Završni ispit

12. lipnja 2012.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ vektor stanja, u ulaz i y izlaz sustava.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sin x_2 + (x_1 + 1)\, x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = x_1$$

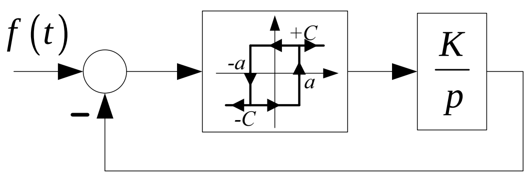
a) *(2 boda)* Odredite relativan stupanj zadanog sustava.

b) *(4 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem zadanog izlaza y, uz pretpostavku da je relativan stupanj jednak redu sustava.

2. zadatak (5 bodova)

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 5 gdje je $K = 1$, $C = 1$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$ ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude $X_m = \sqrt{3}$ i frekvencije $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$.

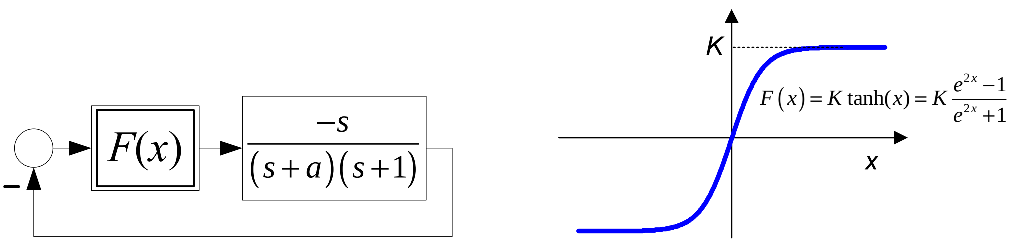
Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j\frac{4Ca}{\pi X_m^2}$.



Slika 1: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

3. zadatak (7 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 6(a) gdje je nelinearni element $F(x)$ prikazan slikom 6(b).



(a) (b)

Slika 2: (a) Nelinearan sustav upravljanja i (b) nelinearni element $F(x) = K \tanh x$.

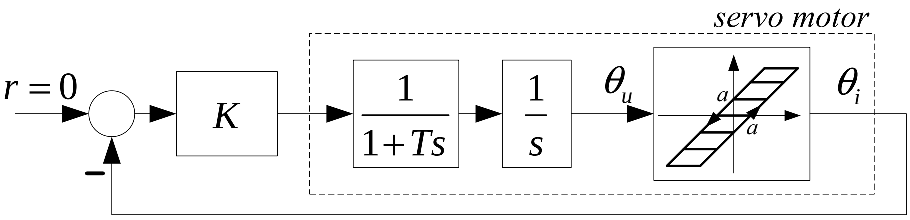
a) *(1 bod)* U kojim granicama mora biti parametar procesa a da bi se mogao primijeniti kriterij Popova?

b) *(6 bodova)* Korištenjem kriterija Popova odredite raspon iznosa parametra K nelinearnog elementa sa slike 6(b) za koji će zatvoreni krug upravljanja sa slike 6(a) biti apsolutno stabilan.

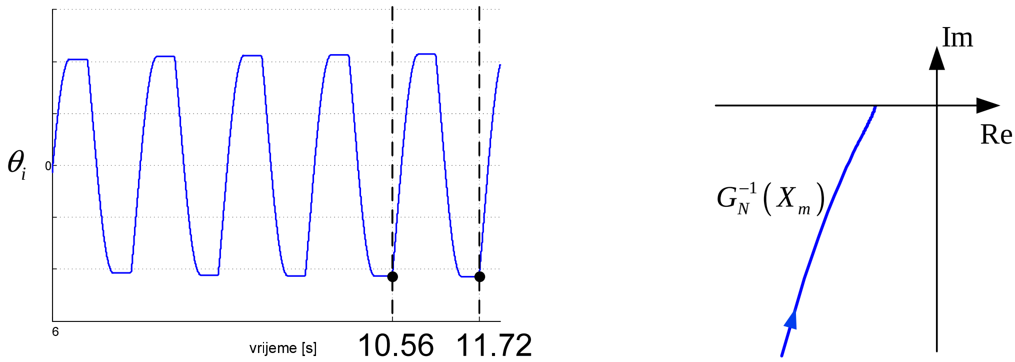
4. zadatak (8 bodova)

Slikom 8 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija

$$G_N(X_m) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2a}{X_m} - 1\right) - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right)^2}\right] + j\frac{4a}{\pi X_m}\left(\frac{a}{X_m} - 1\right).$$



Slika 3: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.



(a) (b)

Slika 4: (a) Izlazni signal iz zazora, θ_i i (b) negativna inverzna opisna funkcija zazora, $-G_N^{-1}(X_m)$.

a) *(4 boda)* Uz parametre servo motora $T = 0.5\text{s}$ i $a = 0.05\text{rad}$, te proporcionalni regulator $K = 20\frac{\text{V}}{\text{rad}}$ snimljene su oscilacije na izlazu iz zazora koje su prikazane slikom 9(a). Odredite amplitudu vlastitih oscilacija na ulazu u zazor, $\theta_u = X_m \sin(\omega t)$. Ukoliko postoji više rješenja, ne treba raditi analizu stabilnosti vlastitih oscilacija već samo navesti sva rješenja.

b) *(4 boda)* Korištenjem pricipa Goldfarba te grafičkog prikaza $-G_N^{-1}(X_m)$ na slici 9(b) pokažite da ako vrijedi $K \cdot T < 1$ (uz $K > 0$ i $T > 0$) nikada ne može doći do vlastitih oscilacija u zatvorenom krugu upravljanja prikazanom slikom 8.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja, u ulaz i y izlaz sustava.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\dot{x}} &= \begin{bmatrix} \sin x_2 + (x_1+1)\, x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\
y &= x_1
\end{aligned}
$$

a) *(2 boda)* Odredite relativan stupanj zadanog sustava.

$$
\begin{aligned}
L_g L_f^0 h &= L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} g = 0 \\
L_g L_f h &= L_g \left[\frac{\partial h}{\partial x} f \right] = L_g \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} f \right] = L_g \left[\sin x_2 + (x_1+1)\, x_2 \right] = \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin x_2 + (x_1+1)\, x_2 \right] \right\} g = \begin{bmatrix} 2x_2 & \cos x_2 + x_1 + 1 \end{bmatrix} g = \\
&= \cos x_2 + x_1 + 1
\end{aligned}
$$

Dakle, relativan stupanj $r = 2$ uz $\cos x_2 + x_1 + 1 \neq 0$.

b) *(4 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem zadanog izlaza y, uz pretpostavku da je relativan stupanj jednak redu sustava.

Transformacija r stanja:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_1 \\
z_2 &= \varphi_2(x) = L_f h = \sin x_2 + (x_1+1)\, x_2
\end{aligned}
$$

Sada je potrbno definirati novi ulaz kako bi se linearizirao sustav:

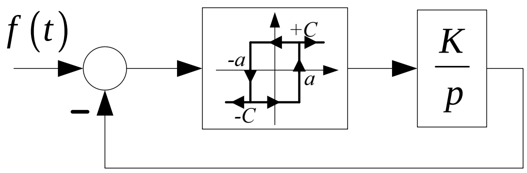
$$
\begin{aligned}
\alpha(x) &= L_f^2 h = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f = \begin{bmatrix} x_2 & \cos x_2 + x_1 + 1 \end{bmatrix} f = \\
&= x_2 \left[\sin x_2 + (x_1+1)\, x_2 \right] + x_1^2 (\cos x_2 + x_1 + 1) \\
\beta(x) &= L_g L_f h = \cos x_2 + x_1 + 1
\end{aligned}
$$

uz $u = \frac{1}{\beta(x)} \left[-\alpha(x) + v \right]$ gdje je v novi ulaz u sustav.

Zadatak 2

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 5 gdje je $K = 1$, $C = 1$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$ ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude $X_m = \sqrt{3}$ i frekvencije $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$.

Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j\frac{4Ca}{\pi X_m^2}$.



