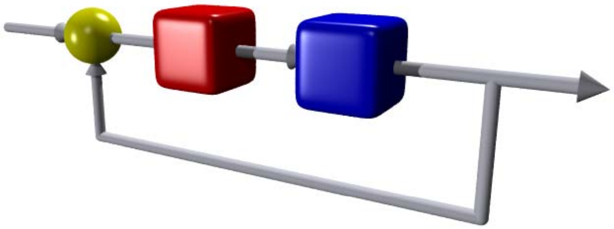


# Nelinearni sustavi upravljanja

Prof.dr.sc. Zoran Vukić

Tel: 01/6129 840, Fax:01/6129 809,

E-mail:zoran.vukic@fer.hr

# Web stranica kolegija:

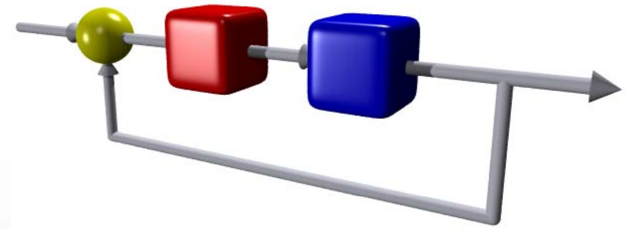
**http://www.fer.hr/predmet/nsu**

Ak.g. 2008/09 — 5 ECTS

Predavanja: utorkom od 11:15 do 14:00 u D272

- Nositelj kolegija:
  - Prof.dr.sc. Zoran Vukić, dipl.ing.
    - soba: C-09-18,Tel.6129 840 zoran.vukic@fer.hr
- Asistenti:
  - Nikola Mišković, dipl.ing. (nikola.miskovic@fer.hr)
  - Matko Barišić, dipl.ing. (matko.barisic@fer.hr )
  - soba:C-09-09, Tel.6129 815
- Administrativna tajnica: Blanka Gott,
    - tajništvo ZARI: C-09-05, Tel.6129 795 (blanka.gott@fer.hr )

# Sadržaj



- Fenomeni nelinearne dinamike
- Sustavi drugog reda
- Matematički temelji
- O stabilnosti nelinearnih sustava
- Stabilnost u smislu Ljapunova
- Apsolutna stabilnost – V.M. Popov
- Metoda opisne funkcije
- Analiza vlastitih oscilacija
- Prinudne oscilacije
- Vibracijska linearizacija
    - Dither signal
- Back-stepping – uvodne napomene
- Sliding mode control - uvod


Nositelj: Prof.dr.sc. Zoran Vukić
E-mail: zoran.vukic@fer.hr
Soba: C-09-18

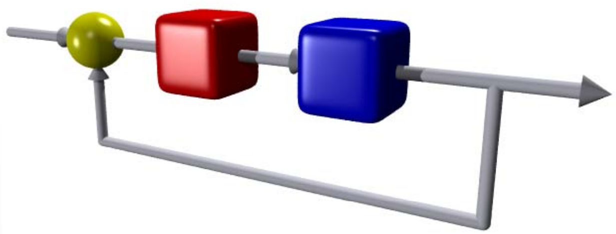
Asistenti: N. Mišković i M. Barišić
E-mail: nikola.miskovic@fer.hr
matko.barisic@fer.hr
Soba: C-09-09


**Težine pojedinih aktivnosti:**

| | |
|---|---|
| 1 međuispit (pismeni) | 26% |
| 2 međuispit (pismeni) | 26% |
| Domaće zadaće (4 x 2) | 8% |
| Završni (usmeni) ispit | 40% |
| **Za prolaz nužno:** | **50%** |

**Literatura:** Z. Vukić, Lj. Kuljača, D. Đonlagić, S. Tešnjak. ***Nonlinear Control Systems***. New York: Marcel Dekker, 2003.

# Bodovanje



| Vrsta aktivnosti | Maksimalan broj bodova | Nužni broj bodova za prolaz |
|---|---|---|
| 1. Međuispit | 26 | |
| 2. Međuispit | 26 | |
| 3. Domaće zadaće | 8 | |
| 3. Završni ispit (usmeni) | 40 | 25 |
| Za prolaz ispita | | 50 |
| **UKUPNO** | 100 | **50** |

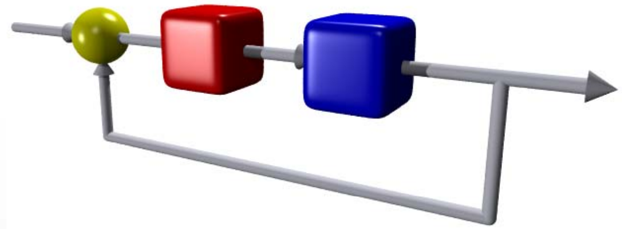
**Za prolaz na ispitu biti će potrebno postići najmanje 50 bodova od ukupno 100 bodova, od toga 25 bodova mora se postići na usmenom ispitu a preostalih 25 na međuispitima + domaćoj zadaći!!**

# Ocjenjivanje

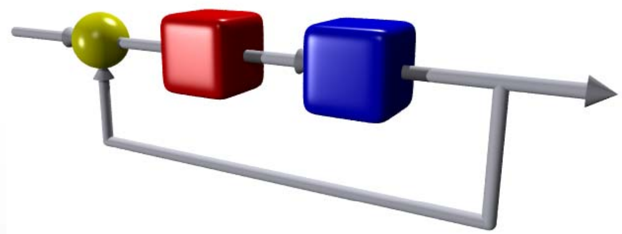
| Bodovi | Ocjena |
| --- | --- |
| [50 – 62) | 2 |
| [62 – 75) | 3 |
| [75 – 88) | 4 |
| [88 – 100] | 5 |

**Međuispiti se organiziraju kao pismeni ispiti !!**
**Završni ispit je usmeni !!**
**Ocjene ne podliježu Gausovoj raspodjeli !!**

# Sadržaj kolegija



- Opća razmatranja, pojmovi i definicije
- Ponašanja koja se pojavljuju kod nelinearnih sustava a ne postoje kod linearnih sustava
  - Neograničena reakcija u konačnom vremenu (finite escape time)
  - Kaotično ponašanje (chaos, attraktor, strange attractor)
  - Bifurkacija (bifurcation)
  - Rezonatni skok (resonance jump)
  - Vlastite oscilacije (limit cycles, self-oscillations)



# Sadržaj kolegija (nastavak)

- Ravnotežna točka (stanje) – singularna točka
- Trajektorija stanja – separatrisa
- Vlastite oscilacije – opisna funkcija
- Prinudne oscilacije
- Stabilnost nelinearnog sustava
- Dualna opisna funkcija – dither signal
- Dijagrami kvalitete
- Sliding mode
- Feedback linearization, ....

# Literatura:


1. Z. Vukić; Lj. Kuljača, D. Đonlagić, S. Tešnjak. Nonlinear Control Systems. New York: Marcel Dekker, 2003.

<u>DODATNA LITERATURA:</u>

1. J. J. Slotine, W. Li. Applied Nonlinear Control. New York: Prentice Hall, 1991.
2. M. Vidyasagar. Nonlinear Systems Analysis. New York: Prentice Hall, 1993

# Nadoknade

Za studente/studentice koji(e) nisu mogli iz opravdanih razloga pristupiti međuispitu (odlukom nositelja predmeta) organizirati će se ponovljeni ispit koji će biti usmeni (s rješavanjem zadataka!).

