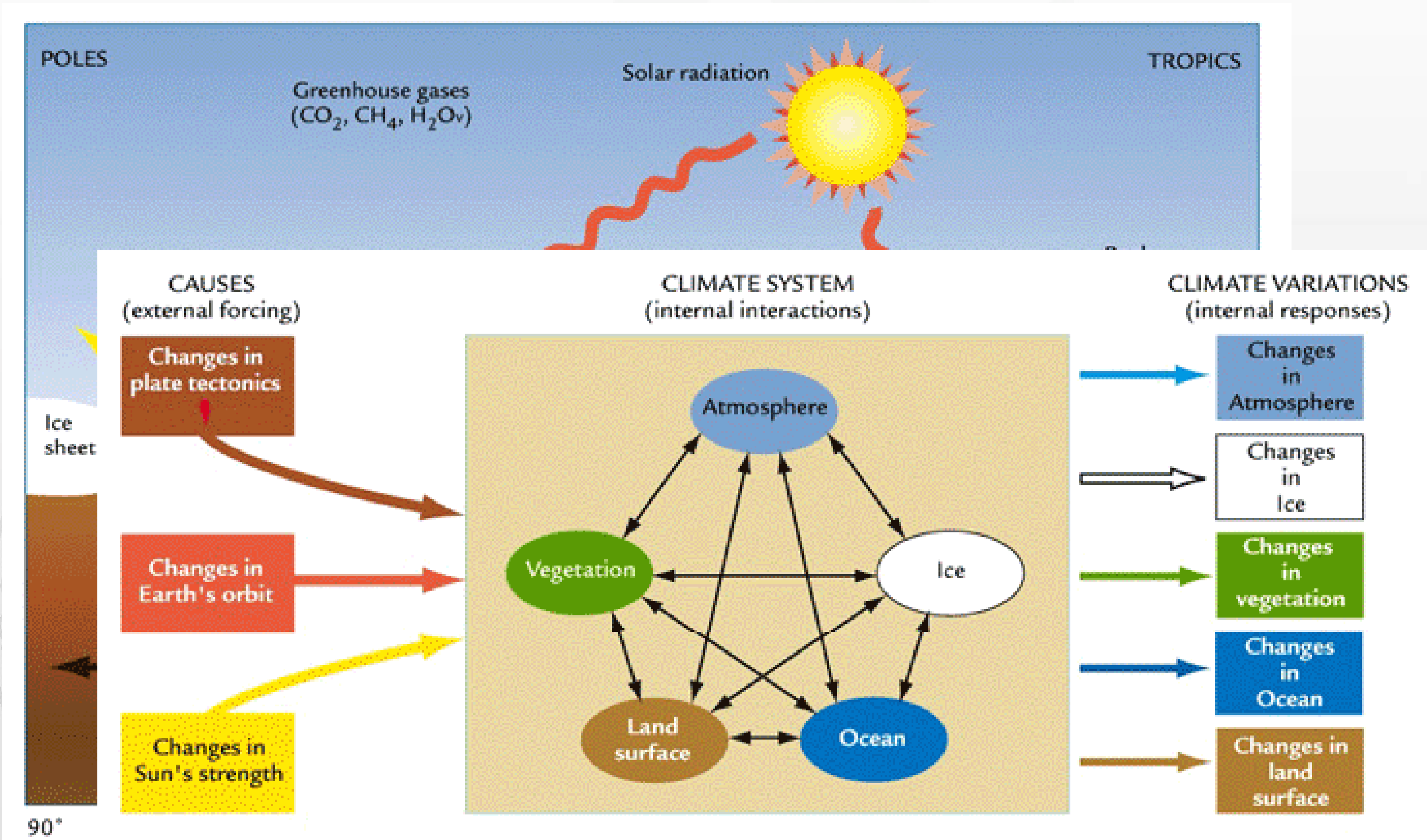
Nelinearni sustavi upravljanja

Kaos

Prof.dr.sc. Zoran Vukić

Tel: 01/6129 840, Fax:01/6129 809,
E-mail:zoran.vukic@fer.hr

Klimatski sustav Zemlje

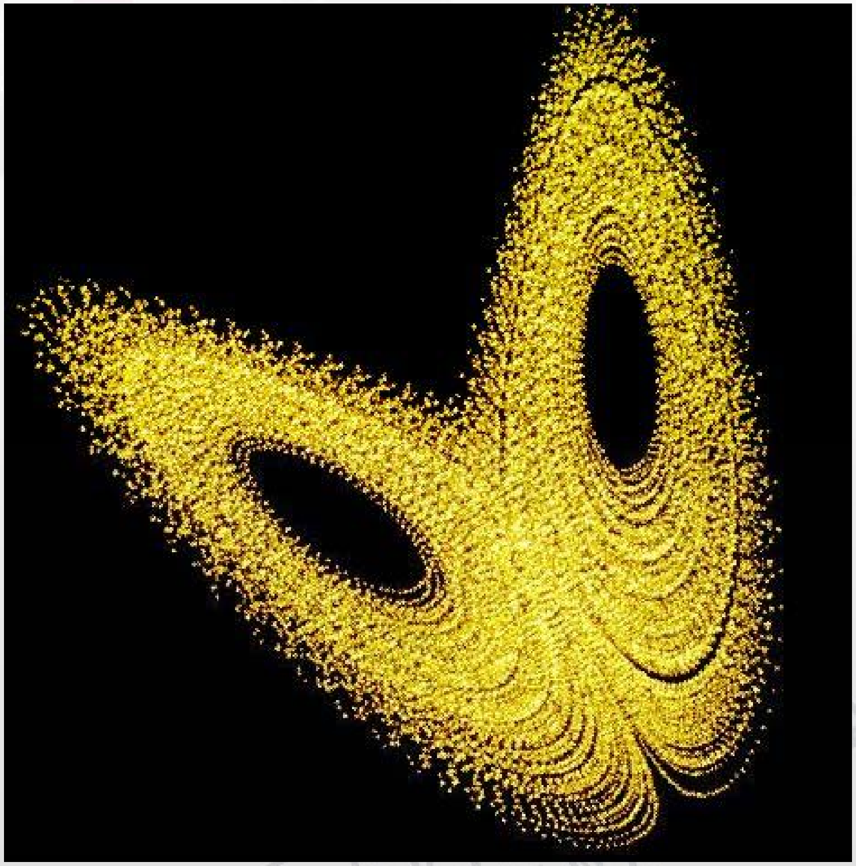


Edward N. Lorenz (1917 – 2008)

- Profesor meteorologije na Massachusetts Institute of Technology (MIT)
- Predložio trodimenzionalni sustav (nazvane po njemu Lorenzove jednadžbe) u nastojanju da modelira dugoročne vremenske prognoze (za 5 dana unaprijed)
- Klimatski sustav je složen! Pojednostavnjenje je nužno!

Klimatski sustav

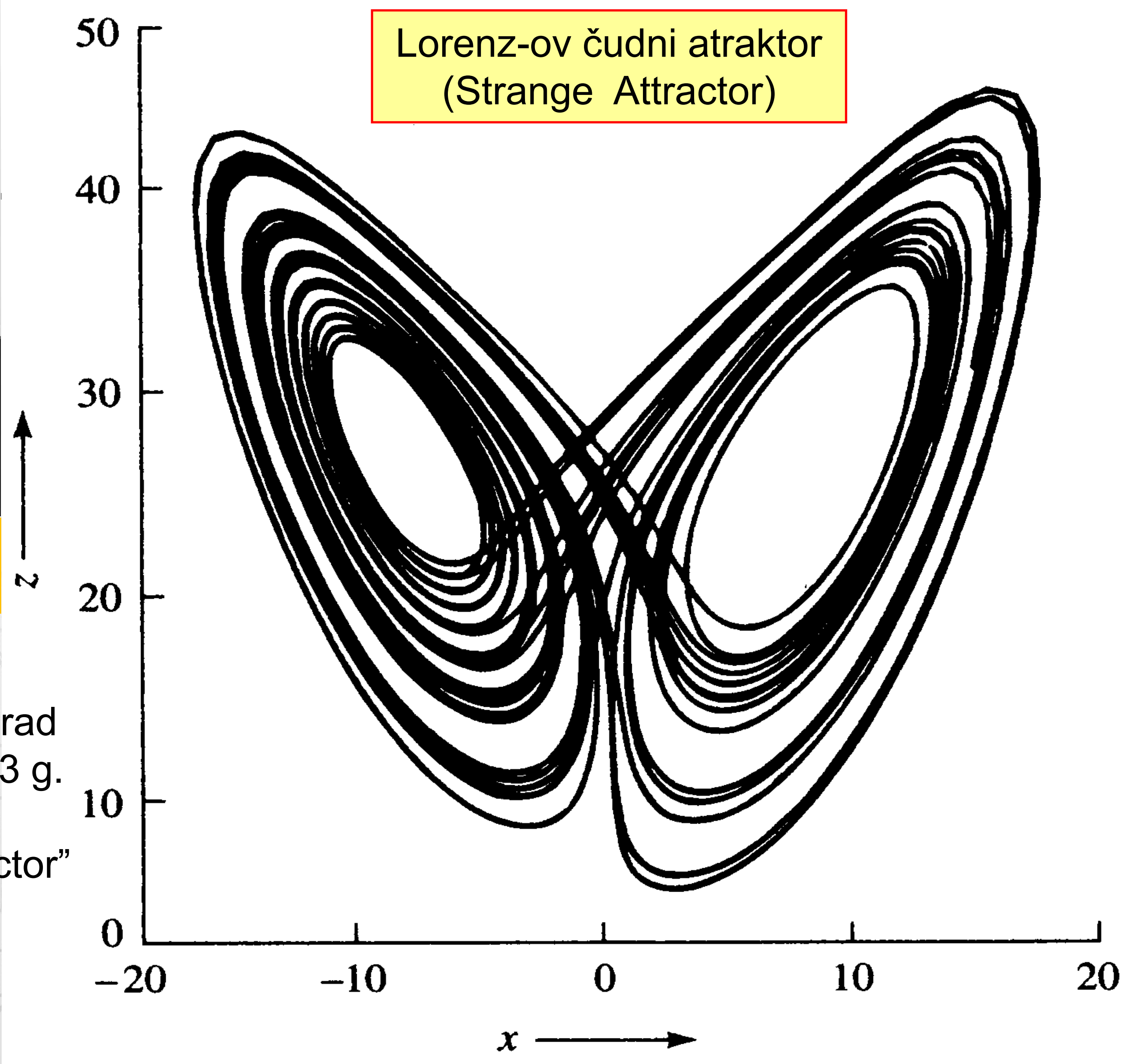
- Klimatski sustav je nelinearan s mnogo međusobno djelujućih varijabli
- 1961 g. Lorenz prvi uočio čudno ponašanje skupa nelinearnih jednadžbi koje su opisivale temperaturni gradijent atmosfere
- Osjetljiivost na početne uvjete



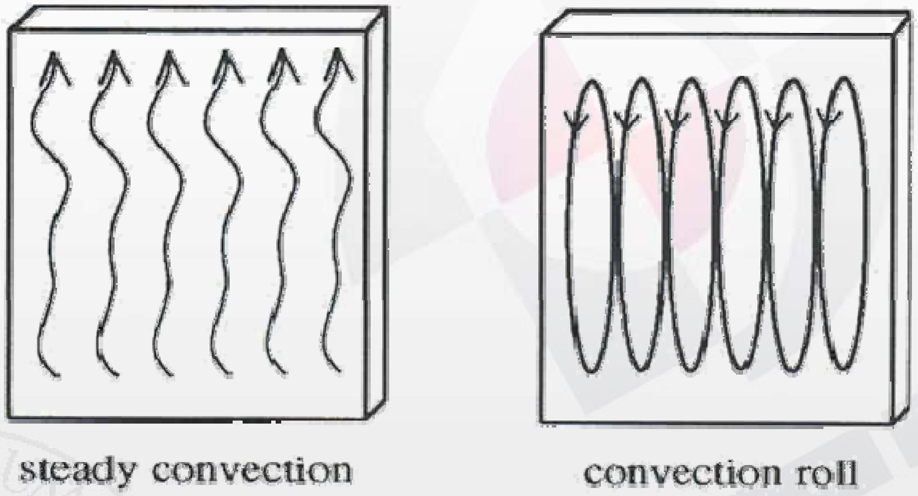
Edward N. Lorenz
23.05.1917 – 16.04.2008

Lorenzov atraktor otkriven je 1961 g. a rad o tome objavljen 1963 g.

Pojam “strange attractor” uveo je David Ruelle 1971 g.



Lorenzove jednadžbe



D. Gulick, *Encounters with Chaos*, Mc-Graw Hill, Inc., New York, 1992.

- **Rayleigh-Bernard konvekcija fluidnog sloja koji se zagrijava odozdo.**
- **Konvekcija se događa na turbulentan način kada je gradijent temperature po dubini fluida dovoljno strm.**

Lorenz-ov atraktor

Radi se o sustavu u kojemu je prvi puta otkriven kaos u kontekstu disipativnog dinamičkog sustava. Jednadžbe aproksimiraju vremensku promjenu temperature zraka koja se odigrava u zamišljenoj kocki atmosfere koja se zagrijava odozdo a hladi odozgo. Lorenz je postavio skup nelinearnih jednadžbi kojima je opisao ovaj proces sa:

$dx/dt = \sigma(y - x)$; $\sigma > 0$ (*σ je omjer viskoznosti i temperaturne vodljivosti*)

$dy/dt = x(\rho - z) - y$; $\rho > 0$ (*ρ označava temperaturnu razliku između gornjeg i donjeg sloja atmosfere i zove se Prindl-ov broj*)

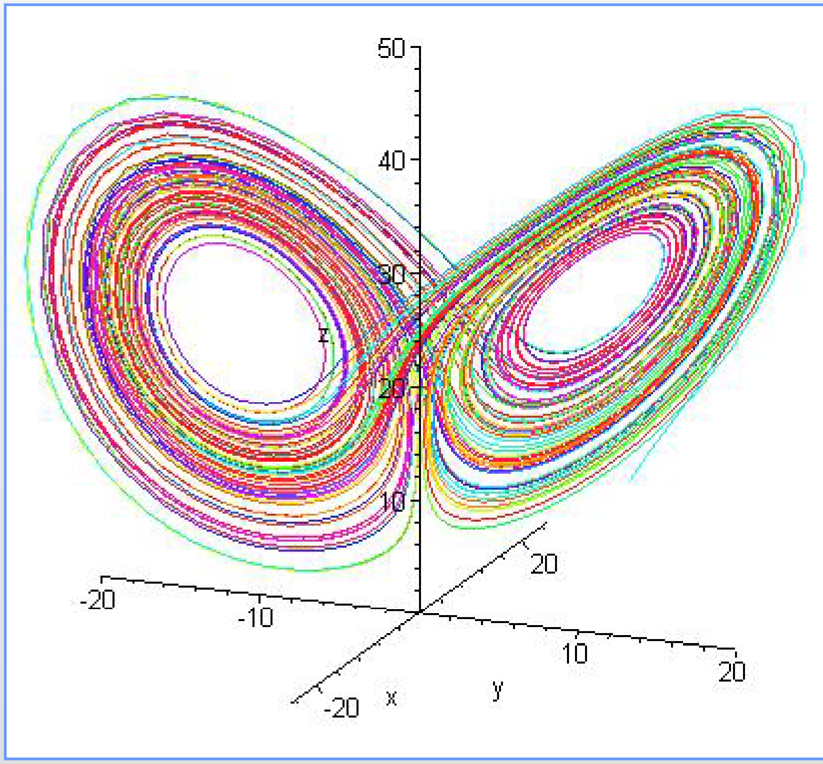
$dz/dt = xy - \beta z$; $\beta > 0$ (*β predstavlja omjer širine i visine atmosferskog sloja (kocke) i zove se Rayleigh-ov broj*)

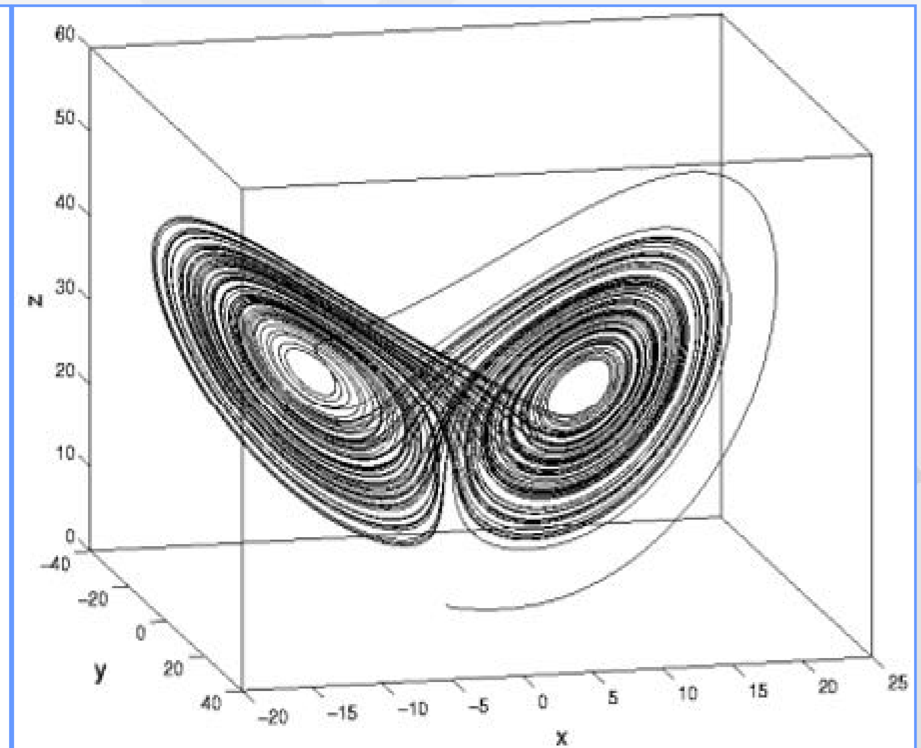
gdje:

- $x(t)$ označava konvekcijski tok,
- $y(t)$ horizontalnu raspodjelu temperature dok
- $z(t)$ opisuje vertikalnu raspodjelu temperature (temperaturni gradijent).

Atraktor

Atraktor je skup kojemu sve susjedne trajektorije konvergiraju ako su unutar određene udaljenosti od atraktora.





Lorenzove jednadžbe

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

- σ, ρ i β **su pozitivne konstante.**
- x **,** y **, i** z **su vezane za fizikalna svojstva fluida.**
- **Lorenz je odabrao** $\sigma = 10$ **,** $\rho = 28$ **i** $\beta = \dfrac{8}{3}$ **.**

Lorenzove jednadžbe

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases}$$

- **Dvije nelinearnosti (množenja)**
- **Rješenja su simetrična**

$$\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \big(-x(t), -y(t), z(t)\big)$$

Lorenz-ov sustav diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z + xy$$

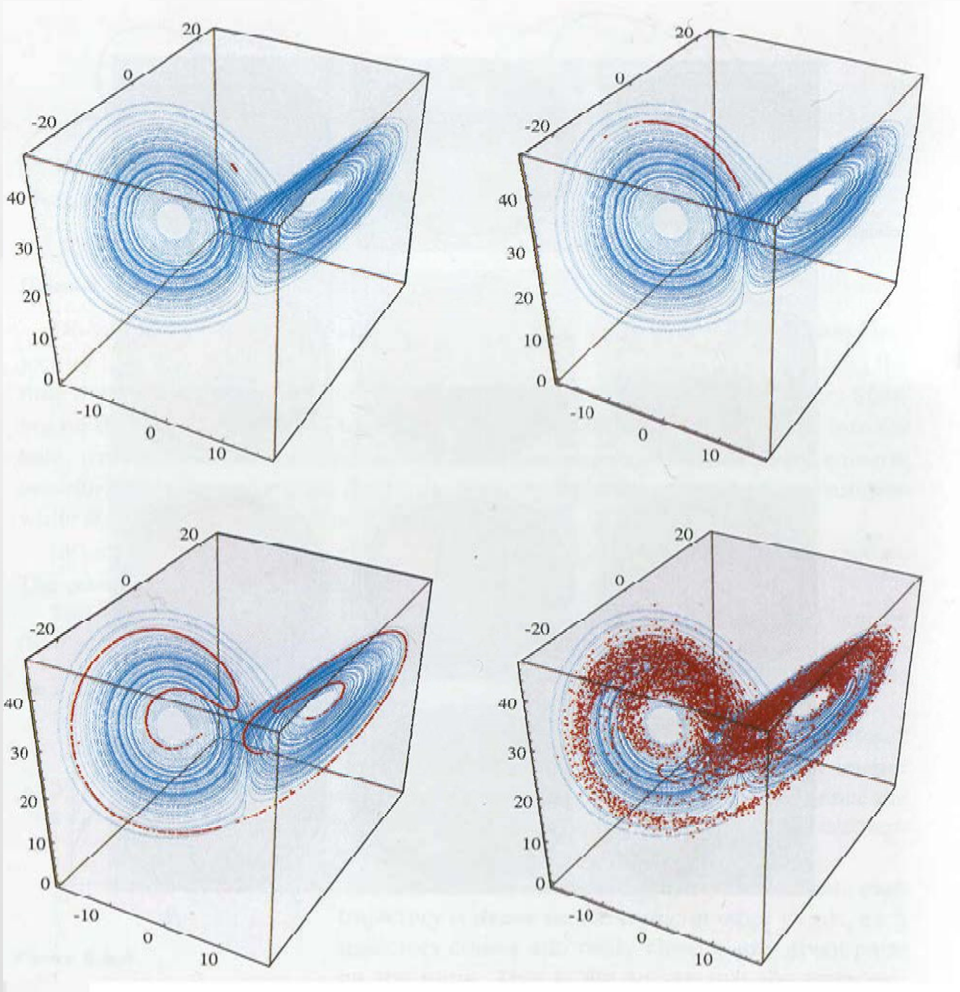
- Ravnotežna točka je u ishodištu

$$\vec{x}_0 = (0,0,0)$$

- Lorenz-ov sustav je <u>skoro linearan </u>u okolišu te ravnotežne točke.

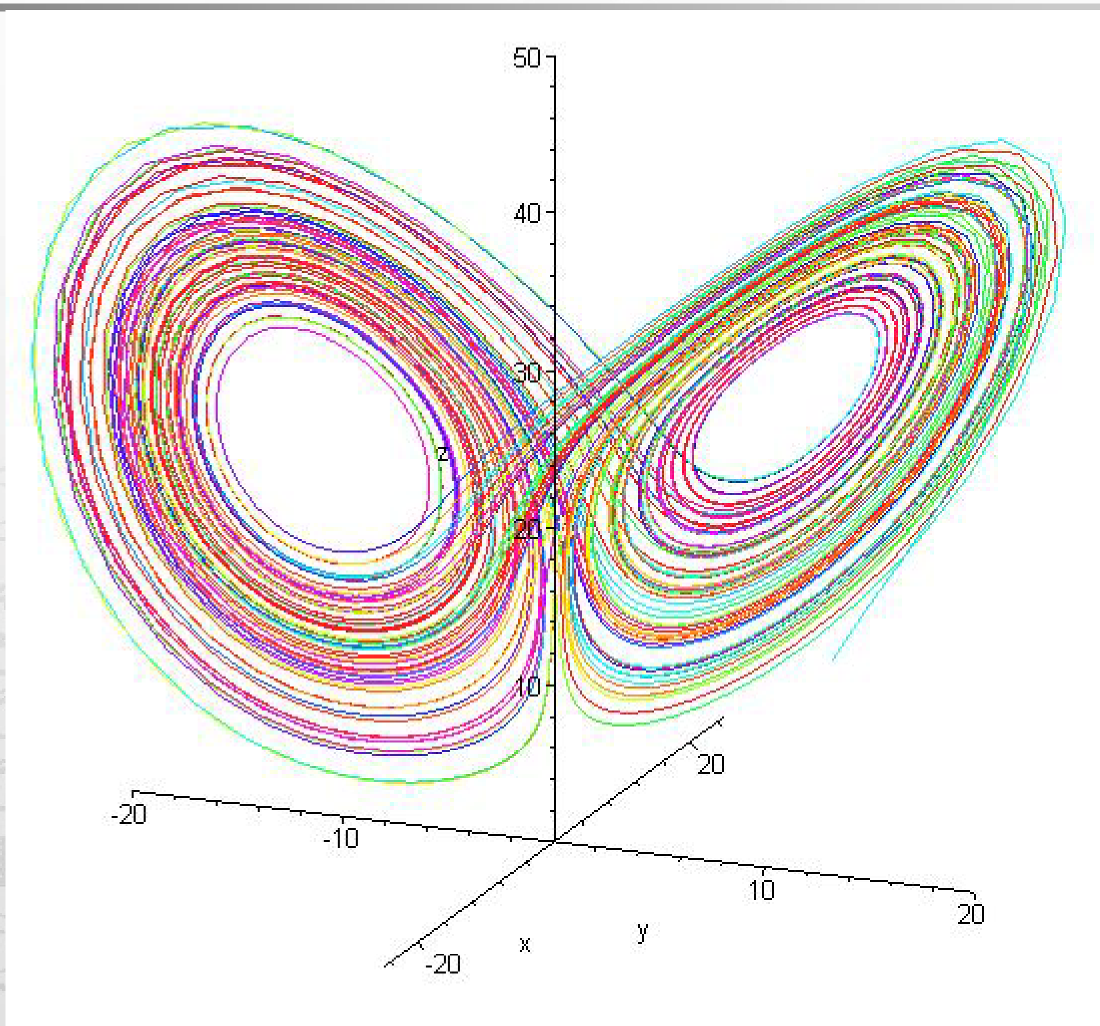
Osjetljivost na početne uvjete

- **10,000 skoro identičnih početnih uvjeta**
- **Krajnja točka trajektorije, za bilo koji izbor iz 10,000 početnih uvjeta može završiti bilo gdje.**
- **Trajektorije se okupljaju oko atraktora ne završavajući u vlastitim oscilacijama.**



S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1994.

Lorenz-ov atraktor



Da li postoje rješenja?

$$\frac{dx}{dt} = -10x + 10y$$

$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy$$

- **Odrediti analitička rješenja je vrlo zahtjevan zadatak; koriste se numeričke metode integracije – npr. Eulerova metoda.**
- **Trajektorije s početnih uvjeta mogu se odrediti iz vektorskog polja koje započinje na početnim uvjetima.**

Analitička rješenja

- **Jedina rješenja koja je moguće analitički dobiti su ona za:**
  - **Ravnotežne točke**
  - **Koja imaju početne uvjete na z-osi.**

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -10x + 10y \\ \frac{dy}{dt} &= 28x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{8}{3}z + xy \end{aligned}}$$

- Kada $x(0) = y(0) = 0$ **i kada su početni uvjeti** $(0, 0, z_0)$ **diferencijalne jednadžbe se pojednostavljuju na:**

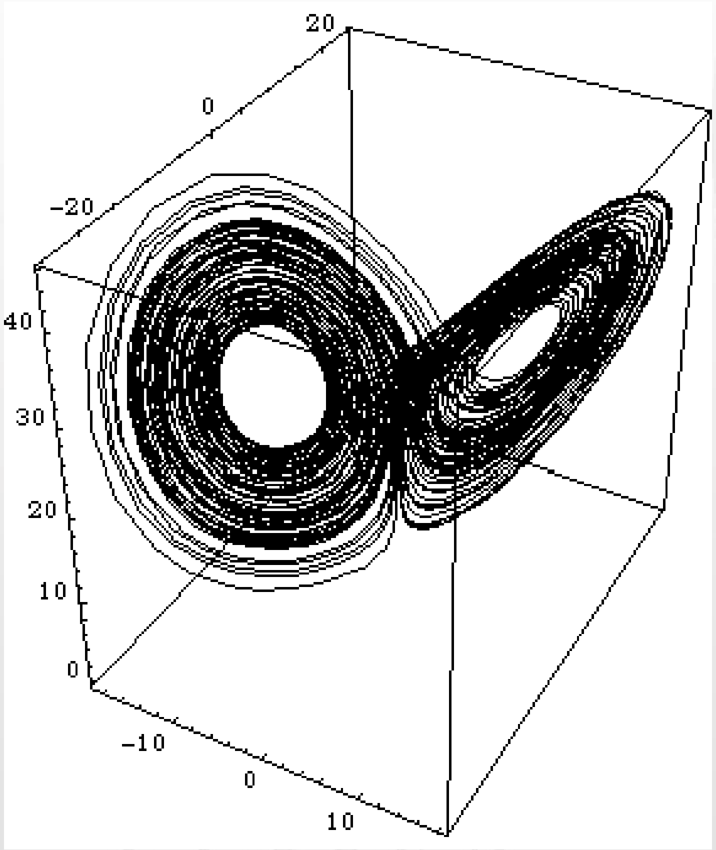
$$\boxed{\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z(t)}$$

Za koju je rješenje dano sa:

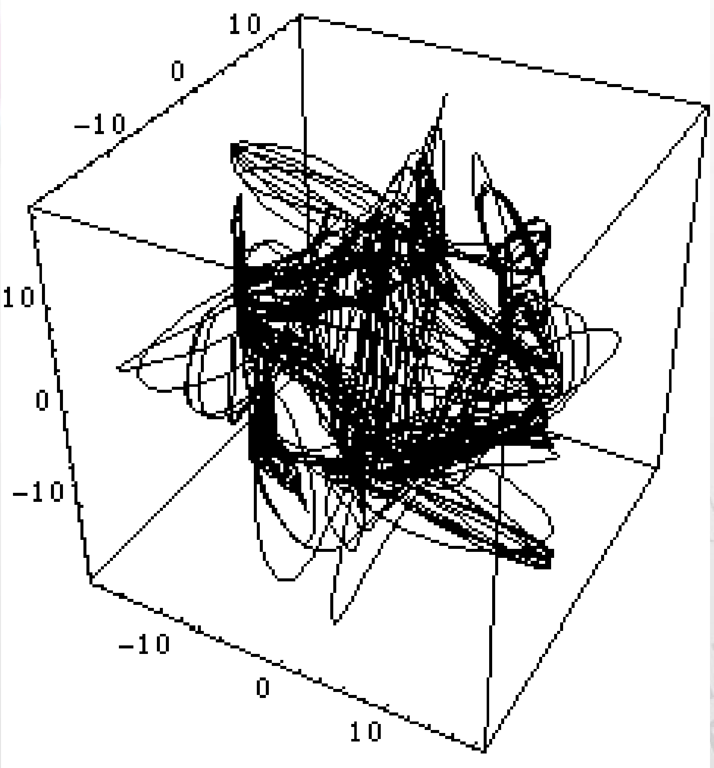
$$\boxed{z(t) = z_0 e^{-\frac{8}{3}t}}$$

Prikaz rješenja s kašnjenjem

$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 28$:



Prikaz u {x,y,z} prostoru



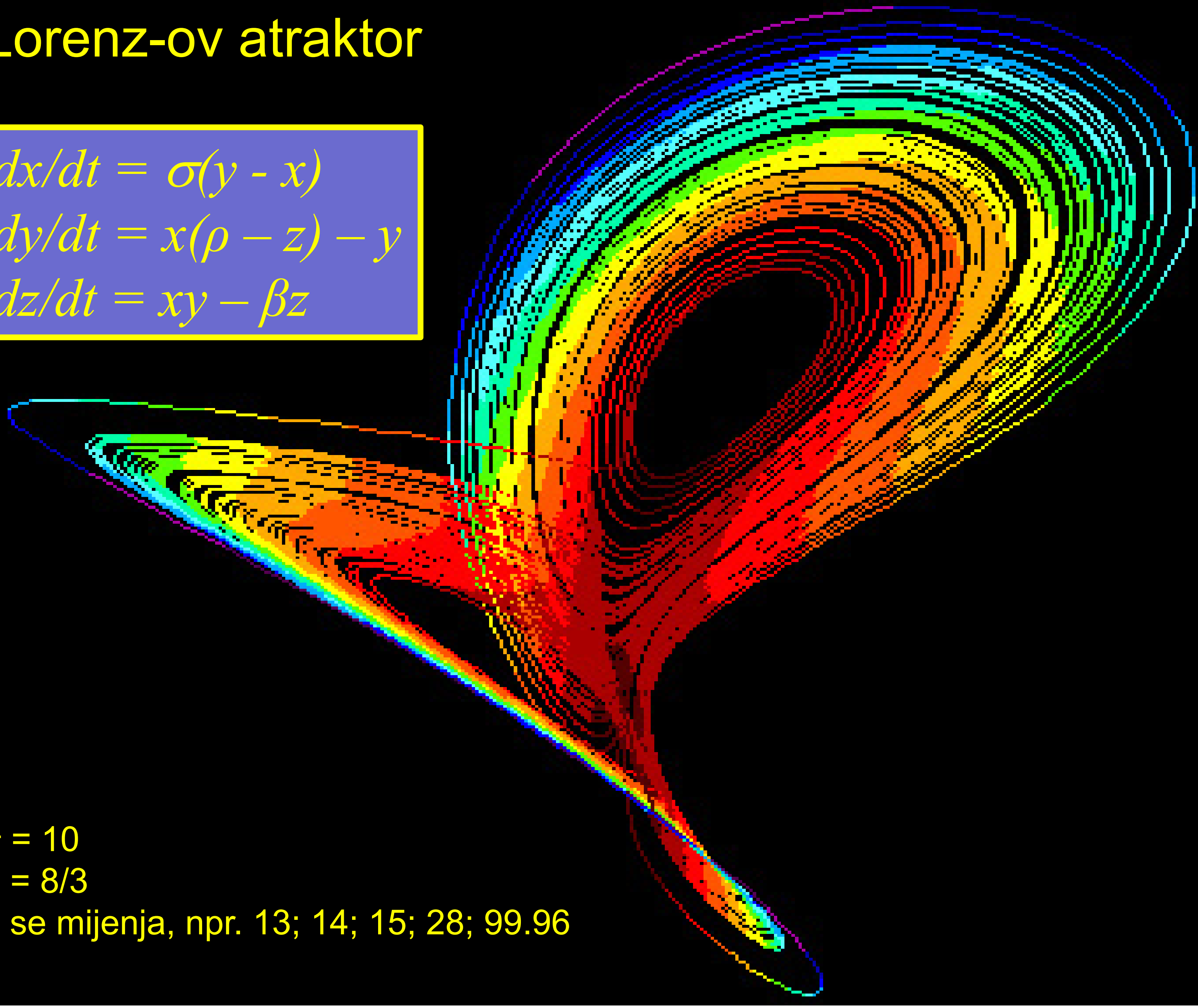
Prikaz od {x(t), x(t+1), x(t+2)}

Lorenz-ov atraktor

- Ako je parametar, β, dovoljno velik, Lorenzov sustav kaotično će se ponašati i biti osjetljiv na početne uvjete. Otuda Lorenzovo uvjerenje da je vrijeme inherentno dugoročno nepredvidivo.
- Tipična kaotična trajektorija ima $\beta = 8/3$. Koordinatne osi, na slikama koje slijede predstavljaju tri varijable stanja x, y i z. One na slikama nisu prikazane kako bi se dobio zorniji prikaz. Boje prikazuju promjene u brzini gibanja točke na trajektoriji, gdje crvena boja pokazuje najsporije, a ljubičasta najbrže gibanje.

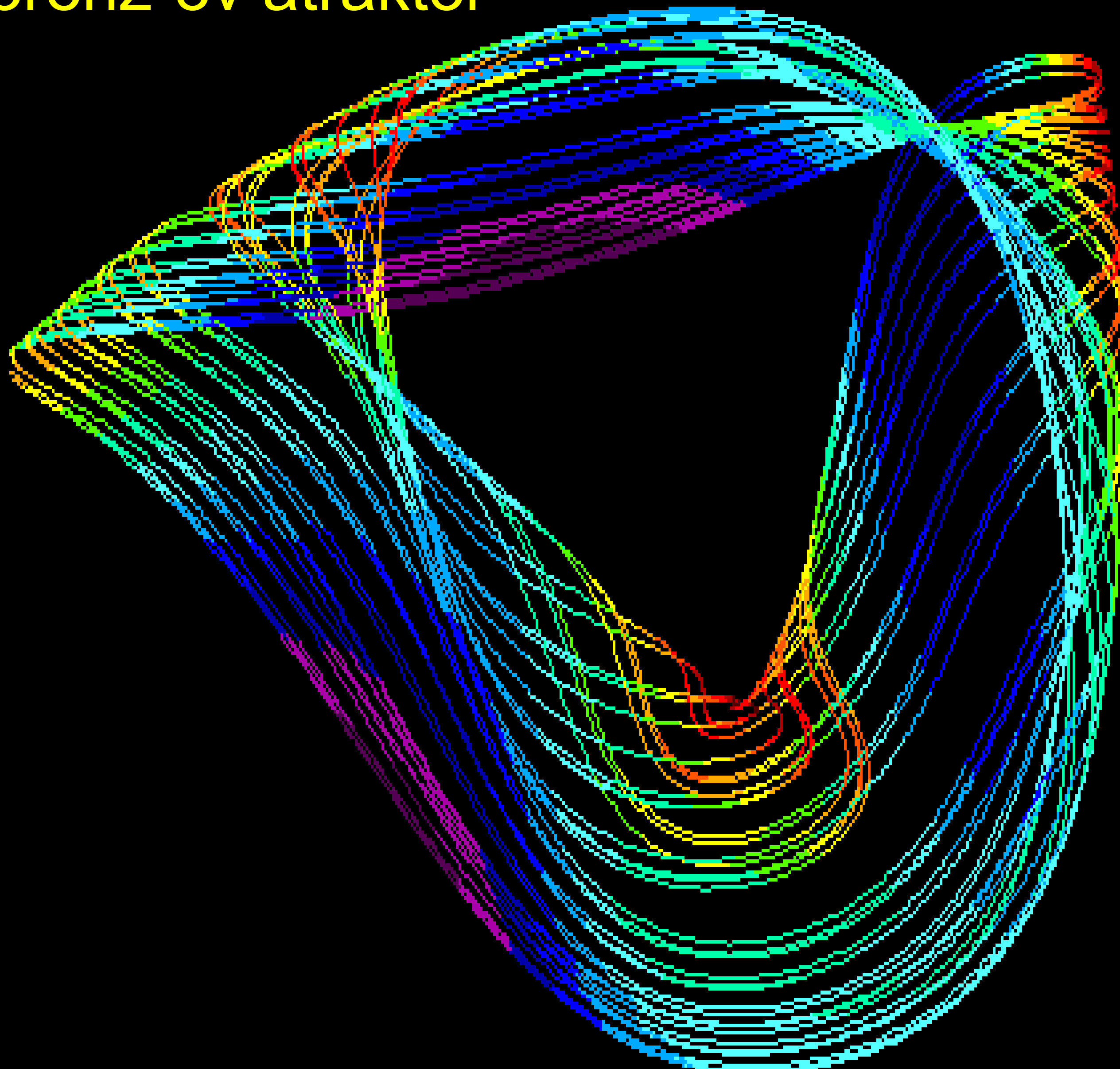
Lorenz-ov atraktor

$$dx/dt = \sigma(y - x)$$
$$dy/dt = x(\rho - z) - y$$
$$dz/dt = xy - \beta z$$



$\sigma = 10$
$\beta = 8/3$
ρ se mijenja, npr. 13; 14; 15; 28; 99.96

Lorenz-ov atraktor

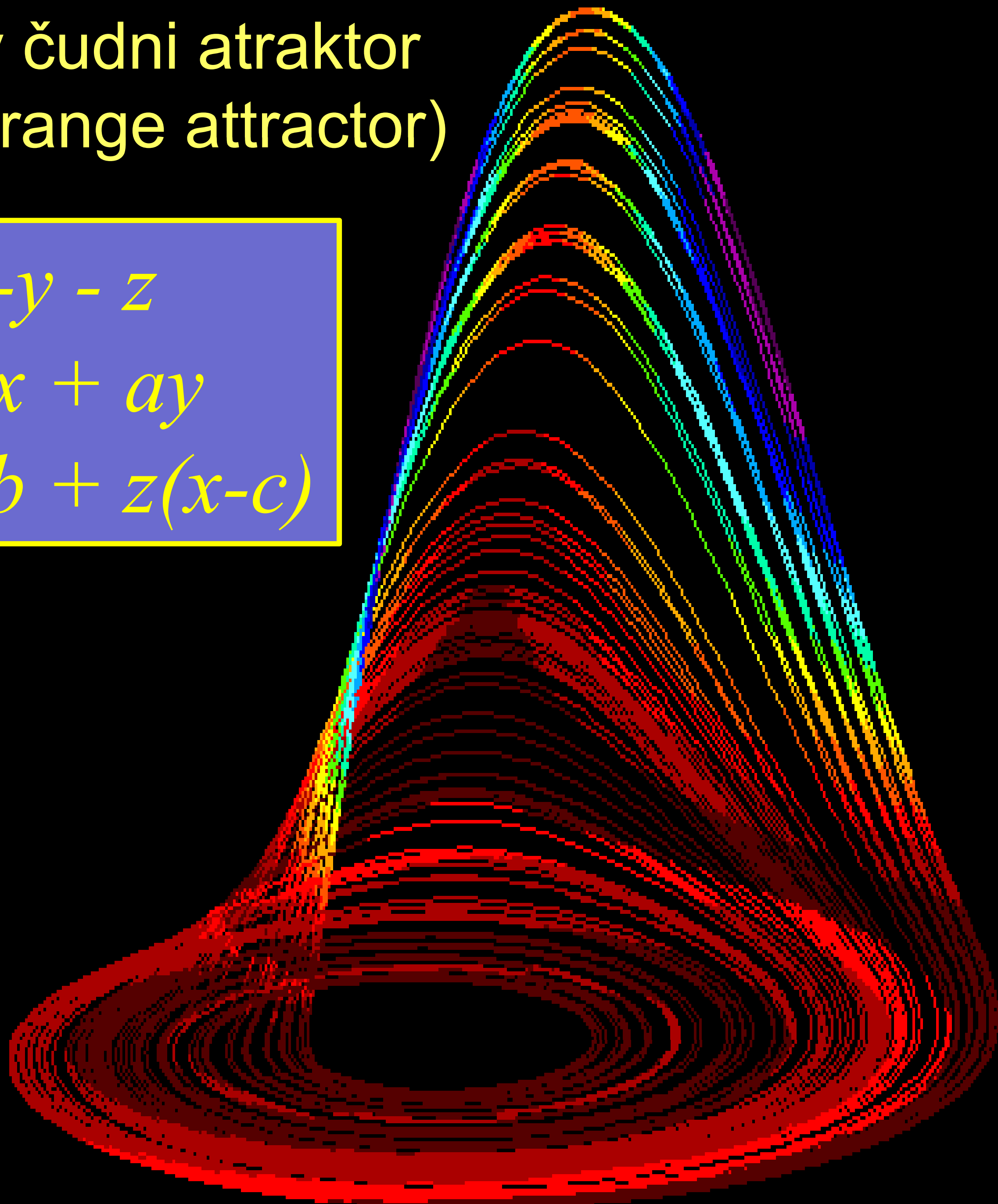


Rosslerov čudni atraktor
(Rossler strange attractor)

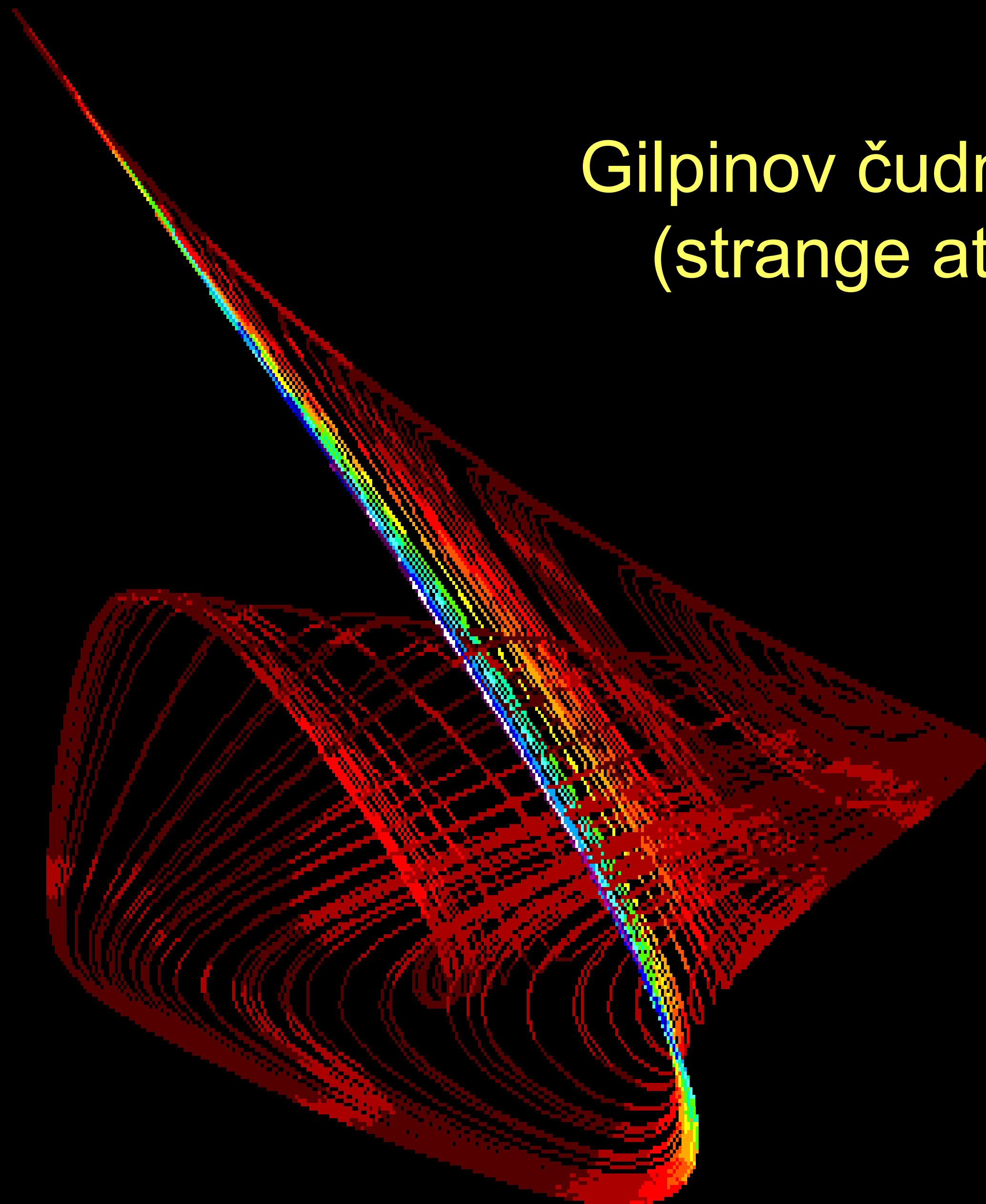
$$dx/dt = -y - z$$
$$dy/dt = x + ay$$
$$dz/dt = b + z(x-c)$$

