

Međuispit iz Numeričke matematike
24. travnja 2014.

1. [3b] Pokažite da vrijedi

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \mathcal{O}(1/\sqrt{x}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

2. [5b] Teška nit pod djelovanjem vlastite težine visi u obliku lančanice $y = a \operatorname{ch}(x/a)$ gdje je $a > 0$. Pomoću Taylorovog polinoma odgovarajućeg stupnja pokažite da je za male vrijednosti $|x|$ oblik niti približno izražen parabolom

$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

3. [10b]

- (a) [2b] Napišite formulu za aproksimaciju $f''(x)$ pomoću vrijednosti funkcije f u točkama $x-h$, x i $x+h$ ($h > 0$, $h \in \mathbb{R}$).
- (b) [5b] Izvedite formulu iz (a) dijela zadatka. Kojeg je reda točnosti dobivena formula? Objasnite svoju tvrdnju!
- (c) [2b] Pomoću formule iz (a) dijela zadatka napišite izraz za računanje aproksimacije vrijednosti $\cos''(0.8)$, za $h = 0.1$. Izraz ne treba izračunati!
- (d) [1b] U tablici su prikazane vrijednosti pripadnih pogrešaka dviju metoda centralne diferencije. Poznato je da je jedna metoda drugog reda točnosti. Koja?

h	0.1	0.01	0.001	0.0001
metoda A	0.042939	0.004216	0.000421	0.000042
metoda B	0.17320726	0.00172168	0.00001722	0.00000009361

4. [5b] Odredite LU rastav matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ -4 & -11 & -3 \\ 16 & -1 & 50 \end{bmatrix}$$

5. [5b] Odredite rastav Choleskog matrice

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

te pomoću njega riješite linearni sustav $Ax = b$ ako je $b = [30 \quad 15 \quad -16]^T$

Okrenite!

6. [12b] U sljedećem zadatku zaokružite **Točno** ili **Netočno**, slovo ispred točnog odgovora, nadopunite rečenicu ili odgovorite na pitanje. Svaki točan odgovor nosi 1 bod, netočan ili neodgovoren 0 bodova.
- Navedite barem dva tipa pogrešaka koje se javljaju prilikom numeričkog rješavanja problema iz prakse. _____
 - Vrijedi $f(n) = \mathcal{O}(n^3)$, $n \rightarrow \infty$ ako je $f(n) = 10 \ln n + 7n + 3n^2 + 6n^3$.
Točno. **Netočno.**
 - Broj operacija potrebnih za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ Gaussovom metodom eliminacija ponaša se kao:
A. $\mathcal{O}(n \log n)$ B. $\mathcal{O}(\frac{3}{2}n^2)$ C. $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ D. $\mathcal{O}(n!)$
 - Za računanje aproksimacije derivacije funkcije f formulom konačne diferencije unaprijed broj izvrednjavanja funkcije f iznosi:
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
 - Pozitivno definitne matrice su regularne. **Točno.** **Netočno.**
 - Simetrična pozitivno definitna matrica može imati negativnu svojstvenu vrijednost. **Točno.** **Netočno.**
 - Kvadratna matrica A je donje trokutasta ako vrijedi:
A. $a_{ij} = 0$, $j > i$ B. $a_{ij} = 0$, $i > j$ C. $a_{ij} \neq 0$, $i > j$ D. $a_{ij} \neq 0$, $j > i$
 - Navedite dva razloga radi kojih se prilikom rješavanja linearnih sustava koristi parcijalno pivotiranje. _____
 - Determinanta svake permutacijske matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$ jednaka je 1.
Točno. **Netočno.**
 - Sustav $Ax = b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ rješavamo Gaussovom metodom eliminacija. Broj potrebnih aritmetičkih operacija za rješavanje pripadnih trokutastih sustava $Ly = b$ i $Ux = y$ veći je od broja operacija potrebnih za LU faktORIZACIJU. **Točno.** **Netočno.**
 - Za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vrijedi $\kappa(A) < 1$, gdje je $\kappa(A)$ uvjetovanost matrice A . **Točno.** **Netočno.**
 - Za operatorsku matričnu normu vrijedi $\|A\| < \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ pri čemu je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor, različit od nulvektora. **Točno.** **Netočno.**

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora.