

# Međuispit

24. travnja 2013.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

## 1. zadatak (7 bodova)

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin(x) - xy.\end{aligned}$$

- (5 bodova) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete  $x(0) = 1$  i  $y(0) = 1$  ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete  $x(0) = -2\pi$  i  $y(0) = 0$

## 2. zadatak (7 bodova)

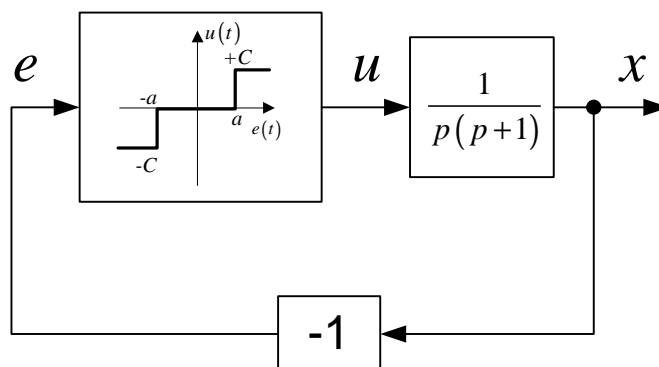
Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1 - x^2)y - x.\end{aligned}$$

- (1 bod) Odredite jednažbu izoklina.
- (5 bodova) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravni  $x-y$  gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 1$  ako se zna da je ravnotežno stanje  $x = 0$ ,  $y = 0$  tipa centar.

## 3. zadatak (6 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.



Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja.

- (5 bodova) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.
- (1 bod) Kolika smije biti maksimalna brzina izlaza ( $y = \frac{dx}{dt}$ ) na prijelazu u područje određeno s  $u = 0$  da bi se sustav smirio u ravnotežnom stanju prije nego što napusti područje određeno s  $u = 0$ ?

**4. zadatak (6 bodova)**

U zatvorenom krugu upravljanja s negativnom jediničnom povratnom vezom nalaze se tropoložajni relej i proces opisan funkcijom prijenosa  $G(s)$ . Opisna funkcija tropoložajnog releja je

$$G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2}$$

gdje je  $X_m$  amplituda ulaznog sinusnog signala,  $C$  izlaz iz tropoložajnog releja, a  $x_a$  širina zone neosjetljivosti tropoložajnog releja. Korištenjem Goldfarbovog principa, odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje procesa da u ovakvom sustavu ne dođe do pojave vlastitih oscilacija.

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin(x) - xy.\end{aligned}$$

a) (5 bodova) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned}0 &= y \\ 0 &= \sin(x) - xy.\end{aligned}$$

iz čega slijede sva ravnotežna stanja u obliku

$$(x_0, y_0) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}.$$

Linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x} &= \Delta y \\ \Delta\dot{y} &= (\cos x_0 - y_0) \Delta x - x_0 \Delta y\end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_0 - y_0 & -x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem ravnotežnih točaka dobije se:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos k\pi & -k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & -k\pi \end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti  $\lambda$  matrice  $\mathbf{J}$  će nam odrediti tip ravnotežnih stanja:

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ (-1)^{k+1} & \lambda + k\pi \end{vmatrix} = \lambda^2 + k\pi\lambda + (-1)^{k+1}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k\pi \pm \sqrt{(k\pi)^2 - 4(-1)^{k+1}}}{2}$$

- $k = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

- $k > 0$   
–  $k$  parno

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

–  $k$  neparno

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{stabilan \u010dvor}}$$

•  $k < 0$

–  $k$  parno

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

–  $k$  neparno

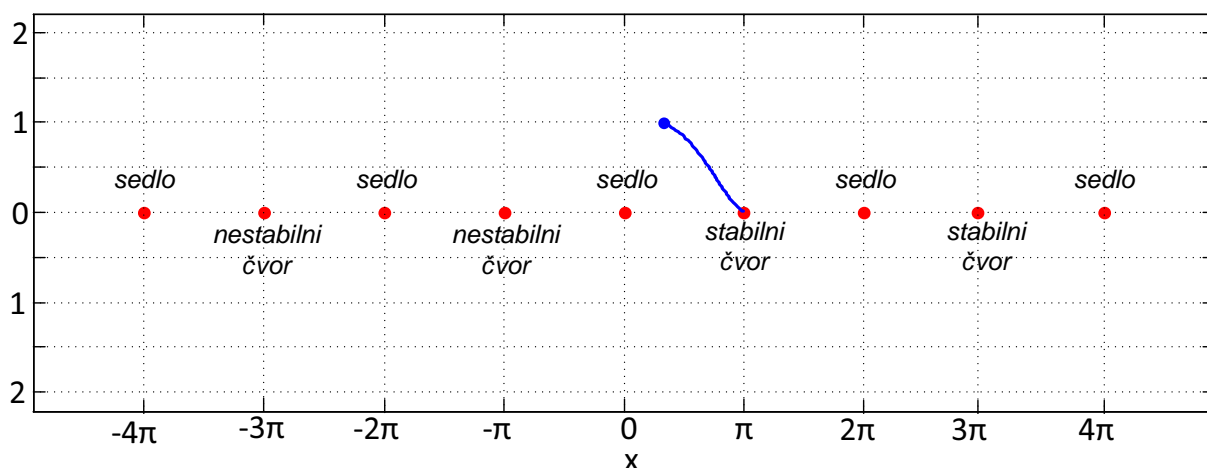
$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\text{nestabilan \u010dvor}}$$

- b) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te po\u010detni nagib uz po\u010detne uvjete  $x(0) = 1$  i  $y(0) = 1$  ako se zna da trajektorija zavr\u0161ava u najbli\u017eem ravnote\u017enom stanju.

S obzirom da trajektorija zavr\u0161ava u stabilnoj ravnote\u017enoj to\u010dki tipa \u010dvor, ona ne ide spiralno u ravnote\u017enu to\u010dku. Nije to\u010dno ako se nacрта da trajektorija ide spiralno u ravnote\u017enu to\u010dku. Rje\u0161enje je prikazano slikom 2.

- c) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz po\u010detne uvjete  $x(0) = -2\pi$  i  $y(0) = 0$ .

Po\u010detni uvjet je ujedno i ravnote\u017ena to\u010dka tipa sedlo. Ovo je nestabilna ravnote\u017ena to\u010dka ali s obzirom da je sustav autonoman, stanje \u0107e se zadr\u017eati u ovoj to\u010dki. Drugim rije\u010dima, trajektorija po\u010dinje, ostaje i zavr\u0161ava u ovoj to\u010dki.



Slika 2: Crvene to\u010dke su ravnote\u017ena stanja (ima ih beskona\u010dno i ponavljaju se svakih  $\pi$ ) a plava to\u010dka je po\u010detni uvjet u b) dijelu zadatka.

## ZADATAK 2

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednažbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1-x^2)y - x.\end{aligned}$$

a) (1 bod) Odredite jednažbu izoklina.

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)y-x}{y}$$

gdje je  $m$  nagib trajektorije na izoklini.

b) (5 bodova) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravni  $x$ - $y$  gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.

- jednak 0,

$$\begin{aligned}(1-x^2)y - x &= 0 \\ y &= \frac{x}{1-x^2}, 1-x^2 \neq 0\end{aligned}$$

- jednak  $\infty$ ,  
Nagib je  $\infty$  na  $y = 0$ .

- pozitivan i

- negativan.

Iz jednažbe izoklina, uz uvjete  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$  koji su navedeni u zadatku, slijede sljedeći uvjeti za predznak od  $m$

Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 3.

	brojnik $> 0$	brojnik $< 0$
$y > 0$	$m > 0$	$m < 0$
$y < 0$	$m < 0$	$m > 0$

– brojnik  $> 0$

$$\begin{aligned}(1-x^2)y - x &> 0 \\ (1-x^2)y &> x \\ \text{uz } 1-x^2 > 0 &\Rightarrow y > \frac{x}{1-x^2} \\ \text{uz } 1-x^2 < 0 &\Rightarrow y < \frac{x}{1-x^2}\end{aligned}$$

– brojnik  $< 0$

$$\begin{aligned}(1-x^2)y - x &< 0 \\ (1-x^2)y &< x \\ \text{uz } 1-x^2 > 0 &\Rightarrow y < \frac{x}{1-x^2} \\ \text{uz } 1-x^2 < 0 &\Rightarrow y > \frac{x}{1-x^2}\end{aligned}$$

Skicirana područja su na slici 3.

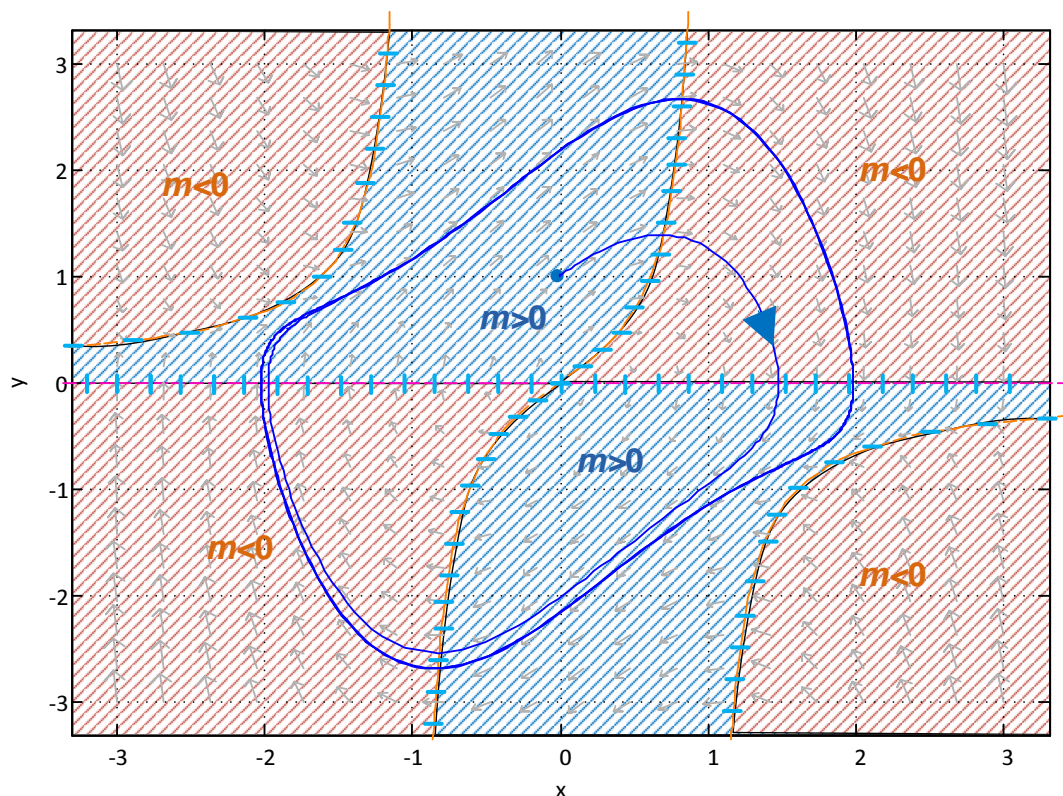
c) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 1$  ako se zna da je ravnotežno stanje  $x = 0$ ,  $y = 0$  tipa centar.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$m = \frac{1}{1} == \tan \alpha$$

$$\alpha = \text{atan2}(1, 1) = 45^\circ$$

Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da se krivulja kreće u smjeru kazaljke na satu. S obzirom da se radi o ravnotežnoj točki tipa centar, trajektorija je zatvorenog oblika. Rješenje je prikazano slikom 3 a u ispitu je potrebno nacrtati bilo kakav zatvoreni oblik krivulje koja je usmjerena u smjeru kazaljke na satu.



Slika 3: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib  $\infty$ . Narančasto iscrtkana područja su područja s negativnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s pozitivnim nagibom trajektorije.

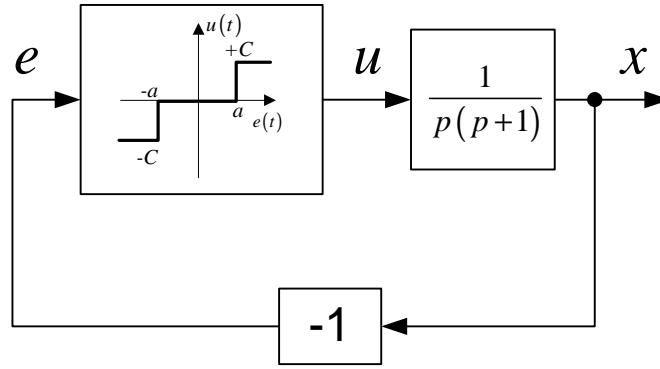
### ZADATAK 3

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 4.

- a) (5 bodova) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s(s+1)}u \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = u$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u$$



Slika 4: Zatvoreni krug upravljanja.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + y &= u \\ \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} + y &= u \\ \frac{dy}{dx} y + y &= u \\ \frac{y}{u-y} dy &= dx \end{aligned}$$

Integriranjem obje strane se dobije:

$$x = -y - u \ln |u - y| + \text{const.}$$

I. latica

$$e < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow u = -C$$

$$x = -y + C \ln |-C - y| + \text{const.}$$

II. latica

$$|e| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow u = 0$$

$$x = -y + \text{const.}$$

III. latica

$$e > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow u = C$$

$$x = -y - C \ln |C - y| + \text{const.}$$

- b) (1 bod) Kolika smije biti maksimalna brzina izlaza ( $y = \frac{dx}{dt}$ ) na prijelazu u područje određenu s  $u = 0$  da bi se sustav smirio u ravnotežnom stanju prije nego što napusti područje određeno s  $u = 0$ ?

U području određenom s  $u = 0$  trajektorija se giba po pravcu. Što je veća brzina  $y$  s kojom upada u srednju laticu, to je veća udaljenost ravnotežne točke od ishodišta. Najdalje što može biti ravnotežna točka je u  $x = -a$  ili  $x = a$ .

$\text{const.}$  se može odrediti iz početnog uvjeta  $(x_0, y_0) = (\pm a, y_0)$  gdje je  $y_0$  tražena veličina. Dakle jednačba je

$$\pm a = -y_0 + \text{const.}$$

Konačna točka je određena s  $x = \mp a$  (primjetite obrnute predznake od početne točke) te vrijedi jednačba

$$\mp a = -y + \text{const.} \Rightarrow \text{const.} = \mp a$$

Uvrštavanjem  $\text{const.}$  u početnu jednačbu, dobijemo da je

$$\boxed{y_0 = \mp 2a}.$$

**ZADATAK 4**

U zatvorenom krugu upravljanja s negativnom jediničnom povratnom vezom nalaze se tropoložajni relej i proces opisan funkcijom prijenosa  $G(s)$ . Opisna funkcija tropoložajnog releja je  $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2}$  gdje je  $X_m$  amplituda ulaznog sinusnog signala,  $C$  izlaz iz tropoložajnog releja, a  $x_a$  širina zone neosjetljivosti tropoložajnog releja. Odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje procesa za u ovakvom sustavu ne dođe do pojave vlastitih oscilacija. Goldfarbov princip je prikazan jednadžbom

$$-G_N^{-1}(X_m) = G(j\omega).$$

Da bi došlo do vlastitih oscilacija, dvije krivulje moraju imati presjecište. Opisna funkcija tropoložajnog releja ima samo realnu komponentu (jer je jednoznačna) što znači da se njezin negativni inverz nalazi na lijevoj negativnoj realnoj osi. Maksimum opisne funkcije je:

$$\begin{aligned} \frac{dG_N(X_m)}{dX_m} = 0 &\Rightarrow X_m = x_a\sqrt{2} \\ G_{N,\max}(x_a\sqrt{2}) &= \frac{2C}{\pi x_a} \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da negativni inverz opisne funkcije zauzima realnu os na području  $(-\infty, -\frac{\pi x_a}{2C})$ . Znači da za amplitudno osiguranje vrijedi:

$$\frac{1}{A.O.} < \frac{\pi x_a}{2C}$$

odnosno

$$A.O. > \frac{2C}{\pi x_a}$$



# Međuispit

8. svibnja 2012.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

## 1. zadatak (4 boda)

Zadana je nelinearna diferencijalna jednačba

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

- a) (2 boda) Korištenjem postupka separacije varijabli odredite rješenje  $x(t)$  uz početni uvjet  $x_0$ .  
 b) (2 boda) Skicirajte odziv  $x(t)$  uz početni uvjet  $x_0 = 0.5$  i napišite kako se naziva ova pojava.

## 2. zadatak (10 bodova)

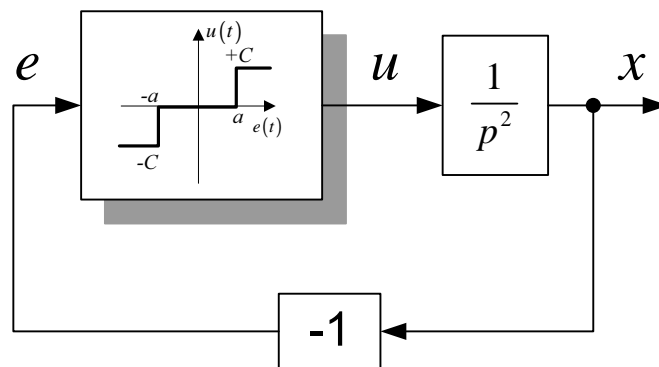
Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednačbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y-1) \\ \dot{y} &= 4 - x^2 - y^2.\end{aligned}$$

- a) (4 boda) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.  
 b) (0.5 boda) Odredite jednačbu izoklina u obliku  $m = f(x, y)$ .  
 c) (3 boda) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini  $x-y$  gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.  
 d) (1.5 boda) Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete  $x(0) = 2$  i  $y(0) = 3$  ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.  
 e) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 2$ .

## 3. zadatak (7 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.

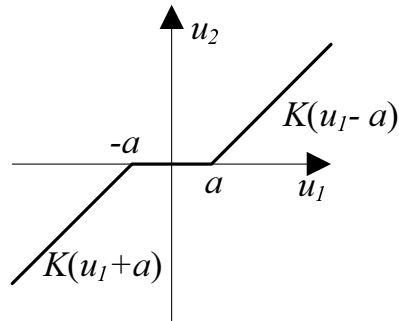


Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja.

- a) (4 boda) Napišite jednačbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.  
 b) (3 boda) Uz parametre sustava  $C = 1.5$ ,  $a = 3$  i početne uvjete  $x(0) = 4$  i  $\dot{x}(0) = 1$ , izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini  $x-\dot{x}$ . *Napomena:* Obavezno označiti smjer trajektorije i napisati kako je određen!

**4. zadatak (5 bodova)**

Na slici 2 prikazan je nelinearni element zona neosjetljivosti. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $u_1(t) = X_m \sin(\omega t)$  gdje je  $X_m > a$ .



Slika 2: Zona neosjetljivosti.

- (1 bod) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $u_2(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke.
- (4 boda) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa kada je  $X_m > a$ .

*Napomena:*  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$  i  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Zadana je nelinearna diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dt} = x^2.$$

a) (2 boda) Korištenjem postupka separacije varijabli odredite rješenje  $x(t)$  uz početni uvjet  $x_0$ .

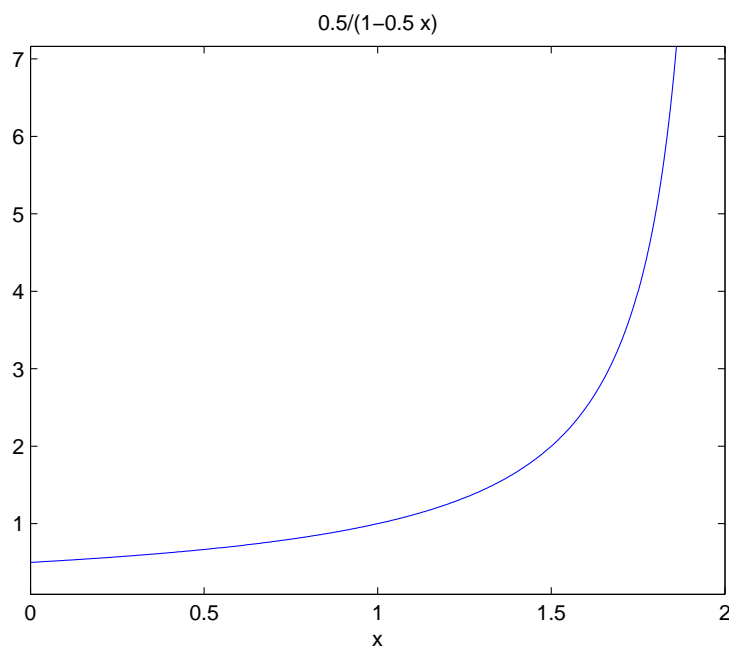
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \frac{dx}{x^2} &= dt / \int \\ -\frac{1}{x} + C &= t \\ x &= \frac{1}{C-t}\end{aligned}$$

$$t = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{x_0}$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$$

b) (2 boda) Skicirajte odziv  $x(t)$  uz početni uvjet  $x_0 = 0.5$  i napišite kako se naziva ova pojava.

Pojava se naziva vrijeme konačnog pobjega (finite time escape) i prikazan je slikom 3.



Slika 3: Finite time escape.

**ZADATAK 2**

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednačinama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(y-1) \\ \dot{y} &= 4-x^2-y^2.\end{aligned}$$

a) (4 boda) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned} 0 &= x(y-1) \\ 0 &= 4-x^2-y^2. \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

- I. (0, 2)
- II. (0, -2)
- III. ( $\sqrt{3}$ , 1)
- IV. ( $-\sqrt{3}$ , 1)

linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x} &= (y_0 - 1) \Delta x + x_0 \Delta y \\ \Delta \dot{y} &= -2x_0 \Delta x - 2y_0 \Delta y \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 - 1 & x_0 \\ -2x_0 & -2y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Za svaku ravnotežnu točku se može napisati:

$$\text{I. } (0, 2) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4 \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

$$\text{II. } (0, -2) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4 \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

III. ( $\sqrt{3}$ , 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \\ \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}) &= \lambda(\lambda + 2) + 6 = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= -1 \pm j\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{stabilan fokus}}$$

IV. ( $\sqrt{3}$ , 1)

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \\ \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}) &= \lambda(\lambda + 2) + 6 = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= -1 \pm j\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{stabilan fokus}}$$

b) (0.5 boda) Odredite jednažbu izoklina u obliku  $m = f(x, y)$ .

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4 - x^2 - y^2}{x(y - 1)}$$

gdje je  $m$  nagib trajektorije na izoklini.

c) (3 boda) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini  $x-y$  gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.

- jednak 0,  
Nagib je 0 na kružnici  $x^2 + y^2 = 4$ .

$$m = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

- jednak  $\infty$ ,  
Nagib je  $\infty$  na  $x = 0$  ili  $y = 1$ .

$$m = \infty \Rightarrow y = 1 \vee x = 0$$

- pozitivan i

- negativan.

Iz jednadžbe izoklina slijede sljedeći uvjeti za smjer od  $m$

Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 3.

	$4 - x^2 - y^2$	$x$	$y - 1$	$m$
1	$> 0$	$> 0$	$> 0$	$> 0$
2	$> 0$	$> 0$	$< 0$	$< 0$
3	$> 0$	$< 0$	$> 0$	$< 0$
4	$> 0$	$< 0$	$< 0$	$> 0$
5	$< 0$	$> 0$	$> 0$	$< 0$
6	$< 0$	$> 0$	$< 0$	$> 0$
7	$< 0$	$< 0$	$> 0$	$> 0$
8	$< 0$	$< 0$	$< 0$	$< 0$

Skicirana područja su na slici 4.

- d) (1.5 boda) Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete  $x(0) = 2$  i  $y(0) = 3$  ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

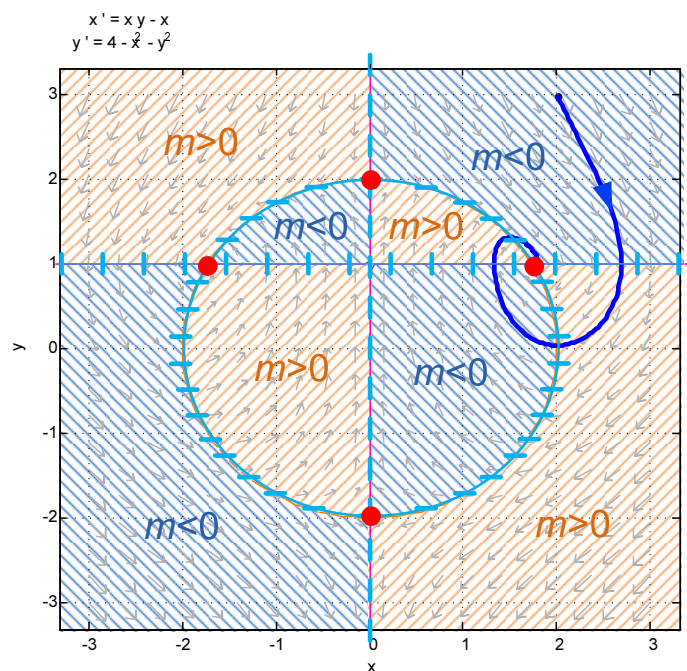
$$m = \frac{-9}{4} = \tan \alpha$$

$$\alpha = \text{atan2}(-9, 4) = -66^\circ$$

Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da trajektorije kreće dolje desno. S obzirom da trajektorija završava u stabilnoj ravnotežnoj točki tipa fokus, ona spiralno ide u ravnotežnu točku. Nije točno ako se nacrti da trajektorija ide direktno u ravnotežnu točku. Rješenje je prikazano slikom 4.

- e) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $y(0) = 2$ .

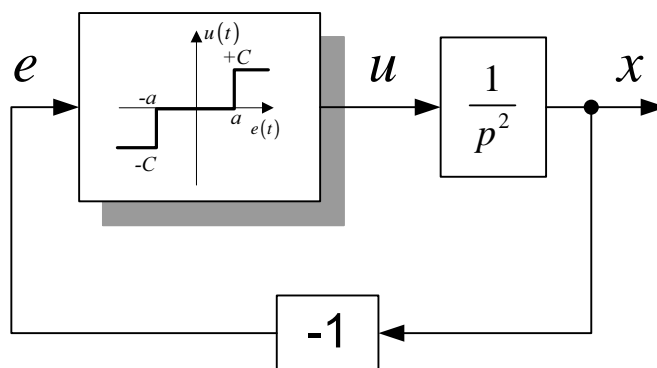
Početni uvjet je ujedno i ravnotežna točka tipa sedlo. Ovo je nestabilna ravnotežna točka ali s obzirom da je sustav autonoman, stanje će se zadržati u ovoj točki. Drugim riječima, trajektorija počinje, ostaje i završava u ovoj točki.



Slika 4: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib  $\infty$ . Narančasto iscrtkana područja su područja s pozitivnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s negativnim nagibom trajektorije.

### ZADATAK 3

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 5.



Slika 5: Zatvoreni krug upravljanja.

- a) (4 boda) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s^2} u \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = u$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt} y \frac{dt}{dx} = u$$

$$ydy = udx$$

$$y^2 = 2 \int u dx + \text{const.}$$

I. latica

$$e < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow u = -C$$

$$y^2 = -2Cx + \text{const}$$

II. latica

$$|e| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow u = 0$$

$$y^2 = \text{const}$$

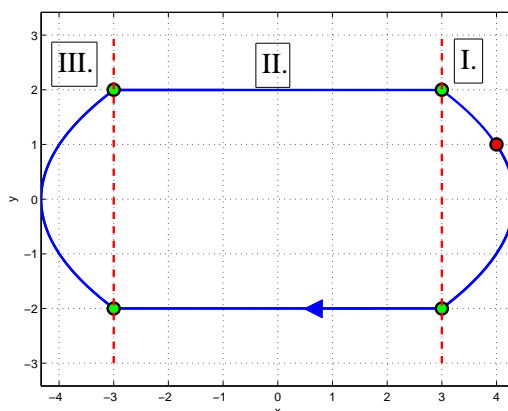
III. latica

$$e > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow u = C$$

$$y^2 = 2Cx + \text{const}$$

- b) (3 boda) Uz parametre sustava  $C = 1.5$ ,  $a = 3$  i početne uvjete  $x(0) = 4$  i  $\dot{x}(0) = 1$ , izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini  $x-\dot{x}$ . Napomena: Obavezno označiti smjer trajektorije i napisati kako je određen!

korak	$x_0$	$y_0$	latice	const.	jednadžba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	4	1	I.	7	$y^2 = -3x + 13$	3	$\pm 2$
2.	3	$\pm 2$	II.	4	$y^2 = 4$	-3	$\mp 2$
3.	-3	$\mp 2$	III.	13	$y^2 = 3x + 13$	-3	$\pm 2$



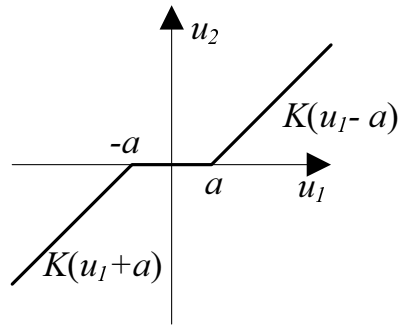
Slika 6: Trajektorija uz zadatak.

Smjer se može odrediti tako da se izračuna kut trajektorije u zadanom početnom trenutku.

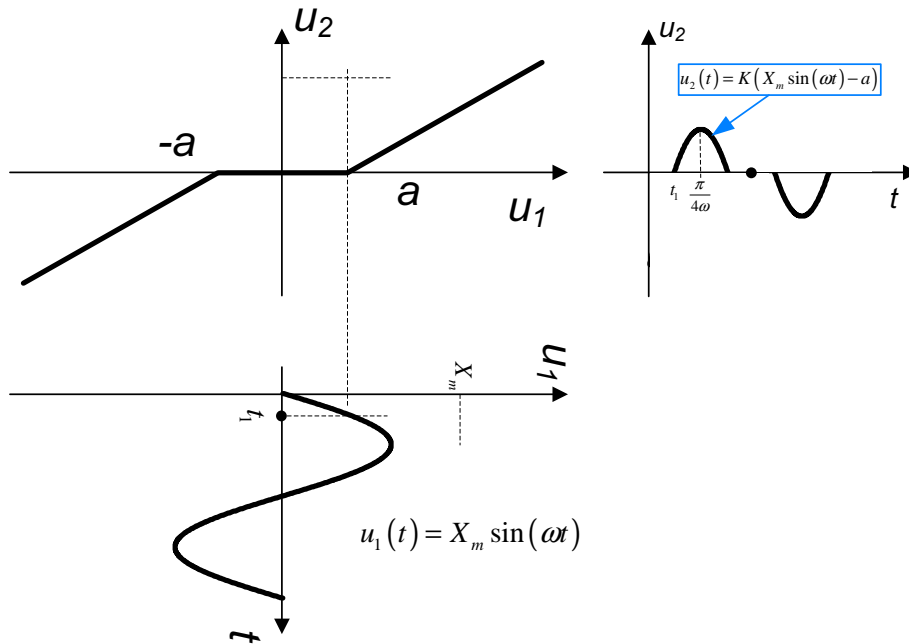
#### ZADATAK 4

Na slici 7 prikazan je nelinearni element zona neosjetljivosti. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $u_1(t) = X_m \sin(\omega t)$  gdje je  $X_m > a$ .

- a) (1 bod) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $u_2(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke.



Slika 7: Zona neosjetljivosti.



Slika 8: Zona neosjetljivosti i njezin izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

- b) (4 boda) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa kada je  $X_m > a$ . Ulazni signal je sinusni, oblika  $x = X_m \sin(\omega t)$ . U trenutku  $t_1$ , iznos ulaznog signala je  $a$ , stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije je 0 budući da je nelinearni element jednoznačan. Realni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{4}{\pi X_m} \int_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} u_2 \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{\pi X_m} \int_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} K(X_m \sin \varphi - a) \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4K}{\pi X_m} \int_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} (X_m \sin^2 \varphi - a \sin \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Vrijedi da je  $\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} [\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi]$  iz čega slijedi



$$\begin{aligned}
P_N &= \frac{4K}{\pi X_m} \left[ \frac{X_m}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_a - \frac{1}{2} \sin \pi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a \right) - a \left( -\cos \frac{\pi}{2} + \cos \varphi_a \right) \right] = \\
&= \frac{2K}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi_a + \frac{1}{2} \sin 2\varphi_a \right) - \frac{4K}{\pi} \frac{a}{X_m} \cos \varphi_a = \\
&= K - \frac{2K}{\pi} \left( \arcsin \frac{a}{X_m} + \frac{a}{X_m} \sqrt{1 + \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} \right)
\end{aligned}$$

## Prvi međuispit

1. travnja 2011.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

### 1. zadatak (7 bodova)

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y(0.75 - y - 0.5x).\end{aligned}$$

- (6 bodova) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.
- (1 bod) U faznoj ravlini  $x$ - $y$  skicirajte trajektoriju uz proizvoljan početni uvjet.

### 2. zadatak (6 bodova)

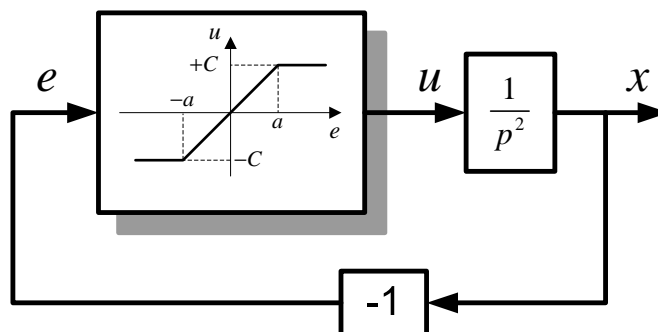
Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - 0.5y) \\ \dot{y} &= y(-0.75 + 0.25x).\end{aligned}$$

- (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.
- (3 bodova) Uz pretpostavku da je  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$  odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravlini  $x$ - $y$  gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 4$  i  $y(0) = 3$  ako se zna da je ravnotežno stanje  $x = 3$ ,  $y = 2$  tipa centar.

### 3. zadatak (7 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.

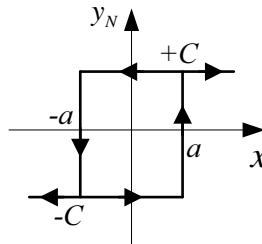


Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja.

- (4 bod) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.
- (3 boda) Uz parametre sustava  $C = 1.5$ ,  $a = 3$  i početne uvjete  $x(0) = 4$  i  $\dot{x}(0) = 1$ , izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravlini  $x$ - $\dot{x}$ . *Napomena:* Nije potrebno određivati smjer trajektorije!

**4. zadatak (6 bodova)**

Na slici 2 prikazan je nelinearni element dvopoložajni relej s histerezom. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ .



Slika 2: Dvopoložajni relej s histerezom.

- (1 bod) Koji harmonici se javljaju na izlazu iz nelinearnog elementa?
- (1 bod) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $y(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke ako je  $X_m > a$ .
- (3 boda) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa kada je  $X_m > a$ .
- (1 bod) Koliko je fazno zaostajanje osnovnog harmonika na izlazu nelinearnog elementa u odnosu na signal na ulazu?

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1-x-y) \\ \dot{y} &= y(0.75-y-0.5x).\end{aligned}$$

a) (6 bodova) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned}0 &= x(1-x-y) \\ 0 &= y(0.75-y-0.5x).\end{aligned}$$

iz čega slijedi:

- I. (0,0)
- II. (0,0.75)
- III. (1,0)
- IV. (0.5,0.5)

linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned}\Delta\dot{x} &= (1-2x_0-y_0)\Delta x - x_0\Delta y \\ \Delta\dot{y} &= -0.5y_0\Delta x + (0.75-2y_0-0.5x_0)\Delta y\end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2x_0-y_0 & -x_0 \\ -0.5y_0 & 0.75-2y_0-0.5x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Za svaku ravnotežnu točku se može napisati:

$$\text{I. } (0,0) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.75 \Rightarrow \boxed{\text{nestabilan čvor}}$$

$$\text{II. } (0,0.75) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = -0.75 \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

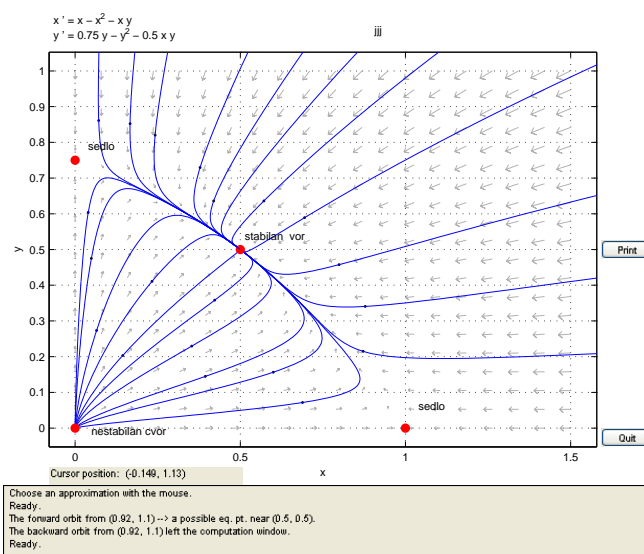
$$\text{III. } (1,0) \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.25 \Rightarrow \boxed{\text{sedlo}}$$

$$\text{IV. } (0.5,0.5)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix} \\ \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{J}) &= (\lambda + 0.5)^2 - 0.125 = s^2 + s + 0.125 = 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \frac{-2-\sqrt{2}}{4} < 0, \lambda_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{4} < 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{stabilan čvor}}$$

b) (1 bod) U faznoj ravнини  $x$ - $y$  skicirajte trajektoriju uz proizvoljan početni uvjet.



Slika 3: Trajektorija uz zadatak.

**ZADATAK 2**

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednažbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 - 0.5y) \\ \dot{y} &= y(-0.75 + 0.25x).\end{aligned}$$

a) (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y(-0.75 + 0.25x)}{x(1 - 0.5y)}$$

Na poslijetku jednažba izoklina je

$$y = \frac{4mx}{x(1+2m)-3}$$

gdje je  $m$  nagib trajektorije na izoklini.

b) (3 bodova) Uz pretpostavku da je  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$  odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravlini  $x$ - $y$  gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.

- jednak 0,

Nagib je 0 na  $y = 0$  i  $x = 3$ .

$$m = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge x = 3$$

- jednak  $\infty$ ,

Nagib je  $\infty$  na  $x = 0$  i  $y = 2$ .

$$m = \infty \Rightarrow y = 2 \wedge x = 0$$

- pozitivan i

- negativan.

Iz jednažbe izoklina, uz uvjete  $x \geq 0$  i  $y \geq 0$  koji su navedeni u zadatku, slijede sljedeći uvjeti za predznak od  $m$

Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 3.

	$-0.75 + 0.25x > 0 \Rightarrow x > 3$	$-0.75 + 0.25x < 0 \Rightarrow x < 3$
$1 - 0.5y > 0 \Rightarrow y < 2$	$m > 0$	$m < 0$
$1 - 0.5y < 0 \Rightarrow y > 2$	$m < 0$	$m > 0$

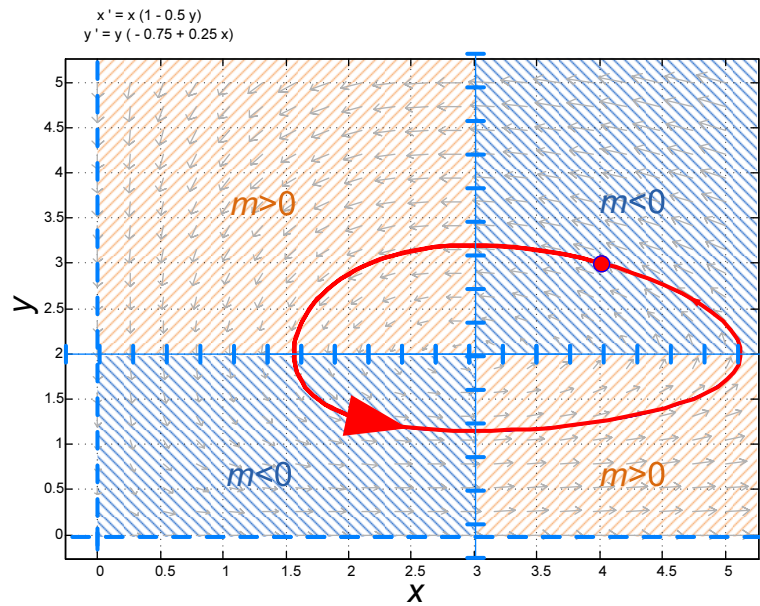
Skicirana područja su na slici 4.

c) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 4$  i  $y(0) = 3$  ako se zna da je ravnotežno stanje  $x = 3$ ,  $y = 2$  tipa centar.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$\begin{aligned}m &= \frac{3(-0.75+1)}{4(1-1.5)} = \frac{0.75}{-2} = \tan \alpha \\ \alpha &= \text{atan2}(0.75, -2) = 160^\circ\end{aligned}$$

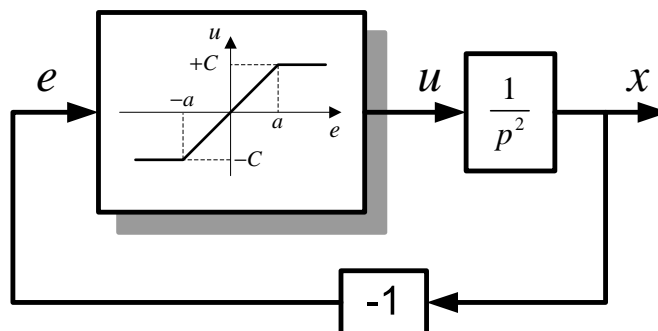
Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da se krivulja kreće suprotno od kazaljke na satu. S obzirom da se radi o ravnotežnoj točki tipa centar, trajektorija je zatvorenog oblika. Rješenje je prikazano slikom 4.



Slika 4: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib  $\infty$ . Narančasto iscrtkana područja su područja s pozitivnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s negativnim nagibom trajektorije.

**ZADATAK 3**

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 5.



Slika 5: Dvopoložajni relej s histerezom.

a) (4 bod) Napišite jednačbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s^2} y_N \Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} = y_N$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y_N$$

$$\frac{dy}{dt} y \frac{dt}{dx} = y_N$$

$$y dy = y_N dx$$

$$y^2 = \int y_N dx + const.$$

I. latica

$$u > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow y_N = C$$

$$y^2 = 2Cx + const$$

II. latica

$$u < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow y_N = -C$$

$$y^2 = -2Cx + const$$

III. latica

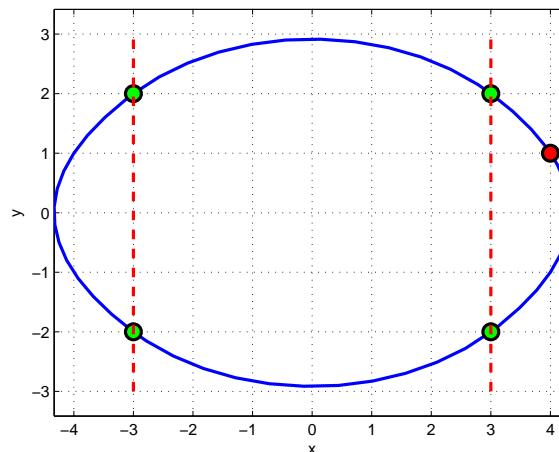
$$|u| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow y_N = \frac{C}{a} u = -\frac{C}{a} x$$

$$y^2 + \frac{C}{a} x^2 = const$$

b) (3 boda) Uz parametre sustava  $C = 1.5$ ,  $a = 3$  i početne uvjete  $x(0) = 4$  i  $\dot{x}(0) = 1$ , izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravlini  $x-\dot{x}$ . *Napomena:* Nije potrebno određivati smjer trajektorije!

korak	$x_0$	$y_0$	latice	const.	jednačba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	4	1	II.	13	$y^2 = -3x + 13$	3	$\pm 2$
2.	3	$\pm 2$	III.	8.5	$y^2 + 0.5x^2 = 8.5$	-3	$-(\pm 2)$
3.	-3	$-(\pm 2)$	I.	13	$y^2 = 3x + 13$	-3	$\pm 2$

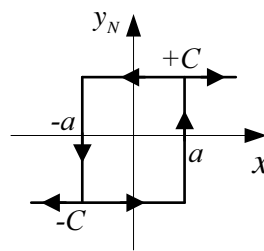




Slika 6: Trajektorija uz zadatak.

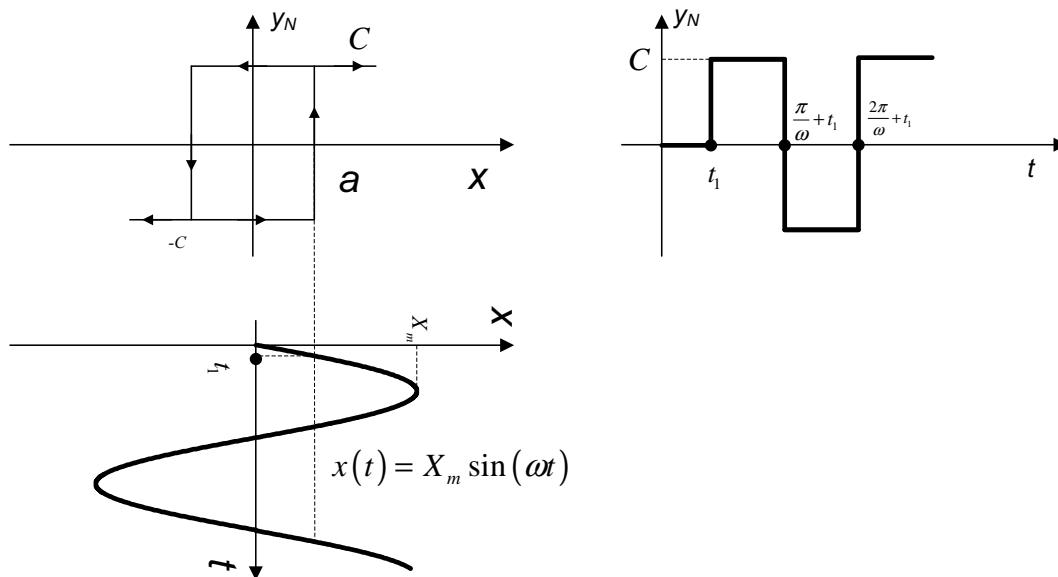
**ZADATAK 4**

Na slici 7 prikazan je nelinearni element dvopoložajni relej s histerezom. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ .



Slika 7: Dvopoložajni relej s histerezom.

- a) (1 bod) Koji harmonici se javljaju na izlazu iz nelinearnog elementa?  
Neparni višekratnici osnovnog harmonika.
- b) (1 bod) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $y(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke ako je  $X_m > a$ .



Slika 8: Slika uz rješenje – izlaz iz dvopoložajnog releja s histerezom.

- c) (3 boda) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa kada je  $X_m > a$ . Ulazni signal je sinusni, oblika  $x = X_m \sin(\omega t)$ . U trenutku  $t_1$ , iznos ulaznog signala je  $a$ , stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Realni i imaginarni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} y_N \sin \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi X_m} \left[ \int_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi - \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{C}{\pi X_m} [-\cos(\pi + \varphi_1) + \cos \varphi_a + \cos \varphi_a - \cos(\pi + \varphi_1)] = \frac{4C}{\pi X_m} \cos \varphi_1 = \\ &= \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_N &= \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} y_N \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi X_m} \left[ \int_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi - \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} C \cos \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{C}{\pi X_m} [\sin(\pi + \varphi_1) - \sin \varphi_a - \sin(2\pi + \varphi_a) + \sin(\pi + \varphi_1)] = -\frac{4C}{\pi X_m} \sin \varphi_1 = \\ &= -\frac{4Ca}{\pi X_m^2} \end{aligned}$$

- d) (1 bod) Koliko je fazno zaostajanje osnovnog harmonika na izlazu nelinearnog elementa u odnosu na signal na ulazu?

$$\varphi = \operatorname{atan} \frac{Q}{P} = \operatorname{atan} \left( -\frac{a}{\sqrt{X_m^2 - a^2}} \right)$$

## Drugi međuispit

13. svibnja 2011.

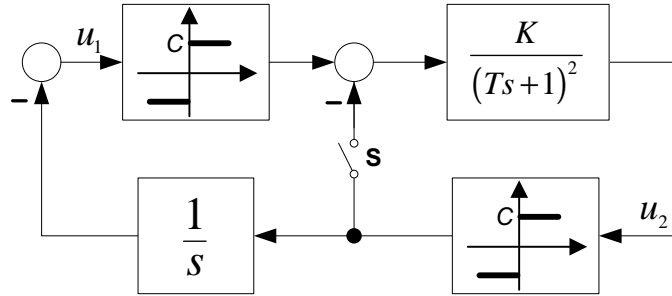
Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

### 1. zadatak (9 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 1 gdje je  $C = 0.5$  a opisna funkcija dvopoložajnog releja  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$ .

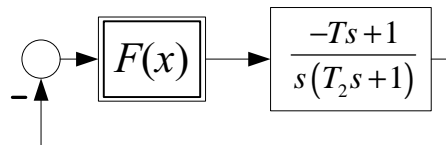


Slika 1: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 1.

- a) (3.5 boda) Odredite parametre sustava  $K$  i  $T$  ako se uz *otvorenu* sklopku **S** javljaju vlastite oscilacije  $u_2(t) = 0.2 \sin(0.2t)$ .
- b) (5.5 boda) Uz određene  $K$  i  $T$  pod a), odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija, tj.  $u_1(t) = A \sin(\omega t)$  i  $u_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$  uz *zatvorenu* sklopku **S**.

### 2. zadatak (8 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 2.



Slika 2: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 2.

- a) (4.5 boda) Korištenjem kriterija Popova, odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.
- b) (3.5 boda) Korištenjem Goldfarbovog principa, odredite kolika mora biti vremenska konstanta  $T$  da ne dođe do pojave vlastitih oscilacija u sustavu prikazanom slikom 2 ako je nelinearni element  $F(x)$  kvantizator s kvantizacijskom razinom  $D$ . Opisna funkcija kvantizatora je

$$G_N(X_m) = \begin{cases} 0, & X_m < \frac{D}{2} \\ \frac{4D}{\pi X_m} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{2k-1}{2} \frac{D}{X_m}\right)^2}, & \frac{2n-1}{2} D < X_m < \frac{2n+1}{2} D \end{cases}$$

### 3. zadatak (4 boda)

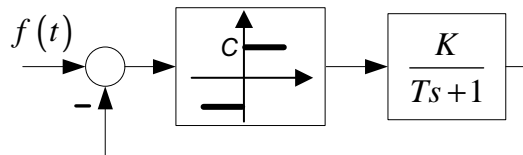
Objasnite princip zamjene ekstremalnog upravljanja formiranjem povratne veze po signalima modela. Pretpostavite da je nelinearna karakteristika procesa simetrična.

**4. zadatak (5 bodova)**

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 3 gdje je opisna funkcija dvopoložajnog releja  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$ . Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$

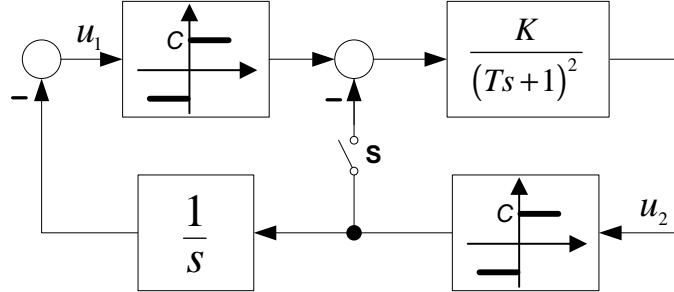
Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala  $F_v$  dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je  $K = 2$  i  $C = 0.7$ .



Slika 3: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Nelinearan je sustav prikazan slikom 4 gdje je  $C = 0.5$  a opisna funkcija dvopoložajnog releja  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$ .



Slika 4: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 1.

- a) (3.5 boda) Odredite parametre sustava  $K$  i  $T$  ako se uz *otvorenu* sklopku  $S$  javljaju vlastite oscilacije  $u_2(t) = 0.2 \sin(0.2t)$ .

Za nelinearni sustav (s otvorenom sklopkom) možemo pisati:

$$1 + G_{N1}(A) \frac{K}{(Ts+1)^2} G_{N2}(B) \frac{1}{s} = 0$$

i iz toga slijedi karakteristična jednadžba sustava

$$\begin{aligned} T^2 s^3 + 2Ts^2 + s + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) &= 0 \\ -jT^2\omega^3 - 2T\omega^2 + j\omega + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) &= 0 \end{aligned}$$

Iz imaginarnog dijela se odmah dobije

$$-jT^2\omega^3 + \omega = 0$$

iz čega slijedi

$$\boxed{T = \frac{1}{\omega} = 5}$$

Iz realnog dijela slijedi:

$$-2T\omega^2 + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) = 0$$

$$K = \frac{2T\omega^2}{G_{N1}(A)G_{N2}(B)} = 2\omega \left( \frac{\pi}{4C} \right)^2 AB$$

Za izračun nam je potrebna i amplituda vlastitih oscilacija  $A$ . Veza između  $A$  i  $B$  se može dobiti iz veze preko integratora:

$$\begin{aligned} |u_1| &= \left| \frac{1}{s} G_{N2}(B) \right| |u_2| \\ A &= \frac{1}{\omega} G_{N2}(B) B \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{\omega} \frac{4C}{\pi} \quad (1)$$

Sada se može odrediti traženo pojačanje  $K$ :

$$\boxed{K = \frac{\pi B}{2C} = 0.6283}$$

- b) (5.5 bodova) Uz određene  $K$  i  $T$  pod a), odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija, tj.  $u_1(t) = A \sin(\omega t)$  i  $u_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$  uz zatvorenu sklopku **S**.

Kada je sklopka zatvorena, vrijedi sljedeća karakteristična jednačba nelinearnog sustava:

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{s} G_{N2}(B) u_2 \\ u_2 &= \frac{K}{(Ts+1)^2} [G_{N1}(A) u_1 - G_{N2}(B) u_2] \\ 1 &= \frac{K}{(Ts+1)^2} \left[ -\frac{1}{s} G_{N1}(A) G_{N2}(B) - G_{N2}(B) \right] \\ T^2 s^3 + 2Ts^2 + s + KG_{N2}(B)s + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) &= 0 \\ -jT^2\omega^3 - 2T\omega^2 + j\omega[1 + KG_{N2}(B)] + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) &= 0 \end{aligned}$$

Imaginarni dio:

$$\begin{aligned} T^2\omega^2 &= 1 + KG_{N2}(B) \\ G_{N2}(B) &= \frac{T^2\omega^2 - 1}{K} \end{aligned}$$

Realni dio:

$$\begin{aligned} 2T\omega^2 &= K\omega G_{N2}(B) \\ G_{N2}(B) &= \frac{2T\omega}{K} \end{aligned}$$

Kombinacijom imaginarnog i realnog dijela dobije se frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\begin{aligned} T^2\omega^2 - 2T\omega - 1 &= 0 \\ \omega &= \frac{1 \pm \sqrt{2}}{T} \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{2}}{T} = 0.4828$$

Uvrštavanjem u realni dio dobije se:

$$\begin{aligned} \frac{4C}{\pi B} &= \frac{2T\omega}{K} \\ B &= \frac{2CK}{\pi T\omega} \end{aligned}$$

$$B = \frac{2CK}{\pi(1+\sqrt{2})} = 0.0828$$

Amplituda  $A$  se jednostavno izračuna iz (1):

$$A = \frac{1}{\omega} \frac{4C}{\pi} = \frac{4CT}{\pi(1+\sqrt{2})} = 1.3186$$

Kut  $\varphi$  koji se javlja između  $u_1$  i  $u_2$  se odredi kao

$$\angle u_1 = \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) + \angle u_2$$

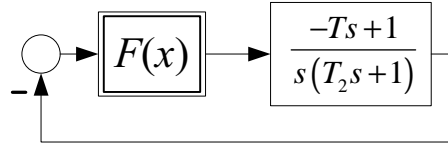
$$\angle u_2 = \angle u_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2},$$

što je logično budući da su ta dva signala vezana samo preko integratora (i negativnog predznaka).

## ZADATAK 2

Nelinearan je sustav prikazan slikom 5.



Slika 5: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 2.

- a) (4.5 bodova) Korištenjem kriterija Popova, odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 5 stabilan. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.

Odredimo imaginarni i realni dio procesa:

$$G(j\omega) = \frac{-jT\omega + 1}{-T_2\omega^2 + j\omega} = \frac{1}{\omega} \frac{1 - jT\omega}{-T_2\omega + j} \frac{-T_2\omega - j}{-T_2\omega - j} =$$

$$= \frac{1}{\omega} \frac{(-T_2 - T)\omega + j(TT_2\omega^2 - 1)}{(T_2\omega)^2 + 1}$$

Realni dio:

$$U(\omega) = -\frac{T_2 + T}{(T_2\omega)^2 + 1}$$

Imaginarni dio:

$$V(\omega) = \frac{TT_2\omega^2 - 1}{\omega[(T_2\omega)^2 + 1]}$$

Sada treba nacrtati krivulju  $U(\omega) + j\omega V(\omega)$ :

$$\omega = 0 \Rightarrow \omega V(\omega) = -1, U(\omega) = -(T_2 + T)$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \omega V(\omega) = \frac{T}{T_2}, U(\omega) = 0$$

$$\omega V(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}} \Rightarrow U(\omega) = -T$$

Imajući u vidu ove podatke, vidimo da se radi o hodogramu koji počinje u  $-(T_2 + T), -1$ , završava u  $(0, \frac{T}{T_2})$  i siječe realnu os u  $(-T, 0)$ . Da se naslutiti da bi Popov pravac mogao prolaziti kroz točku gdje hodogram siječe realnu os i da je hodogram uvijek na desno od tog pravca. No, moramo provjeriti da je krivulja konveksna, tj. da se uvijek nalazi s desna od Popovog pravca.

Jednostavnom eliminacijom  $\omega$  dobije se:

$$\omega V(\omega) = \frac{T}{T_2} + \frac{1}{T_2} U(\omega)$$

što znači da je hodogram zapravo pravac. Po kriteriju Popova može se reći da će zatvoreni krug upravljanja biti stabilan za sve nelinearnosti klase

$$\left[ \frac{1}{T} \right].$$

Ako provjerimo što se događa kada je umjesto nelinearnog elementa proporcionalni regulator  $K$ , dobije se sljedeća karakteristična jednadžba linearnog zatvorenog kruga upravljanja:

$$T_2s^2 + (1 - KT)s + K = 0$$

Hurwitzov uvjet stabilnosti kaže da je zatvoreni krug stabilan ako su članovi uz potencije od  $s$  istog predznaka, tj.:

$$K < \frac{1}{T} \cup K > 0$$

što je podskup od rješenja koje je dobiveno kriterijem Popova.

- b) (3.5 boda) Korištenjem Goldfarbovog principa, odredite kolika mora biti vremenska konstanta  $T$  da ne dođe do pojave vlastitih oscilacija u sustavu prikazanom slikom 5 ako je nelinearni element  $F(x)$  kvantizator s kvantizacijskom razinom  $D$ . Opisna funkcija kvantizatora je

$$G_N(X_m) = \begin{cases} 0, & X_m < \frac{D}{2} \\ \frac{4D}{\pi X_m} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \left(\frac{2k-1}{2} \frac{D}{X_m}\right)^2}, & \frac{2n-1}{2}D < X_m < \frac{2n+1}{2}D \end{cases}$$

Potrebno je naći za koju ulaznu amplitudu postoji ekstrem opisne funkcije kvantizatora. Poznato je iz laboratorijskih vježbi, a i jednostavno se pokaže, da će se maksimum postići kada je aktivan samo jedna kvantizacijska razina.

$$G_N(X_m) = \frac{4D}{\pi X_m} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{D}{X_m}\right)^2}$$

$$\frac{\partial G_N(X_m)}{\partial \frac{D}{X_m}} = 0 \Rightarrow \frac{D}{X_m} = \sqrt{2}$$

$$G_N(X_m)_{\max} = G_N\left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\pi}$$

Iz imaginarnog  $V(\omega)$  i realnog  $U(\omega)$  dijela frekvencijske karakteristike procesa (koji su već određeni u a) dijelu zadatka) možemo odrediti gdje Nyquistova krivulja siječe realnu os:

$$\operatorname{Im}\{G(j\omega)\} = V(\omega) = 0 \Rightarrow TT_2\omega^2 - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}}$$

Pri toj frekvenciji je realni dio:

$$U(\omega) = -\frac{T_2 + T}{\frac{T_2}{T} + 1} = -T$$

Po Goldfarbu, ne smije doći do presijecanja negativnog inverza opisne funkcije nelinearnog elementa i Nyquistove karakteristike sustava, tj.

$$U\left(\frac{1}{\sqrt{TT_2}}\right) < G_{N,\max}^{-1}$$

iz čega slijedi rješenje:

$$\boxed{T < \frac{\pi}{4}}$$

### ZADATAK 3

Objasnite princip zamjene ekstremalnog upravljanja formiranjem povratne veze po signalima modela. Pretpostavite da je nelinearna karakteristika procesa simetrična.

Vidi predavanje.

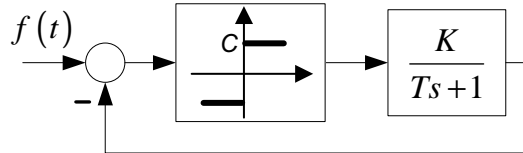


**ZADATAK 4**

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 6 gdje je opisna funkcija dvopoložajnog releja  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$ . Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$

Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala  $F_v$  dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je  $K = 2$  i  $C = 0.7$ .



Slika 6: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

Za strukturu nelinearnog sustava zadanog slikom, vrijedi sljedeća relacija za određivanje prinudnih oscilacija:

$$\underbrace{X_m \left[ 1 + \frac{B(j\omega_v)}{A(j\omega_v)} (P_N + jQ_N) \right]}_{Z_m} = F_v e^{-j\varphi}$$

$$Z_m = X_m \left[ 1 + \frac{K}{Ts + 1} P_N \right] = X_m \frac{1 + KP_N + jT\omega}{1 + jT\omega}$$

$$|Z_m| = X_m \frac{\sqrt{(1 + KP_N)^2 + (T\omega)^2}}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = F_v$$

$$X_m^2 \frac{1 + 2KP_N + (KP_N)^2 + (T\omega)^2}{1 + (T\omega)^2} = F_v^2$$

$$X_m^2 \left[ 1 + \underbrace{\frac{8KC}{\pi [1 + (T\omega)^2]}}_a \frac{1}{X_m} + \underbrace{\frac{8KC}{\pi [1 + (T\omega)^2]}}_a \frac{2KC}{\pi} \frac{1}{X_m^2} \right] = F_v^2$$

Uz  $\omega_v = \frac{1}{T}$ , kao što je zadano u zadatku, vrijedi:

$$X_m^2 + \frac{4KC}{\pi} X_m + 8 \left( \frac{KC}{\pi} \right)^2 - F_v^2 = 0$$

Da bi postojale prinudne oscilacije, treba biti

$$X_m = \frac{-\frac{4KC}{\pi} \pm \sqrt{16 \left( \frac{KC}{\pi} \right)^2 - 32 \left( \frac{KC}{\pi} \right)^2 + 4F_v^2}}{2} > 0$$

odnosno

$$-\frac{4KC}{\pi} \pm \sqrt{-16 \left( \frac{KC}{\pi} \right)^2 + 4F_v^2} > 0$$

$$-16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 + 4F_v^2 > 16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2$$

$$F_v^2 > 8\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2$$

$$\boxed{F_v > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}KC = 1.2604}$$

## Prvi međuispit

9. travnja 2010.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

### 1. zadatak (4 boda)

- (1 bod) Je li sustav opisan sa  $y(t) = au(t) + b$  linearan ili nelinearan ( $a$  i  $b$  su parametri sustava)?
- (2 boda) Nacrtajte blokovsku shemu barem jednog nepobuđenog zatvorenog kruga upravljanja koji ima beskonačno mnogo ravnotežnih stanja, ovisno o početnim uvjetima.
- (1 bod) Napišite barem jednu diferencijalnu jednadžbu nepobuđenog nelinearnog sustava s izlaznom veličinom  $x(t)$  koji ima barem jednu ravnotežnu točku u  $x = 0$ .

### 2. zadatak (9 bodova)

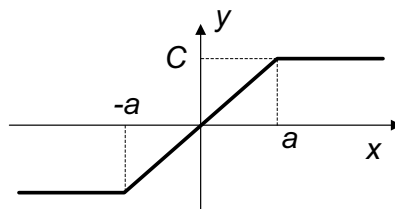
Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x^3 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

- (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.
- (5 bodova) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravni ( $\dot{x}$ ,  $x$ ) gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak  $\infty$ , pozitivan i negativan.
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 2$  i  $\dot{x}(0) = -2$ .
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 2$  i  $\dot{x}(0) = 2$ .

### 3. zadatak (7 bodova)

Na Slici 4 prikazan je nelinearni element zasićenje. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ .



Slika 1: Zasićenje.

- (1 bod) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  kada je  $X_m < a$ .
- (2 boda) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $y(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke ako je  $X_m > a$ .
- (4 bodova) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa kada je  $X_m > a$ .

**Napomena:**  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$  i  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

### 4. zadatak (6 bodova)

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se nelinearni element i proces opisan funkcijom prijenosa  $G(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$ . Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ . Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa ako je na izlazu iz procesa zabilježen osnovni harmonik oscilacija oblika  $y(t) = X_m \sin(\omega t)$ .

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

- a) (1 bod) Je li sustav opisan sa  $y(t) = au(t) + b$  linearan ili nelinearan ( $y$  je izlaz,  $u$  je ulaz,  $a$  i  $b$  su parametri sustava)?  
Nelinearan.
- b) (2 boda) Nacrtajte blokovsku shemu barem jednog nepobuđenog zatvorenog kruga upravljanja koji ima beskonačno mnogo ravnotežnih stanja, ovisno o početnim uvjetima.  
To je npr. bilo koji zatvoreni krug upravljanja koji se sastoji od nelinearnog elementa sa zonom neosjetljivosti i linearnog procesa.
- c) (2 boda) Napišite barem jednu diferencijalnu jednadžbu nepobuđenog nelinearnog sustava s izlaznom veličinom  $x(t)$  koji ima barem jednu ravnotežnu točku u  $x = 0$ .  
Npr.  $\dot{x} - x^2 = 0$ . Nije bitno je li ravnotežno stanje stabilno ili ne, budući da nije eksplicit navedeno u zadatku.  $\dot{x} - x = 0$  se ne priznaje jer je taj sustav linearan.

**ZADATAK 2**

Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x^3 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

- a) (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.

$$\ddot{x} - 0.5x^3 \dot{x} + x = 0$$

Neka je  $y = \frac{dx}{dt}$  iz čega slijedi

$$\dot{y} - 0.5x^3 y + x = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.5x^3 - \frac{x}{y} = m$$

Na poslijetku jednadžba izoklina je

$$y = \frac{x}{0.5x^3 - m}$$

gdje je  $m$  nagib trajektorije na izoklini.

- b) (5 bodova) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini ( $\dot{x}, x$ ) gdje je nagib trajektorije

- jednak 0,  
Nagib je 0 na  $y = \frac{2}{x^2}$  i  $x = 0$ .

$$m = 0 \Rightarrow y = 2, x = 0$$

- jednak  $\infty$ ,  
Nagib je  $\infty$  na  $y = 0$ .

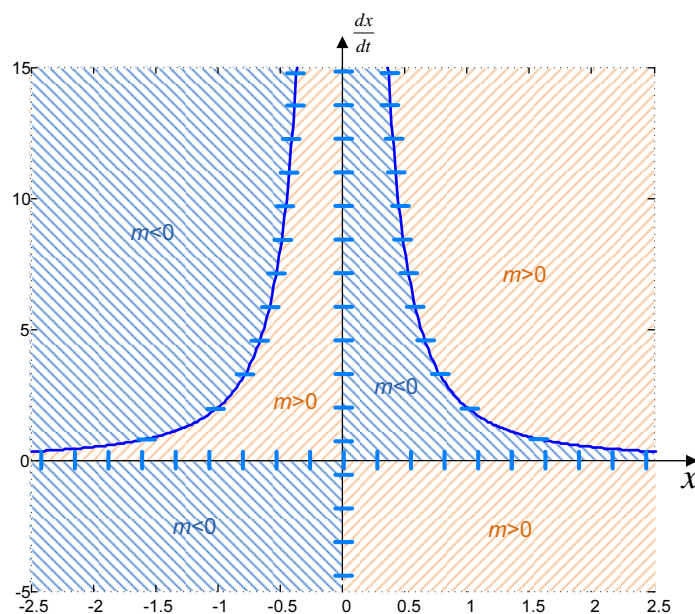
$$m = \infty \Rightarrow y = 0$$

- pozitivan i
- negativan.

Iz jednadžbe  $m = \frac{x(0.5x^2y - x)}{y}$  slijede sljedeći uvjeti za predznak od  $m$

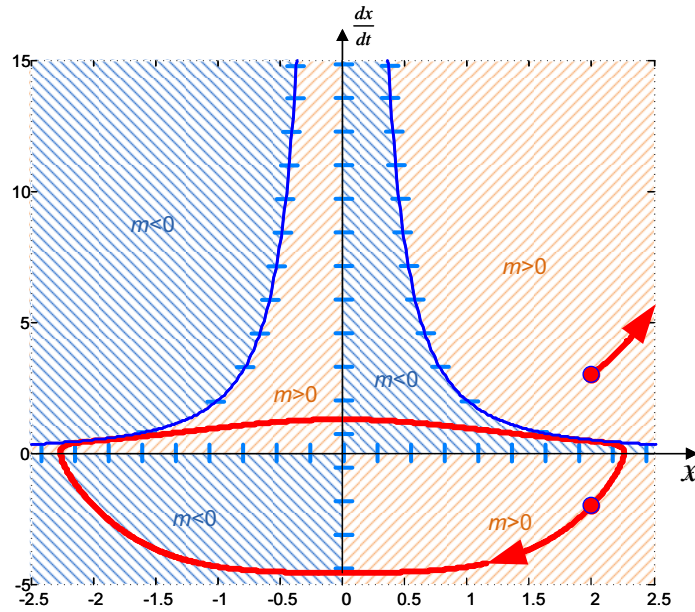
Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 1.

$y > 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y < 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	nemoguće
$y < 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y < 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	nemoguće
$y < 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$



Slika 2: Plava linije je krivulja  $y = \frac{2}{x^2}$ . Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib  $\infty$ . Narančasto iscrtkana područja su područja s negativnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s pozitivnim nagibom trajektorije.

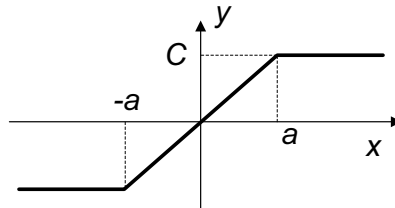
- c) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 2$  i  $\dot{x}(0) = -2$ .
- d) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete  $x(0) = 2$  i  $\dot{x}(0) = 2$ . Smjerovi o kojem ide trajektorija se određuju iz početne derivacije, tj. iz  $\dot{x}(0)$ . Ukoliko je veći od 0,  $x$  mora rasti u početku, i obratno. Ove dvije trajektorije su jednoznačno određene i prikazane Slikom 3.



Slika 3: Trajektorije uz dva zadana početna uvjeta

**ZADATAK 3**

Na Slici 4 prikazan je nelinearni element zasićenje. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ .



Slika 4: Zasićenje.

- a) (1 bod) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  kada je  $X_m < a$ .

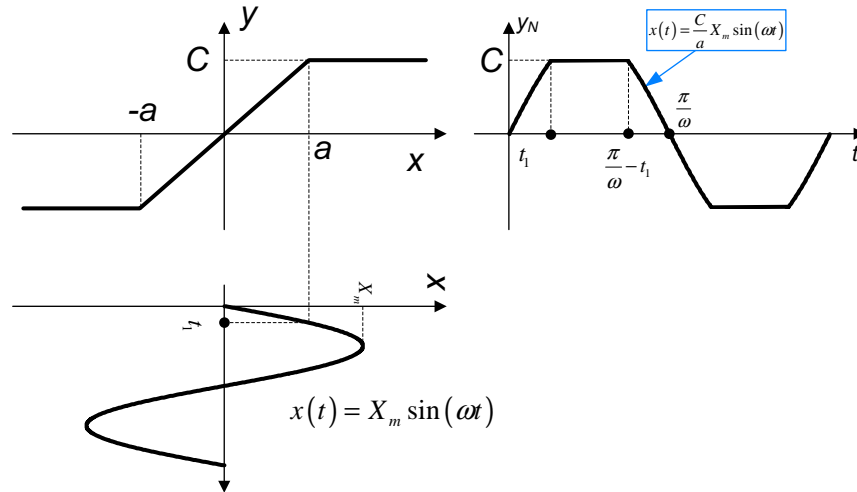
$$P_N = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} \frac{C}{a} X_m \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{\pi X_m} \frac{C}{a} X_m \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{C}{a\pi} \left( \frac{1}{2} 2\pi - \frac{\sin 2\pi - \sin 0}{4} \right) = \frac{C}{a}$$

Ovo je naravno jasno i bez računanja budući da za  $X_m < a$  nelinearni element je jednak pojačanju. Imaginarni dio je 0 jer je nelinearni element jednoznačan,  $Q_N = 0$ .

- b) (2 boda) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $y(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke ako je  $X_m > a$ .
- c) (4 bodova) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa kada je  $X_m > a$ .

Ulazni signal je sinusni, oblika  $x = X_m \sin(\omega t)$ . U trenutku  $t_1$ , iznos ulaznog signala je  $a$ , stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$



Slika 5: Zasićenje i njegov izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije je 0 budući da je nelinearni element jednoznačan. Realni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \left[ \int_0^{\varphi_1} \frac{C}{a} X_m \sin^2 \varphi d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi + \int_{\pi-\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} \frac{C}{a} X_m \sin^2 \varphi d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} -C \sin \varphi d\varphi + \int_{2\pi-\varphi_1}^{2\pi} \frac{C}{a} X_m \sin^2 \varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{1}{\pi X_m} \left[ 4 \int_0^{\varphi_1} \frac{C}{a} X_m \sin^2 \varphi d\varphi + 2 \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C \sin \varphi d\varphi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_1} \sin^2 \varphi d\varphi &= \int_0^{\varphi_1} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \varphi_1 - \frac{1}{4} (\sin 2\varphi_1 - \sin 0) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \arcsin \frac{a}{X_m} - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 \right) = \frac{1}{2} \left( \arcsin \frac{a}{X_m} - \frac{a}{X_m} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} \right) \\ \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \sin \varphi d\varphi &= -\cos(\pi - \varphi_1) + \cos \varphi_1 = 2 \cos \varphi_1 = 2 \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \left[ 2 \frac{C}{a} X_m \arcsin \frac{a}{X_m} - 2C \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} + 4C \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} \right] = \\ &= \frac{2C}{\pi a} \left[ \arcsin \frac{a}{X_m} + 2 \frac{a}{X_m} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

#### ZADATAK 4

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se nelinearni element i proces opisan funkcijom prijenosa  $G(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$ . Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ . Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa ako je na izlazu iz procesa zabilježen osnovni harmonik oscilacija oblika  $y(t) = X_m \sin(\omega t)$ .

Neka je signal na ulazu u nelinearni element  $x(t) = X_m \sin \omega t$ , na izlazu iz nelinearnog elementa (ulazu u proces)  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  i na izlazu iz procesa  $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi_y)$ .

