

Prvi međuispit

10. travnja 2009.

Ime i Prezime:

Matični broj:

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (3 boda)

Navedite barem tri dinamička vladanja koja su karakteristična za nelinearne sustave a ne postoje u linearnim sustavima.

2. zadatak (8 bodova)

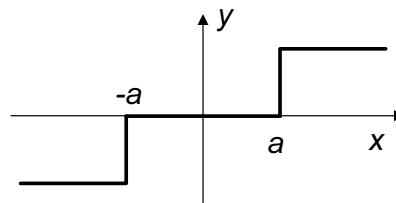
Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednažbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x \frac{dx}{dt} + x = 0$$

- (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.
- (2 boda) Odredite i nacrtajte područja u faznoj ravnini (\dot{x}, x) gdje je nagib trajektorije 0 i ∞ .
- (2 boda) Korištenjem metode izoklina, odredite i nacrtajte smjerove trajektorija sustava u cijeloj faznoj ravnini. Koje područje je stabilno, koje nestabilno i gdje je separatrisa? *Napomena:* Nacrtajte nekoliko izoklina, npr. sa nagibima 0, ± 1 , ± 2 .
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$.
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 2.5$.

3. zadatak (9 bodova)

Na Slici 6 prikazan je nelinearni element tropoložajnog releja. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ gdje je $X_m > a$.



Slika 1: Tropoložajni relej.

- (3 boda) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.
- (6 bodova) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa.

4. zadatak (6 bodova)

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se dvopoložajni relej s histerezom i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$. Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$. Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2} - j \frac{4Cx_a}{\pi X_m^2}$.

- (3 boda) Napišite izraz za osnovni harmonik izlaznog signala iz releja, $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.
- (3 boda) Odredite s kolikim pojačanjem proces pojačava drugi po redu harmonik koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa.

RJEŠENJA:**ZADATAK 1**

Navedite barem tri dinamička vladanja koja su karakteristična za nelinearne sustave a ne postoje u linearnim sustavima.

Bifurkacija, kaos, neograničena reakcija u konačnom vremenu (finite escape time), vlastite oscilacije, ...

ZADATAK 2

Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednačkom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x \frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) (2 boda) Odredite jednačbu izoklina.

$$\ddot{x} - 0.5x\dot{x} + x = 0$$

Neka je $y = \frac{dx}{dt}$ iz čega slijedi

$$\dot{y} - 0.5xy + x = 0 \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.5x - \frac{x}{y} = m$$

Na poslijetku jednačba izoklina je

$$y = \frac{x}{0.5x - m}$$

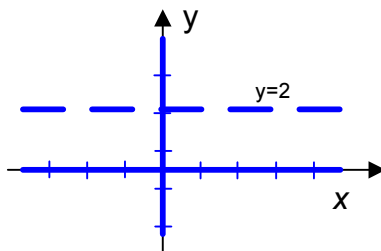
gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

b) (2 boda) Odredite i nacrtajte područja u faznoj ravni (\dot{x}, x) gdje je nagib trajektorije 0 i ∞ .
Nagib je 0 na $y = 2$ i $x = 0$.

$$m = 0 \Rightarrow y = 2, x = 0$$

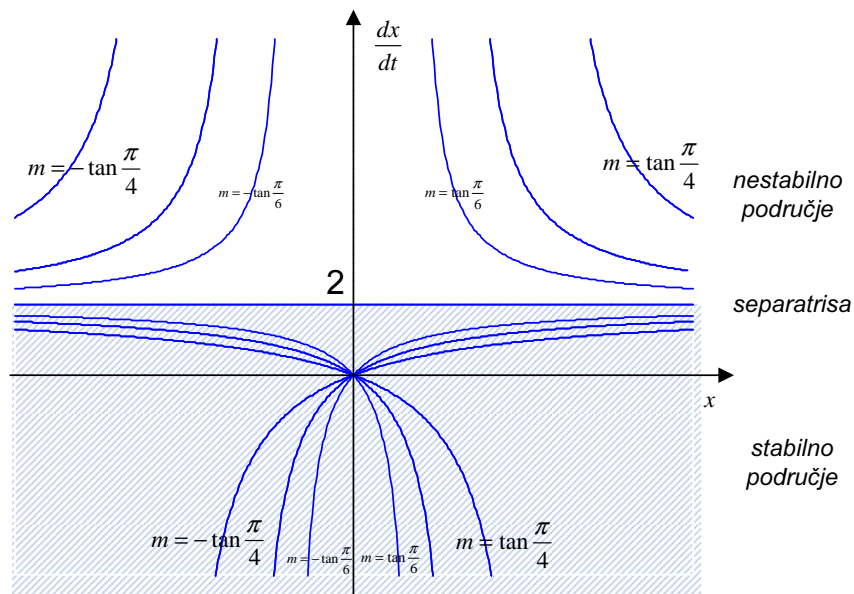
Nagib je ∞ na $y = 0$.

$$m = \infty \Rightarrow y = 0$$



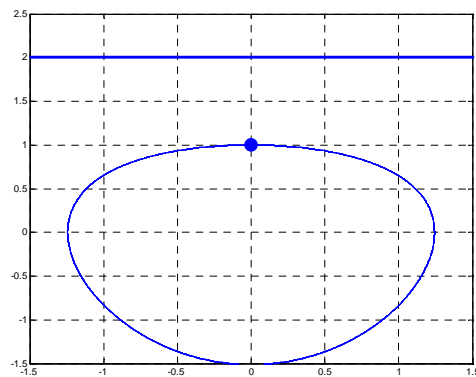
Slika 2: Izokline s nagibima 0 i ∞ .

c) (2 boda) Korištenjem metode izoklina, odredite i nacrtajte smjerove trajektorija sustava u cijeloj faznoj ravni. Koje područje je stabilno, koje nestabilno i gdje je separatrisa? *Napomena:* Nacrtajte nekoliko izoklina, npr. sa nagibima 0, ± 1 , ± 2 .



