Numerička matematika

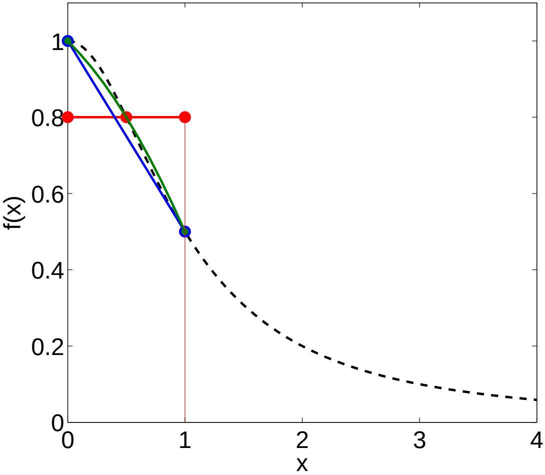
7. predavanje

Primjer 1.

Pomoću jednostavne pravokutne, trapezne i Simpsonove formule aproksimirajmo vrijednost integrala $I(f) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

$$
\begin{aligned}
M(f) &= f(0.5) = \frac{4}{5} = 0.8, \\
T(f) &= \frac{1}{2}\Big(f(0) + f(1)\Big) = \frac{3}{4} = 0.75, \\
S(f) &= \frac{1}{6}\Big(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\Big) = \frac{47}{60} \approx 0.783.
\end{aligned}
$$

- egzaktna vrijednost integrala jednaka $\pi/4 \approx 0.7853982$
- najbolju aproksimaciju dobili smo korištenjem Simpsonove formule.



Slika: Aproksimacija vrijednosti integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ pravokutnom, trapeznom i Simpsonovom formulom.

Primjer 2.

Vrijednost integrala

$$\int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx$$

aproksimirajmo kompozitnom trapeznom i Simpsonovom formulom te grafički odredimo red konvergencije spomenutih metoda.
Lako se vidi da se zadani integral može izračunati egzaktno. Dobiva se

$$\int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx = -\frac{1}{25}\frac{10\pi - 3 + 3e^{2\pi}}{e^{2\pi}} \approx -0.122122604618968.$$

```
function M_n = midpoint(a,b,n,my_fun)
h = (b-a)/n;
x = linspace(a+h/2,b-h/2,n);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n);
M_n = h * sum(f_n);
return;

function T_n = trapez(a,b,n,my_fun)
h = (b-a)/n;
x = linspace(a,b,n+1);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n+1);
T_n = sum( h * ( f_n(1:end-1) + f_n(2:end) )/2);
return;
```

```
function S_n = Simpson(a,b,n,my_fun)
h = (b-a)/n;
x = linspace(a,b,n+1);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n+1);
f_n(2:end-1) = 2 * f_n(2:end-1);
S_n = h * sum(f_n)/6;
x = linspace(a+h/2,b-h/2,n);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n);
S_n = S_n + 2*h*sum(f_n)/3;
return;
```

pri čemu je

```
my_fun = inline('x.*exp(-x).*cos(2*x)','x');
```

Primjenom funkcija `midpoint.m`, `trapez.m` i `Simpson.m` na primjer, za $n = 6$, $a = 0$, $b = 2\pi$ naredbe

```
M = midpoint(a,b,n,my_fun)
T = trapez(a,b,n,my_fun)
S = Simpson(a,b,n,my_fun)
```

daju

```
M =  -0.065242222154540
T = -0.226993976161191
S = -0.119159473490091
```

Greška metode

$$|I(f) - Q(f)| = O(h^s)$$

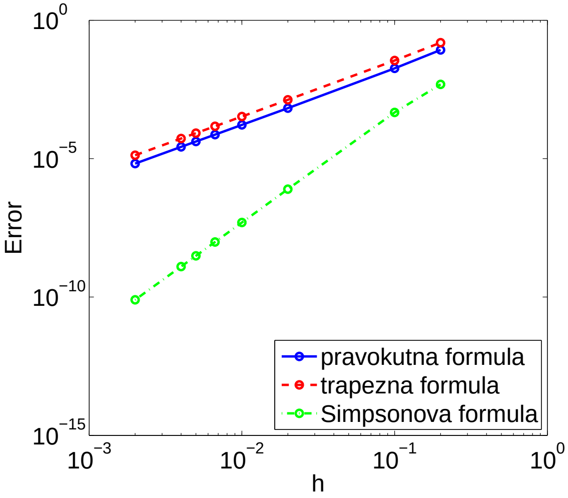
- ako je numerička metoda reda s onda za njenu grešku E postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

  $$E = Ch^s,$$

  odakle logaritmiranjem dobivamo pravac nagiba s:

  $$\log(E) = \log(C) + s \log(h)$$

- metoda kojoj pripada pravac većeg nagiba brže konvergira
- `loglog(x,y)`.



Slika: Greška integracije za primjer 4 na logaritamskoj skali.

- adaptivna integracija
- `quadgui.m`