# Numerička matematika, 6. predavanje

Pina Milišić, Ana Žgaljić Keko

Skripta

# Sadržaj

# 1

# Uvod

## 1.1 Greške

## 1.2 Prikaz realnih brojeva u računalu

### 1.2.1 Preciznost, strojni epsilon i greška zaokruživanja

### 1.2.2 Propagiranje grešaka kroz aritmetičke operacije

## 1.3 Stvarne katastrofe uzrokovane greškom

# 2

# Linearni sustavi

## 2.1 Gaussove eliminacije i LU faktorizacija

## 2.2 Pivotiranje

## 2.3 Neki posebni tipovi linearnih sustava

### 2.3.1 Simetrične pozitivno definitne matrice

#### Faktorizacija Choleskog

### 2.3.2 Rješavanje tridijagonalnog sustava. Thomasov algoritam

## 2.4 Analiza greške rješenja

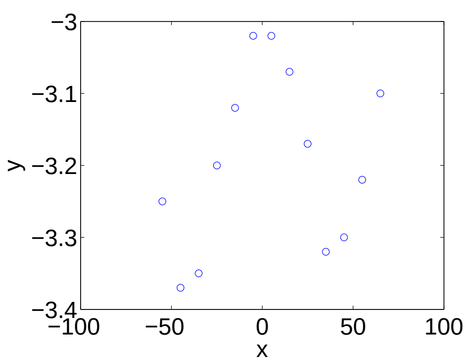
# 3

# Interpolacija i aproksimacija funkcija

U primjenama vrlo često imamo podatke koji su dobiveni eksperimentalno te su nam poznate vrijednosti samo u nekim zadanim točkama. Protorimo u tu svrhu sljedeći primjer iz klimatologije preuzet iz [].

**Primjer 3.1** Na 13 određenih geografskih širina izvršena su mjerenja odstupanja temperature tla od odgovarajuće srednje vrijednosti. Sa $x_i$ označimo pripadnu geografsku širinu u stupnjevima, dok je izmjereno odstupanje od pripadne srednje temperature označeno sa $f_i$, $i = 1, \ldots, 13$. Mjerenja su dala sljedeću tablicu:

| $x_i$ | $f_i$ |
|---|---|
| -55 | -3.25 |
| -45 | -3.37 |
| -35 | -3.35 |
| -25 | -3.2 |
| -15 | -3.12 |
| -5 | -3.02 |
| 5 | 3.02 |
| 15 | -3.07 |
| 25 | -3.17 |
| 35 | -3.32 |
| 45 | -3.3 |
| 55 | -3.22 |
| 65 | -3.1 |




Zanima nas možemo li iz danog diskretnog skupa podataka

$$\{(x_i, f_i)\}, \quad i = 0, \ldots, 12. \tag{3.1}$$

dobiti informaciju o odstupanju temperature na nekoj geografskoj širini na kojoj nisu izvršena mjerenja. Možemo li na temelju izmjerenih podataka približno odrediti odstupanje od srednje temperature tla na ekvatoru? Koliko je odstupanje srednje temperature tla u Zagrebu koji se nalazi na $\approx 45$ stupnjeva sjeverne geografske širine?

Kao jedno od mogućih rješenja našeg problema nameće nam se ideja da kroz diskretni skup podataka (3.1) *interpoliramo* funkciju $f$ koja će dati *dobru aproksimaciju* odstupanja temperature od odgovarajuće srednje temperature na proizvoljnoj geografskoj širini.

Objasnimo sada detaljnije gore spomenute pojmove interpolacije i aproksimacije. U primjenama često imamo slučaj da se vrijednosti neke fizikalne veličine u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mogu izmjeriti. Dakle, u situaciji smo da je fizikalna pojava opisana nekom funkcijom $f$ čiju formulu ne znamo. Ono što nam je poznato jesu izmjereni podaci, odnosno $n+1$ uređeni par u $\mathbb{R}^2$

$$(x_0, f_0),\ (x_1, f_1),\ \ldots,\ (x_n, f_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Svi navedeni uređeni parovi nalaze se na grafu $\Gamma$ nepoznate funkcije $f$ gdje je

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \colon x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Uočimo da ostale točke grafa $\Gamma$ nisu poznate. Želja nam je iz djelomičnog poznavanja funkcije $f$ na temelju raspoloživih podataka dobiti što je moguće više informacija o samoj funkciji. Ideja interpolacije je naći funkciju $\tilde{f}$ koja prolazi kroz točke $(x_i, f_i)$, $i = 0, \ldots, n$, nadajući se pritom da se funkcije $\tilde{f}$ i $f$ u proizvoljnoj točki iz intervala $\langle x_0, x_n \rangle$ neće *puno* razlikovati. Za takvu funkciju kažemo da *interpolira* odnosno povezuje zadane podatke.

Važno pitanje vezano uz problem interpolacije jest odabir skupa funkcija među kojima tražimo interpolirajuću funkciju. Ovisno o prirodi zadanih podataka za interpolacijske funkcije mogu se na primjer uzeti polinomi, eksponencijalna funkcija, trigonometrijske funkcije ili pak racionalne funkcije. Naime, ako originalna funkcija $f$ ima svojstvo periodičnosti, onda i interpolirajuća funkcija također treba biti periodična. Periodičke funkcije se gotovo uvijek interpoliraju pomoću trigonometrijskih funkcija, na primjer $\sin(kx)$, $\cos(kx)$, odnosno $e^{ikx}$, $k \in \mathbb{R}$. Funkcije koje posjeduju singularitete interpoliraju se uglavnom pomoću racionalnih funkcija koje imaju sličnu strukturu singulariteta. U okviru ovog kolegija bavit ćemo se polinomijalnom i trigonometrijskom interpolacijom. Polinomijalna interpolacija se radi svojih nedostataka koristi uglavnom kao pomoćno sredstvo u konstrukciji nekih numeričkih postupaka, od kojih ćemo ovdje posebnu pažnju u Sekciji **??** obratiti na numeričku integraciju. S druge strane, nedostatci polinomijalne interpolacije mogu se djelomično otkloniti ukoliko interpoliramo *po dijelovima* promatranog segmenta, tako da najprije podijelimo promatrani segment na podintervale a zatim na svakom od njih radimo interpolaciju polinomom odgovarajućeg stupnja, pazeći pritom na glatkoću dobivene funkcije u točkama mreže. Na taj način dobivamo interpolaciju po dijelovima polinomijalnom funkcijom koja se još naziva i splajn interpolacija (*eng. spline*). Trigonometrijska interpolacija je u elektrotehnici posebno važna i njome ćemo se baviti u Sekciji ??.

