

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

NUMERIČKA MATEMATIKA

RIJEŠENI ZADATCI I PRIPREMA ZA ZAVRŠNI ISPIT

Autor:
Marko Bošnjak

Literatura: Predavanja iz Numeričke Matematike

Zagreb, lipanj, 2011
©MandM

Contents

1	Interpolacijski splajn	2
2	Polinom najmanjih kvadrata	4
3	Numeričko integriranje	8
4	Nelinearne jednadžbe	12
5	Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi	26
5.1	Newtonova metoda u više dimenzija	26
6	Obične diferencijalne jednadžbe	30
6.1	Eulerova metoda	30
6.2	Heunova metoda: trapezoidalna metoda	31
6.3	Runge-Kutta metoda	31
7	Primjene metoda numeričke matematike	32
7.1	Newtonov model širenja topline	32
7.2	Difuzija topline u žici	33
7.2.1	Diskretni model problema	34
7.2.2	Uvjet stabilnosti	36
7.3	Problem epidemije i disperzije	38
7.3.1	Model problema	39
7.3.2	Algoritam rješavanja	40

1 Interpolacijski splajn

Zadatak 1. Provjerite je li funkcija:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 2(x+1) + (x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ s_1(x) = 3 + 5x + 3x^2, & x \in [0, 1] \\ s_2(x) = 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases} \quad (1)$$

kubični splajn na intervalu $[-1, 2]$.

Rješenje:

Provjera je li funkcija (1) kubični splajn na zadanom intervalu vrši se na način da se provjere uvjeti neprekidnosti prve derivacije i interpolacije za sve spojne točke splajna kako slijedi.

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = y(x_i), i = (0, 1) \quad (2)$$

$$\dot{s}_i(x_i) = \dot{s}_{i+1}(x_i), i = (0, 1) \quad (3)$$

Pri tome treba imati na umu da se u obzir moraju uzeti i rubni uvjeti, koji definiraju vrstu splajna; različite vrste rubnih uvjeta interpolacije: prirodni, periodični ili potpuni splajn. Provjera se prvo provodi za uvjet interpolacije opisan izrazom (2).

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = \begin{cases} s_0(0) = 3, \\ s_1(0) = 3, \\ s_1(1) = 11, \\ s_2(1) = 11. \end{cases} \quad (4)$$

Iz izraza (4) se vidi da splajn ima svojstvo neprekidnosti. U sljedećem koraku se provjerava neprekidnost prve derivacije – uvjet opisan izrazom (3).

$$\dot{s}_i(x_i) = \dot{s}_{i+1}(x_i) = \begin{cases} \dot{s}_0(-1) = 2 + 3(x+1)^2 = 2, \\ \dot{s}_0(0) = 5, \\ \dot{s}_1(0) = 5 + 6x = 5, \\ \dot{s}_1(1) = 11, \\ \dot{s}_2(1) = 11 + 6(x-1) - 3(x-1)^2 = 11, \\ \dot{s}_2(2) = 2. \end{cases} \quad (5)$$

Iz izraza (5) se vidi da je postignut uvjet neprekidnosti prve derivacije, a iz vrijednosti derivacije na rubovima zadanog intervala vidi se da je riječ o periodičnom splajnu.

Zadatak 2. Postoje li a i b takvi da funkcija:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \in (-\infty, 2] \\ s_1(x) = (x-2)^3 - (x-3)^2, & x \in [2, 3] \\ s_2(x) = (x-3)^3 + b(x-2)^2 + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [3, \infty) \end{cases} \quad (6)$$

bude kubični splajn?

Rješenje:

Provjera se radi jednako kao i u prošlom zadatku. Da bi funkcija (6) bila kubični splajn mora zadovoljiti uvjete dane izrazima (2) i (3). Iz navednih uvjeta se izračunavaju vrijednosti a i b za koje se onda nastavlja s provjerom je li riječ o kubičnom splajnu.

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) \begin{cases} s_0(2) = a, \\ s_1(2) = -1, \\ s_1(3) = 1, \\ s_2(3) = b + 4. \end{cases} \quad (7)$$

Iz izraza (7) se vidi da vrijedi $a = -1$ i $b = -3$. U sljedećem koraku se provjerava je li zadovoljen uvjet neprekidnosti prve derivacije, za dobivene vrijednosti a i b , kako slijedi.

$$\dot{s}_i(x_i) = \dot{s}_{i+1}(x_i) = \begin{cases} \dot{s}_0(2) = 3(x-2)^2 + 2a(x-1) = -2, \\ \dot{s}_1(2) = 3(x-2)^2 - 2(x-3) = 2, \\ \dot{s}_1(3) = 3, \\ \dot{s}_2(3) = 3(x-3)^2 + 2b(x-2) = -6, \end{cases} \quad (8)$$

Iz izraza (8) se vidi da za dobivene a i b nije zadovoljen uvjet neprekidnosti derivacije kubičnog splajna što znači da ne postoje takvi a i b da je izrazom (6) opisan kubični splajn na zadanom intervalu.

Zadatak 3. Je li funkcija:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = x^2 - 1, & x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ s_1(x) = 3x^3 - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (9)$$

kubični splajn?

Rješenje:

Provjera se radi jednako kao i u prošlom zadatku. Da bi funkcija (9) bila kubični splajn mora zadovoljiti uvjete dane izrazima (2) i (3).

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = \begin{cases} s_0(\frac{1}{2}) = \frac{-3}{4}, \\ s_1(\frac{1}{2}) = \frac{-5}{8}, \end{cases} \quad (10)$$

Iz izraza (10) se vidi da nije zadovoljen uvjet vezan za spojne točke splajna, što znači da izrazom (9) nije opisan kubični splajn.

Zadatak 4. Odredite parametre a , b , c i d tako da funkcija:

$$s(x) = \begin{cases} s_0(x) = 1 - 2x, & x \in (-\infty, -3] \\ s_1(x) = a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [-3, 4] \\ s_2(x) = 157 - 32x, & x \in [4, \infty) \end{cases} \quad (11)$$

bude kubični splajn.

Rješenje:

Nepoznati parametri dobivaju se iz uvjeta da izrazom (11) bude opisan kubični

splajn, odnosno da budu zadovoljeni uvjeti (2) i (3).

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i) = \begin{cases} s_0(-3) = 7, \\ s_1(-3) = a - 3b + 9c - 27d, \\ s_1(4) = a + 4b + 16c + 64d, \\ s_2(4) = 29, \end{cases} \quad (12)$$

Izrazom (12) dobivene su dvije jednadžbe s 4 nepoznata parametra, u idućem koraku se provjerava neprekinutost prve derivacije kako slijedi.

$$\dot{s}_i(x_i) = \dot{s}_{i+1}(x_i) = \begin{cases} \dot{s}_0(-3) = -2, \\ \dot{s}_1(-3) = b + 2cx + 3dx^2 = b - 6c + 27d, \\ \dot{s}_1(4) = b + 8c + 48d, \\ \dot{s}_2(4) = -32. \end{cases} \quad (13)$$

Izrazima (12) i (13) sada je opisan sustav 4 jednadžbe s 4 nepoznate, koji se rješava kako slijedi, prijelazom u matrični zapis dobije se $A\underline{x} = \underline{y}$.

$$A\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 0 & 1 & -6 & 27 \\ 0 & 1 & 8 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 29 \\ -2 \\ -32 \end{bmatrix} = \underline{y} \quad (14)$$

Rješavanjem matrične jednadžbe dobije se sljedeće rješenje: $\underline{x} = [a, b, c, d]^T = [32.20991, 14.74052, -0.90962, -0.82216]^T$.

2 Polinom najmanjih kvadrata

Zadatak 1. Zadane su točke (1,5.2), (2,4.3), (3,3.5), (4,3.2) i funkcija oblika $y = a + \frac{b}{x}$ koja predstavlja najbolju aproksimaciju tih čvorova u smislu metode najmanjih kvadrata. Odredite vrijednosti od a i b .

Rješenje:

Metoda najmanjih kvadrata temelji se na minimizaciji razlike vektora podataka i vektora funkcije aproksimacije u kvadratičnom smislu. Geometrijska interpretacija problema najmanjih kvadrata bi bila da se minimizira razlika između ortogonalne projekcije vektora aproksimacijske funkcije i vektora podataka koje treba aproksimirati.

$$E(a, b) = \begin{cases} \min ||\underline{y} - \underline{\tilde{f}}||_2, \\ \tilde{f}(x) = a + \frac{b}{x} \end{cases} \quad (15)$$

Traženje minimuma izraza (15) svodi se na traženje nultčke prve derivacije, kako slijedi:

$$\frac{dE(a, b)}{da} = 0, \quad \frac{dE(a, b)}{db} = 0, \quad (16)$$

Izraz (16) se svodi na:

$$\frac{dE(a,b)}{da} = -2 \sum_{i=0}^3 (y_i - a - \frac{b}{x_i}) = 0 \quad (17)$$

$$\frac{dE(a,b)}{db} = -2 \sum_{i=0}^3 (y_i - a - \frac{b}{x_i}) \frac{1}{x_i} = 0 \quad (18)$$

Jednostavnim preoblikovanjem izraza (17) i (18) dolazi se do sljedećih izraza:

$$\sum_{i=0}^3 y_i = 4a + b \sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i} \quad (19)$$

$$\sum_{i=0}^3 \frac{y_i}{x_i} = a \sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i^2} \quad (20)$$

Izračunom suma u izrazima (19) i (20) kako slijedi dolazi se do sustava dviju jednažbi s dvije nepoznate a i b :

$$\sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}, \quad (21)$$

$$\sum_{i=0}^3 y_i = 5.2 + 4.3 + 3.5 + 3.2 = 16.2, \quad (22)$$

$$\sum_{i=0}^3 \frac{y_i}{x_i} = \frac{5.2}{1} + \frac{4.3}{2} + \frac{3.5}{3} + \frac{3.2}{4} = \frac{111.8}{12}, \quad (23)$$

$$\sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i^2} = \frac{205}{144}. \quad (24)$$

Uz izračunate vrijednosti suma oblikuje se sljedeći sustav jednažbi:

$$\begin{bmatrix} 16.2 \\ \frac{111.8}{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{25}{12} \\ \frac{25}{12} & \frac{205}{144} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (25)$$

Rješavanjem matrice jednažbe (25) dobivaju se vrijednosti a i b . Dobiveno rješenje je: $[a, b]^T = [2.6974, 2.5969]^T$.

Zadatak 2. Eksperimenti u nekom periodičkom procesu dali su sljedeće rezultate:

t_j	0	50	100	150	200	250	300	350
$f(t_j)$	0.754	1.762	2.041	1.412	0.303	-0.484	-0.380	0.520

Table 1: Podatci eksperimenta, vrijednosti t_j dane su u stupnjevima [°]

Odredite parametre a i b u modelu: $\Phi(t) = a + b\sin(t)$ korištenjem metode najmanjih kvadrata.

Rješenje:

Jednako kao i u prošlom zadatku problem se svodi na minimizaciju kvadratične pogreške aproksimacijske funkcije, stoga se pristupa analognom postupku.

$$E(a, b) = \sum_{i=0}^7 (y_i - \Phi(t_i))^2 = \sum_{i=0}^7 (y_i - a - b\sin(t_i))^2 \quad (26)$$

Prve derivacije po parametrima a i b izjednačavaju se s nulom i rješava se pripadni sustav jednadžbi.

$$\frac{dE(a, b)}{da} = -2 \sum_{i=0}^7 (y_i - a - b\sin(t_i)) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{dE(a, b)}{db} = -2 \sum_{i=0}^7 (y_i - a - b\sin(t_i))\sin(t_i) = 0 \quad (28)$$

Jednadžbe (27) i (28) preoblikuju se u sljedeći zapis:

$$\sum_{i=0}^7 y_i = 8a + b \sum_{i=0}^7 \sin(t_i) \quad (29)$$

$$\sum_{i=0}^7 y_i \sin(t_i) = a \sum_{i=0}^7 \sin(t_i) + b \sum_{i=0}^7 \sin^2(t_i) \quad (30)$$

Računaju se bitne sume navedene u izrazima (29) i (30).

$$\sum_{i=0}^7 \sin(t_i) = \sin(0) + \sin(50) + \dots + \sin(350) = -0.070534149 \quad (31)$$

$$\sum_{i=0}^7 \sin^2(t_i) = \sin^2(0) + \sin^2(50) + \dots + \sin^2(350) = 3.586824089 \quad (32)$$

$$\sum_{i=0}^7 y_i \sin(t_i) = 0.754\sin(0) + \dots + 0.520\sin(350) = 4.655734659 \quad (33)$$

$$\sum_{i=0}^7 y_i = 0.754 + \dots + 0.520 = 5.928 \quad (34)$$

Uvrštenjem izraza (31), (32), (33) i (34) u izraz (29) odnosno (30) matična

jednadžba je opisana sljedećim izrazom:

$$\begin{bmatrix} 5.928 \\ 4.655734659 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -0.070534149 \\ -0.070534149 & 3.586824089 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (35)$$

Do rješenja se sada može doći na različite načine te se dobije sljedeći vektor rješenja: $[a, b]^T = [0.75231, 1.28322]^T$.

Zadatak 3. Zadane su točke (1,5), (2,4), (3,3), (4,4) i funkcija oblika $y(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ koja predstavlja najbolju aproksimaciju tih čvorova u smislu metode najmanjih kvadrata. Odredite vrijednosti a i b .

$$E(a, b) = \sum_{i=0}^3 (y_i - \tilde{f}(x_i))^2 = \sum_{i=0}^3 \left(y_i - ax_i^2 - \frac{b}{x_i} \right)^2 \quad (36)$$

Rješenje:

Izračunavaju se prve derivacije izraza (36) po parametrima a i b kako slijedi:

$$\frac{dE(a, b)}{da} = -2 \sum_{i=0}^3 \left(y_i - ax_i^2 - \frac{b}{x_i} \right) x_i^2 = 0 \quad (37)$$

$$\frac{dE(a, b)}{db} = -2 \sum_{i=0}^3 \left(y_i - ax_i^2 - \frac{b}{x_i} \right) \frac{1}{x_i} = 0 \quad (38)$$

Sada se iz izraza (37) i (38) može doći do sljedećih izraza:

$$\sum_{i=0}^3 x_i^2 y_i = a \sum_{i=0}^3 x_i^4 + b \sum_{i=0}^3 x_i \quad (39)$$

$$\sum_{i=0}^3 \frac{y_i}{x_i} = a \sum_{i=0}^3 x_i + b \sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i^2} \quad (40)$$

U izrazima (39) i (40) sada se proračunaju sljedeće sume:

$$\sum_{i=0}^3 x_i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad (41)$$

$$\sum_{i=0}^3 \frac{y_i}{x_i} = \frac{5}{1} + \frac{4}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} = 8 \quad (42)$$

$$\sum_{i=0}^3 \frac{1}{x_i^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{205}{144} \quad (43)$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i^2 y_i = 1^2 5 + 2^2 4 + 3^2 3 + 4^2 4 = 112 \quad (44)$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \quad (45)$$

$$\sum_{i=0}^3 x_i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 = 354 \quad (46)$$

Uvrštenjem izraza (41) – (46) u izraze (39) i (40) dobije se sljedeći sustav:

$$112 = 354a + 10b \quad (47)$$

$$8 = 10a + \frac{205}{144}b \quad (48)$$

Sada se jednostavno rješavanjem sustava (47), (47) dolazi do rješenja koje glasi: $[a, b]^T = [0.19666, 4.23806]^T$.

3 Numeričko integriranje

Zadatak 1. Primjenom kompozitne trapezne formule izračunajte s točnošću $\epsilon = 10^{-3}$ sljedeći integral:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \quad (49)$$

Rješenje:

Izraz koji opisuje kompozitnu trapeznu formulu je:

$$T_n(f) = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) \quad (50)$$

pri čemu vrijedi: $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. U prvom koraku se računa potreban broj podjela danog intervala integracije $[0, 1]$ da se dobije zadana vrijednost pogreške. Prema tome, koristi se pripadna ocjena pogreške trapezne formule koja glasi:

$$\|I(f) - T_n(f)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \max_{[a,b]} \|f''\|_\infty (b-a), h = \frac{b-a}{n} \quad (51)$$

Prema izrazu (51) potrebno je napraviti ocjenu maksimalne vrijednosti druge

derivacije podintegralne funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ na intervalu integracije, stoga se računa kako slijedi:

$$\dot{f}(x) = -2xe^{-x^2} \quad (52)$$

$$\ddot{f}(x) = -2(e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}) = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2) \quad (53)$$

Što znači da je potrebno izračunati najveću vrijednost izraza (53) na intervalu $[0, 1]$. Kao što se može vidjeti iz izraza (53) dobivena druga derivacija je parna funkcija, koja je na intervalu integracije rastuća, što se može jednostavno ocijeniti. Iz toga se zaključuje da je maksimum na rubu intervala, odnosno postiže se za $x = 1$. Nakon uvrštenja te vrijednosti u funkciju (53) dobiva se $\ddot{f}(x = 1) = \frac{2}{e}$. Sada se može jednostavnim uvrštenjem u ocjenu pogreške (51) doći do sljedeće nejednakosti:

$$\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \max_{[a,b]} \|\ddot{f}\|_{\infty} (b-a) = \frac{(b-a)^3}{n^2} \frac{2}{e} \leq \epsilon \quad (54)$$

$$\sqrt{\frac{2(b-a)^3}{e\epsilon}} \leq n \quad (55)$$

Iz izraza (51) sada se jednostavno dobiva da se za ostvarivanje zadane pogreške mora koristiti minimalni broj koraka integracije: $n \geq 28$. Može se odabrati vrijednost $n = 30$, pomoću koje se ostvaruje korak integracije $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{30}$. Nakon izračuna potrebnog broja koraka n koristi se izraz (51) da bi se izračunala vrijednost integrala (49), kako slijedi.

$$T_n(f) = \frac{1}{60} \left(1 + 2 \sum_{i=1}^{29} e^{\frac{i}{30}} + e^{-1} \right) = 1.6793 \quad (56)$$

Zadatak 2. Primjenom kompozitne Simpsonove formule izračunajte s točnošću $\epsilon = 10^{-3}$ integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x} dx \quad (57)$$

Rješenje:

Kompozitna Simpsonova formula opisana je sljedećim izrazom:

$$S_n(f) = \frac{h}{3} \left(f(a) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-2} f(x_{2i}) + f(b) \right) \quad (58)$$

A pripadna ocjena pogreške opisana je izrazom:

$$\|I(f) - S_n(f)\|_{\infty} \leq \frac{h^4}{180} \max_{[a,b]} \|f^{(4)}\|_{\infty} (b-a), h = \frac{b-a}{n} \quad (59)$$

Dakle ponovno se pristupa istom postupku kao i u prošlom zadatku, prvi korak

uključuje procjenu potrebnog broja koraka integracije na intervalu integracije da bi se ostvarila zadana točnost, što znači da je potrebno procijeniti 4. derivaciju podintegralne funkcije iz izraza (57), što se obavlja kako slijedi:

$$\dot{f}(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad (60)$$

$$\ddot{f}(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \quad (61)$$

$$\ddot{\ddot{f}}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} \quad (62)$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} \quad (63)$$

Procjena maksimalne vrijednosti 4. derivacije na intervalu integracije sada se jednostavno radi na osnovu izraza (63). Pošto je dobivena funkcija padajuća, znači da se maksimalna vrijednost postiže na donjem rubu intervala, odnosno za $x = 1$ i iznosi: $\|f^{(4)}\|_{\infty} = f^{(4)}(1) = \frac{3}{4}$. Dobivena vrijednost se sada uvrsti u izraz (59) kako bi se dobio minimalni potrebn broj koraka integracije na zadanom intervalu, kako slijedi:

$$\frac{(b-a)^5}{180n^4} \|f^{(4)}\|_{\infty} \leq \epsilon \quad (64)$$

$$\sqrt[4]{\frac{(b-a)^5}{180\epsilon} \|f^{(4)}\|_{\infty}} \leq n \quad (65)$$

Iz izraza (65) se sada jednostavno izračunava potrebni n kao $n \geq 2$, što znači da se koristi korak $h = \frac{1}{2}$. Dobivene vrijednosti sada se uvrste u izraz za Simpsonovu kompozitnu formulu (58) kako slijedi:

$$S_n(f) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{2.5} + \frac{1}{3} \right) = 0.4056 \quad (66)$$

Ako se usporedi vrijednost dobivena u izrazu (66) usporedi sa stvarnom vrijednosti integrala (57) koja glasi:

$$\int_1^2 \frac{1}{1+x} dx = \ln(x+1) \Big|_1^2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0.4055 \quad (67)$$

Kao što se može vidjeti, ako se usporede vrijednosti integrala iz izraza (66) i (67), postignuta je zadana vrijednost pogreške.

Povećanjem broja koraka integracije n može se dobiti još točnija vrijednost integrala.

Zadatak 3. S točnošću $\epsilon = 10^{-5}$ izračunajte površinu između krivulja $y = \cos(x)$ i $y = e^{-x}$ na intervalu $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Rješenje:

Dakle riječ je o integralu definiranom sljedećim izrazom:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) - e^{-x} dx \quad (68)$$

Odabire se metoda numeričke integracije po volji, tako da se mogu redom isprobati sve tri metode numeričke integracije opisane na predavanjima, tj. kreće se od kompozitne pravokutne formule, kako slijedi.

Kompozitna pravokutna formula

$$M_n(f) = h \left(f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right) \quad (69)$$

Uz pripadnu ocjenu pogreške integracije koja je opisana sljedećim izrazom:

$$\|I(f) - M_n(f)\|_{\infty} \leq \frac{h^2}{24} \max_{[a,b]} \|\ddot{f}\|_{\infty} (b-a), h = \frac{b-a}{n} \quad (70)$$

Izraz (70) služi za procjenu potrebnog broja koraka integracije kako bi se ostvarila zadana vrijednost pogreške. Stoga se u prvom koraku procjenjuje maksimalna vrijednost druge derivacije podintegralne funkcije izraza (68) kako slijedi:

$$\dot{f}(x) = -\sin(x) + e^{-x} \quad (71)$$

$$\ddot{f}(x) = -\cos(x) - e^{-x} \quad (72)$$

Na intervalu integracije $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ se vidi da je funkcija (72) padajuća, prema predznacima, što znači da se maksimum postiže na donjem rubu intervala, odnosno u $x = 0$. Prema tome je maksimalna vrijednost druge derivacije $\ddot{f}(x=0) = -2$. Sada se uvrštenjem u (70) može jednostavno doći do potrebnog broja koraka kako slijedi.

$$\frac{h^2}{24} \|\ddot{f}\|_{\infty} (b-a) = \frac{2(b-a)^3}{24n^2} \leq \epsilon \quad (73)$$

Iz izraza (73) sada se jednostavno dolazi do traženog broja koraka:

$$\sqrt{\frac{(b-a)^3}{12\epsilon}} \leq n \quad (74)$$

Što znači da je potreban $n \geq 144$, tako da se može odabrati $n = 145$. Izračun vrijednosti integrala prema izrazu (69) vrši se u *MATLAB*-u te se dobiva numerička vrijednost integrala $M_n(f) = 0.207888339493173$. Stvarna vrijednost integrala je $I(f) = 0.207879576350762$ što ukazuje na dobre rezultate.

Kompozitna trapezna formula

Koriste se izrazi (50) i (51) koji opisuju kvadraturnu formulu preko trapezne

aproksimacije i pripadnu ocjenu pogreške. Ponovno se ponavlja analogan postupak, prema izrazu za ocjenu pogreške se ocjenjuje potreban broj koraka integracije, kako slijedi.

$$T_n(f) = \frac{h}{2} \left(f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) \quad (75)$$

$$\|I(f) - T_n(f)\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \max_{[a,b]} \|\ddot{f}\|_\infty (b-a), h = \frac{b-a}{n} \quad (76)$$

Uvrštenjem maksimalne vrijednosti druge derivacije, granica integracije i dozvoljene pogreške metode, dobiva se korak integracije.

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} \|\ddot{f}\|_\infty \leq \epsilon \quad (77)$$

$$\sqrt{\frac{\pi^3}{12\epsilon}} \leq n \quad (78)$$

Što znači da za korak integracije mora biti zadovoljeno $n \geq 509$, može se odabrati $n = 510$. Prema tome ponovno se računa numerička vrijednost integrala prema (75) te se dobiva: $T_n(f) = 0.207878159626430$ iz čega se vidi da je i ovom metodom dobiven dobar rezultat. Analogan postupak može se provesti i za kompozitnu Simpsonovu formulu, ali se jasno vidi da se korištenjem opisanih numeričkih metoda integracije postižu traženi rezultati.

4 Nelinearne jednadžbe

Zadatak 1. Metodom iteracija odredite nultočke funkcije:

$$f(x) = x^2 + 4\sin(x) - 1 \quad (79)$$

Objasnite konvergenciju metode.

Rješenje:

Metoda jednostavnih iteracija se temelji na iterativnom računanju članova niza elemenata koji su vezani rekurzivnim oblikom $x_{n+1} = \phi(x_n)$, stoga je funkciju (79) potrebno zapisati u takvom obliku. Pošto se traži pozitivna nultočka znači da se rješava $f(x) = 0$, tj. $x^2 + 4\sin(x) - 1 = 0$. Iz skupa svih funkcija koje se mogu odabrati $\phi_i \in \Phi$, pri čemu je Φ skup svih mogućih zapisa funkcije $f(x) = 0$, potrebno je odabrati onaj koji je najstabilniji, tj. onaj koji rezultira što bržom konvergencijom prema rješenju. U ovom koraku se može isprobati više oblika za koje se onda mogu usporediti brzine konvergencije. Neki od mogućih oblika su:

$$\phi(x) = \frac{1 - 4\sin(x)}{x} \quad (80)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - 4\sin(x)}{x} + x \right) \quad (81)$$

$$\phi(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{1-x^2}{4}\right) \quad (82)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left(\text{Arcsin}\left(\frac{1-x^2}{4}\right) + x \right) \quad (83)$$

Za sve od danih oblika provjerava se brzina i stabilnost konvergencije kao i raspon mogućih početnih stanja x_0 za koje će metoda konvergirati. Uz odabir početnih stanja vezana su svojstva lokalne i globalne konvergencije. U slučaju lokalne konvergencije riječ je o skupu $x_0 \in U_\epsilon = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ za koje metode konvergira, pri čemu je ϵ mala vrijednost.

Kao početno stanje mora se odabrati vrijednost koja je dovoljno blizu rješenju problema, kako bi se osigurala konvergencija metode. Kako je to pokazano na predavanjima, ako metoda konvergira onda je derivacija funkcije $\phi(x)$ u okolini rješenja manja od 1, tj. $|\dot{\phi}(x)| < 1$. Stoga je potrebno razmotriti područja domene funkcije $\phi(x)$ koja imaju ovakvo svojstvo. Derivacije funkcije (80) glasi:

$$\dot{\phi}(x) = \frac{1 + 4\sin(x) - 4x\cos(x)}{x^2} \quad (84)$$

Rješavanjem nejednadžbe $|\dot{\phi}(x)| < 1$ može se doći do grube procjene mogućih početnih stanja problema. Nejednakost koju je potrebno riješiti ima sljedeći oblik:

$$| -1 + 4\sin(x) - 4x\cos(x) | < x^2 \quad (85)$$

Najjednostavniji način rješavanja gornje nejednakosti je grafičkim putem, stoga se obje strane nejednadžbe iscrtavaju na istom grafu kako to prikazuje sljedeća slika.

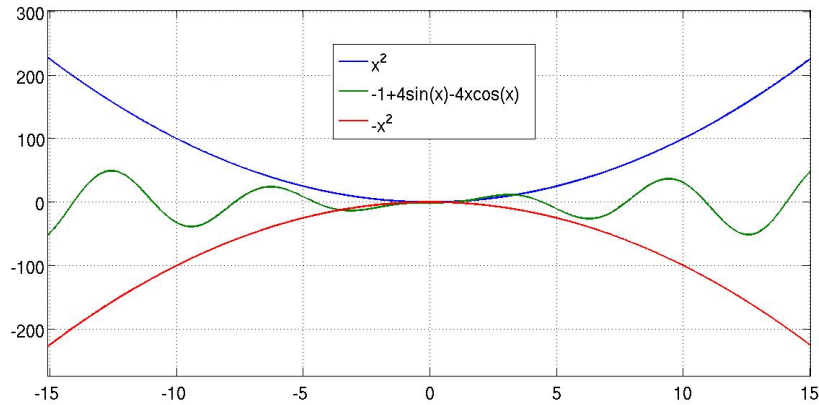


Figure 1: Nejednakost (85) - grafičko rješenje

Sada se jednostavno promatrajući sliku (1) može ocijeniti područje početnih stanja za koje bi metoda iteracija mogla konvergirati. Na sljedećoj slici su prikazani rezultati korištenja funkcije (80) za različite početne uvjete prema slici (1).

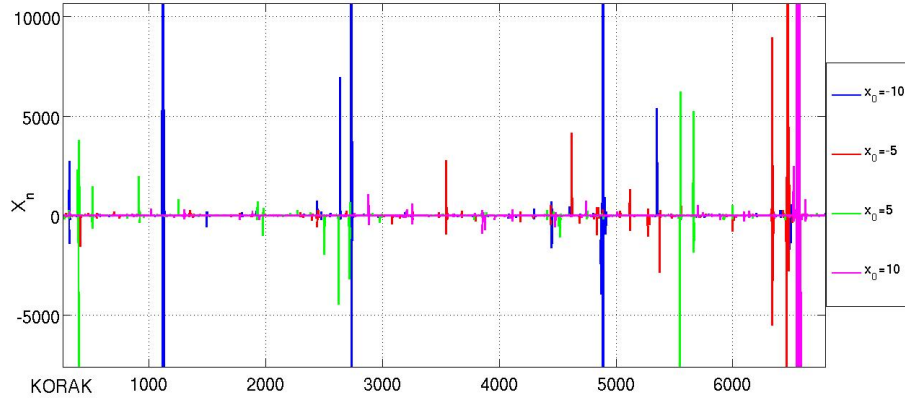


Figure 2: Konvergencija metode uz korištenje funkcije (80) za različite početne uvjete

Kao što se može vidjeti s gornje slike rezultati koje metoda iteracija postiže uz danu funkciju i ocijenjene početne uvjete je vrlo loša. Metoda ne konvergira, što je posljedica činjenice da u okolini rješenja nije zadovoljen uvjet $|\dot{\phi}(x)| < 1$ uz korištenje funkcije (80). Iz ovog primjera se vidi koliko je odabir funkcije $\phi(x)$ ključan za konvergenciju same metode. U idućem koraku se koristi funkcija (81), koja ima sljedeću derivaciju.

$$\dot{\phi}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{4\sin(x) - 4x\cos(x) - 1}{x^2} + 1 \right) \quad (86)$$

Što prema uvjetu vezanom za derivaciju oko rješenja vodi ka sljedećoj nejednadžbi:

$$\left| \frac{1}{2} (4\sin(x) - 4x\cos(x) - 1 + x^2) \right| < x^2 \quad (87)$$

Nejednadžba (87) se sada ponovno rješava grafički kako to prikazuje sljedeća slika:

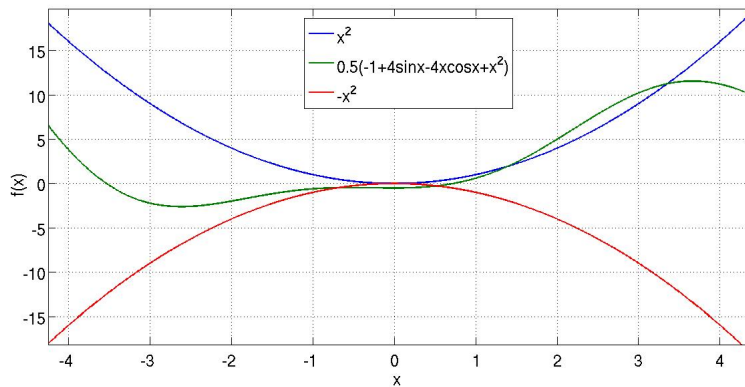


Figure 3: Nejednakost (87) - grafičko rješenje

Sa slike (3) se jasno mogu vidjeti područja koja kriju potencijalno rješenje problema kao i odabir početnog koraka. Na sljedećoj slici prikazani su rezultati korištenja funkcije (87) uz početne uvjete odabrane prema slici (3).

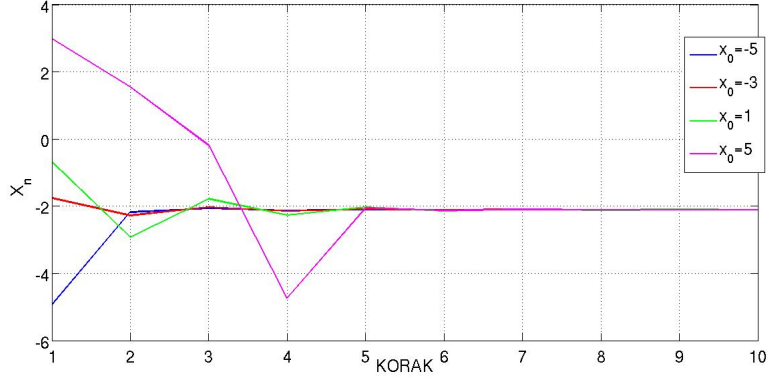


Figure 4: Konvergencija metode uz korištenje funkcije (81) za različite početne uvjete

Kao što se vidi sa gornje slike konvergencija se postiže za sve početne uvjete odabrane prema slici (3), ono što je još potrebno uočiti je činjenica da metoda tim brže konvergira što je početni korak bliži konačnom rješenju. Uz korištenje funkcije (81) dobiveno je rješenje problema $x_1 = -2.106867079425129$. Odgovor na pitanje je li ovo rješenje jedino rješenje problema (79) mogu dati provjere ostalih oblika funkcije $\phi(x)$. Za provjeru ostalih funkcija provodi se analogan postupak. Derivacija funkcije (82):

$$\dot{\phi}(x) = \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^2}} \quad (88)$$

Procjena početnog koraka potrebnog za ostvarenje uvjeta konvergencije metode jednostavnih iteracija prema sljedećem izrazu.

$$\left| \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^2}} \right| < 1 \quad (89)$$

Grafičko rješenje nejednadžbe (89) prema sljedećoj slici. Iz sljedeće slike se jednostavno mogu napraviti zaključci vezani za odabir početnog stanja. Iz izraza (89) prelazi se u malo izmijenjeni oblik, koji olakšava grafičko rješavanje problema.

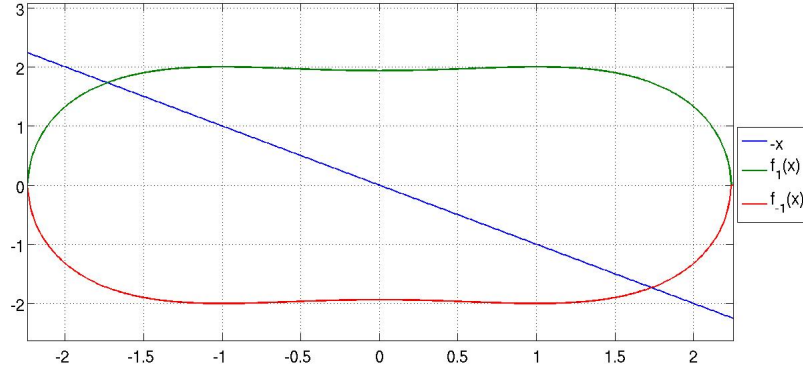


Figure 5: Nejednakost (89) - grafičko rješenje

Kao što se može vidjeti sa gornje slike, početno stanje se odabire iz intervala $x_0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ te je na taj način osigurana konvergencija metode jednostavnih iteracija u ovom slučaju. Na sljedećoj slici su prikazani rezultati rješavanja problema za različite odabire početnog stanja.

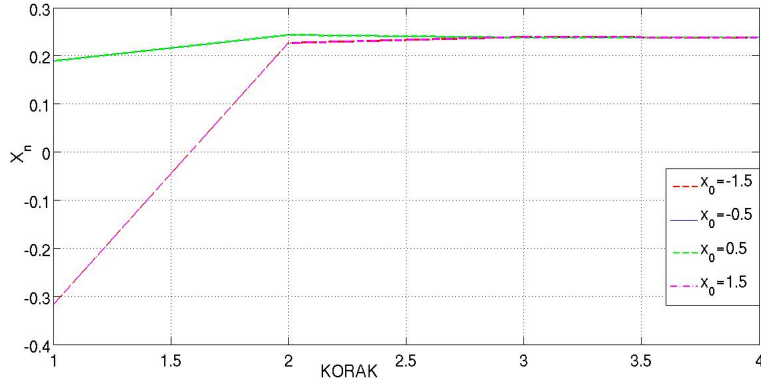


Figure 6: Konvergencija metode uz korištenje funkcije (82) za različite početne uvjete

Kao što se može vidjeti na slici (6) konvergencija je jako brza i za sva odabrana početna stanja završava u drugom rješenju jednadžbe koje glasi $x_2 = 0.238072902545494$. Tako postaje jasno da početni problem ima dva rješenja, odnosno dvije nultočke, a postaje i jasno zašto prva funkcija (80) nije dala zadovoljavajuće rezultate. Zaključuje se da je problem funkcije (80) u tome što nije zadovoljen uvjet vezan za prvu derivaciju funkcije $\phi(x)$ u okolini oba rješenja, stoga metoda za taj slučaj ne konvergira. Analogan postupak se sada može provesti i za funkciju (83), kako to slijedi.

$$\dot{\phi}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{-x}{2\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{4}\right)^2}} + 1 \right) \quad (90)$$

Ponovno se pristupa rješavanju nejednakosti $|\dot{\phi}(x)| < 1$. Kao što se može primijetiti u odnosu na prošli dio domenu prve derivacije je $x \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ što znači da će ponovno biti riječ o sličnom rješenju. Nejednakost se rješava u grafičkom obliku.

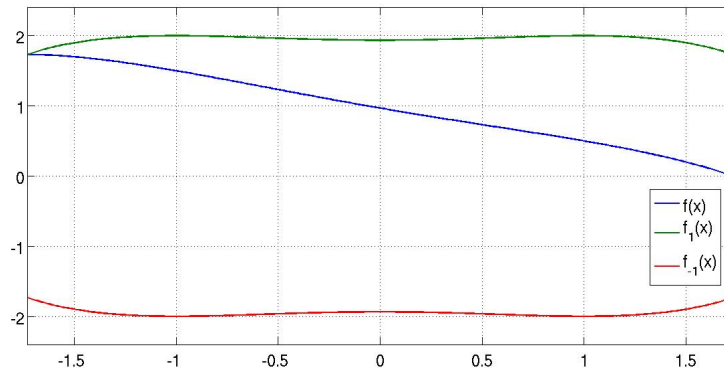


Figure 7: Nejednakost (90) - grafičko rješenje

Kao što se može vidjeti sa gornje slike rješenje je isto kao i za prošli oblik funkcije $\phi(x)$. Stoga se mogu primijeniti analogna početna stanja kako bi se provjerila konvergencija metodom jednostavnih iteracija.

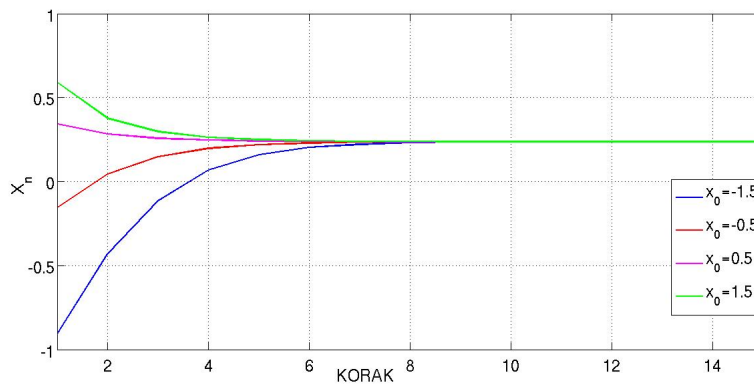


Figure 8: Konvergencija metode uz korištenje funkcije (83) za različite početne uvjete

Uz opisanu funkciju postiže se rješenje $x_2 = 0.238072902545494$ jednako kao i u prošlom dijelu. Iz opisanog postupka se može zaključiti da je odabir funkcije $\phi(x)$ kao i odabir početnog koraka u odnosu na zahtijev vezan za derivaciju funkcije $\phi(x)$ ključan za uspješan pronalazak rješenja problema nultočaka.

Zadatak 2. Metodom iteracija riješite jednadžbu te obrazložite konvergenciju metode:

$$4 - x^2 - \ln^2(x) = 0 \quad (91)$$

Rješenje:

Ponovno se primijenjuje jednak princip rješavanja, izraz (91) se dovodi na oblik $x = \phi(x)$ iz kojeg se onda iterativno računa rješenje problema. Kao što se moglo vidjeti u prošlom primjeru ključna stavka rješavanja je odabir funkcije $\phi(x)$. I u ovom primjeru će se pokušati s više različitih oblika za koje će onda biti obrazložena konvergencija i odabir početnog koraka. Odabrani su sljedeći oblici:

$$\phi_1(x) = -\frac{\ln(x)^2 - 4}{x} \quad (92)$$

$$\phi_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{\ln(x)^2 - 4}{2x} \quad (93)$$

$$\phi_3(x) = e^{\sqrt{4-x^2}} \quad (94)$$

$$\phi_4(x) = \frac{x}{2} + \frac{e^{\sqrt{4-x^2}}}{2} \quad (95)$$

Pripadne derivacije su kako slijedi:

$$\dot{\phi}_1(x) = \frac{\ln(x)^2 - 4}{x^2} - \frac{2 \ln(x)}{x^2} \quad (96)$$

$$\dot{\phi}_2(x) = \frac{\ln(x)^2 - 4}{2x^2} - \frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{1}{2} \quad (97)$$

$$\dot{\phi}_3(x) = -\frac{x e^{\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{4-x^2}} \quad (98)$$

$$\dot{\phi}_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{x e^{\sqrt{4-x^2}}}{2\sqrt{4-x^2}} \quad (99)$$

Za sve oblike su iscrtani grafovi, kako slijedi, a koji prikazuju grafički nejednakosti oblika $|\dot{\phi}(x)| < 1$.

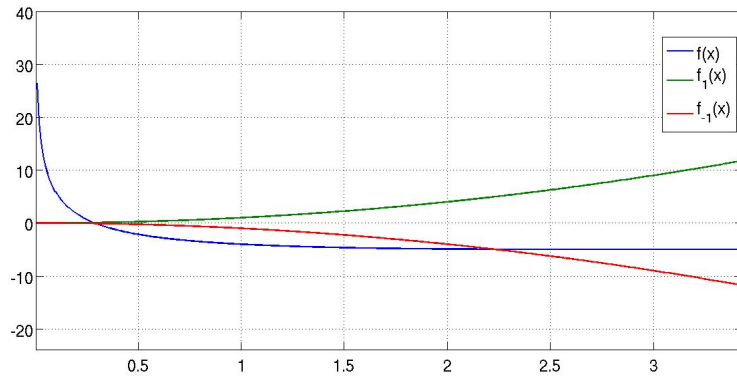


Figure 9: Grafički prikaz nejednakosti uz funkciju $\phi(x)$ opisanu izrazom (96)

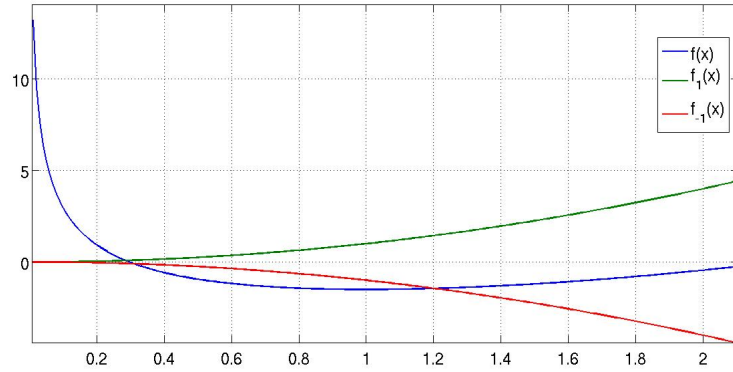


Figure 10: Grafički prikaz nejednakosti uz funkciju $\phi(x)$ opisanu izrazom (97)

