Završni ispit

14. lipnja 2016.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (9 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$
$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

a) *(3.5 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava $y = x_2$. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

b) *(5.5 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state), uz obavezno detaljno komentiranje i pokazivanje svojstava potrebnih da bi se taj postupak mogao provesti. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

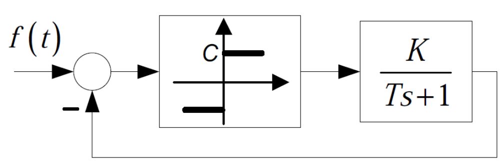
2. zadatak (6 bodova)

Nelinearan krug upravljanja s dvopoložajnim relejem je prikazan slikom 1. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$

Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala F_v dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je $K = 4$, $T = 0.35$ i $C = 0.5$. Tijekom rješavanja skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$.



Slika 1: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

3. zadatak (5 bodova)

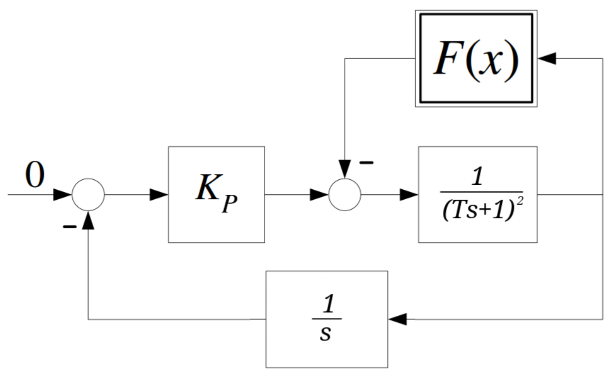
Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{x}{2} + 2x^2 y \\ \dot{y} &= x - y - x^3 \end{aligned}$$

Pokažite da je ravnotežna točka $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ zadanoga sustava stabilna koristeći Ljapunovljevu funkciju $V(x, y) = x^2 + 2y^2$.

4. zadatak (6 bodova)

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 2. Za nelinearni element vrijedi $F(x) = x^3$, za parametar $T = 2$, a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi $K_P > 0$.



Slika 2: Nelinearni krug upravljanja uz zadatak 4.

Napomena: Opisna funkcija kubnog nelinearnog elementa je $G_N(A) = \frac{3}{4} X_m^2$.

a) *(4 boda)* Odredite područje iznosa regulatora K_P za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_P.

b) *(2 boda)* Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) &= 0 \\ \dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) &= u \end{aligned}$$

a) *(3.5 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava $y = x_2$. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

I. Određivanje relativnog stupnja:

$$L_g L_f^0 h = L_g h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} g = 1 \Rightarrow r = 1$$

II. Transformacija stanja:

$$z_1 = \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_2$$

III. Definiranje novog ulaza:

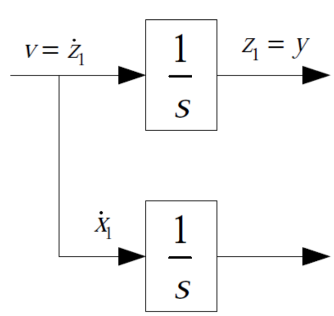
$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} f = \sin(x_1 - x_2) \\ \beta(x) &= L_g h = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{\beta(x)}\left[-\alpha(x) + v\right] = -\sin(x_1 - x_2) + v}$$

Novi sustav je oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Varijabla stanja x_2 koja nije transformirana je stabilna tako da će i ukupni sustav biti stabilan. Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 3.



Slika 3: Linearizirani sustav.

b) *(5.5 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state), uz obavezno detaljno komentiranje i pokazivanje svojstava potrebnih da bi se taj postupak mogao provesti. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

Potrebno je ispitati svojstva upravljivosti i involutivnosti.

I. Formiranje skupa $\{\ g, \quad ad_f g\ \}$:

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ad_f g = \nabla g f - \nabla f g = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_2) \\ -\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

II. Upravljivost:

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(x_1 - x_2) \\ 1 & -\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

Rang je 2 (puni rang) što znai da je sustav **upravljiv**.

Za involutivnost potrebno je promatrati vektor g. S obzirom da je konstantan, sustav je **involutivan**.

