NuMat ZI: Pitanja

15. lipnja 2020. Grupa B

Pitanja višestrukog odabira

Pitanja **1-5**: u zagradi su zapisani bodovi i negativni bodovi po zadatku. Neodgovoreno=0b.

1. (4B, -1B) Zadana je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -3 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Provodimo postupak Gaussovih eliminacija s parcijalnim pivotiranjem i dolazimo do matrice

$$U = A^{(3)} = M_3 P^{(3)} M_2 P^{(2)} A^{(1)} = M_3 P^{(3)} M_2 P^{(2)} M_1 P^{(1)} A.$$

Pri tome je matrica $P^{(2)}$ jednaka:

A $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **E** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. (4B, -1B) Matrica M_2 iz zadatka 1 je:

A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **D** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **E** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. (4B, -1B) Podatke zadane tablicom

x	-4	-2	2	4
y	8	6	3	5

aproksimiramo pravcem $y = c_0 + c_1 x$ u smislu najmanjih kvadrata. Koeficijenti dobivenog pravca su:

A $c_0 = -\frac{9}{2},\ c_1 = -\frac{11}{2}$ **B** $c_0 = -\frac{11}{2},\ c_1 = \frac{9}{2}$ **C** $c_0 = \frac{9}{2},\ c_1 = -\frac{11}{2}$

D $c_0 = \frac{11}{2},\ c_1 = -\frac{9}{2}$ **E** $c_0 = -\frac{9}{2},\ c_1 = \frac{11}{2}$

4. (5B, -2B) Odredite sve $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje je matrica $A = \begin{bmatrix} 49 & 14 & 21 \\ 14 & 5 & 11 \\ 21 & 11 & 44-\alpha \end{bmatrix}$ pozitivno definitna. To su svi α za koje je:

A $\alpha > 44$ **B** $\alpha < 44$ **C** $\alpha > 10$ **D** $\alpha < 10$ **E** Ništa od navedenog

5. (5B, -2B) Odredite parametre a, b, c tako da funkcija

$$s(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & x \in [0,1] \\ 2 + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

bude prirodni kubni splajn na intervalu $[0, 2]$. Tada je $a + b + c =$

A 1 **B** -1 **C** 3 **D** -3 **E** ništa od navedenog

Okrenite!

Pitanja **6-16**: točno= **3b**, neodgovoreno= **0b**, netočno= −**1b**

6. U IEEE formatu jednostruke preciznosti sljedećim je zapisom prikazan

0	11111111	11000000000000000000000

A `+Inf` **B** `NaN` **C** 255.75 **D** `-Inf`

7. Za aproksimaciju prve derivacije funkcije f u zadanoj točki formulom centralne diferencije broj izvrednjavanja funkcije f iznosi:
A 5 **B** 4 **C** 3 **D** 2

8. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrica sustava $Ax = b$. Tijekom Gaussove metode sa parcijalnim pivotiranjem element na mjestu (k, k) zamjenjujemo s:
A $\min\limits_{k\le j\le n} |a_{ij}|$ **B** $\max\limits_{k\le j\le n} |a_{ij}|$ **C** $\min\limits_{k\le i\le n} |a_{ij}|$ **D** $\max\limits_{k\le i\le n} |a_{ij}|$

9. Zadana je matrica $\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Tada je:
A $\|A\|_2 < \|A\|_1$ **B** $\|A\|_2 > \|A\|_1$ **C** $\|A\|_2 > \|A\|_\infty$ **D** $\|A\|_2 = \|A\|_1$

10. Za skup podataka iz zadatka 3, odredite element Lagrangeove baze $\varphi_2(x)$. Vrijednost $\varphi_2(1)$ je:
A 1 **B** 0 **C** $\dfrac{15}{16}$ **D** $-\dfrac{14}{15}$ **E** Ništa od navedenog

11. Koji od navedenih uvjeta kubni splajn općenito ne mora zadovoljavati:

A uvjet interpolacije funkcije na zadanoj mreži
B neprekidnost treće derivacije
C neprekidnost druge derivacije
D neprekidnost prve derivacije

12. Vrijednost integrala $I(f) = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ aproksimiramo kompozitnom trapeznom formulom na uniformnoj mreži $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ koraka h. Neka je funkcija f takva da za $x \in [1, 2]$ vrijedi $-4 \le f''(x) \le 3$. Tada je:
A $|I(f) - T_n(f)| \le \dfrac{h^3}{3}$ **B** $|I(f) - T_n(f)| \le \dfrac{h^3}{8}$ **C** $|I(f) - T_n(f)| \le \dfrac{h^2}{4}$
D $|I(f) - T_n(f)| \le \dfrac{h^2}{12}$ **E** $|I(f) - T_n(f)| \le \dfrac{h^2}{3}$
Uputa: Ocjena pogreške za jednostavnu trapeznu formulu: Neka je $f \in C^2(a, b)$. Tada postoji $\tau \in (a, b)$ takav da vrijedi $I(f) - T(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\tau)$, pri čemu je $h = b - a$.

Okrenite!

13. QR faktorizacija matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ iznosi:

A $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **E** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

14. Za jednadžbu $x^2 = 0$ postoji rješenje i to je $x_1 = 0$. Metoda bisekcije ne može se primijeniti na rješavanje ove jednadžbe jer je funkcija $f(x) = x^2$

A jer je nenegativna **B** jer je polinom. **C** jer ima nultočku kratnosti 2
D ima horizontalnu tangentu u $x = 0$

15. Newtonovom metodom želimo odrediti rješenje jednadžbe $x^3 + 6x - 5 = 0$. Ako je $x_1 = 1$, koliko je x_2?

A $\frac{1}{9}$ **B** $\frac{7}{9}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** $\frac{1}{3}$

16. Kada tražimo rješenje jednadžbe $\cos x = 0$ metodom sekante, sljedeći izbor početnih iteracija nije prikladan:

A $x_0 = -\frac{\pi}{4},\ x_1 = \frac{\pi}{4}$ **B** $x_0 = \frac{\pi}{4},\ x_1 = \frac{3\pi}{4}$ **C** $x_0 = -\frac{\pi}{4},\ x_1 = 0$
D $x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2}$

`Točno ili netočno?`

Napomena: na priloženom formularu za upis rješenja:

$$A \equiv T\,(\textbf{Točno}), B \equiv N\,(\textbf{Netočno})$$

Pitanja **17-21**: točno= **2b**, neodgovoreno= **0b**, netočno= **−2b**

17. Singularne vrijednosti matrice A su svojstvene vrijednosti matrice $A^T A$.

T **N**

18. Za nelinearnu jednadžbu $f(x) = 0$, gdje je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jedinstveno je određena funkcija $\varphi(x)$ tako da niz $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ za danu početnu iteraciju x_0 konvergira prema rješenju nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$.

T **N**

19. Formula diferencije unatrag za aproksimaciju $f'(x)$ je prvog reda točnosti.

T **N**

20. Globalno konvergentna Newtonova metoda konvergira kvadratično.

T **N**

21. Ako konvergira, metoda sekante za rješavanje nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ općenito konvergira prema egzaktnom rješenju sporije od Newtonove metode.

T **N**

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Upotreba mobitela je najstrože zabranjena (za vrijeme ispita, mobitel nije sat!)