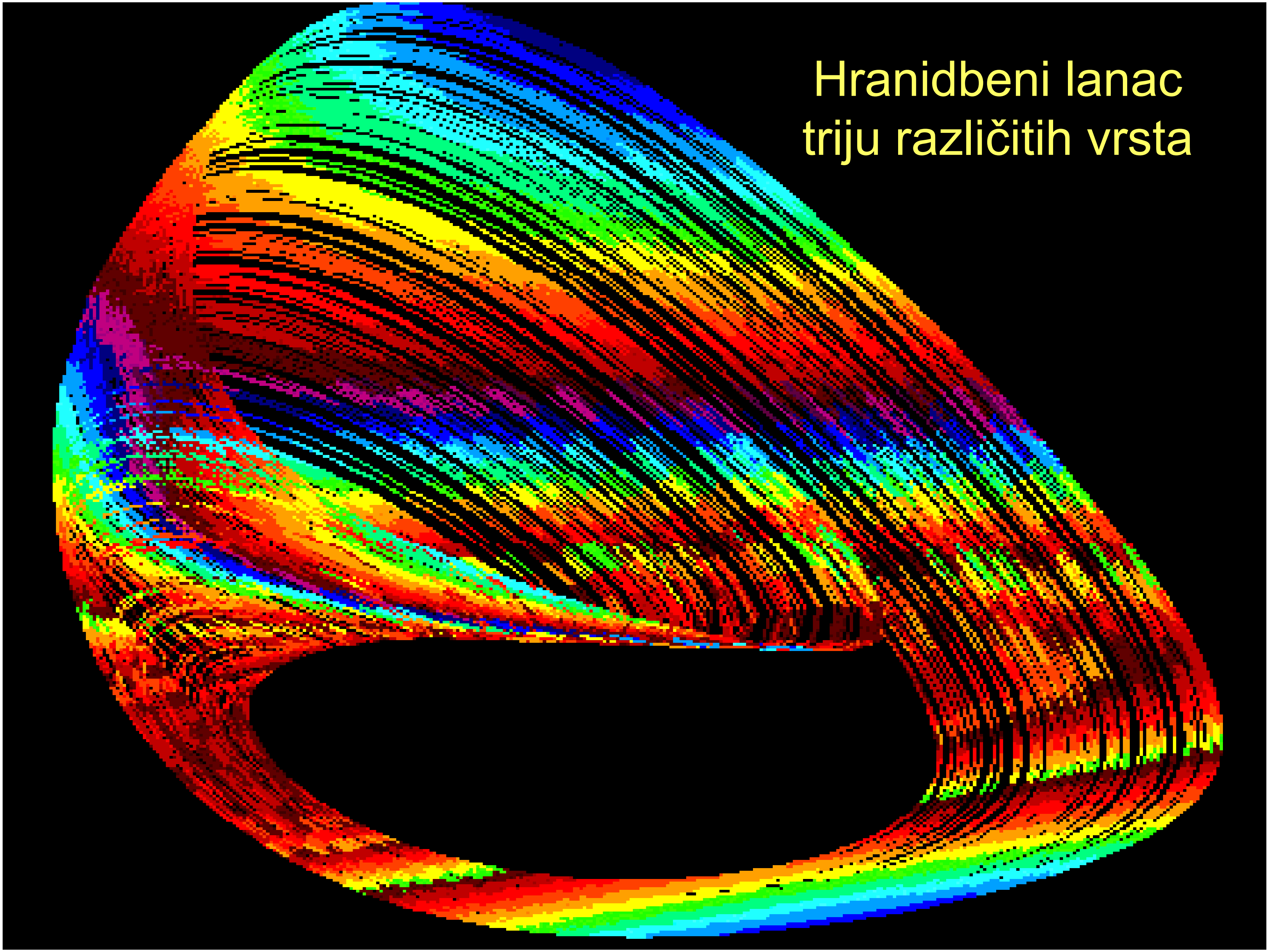
$a = 0.2$
$b = 0.2$
$c = 5.7$

$a = 0.1$
$b = 0.1$
$c = 14$

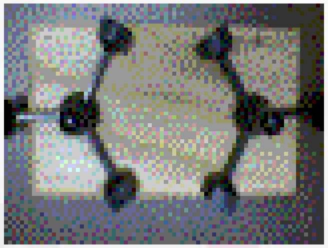


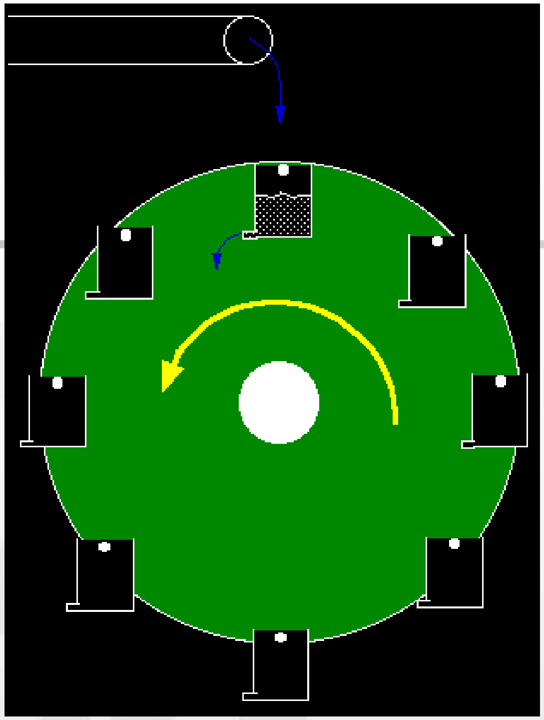
Gilpinov čudni atraktor
(strange attractor)




Hranidbeni lanac
triju različitih vrsta

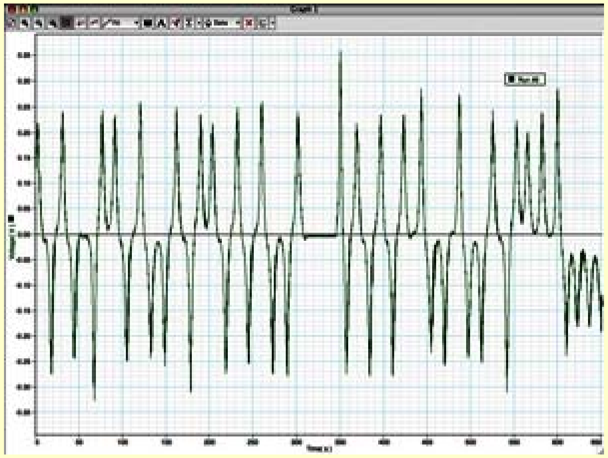
Realizacije fizikalnih sustava za Lorenzov sustav jednadžbi





Fizikalni model kojim je moguće simulirati Lorenzove jednadžbe pripisuje se Willem Malkus-u i Lou Howard-u oko1970. Sastoji se od posuda iz kojih može istjecati tekućina. Posude se nalaze na obodu velikog kola (vidi sliku). Tekućina istječe iz cijevi na vrhu i puni posude. Pri različitim protocima tekućine iz cijevi kolo će se okretati u jednom a zatim u drugom smjeru kaotično.

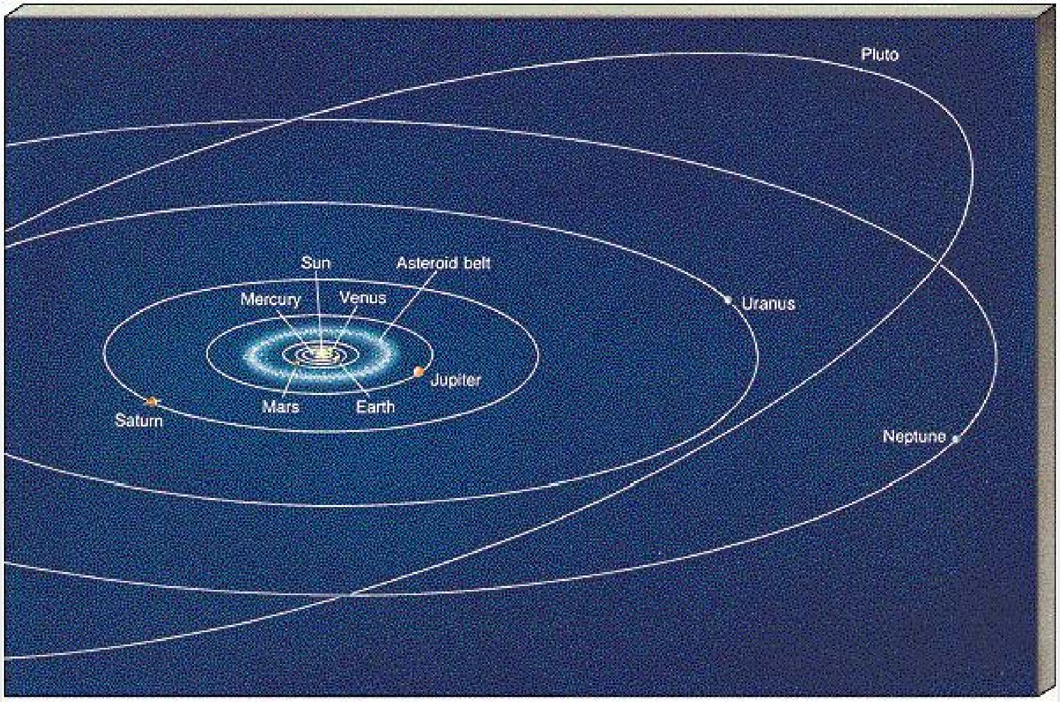
Model je izgrađen od strane Planeten Paultje za Dansku godišnju učiteljsku konferenciju (prosinac 2005) -"Woudschotenconferentie Natuurkunde 2005



Kako zvuči kaos?

Sunčev sustav

Planet	Orbitalni Parametri			
	Udaljenost	Perioda	Inklinacija (stupnjevi)	Ekscentricitet
	Uspoređeno prema Zemlji			
Merkur	0.387	0.241	7	0.206
Venera	0.723	0.615	3.39	0.007
Zemlja	1.00	1.00	0	0.017
Mars	1.524	1.88	1.85	0.093
Jupiter	5.203	11.86	1.3	0.048
Saturn	9.539	29.46	2.49	0.056
Uran	19.18	84	0.77	0.047
Neptun	30.06	164.8	1.77	0.009
Pluton	39.53	247.7	17.15	0.248

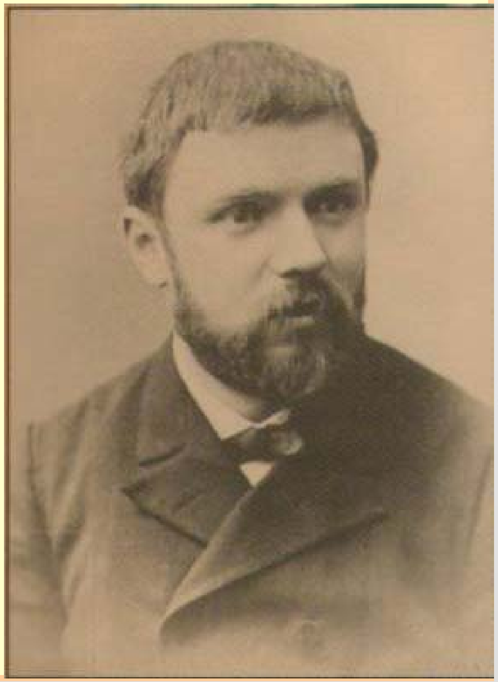


Mehanika gibanja planeta (“celestial mechanics”) – od Aristotela do Newtona

- Aristotel 384 - 322 p.n.e
- Hiparchus iz Rodosa 190 - 120 p.n.e – sezonske pogreške
- Claudius Ptolomej 85 - 165 – epiciklička gibanja
- Nicolaus Copernicus 1473 - 1543 – heliocentrički sustav
- Tycho Brahe 1546 - 1601 – podaci o planetima
- Galileo Galilei 1564 - 1642 – kinematika
- Johannes Kepler 1571 - 1630 – zakoni gibanja planeta
- Sir Isaac Newton 1642 - 1727 – gravitacija/gibanje
  Robert Hooke 1635 - 1703 – obrnuto proporc. s kvadratom
- Edmond Halley 1656-1742 – istražuje komete
- … Euler, Laplace, Lagrange, Jacobi, Hill, Poincare, Birkhoff ...

Stabilnost Sunčevog sustava

- Švedski kralj Oscar II – daje nagradu za odgovor:
  Koliko je stabilan svemir?
- Jules Henri Poincaré (1854-1912) postavlja 1880:
  - Sunce (veliko) plus jedan planet (na kružnoj orbiti)
    - Sustav je stabilan!
  - Ako se doda treće tijelo – ne planet!
    - Pojavljuje se čudno ponašanje
    - … koje nije periodičko!
  - Poincaré dolazi do spoznaje da postoji velika osjetljivost sustava na početne uvjete:



Osjetljivost na početne uvjete

"Vrlo mali uzrok kojega jedva uočavamo određuje znatan učinak koji nećemo propustiti uočiti, i tada kažemo da je učinak uzrokovan šansom. Ako su nam točno poznati zakoni prirode kao i stanje svemira u početnom trenutku, mogli bismo točno predvidjeti stanje tog svemira u sljedećem trenutku. Pa čak i kada bi bio slučaj da nam zakoni prirode ne predstavljaju nikakvu tajnu stanje svemira bismo mogli znati tek približno. Ako bi nam to omogućilo da predvidimo sljedeću situaciju (stanje) s istim približenjem, to je sve što nam treba, i mogli bismo reći da je neku pojavu moguće predvidjeti ako je podvrgnuta poznatim nam zakonima. Ali to nije uvijek tako; naime moguće je da male razlike u početnim uvjetima rezultiraju vrlo velikim razlikama u konačnim pojavama. Mala pogreška u početnom uvjetu rezultira enormnom pogreškom u konačnoj pojavi. Predikcija postaje nemoguća...". (Poincaré)

Da li je moguća predikcija gibanja jednog planeta milijardu godina unaprijed?

- Laplace i Lagrange tvrde da je moguće
- Poincare' tvrdi da nije moguće
- Ljapunov – brzina susjednih orbita divergira
- Lorenz – 1963 – otkriva kaotično ponašanje ("Butterfly effect"). Velika osjetljivost determinističkog nelinearnog sustava na početne uvjete – nije moguće

Definicija kaosa po Poincaré-u

- Kaos:
  - Henry Poincaré: (1880)

  "Događa se da male razlike u početnom stanju sustava mogu dovesti do vrlo velikih razlika u konačnom stanju. Mala pogreška o početnom uvjetu rezultira tada u enormnoj pogrešci u konačnom stanju. Predikcija je tada nemoguća i čini nam se da se sustav ponaša stohastički."

1854 - 1912

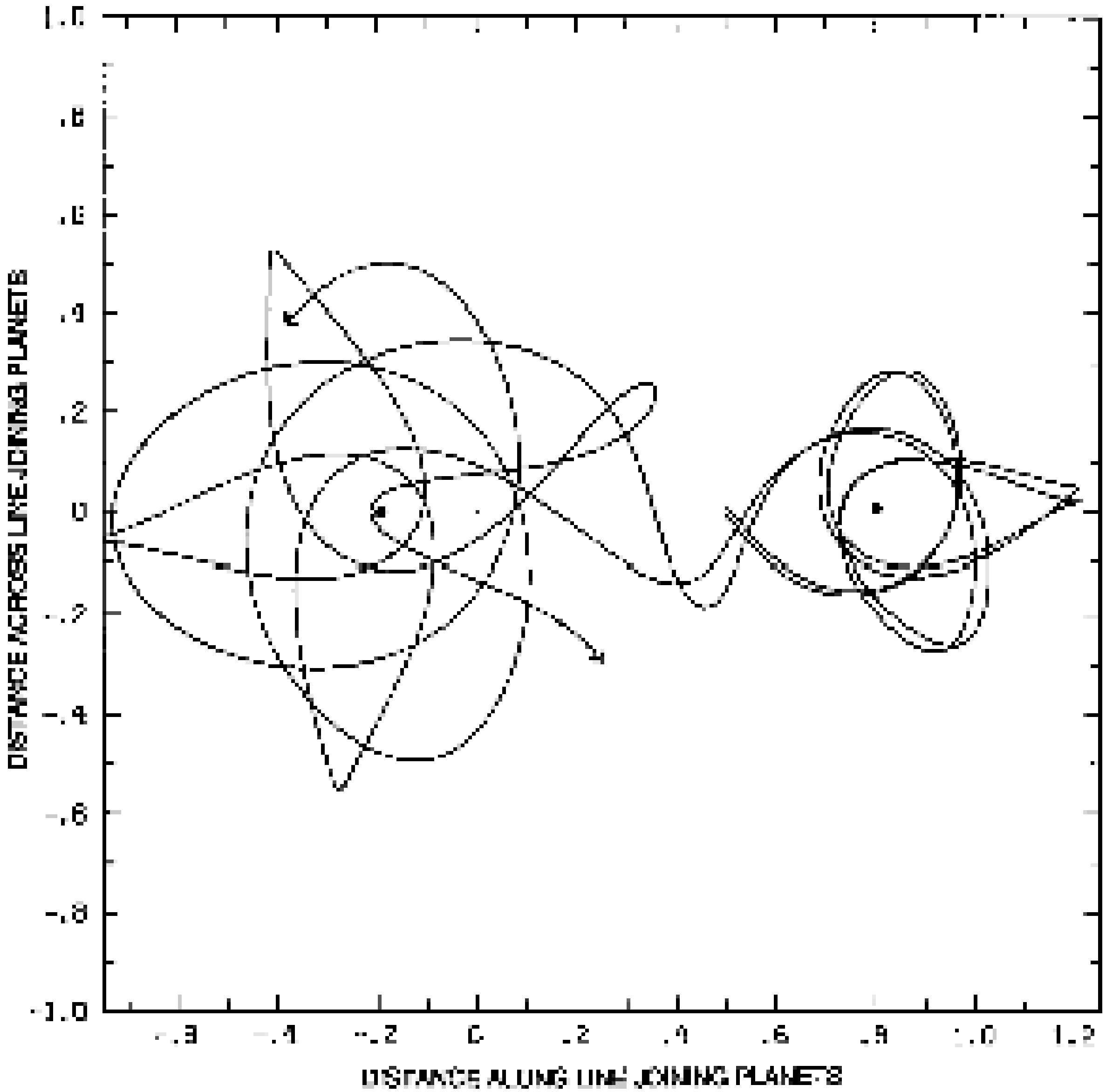


Figure 35. Two possible orbits of a satellite, starting with nearly identical conditions, as given by numerical solutions of Hill's reduced equations, extending for two years. The frame of reference from which the satellite is viewed rotates so as to make the planets, which are located 0.2 units to the left and 0.8 units to the right of the origin, and which are indicated by the dots, appear stationary.

Definicija kaosa

BITNO SVOJSTVO KAOSA!

- Ponašanje dinamičkog sustava u potpunosti je određeno njegovim početnim uvjetima (deterministički sustav)

- Međutim, kako će se proces odvijati nemoguće je predvidjeti.

Kaos:

- *Aperiodičko dugoročno ponašanje*
- *Deterministički sustav*
- *Vrlo velika osjetljivost na početne uvjete*
- *Nije moguće dugoročno predviđanje trajektorije stanja*

Različite definicije kaosa

- Acheson [1997] definira (str.152) kaotičan sustav kao onaj koji pokazuje neregularno, hazardno ponašanje i također pokazuje veliku osjetljivost na početne uvjete.

Acheson, David [1997], "From Calculus to Chaos", Oxford University Press.

- Drazin [1992] definira (str.74) kaotičnu orbitu kao moguće aperiodičku orbitu i također govori o osjetljivosti na početne uvjete (na str.143).

Drazin, P.G. [1992], "Nonlinear Systems", Cambridge University Press

Različite definicije kaosa

- Williams [1997] definira (str.9) kaos kao trajnu evoluciju nelinearnog sustava koja se čini da je bez reda.

Williams, Garnett P. [1997], "Chaos Theory Tamed", Taylor & Francis

- Parker & Chua [1989] definiraju (str.18) kao ograničeno ponašanje u ustaljenom stanju koje nije periodičko ili kvazi-periodičko.

Parker, T.S. & L.O. Chua [1989], "Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems", Springer-Verlag

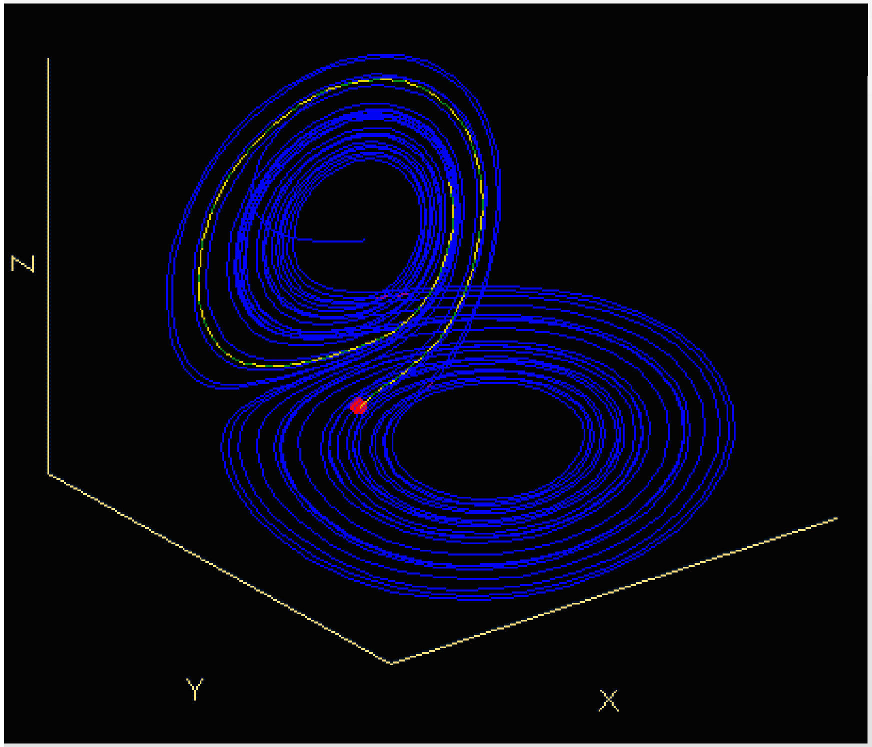
- Devaney [1989] definira (str.50) kaotični sustav kao onaj koji pokazuje veliku osjetljivost na početne uvjete, nemože se razložiti na manje sustave i koji ima periodičko ponašanje unutar cijelog sustava.

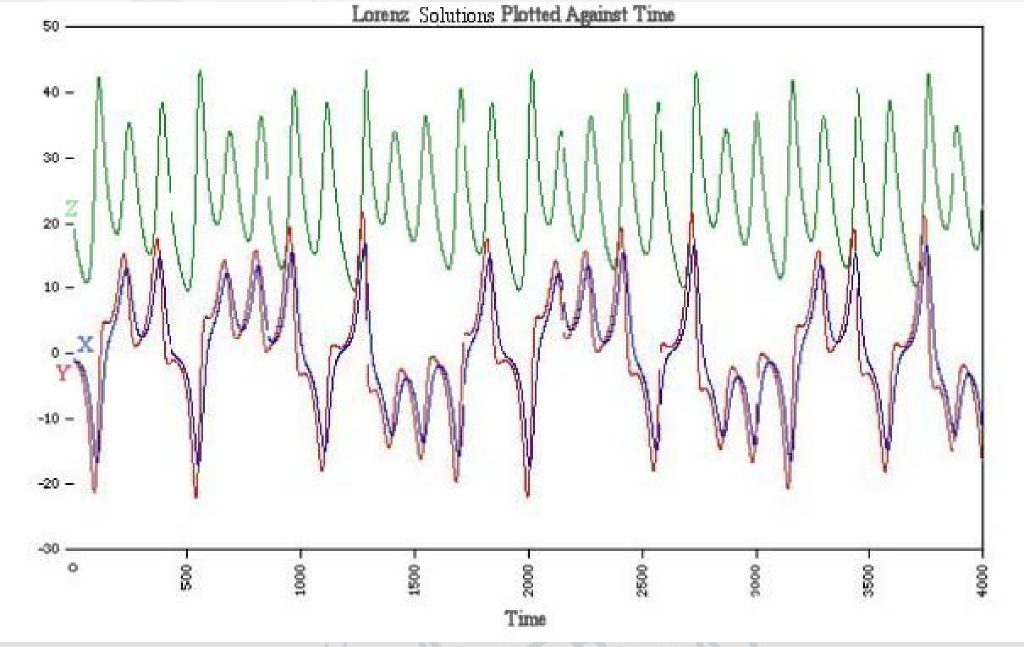
Devaney, Robert L. [1989], "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems" second edition, Addison-Wesley