Dokumentacija za zamolbu nadoknade predaje se administrativnoj tajnici

**U ROKU OD DVA TJEDNA OD IZOSTANKA**

te se obavijest o tome šalje na: nikola.miskovic@fer.hr ; matko.barisic@fer.hr

# Laboratorij Automatike 2

**Nositelji kolegija:**

Prof. dr. sc. Nedjeljko Perić
Prof. dr. sc. Zoran Vukić
Prof. dr. sc. Ivan Petrović

http://www.fer.hr/predmet/labaut2

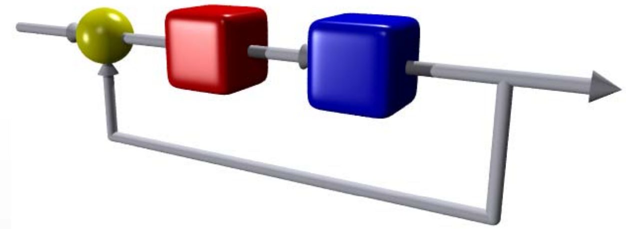
# Osnovni podaci o predmetu

- Koliko ECTS bodova Vam donosi?
  - 3 ECTS-a
- Koji su oblici izvođenja nastave?
  - 8 laboratorijskih vježbi:
    - Primjena teorijskog znanja stečenog na predmetima Nelinearni sustavi upravljanja i Teorija estimacije

# Izvođači laboratorijskih vježbi

| Ime i prezime | Ured, E-mail | Konzultacije |
|---|---|---|
| | **Asistenti** | |
| Srećko Jurić-Kavelj, dipl. ing. (administrator za TE) | C-IX-02, srecko.juric-kavelj@fer.hr | forum |
| Nikola Mišković, dipl. Ing. (adminsitrator za NSU) | C-IX-09, nikola.miskovic@fer.hr | forum |
| Tamara Radošević, dipl. ing. (TE) | C-IX-16, tamara.radosevic@fer.hr | forum |
| Matko Barišić, dipl.ing. (NSU) | C-IX-09, matko.barisic@fer.hr | forum |

# Laboratorij Automatike2



- Obaviti će se 4 laboratorijske vježbe iz područja nelinearnih sustava upravljanja + 4 laboratorijske vježbe iz teorije estimacije = 8 vježbi
- Vježbe iz nelinearnih sustava upravljanja nosit će 4x12,5 = 50 bodova. Preostalih 50 bodova donijeti će vježbe iz kolegija Teorija estimacije.
- Učionice A109 i A110 rezervirane su za samostalni rad studenata tijekom cijelog dana. Studenti na porti uz predočenje X-ice mogu dobiti ključeve tih učionica.
- Predavanja iz LabAUT2 biti će po satnici srijedom od 10:00 do 12:00 u D270. Prva tri tjedna predavati će se kolegij Nelinearni sustavi upravljanja, a zatim sljedeća tri tjedna teorija estimacije – po drugoj satnici koja će biti dogovorena na predavanjima iz TE.
- Ocjena na kolegiju LabAUT2 formirat će se temeljem ukupnog broja bodova dobivenog zbrojem svih bodova na vježbama.

# Provođenje laboratorijskih vježbi

- 8 laboratorijskih vježbi
  - Laboratorijske vježbe odrađuju se kod kuće ili u dvoranama A109, A110 i PCLAB1 koje su otvorene za studente
  - Termini laboratorijskih vježbi i zadaci za laboratorijske vježbe bit će objavljeni na web stranici predmeta
  - U terminu vježbi predaje se prethodno odrađena laboratorijska vježba i piše se kratka provjera znanja na računalu

- 4 vježbe iz područja Nelinearnih sustava upravljanja
- 4 vježbe iz područja Teorije estimacije

# Provjera znanja i ocjene studenata

| Aktivnost | najveći broj bodova |
|---|---|
| Domaća zadaća (priprema) | 2.5 boda |
| Laboratorijska vježba | 10 bodova |

- (2.5 + 10) x 8 = 100 bodova
- ocjene se dodjeljuju po Gaussovoj raspodjeli

# Konzultacije

- Pitanja vezana za laboratorijske vježbe studenti će moći postaviti asistentima na forumu na web stranici predmeta
- Za svaku laboratorijsku vježbu definirat će se vremenski period u kojem je moguće postavljati pitanja i krajnje vrijeme do kada asistenti odgovaraju na pitanja
- Vrijeme otvaranja i zatvaranja foruma za svaku vježbu bit će objavljeno za web stranici predmeta

# Zakašnjela predaja izvješća s vježbe

Studenti/studentice koji(e) nisu iz opravdanih razloga u zadanom terminu predali laboratorijsku vježbu dužni su predati ispričnicu administrativnoj tajnici Zavoda (Blanka Gott, tajništvo Zavoda na IX katu C zgrade)

**NAJKASNIJE U ROKU OD DVA TJEDNA OD ROKA PREDAJE LAB. VJEŽBE !!**

**NAPOMENA**: obavijest o tome obvezno poslati elektroničkom poštom na: **srecko.juric-kavelj@fer.hr**

# Pitanja ?

# Zašto nelinearno upravljanje sustavima

- Suvremeni upravljački problemi traže primjenu nelinearnog upravljanja
  - Robotika (industrijska i mobilna), proizvodni procesi (energetski, procesni i sl.), bespilotna vozila (kopnena, leteća, plovna, podvodna), ....
- Mekane nelinearnosti
  - Gibanje sustava nemože ostati dovoljno blizu ravnotežnog stanja da bi vrijedila linearna aproksimacija,
  - Linearizacija često otklanja bitne fizikalne učinke kao npr. Coriollisove sile
- Tvrde nelinearnosti
  - zasićenje, upor, mrtva zona, histereza i sl.

# Zašto nelinearno upravljanje sustavima

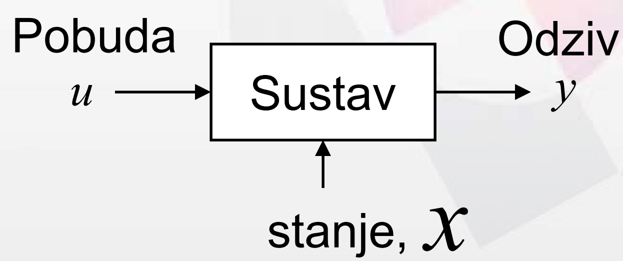
- Sustavi koji nisu linearno upravljivi/osmotrivi mogu biti upravljivi/osmotrivi u nelinearnom smislu
  - Neholonomička vozila, sustavi s manjim brojem aktuatora od DOF, vozila blizu granice direkcionalne stabilnosti
- Sustavi koji rade u blizini nestabilnosti (bifurkacijskih točaka)
  - Ispad elektroenergetskog sustava, vrtnja zrakoplova, stabilnost ljuljanja kod broda, ...
- Adaptivni i inteligentni sustavi upravljanja su inherentno nelinearni

# Opća razmatranja

- Nelinearan sustav je sustav koji se podvrgava nelinearnim zakonima i za kojeg ne vrijedi linearna teorija sustava
- Zbog čega proučavati nelinearne sustave ?
  - Svi fizikalni procesi su po prirodi nelinearni – primjeri:
    - rast čovjeka, pojačalo snage, pokretni objekti (plovila, letjelice,..), reduktori, ...
  - Nelinearnosti se katkada namjerno ugrađuju u sustav kako bi se:
    - kompenzirali neki neželjeni učinci drugih nelinearnosti u sustavu ili
    - kako bi se dobile bolje performanse (nelinearni regulatori)
- Linearan sustav $\rightarrow$ rješenje je uvijek u zatvorenoj formi
  Nelinearan sustav $\rightarrow$ nije uvijek moguće dobiti rješenje u zatvorenoj formi (nužno je obaviti kvalitativnu analizu)

