Međuispit iz Numeričke matematike
20. travnja 2015.

1. [5b] U sljedećim izrazima zapišite ostatak koristeći *veliko* $\mathcal{O}$ notaciju ($x \to 0$):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

Podsjetnik: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

2. [5b] Pomoću polinoma $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ aproksimirajte vrijednost $\sin(1)$. S kolikom točnošću navedeni polinom aproksimira funkciju $\sin x$ za $|x| \leq 1$?

3. [10b]

(a) [2b] Napišite formulu za aproksimaciju $f''(x)$ pomoću vrijednosti funkcije f u točkama $x - h$, x i $x + h$ ($h > 0$, $h \in \mathbb{R}$).

(b) [3b] Izvedite formulu iz (a) dijela zadatka. Kojeg je reda točnosti dobivena formula? Objasnite svoju tvrdnju!

(c) [5b] Rubni problem

$$-u''(x) = f(x),\ x \in (0,1), \quad u(0) = 0,\ u(1) = 0$$

diskretizirajte centralnim diferencijama na ekvidistantnoj mreži $x_i = ih$, $i = 1, \ldots, N$, pri čemu je $x_0 = 0$ i $x_{N+1} = 1$ za $N = 4$, a f zadana funkcija. Diskretizaciju zapišite u matričnom obliku.

4. [5b] Odredite LU rastav matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

5. [5b] Odredite rastav Choleskog matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

te pomoću njega riješite linearni sustav $Ax = b$ ako je $b = \begin{bmatrix} 11 & 18 & 74 \end{bmatrix}^T$

Okrenite!

6. [10b] U sljedećem zadatku zaokružite Točno ili Netočno, slovo ispred točnog odgovora, nadopunite rečenicu ili odgovorite na pitanje. Svaki točan odgovor nosi 1 bod, netočan ili neodgovoren 0 bodova. Pažljivo pročitajte svako pitanje!

1. Navedite barem jedan razlog radi kojeg se prilikom rješavanja linearnih sustava koristi parcijalno pivotiranje. ______________________________
2. Broj operacija potrebnih za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ gdje je A pozitivno definitna, simetrična matrica, ponaša se kao:
   A. $\mathcal{O}(n \log n)$ B. $\mathcal{O}(\frac{3}{2}n^2)$ C. $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ D. $\mathcal{O}(\frac{1}{3}n^3)$
3. Za računanje aproksimacije derivacije funkcije f formulom konačne diferencije unatrag broj izvrednjavanja funkcije f iznosi:
   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
4. Pozitivno definitne matrice su regularne. Točno. Netočno.
5. Simetrična matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ može imati kompleksnu svojstvenu vrijednost. Točno. Netočno.
6. Zadana je matrica $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ čije su svojstvene vrijednosti $0, 1, 2, 3$. Tada je rang matrice A jednak 4. Točno. Netočno.
7. Determinanta svake permutacijske matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ jednaka je 1. Točno. Netočno.
8. Sustav $Ax = b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ rješavamo Gaussovom metodom eliminacija. Broj potrebnih aritmetičkih operacija za rješavanje pripadnih trokutastih sustava $Ly = b$ i $Ux = y$ manji je od broja operacija potrebnih za LU faktorizaciju. Točno. Netočno.
9. Ako je $Ax = b$ i $A(x + \delta x) = b + \delta b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica, nadopunite izraz:
$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \underline{\qquad\qquad} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$
10. Za operatorsku matričnu normu vrijedi $\|A\| \geq \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ pri čemu je $x \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan vektor, različit od nulvektora. Točno. Netočno.

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora.

MI 2015

–RJEŠENJA–

Z1. $\mathcal{O}(x^3)$; $\mathcal{O}(x^2)$

Z2. $\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}$

$|R_5(x)| \leq \frac{1}{7!}$

Z3. (a) i (b) $f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$

DRUGOG REDA TOČNOSTI

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

za izvod vidi predavanja

(c) vidi predavanja

Z4.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Z5. $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Z6.
1. predavanja
2. D
3. B
4. T
5. N
6. N
7. N
8. T
9. $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$
   $\kappa(A)$
10. T