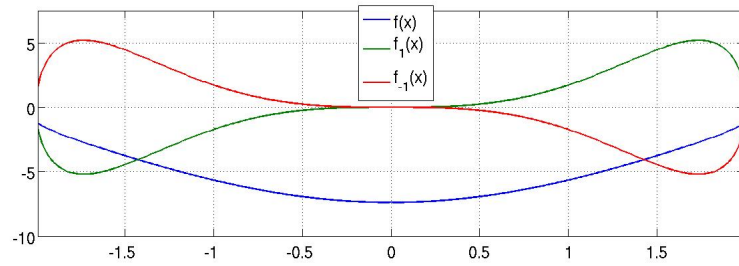


Figure 11: Grafički prikaz nejednakosti uz funkciju $\phi(x)$ opisanu izrazom (98)

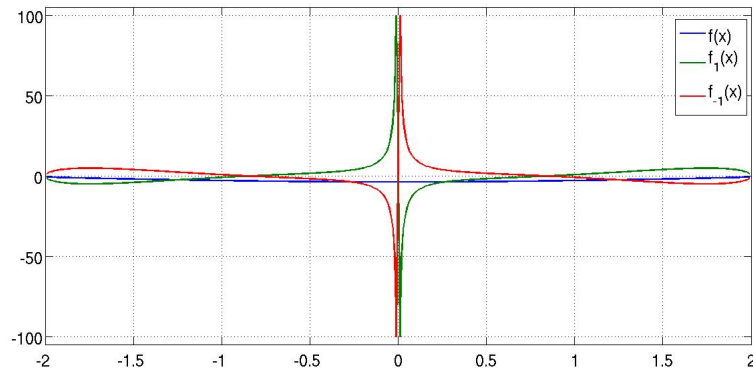


Figure 12: Grafički prikaz nejednakosti uz funkciju $\phi(x)$ opisanu izrazom (99)

Napomena: Grafovi (9) – (12) oblikovani su na način da se čim jednostavnije prikaže uvjet $-1 < \dot{\phi}(x) < 1$ koji je prije toga prebačen u prikladniji oblik $f_{-1}(x) < f(x) < f_1(x)$. Stoga se provjera uvjeta vezanog za prvu derivaciju svodi na izračun intervala na kojima je zadovoljen navedni uvjet (plavi graf un-

utar područja ograničenog zelenim i crvenim). S grafova se sada jednostavno mogu odrediti valjana početna stanja za svaku od navedenih funkcija kako bi se zadovoljio uvjet konvergencije metode.

Ako se odaberu početna stanja prema grafovima očekuje se konvergencija metode ka rješenju. U obzir se svakako moraju uzeti i ograničenja koja nameće sama domena odabranih oblika funkcije $\phi(x)$.

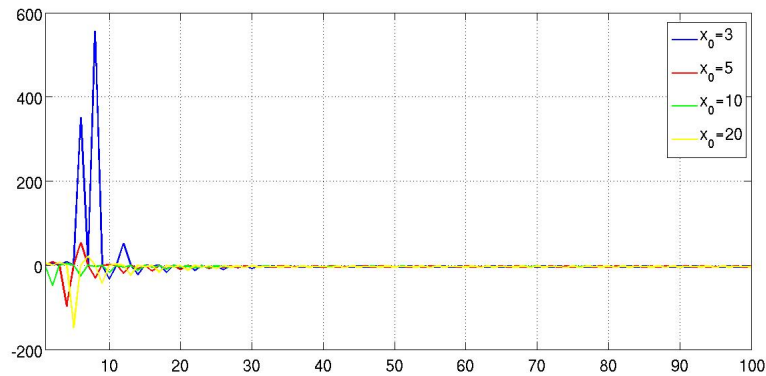


Figure 13: Konvergencija metode uz funkciju $\phi(x)$ opisanu izrazom (92)

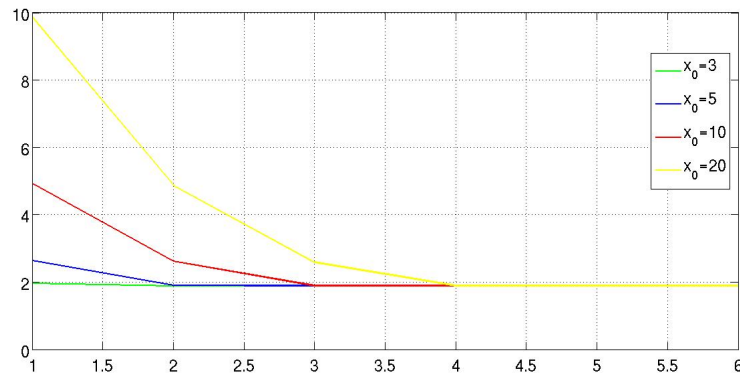


Figure 14: Konvergencija metode uz funkciju $\phi(x)$ opisanu izrazom (93)

U slučaju odabira funkcija $\phi(x)$ izrazima (94) i (95) metoda ne konvergira, pošto nije zadovoljen uvjet da je prva derivacija funkcije $\phi(x)$ u okolini rješenja manja od 1. Metoda ne konvergira ni za odabranu funkciju $\phi(x)$ izrazom (92) zbog jednakog razloga. U slučaju korištenja funkcije (93) metoda konvergira ka rješenju $x_o = 1.895083829593426$, što je dobar rezultat pošto je to ujedno i stvarno rješenje problema.

Zadatak 3. Newtonovom metodom pronaći nultočku funkcije:

$$f(x) = 2x - 100\cos(x) - 1 \quad (100)$$

i obrazložite konvergenciju metode. Pokušajte pronaći korak metode za koji pogreška postaje $\epsilon < 10^{-3}$ te napravite ocjenu pogreške.

Rješenje:

Princip rješavanja problema Newtonovom metodom može se svesti na dvije jednadžbe, kojima se iterativno izračunavaju vrijednosti x_{n+1} kako slijedi:

$$x_{n+1} = x_n - s_n \quad (101)$$

$$s_n = \frac{f(x_n)}{\dot{f}(x)} \quad (102)$$

Ako vrijedi da $\dot{f}(x)$ nije jednako 0 u okolini rješenja, tj. $\dot{f}(x) \neq 0$ metoda će uspjeti pronaći rješenje. Razlika u odnosu na metodu jednostavnih iteracija je ta što je u slučaju Newtonove metode funkcija $\phi(x)$ jednoznačno opisana izrazom $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{\dot{f}(x)}$. U prvom koraku se izračunava funkcija $\phi(x)$ koja za zadani problem glasi:

$$\phi(x) = x - \frac{2x - 100\cos(x) - 1}{2 + 100\sin(x)} \quad (103)$$

Korak metode je opisan sa:

$$s_n = \frac{2x_n - 100\cos(x_n) - 1}{2 + 100\sin(x_n)} \quad (104)$$

Metoda će konvergirati za odabir početnog koraka dovoljno blizak rješenju problema. Procjena početnog koraka se analogno kao kod metode jednostavnih iteracija može napraviti razmatranjem područja gdje vrijedi $|\phi(x)| < 1$, a koja kriju potencijalna rješenja problema. Stoga je na sljedećoj slici prikazan rezultat grafičkog rješavanja navedene nejednakosti uz malo preoblikovanje izraza, kako slijedi.

$$\dot{\phi}(x) = \frac{200x\cos(x) - 10000\cos^2(x) - 100\cos(x)}{(2 + 100\sin(x))^2} \quad (105)$$

$$\left| \frac{200x\cos(x) - 10000\cos^2(x) - 100\cos(x)}{(2 + 100\sin(x))^2} \right| < 1 \quad (106)$$

Izraz (106) se uz pretpostavke na domenu $\dot{\phi}(x)$ prebacuje u oblik prikladan za grafičko rješavanje nejednakosti, opisan sljedećim izrazom.

$$-(2 + 100\sin(x))^2 < 200x\cos(x) - 10000\cos^2(x) - 100\cos(x) < (2 + 100\sin(x))^2 \quad (107)$$

Na sljedećoj slici je izraz (107) prikazan grafički.

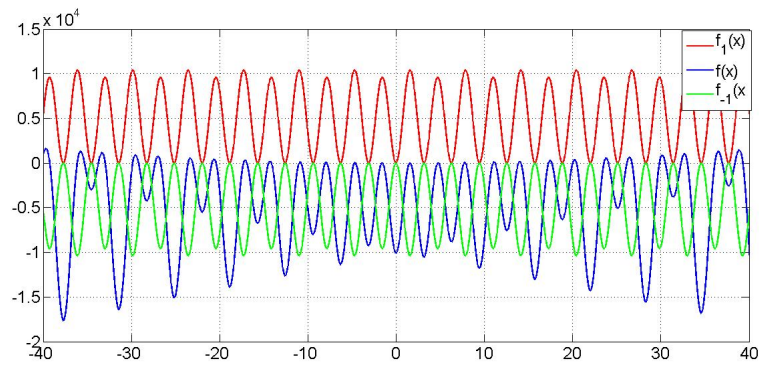


Figure 15: Rješenje nejednadžbe (107)

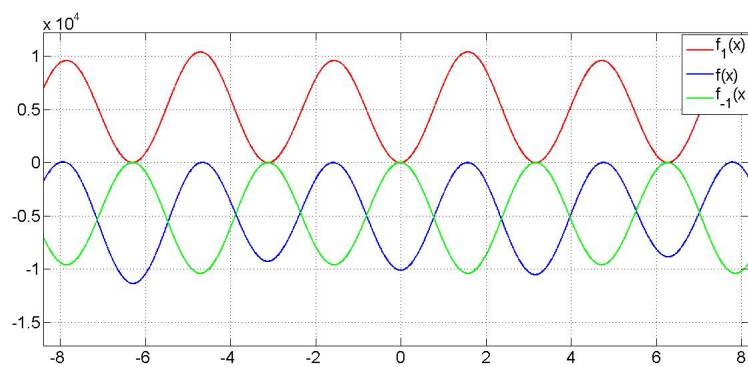


Figure 16: Uvećani detalj sa slike (15) - rješenje nejednadžbe (107)

Sa slike (16) se sada mogu procijeniti područja na kojima vrijedi uvjet konvergencije, kao što se može vidjeti postoji mnogo potencijalnih područja koja kriju rješenje. Stoga se korak po korak uvrštavaju početna stanja te se provjerava konvergencija Newtonove metode.