III. Pronalaženje izlazne funkcije λ:

$$\nabla\lambda \cdot g = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \end{bmatrix} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla\lambda \cdot ad_f g \neq 0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\cos(x_1 - x_2) - \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\cos(x_1 - x_2)\, g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \neq 0$$

Uzmemo

$$\boxed{\lambda = x_1}.$$

IV. Transformacija stanja:

$$z = \psi(x) = \begin{bmatrix} L_f^0\lambda \\ L_f\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

V. Definiranje novog ulaza:

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= L_f^2 h = \frac{\partial L_f\lambda}{\partial x} f = 2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) \\
\beta(x) &= L_g L_f \lambda = \cos(x_1 - x_2) \\
u &= \frac{1}{\beta(x)}\left[-\alpha(x) + v\right] = \frac{1}{\cos(x_1 - x_2)}\left[-2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) + v\right]
\end{aligned}$$

Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 4 i slijedi iz zapisa u prostoru stanja

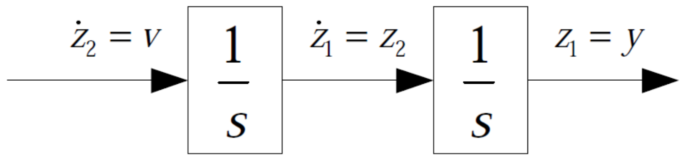
$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2

Nelinearan krug upravljanja s dvopoložajnim relejem je prikazan slikom 5. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

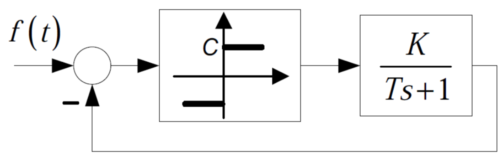
$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$



Slika 4: Linearizirani sustav.

Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala F_v dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je $K = 4$, $T = 0.35$ i $C = 0.5$. Tijekom rješavanja skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$.



Slika 5: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

Za strukturu nelinearnog sustava zadanog slikom, vrijedi sljedeća relacija za određivanje prinudnih oscilacija:

$$\underbrace{X_m\left[1+\frac{B(j\omega_v)}{A(j\omega_v)}(P_N+jQ_N)\right]}_{Z_m} = F_v e^{-j\varphi}$$

$$Z_m = X_m\left[1+\frac{K}{Ts+1}P_N\right] = X_m\frac{1+KP_N+jT\omega}{1+jT\omega}$$

$$|Z_m| = X_m\frac{\sqrt{(1+KP_N)^2+(T\omega)^2}}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} = F_v$$

$$X_m^2\frac{1+2KP_N+(KP_N)^2+(T\omega)^2}{1+(T\omega)^2} = F_v^2$$

$$X_m^2\left[1+\underbrace{\frac{8KC}{\pi\left[1+(T\omega)^2\right]}}_{a}\frac{1}{X_m}+\underbrace{\frac{8KC}{\pi\left[1+(T\omega)^2\right]}}_{a}\frac{2KC}{\pi}\frac{1}{X_m^2}\right] = F_v^2$$

Uz $\omega_v = \frac{1}{T}$, kao što je zadano u zadatku, vrijedi:

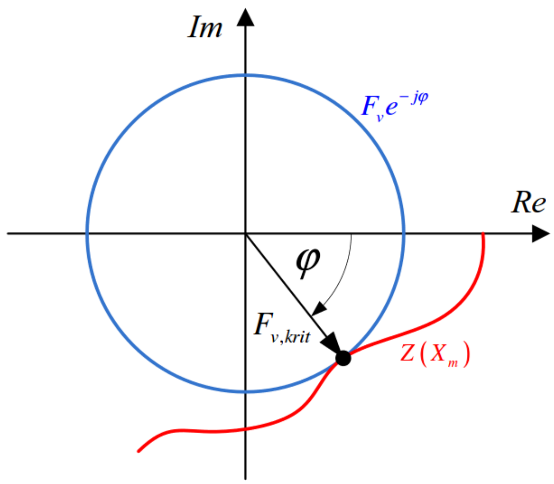
$$X_m^2+\frac{4KC}{\pi}X_m+8\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2-F_v^2 = 0$$

Da bi postojale prinudne oscilacije, treba biti

$$X_m = \frac{-\frac{4KC}{\pi}\pm\sqrt{16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2-32\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2+4F_v^2}}{2} > 0$$

odnosno

$$
\begin{gathered}
-\frac{4KC}{\pi} \pm \sqrt{-16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 + 4F_v^2} > 0 \\
-16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 + 4F_v^2 > 16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 \\
F_v^2 > 8\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 \\
\boxed{F_v > \frac{2\sqrt{2}}{\pi} KC = 1.8006}
\end{gathered}
$$



Slika 6: Krivulje uz zadatak.

Zadatak 3

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja.

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -\frac{x}{2} + 2x^2 y \\
\dot{y} &= x - y - x^3
\end{aligned}
$$

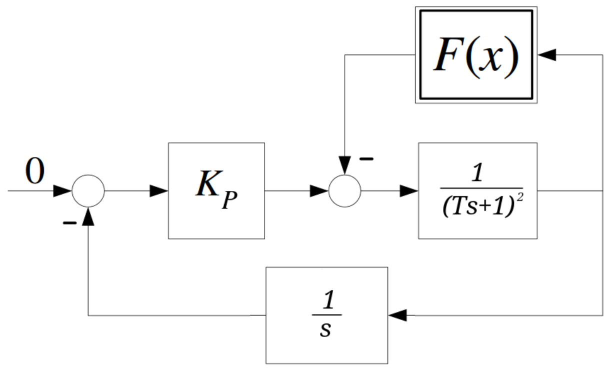
Pokažite da je ravnotežna točka $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ zadanoga sustava stabilna koristeći Ljapunovljevu funkciju $V(x, y) = x^2 + 2y^2$.

$$
V(x, y) = x^2 + 2y^2
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V} &= 2x\dot{x} + 4y\dot{y} \\
&= 2x\left(-\frac{x}{2} + 2x^2 y\right) + 4y\left(x - y - x^3\right) \\
&= -x^2 + 4x^3 y + 4yx - 4y^2 - 4x^3 y \\
&= -\left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) \\
\dot{V} &= -\left(x - 2y\right)^2 \leq 0 \quad \forall x, y
\end{aligned}
$$

Zadatak 4

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 7. Za nelinearni element vrijedi $F(x) = x^3$, a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi $K_P > 0$.

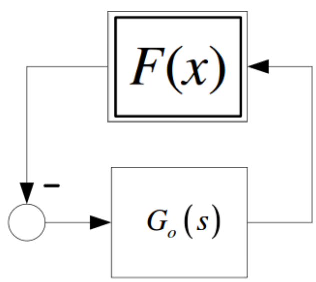


Slika 7: Nelinearni krug upravljanja uz zadatak 4.

Napomena: Opisna funkcija kubnog nelinearnog elementa je $G_N(A) = \frac{3}{4}X_m^2$.

(4 boda) Odredite područje iznosa regulatora K_P za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_P.

Potrebno je prikazati zatvoreni krug upravljanja kao što je na slici 8.



Slika 8: Nelinearni krug upravljanja.

Lako je uočiti da negativni inverz opisne funkcije kubnog nelinearnog elementa zauzima cijelu negativnu realnu poluos. Određivanjem gdje Nyquistova karakteristika linearnog dijela sustava siječe realnu os jednostavno se može doći do uvjeta za vlastite oscilacije.

$$G_o(s) = \frac{s}{T^2s^3 + 2Ts^2 + s + K_P}$$

$$G_o(j\omega) = \frac{\omega^2 - T^2\omega^4 + j(K_P\omega - 2T\omega^3)}{(K_P - 2T\omega^2)^2 + (\omega - T^2\omega^3)^2}$$

$$\mathrm{Im} = 0 \Rightarrow K_P\omega - 2T\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K_P}{2T}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{1 - K_P} < 0$$

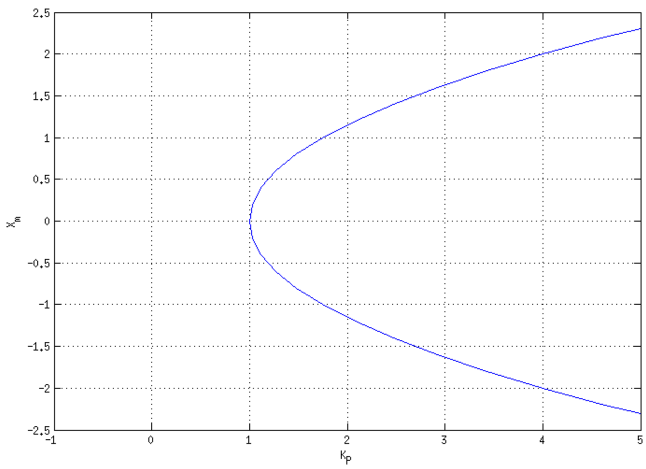
$$K_P > 1$$

Iz ovoga slijedi:

$$-G_N^{-1} = G_o(\omega)$$

$$-\frac{4}{3X_m^2} = \frac{1}{1-K_P}$$

$$\boxed{X_m^2 = \frac{4}{3}(K_P - 1)}$$



Slika 9: Ovisnost X_m o K_P.

Ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_P dana je na slici 9.

(2 boda) Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

$$1 + G_N G_o = 0$$

$$\underbrace{K_P - 4\omega^2}_{R} + j\underbrace{\left(\omega - 4\omega^3 + \frac{3}{4}X_m^2\omega\right)}_{I} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X_m}\frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X_m} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial \omega} = -8\omega$$

$$\frac{\partial I}{\partial \omega} = 1 - 12\omega^2 + \frac{3}{4}X_m^2$$

$$\frac{\partial I}{\partial X_m} = \frac{3}{2}\omega X_m$$

Slijedi

$$12X_m\omega^2 > 0$$

što vrijedi za svaku frekvenciju ω, što znači da su sve vlastite oscilacije stabilne.