1. *(20 bodova)* Simetričan nelinearni element je identificiran tako da je na ulaz doveden signal oblik $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ a na izlazu je mjeren signal oblika $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi)$. Omjer amplitude izlaznog i ulaznog signala je aproksimiran kao $\frac{Y_m}{X_m} = \frac{1}{\sqrt{X_m^2+2}}$. Kut između ulaznog i izlaznog signala je aproksimiran kao $\varphi = \tan^{-1}\frac{X_m}{X_m^2+2}$. Odredite realni i imaginarni dio opisne funkcije nelinearnog elementa.

Rješenje:

$$G_N = P_N + jQ_N$$

$$A = \sqrt{P_N^2 + Q_N^2} = \frac{1}{\sqrt{X_m^2+2}}$$

$$\varphi = \arctan\frac{Q_N}{P_N} = \arctan\frac{X_m}{X_m^2+2}$$

$$P_N^2 + Q_N^2 = \frac{1}{X_m^2+2}$$

$$\frac{Q_N}{P_N} = \frac{X_m}{X_m^2+2} \Rightarrow Q_N = P_N\frac{X_m}{X_m^2+2}$$

$$P_N^2 + P_N^2\frac{X_m^2}{\left(X_m^2+2\right)^2} = \frac{1}{X_m^2+2}$$

$$P_N^2\frac{\left(X_m^2+2\right)^2 + X_m^2}{\left(X_m^2+2\right)^2} = \frac{1}{X_m^2+2}$$

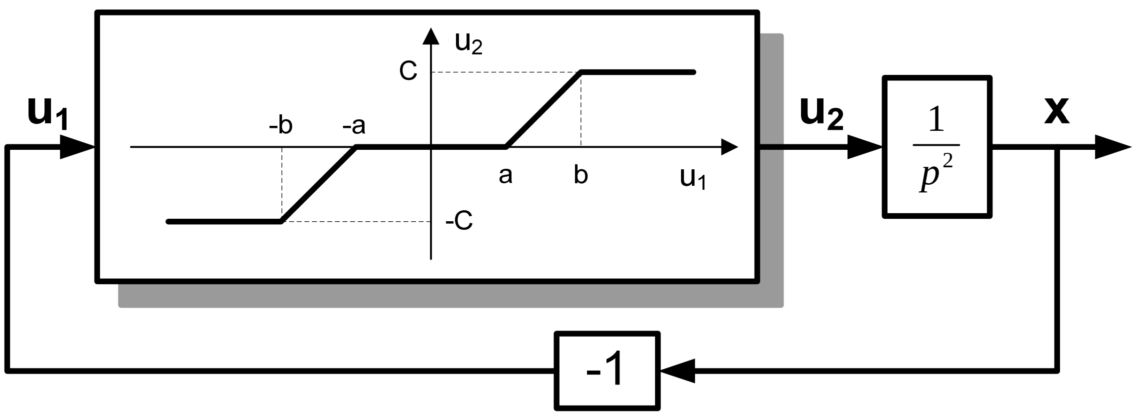
$$P_N^2 = \frac{X_m^2+2}{\left(X_m^2+2\right)^2 + X_m^2} = \frac{X_m^2+2}{X_m^4+5X_m^2+4}$$

$$\boxed{P_N = \sqrt{\frac{X_m^2+2}{\left(X_m^2+1\right)\left(X_m^2+4\right)}}}$$

$$Q_N = \sqrt{\frac{X_m^2+2}{\left(X_m^2+1\right)\left(X_m^2+4\right)}}\frac{X_m}{X_m^2+2}$$

$$\boxed{Q_N = \frac{X_m}{\sqrt{\left(X_m^2+1\right)\left(X_m^2+4\right)\left(X_m^2+2\right)}}}$$

2. Zadan je zatvoreni krug prikazan slikom.



a) *(15 bodova)* Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga.

b) *(15 bodova)* Uz parametre sustava $C = 1, a = 1, b = 2$ i početne uvjete $x(0) = 3$ i $\dot{x}(0) = 0$, izračunajte karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini.