Vrijedi

$$U_m = |G_N| X_m \quad (1)$$

$$\varphi_u = \varphi(G_N) \quad (2)$$

i

$$Y_m = |G_P(j\omega)| U_m \quad (3)$$

$$\varphi_y = \varphi(G_P(j\omega)) + \varphi_u \quad (4)$$

Iz funkcije prijenosa procesa slijedi

$$\begin{aligned} G_P(j\omega) &= \frac{Kj\omega}{1+jT\omega} = \frac{Kj\omega(1-jT\omega)}{1+(T\omega)^2} = \frac{K\omega}{1+(T\omega)^2} (j + T\omega) \\ |G_P(j\omega)| &= \frac{K\omega}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \\ \varphi(G_P(j\omega)) &= \arctan \frac{1}{T\omega} \end{aligned}$$

Budući da je  $\varphi_y = 0$ , iz (4) slijedi

$$\varphi_u = -\arctan \frac{1}{T\omega}.$$

Budući da je  $Y_m = X_m$ , iz (3) slijedi

$$U_m = X_m \frac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{K\omega}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobije se

$$|G_N| = \frac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{K\omega}.$$

S obzirom da je  $G_N = P_N + jQ_N$ , slijedi da je  $|G_N| = \sqrt{P_N^2 + Q_N^2}$  od kuda proizlazi

$$P_N^2 + Q_N^2 = \frac{1+(T\omega)^2}{(K\omega)^2} \quad (5)$$

Uvrštavanjem u (2) dobije se

$$\varphi(G_N) = -\arctan \frac{1}{T\omega} = \arctan \left( -\frac{1}{T\omega} \right).$$

S obzirom da je  $G_N = P_N + jQ_N$ , slijedi da je  $\varphi(G_N) = \arctan \frac{Q_N}{P_N}$  od kuda proizlazi jedno od rješenja

$$\frac{Q_N}{P_N} = -\frac{1}{T\omega}. \quad (6)$$

Kombinacijom jednadžbi (5) i (6) dobije se

$$\boxed{\begin{aligned} P_N &= \frac{T}{K} \\ Q_N &= -\frac{1}{K\omega} \end{aligned}}$$



## Drugi međuispit

19. svibnja 2010.

Ime i Prezime:

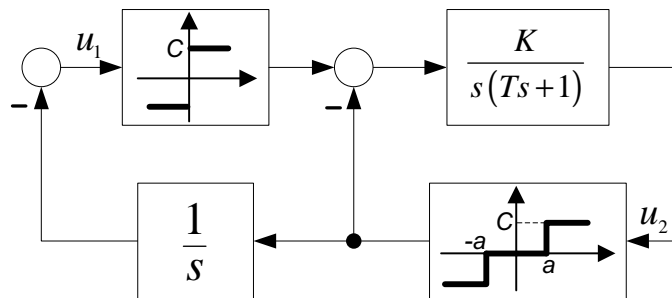
Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

### 1. zadatak (9 bodova)

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj.  $u_1(t) = A \sin(\omega t)$  i  $u_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$ . Zadano je:  $K = 0.1$ ,  $T = 2$ ,  $a = 0.1$  i  $C = 0.7$ . Odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  i  $\varphi$ .

*Napomena:* Opisna funkcija tropoložajnog releja je  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$ .



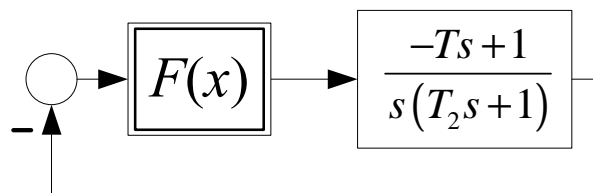
Slika 1: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 1.

### 2. zadatak (8 bodova)

Zadan je sustav upravljanja prikazan Slikom 2 gdje su  $T > 0$  i  $T_2 > 0$ .

- (1 bod) Neka je  $F(x) = K \cdot x$ . Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja u ovisnosti o parametru  $K$ .
- (5 bodova) Neka je  $F(x) = K \cdot x^3$ . Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija te odredite njihovu stabilnost.
- (2 boda) Nacrtajte na istoj slici područje stabilnosti u ravnini  $X_m-K$  za slučajeve iz a) i b) dijela zadatka.

*Napomena:*  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ .



Slika 2: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 2.

### 3. zadatak (6 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja s tropoložajnim relejem i procesom s dva pola, jednim integratorom i bez nula. Korištenjem metode Goldfarba odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje sustava da NE dođe do pojave vlastitih oscilacija. Dobiveni rezultat izrazite pomoću parametara tropoložajnog releja ( $a$  i  $C$ ).

*Napomena:* Opisna funkcija tropoložajnog releja je dana u Zadatku 1.

**4. zadatak (3 boda)**

Zatvoreni krug upravljanja sastoji se od linearnog procesa  $G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  i nelinearnog elementa  $G_N(X_m) = P_N(X_m) + jQ(X_m)$ . Na ulaz zatvorenog kruga upravljanja narinut je signal oblika

$$f(t) = F_v \sin(\omega_v t).$$

- a) (1 bod) Napišite jednadžbu koja je pogodna za grafičko određivanje prinudnih oscilacija oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega_v t + \varphi)$  (izvod nije potreban).
- b) (2 boda) Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost  $F_{v,krit} > 0$  za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje,  $F_{v,krit}$  i kut  $\varphi$ .

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj.  $u_1(t) = A \sin(\omega t)$  i  $u_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$ . Zadano je:  $K = 0.1$ ,  $T = 2$ ,  $a = 0.1$  i  $C = 0.7$ . Odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija  $A$ ,  $B$ ,  $\omega$  i  $\varphi$ .

*Napomena:* Opisna funkcija tropoložajnog releja je  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$ .

Dvopoložajni relej ima opisnu funkciju

$$G_{N1}(A) = \frac{4C}{\pi A}$$

a tropoložajni relej

$$G_{N2}(B) = \frac{4C}{\pi B} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{B}\right)^2}.$$

Prvo je potrebno doći do karaktersitične jednađbe zatvorenog kruga. Mogu se napisati sljedeće jednađbe:

$$u_1 = -\frac{1}{s} G_{N2}(B) u_2 \quad (1)$$

$$u_2 = \frac{K}{s(Ts + 1)} [G_{N1}(A) u_1 - G_{N2}(B) u_2] \quad (2)$$

Uvrštavanjem (1) u (2) i kraćenjem  $u_2$  dobije se karakteristična jednađba zatvorenog kruga:

$$\boxed{Ts^3 + s^2 + KG_{N2}(B)s + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) = 0.} \quad (3)$$

Uvrštavanjem  $s = j\omega$  dobije se:

- imaginarni dio  $\omega^2 = \frac{K}{T} G_{N2}(B)$  i
- realni dio  $\omega^2 = KG_{N1}(A)G_{N2}(B)$

Kombinacijom ove dvije jednađbe dobije se

$$G_{N1}(A) = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4CT}{\pi} = 1.7825}.$$

Veza između amplitude  $A$  i  $B$  se može najjednostavnije naći iz (1) kako slijedi:

$$|u_1| = \left| \frac{1}{s} G_{N2}(B) \right| |u_2|$$

$$A = \frac{1}{\omega} G_{N2}(B) B = \frac{1}{\omega} \frac{4C}{\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{B}\right)^2}$$

Uvrštavanjem poznatog  $A$  i  $\omega$  iz imaginarnog dijela karakteristične jednađbe dobije se

$$\boxed{B = \sqrt{\left(\frac{4CTK}{\pi}\right)^2 + a^2} = 0.2044}.$$

Frekvencija oscilacija se jednostavno dobije iz imaginarnog dijela karakteristične jednađbe:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{T} G_{N2}(B)}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T^2 + \left(\frac{\pi a}{4CK}\right)^2}} = 0.4361.$$

Kut  $\varphi$  koji se javlja između  $u_1$  i  $u_2$  se odredi opet iz (1) kao

$$\angle u_1 = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \angle u_2$$

$$\angle u_2 = \angle u_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2},$$

što je logično budući da su ta dva signala vezana samo preko integratora (i negativnog predznaka).

## ZADATAK 2

Zadan je sustav upravljanja prikazan Slikom 2 gdje su  $T > 0$  i  $T_2 > 0$ .

- (1 bod) Neka je  $F(x) = K \cdot x$ . Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja u ovisnosti o parametru  $K$ .
- (5 bodova) Neka je  $F(x) = K \cdot x^3$ . Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija te odredite njihovu stabilnost.
- (2 boda) Nacrtajte na istoj slici područje stabilnosti u ravnini  $X_m-K$  za slučajeve iz a) i b) dijela zadatka.

*Napomena:*  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ .

- U ovom slučaju imamo linearan sustav upravljanja gdje je  $F(x)$  zapravo pojačanje  $K$ . Zatvoreni krug upravljanja je onda:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{-Ts + 1}{\frac{T_2}{K}s^2 + \frac{1-KT}{K}s + 1}$$

Za stabilnost je dovoljno osigurati da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe pozitivni, iz čega slijedi

$$K \in \left(0, \frac{1}{T}\right).$$

- Odredimo prvo opisnu funkciju kubne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} K(X_m \sin \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{K X_m^2}{\pi} \int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^4 d\varphi = \frac{K X_m^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^4 d\varphi = \\ &= \frac{K X_m^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} 1 - 2 \cos 2\varphi + (\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{K X_m^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 - 2 \cos 2\varphi - (\sin 2\varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{K X_m^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} 2 - 2 \cos 2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi d\varphi = \\ &= \boxed{\frac{3}{4} K X_m^2} \end{aligned}$$

Sada jednostavno određujemo karakterističnu jednadžbu budući da je zatvoreni krug klasičnog oblika:

$$\begin{aligned} 1 + G_N(X_m)G_o(j\omega) &= 0 \\ T_2(j\omega)^2 + (j\omega) + G_N(X_m)(-Tj\omega + 1) &= 0 \\ (G_N - \omega^2 T_2) + j(\omega - \omega T G_N) &= 0 \end{aligned}$$

- imaginarni dio  $G_N = \frac{1}{T}$  i
- realni dio  $\omega = \sqrt{\frac{G_N}{T_2}}$ .

Iz imaginarnog dijela odmah slijedi amplituda vlastitih oscilacija:

$$X_m = \frac{2}{\sqrt{3T}} \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

Uvrštavanjem ove amplitude u realni dio dobije se frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}}.$$

Za stabilnost treba provjeriti uvjet

$$\frac{\partial R}{\partial X_m} \frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m} \frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

gdje su

$$R = \frac{3}{4} K X_m^2 - \omega^2 T_2$$

i

$$I = \omega \left( 1 - \frac{3}{4} K T X_m^2 \right)$$

realni i imaginarni dijelovi karakteristične jednadžbe. Slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial X_m} &= \frac{3}{2} K X_m = \sqrt{\frac{3K}{T}} \\ \frac{\partial I}{\partial \omega} &= 1 - \frac{3}{4} K T X_m^2 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial X_m} &= -\frac{3}{2} K T X_m = -\sqrt{3KT} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= -2\omega T_2 = -\sqrt{\frac{T_2}{T}} \end{aligned}$$

odnosno  $-\sqrt{3KT_2} > 0$  što nije istina. Zaključak je da vlastite oscilacije nisu stabilne.

c)

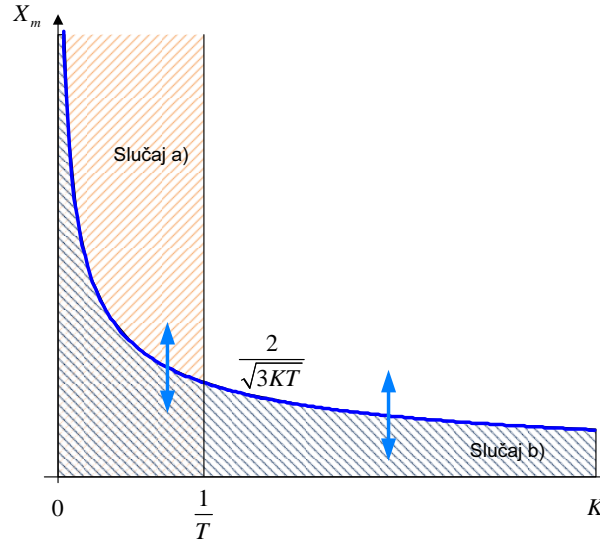
### ZADATAK 3

Zadan je zatvoreni krug upravljanja s tropoložajnim relejem i procesom s dva pola, jednim integratorom i bez nula. Korištenjem metode Goldfarba odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje sustava da NE dođe do pojave vlastitih oscilacija. Dobiveni rezultat izrazite pomoću parametara tropoložajnog releja ( $a$  i  $C$ ).

*Napomena:* Opisna funkcija tropoložajnog releja je dana u Zadatku 1.

Goldfarbova metoda se svodi na korištenje relacije

$$-\frac{1}{G_N(X_m)} = G_P(j\omega)$$



Slika 3: Rješenje uz Zadatak 2c).

na način da se lijeva i desna strana zasebno nacrtaju. Presjecište između ove dvije krivulje daje točku vlastitih oscilacija (stabilnih ili nestabilnih).

Opisna funkcija tropoložajnog releja ima samo realnu komponentu, tako da i njezin negativni inverz ima samo realnu komponentu. Određivanjem ekstrema (negativnog) inverza može se odrediti koji dio negativne realne osi zauzima negativni inverz opisne funkcije:

$$\frac{1}{G_N(X_m)} = \frac{\pi}{4C} \frac{X_m^2}{\sqrt{X_m^2 - a^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_m} \frac{1}{G_N(X_m)} = 0 \Rightarrow X_m = a\sqrt{2}$$

$$\left. \frac{1}{G_N(X_m)} \right|_{X_m=a\sqrt{2}} = \frac{\pi a}{2C}$$

Dakle lijeva strana jednadžbe zauzima realni dio osi na području  $(-\infty, -\frac{\pi a}{2C})$ .

Desna strana je Nyquistov dijagram procesa. Podatak da proces ima dva pola, integrator i da nema nula nam služi tome da zaključimo da Nyquistov dijagram procesa (otvorenog kruga bez nelinearnog elementa) siječe realnu os jednom i to u točki koja je udaljena od ishodišta  $\frac{1}{A.O.}$  gdje je  $A.O.$  amplitudno osiguranje. Budući da presjeka ne smije biti slijedi:

$$\frac{1}{A.O.} < \frac{\pi a}{2C}$$

odnosno

$$\boxed{A.O. > \frac{2C}{\pi a}}.$$

#### ZADATAK 4

Zatvoreni krug upravljanja sastoji se od linearnog procesa  $G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  i nelinearnog elementa  $G_N(X_m) = P_N(X_m) + jQ(X_m)$ . Na ulaz zatvorenog kruga upravljanja narinut je signal oblika

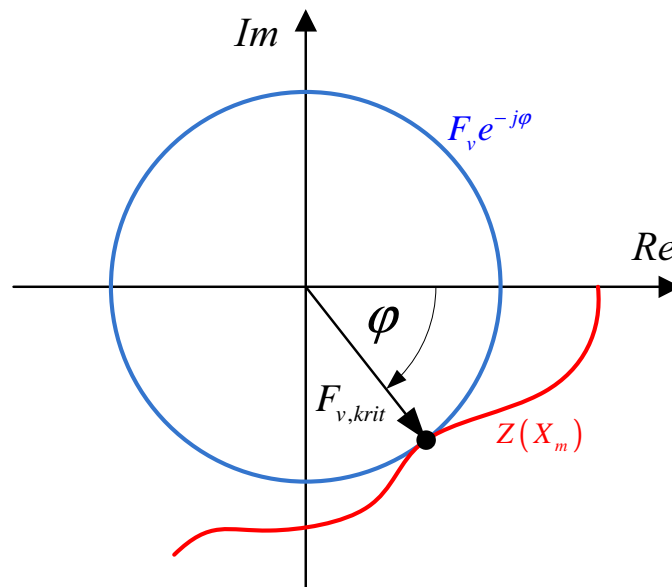
$$f(t) = F_v \sin(\omega_v t).$$

- a) (1 bod) Napišite jednadžbu koja je pogodna za grafičko određivanje prinudnih oscilacija oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega_v t + \varphi)$  (izvod nije potreban).

- b) (2 boda) Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost  $F_{v,krit} > 0$  za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje,  $F_{v,krit}$  i kut  $\varphi$ .

a)

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}$$



Slika 4: Rješenje uz Zadatak 4c).

b)

# Prvi međuispit

10. travnja 2009.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

## 1. zadatak (3 boda)

Navedite barem tri dinamička vladanja koja su karakteristična za nelinearne sustave a ne postoje u linearnim sustavima.

## 2. zadatak (8 bodova)

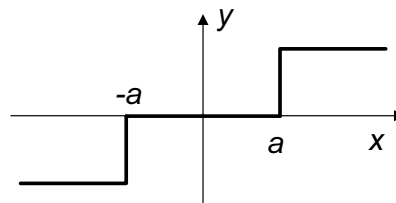
Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednažbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x \frac{dx}{dt} + x = 0$$

- (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.
- (2 boda) Odredite i nacrtajte područja u faznoj ravnini  $(\dot{x}, x)$  gdje je nagib trajektorije 0 i  $\infty$ .
- (2 boda) Korištenjem metode izoklina, odredite i nacrtajte smjerove trajektorija sustava u cijeloj faznoj ravnini. Koje područje je stabilno, koje nestabilno i gdje je separatrisa? *Napomena:* Nacrtajte nekoliko izoklina, npr. sa nagibima 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ .
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 1$ .
- (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 2.5$ .

## 3. zadatak (9 bodova)

Na Slici 6 prikazan je nelinearni element tropoložajnog releja. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$  gdje je  $X_m > a$ .



Slika 1: Tropoložajni relej.

- (3 boda) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $y(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke.
- (6 bodova) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa.

## 4. zadatak (6 bodova)

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se dvopoložajni relej s histerezom i proces opisan funkcijom prijenosa  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ . Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ . Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je  $G_N = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2} - j \frac{4Cx_a}{\pi X_m^2}$ .

- (3 boda) Napišite izraz za osnovni harmonik izlaznog signala iz releja,  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ .
- (3 boda) Odredite s kolikim pojačanjem proces pojačava drugi po redu harmonik koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa.



**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Navedite barem tri dinamička vladanja koja su karakteristična za nelinearne sustave a ne postoje u linearnim sustavima.

Bifurkacija, kaos, neograničena reakcija u konačnom vremenu (finite escape time), vlastite oscilacije, ...