# 1. Fenomeni kod nelinearne dinamike

- Linearan u odnosu na nelinearan



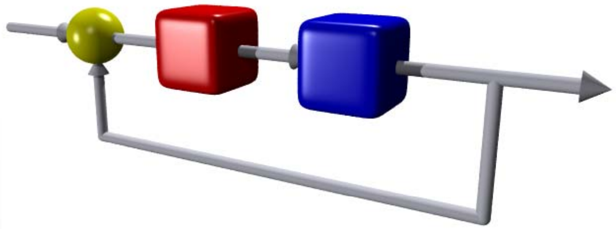

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \; (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) \\ y &= \varphi(x) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \; (2)$$

$$f : R^n \times R^m \to R^n$$

$$\varphi : R^n \to R^p$$

# Definicija linearnog sustava



- Za neku funkciju kažemo da je linearna ako za nju vrijedi:
  - Aditivnost: $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ ; $\forall\, x_1, x_2$ u domeni $f$
  - Homogenost: $f(ax) = af(x)$ ; $\forall x$ u domeni $f$ i sve skalare $a$
- Sustav je linearan ako vrijedi:
  - linearnost slobodnog odziva ($y_{zi}$)
  - linearnost prinudnog odziva ($y_{zs}$)$\longrightarrow$princip superpozicije
  - aditivnost slobodnog i prinudnog odziva $y_{tot}(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t)$

# Stabilnost i odziv sustava

- Stabilnost ovisi o parametrima sustava (linearan sustav)
- Stabilnost ovisi o početnim uvjetima, pobudi i parametrima sustava (nelinearan sustav).
- Odziv linearnog sustava ima istu frekvenciju kao i pobudni signal, dok se amplituda i faza odziva mogu razlikovati od amplitude i faze pobude.
- Odziv nelinearnog sustava obično sadrži dodatne frekvencijske komponente a može i ne sadržavati frekvenciju pobudnog signala.

# Superpozicija

<u>Superpozicija vrijedi samo za prinudni odziv:</u>

$$u_1 \longrightarrow \boxed{\text{Sust.}} \longrightarrow y_1 \oplus u_2 \longrightarrow \boxed{\text{Sust.}} \longrightarrow y_2$$

$$= \quad u_1 + u_2 \longrightarrow \boxed{\text{Sust.}} \longrightarrow y_1 + y_2$$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{array}\right\} \cdots\cdots \ (1)$$

Da li je (1) linearan ?

$$y_1(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu_1(\tau)d\tau$$

$$+ \quad y_2(t) = Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu_2(\tau)d\tau$$

$$y_1 + y_2 = 2Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}B\{u_1(\tau) + u_2(\tau)\}d\tau$$

Dakle da li je (1) linearan? $\Rightarrow$ <u>Nije, osim akko su početni uvjeti nula!!</u>
Superpozicija dakle vrijedi samo za prinudni odziv!!

# Linearnost

Što je linearnost kada $u(t) = 0$ ?

$$
\begin{array}{rl}
 & y_1(t) = Ce^{At}x_0^1 \\
+ & y_2(t) = Ce^{At}x_0^2 \\
\hline
 & y_1 + y_2 = Ce^{At}(x_0^1 + x_0^2)
\end{array}
$$

Mnemoničko pravilo: Sve funkcije na desnoj strani diferencijalne jednadžbe su linearne. Sustav je linearan kada nema pobude (slobodan odziv je linearan) ili kada nema početnih uvjeta.

Primjer:

$$
\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2^2 \\
\dot{x}_2 &= x_1 + \sin u
\end{aligned}\right) \quad \text{nelinearan}
$$

# Primjer:

Sustav opisan sa $y(t) = u^2(t)$ <u>nije linearan</u> jer nije zadovoljeno svojstvo

a) Aditivnosti (Superpozicije)

$$y(t) = [\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t)]^2$$
$$= \mathbf{u}_1^2(t) + 2\,\mathbf{u}_1(t)\,\mathbf{u}_2(t) + \mathbf{u}_2^2(t) \neq \mathbf{u}_1^2(t) + \mathbf{u}_2^2(t)$$

a) Homogenosti:

$$y(t) = [\alpha u(t)]^2 = \alpha^2 u^2(t) \neq \alpha u^2(t)$$

# Primjer

Sustav opisan sa $y(t) = mu(t) + b$ nije linearan jer nije zadovoljeno svojstvo homogenosti:

$$y(t) = m[\alpha u(t)] + b \neq \alpha[mu(t) + b] = \alpha y(t)$$

Pa ipak, moguće je ovaj sustav razmatrati kao linearan oko radne točke $u_0, y_0$ za male promjene varijabli $\Delta u$ i $\Delta y$.

Tada je: $u(t) = u_0 + \Delta u$ a također je $y(t) = y_0 + \Delta y$ te imamo:

$$\boxed{y_0 + \Delta y = m[u_0 + \Delta u] + b = mu_0 + m\Delta u + b}$$

Oko radne točke sustav se može razmatrati pomoću jednadžbe

$$\Delta y(t) = m\Delta u(t)$$

a ona udovoljava svojstvima linearne funkcije: *aditivnosti* i *homogenosti*

# Vremenski nepromjenjiv i vremenski promjenjiv

- Vremenski nepromjenjiv u odnosu na vremenski promjenjiv
  - Sustav opisan s (1) je linearan vremenski nepromjenjiv (LTI) ⇔ parametri su konstantni

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (1) \qquad \left.\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u)\\ y &= \varphi(x)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (2)$$

- Nelinearan sustav (2) je vremenski nepromjenjiv ⇔ niti jedna funkcija nema $t$ kao njen argument

- Linearni vrem. promjenjiv sustav

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u\\ y &= C(t)x\end{aligned}\right\} \cdots \quad (3)$$

- Nelinearni vrem. promjenjiv sustav

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= f(x,u,t)\\ y &= \varphi(x,t)\end{aligned}\right\} \cdots \quad (4)$$

# Autonoman i neautonoman sustav

- Vremenski nepromjenjivi sustavi zovu se autonomni, dok se vremenski promjenjivi sustavi zovu neautonomni. U kolegiju će se pod autonomnim sustavom podrazumijevati nepobuđeni sustav tj. sustav bez pobude na ulazu odnosno sustav opisan sa:

$$\dot{x} = A\,x, \qquad y = C\,x$$

$$\dot{x} = f(x), \qquad y = \varphi(x)$$

- Prema tome autonoman sustav će biti sustav koji je vremenski nepromjenjiv i nema pobude. Kolegij će se baviti uglavnom nelinearnim sustavima koji su vremenski nepromjenjivi i većinom bez pobude.

# Ravnotežno stanje

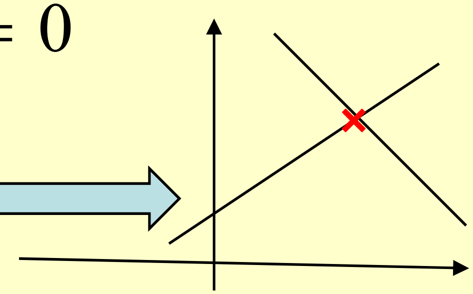
- Razmatramo autonoman sustav opisan sa:

$$\dot{x} = Ax \quad \text{ili} \quad \dot{x} = f(x) \ ; \quad x \in R^n$$

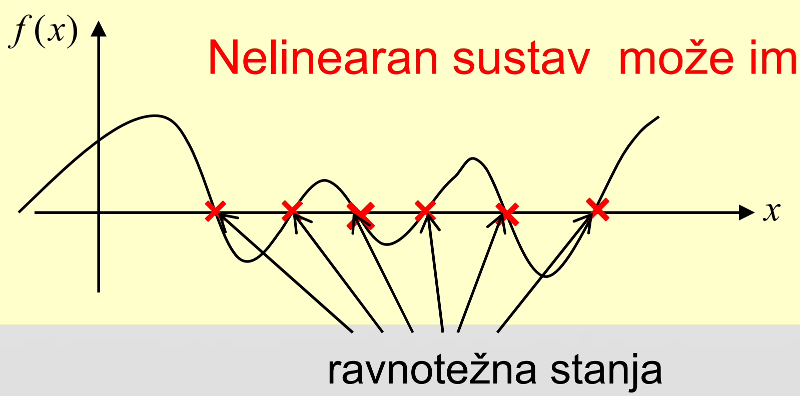
<u>Definicija:</u> $x_e \in R^n$ je ravnotežno stanje, (ustaljeno stanje ili singularna točka) $\Leftrightarrow$

$$Ax_e = 0, \quad f(x_e) = 0, \quad tj., \ \dot{x} = 0$$

Ako det(A) $\neq$ 0, tada (1) ima jednoznačno rješenje odnosno <u>samo jedno ravnotežno stanje</u> $x_e = 0$ (linearan sustav)



