Numerička matematika

8. predavanje

Splajnovi

- $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b\}$
- Splajn reda $l \in \mathbb{N}$ na zadanoj mreži Δ:

$$s(x) \in C^{l-1}([a,b]) \text{ takva da } \forall i = 1, \ldots, N \; s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_l$$

- $S_{\Delta,l}$ skup svih splajn funkcija reda l na mreži Δ
- linearni splajn ($l = 1$), kvadratični splajn (l=2), kubični splajn ($l = 3$).

Primjer.

Podatke zadane sljedećom tablicom

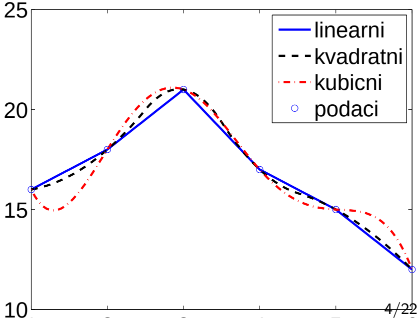
x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	16	18	21	17	15	12

treba interpolirati po dijelovima linearnom funkcijom, kvadratnim splajnom, te kubničnim splajnom.

- Spline Toolbox-a
- `spk = spapi(k,x,y)` daje splajn `spk` reda $k-1$
- `fnplt` crta dobiveni splajn

```
% spline_my.m
x = [1:6];
y = [16 18 21 17 15 12];
sp2 = spapi(2,x,y);
fnplt(sp2,2), hold on
sp3 = spapi(3,x,y);
fnplt(sp3,2,'k--'), set(gca,'Fontsize',20)
sp4 = spapi(4,x,y); fnplt(sp4,2,'r-.'), plot(x,y,'o')
legend('linearni','kvadratni','kubni','podaci'), hold off
```

- linearnim splajnom
- kvadratnim splajnom
- kubičnim splajnom



Linearni splajn

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

- po dijelovima linearna neprekidna funkcija s takva da vrijedi

$$s(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

- $s(x) = a_i x + b_i$ na $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$

$$\Longrightarrow 2n \text{ stupnjeva slobode}$$

- uvjeti neprekidnosti: $s(x_i - 0) = s(x_i + 0) \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$
- uvjeti interpolacije: $s(x_i) = y_i \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$
- $(n-1) + (n+1) = 2n$ uvjeta, $2n$ parametara

$$\Longrightarrow \text{ problem interpolacije ima jedinstveno rješenje}$$

Ocjena greške za linearni splajn

Teorem.
Neka je $f \in C^2([a,b])$ i neka je $s \in S_{\Delta,1}$ linearni splajn pri čemu je $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$\|f - s\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|f''\|_\infty h^2$$

gdje je $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$ duljina najvećeg podintervala.
Dokaz.

- `yi = interp1(x,y,xi,'linear')`.

Kubični splajn

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

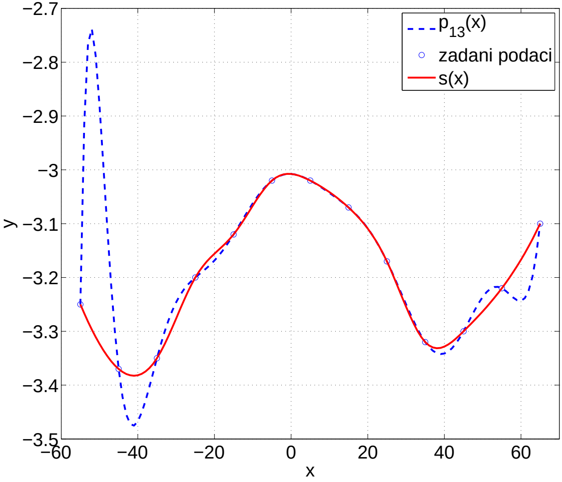
- $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
- $s \in S_{\Delta,3}$

$$s(x) \in C^2([a,b]) \text{ takva da } \forall i = 1, \ldots, n \; s|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_3$$

Usporedba kubičnog splajna i Lagrangeovog interpolacijskog polinoma

Za uvodni primjer iz klimatologije usporedimo Lagrangeov interpolacijski polinom sa kubičnim splajnom. Koja interpolacija je bolja i zašto?

```
x = [-55:10:65];
y = [-3.25 -3.37 -3.35 -3.2 -3.12 -3.02 -3.02...
    -3.07 -3.17 -3.32 -3.3 -3.22 -3.1];
xu = [-55:1:65];
p = polyinterp(x,y,xu);
s = interp1(x,y,xu,'spline');
%-----------------------------------------------------------%
plot(x,y,'o');hold on; plot(xu,p);hold on;plot(xu,s);grid on;
```



Slika: Usporedba Lagrangeove interpolacije i kubičnog splajna

Konstrukcija kubičnog splajna

Odnos broja parametara i broja uvjeta?

- polinom stupnja 3 ima 4 koeficijenta $\Longrightarrow 4n$ parametra
- uvjeti:
  - neprekidnost: $s(x_i - 0) = s(x_i + 0)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
  - interpolacija: $s(x_i) = y_i$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, n$;
  - neprekidnost 1. der: $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
  - neprekidnost 2. der: $s''(x_i - 0) = s''(x_i + 0)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
- Zaključak: $3(n-1) + (n+1) = 4n - 2$ uvjeta, $4n$ parametara

$\Longrightarrow$ 2 dodatna rubna uvjeta

Dodatni rubni uvjeti

(i) potpuni spline $s'(x_0) = f'(x_0),\ s'(x_n) = f'(x_n).$

(ii) periodički splajn $s'(x_0) = s'(x_n),\ s''(x_0) = s''(x_n)$

(iii) prirodni splajn $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$

(iv) `spline` koristi tzv. *not-a-knot* uvjet na neprekidnost treće derivacije kubnog splajna u točkama x_1 i x_{n-1}.

Konstrukcija prirodnog kubičnog splajna I

$$\gamma_i = s''(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

- s'' je po dijelovima linearna funkcija
- s'' interpolira točke γ_i (koje nam trenutno nisu poznate)

$$s_i''(x) = \frac{\gamma_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{\gamma_{i+1}}{h_i}(x - x_i)$$

gdje smo uveli oznake $h_i = x_{i+1} - x_i$, te $s_i = s\big|_{[x_i, x_{i+1}]}$.
Integriranjem $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= -\frac{\gamma_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{\gamma_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \alpha \\ s_i(x) &= \frac{\gamma_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \beta x + \delta. \end{aligned}$$

Konstrukcija prirodnog kubičnog splajna II

Zgodniji oblik za izraz $s_i(x)$:

$$s_i(x) = \frac{\gamma_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x). \quad (1)$$

Uvjeti neprekidnosti i interpolacije daju konstante C i D.

$$s_i(x_i) = \frac{\gamma_i}{6}h_i^2 + Dh_i = y_i \quad \Rightarrow \quad D = \frac{y_i}{h_i} - \frac{\gamma_i}{6}h_i \quad (2)$$

$$s_i(x_{i+1}) = \frac{\gamma_{i+1}}{6}h_i^2 + Ch_i = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i+1}}{6}h_i. \quad (3)$$

Konstrukcija prirodnog kubičnog splajna III

Koeficijente γ_i dobivamo iz uvjeta na neprekidnost prve derivacije.

$$s_i'(x) = -\frac{\gamma_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{\gamma_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i+1}}{6}h_i\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{\gamma_i}{6}h_i\right)$$
$$s_i'(x_i) = -\frac{h_i}{3}\gamma_i - \frac{h_i}{6}\gamma_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}.$$

Posve analogno

$$\begin{aligned} s_{i-1}'(x) &= -\frac{\gamma_{i-1}}{2h_{i-1}}(x_i - x)^2 + \frac{\gamma_i}{2h_{i-1}}(x - x_{i-1})^2 + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{\gamma_i}{6}h_{i-1}\right) \\ &\quad - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{\gamma_{i-1}}{6}h_{i-1}\right) \\ s_{i-1}'(x_i) &= \frac{h_{i-1}}{6}\gamma_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}\gamma_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}. \end{aligned}$$

Konstrukcija prirodnog kubičnog splajna IV

Konačno, iz uvjeta neprekidnosti prve derivacije

$$s_i'(x_i) = s_{i-1}'(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

dobivamo linearni sustav

$$\frac{h_{i-1}}{6}\gamma_{i-1} + \frac{h_i + h_{i-1}}{3}\gamma_i + \frac{h_i}{6}\gamma_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

