Sveučilište u Zagrebu
University of Zagreb

Upravljanje kliznim režimom "sliding mode control"

- nelinearna metoda
- visokofrekvencijsko preklapanje
- sustav upravljanja sa promjenjivom strukturom

Režimi { Režim dolaska → unutar jedne od dvije upravljačke strukture
Režim klizanja → na granici između upravljačkih struktura

- može se smatrati da ~~...~~ UKR koristi "beskonačnu" velikost pojačanja da "prisili" trajektoriju stanja sustava da bude unutar željenog podprostora stanja

Ploha (hiperploha) klizanja: $s(x)=0$

$x \in \mathbb{R}^n$

$u \in \mathbb{R}^m$

$\dot{x} = f(x, t) + B(x,t)u(t)$

$f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \qquad B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n \times m}$

Koraci projektiranja kruga UKR:

1) Odabir plohe klizanja t.d. sustav ima željena svojstva dok mu je trajektorija stanja na njoj
2) Odabir zakona upravljanja koji osigurava da sustav dosegne plohu klizanja i ostane na njoj

Trg maršala Tita 14, HR-10002 Zagreb
tel.: +385 (0)1 4564 111, faks: +385 (0)1 4830 602
e-mail: unizginfo@unizg.hr www.unizg.hr

#1

Postojanje kliznog režima

- neka je kandidatska Ljapunovljeva funkcija:

$$V(\sigma(x)) = \frac{1}{2}\sigma^T(x)\sigma(x) = \frac{1}{2}\|\sigma(x)\|_2^2$$

#2

- gdje je: $\sigma(x)$ funkcija preklapanja:

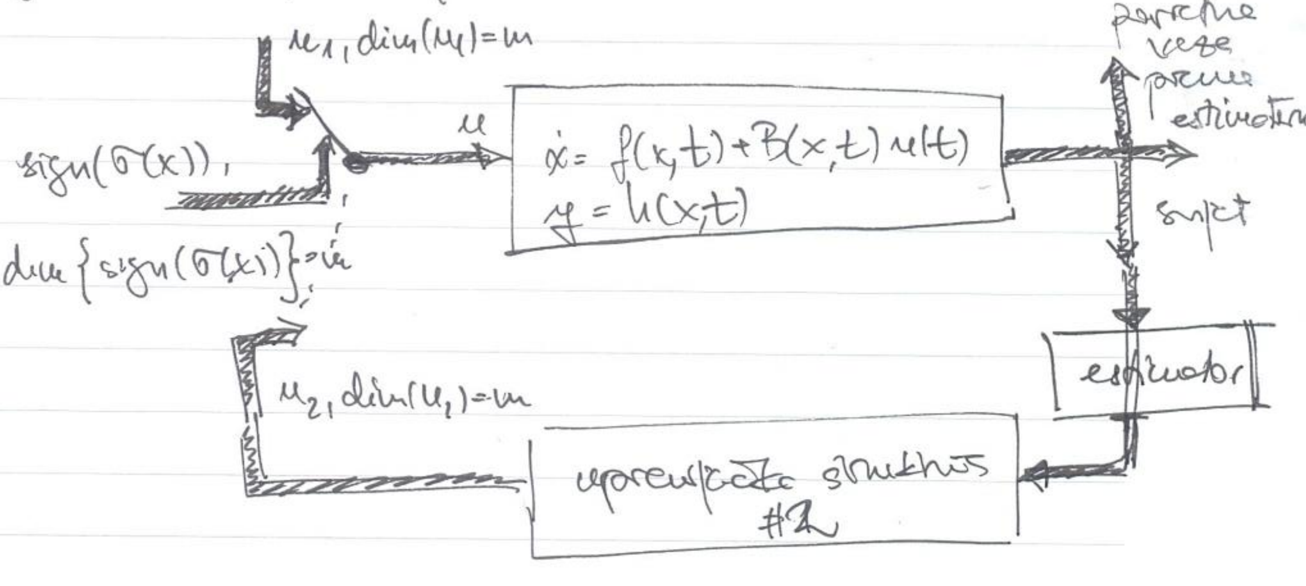
$$\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad n = \dim(x), \quad m = \dim(u)$$

za koju vrijedi: $\sigma(x \mid \cancel{\ } s(x) \neq 0) \neq \vec{0}$

$$\sigma(x \mid s(x) = 0) = \vec{0}$$

kad se provede

- interpretacija UKR kao sustava s varijabilnom strukturom upravljanja — preklapanje među upravljačkim blokovima se događa u trenucima promjene vrijednosti signuma te funkcije:



Trg maršala Tita 14, HR-10002 Zagreb
tel.: +385 (0)1 4564 111, faks: +385 (0)1 4830 602
e-mail: unizginfo@unizg.hr, www.unizg.hr

$\|.\|_2$ je Euklidska (rms) norma

$$\frac{dV}{dt} \overset{!}{<} 0 \quad \mapsto \quad \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \sigma}}_{\overset{id}{=} \sigma^T} \cdot \overbrace{\frac{d\sigma}{dt}}^{\overset{id}{=} \dot{\sigma}} < 0$$

$\overset{id}{=} \sigma^T$ prema definiciji $V \overset{def}{=} \frac{1}{2} \sigma^T(x) \sigma(x)$

$\sigma^T \cdot \dot{\sigma} \leq 0$

- ugrubo (ako promatramo σ kao skalar) možemo reći da je UKR ono upravljanje kod kojeg $u(t)$ čini ~~$\dot{\sigma}(t)$~~ $\dot{\sigma}(t)$ negativnim kad je $\sigma(t)$ pozitivno, i $\dot{\sigma}(t)$ pozitivnim kad je $\sigma(t)$ negativno

- nadalje

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \underbrace{\dot{x}}_{\overset{def}{=} f(x,t) + B(x,t)\,u(t)}$$

- jest funkcija od $u(t)$ //

2. Dosežljivost (Reachability) u konačnom vremenu

- kako bi se doseglo $\sigma(x)=0$ u konačnom vremenu (a ne asimptotski) $\frac{dV}{dt}$ (koji je negativan) mora biti "jače" ograničen na način da mu se ne dopusti da bude blizak 0:

Trg maršala Tita 14, HR-10002 Zagreb
tel.: +385 (0)1 4564 111, faks: +385 (0)1 4830 602
e-mail: unizginfo@unizg.hr, www.unizg.hr

Sveučilište u Zagrebu
University of Zagreb

Uzmimo

$$\frac{dV}{dt} \le -\mu(\sqrt{V})^{\alpha} \quad \mu>0, \quad 0<\alpha\le 1 \text{ su neke konstante}$$

Za $V \in [0,1)$ to nam dopušta:

$$\frac{1}{\sqrt{V}}\frac{dV}{dt} \le -\mu$$

Koristeći lančano pravilo: (i uvodeći supstituciju veza je $W \triangleq 2\sqrt{V}$

$$D^+(W) = D^+(2\underbrace{\sqrt{V}}_{\propto \|\sigma\|_2}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\frac{dV}{dt} \le -\mu$$

$D^+(.)$ je tzv. "gornja Dinijeva derivacija" ili "gornja desna derivacija" argumenta:

$$D^+(f) \overset{def}{=} \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

tj. za f kojima je domena vektorski (pod)prostor onda je $D^+(.,\hat{d})$ $\|\hat{d}\|=1$, $\hat{d}\in R^n = \mathcal{D}(f)$

$$D^+(f,\hat{d}) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{f(t+\hat{d}h)-f(t)}{h}$$

iz $D^+(2\sqrt{V}) \le -\mu$ (uzevši u obzir da se $D^+(.)$ ugrubo može promatrati kao vremenska derivacija za funkciju V)

$2\sqrt{V} \le V_0 - \mu t$

Trg maršala Tita 14, HR-10002 Zagreb
tel.: +385 (0)1 4564 111 faks: +385 (0)1 4830 602
e-mail: unizginfo@unizg.hr, www.unizg.hr

- kako je $\sqrt{V} \ge 0$, vidi se da ću u konačno mnogo vremena (najkasnije u trenutku $t=\frac{V_0}{\mu}$) morati pasti na 0, tj. da V mora

Sveučilište u
Zagrebu
University of Zagreb

pasti na 0

– to istovremeno znači da vrijednosti $\dot{\sigma}$ ~~mora biti definirana~~ ne smiju biti u nekoj okolini 0:

$$\sigma^T \dot{\sigma} \leq -\mu \left(\|\sigma\|_2\right)^\alpha$$

→ uvrštavanjem $\alpha = 1$ i grubim razmatranjem da se radi o skalarnim $\sigma(x)$

$$\sigma \cdot \dot{\sigma} \leq -\mu |\sigma|$$

$$\underbrace{\frac{\sigma}{|\sigma|}}_{\text{sgn}(\sigma)} \cdot \dot{\sigma} \leq -\mu$$

$$\text{sgn}(\sigma)\, \dot{\sigma} \leq -\mu \quad \begin{cases} \text{sgn}(\sigma) \neq \text{sgn}(\dot{\sigma}) \\ |\dot{\sigma}| \geq \mu > 0 \end{cases}$$

– dakle uočavamo od toga što $\sigma(x)$ može proizvoljno blizu i proizvoljno polagano se mijenjati prema 0, $\dot{\sigma}$ to <u>ne smije</u> tj. $\dot{\sigma}$ mora biti <u>diskontinuirana</u> na σ

$\dot{\sigma}$ <u>preklapa</u> npr. relejno kako trajektorije stanja sustava prolaze kroz potprostor $\sigma(x) = 0$

Trg maršala Tita 14, HR-10002 Zagreb
tel.: +385 (0)1 4564 111, faks: +385 (0)1 4830 602
e-mail: unizginfo@unizg.hr, www.unizg.hr

Ekvivalentni upravljački zakon

- ekvivalentni upravljački zakon je upravljački zakon (jednadžba) koji zajedno s jednadžbama promjene stanja čini zatvoreni krug upravljanja čije stanje slijedi trajektoriju na kliznoj plohi
  - tj. stanje sustava upravljanog regulatorom s kliznim režimom ponašat će se kao da je upravljano regulatorom s navedenim upravljačkim zakonom

- neka je sustav UPRAVLJIV PREMA KLIZNOJ PLOHI:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x,t) \text{ nije singularna tj. je invertibilna}$$

Tada:

$\dot{\sigma}(x) = 0$ (što vrijedi za stanje na kliznoj plohi)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x}\left(f(x,t) + B(x,t)\,u(t) \right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = -\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} B(x,t) \right)^{-1} \frac{\partial \sigma}{\partial x} f(x,t) \qquad \text{QED}$$

Sveučilište u Zagrebu
University of Zagreb

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) - x_{com}(t) \\ z(t) - z_{com}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{com}(t) \\ z_{com}(t) \end{bmatrix}$$

$$\sigma(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t)) = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$S_1, S_2 \in \mathbb{R}^{6\times 6} \qquad \sigma(t) \in \mathbb{R}^6$$

$$\sigma_i(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t)) = -\eta_i \, \mathrm{sgn}\{\sigma(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t))\}$$

Neka je $F(\sigma, \eta, \varphi) \overset{def}{=} \left[\eta_i \tanh\left(\dfrac{\sigma_i(\tilde{x}(t), \tilde{z}(t))}{\varphi_i} \right) \right]$

$$F(\sigma, \eta, \varphi) \in \mathbb{R}^6$$

Iz jednadžbe dinamike sustava:

$$M(t)\,\dot{x} = f(x, z, c) + g(x, z)\,u(t)$$

$$\dot{z} = h(z, x, u_c)$$

Slijedi:

$$\dot{\sigma} = S_1 M^{-1} \left[f(x, z, c) + g(x, z) u(t) - \dot{x}_{com} \right] + S_2 \left[h(z, x, u_c) - \dot{z}_{com} \right] = -F(\sigma, \eta, \varphi)$$

Trg maršala Tita 14, HR-10002 Zagreb
tel.: +385 (0)1 4564 111, faks: +385 (0)1 4830 602
e-mail: unizginfo@unizg.hr, www.unizg.hr

- uvrštavanje tog izraza za $u(t)$ vodi na izraz sličan

$$\underbrace{S_1 M^{-1}\left[f(x,z,c) + g(x,z)\,u(t)\right]}_{\#1\ \ \dot{x}_{com}} + \underbrace{S_2\left[h(z,x,u_c) - \dot{z}_{com}\right]}_{\#2} = \underbrace{F(\sigma,\eta,\varphi)}_{\#3}$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$$

$$u_1(t) = g(x,z)^{-1} M S_1^{-1}\left[\dot{x}_{com}(t) - f(x,z,c)\right]$$

$$u_2(t) = g(x,z)^{-1} M S_1^{-1} S_2\left[\dot{z}_{com}(t) - h(z,x,u_c)\right]$$

$$u_3(t) = -\,g(x,z)^{-1} M S_1^{-1} F(\sigma,\eta,\varphi)$$

balans sila potreban da bi se postigle veličine koje čine manevar

stabilizacija vezana za trenutnu pozu (položaj + stav AUV-a)

preklapanje površine kojeg se pogreške slijeđenja kreću prema kliznoj plohi