Rješenje:

$$x = \frac{1}{s^2}u_2 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = u_2$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u_2$$

$$\frac{dy}{dt} y \frac{dt}{dx} = u_2$$

$$ydy = u_2 dx$$

I. $\quad -a < u_1 < a \quad \Rightarrow \quad -a < x < a \quad \Rightarrow \quad u_2 = 0$

$$ydy = 0dx \quad \Rightarrow \quad y^2 = const$$

II. $\quad a < u_1 < b \quad \Rightarrow \quad -b < x < -a \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{C}{b-a}(u_1 - a) = \frac{-C}{b-a}(x+a)$

$$ydy = \frac{-C}{b-a}(x+a)dx \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{-C}{b-a}(x^2 + 2ax) + const = -x(x+2) + const$$

III. $\quad u_1 > b \quad \Rightarrow \quad x < -b \quad \Rightarrow \quad u_2 = C$

$$ydy = Cdx \quad \Rightarrow \quad y^2 = 2Cx + const = 2x + const$$

IV. $\quad -b < u_1 < -a \quad \Rightarrow \quad a < x < b \quad \Rightarrow \quad u_2 = \frac{C}{b-a}(u_1 + a) = \frac{-C}{b-a}(x-a)$

$$ydy = \frac{-C}{b-a}(x-a)dx \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{-C}{b-a}(x^2 - 2ax) + const = -x(x-2) + const$$

V. $\quad u_1 < -b \quad \Rightarrow \quad x > b \quad \Rightarrow \quad u_2 = -C$

$$ydy = -Cdx \quad \Rightarrow \quad y^2 = -2Cx + const = -2x + const$$

Dakle:

I. $\quad y^2 = const$

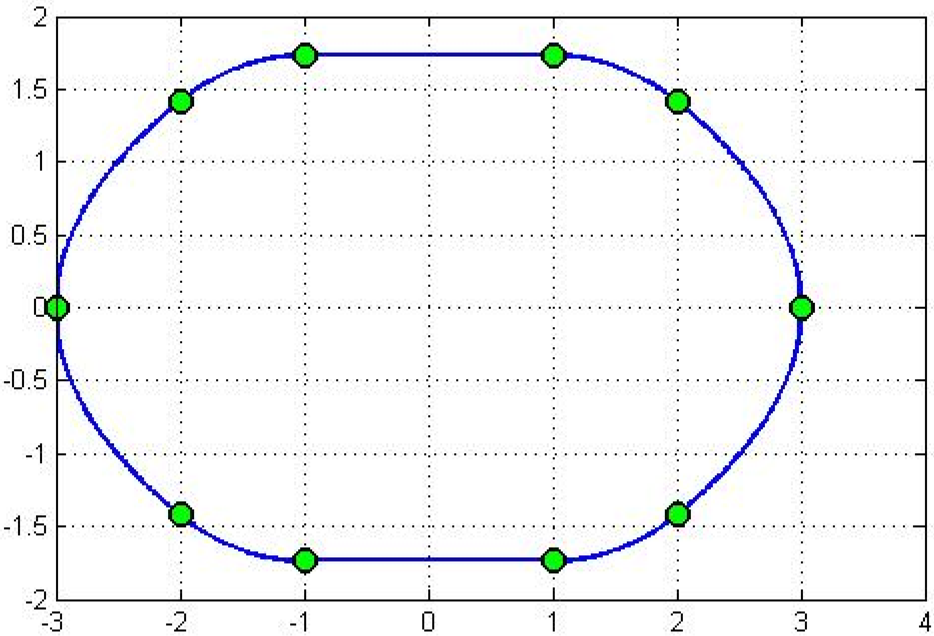
II. $\quad y^2 = -x(x+2) + const$

III. $\quad y^2 = 2x + const$

IV. $y^2 = -x(x-2) + const$

V. $y^2 = -2x + const$

korak	x_0	y_0	latica	const.	jednadžba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	3	0	V.	6	$y^2 = -2x + 6$	b=2	$\pm\sqrt{2}$
2.	2	$\pm\sqrt{2}$	IV.	2	$y^2 = -(x-2)x + 2$	a=1	$\pm\sqrt{3}$
3.	1	$\pm\sqrt{3}$	I.	3	$y^2 = 3$	-a=-1	$\pm\sqrt{3}$
4.	-1	$\pm\sqrt{3}$	II.	2	$y^2 = -(x+2)x + 2$	-b=-2	$\pm\sqrt{2}$
5.	-2	$\pm\sqrt{2}$	III.	6	$y^2 = 2x + 6$	-3	0



3. *(10 bodova)* Jednadžbom je zadan nelinearni element gdje je x ulaz a y_N izlaz iz nelinearnog elementa.

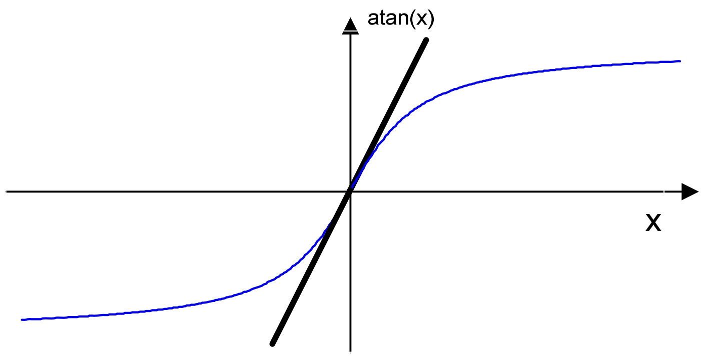
$$y_N = \tan^{-1} x$$

Odredite najmanju klasu nelinearnosti kojoj pripada zadani nelinearni element.

<u>Rješenje:</u>

Pravac sa najmanjim nagibom koji se može provući kroz ishodište koordinatnog sustava bez da siječe funkciju zadanog nelinearnog elementa (tangenta na krivulju u ishodištu) je:

$$\left.\frac{dy_N}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{d}{dx}(\arctan x)\right|_{x=0} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1$$



Zadana funkcija pripada klasi 1.

4. *(20 bodova)* U zatvorenom krugu upravljanja otkrivene su vlastite oscilacije amplitude $X_m = 1.2$ i frekvencije $\omega = 1$. Parametri nelinearnog elementa su $C = 1$ i $x_a = 0.8$.

a) *(8 bodova)* Odredite parametre linearnog dijela sustava.
b) *(5 bodova)* Na kojem mjestu u modelu se definiraju vlastite oscilacije?
c) *(7 bodova)* Korištenjem metode Goldfarba precizno objasnite mogu li se i kako promjenom parametara nelinearnog elementa izbjeći vlastite oscilacije.

Rješenje:

a)

$$P(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2} = \frac{4}{1.2\pi}\sqrt{1-\left(\frac{0.8}{1.2}\right)^2} = 0.7908$$

$$Q(X_m) = -\frac{4C}{\pi X_m}\frac{x_a}{X_m} = -\frac{4}{1.2\pi}\frac{0.8}{1.2} = -0.7074$$

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= A(j\omega) + G_N(j\omega)B(j\omega) = \\ &= j\omega(jT\omega+1) + (P+jQ)K = \\ &= PK - T\omega^2 + j(QK+\omega) = 0 \end{aligned}$$

$$QK + \omega = 0$$

$$PK - T\omega^2 = 0$$

$$\boxed{K = -\frac{\omega}{Q} = 1.4136}$$

$$-P\frac{\omega}{Q} - T\omega^2 = 0$$

$$\boxed{T = -\frac{P}{Q\omega} = 1.118}$$

b) Na ulazu u nelinearni element.

c) Budući da Nyquistova karakteristika linearnog dijela ne prelazi u III kvadrant, već završava u ishodištu, jedino u slučaju kada ne postoji histereza ($x_a = 0$) neće postojati presjecište između dvije krivulje pri konačnom iznosu frekvencije. Drugim riječima, vlastite oscilacije se za konkretan slučaj mogu izbjeći micanjem histereze.