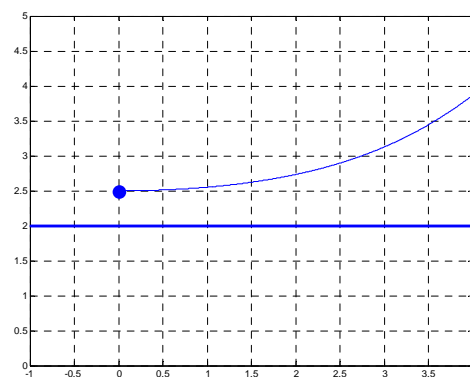
Slika 3: Izokline.

d) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$.



Slika 4: Trajektorija uz početne uvjete (0, 1).

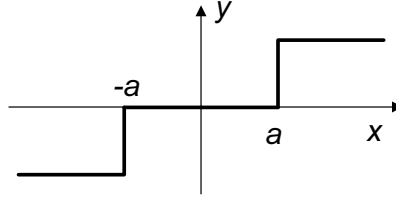
e) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 2.5$.



Slika 5: Trajektorija uz početne uvjete (0, 2.5).

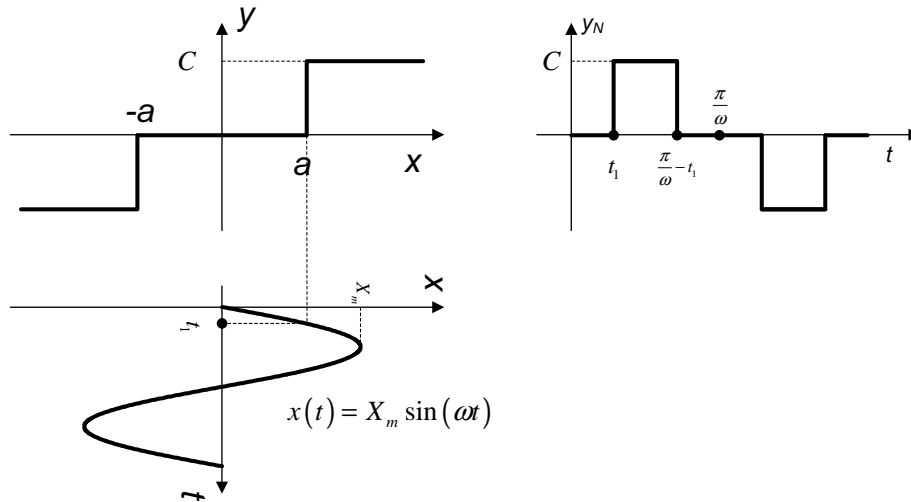
ZADATAK 3

Na Slici 6 prikazan je nelinearni element tropoložajnog releja. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ gdje je $X_m > a$.



Slika 6: Tropoložajni relej.

- a) (3 boda) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.



Slika 7: Tropoložajni relej i njegov izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

- b) (6 bodova) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa.

Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1 , iznos ulaznog signala je a , stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije

$$Q_N = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} C \cos \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} \int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} \cos \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} [\sin(\pi - \varphi_1) - \sin \varphi_1] = 0.$$

Ovo je očekivano budući da je nelinearnost jednoznačna.

Realni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} C \sin \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} \int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} \sin \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} [-\cos(\pi - \varphi_1) + \cos \varphi_1] = \\ &= \frac{4C}{\pi X_m} \cos \varphi_1 = \frac{4C}{\pi X_m} \cos \left(\arcsin \frac{a}{X_m} \right) = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m} \right)^2} \end{aligned}$$

ZADATAK 4

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se dvopoložajni relej s histerezom i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$. Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$. Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - (\frac{x_a}{X_m})^2} - j \frac{4Cx_a}{\pi X_m^2}$.

a) (3 boda) Napišite izraz za osnovni harmonik izlaznog signala iz releja, $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Pojačanje nelinearnog elementa je

$$|G_N| = \sqrt{P_N^2 + Q_N^2} = \frac{4C}{\pi X_m}$$

Kut je

$$\varphi = \arctan \frac{P_N}{Q_N} = \arctan \left(-\frac{x_a}{\sqrt{X_m^2 - x_a^2}} \right)$$

Izlazni signal ima oblik

$$u(t) = |G_N| X_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{4C}{\pi} \sin \left[\omega t + \arctan \left(-\frac{x_a}{\sqrt{X_m^2 - x_a^2}} \right) \right]$$

b) (3 boda) Odredite s kolikim pojačanjem proces pojačava drugi po redu harmonik koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa.

S obzirom da je nelinearni element neparan, viši harmonici koji se javljaju su neparni. Drugi harmonik po redu koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa je onaj sa frekvencijom 3ω . Linearni dio taj harmonik pojačava sa iznosom

$$|G(j3\omega)| = \frac{K}{3\omega\sqrt{9T^2\omega^2 + 1}}$$