Nelinearan sustav može imati više ravnotežnih stanja




Broj i svojstva ravnotežnih stanja ovisi o unutarnjim i vanjskim karakteristikama sustava

# Ravnotežno stanje sustava

- Definicija: Stabilno ravnotežno stanje je stanje koje sustav zadržava ako na njega ne djeluje vanjska pobuda (odnosno nakon prestanka djelovanja vanjske pobude) tj. $u(t) = 0$
- Ako sustav kreće iz stabilnog ravnotežnog stanja on i ostaje u tom ravnotežnom stanju $x(t) = x_e\ ;\ \forall t \geq t_0$; pri tome se pretpostavlja da na sustav ne djeluje vanjska pobuda tj. $u(t) = 0$.
- Ravnotežno stanje postavlja se uobičajeno u koordinatno ishodište prostora stanja; $x_e = 0$ (sve derivacije = 0 $\Longrightarrow$ nema promjene varijabli stanja).
- Ako je $x_e \neq 0$ obavlja se translacija koordinata ravnotežne točke u ishodište supstitucijom: $x' = x - x_e$
- Ravnotežno stanje kontinuiranog sustava: $f(t, x_e, 0) = 0\ ;\ \forall t \geq t_0$
- Ravnotežno stanje diskretnog sustava: $f(k, x_e, 0) = x_e\ ;\ \forall k \geq k_0$

# Ovisnost ravnotežnog stanja o početnim uvjetima

Primjer:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x^2(t) \quad ; \; x(0) = x_0 \qquad (1)$$

Rješenje je oblika:

$$x(t) = \frac{x_0 e^{-t}}{1 - x_0 + x_0 e^{-t}} \qquad (2)$$

Sustav ima dva ravnotežna stanja koja slijede iz (1) kada $dx/dt = 0$: $x_e = 0$ i $x_e = 1$

Za $x(0) > 1$ trajektorije divergiraju,
Za $x(0) < 1$ trajektorije se približavaju ravnotežnom stanju $x_e = 0$
Za $x(0) = 1$ trajektorije ostaju na $x(t) = 1$ ; ∀t te je ravnotežno stanje $x_e = 1$

Ovisno o početnim uvjetima nelinearan sustav (1) ima:
- jedno stabilno ravnotežno stanje $x_e = 0$, za $x_0 < 1$
- nestabilno ravnotežno stanje za $x_0 > 1$
- neutralno stabilno ravnotežno stanje $x_e = 1$ za $x_0 = 1$

# Ovisnost ravnotežnog stanja o početnim uvjetima

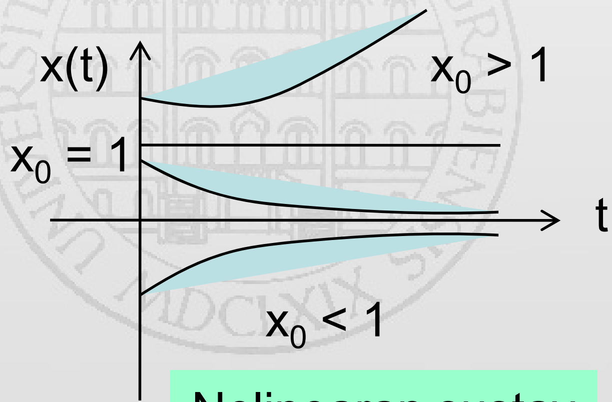
Linearizacijom (1) dobiti ćemo:

$$\dot{x}(t) = -x(t) \quad ; \; x(0) = x_0 \qquad (3)$$

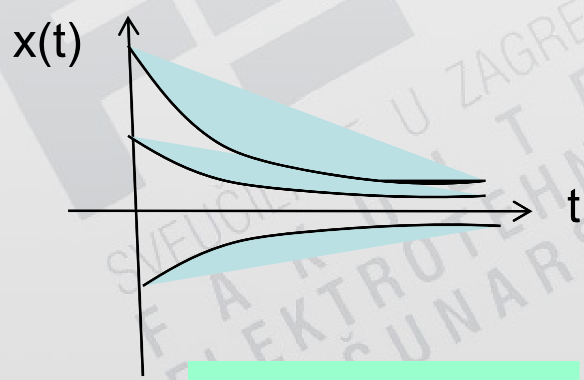
Rješenje je oblika:

$$x(t) = x_0 e^{-t} \qquad (4)$$

Linearizirani sustav ima ravnotežno stanje $x_e = 0$
koje je stabilno za sve početne uvjete (globalni karakter $x_e = 0$ ),
jer sve trajektorije bez obzira na početne uvjete završe u $x_e = 0$ .




Nelinearan sustav



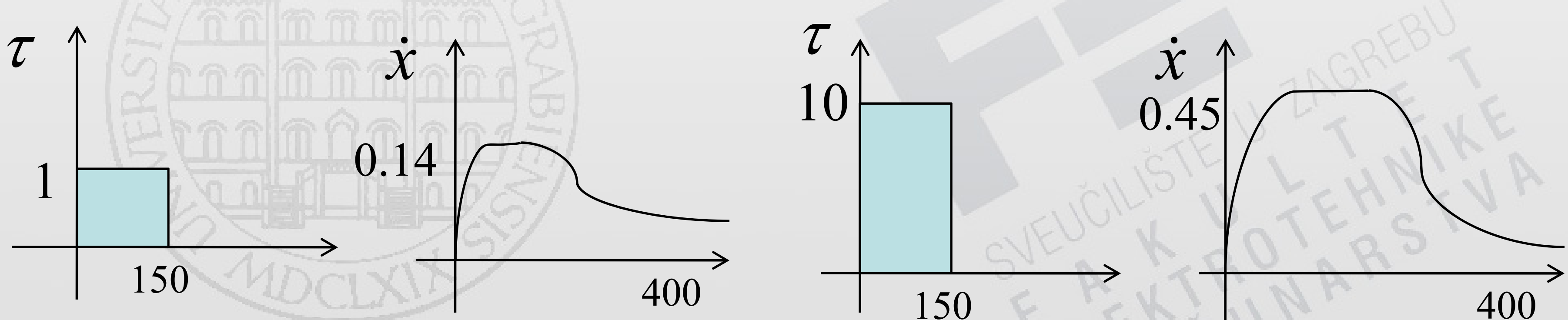

Linearan sustav

# Ovisnost ravnotežnog stanja o pobudi

- Ovisnost ravnotežnog stanja o pobudi ilustrira primjer bespilotne ronilice:
  - $\tau$ - potisak propulzora
  - $\dot{x}$ - brzina napredovanja

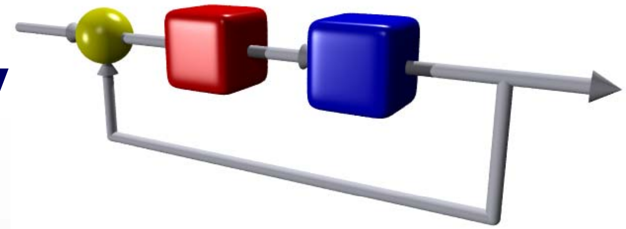

- Jednadžba gibanja je:

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + d\left|\dot{x}(t)\right|\dot{x}(t) = \tau(t)}$$




Za 10 puta veći potisak brzina je svega oko 3 puta veća $\Longrightarrow$ nelinearna ovisnost
Kod usporavanja (prestanak potiska) usporenje je manje kod manjeg nego kod većeg potiska