- nepoznanice $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}, \gamma_n$
- $n-1$ jednadžba, $n+1$ nepoznanica

$$\Longrightarrow \gamma_0 \text{ i } \gamma_n \text{ moramo zadati}$$

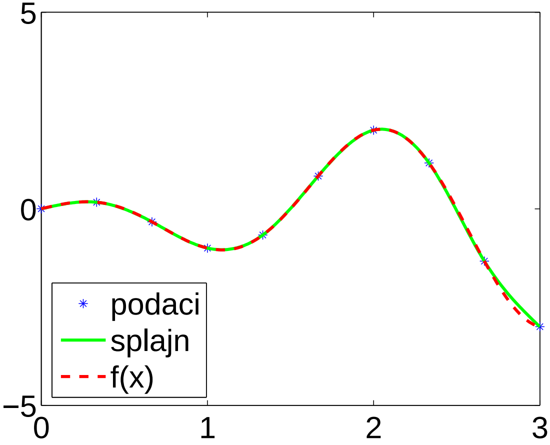
- prirodni kubični splajn: $\gamma_0 = \gamma_n = 0$.

Primjer

Funkciju $f(x) = x\cos(\pi x)$ aproksimirajmo prirodnim kubičnim splajnom na zadanoj mreži

$$\Delta = \{x_k = k/3\colon 0 \le k \le 3\}.$$

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{9}{2}x^3 + x, & 0 \le x \le \frac{1}{3} \\ \frac{9}{2}x^3 - 9x^2 + 4x - \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \le x \le \frac{2}{3} \\ -2x + 1, & \frac{2}{3} \le x \le 1. \end{cases} \tag{5}$$



Slika: Prirodni kubični splajn za funkciju $f(x) = x\cos(\pi x)$

Konstrukcija prirodnog kubičnog splajna V

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}.$$

Matrični zapis sustava (4) glasi

$$A\gamma = v,$$

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & h_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & u_2 & h_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & u_3 & h_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_{n-2} \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Strogo dijagonalno dominantne matrice

Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kažemo da je strogo dijagonalno dominantna ako vrijedi

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| < |a_{kk}|, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Propozicija. Neka je matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|x\|_\infty \leq \max_{k=1,\ldots,n} \Big(|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| \Big)^{-1} \|Ax\|_\infty. \tag{6}$$

Dokaz.

Dijagonalno dominantne matrice su regularne.

Egzistencija i jedinstvenost kubičnog splajna

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

- $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$
- Za danu mrežu Δ i zadane vrijednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$ postoji točno jedan prirodni kubični interpolacijski splajn $s \in S_{\Delta,3}$.

Ocjena greške interpolacije kubičnim splajnom

Teorem.
Neka je zadana funkcija $f \in C^4([a, b])$ takva da vrijedi $f''(a) = f''(b) = 0$. Nadalje neka je zadana mreža Δ te neka je $s \in S_{\Delta,3}$ interpolirajući kubični splajn sa prirodnim rubnim uvjetima. Tada vrijede sljedeće ocjene greške:

$$\|s(x) - f(x)\|_\infty \le c_0 \|f^{(4)}\|_\infty h^4, \tag{7}$$

$$\|s'(x) - f'(x)\|_\infty \le c_1 \|f^{(4)}\|_\infty h^3, \tag{8}$$

$$\|s''(x) - f''(x)\|_\infty \le c_2 \|f^{(4)}\|_\infty h^2, \tag{9}$$

$$\|s'''(x) - f'''(x)\|_\infty \le c_3 \|f^{(4)}\|_\infty h, \tag{10}$$

pri čemu je $h = \max_{i=0,\dots,n-1}(x_{i+1} - x_i)$, dok su konstante c_i, $i = 0, \dots, 3$ neovisne o h.

Zadaci

1. Zadana je mreža $\Delta = \{0, 1, 2\}$. Odredite jesu li sljedeće funkcije splajnovi i ako jesu kojeg su reda?
   (a) $s(x) = \begin{cases} x^3 + 2x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2 + 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
   (b) $s(x) = |x - 1|^3, \quad x \in [0, 2]$
   (c) $s(x) = \begin{cases} 0.5x^2 + x + 1, & 0 \leq x < 1 \\ -4.5x^2 + 11x - 4, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$
2. Neka je zadana mreža $\Delta = \{-1, 0, 1, 2\}$, te funkcija

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 3x + 1, & -1 \leq x < 0, \\ p(x), & 0 \leq x < 1, \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

   Postoji li polinom $p(x)$ takav da je funkcija $s(s)$ kubični splajn? Ako postoji, odredite ga!