SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA

Nelinearni sustavi upravljanja

Zbirka zadataka

(verzija 1.0)

Autori:
Doc. dr. sc. Nikola Mišković
Prof. dr. sc. Zoran Vukić

Zagreb, svibanj 2013.

Sadržaj

Poglavlje 1

Fazne trajektorije nelinearnih sustava

Zadatak 1.1

Zadana je nelinearna diferencijalna jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2.$$

a) Korištenjem postupka separacije varijabli odredite rješenje $x(t)$ uz početni uvjet x_0.

b) Skicirajte odziv $x(t)$ uz početni uvjet $x_0 = 0.5$ i napišite kako se naziva ova pojava.

Zadatak 1.2

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y\,(0.75 - y - 0.5x)\,. \end{aligned}$$

a) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

b) U faznoj ravnini x–y skicirajte trajektoriju uz proizvoljan početni uvjet.

Zadatak 1.3

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \sin(x) - xy. \end{aligned}$$

a) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

b) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 1$ i $y(0) = 1$ ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

c) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = -2\pi$ i $y(0) = 0$

Zadatak 1.4

Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x\frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) Odredite jednažbu izoklina.

b) Odredite i nacrtajte područja u faznoj ravnini $(\dot{x}, x)$ gdje je nagib trajektorije 0 i ∞.

c) Korištenjem metode izoklina, odredite i nacrtajte smjerove trajektorija sustava u cijeloj faznoj ravnini. Koje područje je stabilno, koje nestabilno i gdje je separatrisa? *Napomena*: Nacrtajte nekoliko izoklina, npr. sa nagibima 0, ± 1, ± 2.

d) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$.

e) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 2.5$.

Zadatak 1.5

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x^3\frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) Odredite jednažbu izoklina.

b) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područjâ u faznoj ravnini $(\dot{x}, x)$ gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

c) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = -2$.

d) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = 2$.

Zadatak 1.6

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\,(1-0.5y)\\ \dot{y} &= y\,(-0.75+0.25x)\,.\end{aligned}$$

a) Odredite jednažbu izoklina.

b) Uz pretpostavku da je $x \geq 0$ i $y \geq 0$ odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

c) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 4$ i $y(0) = 3$ ako se zna da je ravnotežno stanje $x = 3$, $y = 2$ tipa centar.

Zadatak 1.7

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\,(y-1)\\ \dot{y} &= 4-x^2-y^2.\end{aligned}$$

a) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

b) Odredite jednažbu izoklina u obliku $m = f\,(x, y)$.

c) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

d) Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $y(0) = 3$ ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

e) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 2$.

Zadatak 1.8

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y\\ \dot{y} &= \left(1-x^2\right)y-x.\end{aligned}$$

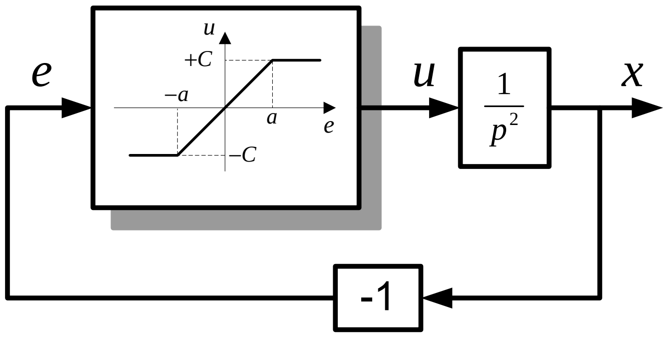
a) Odredite jednažbu izoklina.

b) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

c) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 1$ ako se zna da je ravnotežno stanje $x = 0$, $y = 0$ tipa centar.

Zadatak 1.9

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.1.



Slika 1.1: Zatvoreni krug upravljanja.

a) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

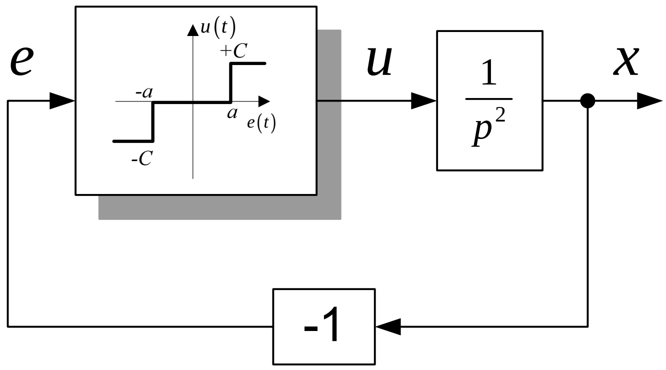
b) Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Nije potrebno određivati smjer trajektorije!

Zadatak 1.10

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.2.

a) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

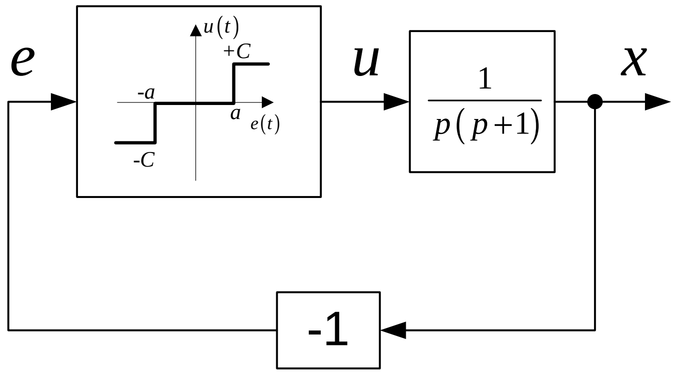
b) Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Obavezno označiti smjer trajektorije i napisati kako je određen!



Slika 1.2: Zatvoreni krug upravljanja.

Zadatak 1.11

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.3.



Slika 1.3: Zatvoreni krug upravljanja.

a) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

b) Kolika smije biti maksimalna brzina izlaza ($y = \frac{dx}{dt}$) na prijelazu u područje određenu s $u = 0$ da bi se sustav smirio u ravnotežnom stanju prije nego što napusti područje određeno s $u = 0$?

1.1 Rješenja

Rješenje 1.1

a) Korištenjem postupka separacije varijabli odredite rješenje $x(t)$ uz početni uvjet x_0.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x^2\\ \frac{dx}{x^2} &= dt/\int\\ -\frac{1}{x}+C &= t \Rightarrow x=\frac{1}{C-t}\\ t &= 0 \Rightarrow C=\frac{1}{x_0}\end{aligned}$$

$$\boxed{x\left(t\right)=\frac{x_0}{1-x_0 t}}$$

b) Skicirajte odziv $x(t)$ uz početni uvjet $x_0 = 0.5$ i napišite kako se naziva ova pojava.

Pojava se naziva vrijeme konačnog pobjega (finite time escape) i prikazan je slikom 1.4.

Rješenje 1.2

a) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

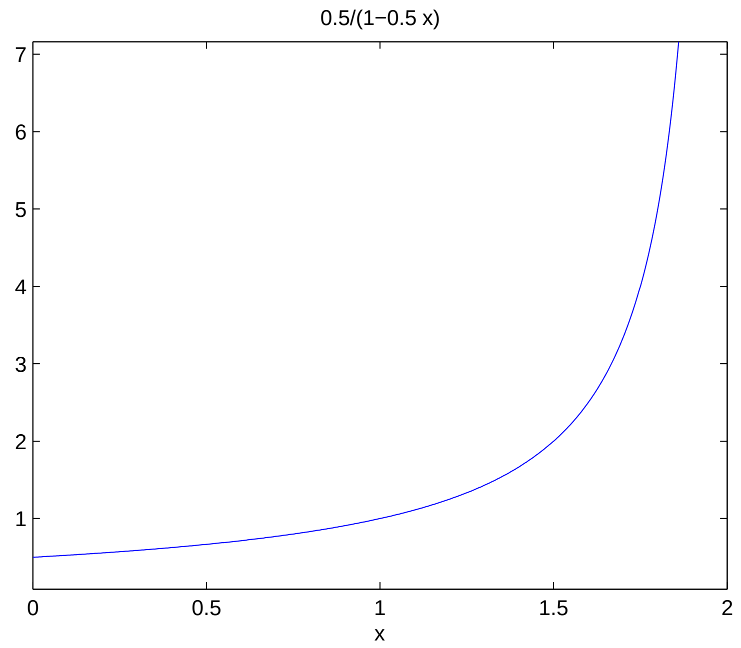
Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned}0 &= x\left(1-x-y\right)\\ 0 &= y\left(0.75-y-0.5x\right).\end{aligned}$$

iz čega slijedi:

I. $(0,0)$

II. $(0,0.75)$



Slika 1.4: Finite time escape.

III. $(1, 0)$

IV. $(0.5, 0.5)$

linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= (1 - 2x_0 - y_0)\,\Delta x - x_0 \Delta y \\ \Delta\dot{y} &= -0.5 y_0 \Delta x + (0.75 - 2y_0 - 0.5x_0)\,\Delta y \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_0 - y_0 & -x_0 \\ -0.5y_0 & 0.75 - 2y_0 - 0.5x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Za svaku ravntežnu točku se može napisati:

I. $(0, 0)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.75 \Rightarrow$ $\boxed{\textbf{nestabilan čvor}}$

II. $(0, 0.75)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = -0.75 \Rightarrow$ $\boxed{\textbf{sedlo}}$

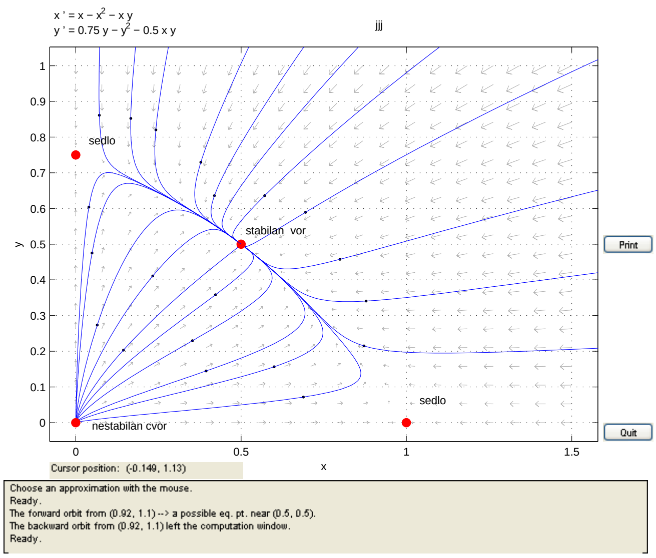
III. $(1, 0)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.25 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

IV. $(0.5, 0.5)$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}$$
$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}) = (\lambda + 0.5)^2 - 0.125 = s^2 + s + 0.125 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{-2-\sqrt{2}}{4} < 0, \lambda_2 = \tfrac{-2+\sqrt{2}}{4} < 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{stabilan čvor}}$

b) U faznoj ravnini x–y skicirajte trajektoriju uz proizvoljan početni uvjet.



Slika 1.5: Trajektorija uz zadatak.

Rješenje 1.3

a) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned} 0 &= y \\ 0 &= sin\left(x\right) - xy. \end{aligned}$$

iz čega slijede sva ravnotežna stanja u obliku

$$\left(x_0, y_0\right) = \left(k\pi, 0\right), k \in \mathbb{Z}.$$

Linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= \Delta y \\ \Delta\dot{y} &= \left(\cos x_0 - y_0\right)\Delta x - x_0 \Delta y \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos x_0 - y_0 & -x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem ravnotežnih točaka dobije se:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \cos k\pi & -k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & -k\pi \end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti λ matrice $\mathbf{J}$ će nam odrediti tip ravnotežnih stanja:

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ (-1)^{k+1} & \lambda + k\pi \end{vmatrix} = \lambda^2 + k\pi\lambda + (-1)^{k+1}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-k\pi \pm \sqrt{(k\pi)^2 - 4(-1)^{k+1}}}{2}$$

- $k = 0$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$$

- $k > 0$

- k parno

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} < 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$$

- k neparno

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\textbf{stabilan čvor}}$$

- $k < 0$
  - k parno

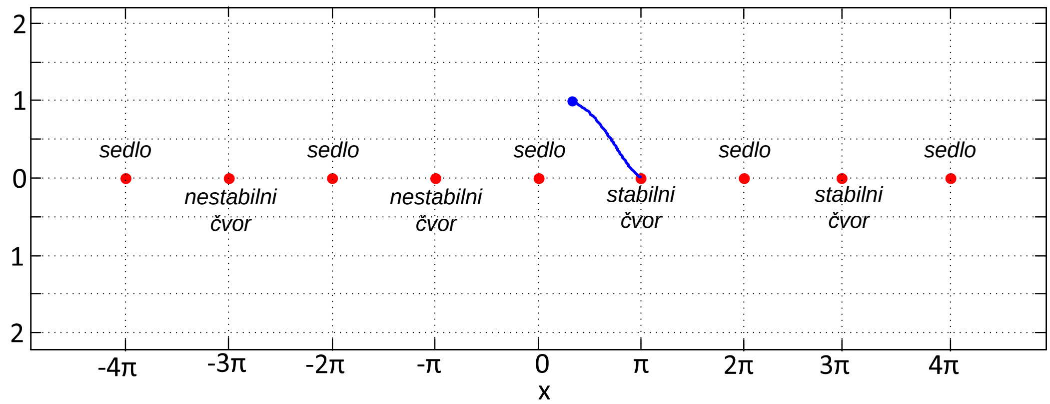
$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} > 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 + 4}}{2} < 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$$

  - k neparno

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{-k\pi + \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0 \\ \lambda_2 &= \frac{-k\pi - \sqrt{(k\pi)^2 - 4}}{2} < 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\textbf{nestabilan čvor}}$$

b) Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete $x(0) = 1$ i $y(0) = 1$ ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

S obzirom da trajektorija završava u stabilnoj ravnotežnoj točki tipa čvor, ona ne ide spiralno u ravnotežnu točku. Nije točno ako se nacrta da trajektorija ide spiralno u ravnotežnu točku. Rješenje je prikazano slikom 1.6.



Slika 1.6: Crvene točke su ravnotežna stanja (ima ih beskonačno i ponavljaju se svakih π) a plava točka je početni uvjet u b) dijelu zadatka.

c) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = -2\pi$ i $y(0) = 0$.

   Početni uvjet je ujedno i ravnotežna točka tipa sedlo. Ovo je nestabilna ravnotežna točka ali s obzirom da je sustav autonoman, stanje će se zadržati u ovoj točki. Drugim riječima, trajektorija počinje, ostaje i završava u ovoj točki.

Rješenje 1.4

Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x\frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) Odredite jednažbu izoklina.

$$\ddot{x} - 0.5x\dot{x} + x = 0$$

   Neka je $y = \frac{dx}{dt}$ iz čega slijedi

$$\dot{y} - 0.5xy + x = 0 / \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.5x - \frac{x}{y} = m$$

   Na poslijetku jednadžba izoklina je

$$y = \frac{x}{0.5x - m}$$

   gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

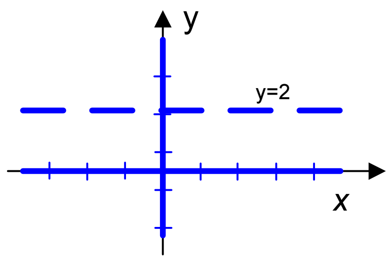
b) Odredite i nacrtajte područja u faznoj ravnini $(\dot{x}, x)$ gdje je nagib trajektorije 0 i ∞.
Nagib je 0 na $y = 2$ i $x = 0$.

$$m = 0 \Rightarrow y = 2, x = 0$$

Nagib je ∞ na $y = 0$.

$$m = \infty \Rightarrow y = 0$$

Rješenje je prikazano slikom 1.7.



Slika 1.7: Izokline s nagibima 0 i ∞.

c) Korištenjem metode izoklina, odredite i nacrtajte smjerove trajektorija sustava u cijeloj faznoj ravnini. Koje područje je stabilno, koje nestabilno i gdje je separatrisa? *Napomena*: Nacrtajte nekoliko izoklina, npr. sa nagibima 0, ± 1, ± 2.

Rješenje je prikazano slikom 1.8.

d) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$.

Rješenje je prikazano slikom 1.9.

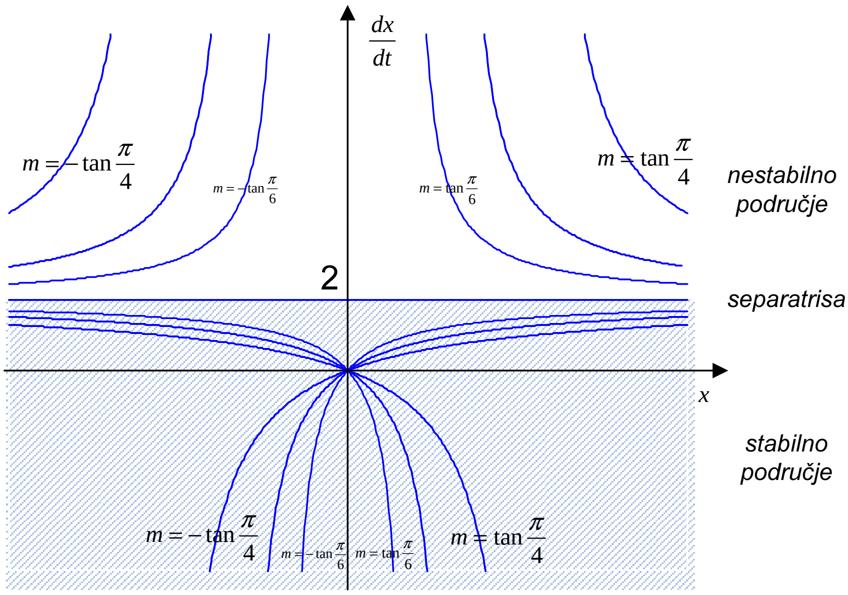
e) Skicirajte trajektoriju sustava uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 2.5$.

Rješenje je prikazano slikom 1.10.

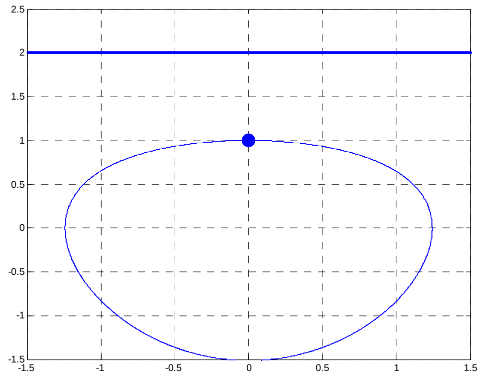
Rješenje 1.5

a) Odredite jednažbu izoklina.

$$\ddot{x} - 0.5x^3\dot{x} + x = 0$$



Slika 1.8: Izokline.



Slika 1.9: Trajektorija uz početne uvjete (0, 1).

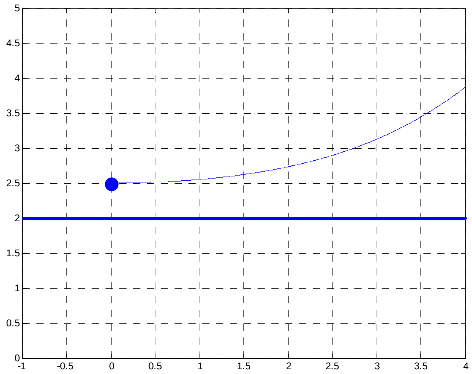
Neka je $y = \frac{dx}{dt}$ iz čega slijedi

$$\dot{y} - 0.5x^3 y + x = 0 / \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.5x^3 - \frac{x}{y} = m$$

Na poslijetku jednadžba izoklina je

$$y = \frac{x}{0.5x^3 - m}$$



Slika 1.10: Trajektorija uz početne uvjete (0, 2.5).

gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

b) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini $(\dot{x}, x)$ gdje je nagib trajektorije

- jednak 0,
  Nagib je 0 na $y = \frac{2}{x^2}$ i $x = 0$.

$$m = 0 \Rightarrow y = 2, x = 0$$

- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $y = 0$.

$$m = \infty \Rightarrow y = 0$$

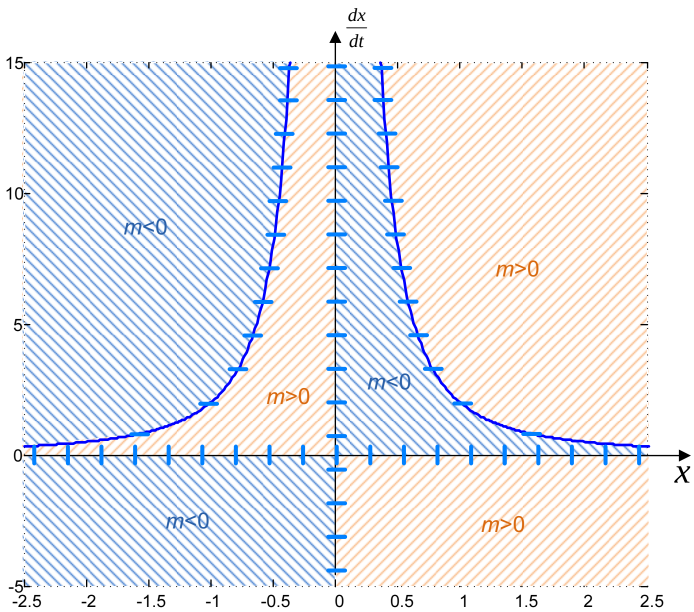
- pozitivan i
- negativan.
  Iz jednadžbe $m = \frac{x\left(0.5x^2y - x\right)}{y}$ slijede sljedeći uvjeti za predznak od m

c) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = -2$.

d) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = 2$.
Smjerovi o kojem ide tajektorija se određuju iz početne derivacije, tj. iz $\dot{x}(0)$. Ukoliko je veći od 0, x mora rasti u početku, i obratno. Ove dvije trajektorije su jednoznačno određene i prikazane slikom 1.12.

Tablica 1.1: Tablica uz rješenje Zadatka 5

$y > 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y < 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	nemoguće
$y < 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y < 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	nemoguće
$y < 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$



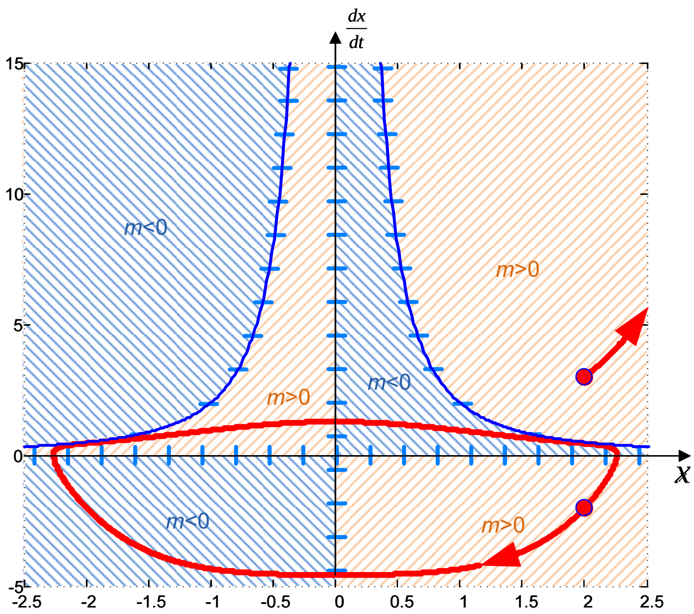
Slika 1.11: Plava linije je krivulja $y = \frac{2}{x^2}$. Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s negativnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s pozitivnim nagibom trajektorije.

Rješenje 1.6

a) Odredite jednažbu izoklina.

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y\,(-0.75 + 0.25x)}{x\,(1 - 0.5y)}$$

Na poslijetku jednadžba izoklina je



Slika 1.12: Trajektorije uz dva zadana početna uvjeta

$\boxed{y = \frac{4mx}{x(1+2m)-3}}$
gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

b) Uz pretpostavku da je $x \geq 0$ i $y \geq 0$ odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

- jednak 0,
  Nagib je 0 na $y = 0$ i $x = 3$.
  $\boxed{m = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge x = 3}$

- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $x = 0$ i $y = 2$.
  $\boxed{m = \infty \Rightarrow y = 2 \wedge x = 0}$

- pozitivan i
- negativan.
  Iz jednadžbe izoklina, uz uvjete $x \geq 0$ i $y \geq 0$ koji su navedeni u zadatku, slijede sljedeći uvjeti za predznak od m

Skicirana područja su na slici 1.13.

Tablica 1.2: Tablica s područjima nagiba istih predznaka.

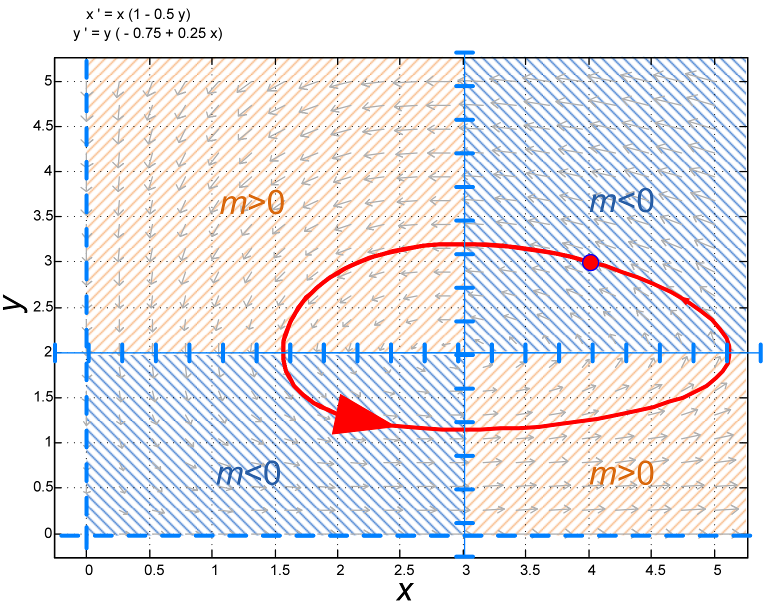
	$-0.75 + 0.25x > 0 \Rightarrow x > 3$	$-0.75 + 0.25x < 0 \Rightarrow x < 3$
$y < 2$	$m > 0$	$m < 0$
$y > 2$	$m < 0$	$m > 0$

c) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 4$ i $y(0) = 3$ ako se zna da je ravnotežno stanje $x = 3$, $y = 2$ tipa centar.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$m = \frac{3(-0.75+1)}{4(1-1.5)} = \frac{0.75}{-2} = \tan\alpha$$
$$\alpha = \operatorname{atan2}(0.75, -2) = 160°$$

Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da se krivulja kreće suprotno od kazaljke na satu. S obzirom da se radi o ravnotežnoj točki tipa centar, trajektorija je zatvorenog oblika. Rješenje je prikazano slikom 1.13.



Slika 1.13: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s pozitivnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s negativnim nagibom trajektorije.

Rješenje 1.7

a) Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned} 0 &= x\,(y-1) \\ 0 &= 4 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

I. $(0,2)$
II. $(0,-2)$
III. $\left(\sqrt{3},1\right)$
IV. $\left(-\sqrt{3},1\right)$

linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= (y_0-1)\,\Delta x + x_0\Delta y \\ \Delta\dot{y} &= -2x_0\Delta x - 2y_0\Delta y \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0-1 & x_0 \\ -2x_0 & -2y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Za svaku ravntežnu točku se može napisati:

I. $(0,2)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

II. $(0,-2)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

III. $\left(\sqrt{3},1\right)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \\ &\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{J}) = \lambda(\lambda+2) + 6 = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\textbf{stabilan fokus}}$

IV. $\left(\sqrt{3}, 1\right)$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \\
&\det\left(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{J}\right) = \lambda(\lambda+2) + 6 = \lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{5}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{stabilan fokus}}$

b) Odredite jednažbu izoklina u obliku $m = f\left(x, y\right)$.

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4 - x^2 - y^2}{x\left(y-1\right)}$$

gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

c) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

- jednak 0,
  Nagib je 0 na kružnici $x^2 + y^2 = 4$.
  $\boxed{m = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4}$

- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $x = 0$ ili $y = 1$.
  $\boxed{m = \infty \Rightarrow y = 1 \vee x = 0}$

- pozitivan i
- negativan.
  Iz jednadžbe izoklina slijede sljedeći uvjeti za smjer od m

Skicirana područja su na slici 1.14.

d) Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $y(0) = 3$ ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$\begin{aligned}
&m = \tfrac{-9}{4} = \tan\alpha \\
&\alpha = \operatorname{atan2}\left(-9, 4\right) = -66^\circ
\end{aligned}$$

Tablica 1.3: Tablica s područjima nagiba istih predznaka.

	$4-x^2-y^2$	x	$y-1$	m
1	>0	>0	>0	>0
2	>0	>0	<0	<0
3	>0	<0	>0	<0
4	>0	<0	<0	>0
5	<0	>0	>0	<0
6	<0	>0	<0	>0
7	<0	<0	>0	>0
8	<0	<0	<0	<0

Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da trajektorije kreće dolje desno. S obzirom da trajektorija završava u stabilnoj ravnotežnoj točki tipa fokus, ona spiralno ide u ravnotežnu točku. Nije točno ako se nacrta da trajektorija ide direktno u ravnotežnu točku. Rješenje je prikazano slikom 1.14.

e) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 2$.

Početni uvjet je ujedno i ravnotežna točka tipa sedlo. Ovo je nestabilna ravnotežna točka ali s obzirom da je sustav autonoman, stanje će se zadržati u ovoj točki. Drugim riječima, trajektorija počinje, ostaje i završava u ovoj točki.

Rješenje 1.8

a) Odredite jednažbu izoklina.

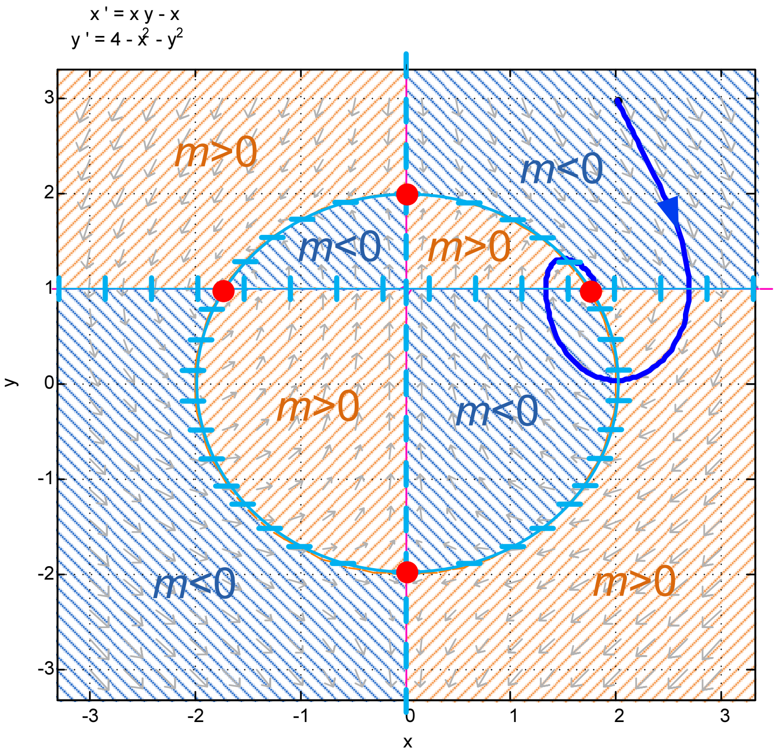
$$\boxed{m = \frac{dy}{dx} = \frac{\left(1-x^2\right)y-x}{y}}$$

gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

b) Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

- jednak 0,

$$\left(1-x^2\right)y - x = 0$$
$$y = \frac{x}{1-x^2}, 1-x^2 \neq 0$$



Slika 1.14: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s pozitivnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s negativnim nagibom trajektorije.

- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $y = 0$.

- pozitivan i
- negativan.
  Iz jednadžbe izoklina, uz uvjete $x \geq 0$ i $y \geq 0$ koji su navedeni u zadatku, slijede sljedeći uvjeti za predznak od m

Tablica 1.4: Tablica s područjima nagiba istih predznaka.

	brojnik > 0	brojnik < 0
$y > 0$	$m > 0$	$m < 0$
$y < 0$	$m < 0$	$m > 0$

– brojnik > 0

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)y - x > 0\\
&\left(1-x^2\right)y > x\\
&\text{uz } 1-x^2 > 0 \Rightarrow y > \frac{x}{1-x^2}\\
&\text{uz } 1-x^2 < 0 \Rightarrow y < \frac{x}{1-x^2}
\end{aligned}$$

– brojnik < 0

$$\begin{aligned}
&\left(1-x^2\right)y - x < 0\\
&\left(1-x^2\right)y < x\\
&\text{uz } 1-x^2 > 0 \Rightarrow y < \frac{x}{1-x^2}\\
&\text{uz } 1-x^2 < 0 \Rightarrow y > \frac{x}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Skicirana područja su na slici 1.15.

c) Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 1$ ako se zna da je ravnotežno stanje $x = 0$, $y = 0$ tipa centar.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$\begin{aligned}
&m = \tfrac{1}{1} == \tan\alpha\\
&\alpha = \text{atan2}\left(1, 1\right) = 45^\circ
\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da se krivulja kreće u smjeru kazaljke na satu. S obzirom da se radi o ravnotežnoj točki tipa centar, trajektorija je zatvorenog oblika. Rješenje je prikazano slikom 1.15 a u ispitu je potrebno nacrtati bilo kakav zatvoreni oblik krivulje koja je usmjerena u smjeru kazaljke na satu.

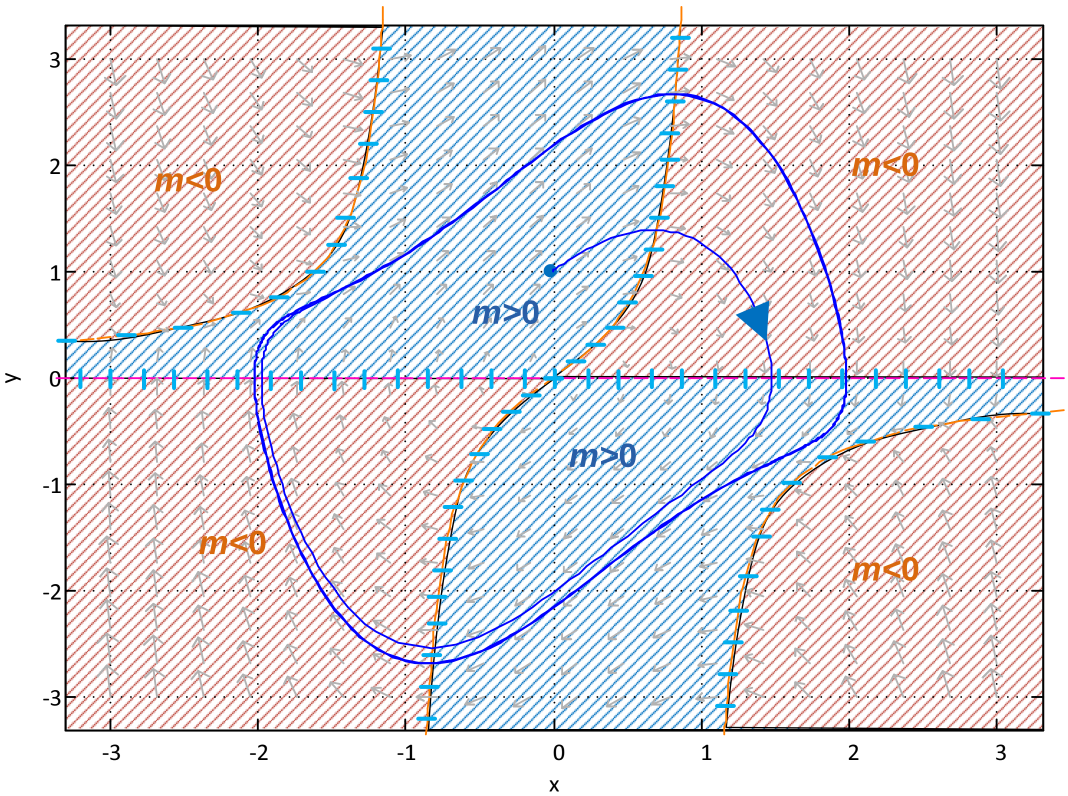
Rješenje 1.9

a) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s^2}y_N \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = y_N$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y_N$$

$$\frac{dy}{dt}y\frac{dt}{dx} = y_N$$



Slika 1.15: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s negativnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s pozitivnim nagibom trajektorije.

$$y dy = y_N dx$$

$$y^2 = \int y_N dx + const.$$

I. latica

$$u > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow y_N = C$$

$$y^2 = 2Cx + const$$

II. latica

$$u < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow y_N = -C$$

$$y^2 = -2Cx + const$$

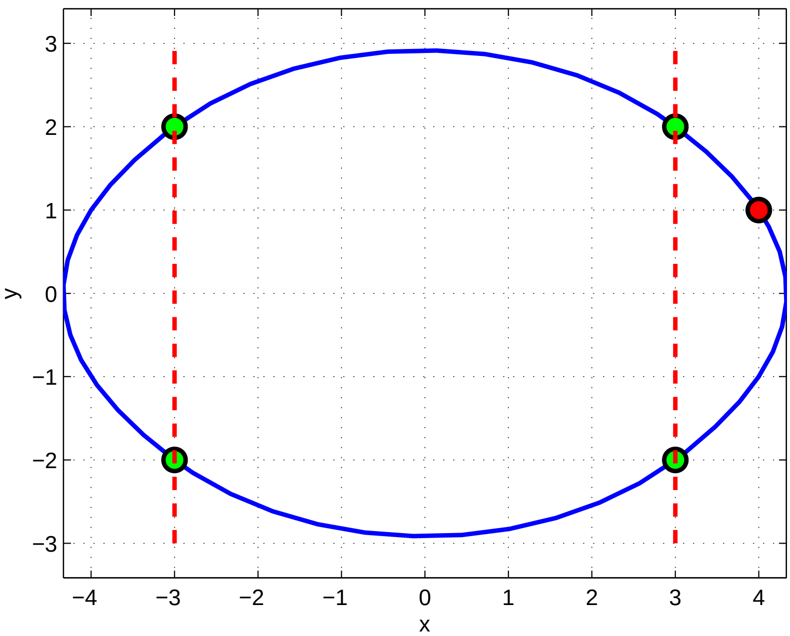
III. latica

$$|u| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow y_N = \frac{C}{a} u = -\frac{C}{a} x$$

$$y^2 + \frac{C}{a}x^2 = const$$

b) Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Nije potrebno određivati smjer trajektorije!

korak	x_0	y_0	latica	const.	jednadžba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	4	1	II.	13	$y^2 = -3x + 13$	3	± 2
2.	3	± 2	III.	8.5	$y^2 + 0.5x^2 = 8.5$	-3	-($\pm$2)
3.	-3	-($\pm$2)	I.	13	$y^2 = 3x + 13$	-3	± 2



Slika 1.16: Trajektorija uz zadani početni uvjet (crveni kružić).

Rješenje 1.10

a) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s^2}u \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = u$$
$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u$$
$$\frac{dy}{dt}y\frac{dt}{dx} = u$$
$$ydy = udx$$
$$y^2 = 2\int udx + const.$$

I. latica

$$e < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow u = -C$$
$$y^2 = -2Cx + const$$

II. latica

$$|e| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow u = 0$$
$$y^2 = const$$

III. latica

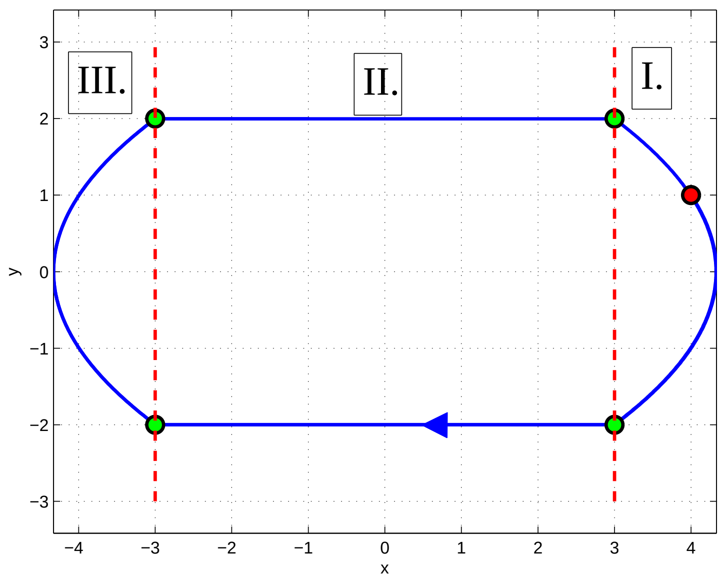
$$e > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow u = C$$
$$y^2 = 2Cx + const$$

b) Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Obavezno označiti smjer trajektorije i napisati kako je određen!

korak	x_0	y_0	latica	const.	jednadžba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	4	1	I.	7	$y^2 = -3x + 13$	3	±2
2.	3	±2	II.	4	$y^2 = 4$	-3	∓2
3.	-3	∓2	III.	13	$y^2 = 3x + 13$	-3	±2

Smjer se može odrediti tako da se izračuna kut trajektorije u zadanom početnom trenutku.

Rješenje 1.11



Slika 1.17: Trajektorija uz zadani početni uvjet (crveni kružić).

a) Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s(s+1)}u \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = u$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt} + y = u$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} + y = u$$

$$\frac{dy}{dx}y + y = u$$

$$\frac{y}{u-y}dy = dx$$

Integriranjem obje strane se dobije:

$$x = -y - u\ln|u-y| + const.$$

I. latica

$$e < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow u = -C$$

$$x = -y + C\ln|-C - y| + const.$$

II. latica

$$|e| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow u = 0$$

$$x = -y + const.$$

III. latica

$$e > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow u = C$$

$$x = -y - C\ln|C - y| + const.$$

b) Kolika smije biti maksimalna brzina izlaza ($y = \frac{dx}{dt}$) na prijelazu u područje određenu s $u = 0$ da bi se sustav smirio u ravnotežnom stanju prije nego što napusti područje određeno s $u = 0$?

U području određenom s $u = 0$ trajektorija se giba po pravcu. Što je veća brzina y s kojom upada u srednju laticu, to je veća udaljenost ravnotežne točke od ishodišta. Najdalje što može biti ravnotežna točka je u $x = -a$ ili $x = a$.

const. se može odrediti iz početnog uvjeta $(x_0, y_0) = (\pm a, y_0)$ gdje je y_0 tražena veličina. Dakle jednadžba je

$$\pm a = -y_0 + const.$$

Konačna točka je određena s $x = \mp a$ (primjetite obrnute predznake od početne točke) te vrijedi jednadžba

$$\mp a = -y + const. \Rightarrow const. = \mp a$$

Uvrštavanjem *const.* u početnu jednadžbu, dobijemo da je

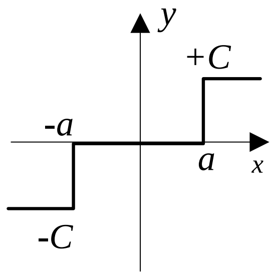
$$\boxed{y_0 = \mp 2a}.$$

Poglavlje 2

Opisna funkcija

Zadatak 2.1

Na slici 2.1 prikazan je nelinearni element tropoložajnog releja. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$ gdje je $X_m > a$.



Slika 2.1: Tropoložajni relej.

a) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.

b) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa.

Zadatak 2.2

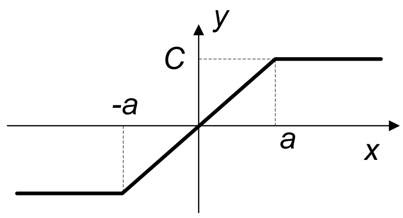
U otvorenom krugu upravljanja nalazi se dvopoložajni relej s histerezom i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}$. Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$. Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-(\frac{x_a}{X_m})^2} - j\frac{4Cx_a}{\pi X_m^2}$.

a) Napišite izraz za osnovni harmonik izlaznog signala iz releja, $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$.

b) Odredite s kolikim pojačanjem proces pojačava drugi po redu harmonik koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa.

Zadatak 2.3

Na slici 2.2 prikazan je nelinearni element zasićenje. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$.



Slika 2.2: Zasićenje.

a) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ kada je $X_m < a$.

b) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.

c) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

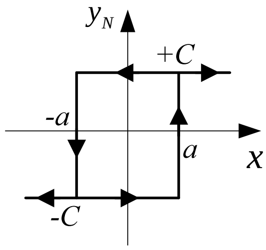
Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ i $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

Zadatak 2.4

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se nelinearni element i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$. Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$. Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa ako je na izlazu iz procesa zabilježen osnovni harmonik oscilacija oblika $y(t) = X_m \sin(\omega t)$.

Zadatak 2.5

Na slici 2.3 prikazan je nelinearni element dvopoložajni relej s histerezom. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$.



Slika 2.3: Dvopoložajni relej s histerezom.

a) Koji harmonici se javljaju ma izlazu iz nelinearnog elementa?

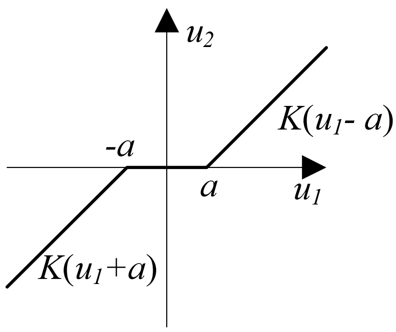
b) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.

c) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

d) Koliko je fazno zaostajanje osnovnog harmonika na izlazu nelinearnog elementa u odnosu na signal na ulazu?

Zadatak 2.6

Na slici 2.4 prikazan je nelinearni element zona neosjetljivosti. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $u_1(t) = X_m \sin(\omega t)$ gdje je $X_m > a$.



Slika 2.4: Zona neosjetljivosti.

a) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $u_2(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.

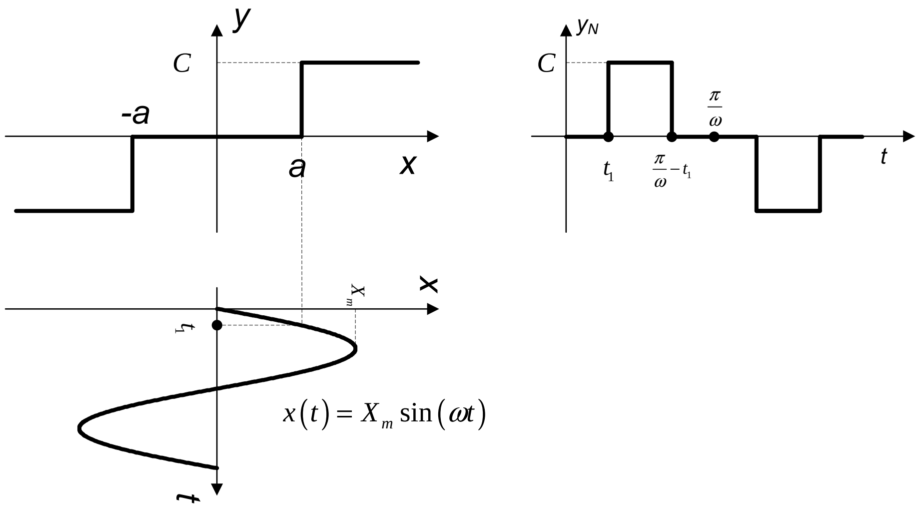
b) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ i $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

2.1 Rješenja

Rješenje 2.1

a) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.



Slika 2.5: Tropoložajni relej i njegov izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

b) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa.

Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin\varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije

$$\begin{aligned} Q_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\int\limits_0^{2\pi} C\cos\varphi d\varphi = \tfrac{2C}{\pi X_m}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1}\cos\varphi d\varphi = \\ &= \tfrac{2C}{\pi X_m}\left[\sin(\pi-\varphi_1)-\sin\varphi_1\right] = 0. \end{aligned}$$

Ovo je očekivano budući da je nelinearnost jednoznačna.
Realni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned}P_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\int\limits_0^{2\pi} C\sin\varphi d\varphi = \tfrac{2C}{\pi X_m}\int\limits_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1}\sin\varphi d\varphi = \\ &= \tfrac{2C}{\pi X_m}\left[-\cos\left(\pi-\varphi_1\right)+\cos\varphi_1\right] = \\ &= \tfrac{4C}{\pi X_m}\cos\varphi_1 = \tfrac{4C}{\pi X_m}\cos\left(\arcsin\tfrac{a}{X_m}\right) = \tfrac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2}\end{aligned}$$

Rješenje 2.2

a) Napišite izraz za osnovni harmonik izlaznog signala iz releja, $u(t) = U_m\sin(\omega t+\varphi)$.

Pojačanje nelinearnog elementa je

$$|G_N| = \sqrt{P_N^2+Q_N^2} = \frac{4C}{\pi X_m}$$

Kut je

$$\varphi = \arctan\frac{P_N}{Q_N} = \arctan\left(-\frac{x_a}{\sqrt{X_m^2-x_a^2}}\right)$$

Izlazni signal ima oblik

$$u\left(t\right) = |G_N|\,X_m\sin\left(\omega t+\varphi\right) = \frac{4C}{\pi}\sin\left[\omega t+\arctan\left(-\frac{x_a}{\sqrt{X_m^2-x_a^2}}\right)\right]$$

b) Odredite s kolikim pojačanjem proces pojačava drugi po redu harmonik koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa.

S obzirom da je nelinearni element neparan, viši harmonici koji se javljaju su neparni. Drugi harmonik po redu koji se javlja na izlazu iz nelinearnog elementa je onaj sa frekvencijom 3ω. Linearni dio taj harmonik pojačava sa iznosom

$$|G\left(j3\omega\right)| = \frac{K}{3\omega\sqrt{9T^2\omega^2+1}}$$

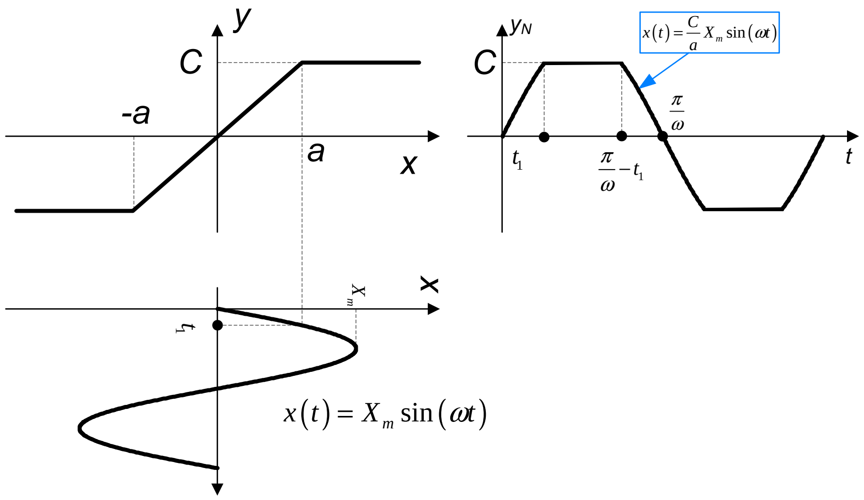
Rješenje 2.3

a) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ kada je $X_m < a$.

$$P_N = \frac{1}{\pi X_m}\int_0^{2\pi} \frac{C}{a} X_m \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi X_m}\frac{C}{a} X_m \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$
$$= \frac{C}{a\pi}\left(\frac{1}{2}2\pi - \frac{\sin 2\pi - \sin 0}{4}\right) = \frac{C}{a}$$

Ovo je naravno jasno i bez računanja budući da za $X_m < a$ nelinearni element je jednak pojačanju. Imaginarni dio je 0 jer je nelinearni element jednoznačan, $Q_N = 0$.

b) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.



Slika 2.6: Zasićenje i njegov izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

c) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin\varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije je 0 budući da je nelinearni element jednoznačan.
Realni dio opisne funkcije:

$$
\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{\pi X_m}\left[\int_0^{\varphi_1} \frac{C}{a} X_m \sin^2\varphi d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi + \int_{\pi-\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} \frac{C}{a} X_m \sin^2\varphi d\varphi + \right.\\
&+ \left.\int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} -C\sin\varphi d\varphi + \int_{2\pi-\varphi_1}^{2\pi} \frac{C}{a} X_m \sin^2\varphi d\varphi\right] = \\
&= \frac{1}{\pi X_m}\left[4\int_0^{\varphi_1} \frac{C}{a} X_m \sin^2\varphi d\varphi + 2\int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\varphi_1} \sin^2\varphi d\varphi &= \int_0^{\varphi_1} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2}\varphi_1 - \frac{1}{4}\left(\sin 2\varphi_1 - \sin 0\right) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{a}{X_m} - \sin\varphi_1\cos\varphi_1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{a}{X_m} - \frac{a}{X_m}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2}\right) \\
\int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} \sin\varphi d\varphi &= -\cos\left(\pi-\varphi_1\right) + \cos\varphi_1 = 2\cos\varphi_1 = 2\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{\pi X_m}\left[2\frac{C}{a}X_m \arcsin\frac{a}{X_m} - 2C\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2} + 4C\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2}\right] = \\
&= \frac{2C}{\pi a}\left[\arcsin\frac{a}{X_m} + 2\frac{a}{X_m}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2}\right]
\end{aligned}
$$

Rješenje 2.4

Neka je signal na ulazu u nelinearni element $x(t) = X_m \sin\omega t$, na izlazu iz nelinearnog elementa (ulazu u proces) $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ i na izlazu iz procesa $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi_y)$.

Vrijedi

$$U_m = |G_N|\, X_m \tag{2.1}$$
$$\varphi_u = \varphi\left(G_N\right) \tag{2.2}$$

i

$$Y_m = |G_P(j\omega)|\, U_m \tag{2.3}$$
$$\varphi_y = \varphi\left(G_P(j\omega)\right) + \varphi_u \tag{2.4}$$

Iz funkcije prijenosa procesa slijedi

$$\begin{aligned}
&G_P\left(j\omega\right) = \tfrac{Kj\omega}{1+jT\omega} = \tfrac{Kj\omega(1-jT\omega)}{1+(T\omega)^2} = \tfrac{K\omega}{1+(T\omega)^2}\left(j+T\omega\right)\\
&\left|G_P\left(j\omega\right)\right| = \tfrac{K\omega}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}\\
&\varphi\left(G_P\left(j\omega\right)\right) = \arctan\tfrac{1}{T\omega}
\end{aligned}$$

Budući da je $\varphi_y = 0$, iz (2.4) slijedi

$$\varphi_u = -\arctan\frac{1}{T\omega}.$$

Budući da je $Y_m = X_m$, iz (**??**) slijedi

$$U_m = X_m\frac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{K\omega}.$$

Uvrštavanjem u (2.1) dobije se

$$\left|G_N\right| = \frac{\sqrt{1+(T\omega)^2}}{K\omega}.$$

S obzirom da je $G_N = P_N + jQ_N$, slijedi da je $\left|G_N\right| = \sqrt{P_N^2+Q_N^2}$ od kuda proizlazi

$$P_N^2 + Q_N^2 = \frac{1+(T\omega)^2}{(K\omega)^2} \tag{2.5}$$

Uvrštavanjem u (2.2) dobije se

$$\varphi\left(G_N\right) = -\arctan\frac{1}{T\omega} = \arctan\left(-\frac{1}{T\omega}\right).$$

S obzirom da je $G_N = P_N + jQ_N$, slijedi da je $\varphi\left(G_N\right) = \arctan\frac{Q_N}{P_N}$ od kuda proizlazi jedno od rješenja

$$\frac{Q_N}{P_N} = -\frac{1}{T\omega}. \tag{2.6}$$

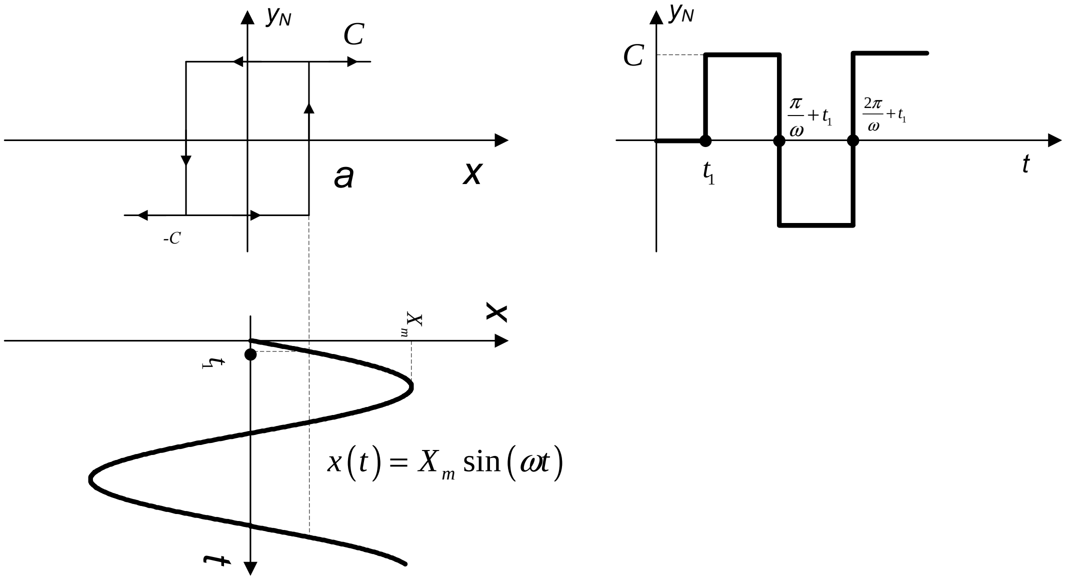
Kombinacijom jednadžbi (2.5) i (2.6) dobije se

$$\boxed{\begin{aligned} P_N &= \tfrac{T}{K}\\ Q_N &= -\tfrac{1}{K\omega}\end{aligned}}$$

Rješenje 2.5

a) Koji harmonici se javljaju ma izlazu iz nelinearnog elementa?
Neparni višekratnici osnovnog harmonika.

b) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.



Slika 2.7: Slika uz rješenje – izlaz iz dvopoložajnog releja s histerezom.

c) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Realni i imaginarni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\int\limits_0^{2\pi} y_N \sin\varphi d\varphi = \tfrac{1}{\pi X_m}\left[\int\limits_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi - \int\limits_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi\right] = \\ &= \tfrac{C}{\pi X_m}\left[-\cos\left(\pi+\varphi_1\right)+\cos\varphi_a+\cos\varphi_a-\cos\left(\pi+\varphi_1\right)\right] = \\ &= \tfrac{4C}{\pi X_m}\cos\varphi_1 = \tfrac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\int\limits_0^{2\pi} y_N \cos\varphi d\varphi = \tfrac{1}{\pi X_m}\left[\int\limits_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} C\cos\varphi d\varphi - \int\limits_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} C\cos\varphi d\varphi\right] = \\ &= \tfrac{C}{\pi X_m}\left[\sin\left(\pi+\varphi_1\right)-\sin\varphi_a-\sin\left(2\pi+\varphi_a\right)+\sin\left(\pi+\varphi_1\right)\right] = \\ &= -\tfrac{4C}{\pi X_m}\sin\varphi_1 = -\tfrac{4Ca}{\pi X_m^2} \end{aligned}$$

d) Koliko je fazno zaostajanje osnovnog harmonika na izlazu nelinearnog elementa u odnosu na signal na ulazu?

$$\varphi = \mathrm{atan}\frac{Q}{P} = \mathrm{atan}\left(-\frac{a}{\sqrt{X_m^2-a^2}}\right)$$

Rješenje 2.6

a) Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $u_2(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.

b) Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

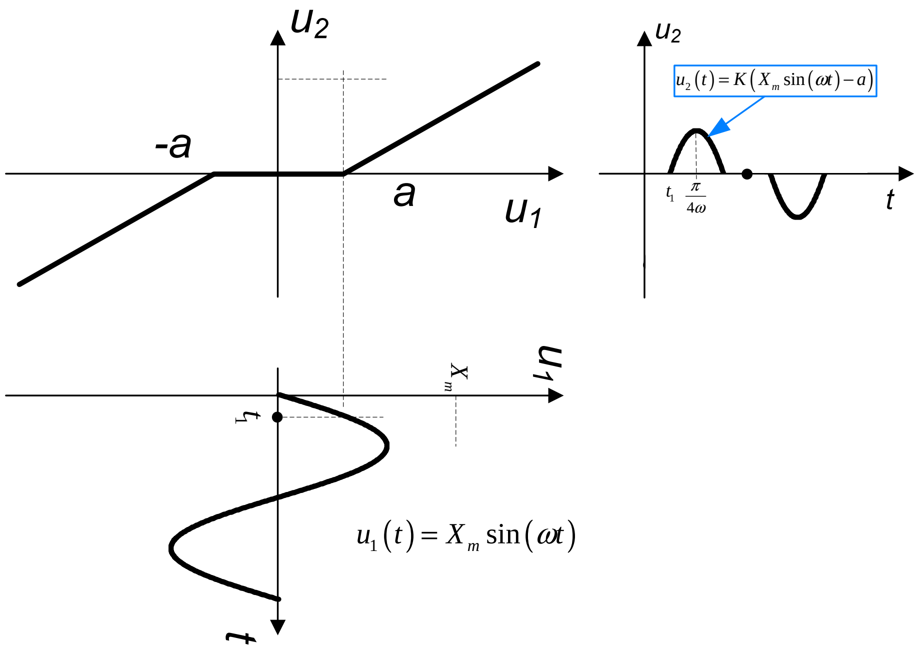
Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin\left(\omega t\right)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin\left(\omega t_1\right) = X_m \sin\varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije je 0 budući da je nelinearni element jednoznačan.
Realni dio opisne funkcije:



Slika 2.8: Zona neosjetljivosti i njezin izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

$$P_N = \frac{4}{\pi X_m}\int\limits_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} u_2 \sin\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi X_m}\int\limits_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} K\left(X_m \sin\varphi - a\right)\sin\varphi d\varphi =$$
$$= \frac{4K}{\pi X_m}\int\limits_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} \left(X_m \sin^2\varphi - a\sin\varphi\right) d\varphi$$

Vrijedi da je $\int \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]$ iz čega slijedi

$$P_N = \frac{4K}{\pi X_m}\left[\frac{X_m}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_a - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_a\right) - a\left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos\varphi_a\right)\right] =$$
$$= \frac{2K}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_a + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_a\right) - \frac{4K}{\pi}\frac{a}{X_m}\cos\varphi_a =$$
$$= K - \frac{2K}{\pi}\left(\arcsin\frac{a}{X_m} + \frac{a}{X_m}\sqrt{1 + \left(\frac{a}{X_m}\right)^2}\right)$$

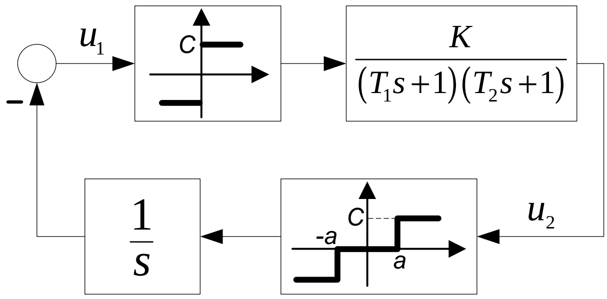
Poglavlje 3

Vlastite oscilacije

Zadatak 3.1

Sustav prikazan slikom 3.1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$. Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija na ulazu u dvopoložajni relej (A i ω). Zadano je: $K = 2$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $a = 0.1$ i $C = 0.7$.

Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{A}\right)^2}$.



Slika 3.1: Zatvoreni krug upravljanja s dva nelinearna elementa.

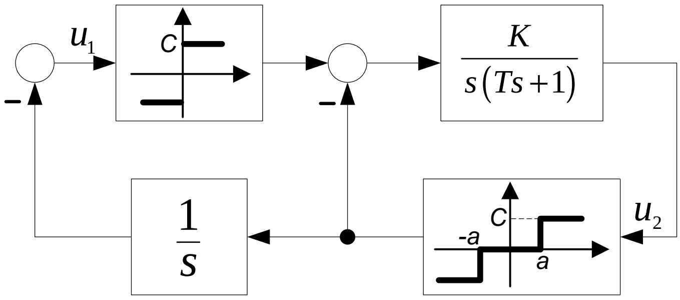
Zadatak 3.2

Proces kojega sačinjavaju dva pola se nalazi u zatvorenom krugu upravljanja s jednoznačnim nelinearnim elementom. Može li u ovakvom sustavu doći do vlastitih oscilacija? Precizno obrazložite odgovor korištenjem metode Goldfarba.

Zadatak 3.3

Sustav prikazan Slikom 3.2 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$. Zadano je: $K = 0.1$, $T = 2$, $a = 0.1$ i $C = 0.7$. Odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija A, B, ω i φ.

Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$.



Slika 3.2: Zatvoreni krug upravljanja s dva nelinearna elementa.

Zadatak 3.4

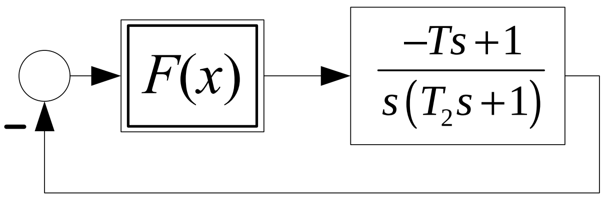
Zadan je sustav upravljanja prikazan slikom 3.3 gdje su $T > 0$ i $T_2 > 0$.

a) Neka je $F(x) = K \cdot x$. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja u ovisnosti o parametru K.

b) Neka je $F(x) = K \cdot x^3$. Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija te odredite njihovu stabilnost.

c) Nacrtajte na istoj slici područje stabilnosti u ravnini X_m–K za slučajeve iz a) i b) dijela zadatka.

Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.



Slika 3.3: Nelinearni sustav upravljanja.

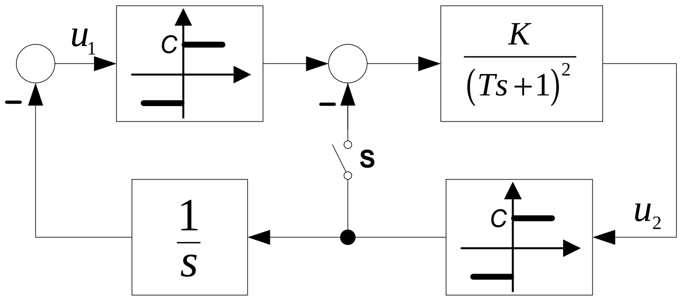
Zadatak 3.5

Zadan je zatvoreni krug upravljanja s tropoložajnim relejem i procesom s dva pola, jednim integratorom i bez nula. Korištenjem metode Goldfarba odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje sustava da NE dođe do pojave vlastitih oscilacija. Dobiveni rezultat izrazite pomoću parametara tropoložajnog releja (a i C).

Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N\left(A\right) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$.

Zadatak 3.6

Nelinearan je sustav prikazan slikom 3.4 gdje je $C = 0.5$ a opisna funkcija dvopoložajnog releja $G_N\left(A\right) = \frac{4C}{\pi A}$.



Slika 3.4: Zatvoreni krug upravljanja s dva nelinearna elementa.

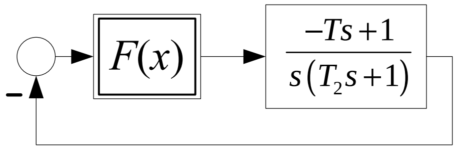
a) Odredite parametre sustava K i T ako se uz *otvorenu* sklopku **S** javljaju vlastite oscilacije $u_2(t) = 0.2\sin\left(0.2t\right)$.

b) Uz određene K i T pod a), odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$ uz *zatvorenu* sklopku **S**.

Zadatak 3.7

Nelinearan je sustav prikazan slikom 3.5. Korištenjem Goldfarbovog principa, odredite kolika mora biti vremenska konstanta T da ne dođe do pojave vlastitih oscilacija u sustavu prikazanom slikom 3.5 ako je nelinearni element $F\left(x\right)$ kvantizator s kvantizacijskom razinom D. Opisna funkcija kvantizatora je

$$G_N(X_m) = \begin{cases} 0, & X_m < \frac{D}{2} \\ \frac{4D}{\pi X_m}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 - \left(\frac{2k-1}{2}\frac{D}{X_m}\right)^2}, & \frac{2n-1}{2}D < X_m < \frac{2n+1}{2}D \end{cases}$$



Slika 3.5: Nelinearni sustav upravljanja.

Zadatak 3.8

U zatvorenom krugu upravljanja s negativnom jediničnom povratnom vezom nalaze se tropoložajni relej i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s)$. Opisna funkcija tropoložajnog releja je

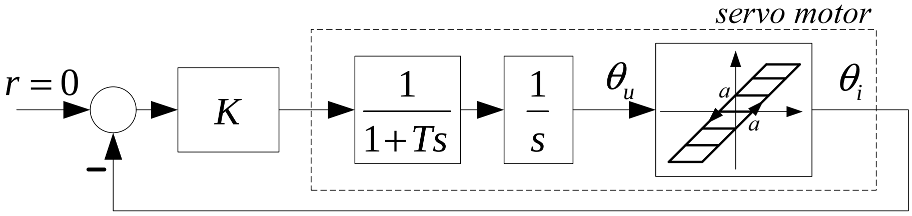
$$G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\frac{x_a}{X_m}\right)^2}$$

gdje je X_m amplituda ulaznog sinusnog signala, C izlaz iz tropoložajnog releja, a x_a širina zone neosjetljivosti tropoložajnog releja. Korištenjem Goldfarbovog principa, odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje procesa da u ovakvom sustavu ne dođe do pojave vlastitih oscilacija.

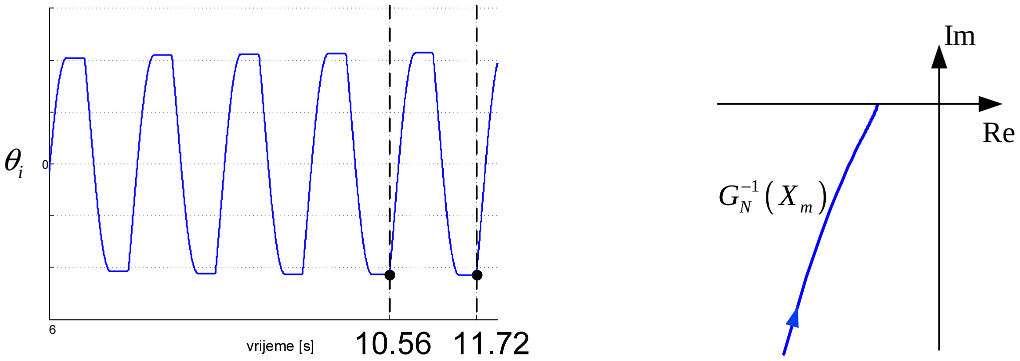
Zadatak 3.9

Slikom 3.6 je prikazan zatvoreni krug upravljanja servo motorom korištenjem P regulatora. Servo motor inherentno sadrži zazor čija je opisna funkcija

$$\begin{aligned} G_N(X_m) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2a}{X_m}-1\right) - \left(\frac{2a}{X_m}-1\right)\sqrt{1-\left(\frac{2a}{X_m}-1\right)^2}\right] + \\ &+ j\frac{4a}{\pi X_m}\left(\frac{a}{X_m}-1\right). \end{aligned}$$



Slika 3.6: Zatvoreni krug upravljanja servo motorom.



(a) (b)

Slika 3.7: (a) Izlazni signal iz zazora, θ_i i (b) negativna inverzna opisna funkcija zazora, $-G_N^{-1}(X_m)$.

a) Uz parametre servo motora $T = 0.5$s i $a = 0.05$rad, te proporcionalni regulator $K = 20\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{rad}}$ snimljene su oscilacije na izlazu iz zazora koje su prikazane slikom 3.7(a). Odredite amplitudu vlastitih oscilacija na ulazu u zazor, $\theta_u = X_m \sin(\omega t)$. Ukoliko postoji više rješenja, ne treba raditi analizu stabilnosti vlastitih oscilacija već samo navesti sva rješenja.

b) Korištenjem pricipa Goldfarba te grafičkog prikaza $-G_N^{-1}(X_m)$ na slici 3.7(b) pokažite da ako vrijedi $K \cdot T < 1$ (uz $K > 0$ i $T > 0$) nikada ne može doći do vlastitih oscilacija u zatvorenom krugu upravljanja prikazanom slikom 3.6.