# Linearni autonomni sustav (nepobuđeni i LTI sustavi)



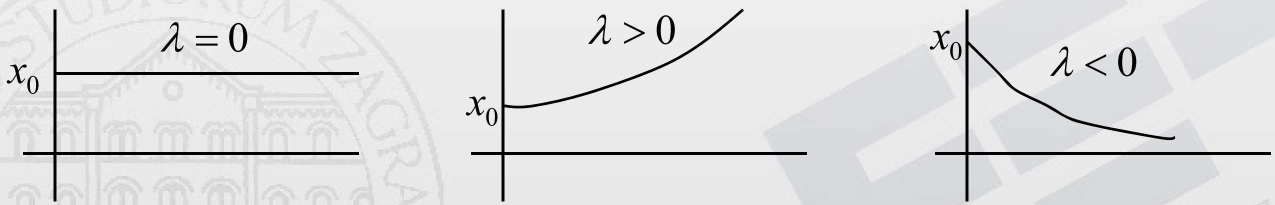
- Kako se vladaju autonomni linearni sustavi?

$$\boxed{\dot{x} = Ax \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i t} P_i}$$

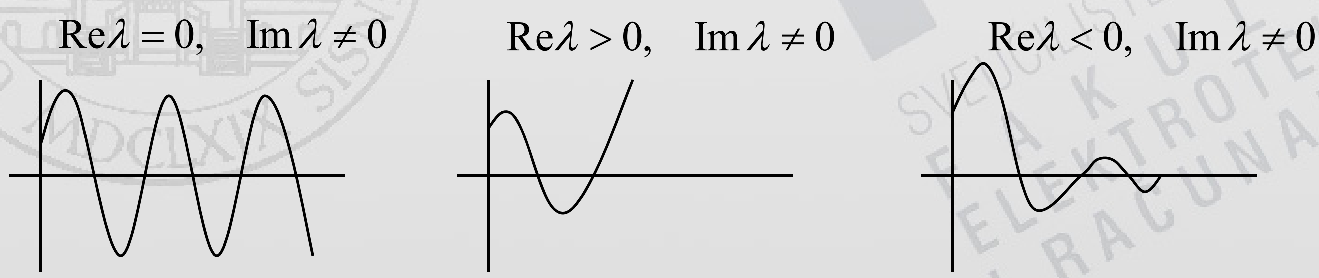
gdje: $P_i, \quad i = 1, \cdots, n$: svojstveni vektori od A

$\lambda_i, \quad i = 1, \cdots, n$: svojstvene vrijednosti od A

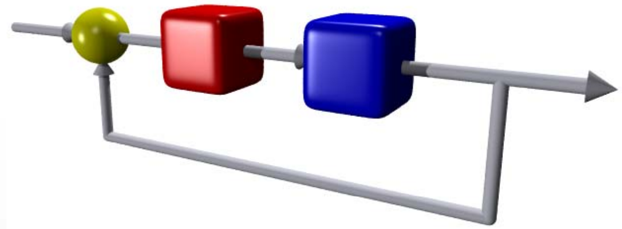
Za sustav 1. reda




Za sustav 2. reda



# Linearni autonomni sustavi (nastavak)



- Svi drugi odzivi su u osnovi superpozicije skiciranih (uključujući tu i odzive tipa $t^{j}e^{\lambda_i t}$, od $j$ višestrukih sv. vr.).

- Prema tome linearni vremenski nepromjenjivi i nepobuđeni sustavi mogu se ponašati samo po <u>eksponencijalnom zakonu</u> (uz moguće harmoničko ponašanje unutar eksponencijalne anvelope).

- **Zaključak:** Linearan autonomni sustav je siromašan u mogućim ponašanjima.

- <u>NAPOMENA:</u> Ako postoji pobuda $u(t) \neq 0$, tj. vrijedi $dx/dt = Ax(t) + Bu(t)$, tada je moguće generirati bogate vrste odziva ali oni nisu rezultat svojstvenih ponašanja sustava već prinudnog ponašanja pod utjecajem pobude koja može biti bilo kakva!

# Rješenje (odziv) linearnih sustava

- Za linearne sustave vrijedi sljedeće:
  - Lokalno rješenje uvijek postoji !
  - Globalno rješenje uvijek postoji !!
  - Rješenje je jednoznačno – svaki početni uvjet rezultira s drugom trajektorijom gibanja.
  - Rješenje kontinuirano ovisi o početnim uvjetima za svaki konačni $t$,

$$\forall \varepsilon, T, \quad \exists \delta \quad \text{tako da vrijedi,}$$

$$\left\| x(x_0', t) - x(x_0'', t) \right\| < \varepsilon, \quad t \le T < \infty$$

$$\text{ako} \quad \left\| x_0' - x_0'' \right\| < \delta$$

  - Ravnotežno stanje je jednoznačno (kada det A≠0).

# Periodičko rješenje linearnih sustava

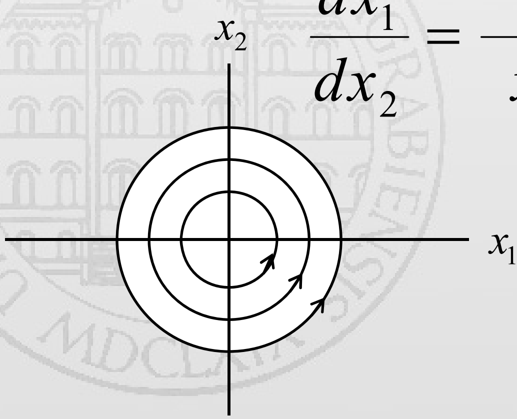
- Ako postoji jedno periodičko rješenje, tada postoji beskonačni skup periodičkih rješenja. (Ne postoji izdvojeno rješenje koje nije periodičko). **Linearni sustavi imaju globalna svojstva!**

**Primjer:**

$$\dot{x}_1 = -x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1$$

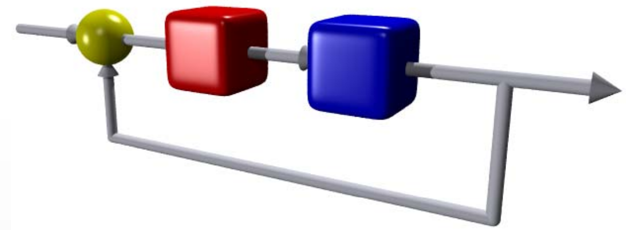
$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{-x_2}{x_1} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{x_1} x_1 dx + \int_0^{x_2} x_2 dx = \text{konst.}$$




$$x_1^2 + x_2^2 = \text{konstantno}$$

(∃ mnogo periodičkih rješenja, ovisno o početnim uvjetima)

# Nelinearni autonomni sustav



- Kako se vladaju nelinearni autonomni sustavi ?

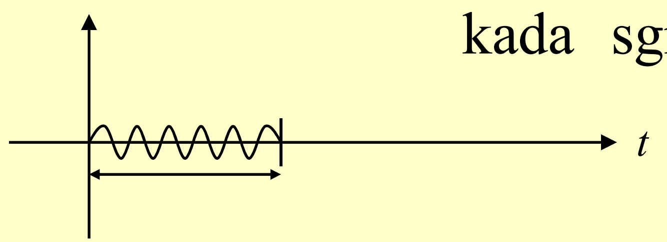
$$\dot{x} = f(x), \quad x \in R^n$$

U osnovi moguća su bilo kakva ponašanja !!

  - Rješenje i ne mora postojati, čak niti lokalno!

$$\dot{x} = -\operatorname{sgn} x, \quad x(0) = 0 \quad x \in R$$

$$\text{kada} \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{ako } x \geq 0 \\ -1 & \text{u ostalom} \end{cases}$$




Rješenje je ovdje oscilatorno jer dx/dt = + 1, dx/dt = -1 prema tome ne postoji derivacijska funkcija koja zadovoljava jednadžbu.

# Rješenja kod nelinearnih sustava

- Globalno rješenje ne mora postojati.

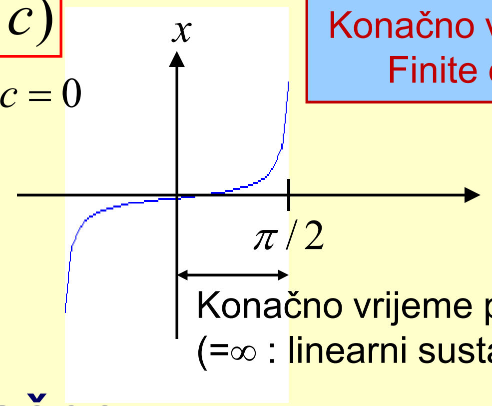
$$\dot{x} = 1 + x^2$$

$$\boxed{x = tg(t+c)}$$

Uz pretp. $c = 0$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^t dt + c$$

$$arctg(x) = t + c$$




Konačno vrijeme pobjega
(=∞ : linearni sustav)

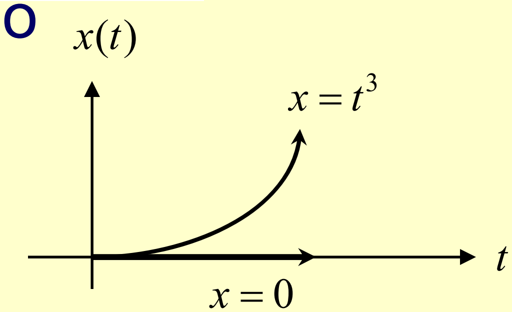
Konačno vrijeme pobjega
Finite escape time

- Rješenje ne mora biti jednoznačno

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0$$

$$x(t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty)$$

$$x(t) = t^3 \quad \forall t \in [0, \infty)$$




Frustrirajuće! Na sreću postoji teorem koji postavlja (Lipshitzov uvjet) da praktično sve diferencijalne jednadžbe imaju jednoznačno rješenje !!

# Ravnotežno stanje nelinearnog sustava

- Nelinearan sustav ne mora imati jedno ravn. stanje

Primjer: $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) + \sin\left[y(t)\right] = 0 \quad \text{(Njihalo)}$

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ \dot{y}(t) &= x_2(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - \sin(x_1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{2e} &= 0 \\ \sin x_{1e} &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ravnotežno stanje } x_e = \begin{bmatrix} n\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

Primjer: $\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - y(t) + y^3(t) = 0 \quad \text{(jednadžba Rayleigh-a)}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) - x_1(t) - x_1^3(t) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x_{2e} &= 0 \\ x_{1e}(1 - x_{1s}^2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_e^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_e^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_e^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Periodička rješenja nelinearnog sustava

- Nelinearan sustav može imati izolirana periodička rješenja

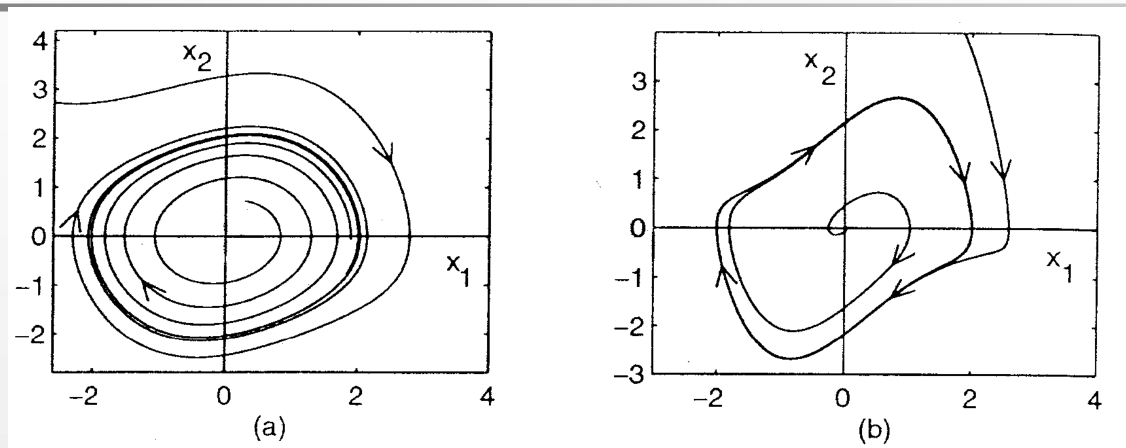
Primjer (jednadžba Van der Pola): $\ddot{y}(t) + \mu\left[\, y^2(t) - 1 \,\right]\dot{y}(t) + y(t) = 0$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$
$$\dot{x}_2(t) = -\mu\left[x_1^2(t) - 1\right]x_2(t) - x_1(t) \quad \forall t \in [0, \infty)$$

a) $0 < \mu < 1$ trajektorije se približavaju jednom periodičkom rješenju

b) $\mu > 1$ periodička rješenja mogu biti vrlo kompleksna

# Izolirana zatvorena rješenja – granični krug



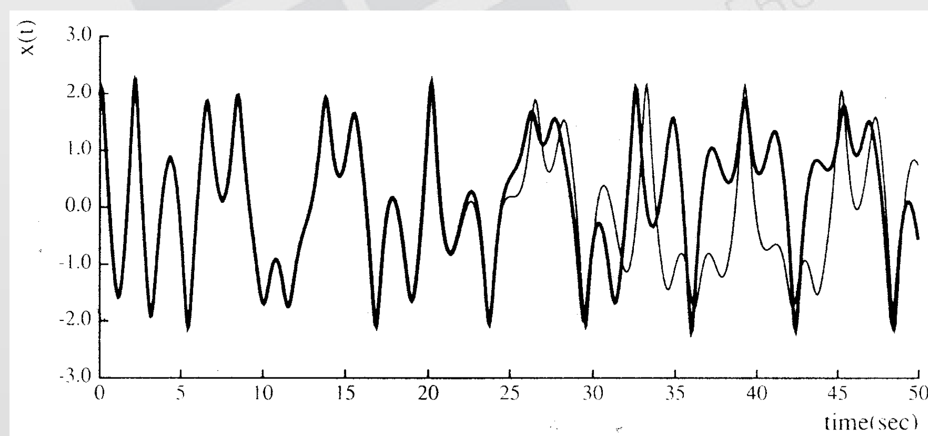

Izolirano zatvoreno rješenje (∃ samo jedno periodičko rješenje) ⇔ Izolirano privlačno periodičko rješenje

- Kaotični režimi ⇒ neperiodičko, ograničeno ponašanje

Primjer:

$$\ddot{x}(t)+0.1\dot{x}(t)+x^5(t)=6\sin t$$

(slabo prigušena struktura s velikim elastičnim otklonima)



# Nelinearni vs. Linearni zakon upravljanja

- Zašto ne koristiti uvijek linearne regulatore ?
  - Možda ne rade uvijek dobro !

**Primjer:** $\dot{x} = x + u^3; \quad x \in R$

Kada $u = 0$, ravnotežno stanje $x_e = 0$ je nestabilno.

Ako se odabere $u = -kx$, *tada* $\dot{x} = x - k^3 x^3$.

Kao što vidimo linearan regulator nemože asimptotski stabilizirati ravnotežno stanje $x_e = 0$.

Međutim, postoji nelinearan regulator forme: $u(x) = -\sqrt[3]{kx}$ koji daje:

$$\dot{x} = x - kx = (1-k)x$$

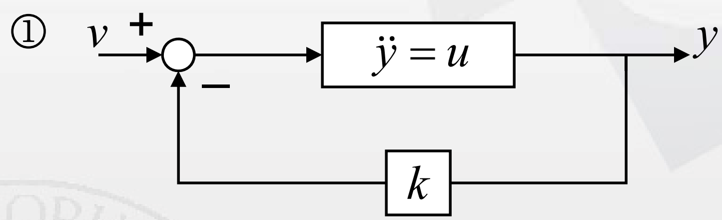
$$\Downarrow$$

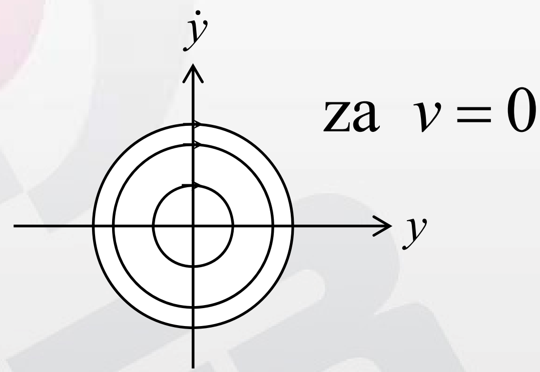
Asimptotska stabilnost za $k > 1$.

# Primjer

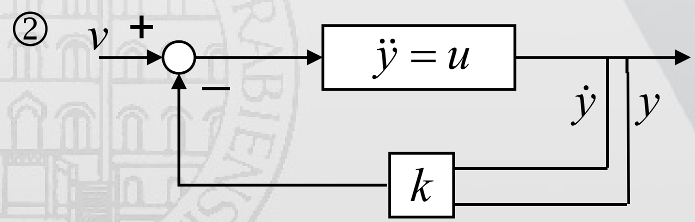
- Čak i kada postoji linearan regulator, možda postoji nelineran regulator koji je bolji.

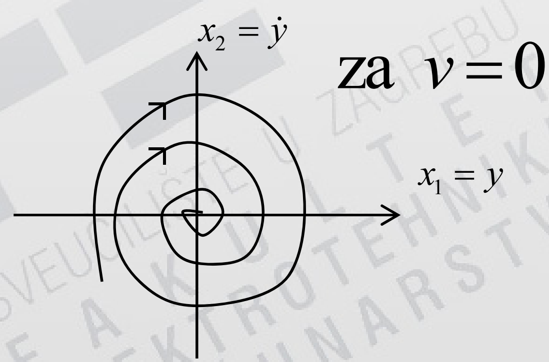
**Primjer:** $\ddot{y} + ky = v$




$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + ky = v$$




$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + k_1\dot{y} + k_2 y = v$$

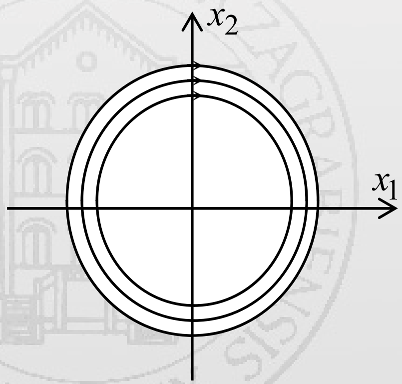
# Primjer (nastavak)

Upotrijebimo nelinearni regulator: Da bismo ga projektirali iskoristit ćemo strukturu ①

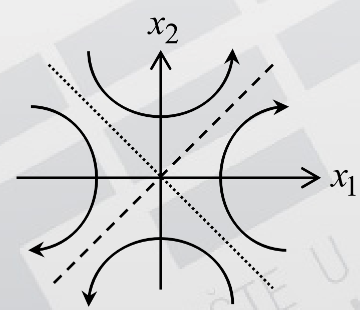
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1$$

Ako $k = +1$

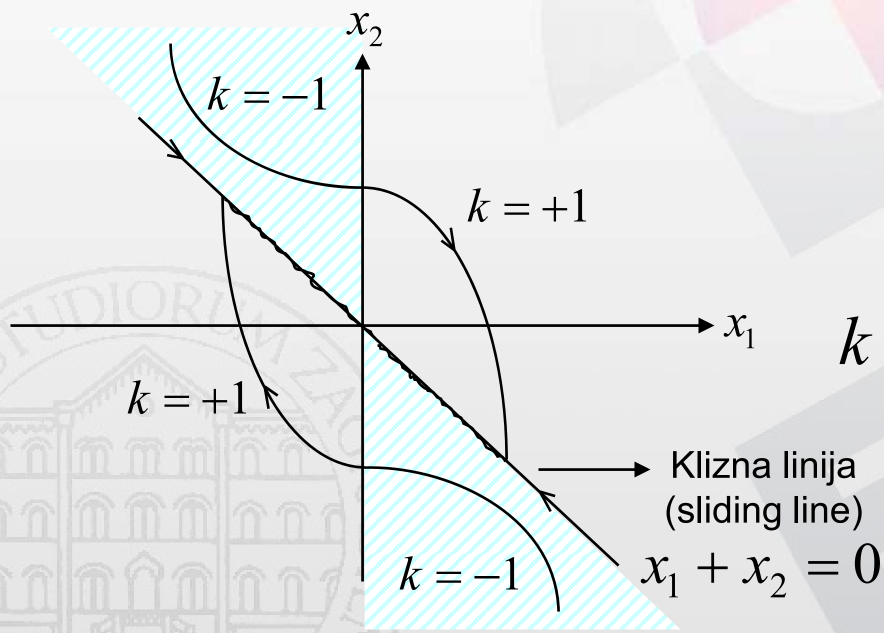



Ako $k = -1$



# Primjer (nastavak)

Ako se na odgovarajući način obavi prebacivanje *k* od *-1* do *+1* dobit će se sustav promjenjive strukture.




$$k = \begin{cases} -1 & ako \quad x_1 s < 0 \\ +1 & ako \quad x_1 s > 0 \end{cases}$$

$$\text{gdje } s = x_1 + x_2$$

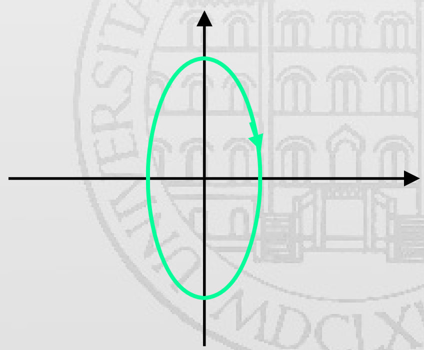
Kreirana je nova trajektorija: sustav je neosjetljiv na poremećaje kada je u kliznom režimu (sliding regime) - upravljanje s promjenjivom strukturom

