Završni ispit

19. lipnja 2013.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (9 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja i u ulaz sustava.

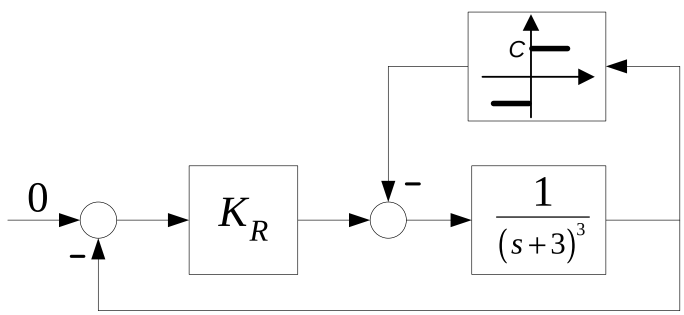
$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$
$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

a) *(3.5 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava $y = x_2$. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

b) *(5.5 boda)* Linearizirajte sustav u u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state). Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

2. zadatak (6 bodova)

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 1. Opisna funkcija nelinearnog elementa je dana s $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}$ a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi $K_R > 0$.



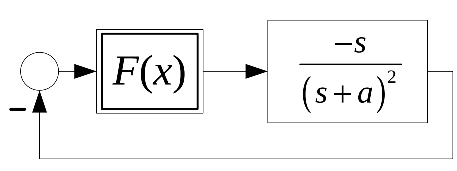
Slika 1: Nelinearni krug upravljanja uz zadatak 2.

a) *(4 boda)* Odredite područje iznosa regulatora K_R za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_R.

b) *(2 boda)* Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

3. zadatak (5 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 2. Korištenjem kriterija Popova, odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.

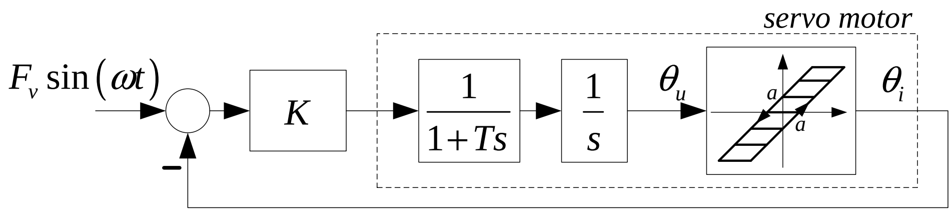


Slika 2: Nelinearni sustav upravljanja uz zadatak 3.

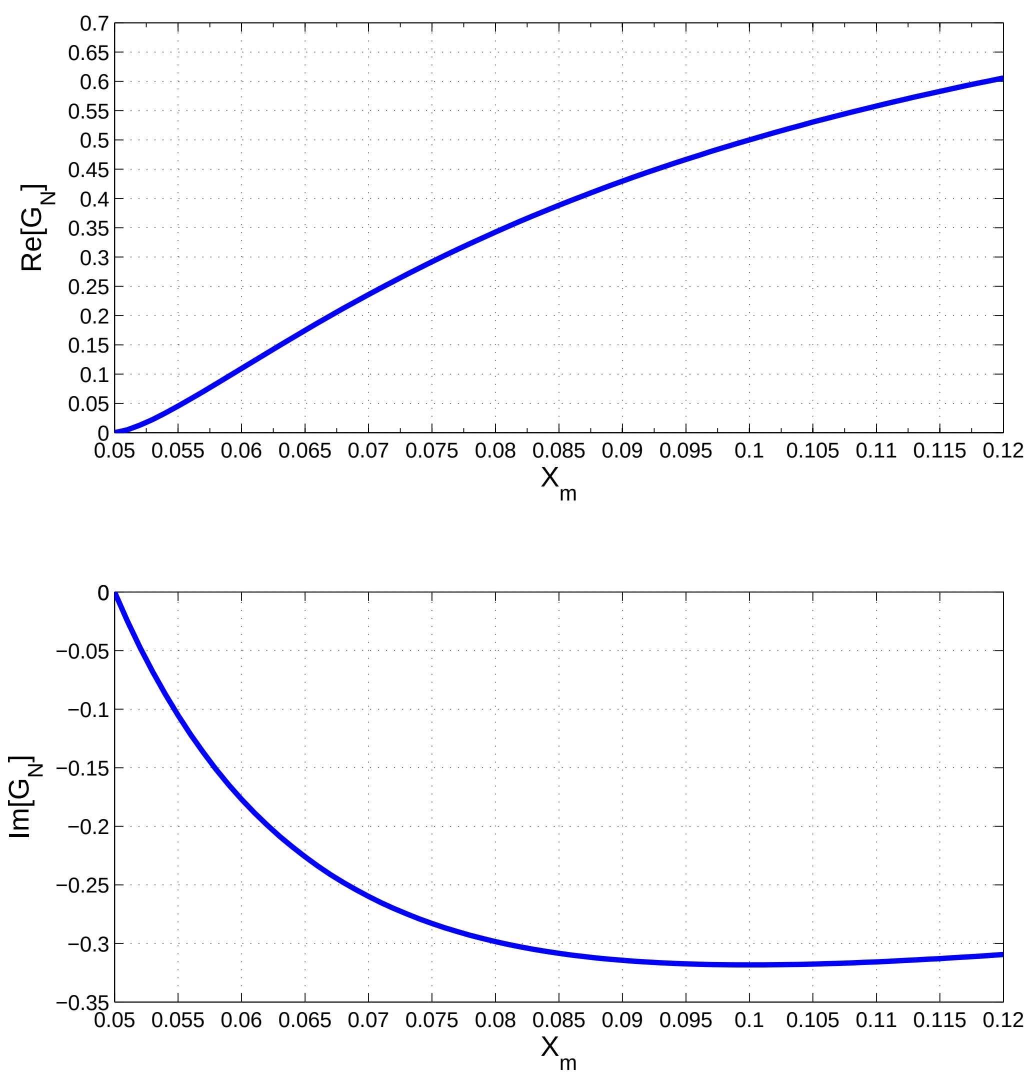
4. zadatak (6 bodova)

Slikom 3 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija prikazana slikom 4.

Uz parametre servo motora $T = 0.5\text{s}$ i $a = 0.05\text{rad}$, te proporcionalni regulator $K = 20\frac{\text{V}}{\text{rad}}$ snimljene su prinudne oscilacije na ulazu u zazor amplitude $X_m = 0.097\text{rad}$ i frekvencije $\omega = 15\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Odredite amplitudu F_v narinutog signala koji je prouzročio prinudne oscilacije.



Slika 3: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.



Slika 4: Realni i imaginarni dio opisne funkcije zazora.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$
$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

a) *(3.5 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava $y = x_2$. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

I. Određivanje relativnog stupnja:

$$L_g L_f^0 h = L_g h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} g = 1 \Rightarrow r = 1$$

II. Transformacija stanja:

$$z_1 = \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_2$$

III. Definiranje novog ulaza:

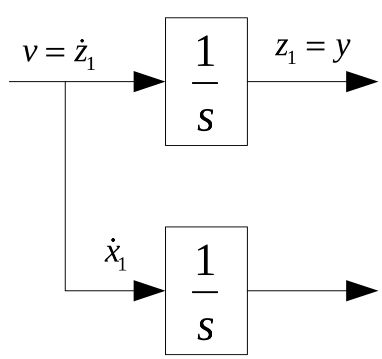
$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} f = \sin(x_1 - x_2) \\ \beta(x) &= L_g h = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{\beta(x)}\left[-\alpha(x) + v\right] = -\sin(x_1 - x_2) + v}$$

Novi sustav je oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Varijabla stanja x_2 koja nije transformirana je stabilna tako da će i ukupni sustav biti stabilan. Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 5.



Slika 5: Linearizirani sustav.

b) *(4.5 boda)* Linearizirajte sustav u u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state). Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

I. Formiranje skupa $\{\ g, \quad ad_f g\ \}$:

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ad_f g = \nabla g f - \nabla f g = \begin{bmatrix} \cos(x_1 - x_2) \\ -\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

II. Upravljivost:

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos(x_1 - x_2) \\ 1 & -\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

Rang je 2 (puni rang) što znači da je sustav upravljiv.
Za involutivnost potrebno je promatrati vektor g. S obzirom da je konstantan, sustav je involutivan.

III. Pronalaženje izlazne funkcije λ:

$$\nabla\lambda \cdot g = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \end{bmatrix} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla\lambda \cdot ad_f g \neq 0$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\cos(x_1 - x_2) - \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\cos(x_1 - x_2)\, g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \neq 0$$

Uzmemo

$$\boxed{\lambda = x_1}.$$

IV. Transformacija stanja:

$$z = \psi(x) = \begin{bmatrix} L_f^0\lambda \\ L_f\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

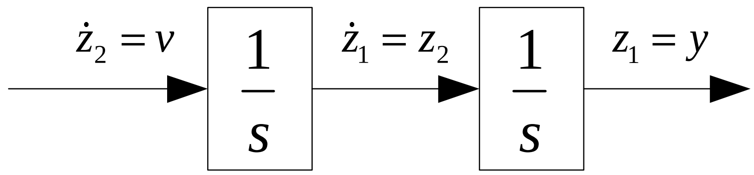
V. Definiranje novog ulaza:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f^2 h = \frac{\partial L_f\lambda}{\partial x} f = 2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) \\ \beta(x) &= L_g L_f \lambda = \cos(x_1 - x_2) \\ u &= \frac{1}{\beta(x)}\left[-\alpha(x) + v\right] = \frac{1}{\cos(x_1 - x_2)}\left[-2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) + v\right] \end{aligned}$$

Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 6 iz slijedi iz zapisa u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

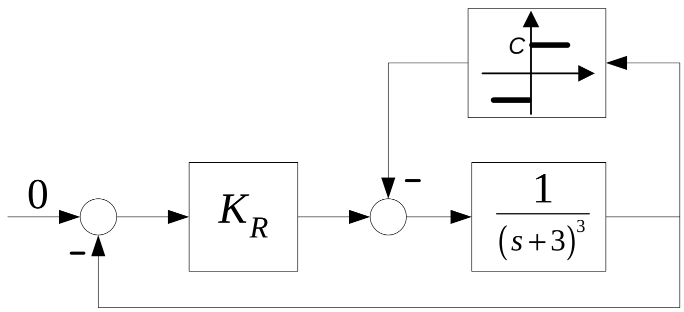
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



Slika 6: Linearizirani sustav.

Zadatak 2

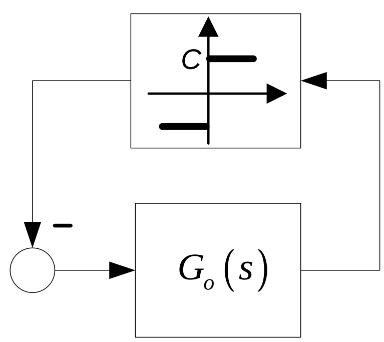
Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 7. Opisna funkcija nelinearnog elementa je dana s $G_N\left(X_m\right) = \frac{4C}{\pi X_m}$ a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi $K_R > 0$.



Slika 7: Nelinearni krug upravljanja.

a) *(4 boda)* Odredite područje iznosa regulatora K_R za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_R.

Potrebno je prikazati zatvoreni krug upravljanja kao što je na slici 8.



Slika 8: Nelinearni krug upravljanja.

Sada možemo jednostavno određivanjem gdje Nyquistova karakteristika siječe realnu os doći do uvjeta za vlastite oscilacije. Ovo ide uz činjenicu da negativni inverz opisne funkcije dvopoložajnog releja zauzima cijelu negativnu realnu poluos.

$$G_o\left(s\right) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 27s + 27 + K}$$

$$G_o\left(j\omega\right) = \frac{1}{27 + K_R - 9\omega^2 + j\left(27\omega - \omega^3\right)} = \frac{27 + K_R - 9\omega^2 - j\left(27\omega - \omega^3\right)}{\left(27 + K_R - 9\omega^2\right)^2 + \left(27\omega - \omega^3\right)^2}$$

$$\mathrm{Im} = 0 \Rightarrow 27 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 3\sqrt{3}$$
$$\mathrm{Re} = \frac{1}{27 + K_R - 243} < 0$$

$$K_R < 216$$

U zadatku je rečeno da je $K_R > 0$ stoga

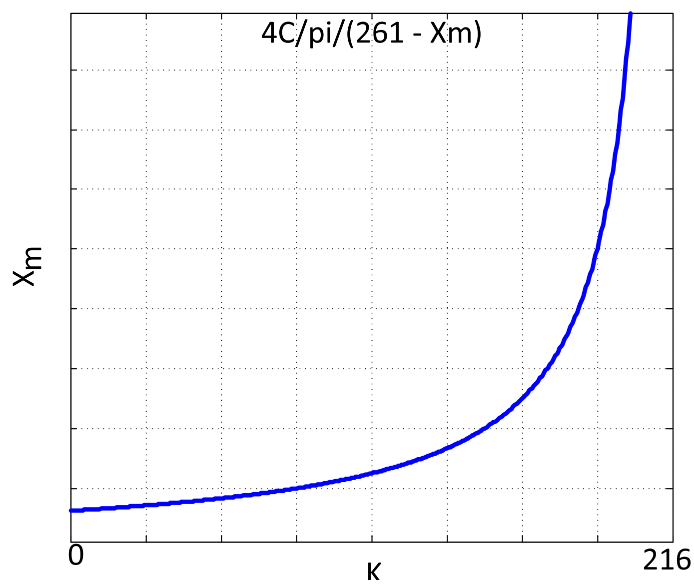
$$\boxed{0 < K_R < 216}$$

Iz ovoga slijedi:

$$-G_N^{-1} = G_o(\omega)$$

$$-\frac{\pi X_m}{4C} = \frac{1}{27 + K_R - 243}$$

$$\boxed{X_m = \frac{4C}{\pi} \frac{1}{216 - K_R}}$$



Slika 9: Ovisnost X_m o K_R.

b) *(2 boda)* Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

$$1 + G_N G_o = 0$$
$$\underbrace{27 + K_R - 9\omega^2 + G_N}_{R} + j\,\underbrace{\omega\left(27 - \omega^2\right)}_{I} = 0$$
$$\frac{\partial R}{\partial X_m}\frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

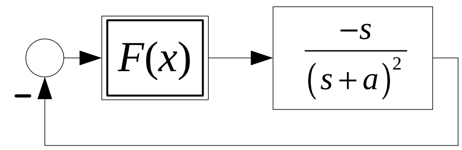
$$\frac{\partial R}{\partial X_m} = -\frac{4C}{\pi X_m^2}$$
$$\frac{\partial I}{\partial \omega} = 27 - 3\omega^2$$
$$\frac{\partial I}{\partial X_m} = 0$$

$$\boxed{\omega > 3}$$

U prethodnom podazadatku je pokazano da sve vlastite oscilacije imaju frekvenciju $\omega = 3\sqrt{3}$, što znači da su sve stabilne.

Zadatak 3

Nelinearan je sustav prikazan slikom 10. Korištenjem kriterija Popova, odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.



Slika 10: Nelinearni sustav upravljanja uz zadatak 3.

Odredimo imaginarni i realni dio procesa:

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega + a)^2} = \frac{-2a\omega^2 - j\omega\left(a^2 - \omega^2\right)}{\left(a^2 - \omega^2\right)^2 + (2a\omega)^2}$$

Realni dio:

$$U(\omega) = -\frac{2a\omega^2}{\left(a^2 - \omega^2\right)^2 + (2a\omega)^2}$$

Imaginarni dio:

$$V(\omega) = \frac{\omega\left(a^2 - \omega^2\right)}{\left(a^2 - \omega^2\right)^2 + (2a\omega)^2}$$

Sada treba nacrtati krivulju $U(\omega) + j\omega V(\omega)$:

$$\begin{aligned} \omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad U = 0, \omega V = 0 \\ \omega = \infty \quad &\Rightarrow \quad U = 0, \omega V = 1 \\ \omega V = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega = a, U = -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Krivulja Popova je prikazana slikom 11. Od tuda slijedi da nelinearni element mora biti klase $2a$, odnosno. S obzirom da za kriterij Popova svi polovi moraju biti u lijevoj poluravnini, tj. $a > 0$, slijedi

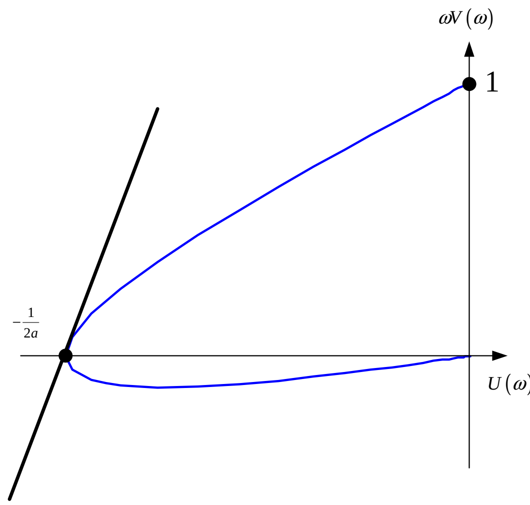
$$K \in (0, 2a).$$

Ako provjerimo što se događa kada je umjesto nelinearnog elementa proporcionalni regulator K, dobije se sljedeća karakteristična jednadžba linearnog zatvorenog kruga upravljanja:

$$s^2 + (2a - K)s + a^2 = 0$$

Hurwitzov uvjet stabilnosti kaže da je zatvoreni krug stabilan ako su članovi uz potencije od s istog predznaka, tj.:

$$K < 2a.$$

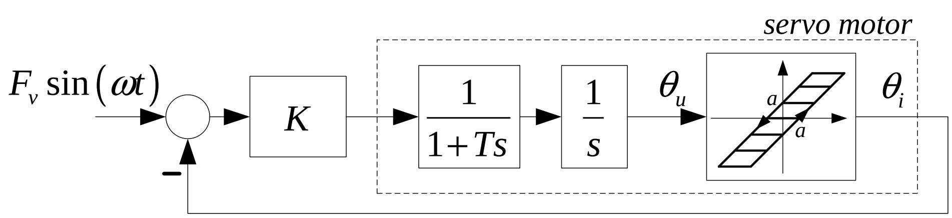


Slika 11: Krivulja Popova.

Zadatak 4

Slikom 12 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija prikazana slikom 4.

Uz parametre servo motora $T = 0.5\text{s}$ i $a = 0.05\text{rad}$, te proporcionalni regulator $K = 20\frac{\text{V}}{\text{rad}}$ snimljene su prinudne oscilacije na ulazu u zazor amplitude $X_m = 0.097\text{rad}$ i frekvencije $\omega = 15\frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Odredite amplitudu F_v narinutog signala koji je prouzročio prinudne oscilacije.

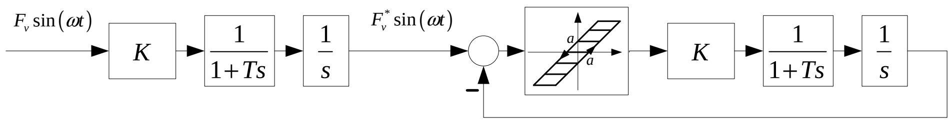


Slika 12: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.

Iz slike i poznati podatak da je amplituda prinudnih oscilacija $X_m = 0.097\text{rad}$ možemo očitati da je $P_N = 0.4803$ i $Q_N = -0.318$. Jednadžba

$$X_m \left[1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}(P_N + jQ_N)\right] = F_v e^{-j\varphi}$$

vrijedi ukoliko se zatvoreni krug sastoji od nelinearnog elementa i linearnog dijela. Budući da u ovom zadatku to nije slučaj, potrebno je prebaciti linearne blokove tako da se dobije shema na slici 13.



Slika 13: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.

Sada vrijedi jednadžba

$$X_m \left[1 + \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}(P_N + jQ_N)\right] = F_v^* e^{-j\varphi}$$

iz koje se može odrediti da je

$$F_v^* = 0.0882.$$

Vrijedi

$$F_v^* = F_v \left|G_o\right| = F_v \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \frac{1}{\omega} = 0.1761$$

iz čega slijedi

$$\boxed{F_v = 0.5}$$