3.1 Rješenja

Rješenje 3.1

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga upravljanja može se napisati kao:

$$\begin{array}{l} 1+G_{N1}\left(A\right)\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}G_{N2}\left(B\right)\frac{1}{s}=0 \\ T_1T_2s^3+\left(T_1+T_2\right)s^2+s+KG_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right)=0 \end{array}.$$

Supstitucijom $s=j\omega$ dobije se

$$-jT_1T_2\omega^3-\left(T_1+T_2\right)\omega^2+j\omega+KG_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right)=0.$$

Iz imaginarnog dijela

$$-T_1T_2\omega^3+\omega=0$$

direktno slijedi frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}=0.707$$

Iz realnog dijela

$$-\left(T_1+T_2\right)\omega^2+KG_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right)=0$$

ćemo dobiti traženu amplitudu A.
Opisne funkcije su

$$\begin{array}{l} G_{N1}\left(A\right)=\frac{4C}{A\pi} \\ G_{N2}\left(B\right)=\frac{4C}{B\pi}\sqrt{1-\left(\frac{x_a}{B}\right)^2} \end{array}.$$

Sada je potrebno izraziti amplitudu B pomoću amplitude A tako da ostane jedna jednadžba s jednom nepoznanicom.

$$B=\left|G_P\left(j\omega\right)\right|G_{N1}\left(A\right)A=\frac{K}{\sqrt{\left(T_1\omega\right)^2+1}\sqrt{\left(T_2\omega\right)^2+1}}G_{N1}\left(A\right)A$$

$$B=\frac{K\sqrt{T_1T_2}}{T_1+T_2}G_{N1}\left(A\right)A$$

$$G_{N2}\left(B\right)=\frac{4C\left(T_1+T_2\right)}{\pi G_{N1}\left(A\right)AK\sqrt{T_1T_2}}\sqrt{1-\left(\frac{x_a\left(T_1+T_2\right)}{K\sqrt{T_1T_2}}\frac{1}{G_{N1}\left(A\right)A}\right)^2}=$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{K\sqrt{T_1 T_2}} \sqrt{1 - \left(\underbrace{\frac{x_a (T_1 + T_2)\pi}{4CK\sqrt{T_1 T_2}}}_{\alpha} \right)^2}$$

Iz realnog dijela sada slijedi:

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = K \frac{4C}{A\pi} \frac{T_1 + T_2}{K\sqrt{T_1 T_2}} \sqrt{1 - \alpha^2}$$

I na kraju

$$A = \frac{4C\sqrt{T_1 T_2}}{\pi} \sqrt{1 - \alpha^2}$$
$$\alpha = 0.119005$$

i

$$A = 1.2515$$

Rješenje 3.2

Nyquistov dijagram procesa s dva pola prolazi kroz IV. i III. kvadrant. Jednoznačni nelinearni element ima samo realni dio, tako da negativni inverz se nalazi isključivo na realnoj osi u Nyquistovoj ravnini. Zaključak je da nikada neće doći do presjecišta između dvije krivulje.

Rješenje 3.3

Dvopoložajni relej ima opisnu funkciju

$$G_{N1}(A) = \frac{4C}{\pi A}$$

a tropoložajni relej

$$G_{N2}(B) = \frac{4C}{\pi B} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{B}\right)^2}.$$

Prvo je potrebno doći do karaktersitične jednadžbe zatvorenog kruga. Mogu se napisati sljedeće jednadžbe:

$$u_1 = -\frac{1}{s} G_{N2}(B) u_2 \tag{3.1}$$
$$u_2 = \frac{K}{s(Ts+1)} \left[G_{N1}(A) u_1 - G_{N2}(B) u_2 \right] \tag{3.2}$$

Uvrštavanjem (3.1) u (3.2) i kraćenjem u_2 dobije se karakteristična jednadžba zatvorenog kruga:

$$\boxed{Ts^3 + s^2 + KG_{N2}(B)\,s + KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B) = 0.} \tag{3.3}$$

Uvrštavanjem $s = j\omega$ dobije se:

- imaginarni dio $\omega^2 = \frac{K}{T}G_{N2}(B)$ i
- realni dio $\omega^2 = KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B)$

Kombinacijom ove dvije jednadžbe dobije se

$$G_{N1}(A) = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4CT}{\pi} = 1.7825}.$$

Veza između amplitude A i B se može najjednostavnije naći iz (3.1) kako slijedi:

$$|u_1| = \left|\frac{1}{s}G_{N2}(B)\right| |u_2|$$

$$A = \frac{1}{\omega}G_{N2}(B)\,B = \frac{1}{\omega}\frac{4C}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{B}\right)^2}$$

Uvrštavanjem poznatog A i ω iz imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe dobije se

$$\boxed{B = \sqrt{\left(\frac{4CTK}{\pi}\right)^2 + a^2} = 0.2044}.$$

Frekvencija oscilacija se jednostavno dobije iz imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{T}G_{N2}(B)}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{T^2 + \left(\frac{\pi a}{4CK}\right)^2}} = 0.4361}.$$

Kut φ koji se javlja između u_1 i u_2 se odredi opet iz (3.1) kao

$$\angle u_1 = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \angle u_2$$

$$\angle u_2 = \angle u_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}},$$

što je logično budući da su ta dva signala vezana samo preko integratora (i negativnog predznaka).

Rješenje 3.4

a) U ovom slučaju imamo linearan sustav upravljanja gdje je $F(x)$ zapravo pojačanje K. Zatvoreni krug upravljanja je onda:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_o}{1 + G_o} = \frac{-Ts + 1}{\frac{T_2}{K}s^2 + \frac{1-KT}{K}s + 1}$$

Za stabilnost je dovoljno osigurati da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe pozitivni, iz čega slijedi

$$\boxed{K \in \left(0, \frac{1}{T}\right)}.$$

b) Odredimo prvo opisnu funkciju kubne funkcije:

$$\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{\pi X_m} \int\limits_0^{2\pi} K(X_m \sin\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} (\sin\varphi)^4 d\varphi = \frac{KX_m^2}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^4 d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1 - 2\cos 2\varphi + (\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} 2 - 2\cos 2\varphi - (\sin 2\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} 2 - 2\cos 2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi d\varphi = \\
&= \boxed{\frac{3}{4}KX_m^2}
\end{aligned}$$

Sada jednostavno određujemo karakterističnu jednadžbu budući da je zatvoreni krug klasičnog oblika:

$$\begin{array}{l} 1 + G_N\left(X_m\right)G_o\left(j\omega\right) = 0 \\ T_2(j\omega)^2 + (j\omega) + G_N\left(X_m\right)\left(-Tj\omega + 1\right) = 0 \\ \left(G_N - \omega^2 T_2\right) + j\left(\omega - \omega T G_N\right) = 0 \end{array}$$

- imaginarni dio $G_N = \frac{1}{T}$ i
- realni dio $\omega = \sqrt{\frac{G_N}{T_2}}$.

Iz imaginarnog dijela odmah slijedi amplituda vlastitih oscilacija:

$$\boxed{X_m = \frac{2}{\sqrt{3T}}\frac{1}{\sqrt{K}}}.$$

Uvrštavanjem ove amplitude u realni dio dobije se frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}}}.$$

Za stabilnost treba provjeriti uvjet

$$\frac{\partial R}{\partial X_m}\frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

gdje su

$$R = \frac{3}{4}KX_m^2 - \omega^2 T_2$$

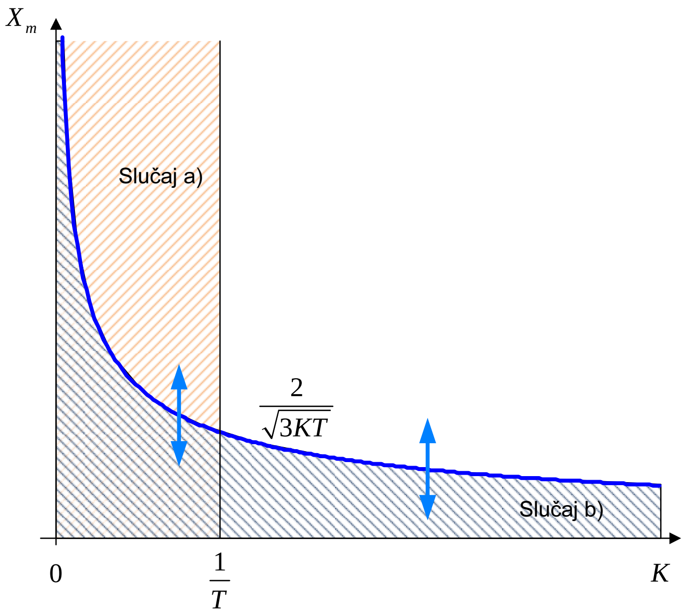
i

$$I = \omega\left(1 - \frac{3}{4}KTX_m^2\right)$$

realni i imaginarni djelovi karakteristične jednadžbe. Slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial X_m} &= \frac{3}{2}KX_m = \sqrt{\frac{3K}{T}} \\ \frac{\partial I}{\partial \omega} &= 1 - \frac{3}{4}KTX_m^2 = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial X_m} &= -\frac{3}{2}KTX_m = -\sqrt{3KT} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega} &= -2\omega T_2 = -\sqrt{\frac{T_2}{T}} \end{aligned}$$

odnosno $-\sqrt{3KT_2} > 0$ što nije istina. Zaključak je da vlastite oscilacije $\boxed{\text{nisu stabilne}}$.



Slika 3.8: Područje stabilnosti vlastitih oscilacija.

c) Rješenje je prikazano slikom 3.8.

Rješenje 3.5

Goldfarbova metoda se svodi na korištenje relacije

$$-\frac{1}{G_N(X_m)} = G_P(j\omega)$$

na način da se lijeva i desna strana zasebno nacrtaju. Presjecište između ove dvije krivulje daje točku vlastitih oscilacija (stabilnih ili nestabilnih).

Opisna funkcija tropoložajnog releja ima samo realnu komponentu, tako da i njezin negativni inverz ima samo realnu komponentu. Određivanjem ekstrema (negativnog) inverza može se odrediti koji dio negativne realne osi zauzima negativni inverz opisne funkcije:

$$\frac{1}{G_N(X_m)} = \frac{\pi}{4C}\frac{X_m^2}{\sqrt{X_m^2 - a^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_m}\frac{1}{G_N(X_m)} = 0 \Rightarrow X_m = a\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{1}{G_N(X_m)}\right|_{X_m = a\sqrt{2}} = \frac{\pi a}{2C}$$

Dakle lijeva strana jednadžbe zauzima realni dio osi na području $\left(-\infty, -\frac{\pi a}{2C}\right)$.

Desna strana je Nyquistov dijagram procesa. Podatak da proces ima dva pola, integrator i da nema nula nam služi tome da zaključimo da Nyquistov dijagram procesa (otvorenog kruga bez nelinearnog elementa) siječe realnu os jednom i to u točki koja je udaljena od ishodišta $\frac{1}{A.O.}$ gdje je $A.O.$ amplitudno osiguranje.

Budući da presjeka ne smije biti slijedi:

$$\frac{1}{A.O.} < \frac{\pi a}{2C}$$

odnosno

$$\boxed{A.O. > \frac{2C}{\pi a}}.$$

Rješenje 3.6

a) Odredite parametre sustava K i T ako se uz *otvorenu* sklopku **S** javljaju vlastite oscilacije $u_2(t) = 0.2\sin(0.2t)$.

Za nelinearni sustav (s otvorenom sklopkom) možemo pisati:

$$1 + G_{N1}(A)\frac{K}{(Ts+1)^2}G_{N2}(B)\frac{1}{s} = 0$$

i iz toga slijedi karakteristična jednadžba sustava

$$\begin{aligned} T^2s^3 + 2Ts^2 + s + KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B) = 0 \\ -jT^2\omega^3 - 2T\omega^2 + j\omega + KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B) = 0 \end{aligned}$$

Iz imaginarnog dijela se odmah dobije

$$-jT^2\omega^3 + \omega = 0$$

iz čega slijedi

$$\boxed{T = \frac{1}{\omega} = 5}$$

Iz realnog dijela slijedi:

$$-2T\omega^2 + KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B) = 0$$

$$K = \frac{2T\omega^2}{G_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right)} = 2\omega\left(\frac{\pi}{4C}\right)^2 AB$$

Za izračun nam je potrebna i amplituda vlastitih oscilacija A. Veza između A i B se može dobiti iz veze preko integratora:

$$\begin{array}{l} |u_1| = \left|\frac{1}{s}G_{N2}\left(B\right)\right| |u_2| \\ A = \frac{1}{\omega}G_{N2}\left(B\right)B \end{array}$$

$$A = \frac{1}{\omega}\frac{4C}{\pi} \tag{3.4}$$

Sada se može odrediti traženo pojačanje K:

$$\boxed{K = \frac{\pi B}{2C} = 0.6283}$$

b) Uz određene K i T pod a), odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$ uz *zatvorenu* sklopku **S**.

Kada je sklopka zatvorena, vrijedi sljedeća karakteristična jednadžba nelinearnog sustava:

$$\begin{array}{l} u_1 = -\frac{1}{s}G_{N2}\left(B\right)u_2 \\ u_2 = \frac{K}{(Ts+1)^2}\left[G_{N1}\left(A\right)u_1 - G_{N2}\left(B\right)u_2\right] \\ 1 = \frac{K}{(Ts+1)^2}\left[-\frac{1}{s}G_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right) - G_{N2}\left(B\right)\right] \\ T^2s^3 + 2Ts^2 + s + KG_{N2}\left(B\right)s + KG_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right) = 0 \\ -jT^2\omega^3 - 2T\omega^2 + j\omega\left[1 + KG_{N2}\left(B\right)\right] + KG_{N1}\left(A\right)G_{N2}\left(B\right) = 0 \end{array}$$

Imaginarni dio:

$$\begin{array}{l} T^2\omega^2 = 1 + KG_{N2}\left(B\right) \\ G_{N2}\left(B\right) = \frac{T^2\omega^2 - 1}{K} \end{array}$$

Realni dio:

$$\begin{array}{l} 2T\omega^2 = K\omega G_{N2}\left(B\right) \\ G_{N2}\left(B\right) = \frac{2T\omega}{K} \end{array}$$

Kombinacijom imaginarnog i realnog dijela dobije se frekvencija vlastitih oscilacija:

$$T^2\omega^2 - 2T\omega - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{T}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1 + \sqrt{2}}{T} = 0.4828}$$

Uvrštavanjem u realni dio dobije se:

$$\frac{4C}{\pi B} = \frac{2T\omega}{K}$$
$$B = \frac{2CK}{\pi T\omega}$$

$$\boxed{B = \frac{2CK}{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)} = 0.0828}$$

Amplituda A se jednostavno izračuna iz (3.4):

$$\boxed{A = \frac{1}{\omega}\frac{4C}{\pi} = \frac{4CT}{\pi\left(1+\sqrt{2}\right)} = 1.3186}$$

Kut φ koji se javlja između u_1 i u_2 se odredi kao

$$\angle u_1 = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \angle u_2$$

$$\angle u_2 = \angle u_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}},$$

što je logično budući da su ta dva signala vezana samo preko integratora (i negativnog predznaka).

Rješenje 3.7

Potrebno je naći za koju ulaznu amplitudu postoji ekstrem opisne funkcije kvantizatora. Poznato je iz laboratorijskih vježbi, a i jednostavno se pokaže, da će se maksimum postići kada je aktivan samo jedna kvantizacijska razina.

$$G_N\left(X_m\right) = \frac{4D}{\pi X_m}\sqrt{1 - \frac{1}{4}\left(\frac{D}{X_m}\right)^2}$$

$$\frac{\partial G_N\left(X_m\right)}{\partial \frac{D}{X_m}} = 0 \Rightarrow \frac{D}{X_m} = \sqrt{2}$$

$$G_N(X_m)_{\max} = G_N\left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right) = \frac{4}{\pi}$$

Iz imaginarnog $V(\omega)$ i realnog $U(\omega)$ dijela frekvencijske karakteristike procesa (koji su već određeni u a) dijelu zadatka) možemo odrediti gdje Nyquistova krivulja siječe realnu os:

$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\} = V(\omega) = 0 \Rightarrow TT_2\omega^2 - 1 = 0$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}}$$

Pri toj frekvenciji je realni dio:

$$U(\omega) = -\frac{T_2 + T}{\frac{T_2}{T} + 1} = -T$$

Po Goldfarbu, ne smije doći do presijecanja negativnog inverza opisne funkcije nelinearnog elementa i Nyquistove karakteristike sustava, tj.

$$U\left(\frac{1}{\sqrt{TT_2}}\right) < G_{N,\max}^{-1}$$

iz čega slijedi rješenje:

$$\boxed{T < \frac{\pi}{4}}$$

Rješenje 3.8

Goldfarbov princip je prikazan jednadžbom

$$-G_N^{-1}(X_m) = G(j\omega).$$

Da bi došlo do vlastitih oscilacija, dvije krivulje moraju imati presjecište. Opisna funkcija tropoložajnog releja ima samo realnu komponentu (jer je jednoznačna) što znači da se njezin negativni inverz nalazi na lijevoj negativnoj realnoj osi. Maksimum opisne funkcije je:

$$\frac{dG_N(X_m)}{dX_m} = 0 \Rightarrow X_m = x_a\sqrt{2}$$

$$G_{N,\max}\left(x_a\sqrt{2}\right) = \frac{2C}{\pi x_a}$$

Iz ovoga slijedi da negativni inverz opisne funkcije zauzima realnu os na području $\left(-\infty, -\frac{\pi x_a}{2C}\right)$. Znači da za aomplitudno osiguranje vrijedi:

$$\frac{1}{A.O.} < \frac{\pi x_a}{2C}$$

odnosno

$$\boxed{A.O. > \frac{2C}{\pi x_a}}$$

Rješenje 3.9

a) Uz parametre servo motora $T = 0.5\mathrm{s}$ i $a = 0.05\mathrm{rad}$, te proporcionalni regulator $K = 20\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{rad}}$ snimljene su oscilacije na izlazu iz zazora koje su prikazane slikom 3.7(a). Odredite amplitudu vlastitih oscilacija na ulazu u zazor, $\theta_u = X_m \sin(\omega t)$. Ukoliko postoji više rješenja, ne treba raditi analizu stabilnosti vlastitih oscilacija već samo navesti sva rješenja.

Iz izlaznog signala zazora se može očitati frekvencija oscilacija koja je jednaka frekvenciji vlastitih oscilacija:

$$\omega = \frac{2\pi}{11.72 - 10.56} = 5.4165$$

Za daljnji račun se možemo poslužiti Goldfarbovim principom zapisanim u obliku: $G_N = -G_P^{-1}$. Na taj način izbjegavamo traženje recipročne vrijednosti komplicirane opisne funkcije zazora.

$$G_P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + jT\omega)} \Rightarrow -G_P^{-1}(j\omega) = \frac{T\omega^2}{K} - j\frac{\omega}{K}$$

S obzirom da je imaginarni dio opisne funkcije zazora jednostavnijeg oblika, dovoljno je izjednačiti imaginarne dijelove:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left\{-G_P^{-1}\right\} &= \mathrm{Im}\left\{G_N\right\} \\ \frac{4a}{\pi X_m}\left(\frac{a}{X_m} - 1\right) &= -\frac{\omega}{K} \end{aligned}$$

$$\frac{\omega}{K}X_m^2 - \frac{4a}{\pi}X_m + \frac{4a^2}{\pi} = 0$$

$$X_m = \frac{2Ka}{\pi\omega}\left[1 \pm \sqrt{1 - \pi\frac{\omega}{K}}\right] = 0.1176\,(1 \pm 0.3862)$$

Odavde se dobiju dva rješenja: $\boxed{X_{m,1} = 0.163}$ i $\boxed{X_{m,2} = 0.0722}$

Ako se sada izjednače realni dijelovi u Goldfarbovoj jednadžbi, dobije se da je jednakost ispunjena za $X_{m,1} = 0.163$ što upućuje na ispravno rješenje.

b) Korištenjem pricipa Goldfarba te grafičkog prikaza $-G_N^{-1}(X_m)$ na slici 3.7(b) pokažite da ako vrijedi $K \cdot T < 1$ (uz $K > 0$ i $T > 0$) nikada ne može doći do vlastitih oscilacija u zatvorenom krugu upravljanja prikazanom slikom 3.6.

Za rješavanje ovog zadatka ćemo iskoristiti sliku negativnog inverza opisne funkcije zazora. Ekstremne vrijednosti opisne funkcije su:

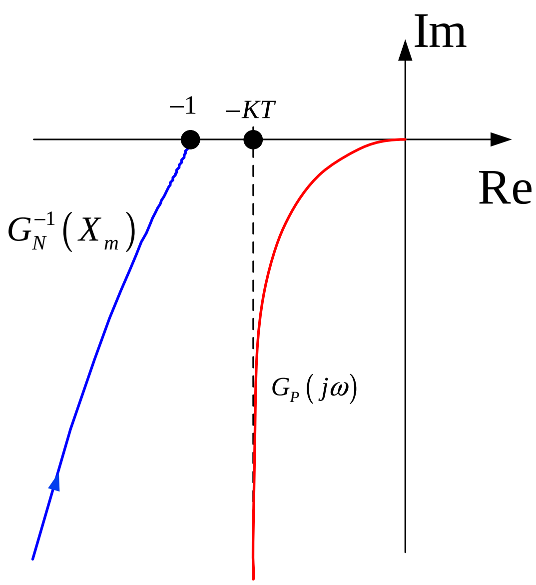
$$
\begin{aligned}
X_m = a \quad &\Rightarrow \quad G_N = 0 + j0 \\
& \quad\quad -G_N^{-1} = \infty \\
X_m = \infty \quad &\Rightarrow \quad G_N = 1 + j0 \\
& \quad\quad -G_N^{-1} = -1
\end{aligned}
$$

Odredimo sada Nyquistov dijagram procesa:

$$
G_P(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + jT\omega)} = \frac{-KT}{(T\omega)^2 + 1} - j\frac{K}{\omega}\frac{1}{(T\omega)^2 + 1}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Im} = \infty, \mathrm{Re} = -KT \\
\omega = \infty \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Im} = 0, \mathrm{Re} = 0
\end{aligned}
$$

Kada se obje krivunje nacrtaju jedna pokraj druge dobije se slika 3.9 iz koje je očigledno da uz $KT < 1$ sigurno nikada neće doći do presijecanja dvije krivulje, tj. nikada neće doći do vlastitih oscilacija.



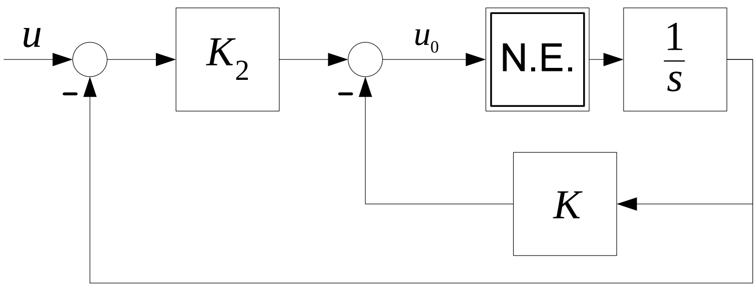
Slika 3.9: Određivanje postojanja vlastitih oscilacija korištenjem postupka Goldfarba.

Poglavlje 4

Prinudne oscilacije

Zadatak 4.1

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 4.1 gdje je N.E. nelinearni element. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika $u(t) = U_m \sin(t)$ zbog čega je sustav uveden u prinudne oscilacije koje na ulazu u nelinearni element imaju oblik $u_0(t) = A \sin(t + \varphi)$.



Slika 4.1: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

a) Odredite karakterističnu jednadžbu sustava ako opisna funkcija nelinearnog elementa dobivena harmoničkom linearizacijom ima oblik $G_N(A) = P_N(A) + jQ_N(A)$.

b) Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je nelinearni element dvopoložajni relej s opisnom funkcijom $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$. Zadano je $K_2 = 1.5$, $K = 1$ i $C = 0.7$.

Zadatak 4.2

Zatvoreni krug upravljanja sastoji se od linearnog procesa $G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ i nelinearnog elementa $G_N(X_m) = P_N(X_m) + jQ(X_m)$. Na ulaz zatvorenog kruga upravljanja narinut je signal oblika

$$f(t) = F_v \sin(\omega_v t).$$

a) Napišite jednadžbu koja je pogodna za grafičko određivanje prinudnih oscilacija oblika $x(t) = X_m \sin(\omega_v t + \varphi)$ (izvod nije potreban).

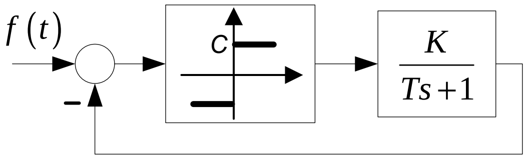
b) Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

Zadatak 4.3

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 4.2 gdje je opisna funkcija dvopoložajnog releja $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$

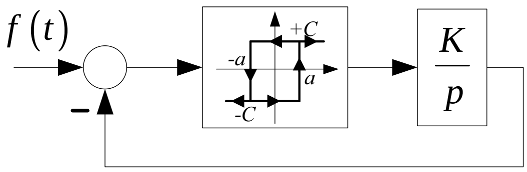
Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala F_v dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je $K = 2$ i $C = 0.7$.



Slika 4.2: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

Zadatak 4.4

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 4.3 gdje je $K = 1$, $C = 1$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$ ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude $X_m = \sqrt{3}$ i frekvencije $\omega = 1\frac{\mathrm{rad}}{s}$.
Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j\frac{4Ca}{\pi X_m^2}$.



Slika 4.3: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

4.1 Rješenja

Rješenje 4.1

a) Odredite karakterističnu jednadžbu sustava ako opisna funkcija nelinearnog elementa dobivena harmoničkom linearizacijom ima oblik $G_N(A) = P_N(A) + jQ_N(A)$.

$$\begin{aligned} &u_0 = K_2\left(u - y\right) - Ky = K_2 u - \left(K_2 + K\right) y \\ &y = \tfrac{1}{s} G_N\left(A\right) u_0 \end{aligned}$$

daju

$$u_0\left[s + \left(K_2 + K\right) G_N\left(A\right)\right] = K_2 s u$$

Za prinudne oscilacije vrijedi

$$u_0 = A \sin\left(\omega_u t + \varphi\right)$$

i onda se ulazni signal može pisati kao

$$\begin{aligned} u &= U_m \sin\left(\omega_u t\right) = U_m \sin\left(\omega_u t + \varphi - \varphi\right) = \\ &= U_m \cos\varphi \sin\left(\omega_u t + \varphi\right) - U_m \sin\varphi \cos\left(\omega_u t + \varphi\right) \\ u &= \tfrac{U_m}{A}\left(\cos\varphi - \tfrac{\sin\varphi}{\omega_u} s\right) u_0. \end{aligned}$$

Karakteristična jednadžba je onda

$$s + \left(K_2 + K\right) G_N\left(A\right) = K_2 \frac{U_m}{A} s \left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\omega_u} s\right)$$

Frekvencija pobudnog signala je $\omega_u = 1$ te supstitucijom $s = j\omega_u$ dobije se

$$j\omega_u + \left(K_2 + K\right)\left[P_N\left(A\right) + jQ_N\left(A\right)\right] = K_2 \frac{U_m}{A} \omega_u \left(j\cos\varphi + \sin\varphi\right)$$

Realni dio je:

$$\sin\varphi = \frac{K + K_2}{K_2 \omega} \frac{A}{U_m} P_N\left(A\right)$$

Imaginarni dio je:

$$\cos\varphi = \frac{\omega + \left(K + K_2\right) Q_N\left(A\right)}{K_2 \omega} \frac{A}{U_m}$$

b) Odredite za koju vrijednost amplitude pobudnog signala dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je nelinearni element dvopoložajni relej s opisnom funkcijom $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$. Zadano je $K_2 = 1.5$, $K = 1$ i $C = 0.7$.