# Povratna veza po izlaznom signalu

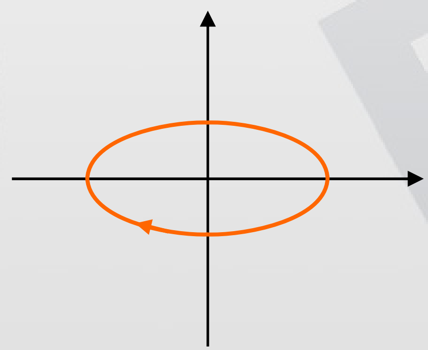
Primjer: harmonički oscilator

$$\boxed{\ddot{y} + y = u}$$

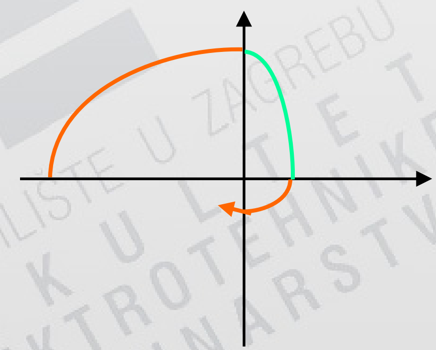
$$u = -y$$



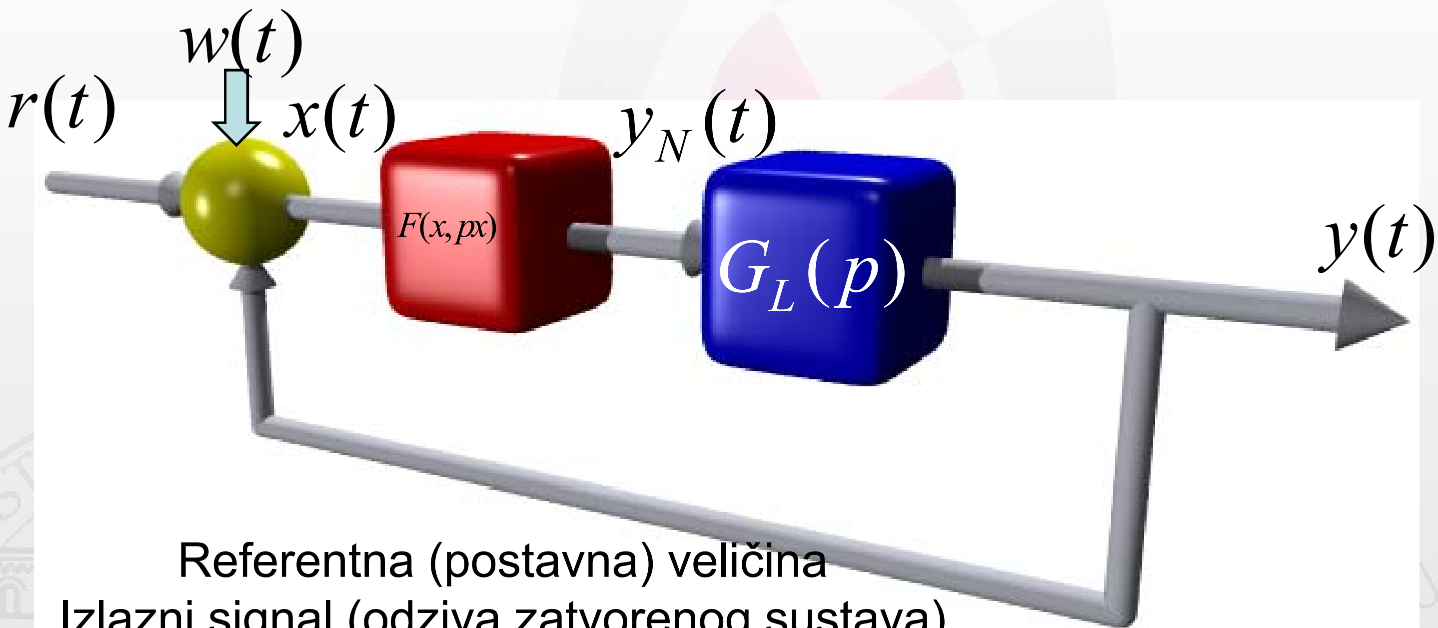
$$u = \frac{1}{2} y$$



Sustav s prebacivanjem
"switched system"



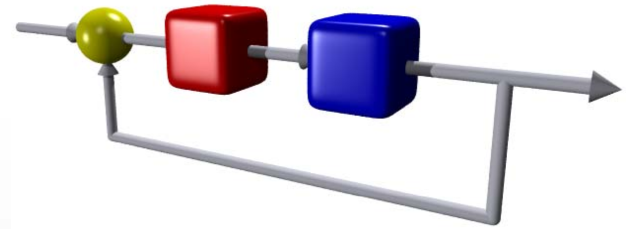
# Temeljna struktura




| | |
|---|---|
| $r(t)$ | Referentna (postavna) veličina |
| $y(t)$ | Izlazni signal (odziva zatvorenog sustava) |
| $w(t)$ | Poremećajna veličina |
| $x(t)$ | Pobuda (signal) na ulazu nelinearnog dijela sustava |
| $G_L(p)$ | Linearni dio sustava |
| $y_N(t)$ | Odziv iz nelinearnog dijela sustava |
| $F(x,px)$ | Nelinearni dio sustava |

$p = \dfrac{d}{dt}$ operator deriviranja

# Dinamička jednadžba



Diferencijalna jednadžba razmatrane strukture:

$$\boxed{f(t) = r(t) + w(t) = x(t) + y(t) = x(t) + G_L(p)F(x, px)}$$

Gdje:

$$G_L(p) = \frac{B(p)}{A(p)}; \qquad p \overset{def}{=} \frac{d}{dt}$$

Diferencijalna jednadžba nema opće rješenje. Njeno rješenje ovisi o:
-Strukturi sustava,
-Parametrima sustava,
-Početnim uvjetima,
-Vanjskim djelovanjima (poremećajima i šumovima mjerenja)

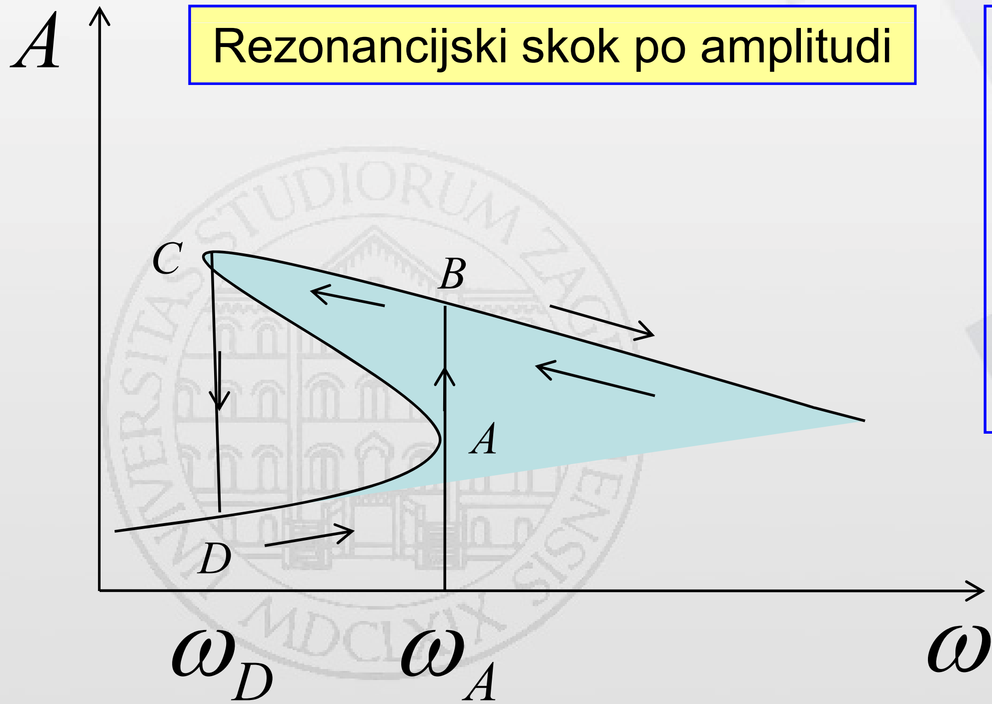
# Rezonancijski skok

- Pojava rezonancijskog skoka je pojava koja nije dovoljno istražena
- Nejednoznačnost dinamičkog ponašanja obično u teoriji oscilacija mehaničkih sustava
- U teoriji upravljanja sustavima, susreće se često u elektromehaničkim sustavima
- Pojam rezonancijskog skoka $\Rightarrow$ podrazumijeva se pojava skokovite promjene iznosa amplitude i faze periodičkog izlaznog signala sustava. Do promjene dolazi uslijed više razloga, među kojima su:
  - Mala rezerva stabilnosti – sustavi s malim prigušenjem linearnog dijela, tj. sustavi koji trebaju udovoljiti visokim kriterijima kvalitete upravljanja

# Rezonancijski skok

Rezonancijski skok (RS) je periodičke prirode, to je jedno od mogućih uspostavljenih stanja sustava; tj. RS nije moguć u prijelaznom stanju pa ga nije moguće odrediti rješavanjem diferencijalne jednadžbe ili eksperimentalno.

Rezonancijski skok po amplitudi




Rezonancijski skok moguć je i po fazi i po frekvenciji.

Ova pojava se koristi i za specifične slučajeve tj za sinkonizaciju po frekvenciji ulaznog i izlaznog signala.

# Zaključak

- Linearni sustavi za razliku od nelinearnih sustava jednostavniji su u svojem ponašanju
- Teorija linearnih sustava je dobro razvijena
- Teorija nelinearnih sustava nema generalni karakter kao teorija linearnih sustava
- Priroda se ponaša po nelinearnim zakonima, te se s nelinearnostima stalno susrećemo
- Treba biti svjestan mogućih ponašanja koje nelinearni sustavi mogu generirati
- Dinamika nelinearnih sustava mnogo je bogatija od dinamike linearnih sustava