Završni ispit

9. lipnja 2015.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 - 2\sin(x_2 - x_1) = 0$$
$$\dot{x}_2 + 2\sin(x_2 - x_1) = u$$

a) *(2 boda)* Odredite relativni stupanj sustava ako je izlaz sustava $y = x_1$.

b) *(4 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–izlaz (input–output) ili ulaz–stanje (input–state), pri čemu je potrebno osigurati da je sustav u konačnici u potpunosti lineariziran. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

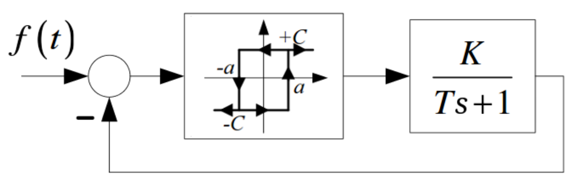
2. zadatak (6 bodova)

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 1. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$

a) *(4 boda)* Odredite amplitudu pobudnog signala F_v za koju dolazi do pojave prinudnih oscilacija amplitude $X_m = 2.2$, ako je $K = 2$, $C = 2$ i $a = \sqrt{2}$.

b) *(2 boda)* Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

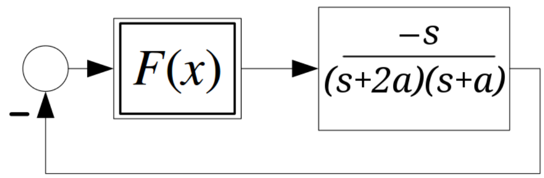


Slika 1: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

Napomena: Opisna funkcija dvopoložajnog releja s histerezom je $G_N(X_m) = \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} - j\frac{4Ca}{\pi X_m^2}$.

3. zadatak (6 bodova)

Nelinearan je sustav prikazan slikom 2.



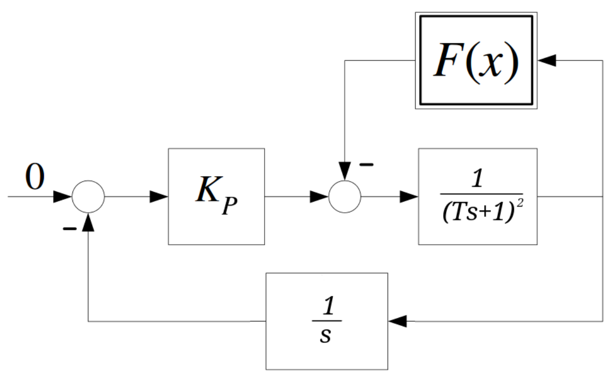
Slika 2: Nelinearni sustav upravljanja uz zadatak 3.

a) *(4 boda)* Korištenjem kriterija Popova odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Koji uvjeti na parametar a moraju biti zadovoljeni kako bi se mogao primijeniti ovaj kriterij? *Napomena: obavezno skicirati korištenu krivulju!*

b) *(2 boda)* Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.

4. zadatak (8 bodova)

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 3. Za nelinearni element vrijedi $F(x) = x^3$, za parametar $T = 2$, a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi $K_P > 0$.



Slika 3: Nelinearni krug upravljanja uz zadatak 4.

a) *(2 boda)* Odredite opisnu funkciju nelinearnog elementa s funkcijom F.
Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

b) *(4 boda)* Odredite područje iznosa regulatora K_P za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_P.

c) *(2 boda)* Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Nelinearan sustav je opisan u prostoru stanja gdje je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$ vektor stanja i u ulaz sustava.

$$\dot{x}_1 - 2\sin(x_2 - x_1) = 0$$
$$\dot{x}_2 + 2\sin(x_2 - x_1) = u$$

a) *(2 boda)* Odredite relativni stupanj sustava ako je izlaz sustava $y = x_1$.

$$\begin{aligned}
L_g L_f^0 h &= L_g h = \frac{\partial h}{\partial x} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} g = 0 \\
L_g L_f h &= L_g \left[\frac{\partial h}{\partial x} f \right] = L_g \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} f \right] = L_g \left[2\sin(x_2 - x_1) \right] = \\
&= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[2\sin(x_2 - x_1) \right] \right\} g = \begin{bmatrix} -2\cos(x_1 - x_2) & 2\cos(x_1 - x_2) \end{bmatrix} g = \\
&= 2\cos(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

Dakle, relativan stupanj $r = 2$ uz $\cos(x_1 - x_2) \neq 0$.

b) *(4 boda)* Linearizirajte sustav u povratnoj vezi korištenjem postupka ulaz–izlaz (input–output) ili ulaz–stanje (input–state), pri čemu je potrebno osigurati da je sustav u konačnici u potpunosti lineariziran. Nacrtajte shemu lineariziranog sustava s transformiranim varijablama z_i.

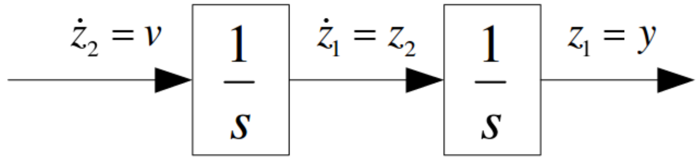
Relativan stupanj sustava jednak je redu sustava, te se stoga može koristiti input–output postupak. Transformacija r stanja:

$$z_1 = \varphi_1(x) = L_f^0 h = x_1$$
$$z_2 = \varphi_2(x) = L_f h = -2\sin(x_1 - x_2)$$

Sada je potrebno definirati novi ulaz kako bi se linearizirao sustav:

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= L_f^2 h = \frac{\partial (L_f h)}{\partial x} f = 8\cos(x_1 - x_2)\sin(x_1 - x_2) \\
\beta(x) &= L_g L_f h = 2\cos(x_1 - x_2)
\end{aligned}$$

uz $u = \frac{1}{\beta(x)} \left[-\alpha(x) + v \right]$ gdje je v novi ulaz u sustav. Shema lineariziranog sustava predstavljenog kaskadom integratora dana je na slici 4.

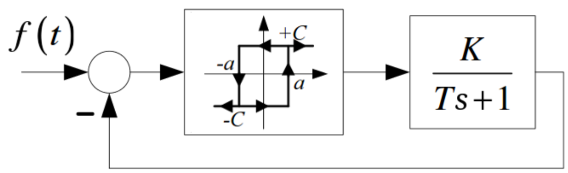


Slika 4: Linearizirani sustav.

Zadatak 2

Nelinearan je krug upravljanja prikazan slikom 5. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika

$$f(t) = F_v \sin\left(\frac{t}{T}\right).$$



Slika 5: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

a) *(4 boda)* Odredite amplitudu pobudnog signala F_v za koju dolazi do pojave prinudnih oscilacija amplitude $X_m = 2.2$, ako je $K = 2$, $C = 2$ i $a = \sqrt{2}$.

Jednadžba koja vrijedi za prinudne oscilacije je:

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}.$$

U zadanom slučaju vrijedi:

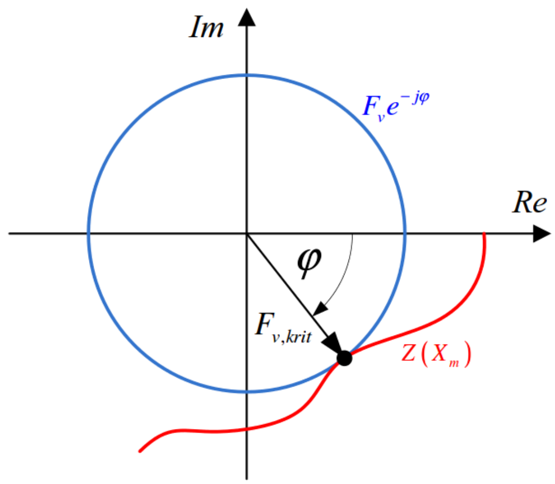
$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= Tj\omega + 1 \\
B(j\omega) &= K = 2 \\
Q_N(X_m) &= -\frac{4Ca}{\pi X_m^2} = -0.7441 \\
P_N(X_m) &= \frac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{X_m}\right)^2} = 0.88665
\end{aligned}$$

Nadalje

$$F_v = |Z_{X_m}| = X_m \frac{|Tj\omega + 1 + 2\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]|}{|Tj\omega + 1|} = X_m \frac{\sqrt{(1 + 2Q_N(X_m))^2 + (1 + 2P_N(X_m))^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{F_v = 4.3806}$$

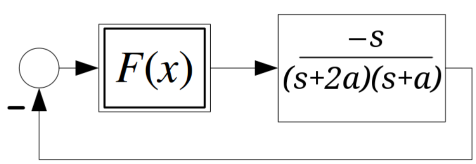
b) *(2 boda)* Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.



Slika 6: Rješenje uz Zadatak 2b).

Zadatak 3

Nelinearan je sustav prikazan slikom 7.



Slika 7: Nelinearni sustav upravljanja uz zadatak 3.

a) *(4 boda)* Korištenjem kriterija Popova odredite klasu nelinearnosti za koju je sustav prikazan slikom 2 stabilan. Koji uvjeti na parametar a moraju biti zadovoljeni kako bi se mogao primijeniti ovaj kriterij?

Za kriterij Popova svi polovi moraju biti u lijevoj poluravnini, tj. $a > 0$.
Odredimo imaginarni i realni dio procesa:

$$G(j\omega) = \frac{-j\omega}{(j\omega + 2a)(j\omega + a)} = \frac{-3a\omega^2 + j(\omega^3 - \omega a^2)}{(a^2 - \omega^2)^2 + (3a\omega)^2}$$

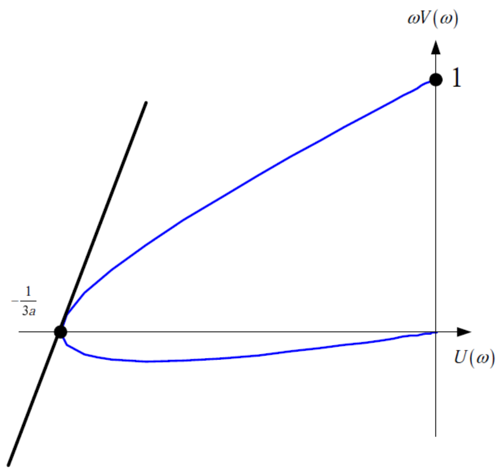
Realni dio:

$$U(\omega) = \frac{-3a\omega^2}{(a^2 - \omega^2)^2 + (3a\omega)^2}$$

Imaginarni dio:

$$V(\omega) = \frac{\omega^3 - \omega a^2}{(a^2 - \omega^2)^2 + (3a\omega)^2}$$

Sada treba nacrtati krivulju $U(\omega) + j\omega V(\omega)$:



Slika 8: Krivulja Popova.

$$
\begin{aligned}
\omega = 0 \quad &\Rightarrow \quad U = 0, \omega V = 0 \\
\omega = \infty \quad &\Rightarrow \quad U = 0, \omega V = 1 \\
\omega V = 0 \quad &\Rightarrow \quad \omega = a, U = -\frac{1}{3a}
\end{aligned}
$$

Krivulja Popova je prikazana slikom 8. Od tuda i iz uvjeta na položaj polova slijedi da nelinearni element mora biti klase $3a$, odnosno.

$$K \in (0, 3a)\,.$$

b) *(2 boda)* Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja ako se na mjestu nelinearnog elementa nalazi proporcionalni regulator.

Ako provjerimo što se događa kada je umjesto nelinearnog elementa proporcionalni regulator K, dobije se sljedeća karakteristična jednadžba linearnog zatvorenog kruga upravljanja:

$$s^2 + (3a - K)s + a^2 = 0$$

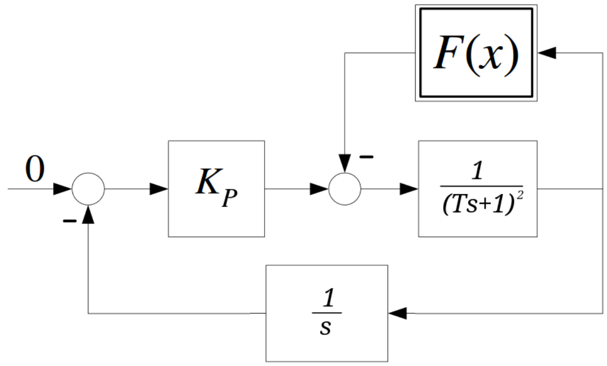
Hurwitzov uvjet stabilnosti kaže da je zatvoreni krug stabilan ako su članovi uz potencije od s istog predznaka, tj.:

$$K < 3a.$$

Zadatak 4

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan slikom 9. Za nelinearni element vrijedi $F(x) = x^3$, a za pojačanje proporcionalnog regulatora vrijedi $K_P > 0$.

a) *(2 boda)* Odredite opisnu funkciju nelinearnog elementa s funkcijom F.

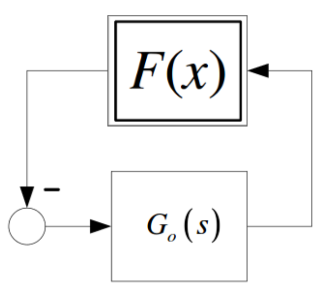


Slika 9: Nelinearni krug upravljanja uz zadatak 4.

$$\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{\pi X_m}\int_0^{2\pi}(X_m\sin\varphi)^3\sin\varphi d\varphi = \\
&= \frac{X_m^2}{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin\varphi)^4 d\varphi = \frac{X_m^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^4 d\varphi = \\
&= \frac{X_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}1-2\cos 2\varphi+(\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{X_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}2-2\cos 2\varphi-(\sin 2\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{X_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}2-2\cos 2\varphi-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi d\varphi = \\
&= \boxed{\frac{3}{4}X_m^2}
\end{aligned}$$

b) *(4 boda)* Odredite područje iznosa regulatora K_P za koje dolazi do pojave vlastitih oscilacija u krugu upravljanja, te nacrtajte ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_P.

Potrebno je prikazati zatvoreni krug upravljanja kao što je na slici 10.



Slika 10: Nelinearni krug upravljanja.

Lako je uočiti da negativni inverz opisne funkcije kubnog nelinearnog elementa zauzima cijelu negativnu realnu poluos. Određivanjem gdje Nyquistova karakteristika linearnog dijela sustava siječe realnu os jednostavno se može doći do uvjeta za vlastite oscilacije.

$$G_o(s) = \frac{s}{T^2 s^3 + 2Ts^2 + s + K_P}$$

$$G_o(j\omega) = \frac{\omega^2 - T^2\omega^4 + j(K_P\omega - 2T\omega^3)}{(K_P - 2T\omega^2)^2 + (\omega - T^2\omega^3)^2}$$

$$\mathrm{Im} = 0 \Rightarrow K_P\omega - 2T\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K_P}{2T}}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{1}{1 - K_P} < 0$$

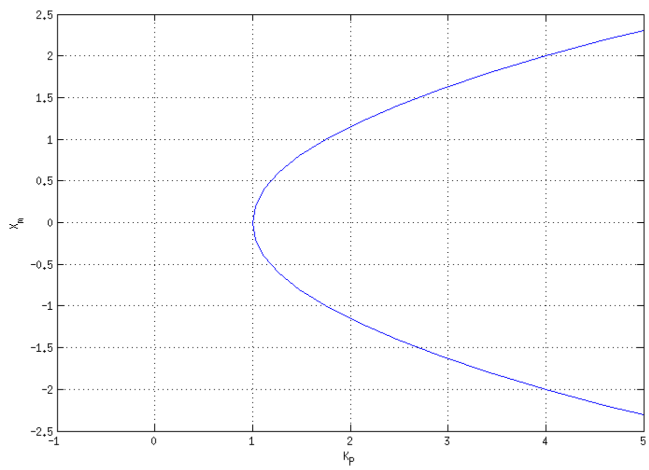
$$K_P > 1$$

Iz ovoga slijedi:

$$-G_N^{-1} = G_o(\omega)$$

$$-\frac{4}{3X_m^2} = \frac{1}{1 - K_P}$$

$$\boxed{X_m^2 = \tfrac{4}{3}(K_P - 1)}$$



Slika 11: Ovisnost X_m o K_P.

Ovisnost amplitude vlastitih oscilacija X_m o iznosu pojačanja regulatora K_P dana je na slici 11.

c) *(2 boda)* Analitički provjerite stabilnost vlastitih oscilacija ukoliko postoje.

$$1 + G_N G_o = 0$$

$$\underbrace{K_P - 4\omega^2}_{R} + j\underbrace{\left(\omega - 4\omega^3 + \frac{3}{4}X_m^2\omega\right)}_{I} = 0$$

$$\frac{\partial R}{\partial X_m}\frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial X_m} &= 0 \\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= -8\omega \\
\frac{\partial I}{\partial \omega} &= 1 - 12\omega^2 + \frac{3}{4}X_m^2 \\
\frac{\partial I}{\partial X_m} &= \frac{3}{2}\omega X_m
\end{aligned}$$

Slijedi

$$12X_m\omega^2 > 0$$

što vrijedi za svaku frekvenciju ω, što znači da su sve vlastite oscilacije stabilne.