**ZADATAK 2**

Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednačkom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x \frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) (2 boda) Odredite jednažbu izoklina.

$$\ddot{x} - 0.5x\dot{x} + x = 0$$

Neka je  $y = \frac{dx}{dt}$  iz čega slijedi

$$\dot{y} - 0.5xy + x = 0 \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.5x - \frac{x}{y} = m$$

Na poslijetku jednažba izoklina je

$$y = \frac{x}{0.5x - m}$$

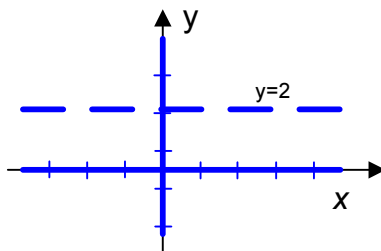
gdje je  $m$  nagib trajektorije na izoklini.

b) (2 boda) Odredite i nacrtajte područja u faznoj ravnini  $(\dot{x}, x)$  gdje je nagib trajektorije 0 i  $\infty$ .  
Nagib je 0 na  $y = 2$  i  $x = 0$ .

$$m = 0 \Rightarrow y = 2, x = 0$$

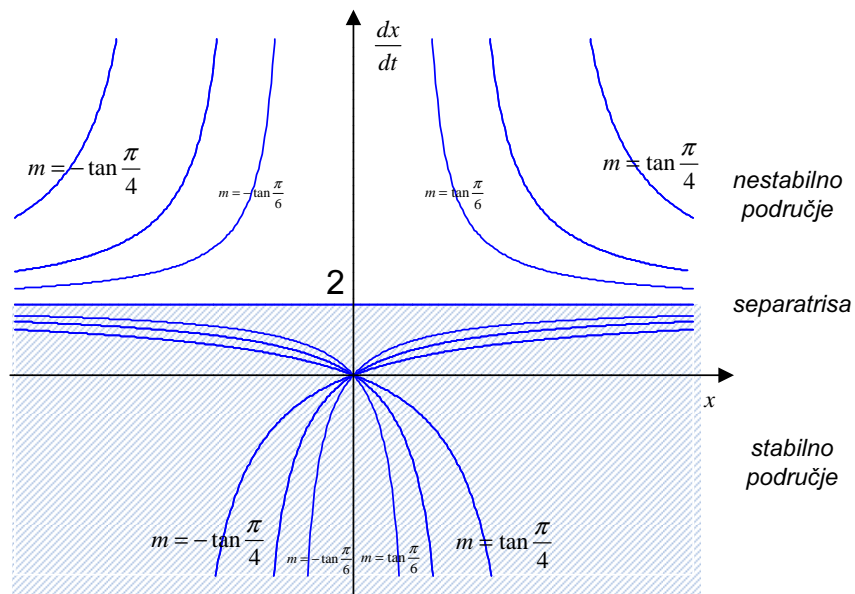
Nagib je  $\infty$  na  $y = 0$ .

$$m = \infty \Rightarrow y = 0$$



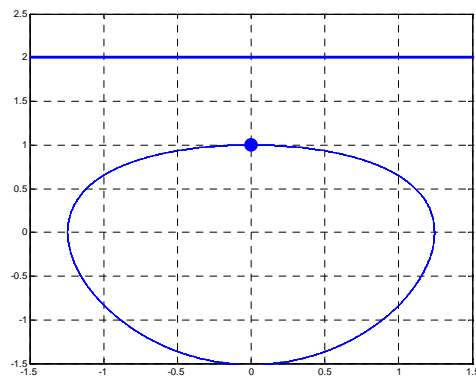
Slika 2: Izokline s nagibima 0 i  $\infty$ .

c) (2 boda) Korištenjem metode izoklina, odredite i nacrtajte smjerove trajektorija sustava u cijeloj faznoj ravnini. Koje područje je stabilno, koje nestabilno i gdje je separatrisa? *Napomena:* Nacrtajte nekoliko izoklina, npr. sa nagibima 0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ .



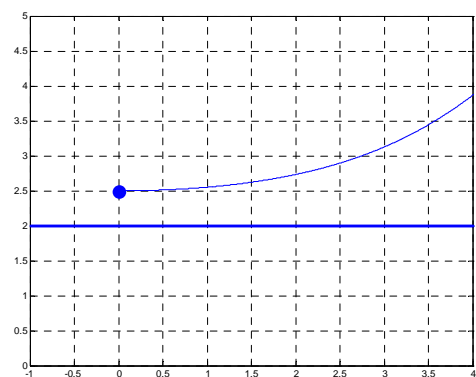
Slika 3: Izokline.

d) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 1$ .



Slika 4: Trajektorija uz početne uvjete (0, 1).

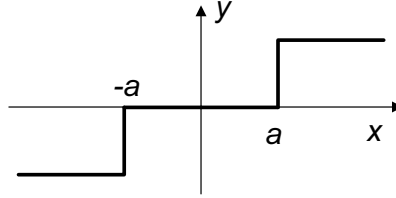
e) (1 bod) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete  $x(0) = 0$  i  $\dot{x}(0) = 2.5$ .



Slika 5: Trajektorija uz početne uvjete (0, 2.5).

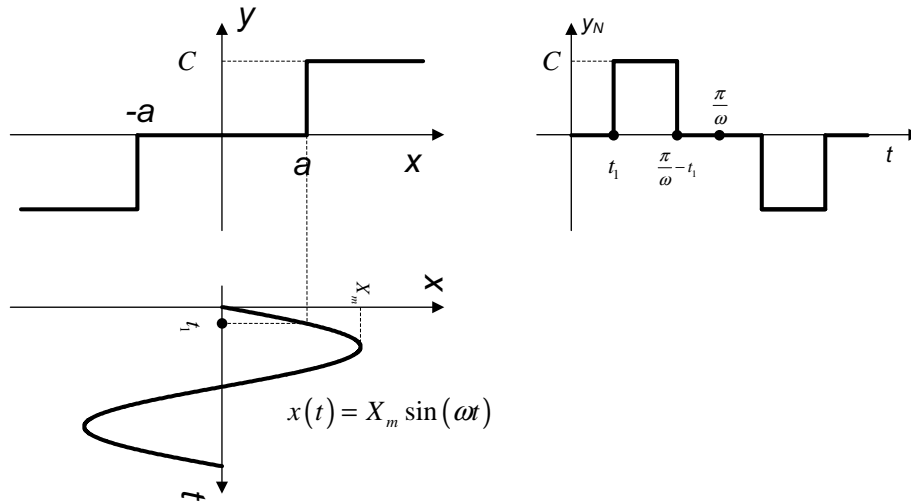
**ZADATAK 3**

Na Slici 6 prikazan je nelinearni element tropoložajnog releja. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$  gdje je  $X_m > a$ .



Slika 6: Tropoložajni relej.

- a) (3 boda) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa,  $y(t)$ , i na njemu označite sve karakteristične točke.



Slika 7: Tropoložajni relej i njegov izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

- b) (6 bodova) Odredite opisnu funkciju  $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$  nelinearnog elementa.

Ulazni signal je sinusni, oblika  $x = X_m \sin(\omega t)$ . U trenutku  $t_1$ , iznos ulaznog signala je  $a$ , stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije

$$Q_N = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} C \cos \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} \int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} \cos \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} [\sin(\pi - \varphi_1) - \sin \varphi_1] = 0.$$

Ovo je očekivano budući da je nelinearnost jednoznačna.

Realni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} C \sin \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} \int_{\varphi_1}^{\pi - \varphi_1} \sin \varphi d\varphi = \frac{2C}{\pi X_m} [-\cos(\pi - \varphi_1) + \cos \varphi_1] = \\ &= \frac{4C}{\pi X_m} \cos \varphi_1 = \frac{4C}{\pi X_m} \cos \left( \arcsin \frac{a}{X_m} \right) = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left( \frac{a}{X_m} \right)^2} \end{aligned}$$

**ZADATAK 4**

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se dvopoložajni relej s histerezom i proces opisan funkcijom prijenosa  $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$ . Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika  $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ . Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je  $G_N = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - (\frac{x_a}{X_m})^2} - j \frac{4Cx_a}{\pi X_m^2}$ .

a) (3 boda) Napišite izraz za osnovni harmonik izlaznog signala iz releja,  $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ .

Pojačanje nelinearnog elementa je

$$|G_N| = \sqrt{P_N^2 + Q_N^2} = \frac{4C}{\pi X_m}$$

Kut je

$$\varphi = \arctan \frac{P_N}{Q_N} = \arctan \left( -\frac{x_a}{\sqrt{X_m^2 - x_a^2}} \right)$$

Izlazni signal ima oblik

$$u(t) = |G_N| X_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{4C}{\pi} \sin \left[ \omega t + \arctan \left( -\frac{x_a}{\sqrt{X_m^2 - x_a^2}} \right) \right]$$

b) (3 boda) Odredite s kolikim pojačanjem proces pojačava drugi po redu harmonik koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa.

S obzirom da je nelinearni element neparan, viši harmonici koji se javljaju su neparni. Drugi harmonik po redu koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa je onaj sa frekvencijom  $3\omega$ . Linearni dio taj harmonik pojačava sa iznosom

$$|G(j3\omega)| = \frac{K}{3\omega\sqrt{9T^2\omega^2 + 1}}$$

## Drugi međuispit

22. svibnja 2009.

Ime i Prezime:

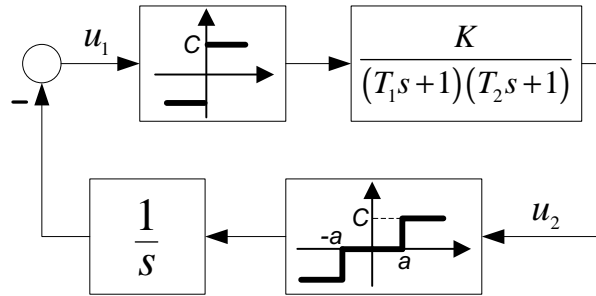
Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

### 1. zadatak (10 bodova)

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj.  $u_1(t) = A \sin(\omega t)$  i  $u_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$ . Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija na ulazu u dvopoložajni relej ( $A$  i  $\omega$ ). Zadano je:  $K = 2$ ,  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 2$ ,  $a = 0.1$  i  $C = 0.7$ .

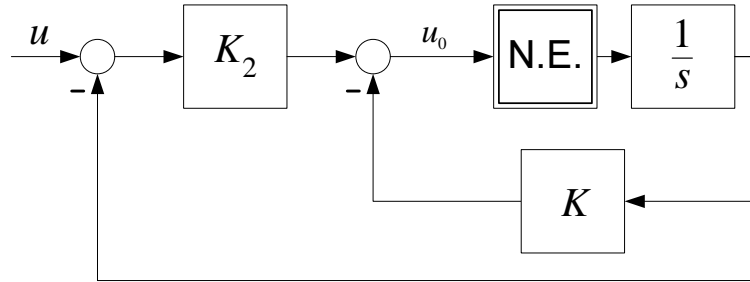
*Napomena:* Opisna funkcija dvopoložajnog releja je  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{A}\right)^2}$ .



Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja s dva nelinearna elementa.

### 2. zadatak (9 bodova)

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan Slikom 2 gdje je N.E. nelinearni element. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika  $u(t) = U_m \sin(t)$  zbog čega je sustav uveden u prinudne oscilacije koje na ulazu u nelinearni element imaju oblik  $u_0(t) = A \sin(t + \varphi)$ .



Slika 2: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

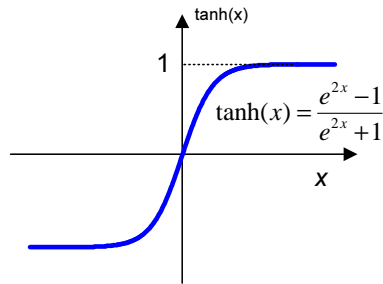
- Odredite karakterističnu jednadžbu sustava ako opisna funkcija nelinearnog elementa dobivena harmoničkom linearizacijom ima oblik  $G_N(A) = P_N(A) + jQ_N(A)$ .
- Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je nelinearni element dvopoložajni relej s opisnom funkcijom  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$ . Zadano je  $K_2 = 1.5$ ,  $K = 1$  i  $C = 0.7$ .

### 3. zadatak (4 boda)

Proces kojega sačinjavaju dva pola se nalazi u zatvorenom krugu upravljanja s jednoznačnim nelinearnim elementom. Može li u ovakvom sustavu doći do vlastitih oscilacija? Precizno obrazložite odgovor korištenjem metode Goldfarba.

**4. zadatak (3 boda)**

Jednadžbom i Slikom 3 je zadana statička karakteristika nelinearnog elementa. Odredite najmanju klasu nelinearnosti kojoj pripada zadani nelinearni element.



Slika 3: Karakteristika nelinearnog elementa.

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj.  $u_1(t) = A \sin(\omega t)$  i  $u_2(t) = B \sin(\omega t + \varphi)$ . Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija na ulazu u dvopoložajni relej ( $A$  i  $\omega$ ). Zadano je:  $K = 2$ ,  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = 2$ ,  $x_a = 0.1$  i  $C = 0.7$ .

*Napomena:* Opisna funkcija tropoložajnog releja je  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{A}\right)^2}$ .

Karakteristična jednačba zatvorenog kruga upravljanja može se napisati kao:

$$1 + G_{N1}(A) \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} G_{N2}(B) \frac{1}{s} = 0$$

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K G_{N1}(A) G_{N2}(B) = 0$$

Supstitucijom  $s = j\omega$  dobije se

$$-jT_1 T_2 \omega^3 - (T_1 + T_2) \omega^2 + j\omega + K G_{N1}(A) G_{N2}(B) = 0.$$

Iz imaginarnog dijela

$$-T_1 T_2 \omega^3 + \omega = 0$$

direktno slijedi frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = 0.707$$

Iz realnog dijela

$$-(T_1 + T_2) \omega^2 + K G_{N1}(A) G_{N2}(B) = 0$$

ćemo dobiti traženu amplitudu  $A$ .

Opisne funkcije su

$$G_{N1}(A) = \frac{4C}{A\pi}$$

$$G_{N2}(B) = \frac{4C}{B\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{B}\right)^2}.$$

Sada je potrebno izraziti amplitudu  $B$  pomoću amplitude  $A$  tako da ostane jedna jednačba s jednom nepoznanicom.

$$B = |G_P(j\omega)| G_{N1}(A) A = \frac{K}{\sqrt{(T_1 \omega)^2 + 1} \sqrt{(T_2 \omega)^2 + 1}} G_{N1}(A) A$$

$$B = \frac{K \sqrt{T_1 T_2}}{T_1 + T_2} G_{N1}(A) A$$

$$G_{N2}(B) = \frac{4C(T_1 + T_2)}{\pi G_{N1}(A) A K \sqrt{T_1 T_2}} \sqrt{1 - \left( \frac{x_a(T_1 + T_2)}{K \sqrt{T_1 T_2} G_{N1}(A) A} \right)^2} = \frac{T_1 + T_2}{K \sqrt{T_1 T_2}} \sqrt{1 - \underbrace{\left( \frac{x_a(T_1 + T_2) \pi}{4CK \sqrt{T_1 T_2}} \right)^2}_{\alpha^2}}$$

Iz realnog dijela sada slijedi:

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = K \frac{4C}{A\pi} \frac{T_1 + T_2}{K \sqrt{T_1 T_2}} \sqrt{1 - \alpha^2}$$

I na kraju

$$A = \frac{4C \sqrt{T_1 T_2}}{\pi} \sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$\alpha = 0.119005$$

i

$$A = 1.2515$$

**ZADATAK 2**

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan Slikom 2 gdje je N.E. nelinearni element. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika  $u(t) = U_m \sin(t)$  zbog čega je sustav uveden u prinudne oscilacije koje na ulazu u nelinearni element imaju oblik  $u_0(t) = A \sin(t + \varphi)$ .

- a) Odredite karakterističnu jednadžbu sustava ako opisna funkcija nelinearnog elementa dobivena harmoničkom linearizacijom ima oblik  $G_N(A) = P_N(A) + jQ_N(A)$ .

$$\begin{aligned} u_0 &= K_2(u - y) - Ky = K_2u - (K_2 + K)y \\ y &= \frac{1}{s}G_N(A)u_0 \end{aligned}$$

daju

$$u_0[s + (K_2 + K)G_N(A)] = K_2su$$

Za prinudne oscilacije vrijedi

$$u_0 = A \sin(\omega_u t + \varphi)$$

i onda se ulazni signal može pisati kao

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin(\omega_u t) = U_m \sin(\omega_u t + \varphi - \varphi) = U_m \cos \varphi \sin(\omega_u t + \varphi) - U_m \sin \varphi \cos(\omega_u t + \varphi) \\ u &= \frac{U_m}{A} \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_u} s \right) u_0 \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba je onda

$$s + (K_2 + K)G_N(A) = K_2 \frac{U_m}{A} s \left( \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\omega_u} s \right)$$

Frekvencija pobudnog signala je  $\omega_u = 1$  te supstitucijom  $s = j\omega_u$  dobije se

$$j\omega_u + (K_2 + K)[P_N(A) + jQ_N(A)] = K_2 \frac{U_m}{A} \omega_u (j \cos \varphi + \sin \varphi)$$

Realni dio je:

$$\sin \varphi = \frac{K + K_2}{K_2 \omega} \frac{A}{U_m} P_N(A)$$

Imaginarni dio je:

$$\cos \varphi = \frac{\omega + (K + K_2)Q_N(A)}{K_2 \omega} \frac{A}{U_m}$$

- b) Odredite za koju vrijednost amplitude pobudnog signala dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je nelinearni element dvopoložajni relej s opisnom funkcijom  $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$ . Zadano je  $K_2 = 1.5$ ,  $K = 1$  i  $C = 0.7$ .

Uvrstimo  $Q_N = 0$ . Budući da vrijedi  $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ , iz realnog i imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe dobije se

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{K + K_2}{K_2 \omega} \frac{1}{U_m} \frac{4C}{\pi} \\ \cos \varphi &= \frac{1}{K_2} \frac{A}{U_m} \end{aligned}$$

$$U_m = \sqrt{\left(\frac{A}{K_2}\right)^2 + \left(\frac{4C}{\pi} \frac{K + K_2}{K_2 \omega}\right)^2}$$

$$A = K_2 \sqrt{U_m^2 - \left(\frac{4C}{\pi} \frac{K + K_2}{K_2 \omega}\right)^2}$$



Da bi postojalo rješenje, izraz pod korijenom mora biti veći od 0.

$$U_m > \frac{4C}{\pi} \frac{K + K_2}{K_2 \omega} = 1.485$$

### ZADATAK 3

Proces kojega sačinjavaju dva pola se nalazi u zatvorenom krugu upravljanja s jednoznačnim nelinearnim elementom. Može li u ovakvom sustavu doći do vlastitih oscilacija? Precizno obrazložite odgovor korištenjem metode Goldfarba.

Nyquistov dijagram procesa s dva pola prolazi kroz IV. i III. kvadrant. Jednoznačni nelinearni element ima samo realni dio, tako da negativni inverz se nalazi isključivo na realnoj osi u Nyquistovoj ravnini. Zaključak je da nikada neće doći do presjecišta između dvije krivulje.

### ZADATAK 4

Jednadžbom i Slikom 3 je zadana statička karakteristika nelinearnog elementa. Odredite najmanju klasu nelinearnosti kojoj pripada zadani nelinearni element.

Samo je potrebno naći derivaciju statičke karakteristike u ishodištu.

$$\left. \frac{d}{dx} \tanh(x) \right|_{x=0} = \left. \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right) \right|_{x=0} = 1$$

# Završni ispit

19. lipnja 2013.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

## 1. zadatak (9 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$  vektor stanja i  $u$  ulaz sustava.

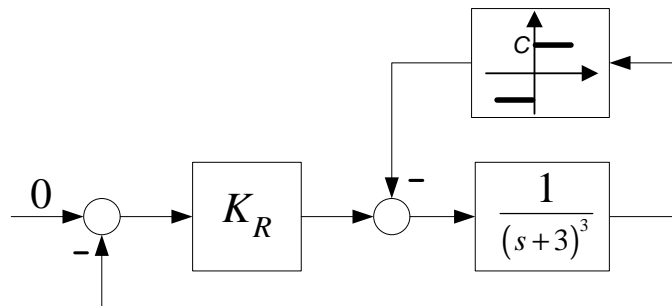
$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$

$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

- (3.5 boda) Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava  $y = x_2$ . Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.
- (5.5 boda) Linearizirajte sustav u u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state). Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama  $z_i$ .

## 2. zadatak (6 bodova)

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 1. Opisna funkcija nelinearnog elementa je dana s  $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}$  a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi  $K_R > 0$ .

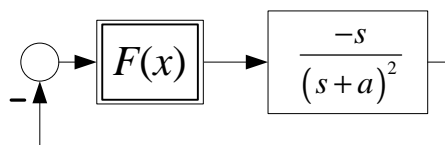


Slika 1: Nelinearni krug upravljanja uz zadatak 2.

- (4 boda) Odredite područje iznosa regulatora  $K_R$  za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija  $X_m$  o iznosu pojačanja regulatora  $K_R$ .
- (2 boda) Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

## 3. zadatak (5 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 2. Korištenjem kriterija Popova, odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.

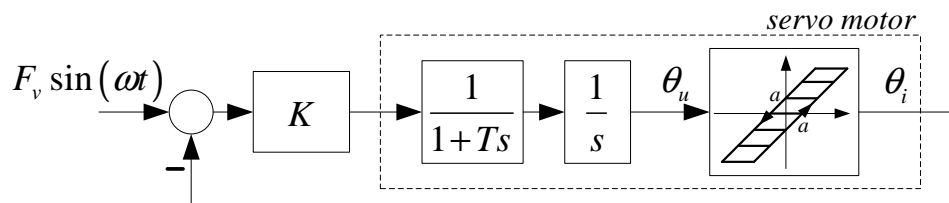


Slika 2: Nelinearni sustav upravljanja uz zadatak 3.

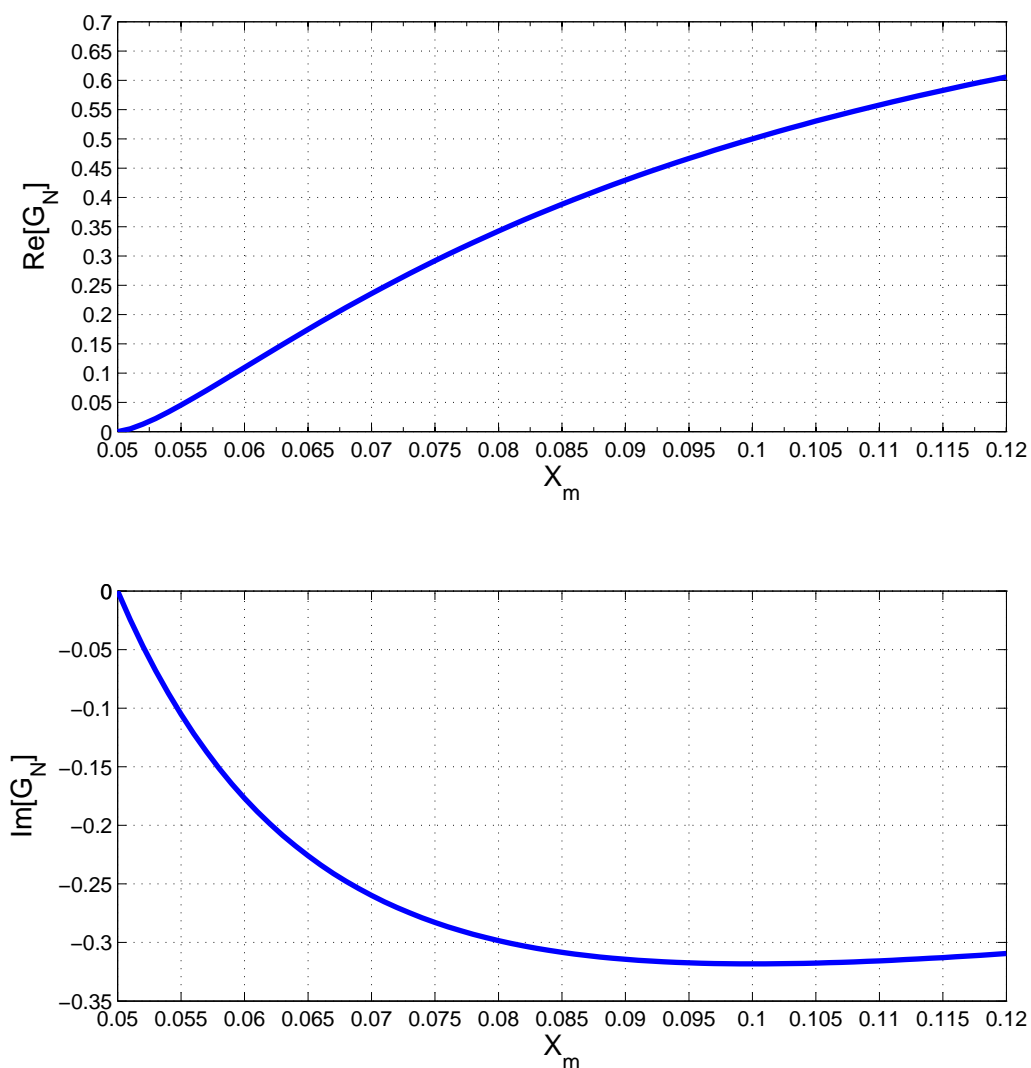
**4. zadatak (6 bodova)**

Slikom 3 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija prikazana slikom 4.

Uz parametre servo motora  $T = 0.5\text{s}$  i  $a = 0.05\text{rad}$ , te proporcionalni regulator  $K = 20 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$  snimljene su prinudne oscilacije na ulazu u zazor amplitude  $X_m = 0.097\text{rad}$  i frekvencije  $\omega = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Odredite amplitudu  $F_v$  narinutog signala koji je prouzročio prinudne oscilacije.



Slika 3: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.



Slika 4: Realni i imaginarni dio opisne funkcije zazora.

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$  vektor stanja i  $u$  ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$

$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

- a) (3.5 boda) Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava  $y = x_2$ . Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

I. Određivanje relativnog stupnja:

$$L_g L_f^0 h = L_g h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} g = 1 \Rightarrow r = 1$$

II. Transformacija stanja:

$$z_1 = \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_2$$

III. Definiranje novog ulaza:

$$\alpha(x) = L_f h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} f = \sin(x_1 - x_2)$$

$$\beta(x) = L_g h = 1$$

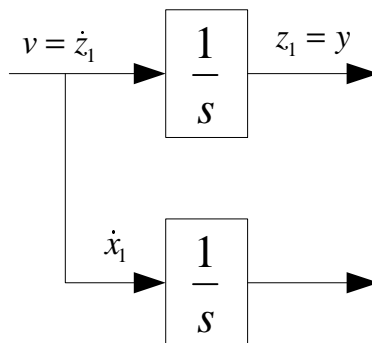
$$u = \frac{1}{\beta(x)} [-\alpha(x) + v] = -\sin(x_1 - x_2) + v$$

Novi sustav je oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Varijabla stanja  $x_2$  koja nije transformirana je stabilna tako da će i ukupni sustav biti stabilan. Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 5.



Slika 5: Linearizirani sustav.

- b) (4.5 boda) Linearizirajte sustav u u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state). Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama  $z_i$ .

I. Formiranje skupa  $\{ g, \text{ } ad_f g \}$ :

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ad_f g = \nabla g f - \nabla f g = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_2) \\ -\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

II. Upravljivost:

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(x_1 - x_2) \\ 1 & -\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

Rang je 2 (puni rang) što znači da je sustav upravljiv.

Za involutivnost potrebno je promatrati vektor  $g$ . S obzirom da je konstantan, sustav je involutivan.

III. Pronalaženje izlazne funkcije  $\lambda$ :

$$\nabla \lambda \cdot g = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \end{bmatrix} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla \lambda \cdot ad_f g \neq 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \cos(x_1 - x_2) - \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \cos(x_1 - x_2) g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \neq 0$$

Uzmemo

$$\boxed{\lambda = x_1}.$$

IV. Transformacija stanja:

$$z = \psi(x) = \begin{bmatrix} L_f^0 \lambda \\ L_f \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

V. Definiranje novog ulaza:

$$\alpha(x) = L_f^2 h = \frac{\partial L_f \lambda}{\partial x} f = 2 \sin(x_1 - x_2) \cos(x_1 - x_2)$$

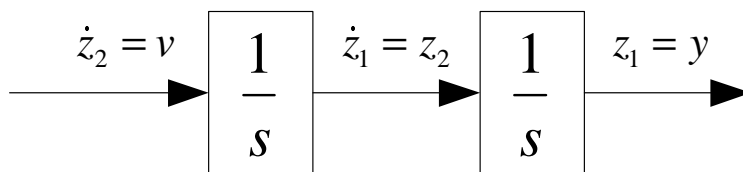
$$\beta(x) = L_g L_f \lambda = \cos(x_1 - x_2)$$

$$u = \frac{1}{\beta(x)} [-\alpha(x) + v] = \frac{1}{\cos(x_1 - x_2)} [-2 \sin(x_1 - x_2) \cos(x_1 - x_2) + v]$$

Schema lineariziranog sustava je prikazana slikom 6 iz slijedi iz zapisa u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

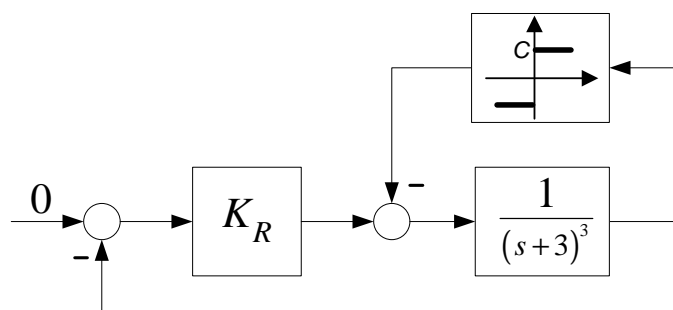
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$



Slika 6: Linearizirani sustav.

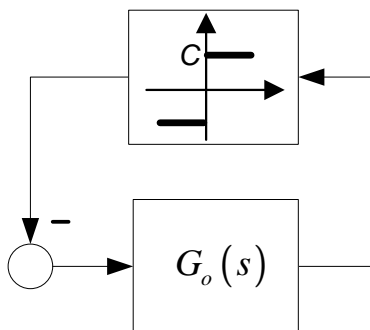
**ZADATAK 2**

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 7. Opisna funkcija nelinearnog elementa je dana s  $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}$  a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi  $K_R > 0$ .



Slika 7: Nelinearni krug upravljanja.

- a) (4 boda) Odredite područje iznosa regulatora  $K_R$  za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija  $X_m$  o iznosu pojačanja regulatora  $K_R$ . Potrebno je prikazati zatvoreni krug upravljanja kao što je na slici 8.



Slika 8: Nelinearni krug upravljanja.

Sada možemo jednostavno određivanjem gdje Nyquistova karakteristika siječe realnu os doći do uvjeta za vlastite oscilacije. Ovo ide uz činjenicu da negativni inverz opisne funkcije dvopoložajnog releja zauzima cijelu negativnu realnu poluos.

$$G_o(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27 + K}$$

$$G_o(j\omega) = \frac{1}{27 + K_R - 9\omega^2 + j(27\omega - \omega^3)} = \frac{27 + K_R - 9\omega^2 - j(27\omega - \omega^3)}{(27 + K_R - 9\omega^2)^2 + (27\omega - \omega^3)^2}$$

$$\text{Im} = 0 \Rightarrow 27 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 3\sqrt{3}$$

$$\text{Re} = \frac{1}{27 + K_R - 243} < 0$$

$$K_R < 216$$

U zadatku je rečeno da je  $K_R > 0$  stoga

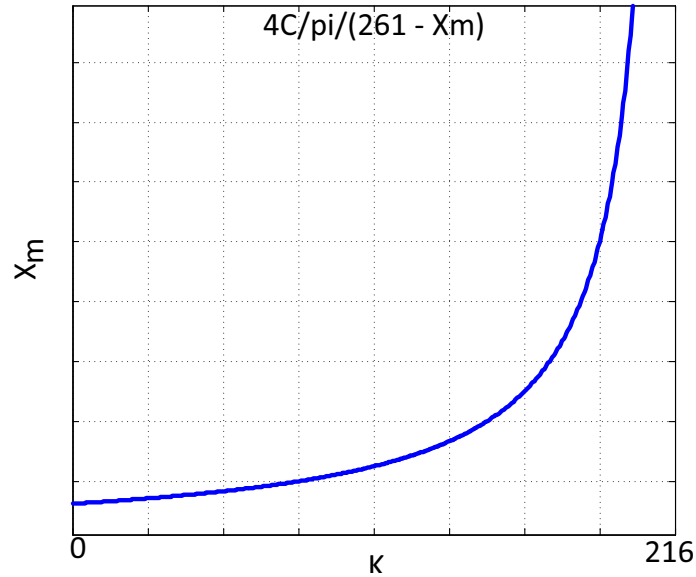
$$0 < K_R < 216$$

Iz ovoga slijedi:

$$-G_N^{-1} = G_o(\omega)$$

$$-\frac{\pi X_m}{4C} = \frac{1}{27 + K_R - 243}$$

$$X_m = \frac{4C}{\pi} \frac{1}{216 - K_R}$$



Slika 9: Ovisnost  $X_m$  o  $K_R$ .

b) (2 boda) Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

$$\underbrace{27 + K_R - 9\omega^2 + G_N}_R + j \underbrace{\omega(27 - \omega^2)}_I = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X_m} \frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m} \frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X_m} = -\frac{4C}{\pi X_m^2}$$

$$\frac{\partial I}{\partial \omega} = 27 - 3\omega^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_m} = 0$$

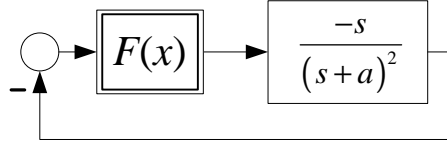
$$\omega > 3$$

U prethodnom podazadatku je pokazano da sve vlastite oscilacije imaju frekvenciju  $\omega = 3\sqrt{3}$ , što znači da su sve stabilne.



**ZADATAK 3**

Nelinearan je sustav prikazan slikom 10. Korištenjem kriterija Popova, odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.



Slika 10: Nelinearni sustav upravljanja uz zadatak 3.

Odredimo imaginarni i realni dio procesa:

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega + a)^2} = \frac{-2a\omega^2 - j\omega(a^2 - \omega^2)}{(a^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}$$

Realni dio:

$$U(\omega) = -\frac{2a\omega^2}{(a^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}$$

Imaginarni dio:

$$V(\omega) = \frac{\omega(a^2 - \omega^2)}{(a^2 - \omega^2)^2 + (2a\omega)^2}$$

Sada treba nacrtati krivulju  $U(\omega) + j\omega V(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\Rightarrow U = 0, \omega V = 0 \\ \omega = \infty &\Rightarrow U = 0, \omega V = 1 \\ \omega V = 0 &\Rightarrow \omega = a, U = -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Krivulja Popova je prikazana slikom 11. Od tuda slijedi da nelinearni element mora biti klase  $2a$ , odnosno. S obzirom da za kriterij Popova svi polovi moraju biti u lijevoj poluravnini, tj.  $a > 0$ , slijedi

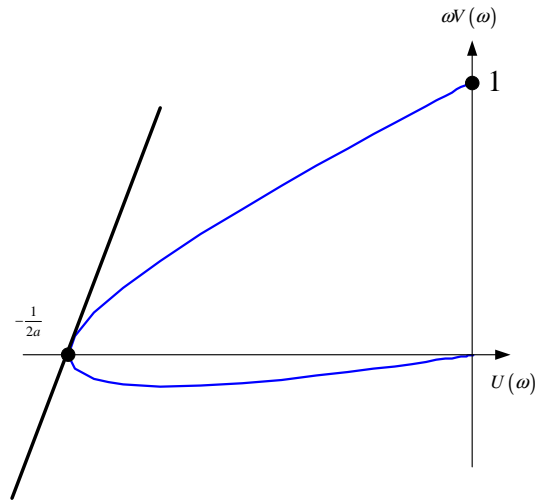
$$K \in (0, 2a).$$

Ako provjerimo što se događa kada je umjesto nelinearnog elementa proporcionalni regulator  $K$ , dobije se sljedeća karakteristična jednačba linearnog zatvorenog kruga upravljanja:

$$s^2 + (2a - K)s + a^2 = 0$$

Hurwitzov uvjet stabilnosti kaže da je zatvoreni krug stabilan ako su članovi uz potencije od  $s$  istog predznaka, tj.:

$$K < 2a.$$

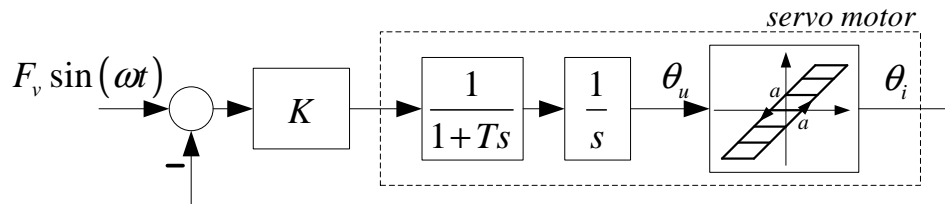


Slika 11: Krivulja Popova.

**ZADATAK 4**

Slikom 12 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija prikazana slikom 4.

Uz parametre servo motora  $T = 0.5\text{s}$  i  $a = 0.05\text{rad}$ , te proporcionalni regulator  $K = 20 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$  snimljene su prinudne oscilacije na ulazu u zazor amplitude  $X_m = 0.097\text{rad}$  i frekvencije  $\omega = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ . Odredite amplitudu  $F_v$  narinutog signala koji je prouzročio prinudne oscilacije.

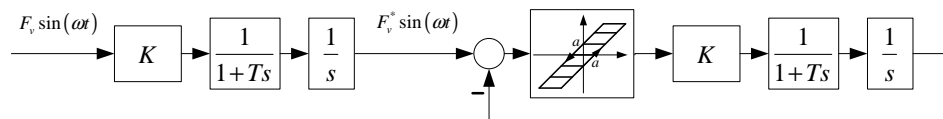


Slika 12: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.

Iz slike i poznati podatak da je amplituda prinudnih oscilacija  $X_m = 0.097\text{rad}$  možemo očitati da je  $P_N = 0.4803$  i  $Q_N = -0.318$ . Jednadžba

$$X_m \left[ 1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} (P_N + jQ_N) \right] = F_v e^{-j\varphi}$$

vrijedi ukoliko se zatvoreni krug sastoji od nelinearnog elementa i linearnog dijela. Budući da u ovom zadatku to nije slučaj, potrebno je prebaciti linearne blokove tako da se dobije shema na slici 13.



Slika 13: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.

Sada vrijedi jednadžba

$$X_m \left[ 1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} (P_N + jQ_N) \right] = F_v^* e^{-j\varphi}$$

iz koje se može odrediti da je

$$F_v^* = 0.0882.$$

Vrijedi

$$F_v^* = F_v |G_o| = F_v \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \frac{1}{\omega} = 0.1761$$

iz čega slijedi

$$\boxed{F_v = 0.5}$$

# Završni ispit

12. lipnja 2012.

Ime i Prezime:

Matični broj:

**Napomena:** Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

## 1. zadatak (6 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$  vektor stanja,  $u$  ulaz i  $y$  izlaz sustava.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sin x_2 + (x_1 + 1)x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

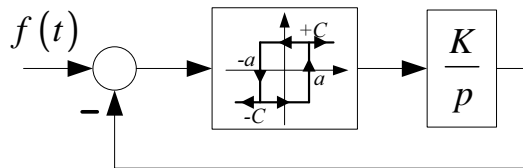
$$y = x_1$$

- a) (2 boda) Odredite relativan stupanj zadanog sustava.
- b) (4 boda) Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem zadanog izlaza  $y$ , uz pretpostavku da je relativan stupanj jednak redu sustava.