Uvrstimo $Q_N = 0$. Budući da vrijedi $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$, iz realnog i imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe dobije se

$$\sin\varphi = \frac{K+K_2}{K_2\omega}\frac{1}{U_m}\frac{4C}{\pi}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{K_2}\frac{A}{U_m}$$

$$U_m = \sqrt{\left(\frac{A}{K_2}\right)^2 + \left(\frac{4C}{\pi}\frac{K+K_2}{K_2\omega}\right)^2}$$

$$A = K_2\sqrt{U_m^2 - \left(\frac{4C}{\pi}\frac{K+K_2}{K_2\omega}\right)^2}$$

Da bi postojalo rješenje, izraz pod korijenom mora biti veći od 0.

$$U_m > \frac{4C}{\pi}\frac{K+K_2}{K_2\omega} = 1.485$$

Rješenje 4.2

a)

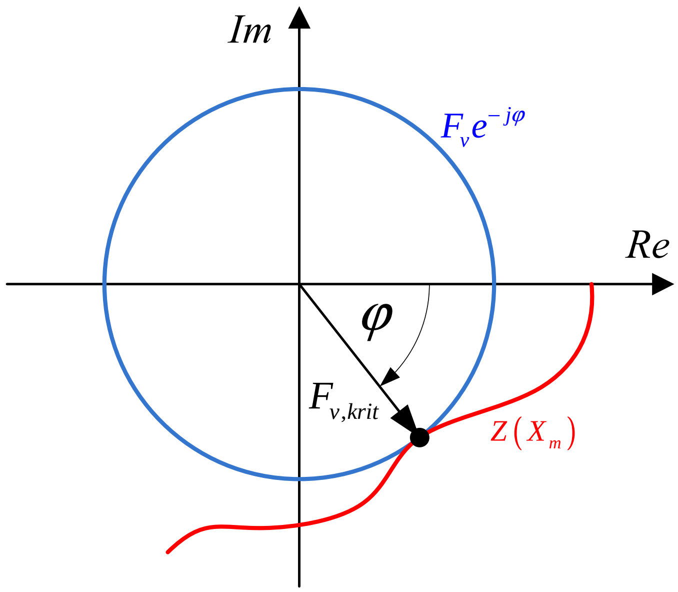
$$\underbrace{X_m\frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}$$

b) Rješenje je prikazano slikom 4.4.

Rješenje 4.3

Za strukturu nelinearnog sustava zadanog slikom, vrijedi sljedeća relacija za određivanje prinudnih oscilacija:

$$\underbrace{X_m\left[1 + \frac{B(j\omega_v)}{A(j\omega_v)}\left(P_N + jQ_N\right)\right]}_{Z_m} = F_v e^{-j\varphi}$$



Slika 4.4: Grafičko određivanje prinudnih oscilacija.

$$Z_m = X_m \left[1 + \frac{K}{Ts+1} P_N\right] = X_m \frac{1 + KP_N + jT\omega}{1 + jT\omega}$$

$$|Z_m| = X_m \frac{\sqrt{(1 + KP_N)^2 + (T\omega)^2}}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = F_v$$

$$X_m^2 \frac{1 + 2KP_N + (KP_N)^2 + (T\omega)^2}{1 + (T\omega)^2} = F_v^2$$

$$X_m^2 \left[1 + \underbrace{\frac{8KC}{\pi\left[1 + (T\omega)^2\right]}}_{a} \frac{1}{X_m} + \underbrace{\frac{8KC}{\pi\left[1 + (T\omega)^2\right]}}_{a} \frac{2KC}{\pi} \frac{1}{X_m^2}\right] = F_v^2$$

Uz $\omega_v = \frac{1}{T}$, kao što je zadano u zadatku, vrijedi:

$$X_m^2 + \frac{4KC}{\pi} X_m + 8\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 - F_v^2 = 0$$

Da bi postojale prinudne oscilacije, treba biti

$$X_m = \frac{-\frac{4KC}{\pi} \pm \sqrt{16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 - 32\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 + 4F_v^2}}{2} > 0$$

odnosno

$$-\frac{4KC}{\pi} \pm \sqrt{-16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 + 4F_v^2} > 0$$

$$-16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2 + 4F_v^2 > 16\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2$$

$$F_v^2 > 8\left(\frac{KC}{\pi}\right)^2$$

$$\boxed{F_v > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}KC = 1.2604}$$

Rješenje 4.4

S obzirom da su prinudne oscilacije frekvencije $\omega = 1\frac{\text{rad}}{s}$, onda je i pobudni signal iste frekvencije, tj.

$$\omega_v = 1\frac{\text{rad}}{s}.$$

Jednadžba koja vrijedi za prinudne oscilacije je:

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}.$$

U zadanom slučaju vrijedi:

$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= j\omega \\
B(j\omega) &= K \\
Q(X_m) &= -\frac{4Ca}{\pi X_m^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} = -0.3676 \\
P(X_m) &= \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} = \frac{2}{\pi} = 0.6366
\end{aligned}$$

Nadalje

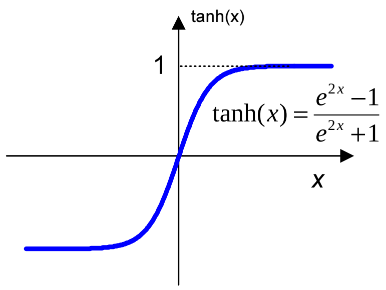
$$\begin{aligned}
F_v = |Z_m| &= X_m\sqrt{\left(1 + \frac{KQ}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{KP}{\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{\left(\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = \\
&= 1.5543
\end{aligned}$$

Poglavlje 5

Stabilnost

Zadatak 5.1

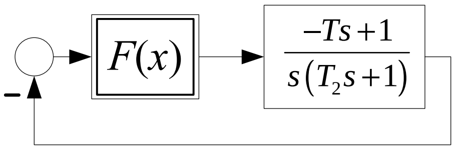
Jednadžbom i slikom 5.1 je zadana statička karakteristika nelinearnog elementa. Odredite najmanju klasu nelinearnosti kojoj pripada zadani nelinearni element.



Slika 5.1: Karakteristika nelinearnog elementa.

Zadatak 5.2

Nelinearan je sustav prikazan slikom 5.2. Korištenjem kriterija Popova,



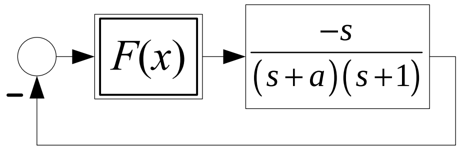
Slika 5.2: Nelinearni sustav upravljanja.

odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 5.2 stabilan.

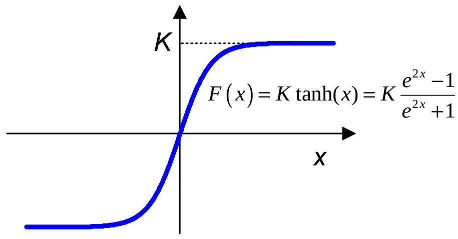
Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.

Zadatak 5.3

Nelinearan je sustav prikazan slikom 5.3(a) gdje je nelinearni element $F(x)$ prikazan slikom 5.3(b).



(a)



(b)

Slika 5.3: (a) Nelinearan sustav upravljanja i (b) nelinearni element $F(x) = K \tanh x$.

a) U kojim granicama mora biti parametar procesa a da bi se mogao primijeniti kriterij Popova?

b) Korištenjem kriterija Popova odredite raspon iznosa parametra K nelinearnog elementa sa slike 5.3(b) za koji će zatvoreni krug upravljanja sa slike 5.3(a) biti apsolutno stabilan.

5.1 Rješenja

Rješenje 5.1

Samo je potrebno naći derivaciju statičke karakteristike u ishodištu.

$$\frac{d}{dx}\tanh(x)\bigg|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\bigg|_{x=0} = 1$$

Rješenje 5.2

Odredimo imaginarni i realni dio procesa:

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \tfrac{-jT\omega+1}{-T_2\omega^2+j\omega} = \tfrac{1}{\omega}\tfrac{1-jT\omega}{-T_2\omega+j}\tfrac{-T_2\omega-j}{-T_2\omega-j} = \\ &= \tfrac{1}{\omega}\tfrac{(-T_2-T)\omega+j\left(TT_2\omega^2-1\right)}{(T_2\omega)^2+1} \end{aligned}$$

Realni dio:

$$U(\omega) = -\frac{T_2+T}{(T_2\omega)^2+1}$$

Imaginarni dio:

$$V(\omega) = \frac{TT_2\omega^2-1}{\omega\left[(T_2\omega)^2+1\right]}$$

Sada treba nacrtati krivulju $U(\omega) + j\omega V(\omega)$:

$$\omega = 0 \Rightarrow \omega V(\omega) = -1, U(\omega) = -(T_2+T)$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \omega V(\omega) = \frac{T}{T_2}, U(\omega) = 0$$

$$\omega V(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}} \Rightarrow U(\omega) = -T$$

Imajući u vidu ove podatke, vidimo da se radi o hodogramu koji počinje u $(-(T_2+T), -1)$, završava u $\left(0, \frac{T}{T_2}\right)$ i siječe realnu os u $(-T, 0)$. Da se naslutiti da bi Popov pravac mogao prolaziti kroz točku gdje hodogram siječe ralnu os i da je hodogram uvijek na desno od tog pravca. No, moramo provjeriti da je krivulja konveksna, tj. da se uvijek nalazi s desna od Popovog pravca.

Jednostavnom eliminacijom ω dobije se:

$$\omega V(\omega) = \frac{T}{T_2} + \frac{1}{T_2}U(\omega)$$

što znači da je hodogram zapravo pravac. Po kriteriju Popova može se reći da će zatvoreni krug upravljanja biti stabilan za sve nelinearnosti klase

$$\boxed{\frac{1}{T}}.$$

Ako provjerimo što se događa kada je umjesto nelinearnog elementa proporcionalni regulator K, dobije se sljedeća karakteristična jednadžba linearnog zatvorenog kruga upravljanja:

$$T_2 s^2 + (1 - KT)\, s + K = 0$$

Hurwitzov uvjet stabilnosti kaže da je zatvoreni krug stabilan ako su članovi uz potencije od s istog predznaka, tj.:

$$K < \frac{1}{T} \cup K > 0$$

što je podskup od rješenja koje je dobiveno kriterijem Popova.

Rješenje 5.3

a) U kojim granicama mora biti parametar procesa a da bi se mogao primijeniti kriterij Popova?

Jedan od kriterija za primjenu kriterija Popova jest da polovi procesa moraju biti u lijevoj poluravnini ili u ishodištu. Dakle,

$$a \geq 0.$$

b) Korištenjem kriterija Popova odredite raspon iznosa parametra K nelinearnog elementa sa slike 5.3(b) za koji će zatvoreni krug upravljanja sa slike 5.3(a) biti apsolutno stabilan.

Frekvencijska karakteristika procesa je:

$$G\,(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega + a)\,(j\omega + 1)} = \frac{-\omega^2\,(a+1) - j\omega\,(a - \omega^2)}{(a-\omega^2)^2 + \omega^2 (a+1)^2}$$

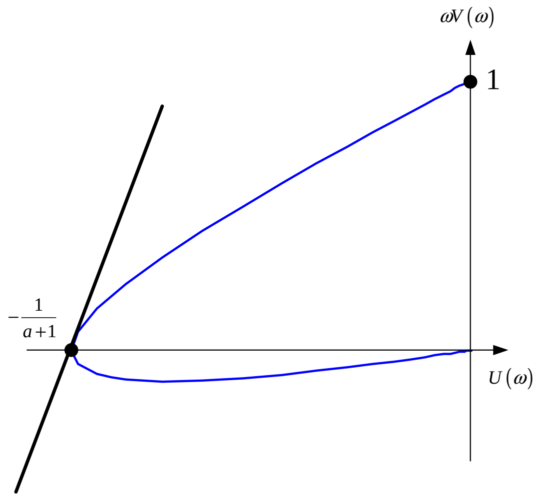
Za kriterij Popova su nam potrebni

$$\begin{aligned} U\,(\omega) &= \frac{-\omega^2\,(a+1)}{(a-\omega^2)^2 + \omega^2 (a+1)^2} \\ \omega V\,(\omega) &= \frac{-\omega^2\,(a-\omega^2)}{(a-\omega^2)^2 + \omega^2 (a+1)^2} \end{aligned}$$

Sada treba nacrtati krivulju $U(\omega) + j\omega V(\omega)$.

$$\begin{aligned} \omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad U = 0, \omega V = 0 \\ \omega = \infty \quad &\Rightarrow \quad U = 0, \omega V = -1 \\ \omega V = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{a}, U = -\frac{1}{a+1} \end{aligned}$$

Krivulja Popova je prikazana slikom 5.4. Od tuda slijedi da nelinearni element mora biti klase $a+1$.



Slika 5.4: Krivulja Popova.

Za nelinearni element koji je prikazan slikom lako je odrediti klasu – samo se nađe nagib tangente u ishodištu: $\frac{d}{dx}\left[K \tanh(x)\right]\big|_{x=0} = K$. Zaključak je da mora vrijediti

$$K \in (0, a+1)$$

Poglavlje 6

Linearizacija u povratnoj vezi

Zadatak 6.1

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja, u ulaz i y izlaz sustava.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \sin x_2 + (x_1 + 1)\, x_2 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

a) Odredite relativan stupanj zadanog sustava.

b) Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem zadanog izlaza y, uz pretpostavku da je relativan stupanj jednak redu sustava.

6.1 Rješenja

Rješenje 6.1

a) Odredite relativan stupanj zadanog sustava.

$$
\begin{aligned}
L_g L_f^0 h &= L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} g = 0 \\
L_g L_f h &= L_g \left[\frac{\partial h}{\partial x} f \right] = L_g \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} f \right] = L_g \left[\sin x_2 + (x_1 + 1) x_2 \right] = \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin x_2 + (x_1 + 1) x_2 \right] \right\} g = \begin{bmatrix} 2x_2 & \cos x_2 + x_1 + 1 \end{bmatrix} g = \\
&= \cos x_2 + x_1 + 1
\end{aligned}
$$

Dakle, relativan stupanj $r = 2$ uz $\cos x_2 + x_1 + 1 \neq 0$.

b) Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem zadanog izlaza y, uz pretpostavku da je relativan stupanj jednak redu sustava.

Transformacija r stanja:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \varphi_1 (x) = L_f^0 h = x_1 \\
z_2 &= \varphi_2 (x) = L_f h = \sin x_2 + (x_1 + 1) x_2
\end{aligned}
$$

Sada je potrebno definirati novi ulaz kako bi se linearizirao sustav:

$$
\begin{aligned}
\alpha (x) &= L_f^2 h = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f = \begin{bmatrix} x_2 & \cos x_2 + x_1 + 1 \end{bmatrix} f = \\
&= x_2 \left[\sin x_2 + (x_1 + 1) x_2 \right] + x_1^2 (\cos x_2 + x_1 + 1) \\
\beta (x) &= L_g L_f h = \cos x_2 + x_1 + 1
\end{aligned}
$$

uz $u = \frac{1}{\beta(x)} \left[-\alpha (x) + v \right]$ gdje je v novi ulaz u sustav.