Slika 5: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

S obzirom da su prinudne oscilacije frekvencije $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$, onda je i pobudni signal iste frekvencije, tj.

$$\omega_v = 1 \frac{\text{rad}}{s}.$$

Jednadžba koja vrijedi za prinudne oscilacije je:

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}.$$

U zadanom slučaju vrijedi:

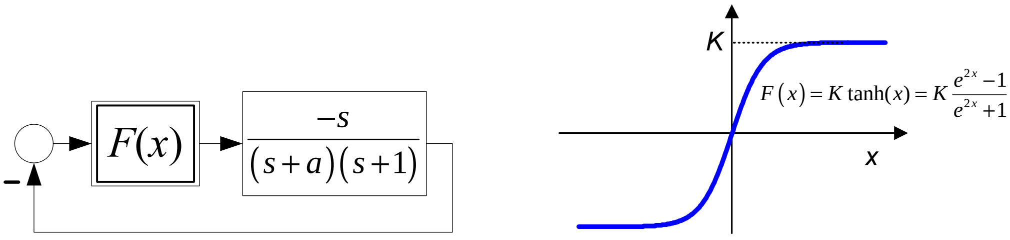
$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= j\omega \\
B(j\omega) &= K \\
Q(X_m) &= -\frac{4Ca}{\pi X_m^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} = -0.3676 \\
P(X_m) &= \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2} = \frac{2}{\pi} = 0.6366
\end{aligned}$$

Nadalje

$$F_v = |Z_m| = X_m\sqrt{\left(1+\frac{KQ}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{KP}{\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{\left(\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = 1.5543$$

Zadatak 3

Nelinearan je sustav prikazan slikom 6(a) gdje je nelinearni element $F(x)$ prikazan slikom 6(b).



(a) (b)

Slika 6: (a) Nelinearan sustav upravljanja i (b) nelinearni element $F(x) = K \tanh x$.

a) *(1 bod)* U kojim granicama mora biti parametar procesa a da bi se mogao primijeniti kriterij Popova?

Jedan od kriterija za primjenu kriterija Popova jest da polovi procesa moraju biti u lijevoj poluravnini ili u ishodištu. Dakle,

$$a \geq 0.$$

b) *(6 bodova)* Korištenjem kriterija Popova odredite raspon iznosa parametra K nelinearnog elementa sa slike 6(b) za koji će zatvoreni krug upravljanja sa slike 6(a) biti apsolutno stabilan.

Frekvencijska karakteristika procesa je:

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega + a)(j\omega + 1)} = \frac{-\omega^2 (a+1) - j\omega \left(a - \omega^2\right)}{\left(a - \omega^2\right)^2 + \omega^2 (a+1)^2}$$

Za kriterij Popova su nam potrebni

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{-\omega^2 (a+1)}{\left(a - \omega^2\right)^2 + \omega^2 (a+1)^2} \\ \omega V(\omega) &= \frac{-\omega^2 \left(a - \omega^2\right)}{\left(a - \omega^2\right)^2 + \omega^2 (a+1)^2} \end{aligned}$$

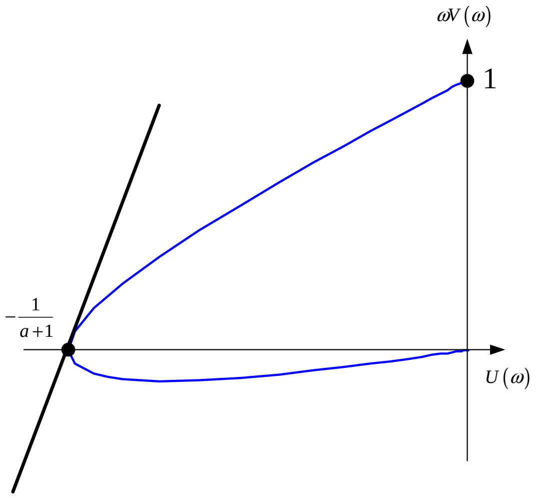
Sada treba nacrtati krivulju $U(\omega) + j\omega V(\omega)$.

$$\begin{aligned} \omega = 0 &\Rightarrow U = 0, \omega V = 0 \\ \omega = \infty &\Rightarrow U = 0, \omega V = -1 \\ \omega V = 0 &\Rightarrow \omega = \sqrt{a}, U = -\frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

Krivulja Popova je prikazana slikom 7. Od tuda slijedi da nelinearni element mora biti klase $a + 1$.

