(z)F_1(z) = z^{-L}$$ ← kašnjenje rekonstruiranog signala

$$\left(f_0[0] + f_0[1]z^{-1}\right)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}\right) + \left(f_1[0] + f_1[1]z^{-1}\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2}\right) = z^{-2} =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\left(f_0[0] + f_1[0]\right) + \left(f_0[1] - f_0[0] + f_1[1] + f_1[0]\right)z^{-1} + \left(f_0[0] - f_0[1] + f_1[0] + f_1[1]\right)z^{-2} +$$

$$+ \left(f_0[1] + f_1[1]\right)z^{-3}\Big] \Rightarrow \frac{1}{3}\left(f_0[0] + f_1[0]\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(f_0[1] - f_0[0] + f_1[1] + f_1[0]\right) = 0$$

$$\frac{1}{3}\left(f_0[0] - f_0[1] + f_1[0] + f_1[1]\right) = 1.$$

$$\frac{1}{3}\left(f_0[1] + f_1[1]\right) = 0$$

$$\begin{cases} f_0[0] = -f_1[0] \\ f_0[1] = -f_1[1] \end{cases}$$

$$\cancel{-f_1[1]} + f_1[0] + \cancel{f_1[1]} + f_1[0] = 0 \Rightarrow f_1[0] = 0 = f_0[0]$$

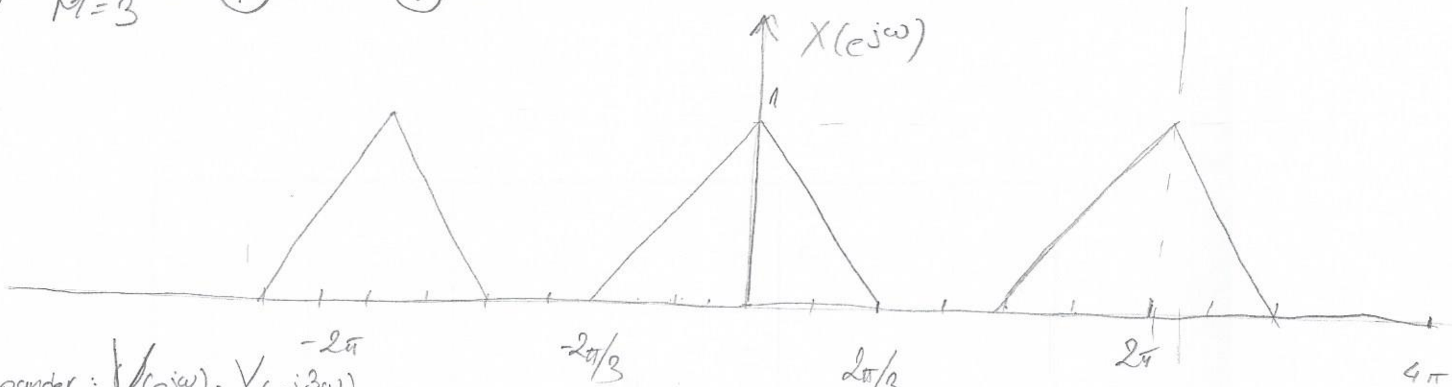
$$\cancel{-f_1[0]} + f_1[1] + \cancel{f_1[0]} + f_1[1] = 3 \Rightarrow f_1[1] = \frac{3}{2} \qquad f_0[1] = -\frac{3}{2}$$

$$F_0(z) = -\frac{3}{2}z^{-1}$$

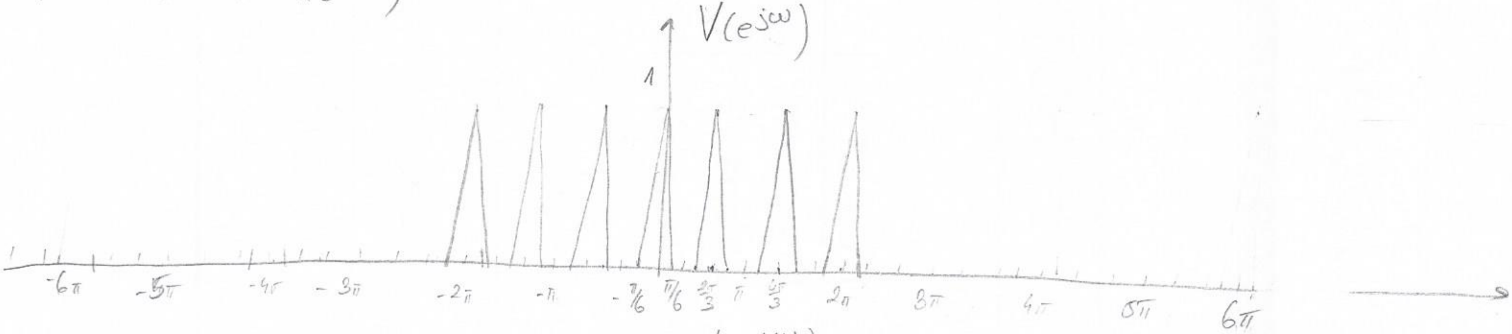
$$F_1(z) = \frac{3}{2}z^{-1}$$

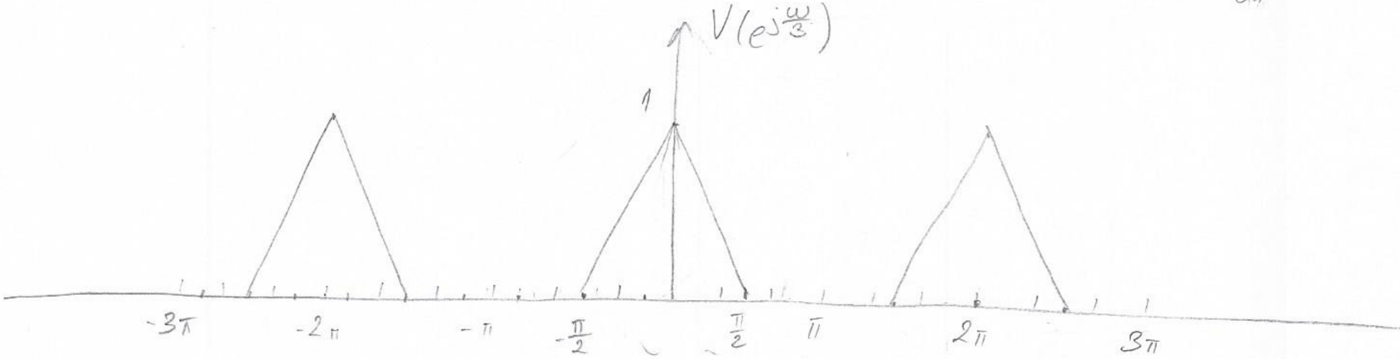
① $M=3$ $\quad x[n] \to \boxed{\uparrow} \xrightarrow{v[n]} \boxed{\downarrow} \to u[n]$

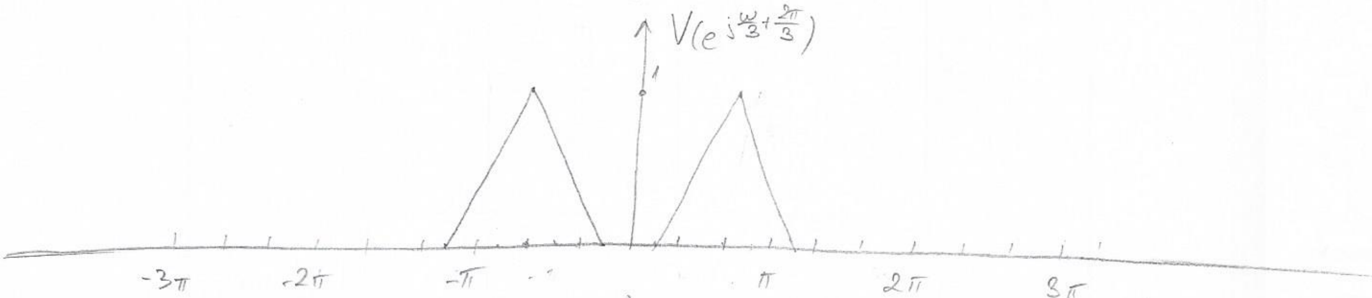
PRIMJER 2. MI

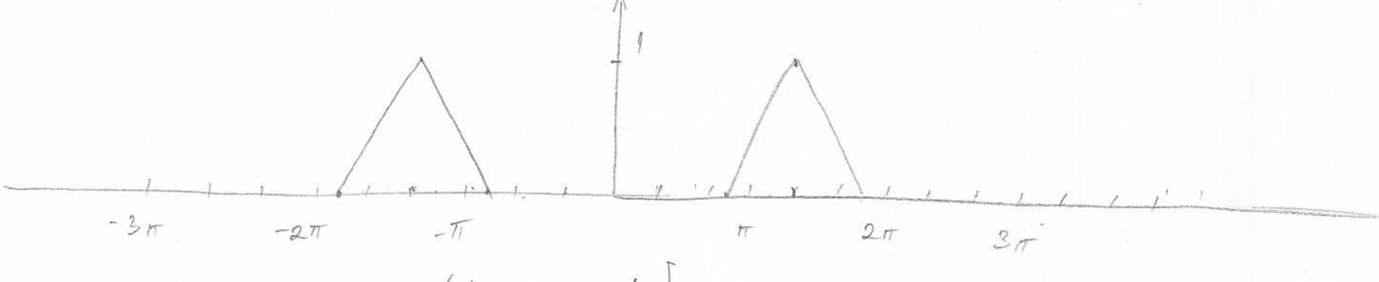


1. Ekspander : $V(e^{j\omega}) = X(e^{j3\omega})$

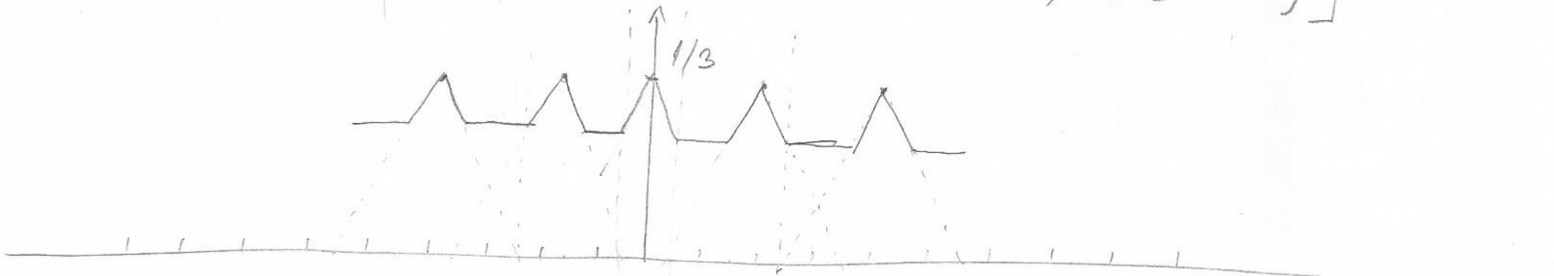








$$U(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}\left[V(e^{j\frac{\omega}{3}}) + V(e^{j\frac{\omega}{3}+\frac{2\pi}{3}}) + V(e^{j\frac{\omega}{3}+\frac{4\pi}{3}})\right]$$



DECIMACIJA

U vremenskoj domeni $v[n] = x[Mn]$

U frekvencijskoj domeni $$V(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\left[X(e^{j\frac{\omega}{M}}) + X(e^{j\frac{\omega}{M}+\frac{2\pi}{M}}) + \dots + X(e^{j\frac{\omega}{M}+\frac{2\pi}{M}(M-1)})\right]$$

U z-domeni $$V(z) = \frac{1}{M}\left[X(z^{\frac{1}{M}}) + X(z^{\frac{1+2\pi}{M}}) + \dots + X(z^{\frac{1+2\pi(M-1)}{M}})\right]$$

EKSPANZIJA

U vremenskoj domeni $u[Mn] = x[n]$, drugdje 0

U frekvencijskoj domeni $U(e^{j\omega}) = X(e^{jM\omega})$ (spektar se sužava!)

U z-domeni $U(z) = X(z^{M})$