U primjenama smo obično zadovoljni ukoliko interpolirajuća funkcija $\tilde{f}(x)$ ima *prihvatljive* vrijednosti između interpolacijskih točaka. Naime, postupkom interpolacije dobivamo funkciju $\tilde{f}$ koja *aproksimira* nepoznatu funkciju $f$.

## 3.1 Polinomijalna interpolacija

U uvodu smo spomenuli da polinomijalna interpolacija ima nedostatke, te uglavnom nije korisna za primjene. Pogledajmo sada pobliže o kakvim se nedostatcima radi. Sa $\mathcal{P}_n$ označimo skup svih realnih polinoma $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ čiji je stupanj manji ili jednak $n \in \mathbb{N}$. Skup $\mathcal{P}_n$ je vektorski prostor dimenzije $n+1$, a svaki njegov element $p \in \mathcal{P}_n$ može se prikazati kao linearna kombinacija baze $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, odnosno u obliku

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

pri čemu su $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$ koeficijenti polinoma $p$.

**Polinomijalna interpolacijska zadaća.** Neka su zadani međusobno različiti čvorovi interpolacije $x_i$, te u njima izmjerene pripadne vrijednosti $f_i$, $i = 0, \ldots, n$. Za zadane podatke:

| $x_0$ | $x_1$ | $\cdots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|
| $f_0$ | $f_1$ | $\cdots$ | $f_n$ |

treba naći polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \tag{3.2}$$

gdje su $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n$, koji zadovoljava uvjete interpolacije

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Sljedeći teorem govori o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja interpolacijske zadaće.

**Teorem 3.1** *Interpolacijska zadaća* (3.2)-(3.3) *ima jedinstveno rješenje.*

Dokaz. Uvjeti interpolacije (3.3) vode nas do linearnog sustava sa nepoznanicama $a_0, \dots, a_n$ oblika:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n &= f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n &= f_1 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n &= f_n. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dobiveni linearni sustav zapisan u matričnoj notaciji glasi

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Linearni sustav (3.5) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je matrica sustava regularna. Determinantu matrice sustava označimo sa $D$. Može se pokazati da vrijedi

$$D = \prod_{0 \le i < j \le n} (x_i - x_j),$$

odakle slijedi $D \neq 0$, za $x_i \neq x_j$. Dakle, interpolacijska zadaća (3.2)-(3.3) ima jedinstveno rješenje. $\square$

Matricu sustava (3.5) označimo sa $V = (v_{ij})$. Uočimo da su elementi matrice $V$ dani formulom

$$v_{ij} = x_{i-1}^{j-1}, \quad k, j = 1, \dots, n+1.$$

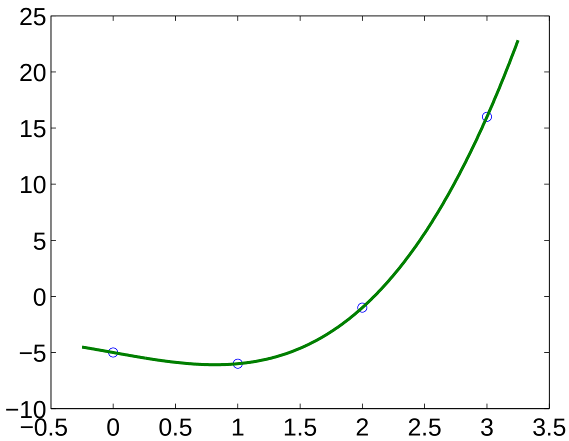
Matrica $V$ naziva se Vandermondeova matrica.

**Napomena 3.1** Primijetimo da smo jedinstvenost interpolacijskog polinoma mogli jednostavno pokazati korištenjem osnovnog teorema algebre. Pretpostavimo da postoje dva različita polinoma $p, q \in \mathcal{P}_n$ koji zadovoljavaju uvjete interpolacije (3.3). Uvedimo oznaku $h = p - q$. Tada je $h \in \mathcal{P}_n$ i vrijedi $h(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$. Dobivamo da polinom $h$ ima $n+1$ nultočku, što je moguće samo ako je $h$ nul-polinom. Dakle, slijedi da je $p = q$ čime je jedinstvenost dokazana.

U sljedećem jednostavnom primjeru na temelju zadanih podataka izračunat ćemo interpolacijski polinom.

**Primjer 3.2** Za podatke zadane tablicom

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $f_i$ | -5 | -6 | -1 | 16 |




Slika 3.1: Interpolacijski polinom za podatke $(0,-5),(1,-6),(2,-1),(3,16)$

odredimo interpolacijski polinom stupnja 3.

Traženi polinom je oblika

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Iz uvjeta $p(0) = -5$, $p(1) = -6$, $p(2) = -1$ i $p(3) = 16$ problem interpolacije svodi se na rješavanje linearnog sustava $Va = f$, pri čemu je

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Dobiveni linearni sustav riješimo u Matlabu naredbom $a = V \backslash f$ čime dobivamo $a = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Traženi interpolacijski polinom $p(x) = x^3 - 2x - 5$ prikazan je na slici 3.1.

Nakon što smo za dani diskretni skup podataka odredili interpolacijski polinom obično je jopotrebno izračunati vrijednost dobivenog polinoma u proizvoljnoj točki segmenta $\langle x_0, x_n \rangle$. Pogledajmo kako se računa vrijednost interpolacijskog polinoma $p_n$ u danoj točki. Direktno računanje po formuli

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

s time da se $x^n$ računa rekurzivno kao $x^{n-1} \cdot x$, zahtijeva $3n - 1$ računskih operacija. Efikasniji način je upotreba Hornerovog algoritma koji se bazira na *pametnom* postavljanju zagrada u izrazu (3.2). Naime, zapišemo li spomenuti izraz u sljedećem obliku:

$$p_n(x) = \Big( \cdots (((a_n x + a_{n-1}) x + a_{n-2}) x + a_{n-3}) x + \cdots + a_1 \Big) x + a_0,$$

vidimo da je broj potrebnih aritmetičkih operacija jednak $2n$. Jedan primjer implementacije Hornerovog algoritma u Matlabu dan je funkcijom `horner`:

```
function y = horner(a,x)
% Ulaz: vektor a koeficijenata polinoma p_n
%       vektor x duljine n
% Izlaz: vektor y sa vrijednostima polinoma p_n
%        u cvorovima x(1),...,x(n).
k = length(a)-1; n = length(x);
y(1:n,1) = a(k+1);
for j = k:-1:1
    y = a(j) + y.*x;
end
```

Izvrednjavanje polinoma u danoj točki u Matlabu se radi korištenjem funkcije `polyval`.

Dosad smo vidjeli da se interpolacijska zadaća svodi na rješavanje sustava sa Vandermondeovom matricom. Uočimo da se porastom broja interpolacijskih čvorova stupanj interpolacijskog polinoma povećava, a raste i red Vandermondeove matrice. Nadalje, pokazuje se da je Vandermondeova matrica već za $n = 4$ loše uvjetovana.

Uvjetovanost Vandermondeove matrice!

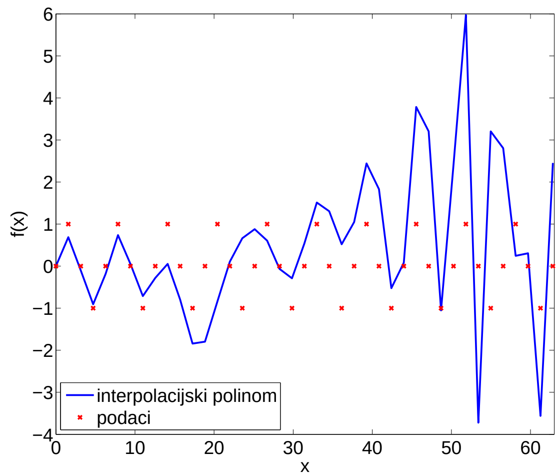
Dakle, opisani način rješavanja interpolacijskog problema neće biti zadovoljavajući u slučajevima kada je broj čvorova *velik*. Uvjerimo se u to na sljedećem primjeru.

**Primjer 3.3** Interpolirajmo funkciju $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $[0, 20\pi]$ na ekvidistantnoj mreži koja se sastoji od 41-nog čvora.

Skripta `InterpSin.m` interpolira funkciju $\sin(x)$ iz gornjeg primjera.

```
% InterpSin.m
n = 40;
x = linspace(0,20*pi,n+1)';
y = sin(x);
V = zeros(n+1);
for i = 1:n+1
    V(:,i) = x.^(i-1);
end
a = V\y;
f = horner(a,x);
plot(x,f,'b-',x,y,'rx');
```

Dobiveni rezultat je prikazan na slici 3.2 uz upozorenje




Slika 3.2: Interpolacija funkcije $\sin(x)$ na $[0, 20\pi]$

```
>> InterpSin
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.857867e-75.
> In InterpSin at 8
```

Očito, radi grešaka zaokruživanja koeficijenti interpolacijskog polinoma u gornjem slučaju su neprecizno izračunati. Uzrok tome je velika uvjetovanost pripadne matrice $V$.

Razlog nezadovoljavajućeg rezultata kojeg smo dobili u Primjeru 3.3 leži u lošoj formulaciji interpolacijskog problema. Podsjetimo se, skup $\mathcal{P}_n$ svih polinoma čiji stupanj je manji ili jednak od $\leq n$, u kojem tražimo interpolacijski polinom, je vektorski prostor dimenzije $n+1$. Rješavajući interpolacijsku zadaću (3.2)-(3.3) traženi interpolacijski polinom prikazali smo u standardnoj bazi $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$. No, isto tako mogli smo odabrati bilo koju drugu bazu prostora $\mathcal{P}_n$. Neka je

$$\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$$

proizvoljna baza prostora $\mathcal{P}_n$. Traženi interpolacijski polinom prikazan u ovoj bazi je oblika

$$p_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x),$$

a interpolacijski uvjeti (3.3) vode na rješavanje sljedećeg linearnog sustava

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Odaberemo li sada funkcije $\{\varphi_j(x), j = 0, \dots, n\}$ tako da vrijedi

$$\varphi_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}, \quad k, j = 0, 1, \dots, n \tag{3.8}$$

vidimo da za određivanje koeficijenata $a_i$, $i = 1, \dots, n$ interpolacijskog polinoma neće biti potrebno rješavati linearni sustav. Naime, matrica sustava (3.7) će u tom slučaju biti jedinična matrica, odakle slijedi da su nepoznati koeficijenti interpolacijskog polinoma upravo zadane vrijednosti funkcije u čvorovima interpolacije. Dakle, vrijedi $a_i = f_i$, $i = 0, \dots, n$. Nadalje, lako se vidi da svojstvo (3.8) imaju polinomi

$$\varphi_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \dots, n. \tag{3.9}$$

Očito je $\varphi_j \in \mathcal{P}_n$, $\forall j = 0, \dots, n$. Štoviše, vrijedi sljedeća lema.

**Lema 3.1** *Skup* $\{\varphi_j(x), j = 0, \dots, n\}$ *je baza prostora* $\mathcal{P}_n$.

**Dokaz.** Očito, funkcije $\{\varphi_j\}$ su linearno nezavisne. Naime,

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \varphi_j(x) = 0, \ \forall x \Longrightarrow \alpha_j = 0, \ \forall j = 0, \dots, n.$$

Nadalje, svaki polinom $p \in \mathcal{P}_n$ može se prikazati u obliku

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j \varphi_j(x).$$

Dovoljno je uzeti $\beta_j = p(x_j)$ i koristiti činjenicu da je razlika $p(x) - \sum_{j=0}^{n} \beta_j \varphi_j(x)$ također element prostora $\mathcal{P}_n$ i ima $n+1$ nultočku. $\square$

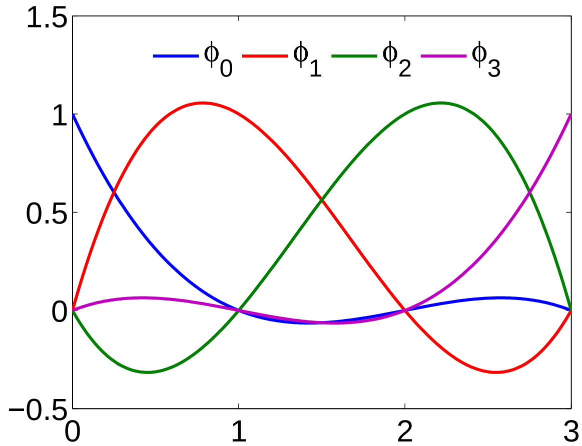
Skup $\{\varphi_j(x), j = 0, \dots, n\}$ nazivamo Lagrangeova baza prostora $\mathcal{P}_n$. Polinom koji zadovoljava interpolacijski problem (3.2)-(3.3) sada možemo zapisati u sljedećem obliku

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j \varphi_j(x). \tag{3.10}$$

Lako se vidi da vrijedi

$$p_n(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f_j \varphi_j(x_k) = \sum_{j=0}^{n} f_j \delta_{jk} = f_k.$$

Dakle, korištenjem interpolacijskog polinoma u Lagrangeovom obliku izbjegli smo rješavanje linearnog sustava sa loše uvjetovanom Vandermondeovom matricom.




Slika 3.3: Lagrangeova baza za mrežu $\{0, 1, 2, 3\}$

**Primjer 3.4** Direktnim računom dobivamo formule za konstantnu, linearnu i kvadratnu interpolaciju:

(i) $n = 0$, $p_0(x) = f_0$

(ii) $n = 1$, $p_1(x) = f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

(iii) $n = 2$, $p_2(x) = f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \dfrac{1}{x_2 - x_0}\left(\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)(x - x_1)$

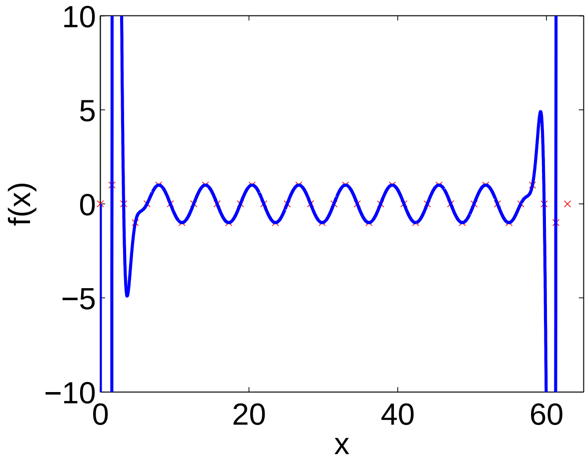
**Primjer 3.5** Za podatke iz primjera 3.2 napišimo interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku. Korištenjem formule (3.9) dobiva se

$$
\begin{aligned}
p_3(x) &= \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-6)}(-5) + \frac{x(x-2)(x-3)}{2}(-6) \\
&\quad + \frac{x(x-1)(x-3)}{(-2)}(-1) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}16.
\end{aligned}
$$

Polinomi pripadne Lagrangeove baze $\{\varphi_j, j = 0, \ldots, 3\}$ prikazani su na slici 3.3.

Promotrimo sada funkciju `polyinterp` koja za podatke zadane vektorima `x` i `y` računa Lagrangeov interpolacijski polinom i izvrednjava ga u točkama zadanim vektorom `u`.

```
function v = polyinterp(x,y,u)
n = length(x);
v = zeros(size(u));
for k = 1:n
    w = ones(size(u));
```




Slika 3.4: Lagrangeov interpolacijski polinom za funkciju $\sin(x)$

```
    for j = [1:k-1 k+1:n]
        w = (u - x(j))./(x(k)-x(j)).*w;
    end
    v = v + w*y(k);
end
```

Vratimo se sada na primjer 3.3 i potražimo interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku koristeći funkciju `polyinterp`.

```
n = 40;
x = linspace(0,20*pi,n+1)';
y = sin(x);
xu = [0:0.01:20*pi];
v = polyinterp(x,y,xu)
plot(x,y,'rx',xu,v,'b-')
```

Rezultat je prikazan na slici 3.4. Primijetimo da dobiveni interpolacijski polinom prolazi kroz zadane točke što znači da su, za razliku od prijašnjeg rezultata, koeficijenti dobro izračunati, no vidimo da je ovdje aproksimacija na rubu je izuzetno loša. Na temelju ovog primjera vidimo da se prijelazom na Lagrangeovu bazu može riješiti problem preciznog računanja koeficijenata interpolacijskog polinoma, no ostaje pitanje koliko *dobro* interpolacijski polinom visokog stupnja aproksimira traženu funkciju. Naime, polinomi višeg stupnja su oscilatorne funkcije i teže ka $\pm\infty$ kada $x$ raste. Loša aproksimacija interpolacijskim polinomom na rubnim segmentima je upravo posljedica tih oscilatornih svojstava polinoma.

**Greška interpolacije.** Pogledajmo kolika je greška interpolacije vrijednosti zadane funkcije $f$ interpolacijskim polinomom $p$. Grešku interpolacije je lako ocijeniti kada je funkcija $f$ dovoljno glatka. Uvedimo najprije sljedeću oznaku

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \tag{3.11}$$

Osnovni rezultat je dan sljedećim teoremom.