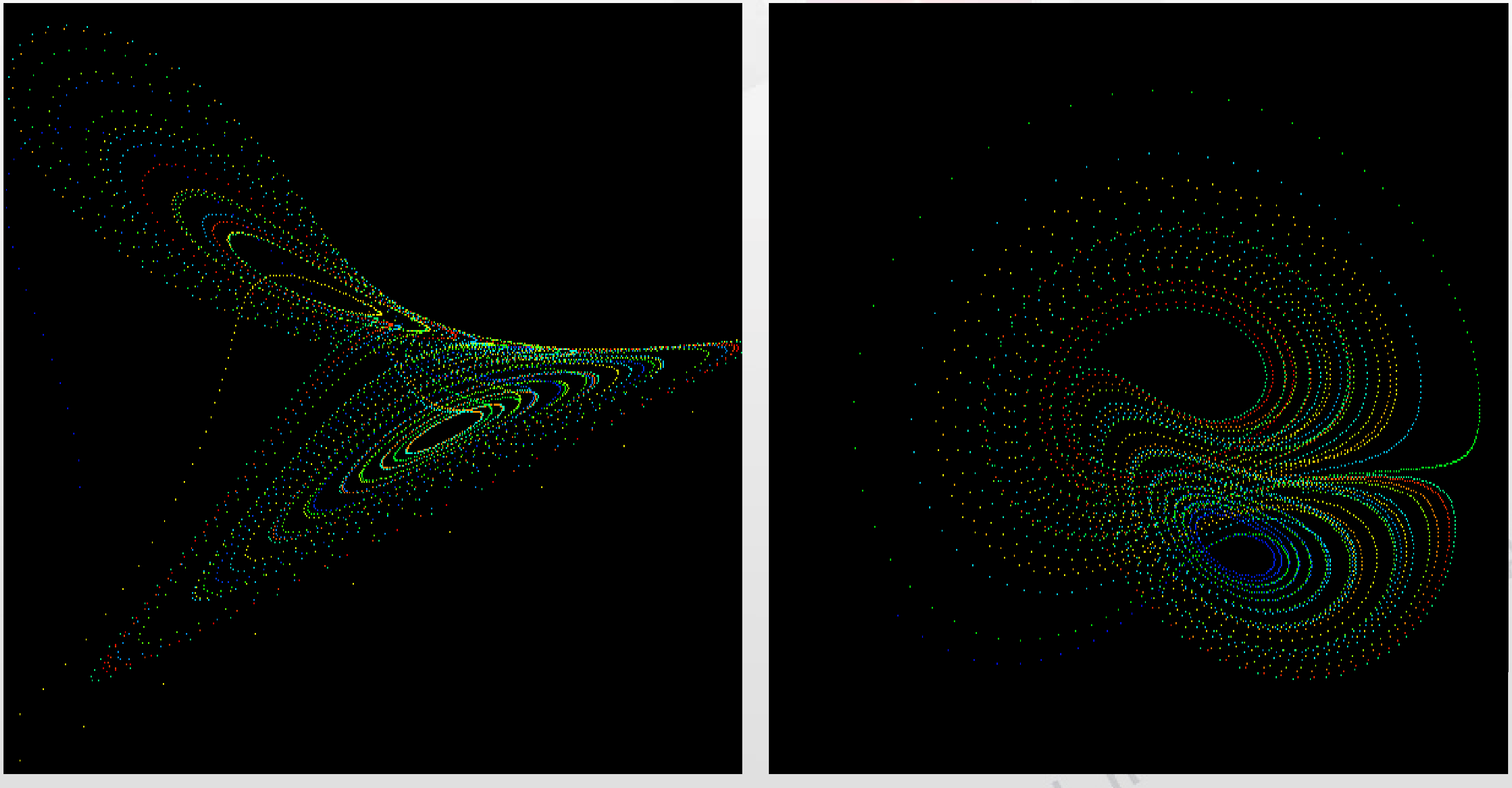
Primjeri kaotičnih sustava

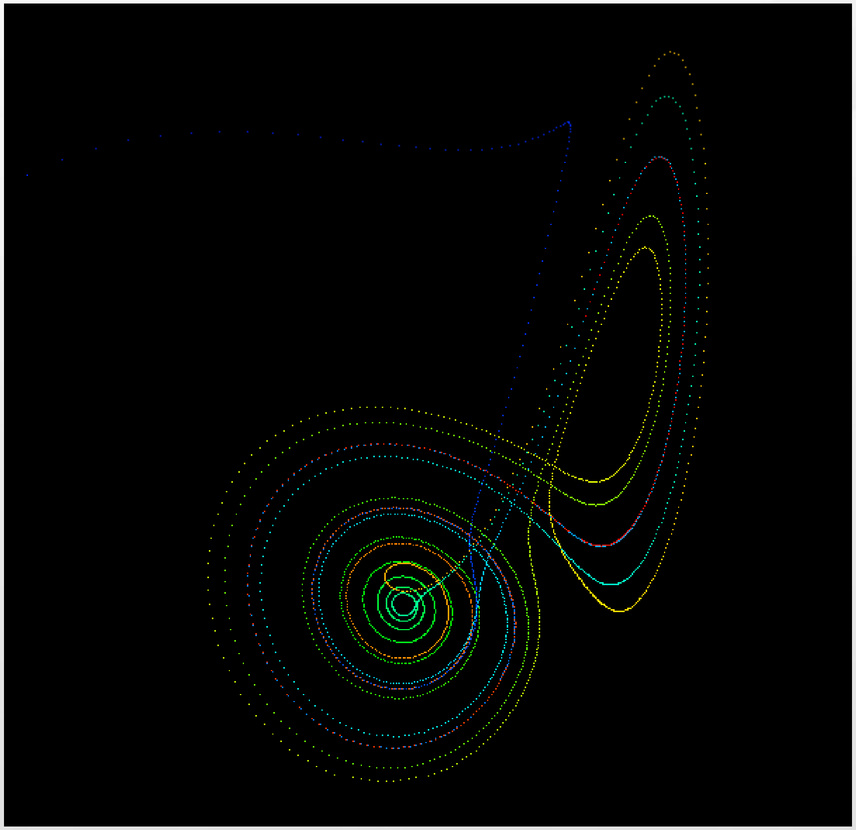
- Sunčani sustav (Poincaré)
- Klimatski sustav (Lorenz)
- Turbulencije u fluidima (Libchaber)
- Sunčeva aktivnost (Parker)
- Rast populacije (May)
- i mnogo drugih sustava…

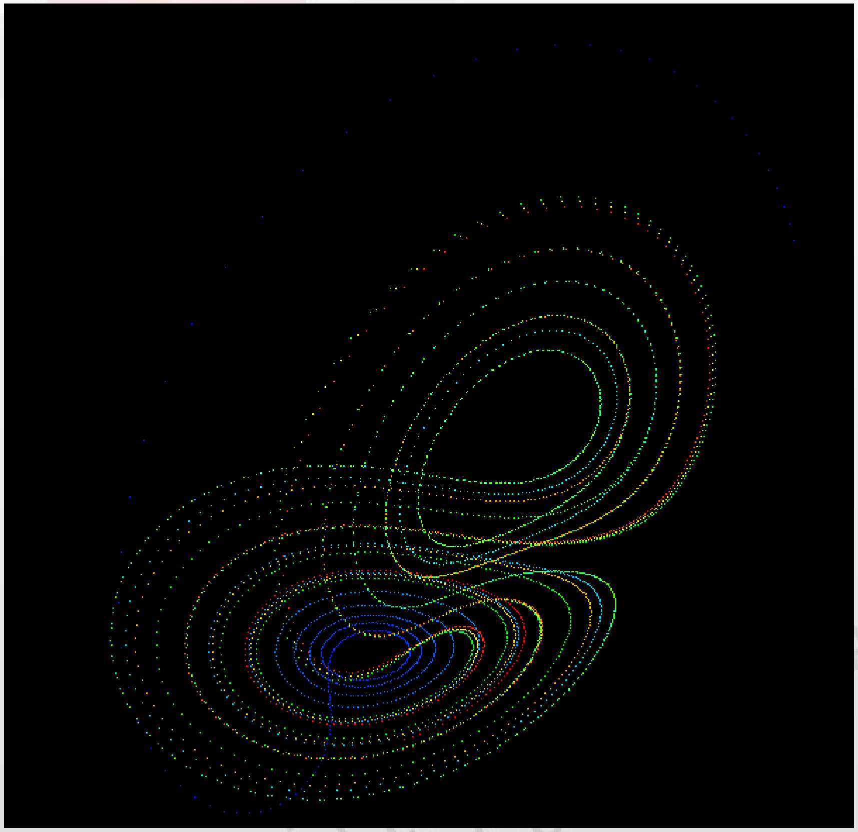
Primjer kaotičnog sustava – klimatski sustav zemlje (Lorenz, 1963)

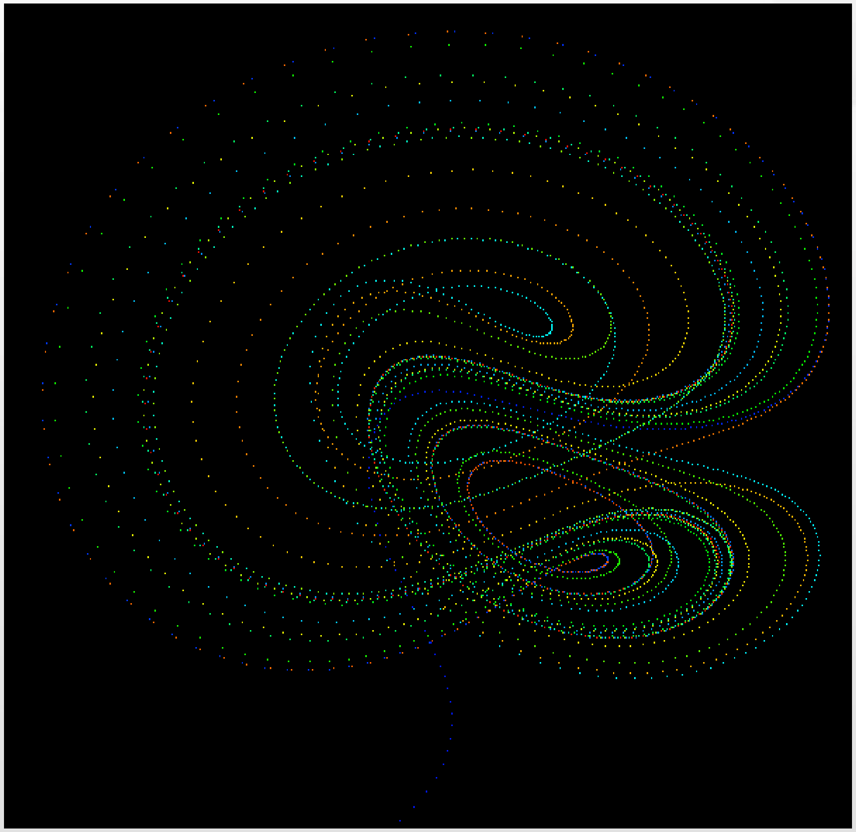


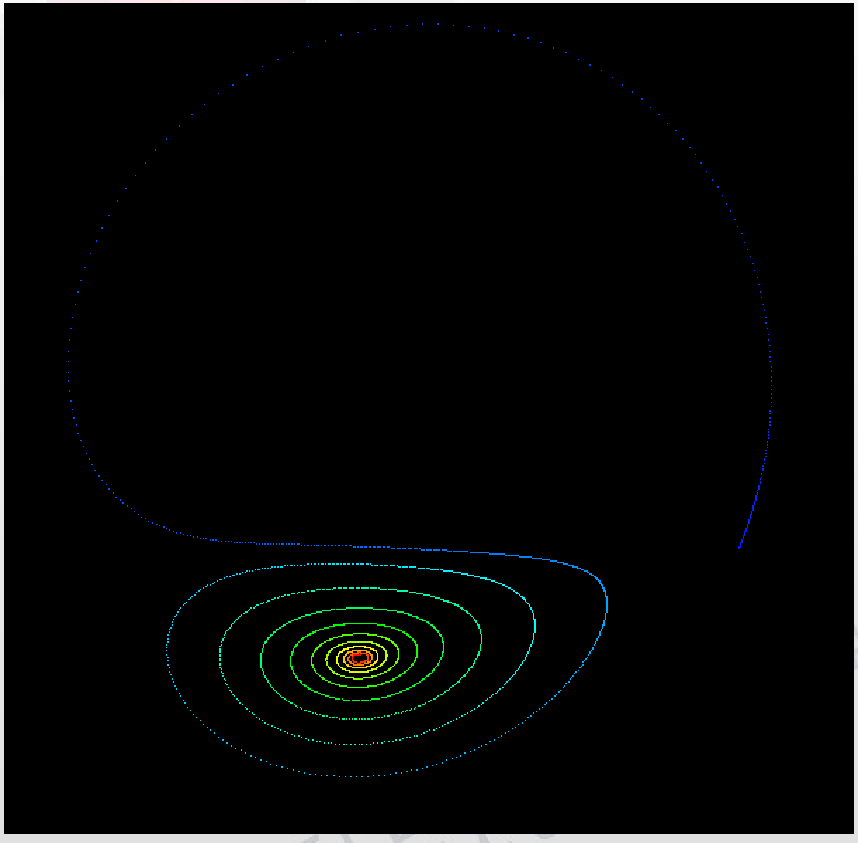


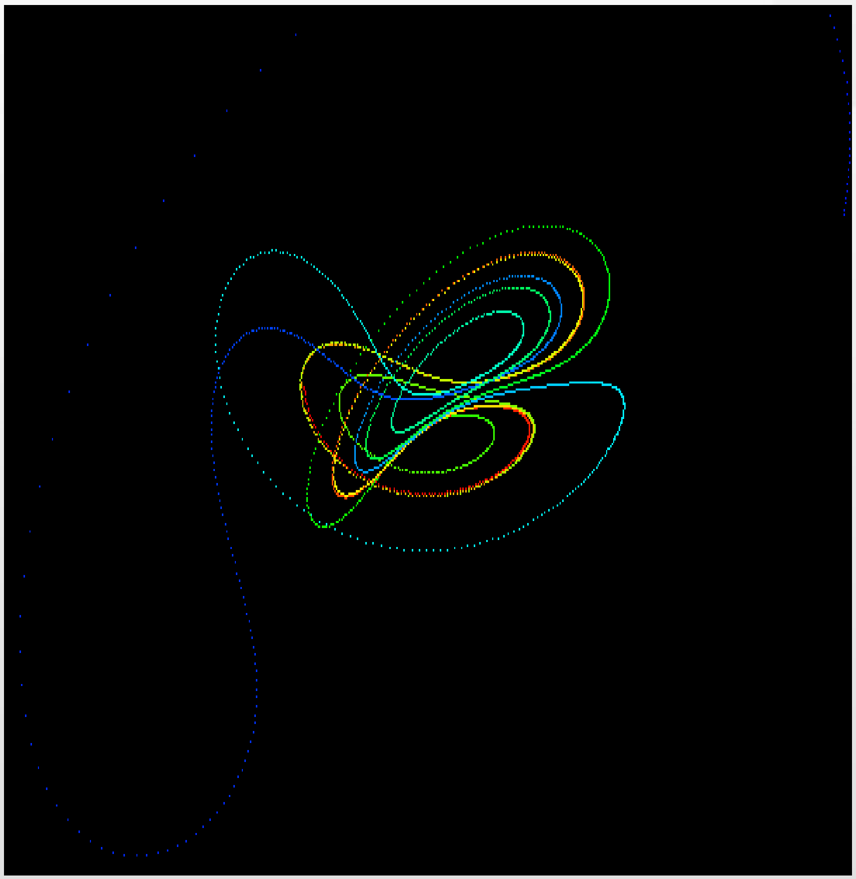


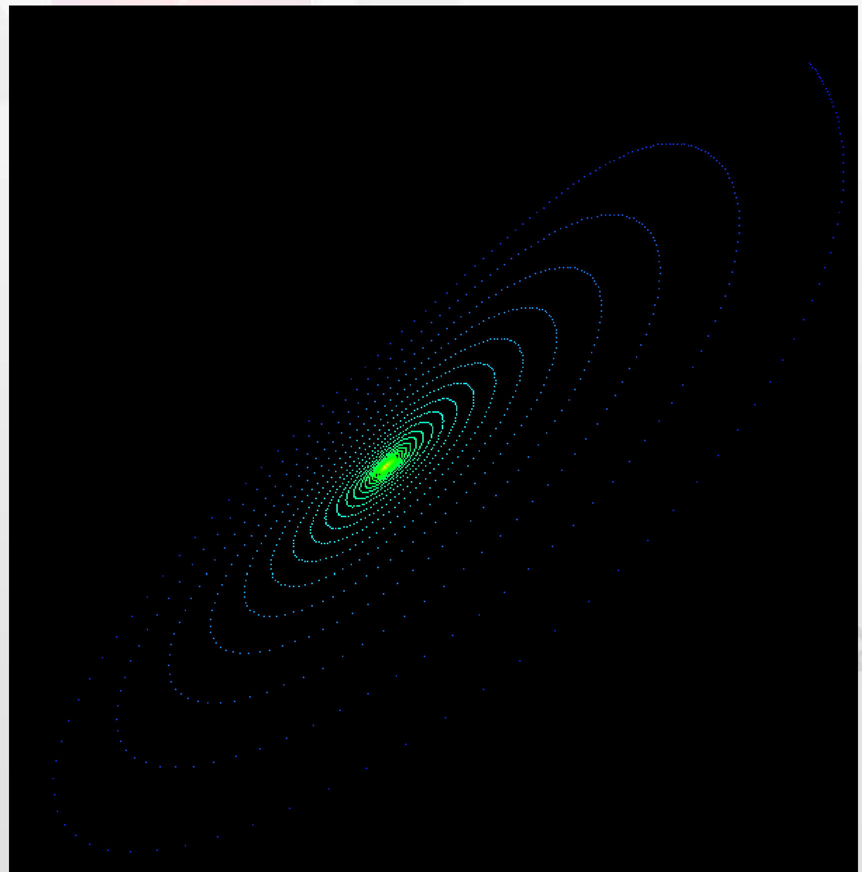




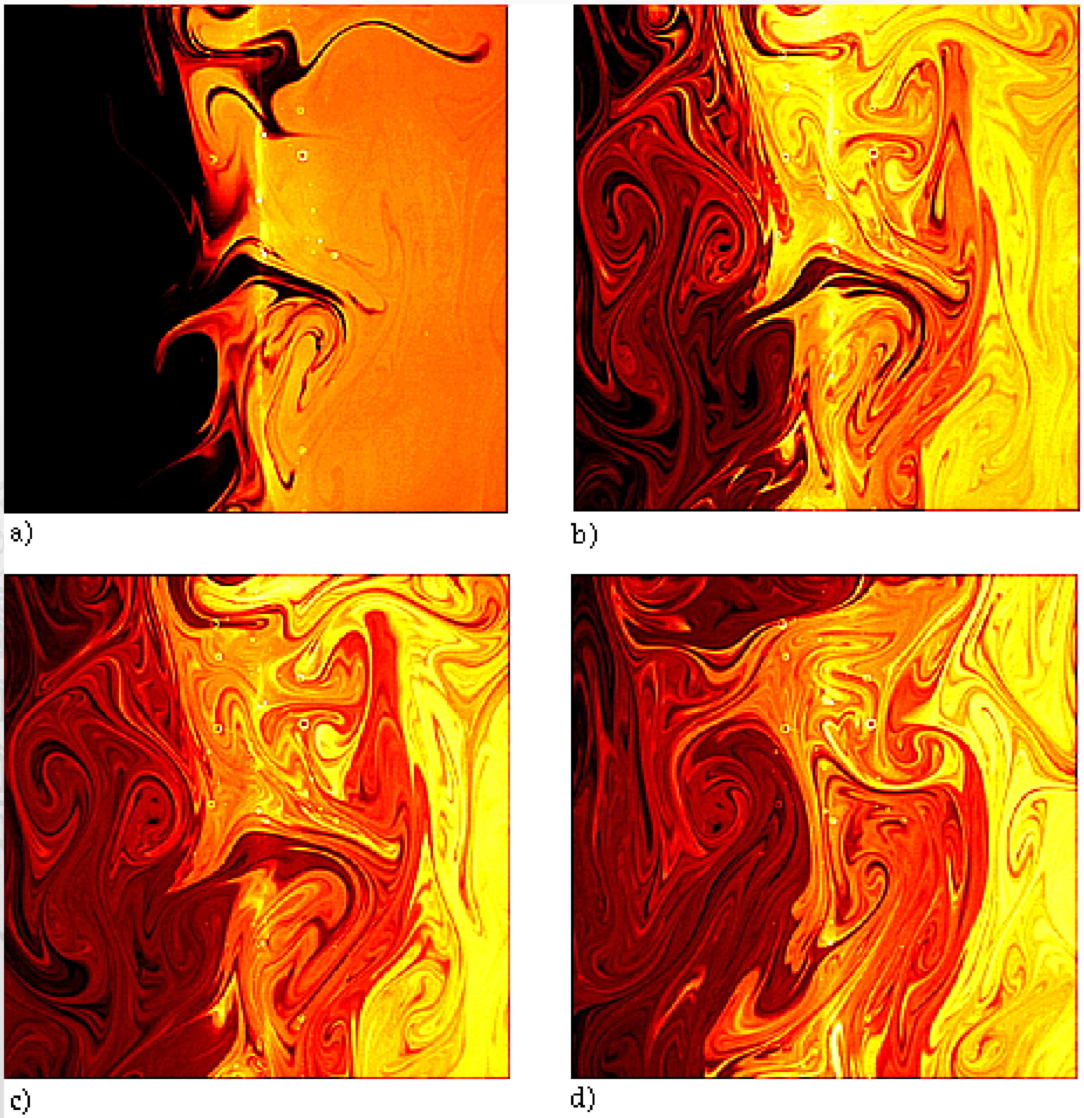




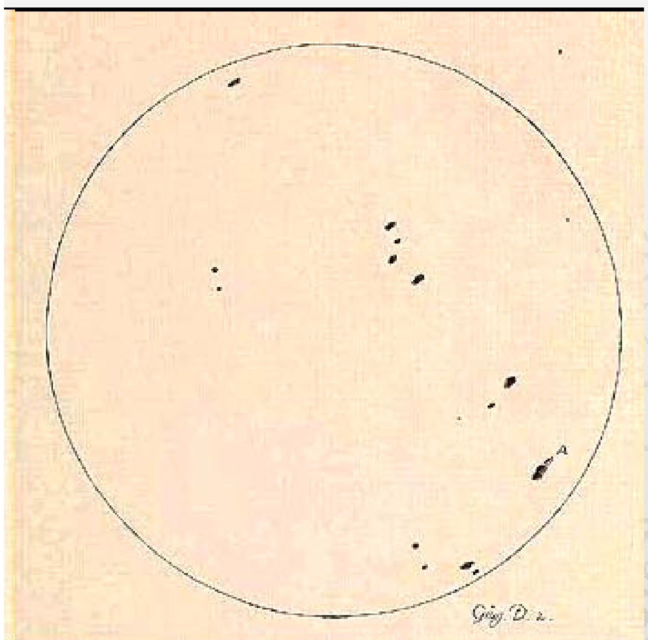


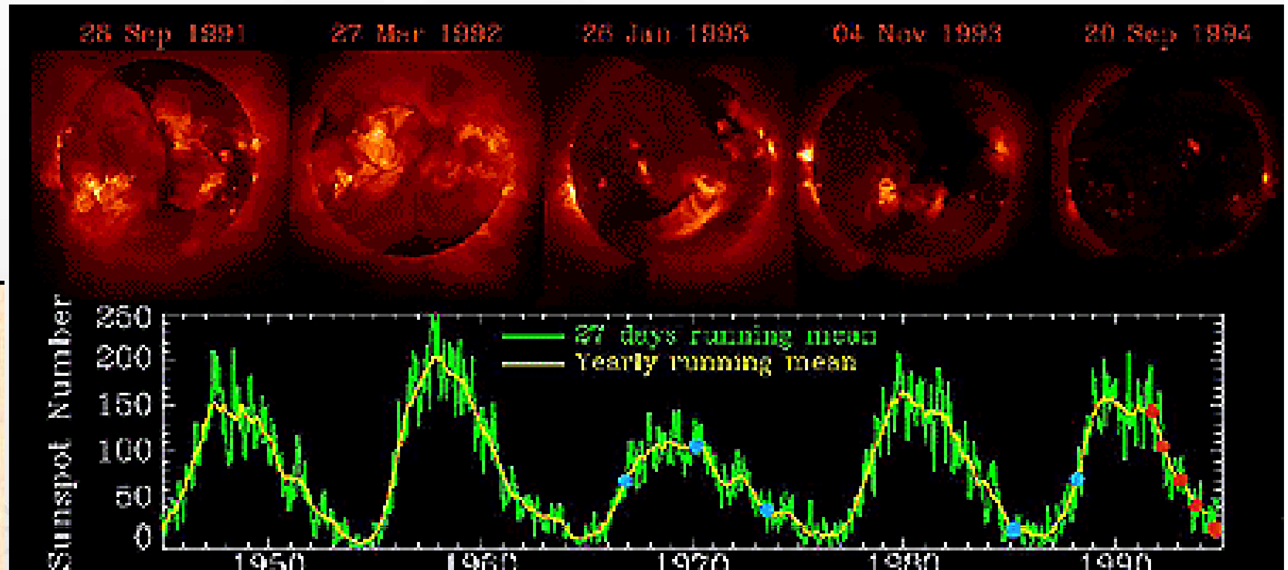


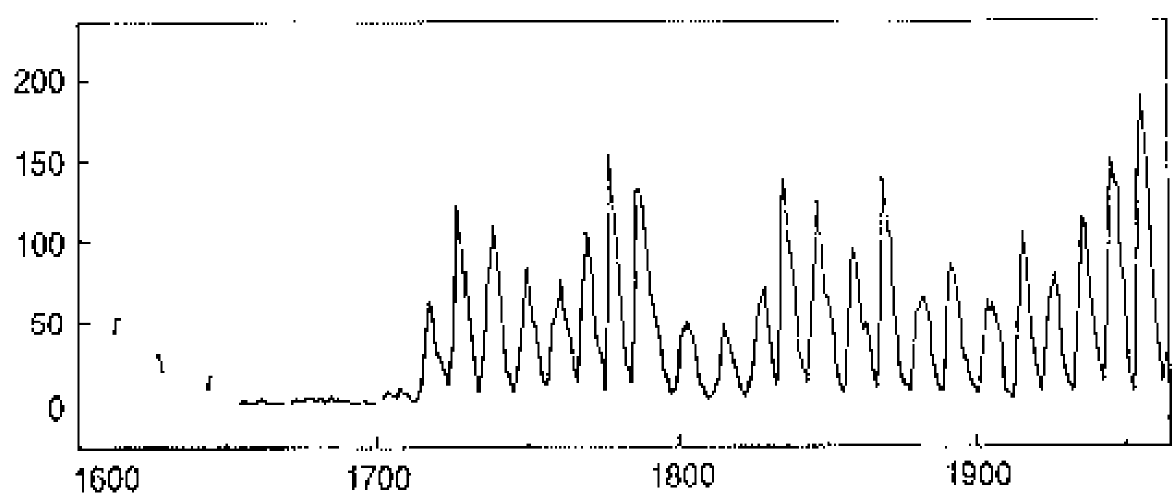
Primjer kaotičnog sustava – turbulencija u fluidu



Primjer kaotičnog sustava – sunčeva aktivnost (protuberance)







Zaključak

- Kaos nije moguć kod linearnih sustava.
- Kaos je moguć kod nelinearnih sustava pod određenim uvjetima.
- Radi se o ponašanju koje je nepredvidivo a generira ga deterministički sustav.
- Kakvo će biti ponašanje bitno ovisi o početnim uvjetima s kojih sustav kreće.
- Tehnički sustavi mogu doći u kaotično stanje i takvu mogućnost treba prethodno provjeriti.
- Kaos je samo jedno od ponašanja koja su moguća kod nelinearnih sustava