Završni ispit

11. lipnja 2019.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$
$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

a) *(2 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava $y = x_2$. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

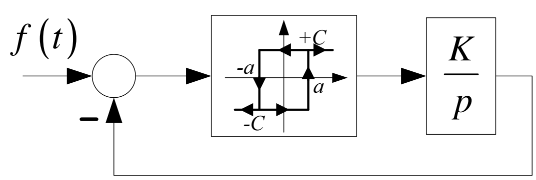
b) *(4 boda)* Linearizirajte sustav u u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state), uz obavezno detaljno komentiranje i pokazivanje svojstava potrebnih da bi se taj postupak mogao provesti. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

2. zadatak (6 bodova)

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 1 gdje je $K = 1$, $C = 1$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) *(4 boda)* Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$ ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude $X_m = \sqrt{3}$ i frekvencije $\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{s}$.

Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j\frac{4Ca}{\pi X_m^2}$.



Slika 1: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

b) *(2 boda)* Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

3. zadatak (4 boda)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 - y^3 - z^3 \\ \dot{z} &= -z + y \end{aligned}$$

Zadana je funkcija kandidat V:

$$V(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^4}{4}$$

Ispitajte stabilnost zadanog sustava u ishodištu korištenjem Ljapunovljeve funkcije V.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 + \sin(x_1 - x_2) = 0$$
$$\dot{x}_2 - \sin(x_1 - x_2) = u$$

a) *(2 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi ako je izlaz sustava $y = x_2$. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava te komentirajte stabilnost pojedinih stanja.

I. Određivanje relativnog stupnja:

$$L_g L_f^0 h = L_g h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} g = 1 \Rightarrow r = 1$$

II. Transformacija stanja:

$$z_1 = \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_2$$

III. Definiranje novog ulaza:

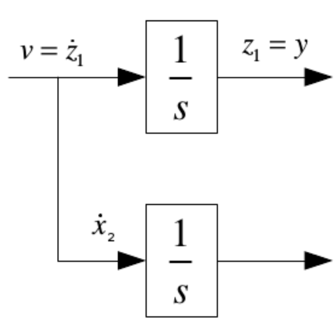
$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} f = \sin(x_1 - x_2) \\ \beta(x) &= L_g h = 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{\beta(x)}\left[-\alpha(x) + v\right] = -\sin(x_1 - x_2) + v}$$

Novi sustav je oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} v$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Varijabla stanja x_2 koja nije transformirana je stabilna tako da će i ukupni sustav biti stabilan. Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 2.



Slika 2: Linearizirani sustav.

b) *(4 boda)* Linearizirajte sustav u u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–stanje (input–state), uz obavezno detaljno komentiranje i pokazivanje svojstava potrebnih da bi se taj postupak mogao provesti. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

Potrebno je ispitati svojstva upravljivosti i involutivnosti.

I. Formiranje skupa $\{\ g, \quad ad_f g\ \}$:

$$g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$ad_f g = \nabla g f - \nabla f g = \begin{bmatrix} -\cos(x_1 - x_2) \\ \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

II. Upravljivost:

$$\begin{bmatrix} g & ad_f g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos(x_1 - x_2) \\ 1 & \cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

Rang je 2 (puni rang) što znači da je sustav **upravljiv**.
Za involutivnost potrebno je promatrati vektor g. S obzirom da je konstantan, sustav je **involutivan**.

III. Pronalaženje izlazne funkcije λ:

$$\nabla\lambda \cdot g = 0$$
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} & \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \end{bmatrix} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x_2} = 0$$

$$\nabla\lambda \cdot ad_f g \neq 0$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}\cos(x_1 - x_2) - \frac{\partial\lambda}{\partial x_2}\cos(x_1 - x_2)\, g \neq 0 \Rightarrow \frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \neq 0$$

Uzmemo

$$\boxed{\lambda = x_1}.$$

IV. Transformacija stanja:

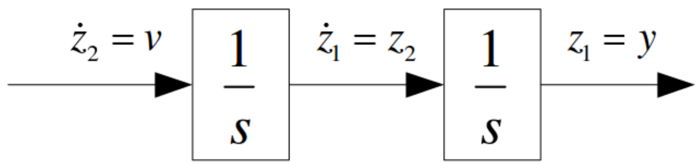
$$z = \psi(x) = \begin{bmatrix} L_f^0\lambda \\ L_f\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\sin(x_1 - x_2) \end{bmatrix}$$

V. Definiranje novog ulaza:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= L_f^2 h = \frac{\partial L_f\lambda}{\partial x} f = 2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) \\ \beta(x) &= L_g L_f\lambda = \cos(x_1 - x_2) \\ u &= \frac{1}{\beta(x)}\left[-\alpha(x) + v\right] = \frac{1}{\cos(x_1 - x_2)}\left[-2\sin(x_1 - x_2)\cos(x_1 - x_2) + v\right] \end{aligned}$$

Shema lineariziranog sustava je prikazana slikom 3 iz slijedi iz zapisa u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$



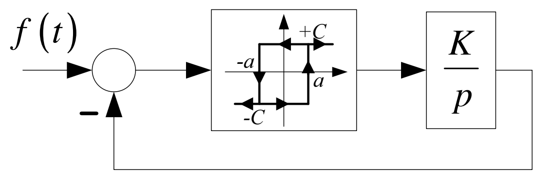
Slika 3: Linearizirani sustav.

Zadatak 2

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 4 gdje je $K = 1$, $C = 1$, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) *(4 boda)* Odredite amplitudu i frekvenciju ulaznog signala oblika $f(t) = F_v \sin(\omega_v t)$ ako su uspostavljene prinudne oscilacije amplitude $X_m = \sqrt{3}$ i frekvencije $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$.

Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j\frac{4Ca}{\pi X_m^2}$.



Slika 4: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

S obzirom da su prinudne oscilacije frekvencije $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{s}$, onda je i pobudni signal iste frekvencije, tj.

$$\omega_v = 1 \frac{\text{rad}}{s}.$$

Jednadžba koja vrijedi za prinudne oscilacije je:

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}.$$

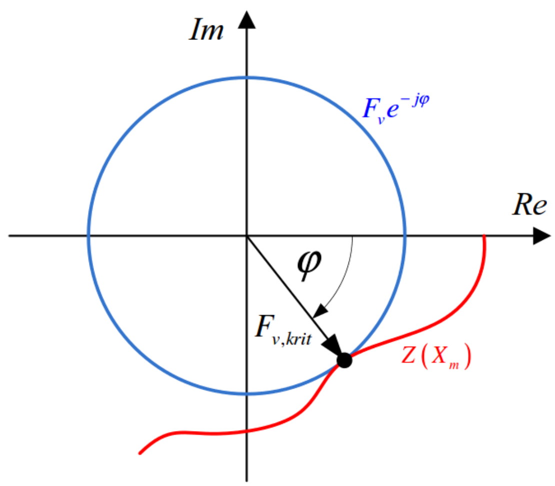
U zadanom slučaju vrijedi:

$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= j\omega \\
B(j\omega) &= K \\
Q(X_m) &= -\frac{4Ca}{\pi X_m^2} = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi} = -0.3676 \\
P(X_m) &= \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\frac{a}{X_m}\right)^2} = \frac{2}{\pi} = 0.6366
\end{aligned}$$

Nadalje

$$F_v = |Z_m| = X_m\sqrt{\left(1+\frac{KQ}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{KP}{\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\sqrt{\left(\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = 1.5543$$

b) *(2 boda)* Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.



Slika 5: Rješenje uz Zadatak 2b).

Zadatak 3

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x^3 - y^3 - z^3 \\ \dot{z} &= -z + y \end{aligned}$$

Zadana je funkcija kandidat V:

$$V(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^4}{4}$$

Ispitajte stabilnost zadanog sustava u ishodištu korištenjem Ljapunovljeve funkcije V.
Za kandidata vrijedi :

$$V(0, 0, 0) = 0$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= x^3\dot{x} + y\dot{y} + z^3\dot{z} \\ &= x^3y + y(-x^3 - y^3 - z^3) + z^3(-z + y) \\ \dot{V} &= -y^4 - z^4 \leq 0 \quad \forall x, y, z \end{aligned}$$

Sustav je stabilan u ishodištu.