**Teorem 3.2** *Neka je $f \in C^{n+1}(a, b)$ zadana funkcija i neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ međusobno različite točke. Neka je $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinom koji interpolira funkciju $f$ u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Tada za svako $x \in [a, b]$ postoji točka $\xi_x \in \langle a, b\rangle$ takva da je*

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}(x). \tag{3.12}$$

**Dokaz**. Jednakost (3.12) očito vrijedi u točkama $x_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ jer su u tim točkama i lijeva i desna strana jednake nuli. Uzmimo stoga točku $x$ koja nije u skupu $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ i definirajmo funkcije

$$w_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t - x_i), \quad \phi(t) = f(t) - p_n(t) - \lambda w_{n+1}(t).$$

Broj $\lambda$ odredimo tako da bude $\phi(x) = 0$, odnosno

$$\lambda = \frac{f(x) - p_n(x)}{w_{n+1}(x)} \tag{3.13}$$

Funkcija $\phi$ je klase $C^{n+1}$ i ima najmanje $n + 2$ nultočke $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ koje su međusobno različite. Prema Rolleovom teoremu derivacija $\phi'(t)$ ima barem $n + 1$ različitih nultočaka u intervalu $\langle a, b\rangle$. Taj argument možemo primijeniti na $\phi''(t)$, $\phi^{(3)}(t)$ itd. Dobit ćemo da $\phi^{(n+1)}(t)$ ima najmanje jednu nultočku u intervalu $\langle a, b\rangle$. Označimo tu nultočku sa $\xi_x$. Tada je

$$\phi^{(n+1)}(\xi_x) = 0 = f^{(n+1)}(\xi_x) - p_n^{(n+1)}(\xi_x) - \lambda w_{n+1}^{(n+1)}(\xi_x).$$

Kako je $p_n$ polinom $n$-tog stupnja, njegova je $(n + 1)$-va derivacija jednaka nuli. Polinom $w_{n+1}(t)$ je stupnja $n+1$ i koeficijent uz najvišu potenciju mu je 1; stoga je $w_{n+1}^{(n+1)}(\xi_x) = (n + 1)!$. Time dobivamo

$$f^{(n+1)}(\xi_x) = (n + 1)!\lambda = (n + 1)! \frac{f(x) - p_n(x)}{w_{n+1}(x)}. \quad \square$$

Iz ocjene (3.12) direktno slijedi

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{(n + 1)!} \max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \tag{3.14}$$

Uočimo da ocjena pogreške (3.14) ovisi o polinomu $w_{n+1}(x)$ te o $(n+1)$-voj derivaciji funkcije $f$. Pogledajmo sada na koji način možemo ocijeniti član

$$\max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|.$$

Grubu ocjenu

$$\max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \le (b-a)^{n+1} \tag{3.15}$$

dobivamo tako što apsolutno vrijednost svakog člana produkta (3.11) ocijenimo odozgo sa $|b-a|$. Nadalje, u slučaju ekvidistantne mreže $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,\dots,n$, pri čemu je $h = (x_n - x_0)/n$, te $x_0 = a$, $x_n = b$ pokazuje se da član (3.11) možemo ocijeniti na sljedeći način:

$$\max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \le n!h^{n+1}, \quad x\in[a,b],\ h=(b-a)/n. \tag{3.16}$$

Zaista, direktno slijedi da za $x = x_i$, $i = 0,\dots,n$ vrijedi ocjena (3.16). Pretpostavimo da je $x \ne x_i$. Kako je $x \in \langle a,\rangle b$ onda postoji indeks $i$ takav da je $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Nadalje, lako se vidi da vrijede sljedeće ocjene:

$$\begin{aligned}
|x-x_{i-1}| < h, &\quad |x-x_i| < h,\\
|x-x_{i-2}| < 2h, &\quad |x-x_{i+1}| < 2h,\\
&\quad \vdots,\\
|x-x_0| < ih, &\quad |x-x_n| < (n-i+1)h,
\end{aligned}$$

pomoću kojih, s(p)retno odabranim ocjenjivanjem, dobivamo

$$\begin{aligned}
|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| &\le ih\cdot(i-1)h\cdots(2h)\cdot h\cdot h\cdot(2h)\cdots(n-i+1)h\\
&= h^{n+1}\cdot i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdots 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-i+1)\\
&\le h^{n+1}\cdot i\cdot(i-1)\cdot(i-2)\cdots 2\cdot 1\cdot 1\cdot(i+1)\cdot(i+2)\cdots(n-1)\cdot n\\
&= h^{n+1}\cdot n!.
\end{aligned}$$

**Napomena 3.2** Pokazuje se da ocjena (3.16) vrijedi i u slučaju kada mreža nije ekvidistantna, pri čemu smo sa

$$h = \max_{1\le i\le n} |x_i - x_{i-1}| \tag{3.17}$$

označili duljinu najvećeg podintervala od $[a,b]$.

Koristeći ocjenu (3.16) vidimo da za proizvoljnu mrežu ocjenu greške interpolacije možemo zapisati u sljedećem obliku

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{b-a} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| h^{n+2}, \tag{3.18}$$

pri čemu je $h$ dan izrazom (3.17).

Grešku interpolacije obično zapisujemo korištenjem neke odabrane funkcijske norme.

