2. međuispit iz Numeričke matematike
17. svibnja 2010.

1. (4 boda)

Podaci zadani tablicom

x	2	2.5	4
y	0.5	0.4	0.25

predstavljaju vrijednosti neke fizikalne veličine koja je opisana funkcijom $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

(a) (1 bod) Odredite Lagrangeov interpolacijski polinom $p(x)$.

(b) (2 boda) Bez računanja Lagrangeovog interpolacijskog polinoma ocijenite grešku interpolacije u točki $x = 3$.

(b) (1 bod) Koja je prednost računanja interpolacijskog polinoma u Lagrangeovoj bazi u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathcal{P}_n$?

2. (3 boda) Ispitajte je li funkcija s zadana formulom

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{9}{2}x^3 + x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{9}{2}x^3 - 9x^2 + 4x - \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

interpolacijski spline i ako jest odredite kojeg je reda.

3. (5 bodova)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

Funkciju f interpoliramo na segmentu $[0, 1]$ po dijelovima linearno. Sa s označimo po dijelovima linearni interpoland takav da vrijedi

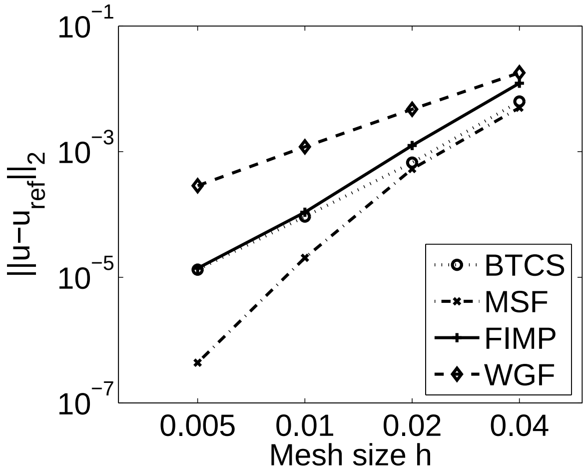
$$\begin{aligned} s(x_i) &= f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n \\ s|_{[x_i, x_{i+1}]} &\quad \text{linearna funkcija } i = 0, \ldots, n-1, \end{aligned}$$

pri čemu je $x_i = i/n$, $i = 0, \ldots, n$. Odredite $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - s(x)| \leq 10^{-4}, \quad \forall n \geq n_0.$$

4. (5 bodova) Pomoću ocjene greške kompozitne pravokutne formule izračunajte koliko podintervala je potrebno da bi se integral $I(f) = \displaystyle\int_0^\pi e^x \cos x \, dx$ aproksimirao s točnošću manjom od 10^{-4}?

Okrenite!



Slika 1: Red konvergencije metoda BTCS, MSF, FIMP, WGF

5. (8 bodova)

- **(i) (1 bod)** Greška polinomijalne interpolacije u normi $\|\cdot\|_\infty$ se smanjuje povećanjem broja točaka interpolacije. **T** **N**
- **(ii) (1 bod)** Linearni sustav $Ax = b$, pri čemu je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna matrica ima jedinstveno rješenje za svaki $b \in \mathbb{R}^n$. **T** **N**
- **(iii) (2 boda)** Na slici 1 prikazana je aproksimacija reda konvergencije četiri numeričke metode za rješavanje rubnog problema za nelinearnu diferencijalnu jednadžbu četvrtog reda. Koja metoda najbrže a koja najsporije konvergira? Objasnite svoj odgovor!
- **(iv) (1 bod)** Zašto nije dobra definicija euklidske norme u prostoru $\mathbb{C}^n$ dana izrazom $\|z\|^2 = z^T z$?
- **(v) (3 boda)** Za zadanu 2π-periodičku funkciju f na $[0, 2\pi]$ postavite trigonometrijski interpolacijski problem kroz $N = 3$ točke. Objasnite vezu između trigonometrijskog interpolacijskog polinoma i njemu pripadnog faznog interpolacijskog polinoma te napišite formulu za računanje koeficijenata faznog interpolacijskog polinoma (DFT). *Dodatni bodovi: za detaljan izvod formule DFT* ***(2 boda)****.*

Upute i formule.

1. Greška polinomijalne interpolacije
   Neka je $f \in C^{n+1}(a,b)$ zadana funkcija i neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ međusobno različite točke. Neka je $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinom koji interpolira funkciju f u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Tada za svako $x \in [a,b]$ postoji točka $\xi_x \in (a,b)$ takva da je
   $$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}(x),$$
   gdje je $w_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.
2. Greška integracije jednostavne pravokutne formule.
   $$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in C^2(\mathbb{R}),\ I(f) = \int_a^b f(x)dx$$
   $$I(f) - M(f) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\tau),\ \tau \in (a,b)$$

Napomena: Vrijeme pisanja je **90 minuta**.
Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora (koji nije HP).