

Međuispit iz Numeričke matematike
29. travnja 2013.

1. (10 bodova)

a) (5 bodova) Izvedite formulu za aproksimaciju $f'(x)$ pomoću vrijednosti funkcije f u točkama $x-h$ i $x+h$ ($h > 0$, $h \in \mathbb{R}$). Kojeg je reda točnosti dobivena formula? Objasnite svoju tvrdnju. Pomoću dobivene formule aproksimirajte vrijednost $\cos 1$, za $h = 0.1$.

b) (5 bodova) Rubni problem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0$$

diskretizirajte centralnim diferencijama na ekvidistantnoj mreži $x_i = ih$, $i = 1, \dots, n$, pri čemu je $x_0 = 0$ i $x_{n+1} = 1$ za $n = 4$, a f je zadana realna funkcija. Diskretizaciju zapišite u matičnom obliku.

2. (10 bodova) Gaussovom metodom eliminacija s parcijalnim pivotiranjem riješite sustav $Ax = b$ i nađite matrice P , L i U tako da je $PA = LU$ ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 17 & 10 \\ 2 & 4 & -2 \\ 6 & 18 & -12 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 67 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. (5 bodova) Odredite faktorizaciju Choleskog matrice A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

4. (5 bodova) U sljedećem zadatku odgovorite na pitanja ili nadopunite tekst. Svako pitanje nosi po jedan bod.

- (i) Nabrojite barem dva tipa pogrešaka koje se javljaju prilikom numeričkog rješavanja problema iz prakse.
- (ii) Što je strojni epsilon?
- (iii) Radi konačne aritmetike računala neke algebarske operacije smatramo *opasnim*. Navedite barem jednu takvu operaciju.
- (iv) Prema IEEE standardu oznaka **NaN** označuje slučaj kada je rezultat aritmetičke operacije _____
- (v) Definirajte uvjetovanost matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Okrenite!

5. (10 bodova) U sljedećem zadatku zaokružite **Točno** ili **Netočno**, odnosno slovo ispred točnog odgovora. Svaki točan odgovor nosi 1 bod, netočan ili neodgovoren 0 bodova.

1. Broj operacija potrebnih za rješavanje linearnog sustava $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ Gaussovom metodom eliminacija iznosi:
 A. $\mathcal{O}(n \log n)$ B. $\mathcal{O}(\frac{3}{2}n^2)$ C. $\mathcal{O}(\frac{2}{3}n^3)$ D. $\mathcal{O}(n!)$
2. Svojstveni vektori koji pripadaju različitim svojstvenim vrijednostima realne simetrične matrice su linearno nezavisni. **Točno.** **Netočno.**
3. Pozitivno definitne matrice su regularne. **Točno.** **Netočno.**
4. Simetrična pozitivno definitna matrica može imati negativnu svojstvenu vrijednost. **Točno.** **Netočno.**
5. Neka su zadana dva realna broja egzaktno prikaziva u računalu. Rezultat proizvoljne aritmetične operacije nad tim brojevima je uvijek egzaktno prikaziv u računalu. **Točno.** **Netočno.**
6. Skup funkcija $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ je jedina baza prostora \mathcal{P}_n **Točno.** **Netočno.**
7. Determinanta svake permutacijske matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \geq 2$ jednaka je 1. **Točno.** **Netočno.**
8. Sustav $Ax = b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna matrica i $b \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ rješavamo Gaussovom metodom eliminacija. Broj potrebnih aritmetičkih operacija za rješavanje pripadnih trokutastih sustava $Ly = b$ i $Ux = y$ veći je od broja operacija potrebnih za LU faktorizaciju. **Točno.** **Netočno.**
9. Koeficijenti Lagrangeovog interpolacijskog polinoma računaju se rješavanjem pripadnog linearnog sustava. **Točno.** **Netočno.**
10. Za svaku proizvoljno glatku funkciju f vrijedi $\|f - p\|_\infty \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ gdje je $p \in \mathcal{P}_n$ interpolacijski polinom na zadanoj mreži $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. **Točno.** **Netočno.**

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora.