1. Svojstva nelinearnih sustava

- rješenje nije uvijek u zatvorenoj formi
- stabilnost ovisi o početnim uvjetima, pobudi i parametrima sustava (kod lin. s. samo o parametrima sustava)
- odziv nelinearnog sustava obično sadrži dodatne frekvencijske komponente, a može i ne sadržavati frekvenciju pobudnog signala
- može imati više ravnotežnih stanja (stanje u kojem se sustav zadržava ako na njega ne djeluje pobuda)
- 6 tipova singularnih točaka koje određuju kretanje faze, trajektorije: centar, stabilan fokus, nestabilan fokus ×, sedlo, st. čvor, nestabilan čvor × ×

↳ separatrisa – krivulja koja dijeli stabilno i nestabilno područje

-> Sustav je linearan ako vrijedi linearnost slobodnog i prisilnog odziva

- vlastite oscilacije nelin. sustava (granični ciklusi) - ovise o početnim uvjetima

(11) 2. Lipschitzov kriterij:

$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ ima jedinstveno rješenje unutar $[0, \tau]$, za dovoljno mali τ.

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\| \quad k>0$$

$\forall x, y$ u blizini 0

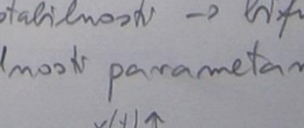
3. Bifurkacije

-> stabilnost i broj ravnotežnih stanja mogu se mijenjati promjenom parametara sustava ili smetnji.

N.S. nisu strukturno stabilni za razliku od L.S., gdje male promjene u smetnjama uzrokuju male promjene u odzivima

-> kod N.S. postoje točke strukturne nestabilnosti -> bifurkacije.

Kritične točke bifurkacije označavaju vrijednosti parametara za koje se dogodi promjena tipa stabilnosti



KARAKT. ponašanja nel. sustava

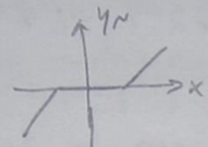
Vlastite oscilacije, bifurkacije, kaos, rezonantni skok, pobjeg (finite time escape ~~time~~)

4. Kaos

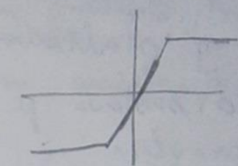
- kod L.S male promjene poč. uvjeta rezultiraju u malim promjenama odziva, dok kod N.S. one mogu uzrokovati velike promjene u odzivu.
  - -> Dobivamo kaotično, neočekivano ponašanje
  - -> Trajektorija nikad ne prolazi istom putanjom

5. Tipični nelinearni elementi:

mrtva zona

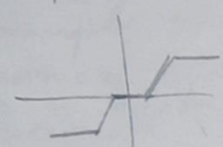


zasićenje

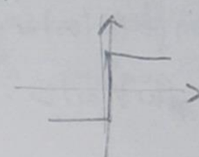


, Coulombovo trenje

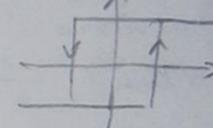
zasićenje s mrtvom zonom



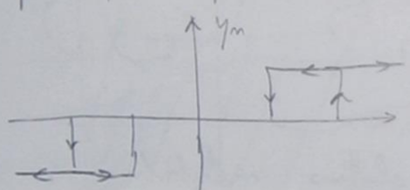
dvopoložajni relej bez histereze



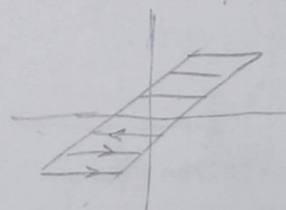
- s histerezom



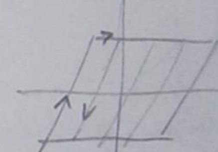
tropoložajni relej s histerezom



zračnost (backlash)



upor (stop-type)



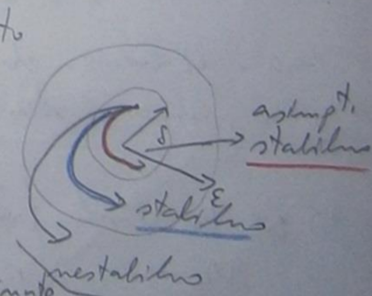
6. Lyapunovljeva stabilnost:

Ravnotežno stanje $x_e = 0$ je stabilno po Lyapunovu ako $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0$ postoji pozitivni broj $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ takav da vrijedi

$\|\vec{x}(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0) \rightarrow \|\vec{s}(t, t_0, \vec{x}_0)\| < \varepsilon, \ \forall t \geq t_0$

$\vec{s}(t, t_0, \vec{x}_0)$ predstavlja rješenje dif. jdbe

↳ Lokalna stabilnost (stabilnost u malom) -> u blizini ravnotežnog stanja



Globalna stabilnost po Lyapunovu:

Ako postoji neprekinuta skalarna f-ja $V(x)$ koja ima neprekinute prve derivacije i za koju vrijedi:

$V(x) > 0 \ \forall x \neq 0$, $V(x)$ je pozitivno definitna $\rightarrow V(0) = 0, \ V(x) > 0 \ \forall x \neq 0, \ x \in \Omega$

$\dot{V}(x) \leq 0$, $\dot{V}(x)$ je neg. semidefinitna

$V(x) \rightarrow \infty$ ako $\|x\| \rightarrow \infty$, $V(x)$ radijalno neomeđeno, onda je ravnotežno stanje x_e, $f(x_e, 0) = 0$ glob. stabilno po Lyapunovu

7. Mihajlovljev kriterij stabilnosti (vlastite oscilacije):

karakt. jdb. → Re, Im $\{1+G_N G_P = 0\}$

$$\frac{\partial R}{\partial X_m}\frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$ vl. osc. su stabilne

mora postojati q takav da

8. Popov kriterij stabilnosti: → za apsolutnu stabilnost sustava

$$\mathrm{Re}\{(1+jq\omega)\cdot G_P(j\omega)\} + \frac{1}{k} > 0$$

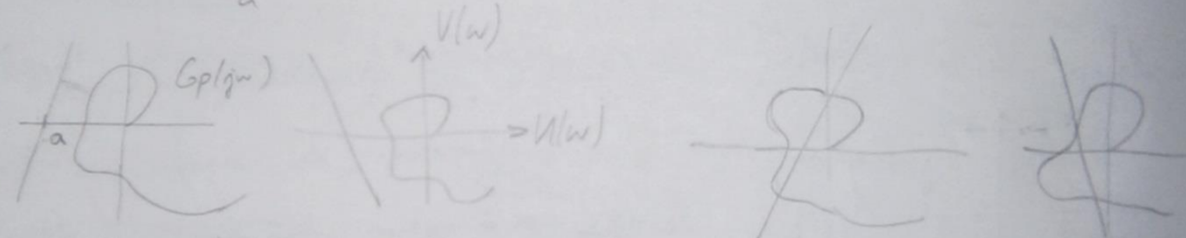
UVJETI

→ linearni dio sustava je vremenski nepromjenjiv, stabilan i potpuno upravljiv

→ nelinearna fja $F_N(x)$ je klase $[0, k]$, $k \in (0, \infty)$ $0 < \frac{F_x}{x} < k$

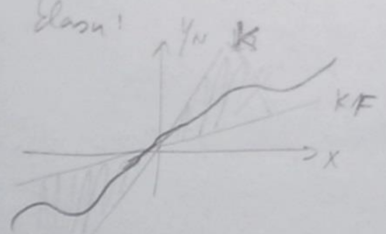
- promatramo fju $G_P(j\omega) = U(\omega) + j\omega V(\omega)$

→ nacrtamo $U(\omega) + j\omega V(\omega) > -\frac{1}{k}$ → pravac → sjecište s osi x: klasa $= \frac{-1}{a}$



apsolutno stabilna ravnotežna stanja   apsolutno nestabilna r. s.

- k predstavlja klasu!

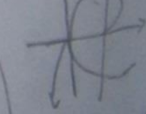


statička karakteristika

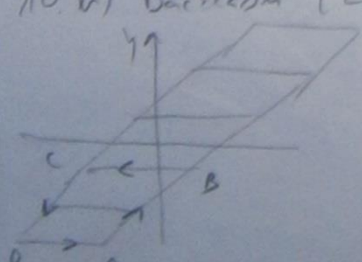
→ $F_N(x)$ ide kroz I i III kvadrant, treba prolaziti kroz ishodište

k - za koje podnicje statičke karakteristike sustav mora biti stabilan

- ako linearni dio sustava nije stabilan onda se dodaju pojačanja K_F u povratnu vezu → K_F, K



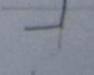
10. b) Backlash (Zračnost)



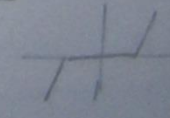
- kod zupčanika, uža histereza → kvalitetniji zupčanik

c) suho trenje (Coulombovo)

- trenutna promjena predznaka sile trenja prilikom polaska → relej



→ potrebno savladati statičko trenje : mrtva zona



→ malene inercijalne sile: karakteristika zračnosti

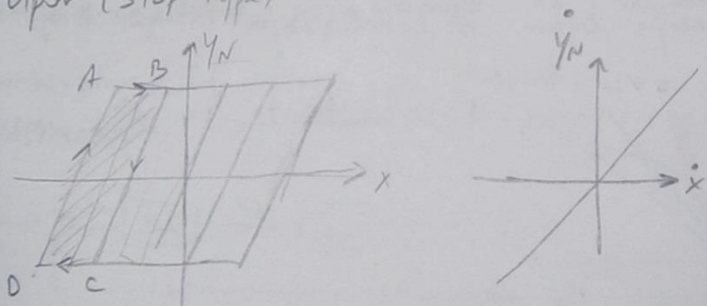
9. Rezonantno izdizanje (skok)

→ iznenadan skok amplitude i/ili faze periodičkog izlaznog signala nelinearnog sustava

- događa se: ukoliko nelinearni sustav ima maleno fazno osiguranje, tj. linearni dio sustava ima malen faktor prigušenja ζ →
- ulazni signali mogu biti frekvencija bliskim rezonantnoj frekvenciji → pogoduje nastajanju rez. skoka
- ukoliko nelin. sustav radi pri prisudnim oscilacijama

- Rezonantni skok ne može se vidjeti u prijelaznoj pojavi niti rješavanjem nelin. dif. jdbe. Kako bi ga eliminirali ili smanjili potrebno je povećati fazno osiguranje i proširiti područje rada nelinearnog dijela sustava gdje vrijede pravila linearnosti.

10. a) Upor (Stop-Type)



- javlja se kod mehaničkih sustava gdje je kretanje izlazne veličine dvosmjerno, a kretanje ulazne veličine neograničeno i može biti konstantnog smjera.
- npr. potrebno je savladati moment trenja kako bi se promijenio smjer
- primjena: još kod pneumatskih i hidrauličkih pojačala, aktuatorskih mehanizama, elektromotora
- stabilnost se ne može odrediti Popovom jer karakteristika ne prolazi samo kroz I i III kvadrant i nije klase k

stabiliziramo ga s r

11\. Tsypkin → kada imamo nestabilan sustav,

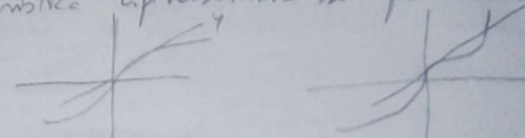
f(t) ograničen

$\exists r \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Re}\left\{ \frac{G(j\omega)}{1+rG(j\omega)} \right\} \geq 0, \forall \omega$

klasa ne ide od 0-k $\quad , r \leq \frac{d f(u)}{du} \leq k$

12\. Metode linearizacije - grafičke:

I\. - metoda tangente - statička karakteristika aproksimira se jednadžbom tangente, $y_N = k \cdot x$



- m. sekante $y_N = k_s x$, k - tan α
- algebarska linearizacija → linearna aproksimacija, izbacivanje članova jako malih vrijednosti

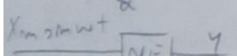
II\. - harmonička linearizacija - kad se ulaz mijenja

↳ osnovna podloga; linearizacija kojom se zadržavaju bitna svojstva nelinearnih sustava

↳ dobivamo pojačanje $k_{eq} \frac{X_i}{X_m}$

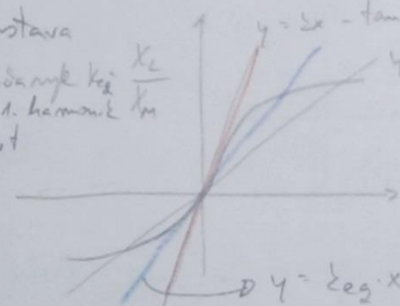
kroz sis propušta samo 1. harmonik

$y = \underbrace{\left(a + \frac{3}{4} b X_m\right)^2}_{k_{ekvivalentni}} X_m \sin \omega t$



$y = kx$ - tangenta

$y = k_s \cdot x$, sekanta } I. konvencionalna linearizacija



→ $y = k_{eq} \cdot x$, $k > k_{eq} > k_s$

III, IV - statistička i kombinirana linearizacija, LS metoda, pravokutna lin.

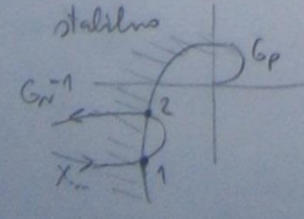
→ uvjeti: aproksimacija u blizini radne točke male derivacije

13\. Goldfarb

- grafički postupak za određivanje parametara vlastitih oscilacija

$1 + G_N \cdot G_P = 0 \rightarrow G_P = -G_N^{-1}$

- ako se ove dvije krivulje sijeku dolazi do vl. oscilacija
- sve lijevo od G_P je stabilno; ako točka prelazi iz nestabilnog u stabilno onda je to stabilna točka, inače nestabilno

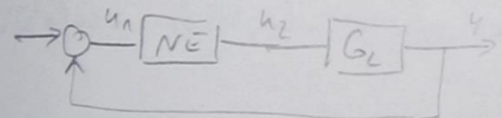


1\. - st → nst. prelazi, a točka 2 iz nst. u st. → stabilna točka. Biramo točku 2 zato što je stabilna, iako joj je amplituda veća (X_m veće) te unosi više energije

14. Vlastite oscilacije -> parametre određujemo Goldfarbom
- posljedica početnih uvjeta, ali poč. uvjeti ne određuju amplitudu ili frekvenciju
- kod nepobuđenog sustava
- nema kod linearnih jer nemaju spremišta energije koji će održavati
- nisu iste frekvencije kao pobuda, za razliku od prinudnih oscilacija , oscilacije

15. Dither
- visokofrekventni signal, amplituda mora biti manja od A_{gr} pri kojoj dolazi do prinudnih oscilacija
- stavlja se na ulaz u NE da poboljša dinamičko vladanje sustava, u svrhu linearizacije
- veće je frekvencije nego frekvencija sustava, da se ne registrira na izlazu
-> eliminira ili priguši prinudne oscilacije, reducira efekte statičkog trenja
  - stvara veliki spektar novih frekv. na izlazu
  - utjecaj na pojačanje na malim frekvencijama

16. Opisna fja – kompleksni omjer osnovnog izlaznog i ulaznog harmonika



- u linearnom elementu moraju biti isfiltrirani svi viši harmonici ->
- Filter hipoteza: pretpostavka $u_1(t) + y(t) = 0$

$u_1(t) = A \sin \omega t$, $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi)$

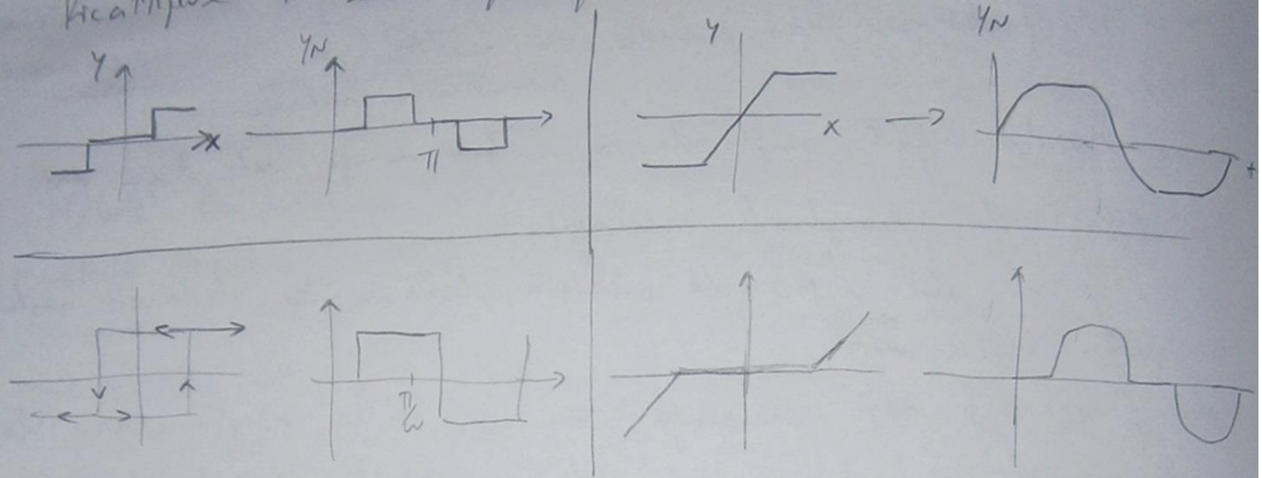
$\rightarrow \left.\begin{matrix} A = Y_m \\ \varphi = -\pi \end{matrix}\right\}$ ravnoteža amplitude i faze

-> Fourierov razvoj ulaza, dobijemo $P(A)$ i $Q(A)$ -> koeficijenti koji opisuju N.E.
- jednoznačni NE -> $Q(A) = 0$

NE nultog reda – izlaz ovisi samo o ulaznoj amplitudi
složeni NE – izlaz ovisi o amplitudi i frekvenciji

- Dither je frekvencija iznad pojasnopropusne frek. linearnog dijela ~~pojasnog propusta~~, a prinudne ispod

- Analitički postupci određivanja rješenja diferencijalnih jdbi → Riccatijeve i Bernoullijeve jdbe



- Dither - pravokutni signal sadrži više frekvencija od sinusnog → različiti odzivi

17. Prinudne oscilacije - vode se u sustav vanjskim periodičkim signalom. Cilj je da sustav ponavlja te oscilacije istom frekvencijom te da poništava neželjene efekte vlastitih oscilacija

- ulaz $F(t) = F_v \sin \omega_v t$
- frekvencije su ispod pojasnopropusne frekv. sustava
- ~~simetrične I~~ ~~nesimetrične~~

$$G_p = \frac{B}{A} \quad X_m \left(1 + \frac{B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + j\,Q_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)} \right) = F_v\, e^{-j\varphi}$$

* Fazne trajektorije

→ linearizacija $\dot{x}$, $\dot{y}$, dobijemo J, $\det(\lambda I - J) = 0$ → tipovi singularne točaka

→ crtanje izoklina, $\frac{dy}{dx}$, separatrise → $m = 0$, $m = \infty$

- ~~ravnotežna~~ singularna točka tipa centar → trajektorija zatvorenog oblika
- ravnotežna točka tipa sedlo → trajektorije počinje, ostaje i završava u toj točki (nestabilna ravnotežna točka)

- u stabilan čvor → direktno
- u stabilan fokus → spiralno

→ određivanje: analitičke metode: rješenje rješenje
grafoanalitičke – metoda izoklina
numeričke → simulacija