## 2. zadatak (5 bodova)

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 5 gdje je  $K = 1$ ,  $C = 1$ ,  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika  $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$  ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude  $X_m = \sqrt{3}$  i frekvencije  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

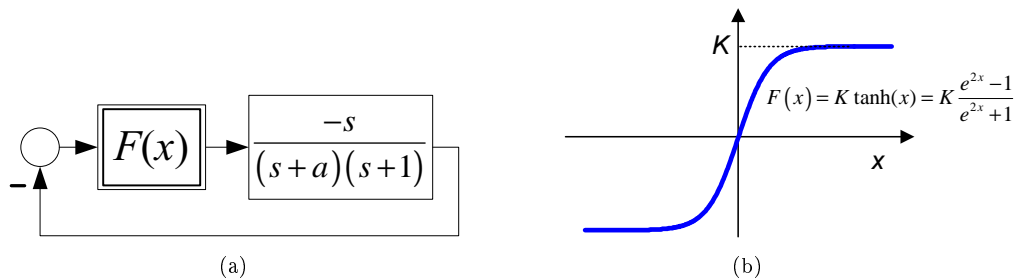
*Napomena:* Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je  $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j \frac{4Ca}{\pi X_m^2}$ .



Slika 1: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

## 3. zadatak (7 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 6(a) gdje je nelinearni element  $F(x)$  prikazan slikom 6(b).



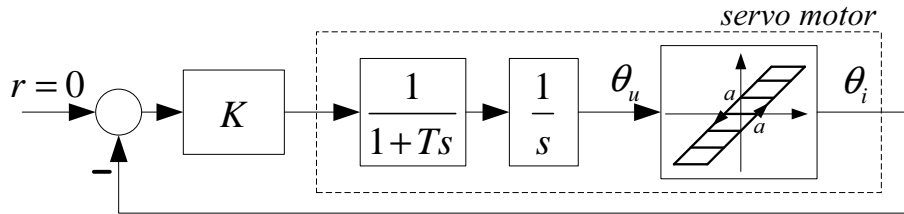
Slika 2: (a) Nelinearan sustav upravljanja i (b) nelinearni element  $F(x) = K \tanh x$ .

- a) (1 bod) U kojim granicama mora biti parametar procesa  $a$  da bi se mogao primijeniti kriterij Popova?
- b) (6 bodova) Korištenjem kriterija Popova odredite raspon iznosa parametra  $K$  nelinearnog elementa sa slike 6(b) za koji će zatvoreni krug upravljanja sa slike 6(a) biti apsolutno stabilan.

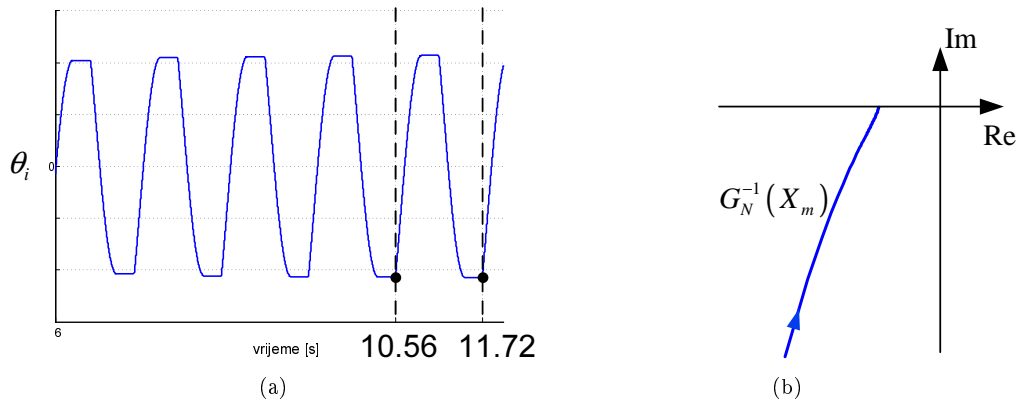
**4. zadatak (8 bodova)**

Slikom 8 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija

$$G_N(X_m) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2a}{X_m} - 1\right) - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right)^2} \right] + j \frac{4a}{\pi X_m} \left(\frac{a}{X_m} - 1\right).$$



Slika 3: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.



Slika 4: (a) Izlazni signal iz zazora,  $\theta_i$  i (b) negativna inverzna opisna funkcija zazora,  $-G_N^{-1}(X_m)$ .

- a) (4 boda) Uz parametre servo motora  $T = 0.5s$  i  $a = 0.05rad$ , te proporcionalni regulator  $K = 20 \frac{V}{rad}$  snimljene su oscilacije na izlazu iz zazora koje su prikazane slikom 9(a). Odredite amplitudu vlastitih oscilacija na ulazu u zazor,  $\theta_u = X_m \sin(\omega t)$ . Ukoliko postoji više rješenja, ne treba raditi analizu stabilnosti vlastitih oscilacija već samo navesti sva rješenja.
- b) (4 boda) Korištenjem principa Goldfarba te grafičkog prikaza  $-G_N^{-1}(X_m)$  na slici 9(b) pokažite da ako vrijedi  $K \cdot T < 1$  (uz  $K > 0$  i  $T > 0$ ) nikada ne može doći do vlastitih oscilacija u zatvorenom krugu upravljanja prikazanom slikom 8.

**RJEŠENJA:****ZADATAK 1**

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je  $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$  vektor stanja,  $u$  ulaz i  $y$  izlaz sustava.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \sin x_2 + (x_1 + 1)x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

a) (2 boda) Odredite relativan stupanj zadanog sustava.

$$\begin{aligned} L_g L_f^0 h &= L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} g = 0 \\ L_g L_f h &= L_g \left[ \frac{\partial h}{\partial x} f \right] = L_g \left[ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} f \right] = L_g [\sin x_2 + (x_1 + 1)x_2] = \\ &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\sin x_2 + (x_1 + 1)x_2] \right\} g = \begin{bmatrix} 2x_2 & \cos x_2 + x_1 + 1 \end{bmatrix} g = \\ &= \cos x_2 + x_1 + 1 \end{aligned}$$

Dakle, relativan stupanj  $r = 2$  uz  $\cos x_2 + x_1 + 1 \neq 0$ .

b) (4 boda) Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem zadanog izlaza  $y$ , uz pretpostavku da je relativan stupanj jednak redu sustava.

Transformacija  $r$  stanja:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_1 \\ z_2 &= \varphi_2(x) = L_f h = \sin x_2 + (x_1 + 1)x_2 \end{aligned}$$

Sada je potrebno definirati novi ulaz kako bi se linearizirao sustav:

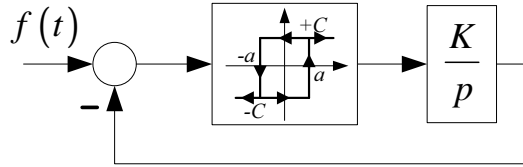
$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f^2 h = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f = \begin{bmatrix} x_2 & \cos x_2 + x_1 + 1 \end{bmatrix} f = \\ &= x_2 [\sin x_2 + (x_1 + 1)x_2] + x_1^2 (\cos x_2 + x_1 + 1) \\ \beta(x) &= L_g L_f h = \cos x_2 + x_1 + 1 \end{aligned}$$

uz  $u = \frac{1}{\beta(x)} [-\alpha(x) + v]$  gdje je  $v$  novi ulaz u sustav.

**ZADATAK 2**

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 5 gdje je  $K = 1$ ,  $C = 1$ ,  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika  $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$  ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude  $X_m = \sqrt{3}$  i frekvencije  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$ .

*Napomena:* Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je  $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j \frac{4Ca}{\pi X_m^2}$ .



Slika 5: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

S obzirom da su prinudne oscilacije frekvencije  $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$ , onda je i pobudni signal iste frekvencije, tj.

$$\omega_v = 1 \frac{\text{rad}}{s}.$$

Jednadžba koja vrijedi za prinudne oscilacije je:

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v) [P_N(X_m) + jQ_N(X_m)]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}.$$

U zadanom slučaju vrijedi:

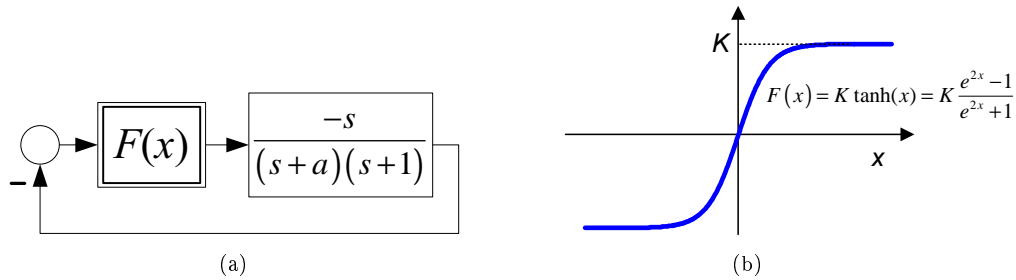
$$\begin{aligned} A(j\omega) &= j\omega \\ B(j\omega) &= K \\ Q(X_m) &= -\frac{4Ca}{\pi X_m^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} = -0.3676 \\ P(X_m) &= \frac{4C}{\pi X_m} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} = \frac{2}{\pi} = 0.6366 \end{aligned}$$

Nadalje

$$F_v = |Z_m| = X_m \sqrt{\left(1 + \frac{KQ}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{KP}{\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sqrt{\left(\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = 1.5543$$

**ZADATAK 3**

Nelinearan je sustav prikazan slikom 6(a) gdje je nelinearni element  $F(x)$  prikazan slikom 6(b).



Slika 6: (a) Nelinearan sustav upravljanja i (b) nelinearni element  $F(x) = K \tanh x$ .

- a) (1 bod) U kojim granicama mora biti parametar procesa  $a$  da bi se mogao primijeniti kriterij Popova?

Jedan od kriterija za primjenu kriterija Popova jest da polovi procesa moraju biti u lijevoj poluravnini ili u ishodištu. Dakle,

$$a \geq 0.$$

- b) (6 bodova) Korištenjem kriterija Popova odredite raspon iznosa parametra  $K$  nelinearnog elementa sa slike 6(b) za koji će zatvoreni krug upravljanja sa slike 6(a) biti apsolutno stabilan.

Frekvencijska karakteristika procesa je:

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega + a)(j\omega + 1)} = \frac{-\omega^2(a+1) - j\omega(a-\omega^2)}{(a-\omega^2)^2 + \omega^2(a+1)^2}$$

Za kriterij Popova su nam potrebni

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{-\omega^2(a+1)}{(a-\omega^2)^2 + \omega^2(a+1)^2} \\ \omega V(\omega) &= \frac{-\omega^2(a-\omega^2)}{(a-\omega^2)^2 + \omega^2(a+1)^2} \end{aligned}$$

Sada treba nacrtati krivulju  $U(\omega) + j\omega V(\omega)$ .

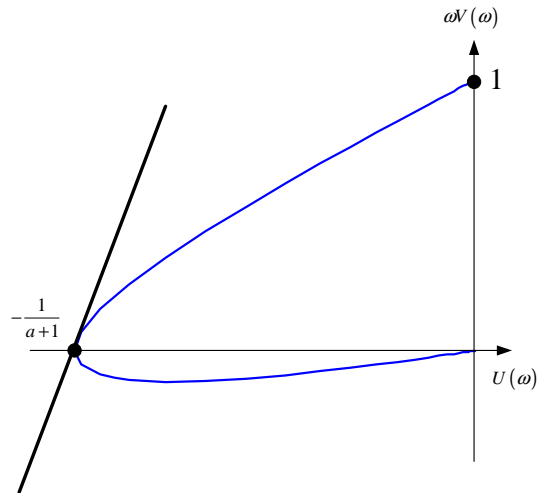
$$\begin{aligned} \omega = 0 &\Rightarrow U = 0, \omega V = 0 \\ \omega = \infty &\Rightarrow U = 0, \omega V = -1 \\ \omega V = 0 &\Rightarrow \omega = \sqrt{a}, U = -\frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

Krivulja Popova je prikazana slikom 7. Od tuda slijedi da nelinearni element mora biti klase  $a+1$ .

Za nelinearni element koji je prikazan slikom lako je odrediti klasu – samo se nađe nagib tangente u ishodištu:  $\frac{d}{dx} [K \tanh(x)]|_{x=0} = K$ . Zaključak je da mora vrijediti

$$K \in (0, a+1)$$



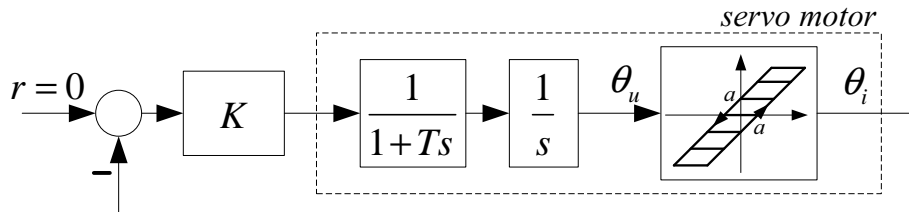


Slika 7: Krivulja Popova.

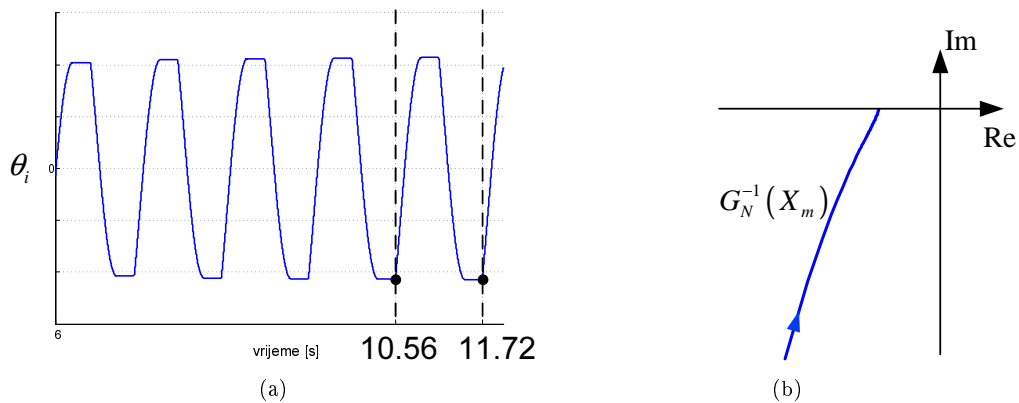
**ZADATAK 4**

Slikom 8 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija

$$G_N(X_m) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2a}{X_m} - 1\right) - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right) \sqrt{1 - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right)^2} \right] + j \frac{4a}{\pi X_m} \left(\frac{a}{X_m} - 1\right).$$



Slika 8: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.

Slika 9: (a) Izlazni signal iz zazora,  $\theta_i$  i (b) negativna inverzna opisna funkcija zazora,  $-G_N^{-1}(X_m)$ .

- a) (4 boda) Uz parametre servo motora  $T = 0.5\text{s}$  i  $a = 0.05\text{rad}$ , te proporcionalni regulator  $K = 20 \frac{\text{V}}{\text{rad}}$  snimljene su oscilacije na izlazu iz zazora koje su prikazane slikom 9(a). Odredite amplitudu vlastitih oscilacija na ulazu u zazor,  $\theta_u = X_m \sin(\omega t)$ . Ukoliko postoji više rješenja, ne treba raditi analizu stabilnosti vlastitih oscilacija već samo navesti sva rješenja.

Iz izlaznog signala zazora se može očitati frekvencija oscilacija koja je jednaka frekvenciji vlastitih oscilacija:

$$\omega = \frac{2\pi}{11.72 - 10.56} = 5.4165$$

Za daljnji račun se možemo poslužiti Goldfarbovim principom zapisanim u obliku:  $G_N = -G_P^{-1}$ . Na taj način izbjegnemo traženje recipročne vrijednosti komplicirane opisne funkcije zazora.

$$G_P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT\omega)} \Rightarrow -G_P^{-1}(j\omega) = \frac{T\omega^2}{K} - j\frac{\omega}{K}$$

S obzirom da je imaginarni dio opisne funkcije zazora jednostavnijeg oblika, dovoljno je izjednačiti imaginarne dijelove:

$$\begin{aligned} \text{Im}\{-G_P^{-1}\} &= \text{Im}\{G_N\} \\ \frac{4a}{\pi X_m} \left( \frac{a}{X_m} - 1 \right) &= -\frac{\omega}{K} \end{aligned}$$

$$\frac{\omega}{K} X_m^2 - \frac{4a}{\pi} X_m + \frac{4a^2}{\pi} = 0$$

$$X_m = \frac{2Ka}{\pi\omega} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \pi \frac{\omega}{K}} \right] = 0.1176 (1 \pm 0.3862)$$

Odavde se dobiju dva rješenja:  $X_{m,1} = 0.163$  i  $X_{m,2} = 0.0722$

Ako se sada izjednače realni dijelovi u Goldfarbovoj jednadžbi, dobije se da je jednakost ispunjena za  $X_{m,1} = 0.163$  što upućuje na ispravno rješenje.

- b) (4 boda) Korištenjem principa Goldfarba te grafičkog prikaza  $-G_N^{-1}(X_m)$  na slici 9(b) pokažite da ako vrijedi  $K \cdot T < 1$  (uz  $K > 0$  i  $T > 0$ ) nikada ne može doći do vlastitih oscilacija u zatvorenom krugu upravljanja prikazanom slikom 8.

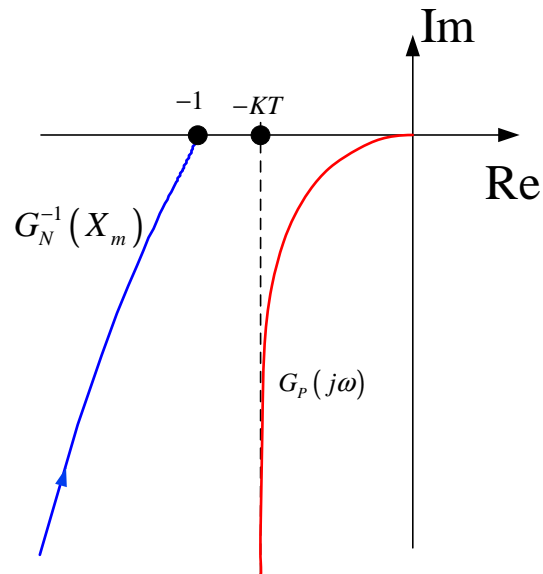
Za rješavanje ovog zadatka ćemo iskoristiti sliku negativnog inverza opisne funkcije zazora. Ekstremne vrijednosti opsine funkcije su:

$$\begin{aligned} X_m = a &\Rightarrow G_N = 0 + j0 \\ &\quad -G_N^{-1} = \infty \\ X_m = \infty &\Rightarrow G_N = 1 + j0 \\ &\quad -G_N^{-1} = -1 \end{aligned}$$

Odredimo sada Nyquistov dijagram procesa:

$$G_P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+jT\omega)} = \frac{-KT}{(T\omega)^2 + 1} - j\frac{K}{\omega} \frac{1}{(T\omega)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\Rightarrow \text{Im} = \infty, \text{Re} = -KT \\ \omega = \infty &\Rightarrow \text{Im} = 0, \text{Re} = 0 \end{aligned}$$



Slika 10: Krivulja Popova.

Kada se obje krivunje nacrtaju jedna pokraj druge dobije se slika 10 iz koje je očigledno da uz  $KT < 1$  sigurno nikada neće doći do presijecanja dvije krivulje, tj. nikada neće doći do vlastitih oscilacija.