Međuispit iz Numeričke matematike
2. svibnja 2016.

1. [5b]

(i) [1b] Nadopunite tvrdnju:
Kažemo da $f = \mathcal{O}(g)$ kad $x \to x_0$ ako $\exists C > 0$ tako da $\forall x \in \mathcal{O}(x_0)$ vrijedi ____________________.

(ii) [1b] Napišite kriterij za ispitivanje $f = \mathcal{O}(g)$ kad $x \to x_0$ pomoću limesa.

(iii) [3b] Pokažite da vrijedi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3), \quad x \to 0.$$

2. [10b]

(i) [5b] Izvedite formulu za aproksimaciju $f''(x)$ pomoću vrijednosti funkcije f u točkama $x-h$, x i $x+h$ ($h > 0$, $h \in \mathbb{R}$). Kojeg je reda točnosti dobivena formula? Objasnite svoju tvrdnju!

(ii) [5b] Zadan je rubni problem za ODJ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - \frac{1}{2}x^2, \; y(0) = 0, \; y(12) = 0.$$

Pomoću formule iz [(i)] dijela zadatka pokažite da vrijednost $y(4)$ dobivena aproksimacijom gornjeg rubnog problema centralnim diferencijama drugog reda točnosti na uniformnoj mreži za $h = 4$ iznosi -256.

3. [10b]

(i) [4b] Odredite LU rastav matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

(ii) [3b] Za $b = \begin{bmatrix} 5 & 18 & 6 \end{bmatrix}^\top$ riješite sustav $Ax = b$.

(iii) [3b] Objasnite kako biste bez računanja matrice A^2 našli rješenje sustava $A^2x = b$. (Nije potrebno provesti račun!)

4. [5b] Odredite rastav Choleskog matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Okrenite!

5. [10b] U sljedećem zadatku zaokružite Točno ili Netočno, slovo ispred točnog odgovora, nadopunite rečenicu ili odgovorite na pitanje. Svaki točan odgovor nosi 1 bod, netočan ili neodgovoren 0 bodova.

1. Navedite barem dva tipa pogrešaka koje se javljaju prilikom numeričkog rješavanja problema iz prakse. ______________________________
2. Reativna pogreška daje informaciju koliko je mjerenje pouzdano u odnosu na ______________________________
3. Broj operacija potrebnih za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ Gaussovom metodom eliminacija ponaša se kao:
   A. $\mathcal{O}(n \log n)$ B. $\mathcal{O}(\frac{3}{2}n^2)$ C. $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ D. $\mathcal{O}(n!)$
4. Faktorizacija Choleskog moguća je za svaku kvadratnu matricu.
   Točno. Netočno.
5. Simetrična pozitivno definitna matrica može imati negativnu svojstvenu vrijednost. Točno. Netočno.
6. Navedite barem jedan razlog radi kojeg se prilikom rješavanja linearnih sustava koristi parcijalno pivotiranje. ______________________________
7. PLU faktorizacija matrice A je __________ $= LU$, pri čemu je P pripadna ______________ matrica.
8. Sustav $Ax = b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ rješavamo Gaussovom metodom eliminacija. Broj potrebnih aritmetičkih operacija za rješavanje pripadnih trokutastih sustava $Ly = b$ i $Ux = y$ veći je od broja operacija potrebnih za LU faktorizaciju. Točno. Netočno.
9. Za operatorsku matričnu normu vrijedi $\|A\| < \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ pri čemu je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor, različit od nulvektora. Točno. Netočno.
10. Za svaku proizvoljno glatku funkciju f vrijedi $\|f - p\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$ pri čemu je $p \in \mathcal{P}_n$ pripadni interpolacijski polinom na zadanoj mreži $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
    Točno. Netočno.

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora.