NuMat ZI: Pitanja

27. lipnja 2018.

Pitanja višestrukog odabira

Pitanja 1-14: točno= 2b, neodgovoreno= 0b, netočno= −0.5b

Pitanje 15: točno= 4b, neodgovoreno= 0b, netočno= −2b

1. Vrijednost integrala $I(f) = \int_1^2 f(x)dx$ aproksimiramo kompozitnom mid-point formulom na uniformnoj mreži $1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 2$ koraka h. Neka je funkcija f takva da za $x \in [1, 2]$ vrijedi $-4 \le f''(x) \le 3$. Tada je:

A $|I(f) - M_n(f)| \le \frac{h^2}{3}$ **B** $|I(f) - M_n(f)| \le \frac{h^3}{6}$ **C** $|I(f) - M_n(f)| \le \frac{h^2}{6}$

D $|I(f) - M_n(f)| \le \frac{h^2}{8}$ **E** $|I(f) - M_n(f)| \le \frac{h^3}{8}$

Ocjena pogreške za jednostavnu mid-point formulu: Neka je $f \in C^2(a, b)$. Tada postoji $\tau \in (a, b)$ takav da vrijedi $I(f) - M(f) = \frac{h^3}{24} f''(\tau)$, pri čemu je $h = b - a$.

2. Stupanj egzaktnosti jednostavne mid-point formule iznosi:

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** 5

3. Ocjena pogreške kompozitne trapezne formule za aproksimaciju vrijednosti integrala $I(f) = \int_a^b f(x)dx$ dana je formulom $|I(f) - T_n(f)| \le h^2 \frac{b-a}{12} \|f''\|_\infty$. Najmanji broj podintervala potreban za aproksimaciju integrala $I(f) = \int_1^2 xe^{-x}dx$ s točnošću 10^{-6} iznosi:

A 5 **B** 10 **C** 30 **D** 176 **E** 250

4. Podatke zadane tablicom

x	-1	0	1	2
y	4	3	1	2

aproksimiramo pravcem $y = c_0 + c_1 x$ u smislu najmanjih kvadrata. Koeficijenti dobivenog pravca su:

A $c_0 = 1, \quad c_1 = 2$ **B** $c_0 = -1, \quad c_1 = 3$ **C** $c_0 = -3/5, \quad c_1 = 11/10$

D $c_0 = 3/7, \quad c_1 = -11/14$ **E** $c_0 = 29/10, \quad c_1 = -4/5$

5. Neka je $f(x) = \|Ax - b\|^2$, gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma, $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $k < n$. Tada $\nabla f(x)$ iznosi:

A $A^\top Ax + 2A^\top b$ **B** $2A^\top Ax - 2A^\top b$ **C** $A^\top Ax - 2A^\top b$

D $AA^\top x - b^\top A$ **E** $A^\top Ax - Ab$

6. Neka je $f(x) = \|Ax - b\|^2$, gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma, $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $k < n$. Problem $f(x) \to \min$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je ispunjen uvjet:

A $r(A) = n$ **B** $r(A) = k$ **C** $r(A) > n$ **D** $r(A) < k$ **E** $r(A) = nk$

7. Ortonormirana baza potprostora $W = \text{span}\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}$ prostora $\mathbb{R}^3$ je:

A $\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\}$ **B** $\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\3/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\}$ **C** $\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\}$

D $\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\}$ **E** $\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\}$

Okrenite!

8. QR faktorizacija matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ iznosi:

A $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **B** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **C** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

D $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ **E** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $k < n$, $r(A) = k$. Lijevi pseudo-inverz matrice A dan je izrazom:
A $(AA^\top)^{-1}A$ **B** $(AA^\top)A^\top$ **C** $(A^\top A)^{-1}A^\top$ **D** $A^\top(AA^\top)^{-1}$ **E** $(A^{-1}A)^\top A^\top$

10. Pomoću QR faktorizacije matrice A dobivamo formulu za lijevi pseudo-inverz $A^\dagger$ koja glasi:
A $A^\dagger = R^T Q^{-1}$ **B** $A^\dagger = R^{-1}Q^\top$ **C** $A^\dagger = R^{-1}R^{-\top}$
D $A^\dagger = R^\top R$ **E** $A^\dagger = R^\top Q^{-1}$

11. Newtonovom metodom želimo izračunati nultočku funkcije $f(x) = x^4 - 5x + 1$ koja se nalazi u intervalu $(1,2)$. Ako za početnu iteraciju uzmemo $x_0 = 2$ onda x_1 iznosi:
A $44/27$ **B** $46/27$ **C** $47/27$ **D** $49/27$ **E** $50/27$

12. Newtonovom metodom rješavamo nelinearni sustav

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$
$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 4,$$

pri čemu je početna iteracija $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$. Prva iteracija $\mathbf{x}^1$ dobivena Newtonovom metodom iznosi:
A $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -4/3 & -1/3 \end{bmatrix}^\top$ **B** $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 4/3 \end{bmatrix}^\top$ **C** $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}^\top$
D $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}^\top$ **E** $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 \end{bmatrix}^\top$

13. Rubni problem $\varphi'' + \sin\varphi = 0$ na $[0,T]$, $\varphi(0) = \alpha$, $\varphi(T) = \beta$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, diskretiziramo centralnim diferencijama na uniformnoj mreži $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} = T$, za $n = 100$. Dobiveni nelinearni sustav rješavamo Newtonovom metodom. Element pripadne Jakobijeve matrice koji se nalazi u prvom retku i trećem stupcu iznosi:
A $-2/h^2 + \sin\varphi_1$ **B** $-2/h^2 + \cos\varphi_1$ **C** $-1/h^2$ **D** $1/h^2$ **E** 0

14. Prva iteracija Newtonove metode za rješavanje minimizacijskog problema
$f(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2 \to \min$, uz početnu iteraciju $\mathbf{x}^0 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^\top$ iznosi:

A $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ **B** $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0.5 \end{bmatrix}^\top$ **C** $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 1.25 & 0.25 \end{bmatrix}^\top$
D $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.1 \end{bmatrix}^\top$ **E** $\mathbf{x}^1 = \begin{bmatrix} 0.025 & 0.0075 \end{bmatrix}^\top$

15. Točka x^* koja se nalazi u hiperravnini $a^\top x = \beta$ a najbliža je zadanoj točki $r \in \mathbb{R}^n$ dana je izrazom:
A $x^* = \dfrac{\beta + a^\top r}{\|a\|^2} a$ **B** $x^* = r - \dfrac{\beta - a^\top r}{\|a\|^2} a$ **C** $x^* = r + \dfrac{\beta - a^\top r}{\|a\|^2} a$
D $x^* = \dfrac{\beta - a^\top r}{\|a\|} a$ **E** $x^* = r + \dfrac{\beta - a^\top r}{\|r\|^2} a$

Okrenite!

`Točno ili netočno?`

Napomena: na priloženom formularu za upis rješenja:

$$A \equiv T\,(\textbf{Točno}), B \equiv N\,(\textbf{Netočno})$$

Pitanja **1-8**: točno= **1b**, neodgovoreno= **0b**, netočno= **−1b**

1. Kompozitne formule za numeričku integraciju gube jedan red točnosti obzirom na pripadne jednostavne kvadraturne formule.

T **N**

2. Neka je dana matrica $A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$. Tada za proizvoljni vektor $x \in \mathbb{R}^2$ vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$.

T **N**

3. Ako je $s \in \mathbb{R}^d$ padajući smjer za funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ iz točke $x \in \mathbb{R}^d$, onda je $\nabla f(x)^\top s < 0$.

T **N**

4. Newtonova metoda za rješavanje nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergira za svaki izbor početne iteracije.

T **N**

5. Ako konvergira, metoda sekante za rješavanje nelinearne jednadžbe $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uvijek konvergira prema egzaktnom rješenju brže od Newtonove metode.

T **N**

6. Uzmimo da minimizacijski problem $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^2} f(x)$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{5}{2}x_2^2$ rješavamo metodom najbržeg silaska. Uzmemo li za početnu iteraciju točku koja je dovoljno blizu egzaktnom rješenju, metoda će uvijek u najviše dvije iteracije konvergirati prema egzaktnom rješenju.

T **N**

7. Newtonov korak $s_n = -\left[\nabla^2 f(x_n)\right]^{-1} \nabla f(x_n)$ je padajući smjer za proizvoljnu funkciju $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

T **N**

8. Metodom konjugiranih gradijenata linearni sustav $Ax = b$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ pozitivno definitna, simetrična matrica, možemo riješiti u najviše 5 koraka.

T **N**

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora. Upotreba mobitela je najstrože zabranjena (za vrijeme ispita, mobitel nije sat!)