Za nelinearni element koji je prikazan slikom lako je odrediti klasu – samo se nađe nagib tangente u ishodištu: $\frac{d}{dx} \left[K \tanh(x)\right]\Big|_{x=0} = K$. Zaključak je da mora vrijediti

$$K \in (0, a+1)$$

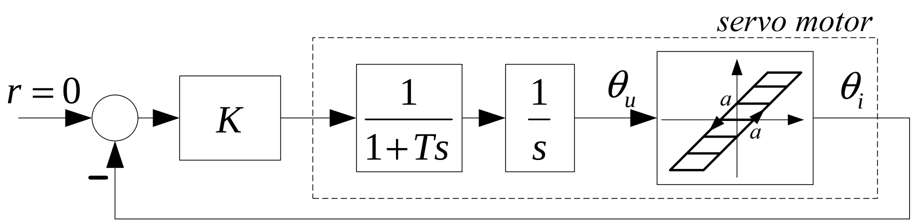


Slika 7: Krivulja Popova.

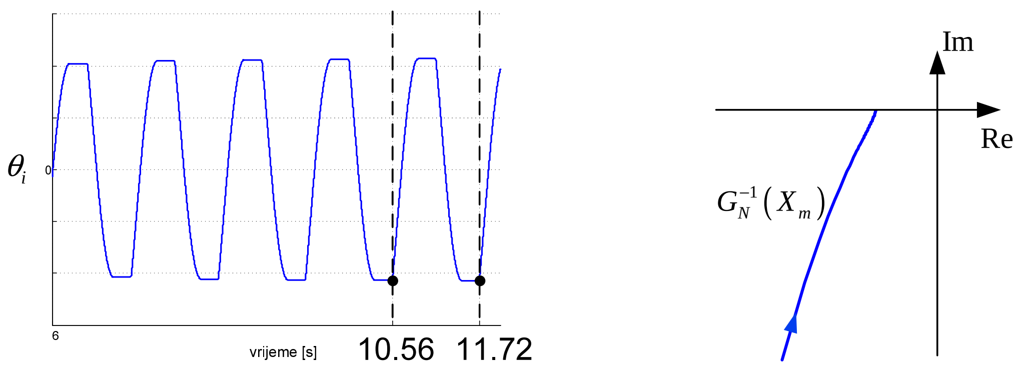
Zadatak 4

Slikom 8 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija

$$G_N(X_m) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2a}{X_m} - 1\right) - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right)\sqrt{1 - \left(\frac{2a}{X_m} - 1\right)^2}\right] + j\frac{4a}{\pi X_m}\left(\frac{a}{X_m} - 1\right).$$



Slika 8: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.



(a) (b)

Slika 9: (a) Izlazni signal iz zazora, θ_i i (b) negativna inverzna opisna funkcija zazora, $-G_N^{-1}(X_m)$.

a) *(4 boda)* Uz parametre servo motora $T = 0.5$s i $a = 0.05$rad, te proporcionalni regulator $K = 20\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{rad}}$ snimljene su oscilacije na izlazu iz zazora koje su prikazane slikom 9(a). Odredite amplitudu vlastitih oscilacija na ulazu u zazor, $\theta_u = X_m \sin(\omega t)$. Ukoliko postoji više rješenja, ne treba raditi analizu stabilnosti vlastitih oscilacija već samo navesti sva rješenja.

Iz izlaznog signala zazora se može očitati frekvencija oscilacija koja je jednaka frekvenciji vlastitih oscilacija:

$$\omega = \frac{2\pi}{11.72 - 10.56} = 5.4165$$

Za daljnji račun se možemo poslužiti Goldfarbovim principom zapisanim u obliku: $G_N = -G_P^{-1}$. Na taj način izbjegavamo traženje recipročne vrijednosti komplicirane opisne funkcije zazora.

$$G_P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + jT\omega)} \Rightarrow -G_P^{-1}(j\omega) = \frac{T\omega^2}{K} - j\frac{\omega}{K}$$

S obzirom da je imaginarni dio opisne funkcije zazora jednostavnijeg oblika, dovoljno je izjednačiti imaginarne dijelove:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left\{-G_P^{-1}\right\} &= \mathrm{Im}\left\{G_N\right\} \\ \frac{4a}{\pi X_m}\left(\frac{a}{X_m} - 1\right) &= -\frac{\omega}{K} \end{aligned}$$

$$\frac{\omega}{K}X_m^2 - \frac{4a}{\pi}X_m + \frac{4a^2}{\pi} = 0$$

$$X_m = \frac{2Ka}{\pi\omega}\left[1 \pm \sqrt{1 - \pi\frac{\omega}{K}}\right] = 0.1176\,(1 \pm 0.3862)$$

Odavde se dobiju dva rješenja: $\boxed{X_{m,1} = 0.163}$ i $\boxed{X_{m,2} = 0.0722}$

Ako se sada izjednače realni dijelovi u Goldfarbovoj jednadžbi, dobije se da je jednakost ispunjena za $X_{m,1} = 0.163$ što upućuje na ispravno rješenje.

b) *(4 boda)* Korištenjem pricipa Goldfarba te grafičkog prikaza $-G_N^{-1}(X_m)$ na slici 9(b) pokažite da ako vrijedi $K \cdot T < 1$ (uz $K > 0$ i $T > 0$) nikada ne može doći do vlastitih oscilacija u zatvorenom krugu upravljanja prikazanom slikom 8.

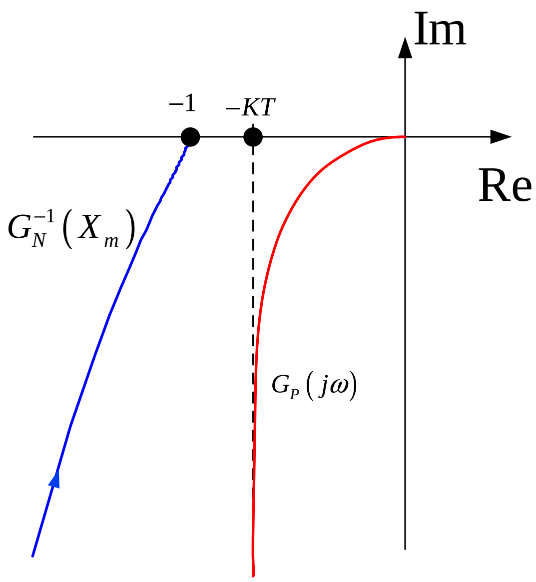
Za rješavanje ovog zadatka ćemo iskoristiti sliku negativnog inverza opisne funkcije zazora. Ekstremne vrijednosti opsine funkcije su:

$$\begin{aligned} X_m = a \quad &\Rightarrow \quad G_N = 0 + j0 \\ &\qquad -G_N^{-1} = \infty \\ X_m = \infty \quad &\Rightarrow \quad G_N = 1 + j0 \\ &\qquad -G_N^{-1} = -1 \end{aligned}$$

Odredimo sada Nyquistov dijagram procesa:

$$G_P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + jT\omega)} = \frac{-KT}{(T\omega)^2 + 1} - j\frac{K}{\omega}\frac{1}{(T\omega)^2 + 1}$$

$$\begin{aligned} \omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Im} = \infty, \mathrm{Re} = -KT \\ \omega = \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Im} = 0, \mathrm{Re} = 0 \end{aligned}$$



Slika 10: Krivulja Popova.

Kada se obje krivunje nacrtaju jedna pokraj druge dobije se slika 10 iz koje je očigledno da uz $KT < 1$ sigurno nikada neće doći do presijecanja dvije krivulje, tj. nikada neće doći do vlastitih oscilacija.