**Definicija 3.1** Neka je $f \in C[a,b]$ neprekidna funkcija. Supremum normu funkcije $f$ definiramo formulom

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|. \tag{3.19}$$

Iz analize znamo da neprekidna funkcija na segmentu poprima maksimum, dakle postoji točka $x_0 \in [a,b]$ za koju vrijedi

$$f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Supremum norma se često naziva i max-norma. Ocjena greške interpolacije (3.12) zapisana pomoću supremum norme glasi

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|w_{n+1}\|_\infty. \tag{3.20}$$

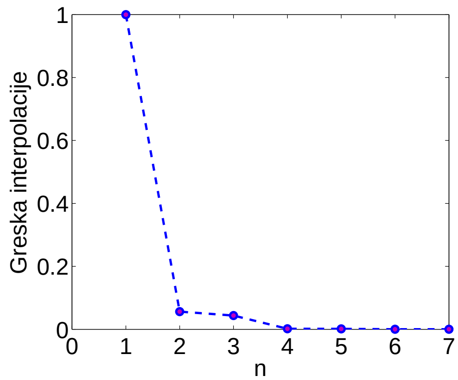
Sada nam se prirodno nameće pitanje da li povećanje stupnja interpolacijskog polinoma vodi ka smanjenju greške interpolacije, odnosno da li proces interpolacije konvergira. Pogledajmo kakva mora biti funkcija $f$ da bismo mogli zaključiti da $\|f - p_n\|_\infty \to 0$ kada $n \to \infty$? Ukoliko je, na primjer, funkcija $f$ takva da za njenu $n$-tu derivaciju vrijedi

$$\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq K^n, \tag{3.21}$$

iz ocjene (3.20) koristeći grubu ocjenu (3.15) za član $w_{n+1}$ , dobivamo da vrijedi

$$\|f - p_n\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{K^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty,$$

zbog toga što faktorijel brže teži ka $\infty$ nego proizvoljna potencija. Dakle, da bi proces interpolacije konvergirao mora, na primjer, postojati ograničenje na rast funkcije $f$ dano u izrazu (3.21). Pogledajmo sada jedan primjer u kojem proces interpolacije konvergira.




Slika 3.5: Greška interpolacije funkcije $\sin(x)$ iz primjera 3.6

**Primjer 3.6** Neka je dana funkcija $f(x) = \sin(x)$ i neka je $[a, b] = [0, \pi]$. Nadalje, neka su čvorovi interpolacije ekvidistantno raspoređeni na način da je $x_j = j\pi/n$ za $j = 0, \dots, n$. Zanima nas da li proces interpolacije u ovom primjeru konvergira, odnosno vrijedi li $\|f - p_n\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty$?

Zaista, kako je $\|f^{(n+1)}\|_\infty = 1$ slijedi

$$\begin{aligned} \|f - p_n\|_\infty &\le \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[0,\pi]} \Big|(x-0)(x-\frac{\pi}{n})(x-\frac{2\pi}{n})\cdots(x-\pi)\Big| \\ &\le \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+1} \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Na slici 3.5 prikazana je greška interpolacije $\|f - p_n\|_\infty$ u ovisnosti o $n = 1, \dots, 7$.

Vratimo se sada na ocjenu (3.18). Uočimo da iz nje općenito ne možemo zaključiti da greška interpolacije teži prema nuli kada $n \to \infty$, bez obzira što član $h^{n+2} \to 0$, budući da maksimum $(n + 1)$-ve derivacije funkcije $f$ može rasti brže od toga. Moguće je čak naći funkcije $f$ za koje vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| = \infty.$$

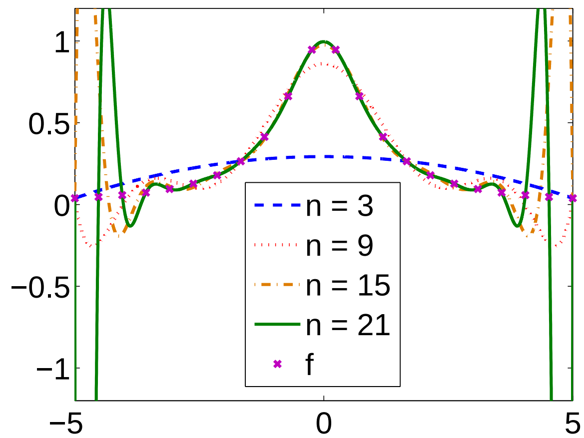
U tom smjeru, promotrimo sljedeći zanimljivi primjer.

**Primjer 3.7** (Runge) Interpolacija funkcije

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

polinomima stupnja $n = 3, 9, 15, 21$ na zadanoj ekvidistantnoj mreži

$$x_j = -5 + \frac{10}{n} j, \quad j = 0, \dots, n.$$




Slika 3.6: Rungeov primjer: ekvidistantna mreža

prikazana je slikom 3.6 Opažamo oscilacije interpolacijskog polinoma na rubovima intervala. Pažljiva analiza Rungeovog primjera pokazuje da greška interpolacije teži ka $\infty$ kada $n \to \infty$.

Preciznije, u slučaju Rungeovog primjera, u ocjeni (3.18) ponašanje člana $\max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}|$ bit će dominantno u odnosu na činjenicu da $h^{n+2} \to 0$ za $n \to \infty$.

Pažljivim odabirom čvorova interpolacije može se postići uniformna konvergencija niza interpolacijskih polinoma prema funkciji iz primjera 3.7. Naime, čvorove interpolacije $x_0$, $x_1$, $\ldots$, $x_n$ treba odabrati tako da vrijednost

$$\|w_{n+1}\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$$

bude minimalna. Pokazuje se da upravo nultočke (n+1)-vog Čebiševljevog polinoma minimiziraju $\|w_{n+1}\|_\infty$.

**Definicija 3.2** Neka je $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$. Tada je $n$-ti Čebiševljev polinom $T_n(x)$ definiran sljedećom rekurzijom

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x). \tag{3.22}$$

Prvih nekoliko polinoma je:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$$

**Teorem 3.3** Za $x \in [-1,1]$ Čebiševljevi polinomi imaju sljedeći prikaz:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \geq 0.$$

**Dokaz**. Kako su Čebiševljevi polinomi na jedinstven način definirani rekurzijom (3.22), dovoljno je pokazati da funkcije $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ zadovoljavaju istu rekurziju. $\square$

Čebiševljevi polinomi očito imaju sljedeća svojstva:

$$\begin{aligned} |T_n(x)| &\leq 1 \quad \text{za} \quad x \in [-1,1] \\ T_n(\cos\frac{j\pi}{n}) &= (-1)^j \quad \text{za} \quad j = 0,1,\ldots,n \\ T_n(\cos(\frac{2j+1}{2n}\pi)) &= 0 \quad \text{za} \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Odavde vidimo da $n$-ti Čebiševljev polinom mijenja predznak $n$-puta na $[-1,1]$ i da ima $n$ realnih i jednostrukih nultočaka u intervalu $(-1,1)$.

Nadalje, iz rekurzije se lako vidi da je vodeći koeficijent polinoma $T_n$, tj. koeficijent uz najvišu potenciju, jednak $2^{n-1}$ ($T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$). Normirani Čebiševljevi polinomi

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

zadovoljavaju nejednakost

$$|\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{za} \quad x \in [-1,1].$$

Oscilatorni karakter Čebiševljevih polinoma daje sljedeće minimizirajuće svojstvo:

**Teorem 3.4** Neka je $p(x)$ polinom $n$-tog stupnja s jediničnim koeficijentom uz najvišu potenciju. Tada je

$$\|p\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**Dokaz**. Dokaz ide metodom kontradikcije. Pretpostavit ćemo da postoji polinom $p(x)$ stupnja $n$, s jedinicom uz najvišu potenciju, koji zadovoljava $|p(x)| < 1/2^{n-1}$ za sve $x \in [-1,1]$. U točkama $x_j = \cos(\frac{j\pi}{n})$, $j = 0,1,2,\ldots,n$ zbog (3.23) vrijedi:

$$(-1)^j p(x_j) \leq |p(x_j)| < \frac{1}{2^{n-1}} = (-1)^j \tilde{T}_n(x_j)$$

odakle slijedi

$$(-1)^j [p(x_j) - \tilde{T}_n(x_j)] < 0 \quad \text{za} \quad j = 0,1,\ldots,n.$$

Uočimo da je $p - \tilde{T}_n$ zbog normiranja polinom stupnja manjeg ili jednakog $n-1$. Nadalje, upravo smo dokazali da taj polinom mijenja predznak najmanje $n$ puta, što znači da ima najmanje $n$ nultočaka u $\langle -1,1 \rangle$. Time nužno dobivamo da je $p - \tilde{T}_n \equiv 0$ što je kontradikcija s polaznom tvrdnjom. $\square$

Primjena na interpolaciju funkcija na segmentu $[-1,1]$ je neposredna. Iz prethodnog teorema znamo da za proizvoljan izbor interpolacijskih točaka vrijedi

$$|w_{n+1}(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \geq \frac{1}{2^n}.$$

Jednakost ćemo imati ako za interpolacijske točke uzmemo nultočke Čebiševljevog polinoma $T_{n+1}$ jer onda na lijevoj strani imamo $|\tilde{T}_{n+1}(x)|$. Te su nultočke

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

i nazivamo ih **Čebiševljevim točkama**. Uz taj izbor točaka imamo ocjenu

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)| \to 0, \quad n \to \infty$$

U slučaju proizvoljnog segmenta $[a,b]$ linearnom transformacijom preslikamo $[a,b]$ na $[-1,1]$ i zatim interpoliramo u Čebiševljevim točkama na $[-1,1]$. Na taj način dobivamo da su Čebiševljeve točke na $[a,b]$

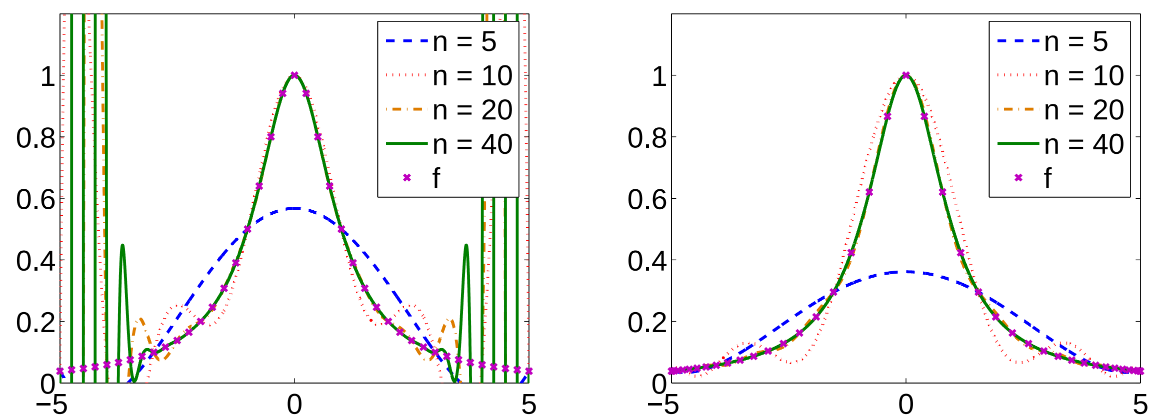
$$x_j = a + \frac{b-a}{2}\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) + 1\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3.24}$$

a greška interpolacije dana je ocjenom (vidi zadatak **??**)

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|. \tag{3.25}$$

Na slici 3.7 prikazana je interpolacija funkcije $f$ polinomima stupnja $n = 4, 10, 20, 40$ na ekvidistantnoj mreži (lijevo), te na Čebiševljevoj mreži (desno).

### 3.1.1 Primjena: numerička integracija




Slika 3.7: Rungeov primjer: ekvidistantna mreža (lijevo), Čebiševljeva mreža (desno)

# Bibliografija


[1] M. T. Heath. *Scientific Computing: An Introductory Survey.* McGrawHill, New York, 2002.

[2] D. Kressner. *Numerische Methoden.* http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2008/math/nm, ETH Zuerich 2008.

[3] L. Erdos. Numerical Mathematics I. http://www.mathematik.uni-muenchen.de/ lerdos/Notes, Georgia Tech 2002 and TU Muenchen 2008.

[4] C. Moler. *Numerical Computing with MATLAB and Experiments with MATLAB.* http://www.mathworks.com/company/aboutus/founders/clevemoler.html

[5] A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri. *Numerical Mathematics.* Texts in Applied Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg 2007.

[6] J. L. Buchanan, P. R. Turner. *Numerical Methods and Analysis.* McGraw-Hill, Inc.,New York, 1992.

[7] D. Goldberg. *What Every Computer Scientist Should Know About Floating-Point Arithmetic.* ACM Computing Surveys, Vol. 23, No. 1, March 1991.

[8] I. Ivanšić. *Numericka matematika.* Element, Zagreb, 2005.

[9] D. Kincaid, W. Cheney. *Numerical Analysis, Mathematics of Scientific Computing.* Brooks/Cole Publishing Company. Pacific Grove, California, 1991.

[10] M. L. Overton. *Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic.* SIAM, Philadelphia, 2001.

[11] Z. Drmač, V. Hari, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, I. Slapničar. *Numericka analiza, predavanja i vježbe.* http://web.math.hr/ rogina/2001096/numan.html, PMF-MO, Zagreb, 2003.

[12] E. Sulli, D.F. Mayers. *An Introduction to Numerical Analysis.* Cambridge University Press, London, 2003.

[13] G. Strang. *Linear Algebra and its Applications*, Brooks Cole, 2005.

[14] N.J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, SIAM, Philadelphia, 1995.

[15] A. Jüngel. *Quasi-hydrodynamic Semiconductor Equations*. Birkhäuser, Basel, 2001.

[16] A. Jüngel. *Transport Equations for Semiconductors*. Lecture Notes, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, 2004.

[17] N. Kluksdahl, A. Kriman, D. Ferry, and C. Ringhofer. Self-consistent study of the resonant-tunneling diode. *Phys. Rev. B* 39 (1989), 7720-7735.

[18] S. Singer. *Numerička matematika*. Skripta, PMF-MO, Zagreb 2008.

[19] R. Pinnau.

# 4

# Dodatak

## 4.1 Neki važni pojmovi iz linearne algebre i matematičke analize

### 4.1.1 "Veliko" O i "malo" o notacija

Često je potrebno uspoređivati asimptotsko ponašanje zadanih realnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ kada varijabla $x$ teži ka $x_0$. U tu svrhu koristimo notaciju "veliko" i "malo" O[1] s kojom smo se upoznali u Matematici 2. Ponovimo ovdje, radi potpunosti, definiciju spomenutih simbola O i $o$. Neka su $f,\, g\colon X \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ te $x_0$ točka gomilišta skupa $X$ ($x_0$ može biti jednako $\infty$). Simbole $\mathcal{O}(\cdot)$ i $o(\cdot)$ definiramo na sljedeći način:

$$f = \mathcal{O}(g) \quad (x \to x_0) \Longleftrightarrow \limsup_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty \tag{4.1}$$

$$f = o(g) \quad (x \to x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0. \tag{4.2}$$

Uočimo najprije da je izraz (4.1) ekvivalentan tvrdnji da postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < C$, za svako $x$ iz neke *okoline* točke $x_0$. Nadalje, važno je naglasiti da se znak jednakosti u izrazima (4.1), (4.2) koristi u simboličkom smislu. Tako naprimjer iz tvrdnji $f_1(x) = o(g(x))$ i $f_2(x) = o(g(x))$ ne slijedi nužno da je $f_1 = f_2$. Ono što u tom slučaju možemo zaključiti je naprimjer da vrijedi $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$, odnosno $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.

**Primjer 4.1** Uvjerite se da vrijede sljedeće tvrdnje:

- $f(x) = 7x + 6x^2$, $g(x) = x^2$. Vrijedi: $f = \mathcal{O}(g)$, $x \to 1$

[1] Landauova notacija

- $f(x) = x\ln(1+x)$, $g(x) = x$. Vrijedi: $f = o(g)$, $x \to 0+$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, $x \to 0$
- $\ln(x) = o(x^\alpha)$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$
- $\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + \mathrm{O}(h^2)$, $h \to 0$ $(0 < h < 1)$
- $2n^4 + 3n^3 + 5n^2 + n = \mathrm{O}(n^4)$, $n \to \infty$

### 4.1.2 Vektorski prostori

Jedan od najvažnijih koncepata u matematici je pojam vekorskog prostora. Ugrubo rečeno, vektorski prostor je svaki skup u kome znamo zbrajati elemente i množiti ih s realnim, odnosno kompleksnim brojevima. Pri tome zbrajanje i množenje zadovoljava uobičajena pravila zbrajanja i množenja realnih brojeva i ono nas ne vodi izvan promatranog skupa. Preciznije, pogledajmo sljedeću definiciju.

**Definicija 4.1** Za neprazni skup $X$ kažemo da je vektorski prostor ukoliko su zadovoljeni sljedeći aksiomi.

A1 Suma svaka dva elementa $x, y \in X$ jedinstveno određuje element $z = x+y \in X$ pri čemu vrijede sljedeća pravila

(i) $x + y = y + x$ (komutativnost)

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost)

(iii) Postoji element $0 \in X$ takav da vrijedi $x + 0 = x$, $\forall x \in X$.

(iv) Za svaki element $x \in X$ postoji element $-x$ takav da vrijedi $x+(-x) = 0$.

A2 Za svaki realan broj $\alpha \in \mathbb{R}$ te za svaki element $x \in X$ jedinstveno je određen element $\alpha x \in X$ tako da vrijedi

(i) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(ii) $1x = x$

A3 Zbrajanje i množenje definirano aksiomima $A1$ i $A2$ zadovoljava zakone distributivnosti:

(i) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$

### 4.1.3 Neprekidnost, ograničenost, integrabilnost

### 4.1.4 Teoremi srednje vrijednosti

**Propozicija 4.1** *Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na segmentu $[a,b]$, te neka je $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Tada vrijedi*

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx,$$

*gdje je $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$.*

**Teorem 4.1** Integralni teorem srednje vrijednosti *Neka su funkcije $f$ i $g$ integrabilne na segmentu $[a,b]$ i neka je $m = \inf f(x)$ i $M = \sup f(x)$. Nadalje, neka je $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$ takav da vrijedi*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c \int_a^b g(x)dx. \tag{4.3}$$

*Posebno, ako je $g$ neprekidna na $[a,b]$ onda postoji $\tau \in [a,b]$ takav da vrijedi*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\tau) \int_a^b g(x)dx.$$

**Dokaz.**