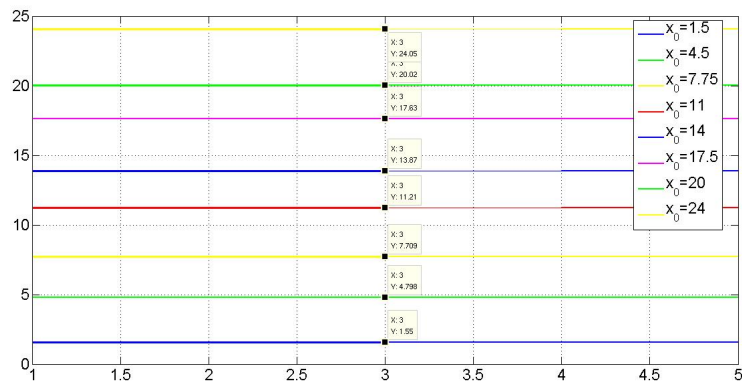


Figure 17: Dio rješenja problema

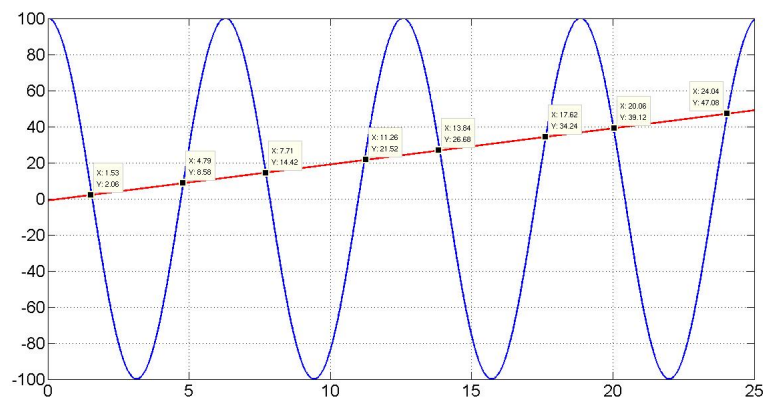


Figure 18: Stvarna rješenja problema prikazana grafički

Kao što se može vidjeti sa slika (17) i (18) da su Newtonovom metodom dobivena rješenja jednaka stvarnim rješenjima problema. Stoga se može zaključiti da metoda konvergira i daje zadovoljavajuće rezultate. Pošto je funkcija $\phi(x)$ parna, tj. simetrična u odnosu na y-os koordinatnog sustava problem ima simetrična rješenja za $x_0 < 0$.

Zadatak 3. Metodom sekante izračunajte pozitivni korijen iduće jednadžbe.

$$x^2 = \operatorname{tg}(0.55x + 0.1) \quad (108)$$

Rješenje:

Pošto je veliki nedostatak Newtonove metode potreba za eksplicitnim poznavanjem derivacije funkcije $f(x)$, umjesto derivacije se koristi aproksimacija preko

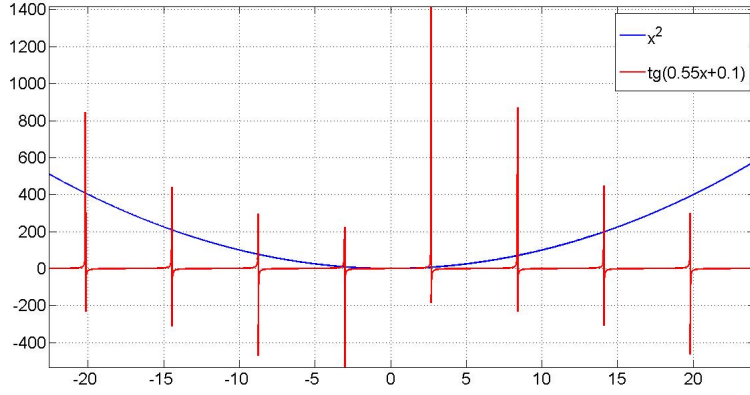


Figure 19: Stvarna rješenja problema prikazana grafički

konačnih diferencija. Derivacija se mijenja sljedećom aproksimacijom.

$$\dot{f}(x) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \quad (109)$$

U tom slučaju je modificirana Newtonova metoda koja se naziva metoda sekante definirana sljedećim relacijama.

$$x_{n+1} = x_n + s_n \quad (110)$$

$$s_n = -\frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (111)$$

Nedostatci ove metode su gubitak lokalne kvadratne konvergencije, kao i potreba odabira dva početna koraka x_0 i x_1 , a prednost je jednostavniji izračun vrijednosti, pošto se u svakoj iteraciji zapravo računa samo jedna funkcijska vrijednost. Prema tome problem opisan izrazom (108) prvo se prebacuje u oblik $f(x) = 0$, tj.

$$x^2 - tg(0.55x + 0.1) = 0 \quad (112)$$

Iz izraza (112) se sada konstruira korak metode prema (111), koji je dan sljedećim izrazom.

$$s_n = -\frac{(x_n^2 - tg(0.55x_n + 0.1))(x_n - x_{n-1})}{x_n^2 - tg(0.55x_n + 0.1) - x_{n-1}^2 + tg(0.55x_{n-1} + 0.1)} \quad (113)$$

Kao što se vidi iz gornjeg izraza za korak metode sekante potrebno je odabrati dva početna stanja. Uzevši u obzira da su stvarna rješenja problema (108) prikazana na slici (19), mogu se odabrati početna stanja, kako bi se ukazalo na konvergenciju metode, prilikom nepoznavanja stvarnih rješenja koristi se metoda pokušaja i pogreške, pošto bi procjena područja gdje je zadovoljen uvjet analogan onome za konvergenciju Newtonove metode bila iznimno zahtjevna. Kao što se može vidjeti sa slike (19) problem ima skup rješenja, od kojih se za provjeru svojstava metode sekante razmatraju samo pojedina. Prema svojstvima

funkcije tangens koja ima kodomena $tg(x) \in (-\infty, +\infty)$ skup rješenja problema je beskonačan, pošto je tangens periodična funkcija, u ovom slučaju period funkcije je $T = \frac{2*\pi}{0.55}$. U sljedećem koraku se provjerava konvergencija metode sekante za odabrana početna stanja. Početna stanja se biraju u odnosu na stvarno rješenje. Kao kriterij zaustavljanja iterativnog postupka odabrana je razlika $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon = 10^{-3}$.

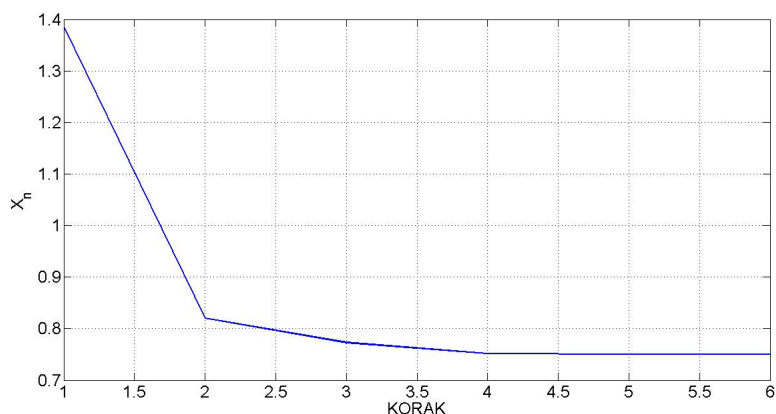


Figure 20: Konvergencija metode za početne korake $x_0 = -1$ i $x_1 = 1$

Kao što se može vidjeti sa slike (20) metoda sekante uz navedena početna stanja i opisani kriterij zaustavljanja konvergira ka rješenju $x^* = 0.750187568\dots$ uz koje se dobije da je $x^{*2} - tg(0.55x^* + 1) = 3.47897629593418910^{-8}$, što je zadovoljavajući rezultat. Uz odabran drugačiji kriterij zaustavljanja, npr. manju vrijednost ϵ dobivaju se točniji rezultati. U sljedećem koraku su isprobane još neke kombinacije početnih uvjeta.

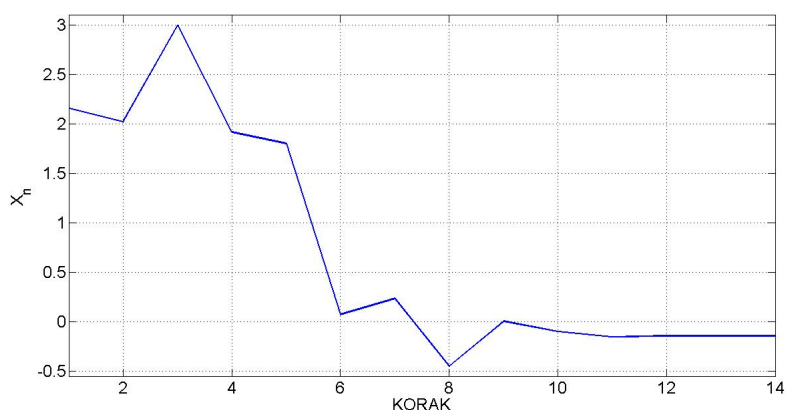


Figure 21: Konvergencija metode za početne korake $x_0 = 4$ i $x_1 = 6$

Kao što je to prikazano na slici (21) metoda konvergira ka rješenju prob-

lema bliskom $x^* = -0.144079927171448$, uz koje se dobiva odstupanje $x^{*2} - \text{tg}(0.55x^* + 1) = 4.18562331669369810^{-9}$. Rješenje prikazano na slici (20) ujedno je i traženo pozitivno rješenje problema (108), a može se dobiti za različite kombinacije početnih uvjeta, npr. još jedna kombinacija je prikazana na sljedećoj slici.

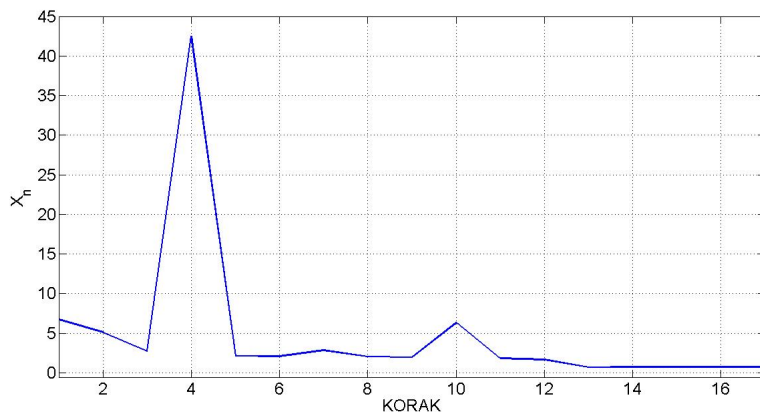


Figure 22: Konvergencija metode za početne korake $x_0 = 10$ i $x_1 = 20$

5 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Problem traženja rješenja sustava nelinearnih jednadžbi se predstavlja kao n -dimenzionalni problem traženja nultočaka funkcije $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pri čemu se rješava problem pronalaska $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Drugi problem se može formulirati na sljedeći način, za danu $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (funkcija cilja), rješava se $\min f(x) \in \mathbb{R}^n$ što se u literaturi naziva optimizacijski problem bez ograničenja. Tipičan primjer navedenog problema je alokacija reusursa koja je upravljanja nekim specifičnim zakonom. Uz dodavanje ograničenja optimizacijski problem postaje $\min f(x) \in \mathbb{R}^n, \Omega \subset \mathbb{R}^n$, pri čemu je skupom Ω opisan skup ograničenja vezanih uz potencijalna rješenja. Ograničenja koja opisuju ovaj skup mogu se uvesti na više načina, ili pomoću jednakosti oblika $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ili $\mathbf{h}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, pri čemu je $\mathbf{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tzv. kriterijska funkcija. U literaturi se mogu naći različiti oblici ovakvih problema, od kojih su najpoznatiji problemi konveksnog programiranja, linearno programiranje i kvadratično programiranja, koji se razlikuju samo po svojstvima funkcije f odnosno \mathbf{h} . Rješavanje svakog skupa nelinearnih jednadžbi se može svesti na minimizacijski problem, što je vrlo bitna stavka.

5.1 Newtonova metoda u više dimenzija

Newtonova metoda se može jednostavno proširiti na višedimenzionalni sustav, kako slijedi. Za dani vektor početnih stanja $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}$ i korak metode $k = 0, 1, \dots$ do konvergencije, rješava se $DF(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$ te se postavlja naredni vektor stanja metode $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}$. U svakom koraku se izračunava i Jacobijan matrica $DF(\mathbf{x}^{(k)})$, koja je potrebna za rješavanje linearnog sustava kako je to opisano.

Zadatak 1. Primjenom Newtonove metode riješite nelinearni sustav:

$$e^{x_1^2+x_2^2} - 1 = 0 \quad (114)$$

$$e^{x_1^2-x_2^2} - 1 = 0 \quad (115)$$

Rješenje:

U prvom koraku je potrebno izračunati Jacobijevu matricu za vektor početnih stanja \mathbf{x}^0 , funkcija je opisana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \left(e^{x_1^2+x_2^2} - 1, e^{x_1^2-x_2^2} - 1 \right)^T = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))^T \quad (116)$$

$$\mathbf{DF}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} \\ \frac{df_2}{dx_1} & \frac{df_2}{dx_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 e^{x_1^2+x_2^2} & 2x_2 e^{x_1^2+x_2^2} \\ 2x_1 e^{x_1^2-x_2^2} & -2x_2 e^{x_1^2-x_2^2} \end{bmatrix} \quad (117)$$

Odabire se početno stanje, npr. $\mathbf{x}^0 = (x_{1_0}, x_{2_0}) = (0.1, 0.1)$, koje vodi ka rješenju: Na sljedećoj slici prikazani su rezultati i konvergencija metode za različite početne uvjete.

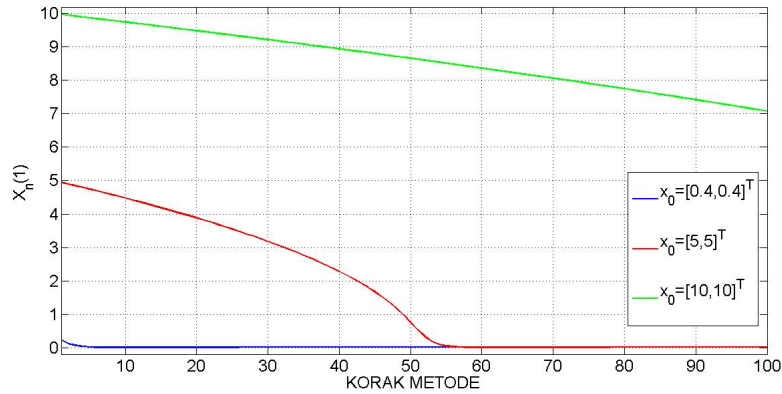


Figure 23: Konvergencija metode različita početna stanja

Kao što se može vidjeti sa slike (23) Newtonova metoda je jako osjetljiva na odabir početnih stanja problema. Sa slike se vidi da već za početno stanje $\mathbf{x}^0 = (10, 10)^T$ metoda treba ogroman broj koraka za ostvarenje rezultata, što nije zadovoljavajuće. Za početna stanja bliska rješenju metoda konvergira relativno brzo. Već za početno stanje $\mathbf{x}^0 = (20, 20)^T$ metoda uopće više nema svojstvo konvergencije.

Zadatak 2. Primjenom Newtonove metode riješite nelinearni sustav:

$$2x^3 - y^2 - 1 = 0 \quad (118)$$

$$xy^3 - y - 4 = 0 \quad (119)$$

Uzevši za početnu iteraciju $x_0 = 1$ i $y_0 = 1.5$. Razmotriti konvergenciju metode.

Rješenje:

Jednako kao i u prošlom zadatku izračunava se Jacobijeva matrica potrebna za algoritam izračuna rješenja, funkcija je opisana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x^3 - y^2 - 1 = 0, xy^3 - y - 4 = 0)^T \quad (120)$$

Jacobijeva matrica je opisana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{DF}(x, y) = \begin{bmatrix} 6x^2 & -2y \\ y^3 & 3xy^2 - 1 \end{bmatrix} \quad (121)$$

Početno stanje je definirano sa $\mathbf{x} = [1, \frac{3}{2}]^T$ te se provjerava konvergencija metode:

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (122)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \quad (123)$$

Za navedeno početno stanje \mathbf{x}^0 dobiveno je sljedeće rješenje $x = 1.234274484114$ i $y = 1.661526466795$, koje konvergira ka stvarnom rješenju problema.

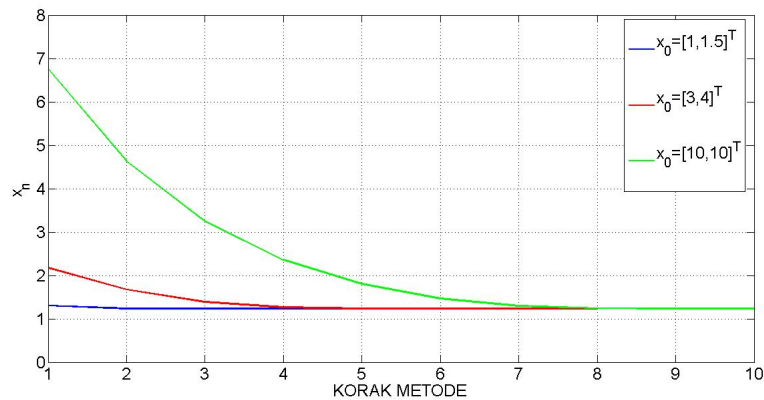


Figure 24: Konvergencija metode za različita početna stanja

Kao što se može vidjeti sa slike (24) metoda dosta brzo konvergira ka rješenju za različita početna stanja.

Zadatak 3. Primjenom Newtonove metode riješite nelinearni sustav:

$$4y^2 + 20x + 4y - 15 = 0 \quad (124)$$

$$4x^2 - 4y^2 + 8x - 20y - 5 = 0 \quad (125)$$

Rješenje:

Funkcija je opisana sljedećim izrazom:

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} 4y^2 + 20x + 4y - 15 \\ 4x^2 - 4y^2 + 8x - 20y - 5 \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$\mathbf{DF}(x, y) = \begin{bmatrix} 20 & 8y + 4 \\ 8x + 8 & -8y - 20 \end{bmatrix} \quad (127)$$

Ponovno se rješava isti problem:

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}) \quad (128)$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)} \quad (129)$$

Metoda je simulirana za različite kombinacije početnih uvjeta, primjenjuje se postupak sa izračunom Jacobijeve matrice u svakom koraku iteriranja. Na sljedećoj slici prikazano je ponašanje i konvergencija metode.

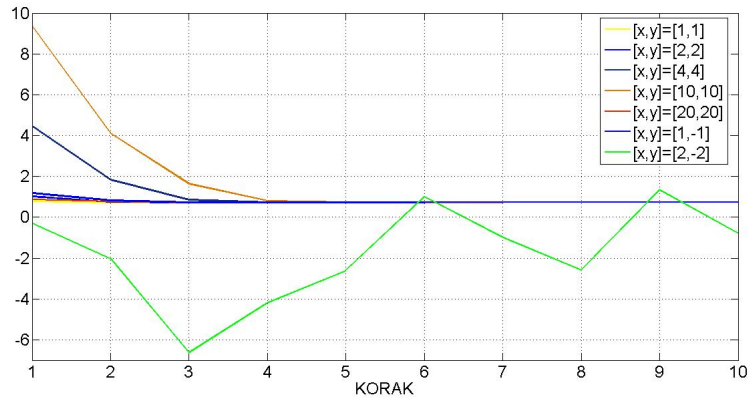


Figure 25: Konvergencija metode za različita početna stanja - (x_n)

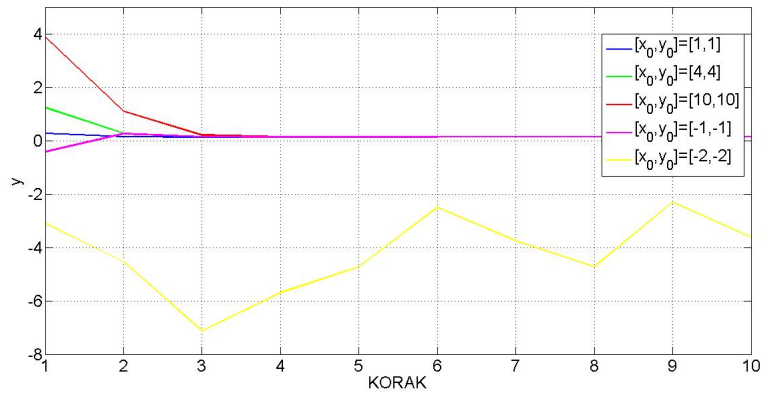


Figure 26: Konvergencija metode za različita početna stanja - (y_n)

Ovisno o odabranim početnim stanjima metoda konvergira ili ne. Uz pravilno odabrana početna stanja x_0 i y_0 (npr. (1,1) prema slici) dobiveno je konačno rješenje problema: $x^* = 0.718818718692$ i $y^* = 0.137107845296$.

6 Obične diferencijalne jednačbe

6.1 Eulerova metoda

Ova metoda je obilježena niskim stupnjem točnosti, ali daje uvid u osnovne ideje za numeričko rješavanje diferencijalnih jednačbi. Ideja Eulerove metode je problem oblika:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = r, y(0) = y_0 \quad (130)$$

Riješiti iterativnim postupkom bez analitičkog računanja. Koristi se Eulerova aproksimacija derivacije:

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (131)$$

Izraz (131) se uvrsti u (130) te se dobije:

$$y(t+h) = (1 - ah)y(t) + hr \quad (132)$$

Iz izraza (132) se sada nazire iterativni postupak rješavanja. Koristeći aproksimaciju (130) otvara se mogućnost rješavanja problema korak po korak, na način da se korak h uvede kao konačan vremenski korak. Riječ je o sljedećem postupku:

$$\begin{bmatrix} y(h) = (1 - ah)y(0) + hr = (1 - ah)y_0 + hr \\ y(2h) = (1 - ah)y(h) + hr = (1 - ah)^2 y_0 + (1 - ah)hr + hr \\ \dots \end{bmatrix} \quad (133)$$

Izrazom (134) opisan je niz $y(kh)$ koji čini numeričko rješenje diferencijalne jednačbe prvog reda opisane izrazom (130). Točnost rješenja je ovisna o odabranom koraku h , što je manji korak to je rješenje točnije ali se jednako tako produljuje i vrijeme potrebno za simulaciju, vrijeme je proporcionalno sa $\frac{1}{h}$. Za provjeru ovih svojstava jednostavno se odabiru proizvoljne vrijednosti parametara: $y_0 = 0$, $a = 1$ i $r = 1$, čime je dobivena sljedeća diferencijalna jednačba prvog reda: $\dot{y}(t) + y(t) = 1$. Analitičko rješenje ove jednačbe glasi: $y(t) = 1 - e^{-t}$.

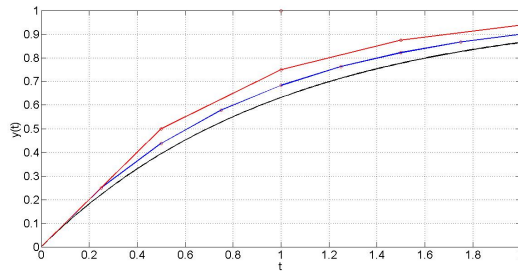


Figure 27: Rezultati ponašanja rješenja dobivnog Eulerovom metodom (za različite korake h) i stvarnog analitičkog rješenja

Kao što se može vidjeti sa gornje slike točnost Eulerove metode direktno ovisi o veličini vremenskog koraka h , što nije zadovoljavajuće jer se korak ne može beskonačno smanjiti, a smanjivanjem koraka dolazi se i do usporenja izračuna rješenja što je nepovoljno. Eulerova metoda izračuna rješenja diferencijalne jednačbe prvog reda može se proširiti i na vektorski slučaj, odnosno kada se traži vektor rješenja sustava diferencijalnih jednačbi, na sljedeći način:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (134)$$

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (135)$$

6.2 Heunova metoda: trapezoidalna metoda

Ideja Heunove metode je da se diferencijalna jednačba prvog reda prikaže u obliku $\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ te se potom obje strane jednačbe integriraju, koristeći kvadraturnu formulu pravokutne integracije prilikom integriranja desne strane.

$$\mathbf{y}(t)|_{t_k}^{t_{k+1}} = \mathbf{y}(t_{k+1}) - \mathbf{y}(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (136)$$

Iz izraza (136) sada slijedi:

$$\mathbf{y}(t_{k+1}) = \mathbf{y}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \quad (137)$$

Ako se pretpostavi da se vrijednost integrala u izrazu (137) može aproksimirati formulom pravokutne integracije (pod pretpostavkom da je derivacija funkcije konstantna na intervalu jednog koraka $h = t_{k+1} - t_k$) onda se gornji izraz može pretvoriti u:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{2} (\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) + \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{y}_{k+1})) \quad (138)$$

Pošto je \mathbf{y}_{k+1} nepoznato u koraku t_k mora se izraziti na sljedeći način:

$$\mathbf{y}_{k+1} \cong \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \quad (139)$$

Tako da izraz (138) postaje:

$$\mathbf{y}_{k+1} \cong \mathbf{y}_k + \frac{h}{2} (\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) + \mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k))) \quad (140)$$

Pogreška aproksimacije Heunove metode je $O(h^2)$, tj. kvadratična ovisnost o duljini koraka h . Kao što se može primijetiti metoda je bolja od Eulerove, kod koje je pogreška bila proporcionalna sa h , tj. $O(h)$. Na sljedećoj slici je prikazan rezultat primjene Heunove metode na prošli primjer (kao i kod Eulerove).

6.3 Runge-Kutta metoda

Iako Heunova metoda ima manju pogrešku u odnosu na Eulerovu metodu, ipak je s praktične strane neupotrebljiva, jer ima preveliku pogrešku za realne probleme. Runge-Kutta metoda ima pogrešku aproksimacije ovisnu $O(h^4)$, implementirana u Matlabu i najčešće se koristi. Algoritam Runge-Kutta metode opisan je sljedećim izrazima.

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \frac{h}{6} (\mathbf{f}_{k1} + 2\mathbf{f}_{k2} + 2\mathbf{f}_{k3} + \mathbf{f}_{k4}) \quad (141)$$

Pri čemu vrijede sljedeće supstitucije:

$$\mathbf{f}_{k1} = \mathbf{f}(t_k, \mathbf{y}_k) \quad (142)$$

$$\mathbf{f}_{k2} = \mathbf{f}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \mathbf{f}_{k1} \frac{h}{2}\right) \quad (143)$$

$$\mathbf{f}_{k3} = \mathbf{f}\left(t_k + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_k + \mathbf{f}_{k2} \frac{h}{2}\right) \quad (144)$$

$$\mathbf{f}_{k4} = \mathbf{f}(t_k + h, \mathbf{y}_k + \mathbf{f}_{k3}h) \quad (145)$$

Izraz koji opisuje Runge-Kutta metodu zapravo proizlazi iz aproksimacije integrala preko Simpsonove formule, tj. primjenjuje se sljedeća aproksimacija:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(x)dx \cong \frac{h'}{3} \left(f_k + 4f_{\frac{k+1}{2}} + f_{k+1} \right), h' = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} = \frac{h}{2} \quad (146)$$

Bitan faktor, osim složenosti $O(h^s)$, koji se mora uzeti u obzir prilikom odabira numeričke metode za rješavanje diferencijalne jednačbe je i broj poziva funkcije kao i izračuna vrijednosti iste u pripadnom x_k .

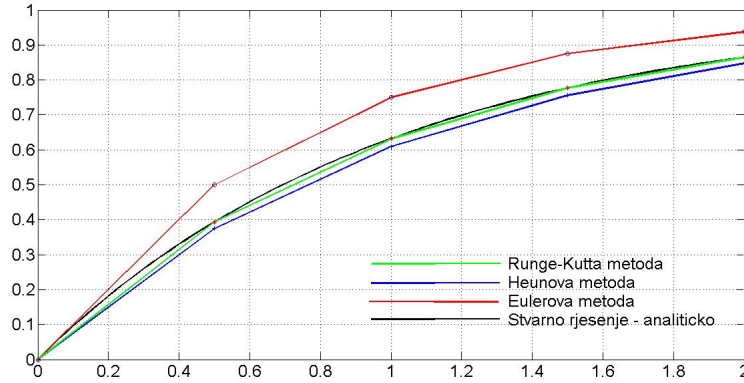


Figure 28: Usporedba rezultata pojedine numeričke metode

Kao što se može vidjeti sa slike (28) najbolje rezultate postiže Runge-Kutta metoda, koja je implementirana i u programskim alatima kao što su *Matlab*, *Octave* i *SciLab*. Izvedba ove metode u *Matlab*-u ima dodatni algoritam za adaptivnu promjenu širine koraka h ovisno o svojstvima funkcije f . Opisane metode spadaju u jednostavne oblike, dok se u stvarnim implementacijama koriste složenije metode numeričkog izračuna rješenja.

7 Primjene metoda numeričke matematike

7.1 Newtonov model širenja topline

Razmatra se problem gubitka topline zatvorene posude ispunjene tekućinom. Promjena temperature tekućine u vremenskom trenutku t_k proporcionalna je razlici temperatura tekućine u_k i temperature okoline $u_{okoline}$. U ovu ovisnost

ulazi i konstanta c koja predstavlja mjeru toplinske izolacije koju osigurava posuda u kojoj se tekućina nalazi. Diskretni oblik Newtonovog zakona ima sljedeći oblik:

$$u_{k+1} - u_k = ch(u_{oko} - u_k) \quad (147)$$

Odakle jednostavno dalje slijedi:

$$u_{k+1} = (1 - ch)u_k + chu_{oko} = au_k + b, a = 1 - ch, b = chu_{oko} \quad (148)$$

Konačno rješenje, tj. rješenje u stacionarnom stanju bi odgovaralo situaciji da su temperatura tekućine i temperatura okoline jednake, u nekom konačnom broju koraka k . Ukoliko je temperatura okoline konstantna temperatura tekućine bi morala monotono konvergirati ka rješenju. Analizom izraza (148) se jednostavno može vidjeti da to neće biti slučaj ukoliko nije zadovoljen uvjet stabilnosti koji je vezan uz korak metode h , a glasi:

$$0 < a = 1 - ch \rightarrow a < 1 \quad (149)$$

Rekurzivnim uvrštavanjem prošlog koraka $u_k = au_{k-1} + b$ u izraz (148) dolazi se do sljedećih izraza:

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= a(au_{k-1} + b) + b \\ &= a^2u_{k-1} + ab + b \\ &= a^2(au_{k-2} + b) + ab + b \\ &= a^3(au_{k-3} + b) + a^2b + ab + b \\ &\quad \vdots \\ &= a^{k+1}u_0 + b(a^k + \dots + a + 1) \\ &\quad \vdots \\ &= a^{k+1}u_0 + b\frac{1-a^{k+1}}{1-a} \\ &\quad \vdots \\ &= a^{k+1}\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a} \end{aligned} \quad (150)$$

Kao što se može vidjeti iz izraza (150) pogreška u stacionarnom stanju $\frac{b}{1-a}$ bit će mala ako je $|a|$ dovoljno malena vrijednost, ili ako se provede velik broj koraka, ili ako je početno stanje u_0 dovoljno blizu rješenju u stacionarnom stanju.

7.2 Difuzija topline u žici

U prošlom dijelu je pretpostavljeno da je temperatura zapravo jedino funkcija vremena, što u stvarnosti nije slučaj. U ovom dijelu se razmatra kondukcija topline preko površine tanke električne žice. Model promjene temperature ima oblik $u^{k+1} = Au^k + b$ pri čemu je u^k stupčani vektor čije su komponente vrijednosti temperature u prošlim vremenskim koracima $t = k\Delta t$, na različitim koordinatama u žici. Kod Newtonovog modela širenja topline pretpostavljeno je da se masa tijela jednoliko zagrijava u odnosu na volumen koji zauzima u prostoru. Ako se dopusti i prostorna ovisnost dolazi se do diskretnog Fourierovog zakona za toplinu. Zakon ima sljedeće dvije pretpostavke:

- a. Toplinski tok je uvijek usmjeren od toplijeg ka hladnijem.

- b. Promjena topline je proporcionalna površini preko koje se topline izmjenjuje.

Može se uvesti konstanta K koja označava koeficijent termalne konduktivnosti, odnosno vodljivosti i koja poprima različite vrijednosti ovisno o vrsti materijala. U ovom dijelu se pretpostavlja 1D slučaj, tj. do izmjene topline dolazi samo u jednoj dimenziji.

Fourierov zakon topline. Toplina "teče" od toplijeg ka hladnijem, a količina topline koja se prenese kroz mali segment površine A proporcionalan je produktu površine A , vremenskog intervala i usmjernoj derivaciji temperature u smjeru okomitom na površinu izmjene topline. U primjeru difuzije topline u žici pretpostavlja se 1D slučaj, kroz žicu teče struja, koja predstavlja izvor topline (f), koja se razvija zbog postojanja realnog otpora žice. Veličina f ima jedinicu $\left(\frac{\text{toplina}}{\text{volumen} \times \text{vrijeme}}\right)$. Krajevi žice se nalaze na temperaturi 0 [$^{\circ}$], pa je početna temperatura isto 0 . Cilj rješavanja ovog problema je pronaći zakonitosti ponašanja temperature u svim točkama prostora žice, u svim vremenskim intervalima.

7.2.1 Diskretni model problema

U cilju rješavanja opisanog problema diskretiziraju se i vrijeme i prostor, $\Delta t = \frac{T}{n}$ (T - ukupno vrijeme), $h = \frac{L}{n}$ (L - duljina žice, n - broj segmenata žice), a temperatura kao funkcija oboga $u(ih, k\Delta t)$ aproksimira se pomoću u_i^k . Fizikalni model procesa ima općeniti oblik:

$$\Delta \text{topline} \approx (f) + (f_{\text{desna}}) + (f_{\text{lijeva}}) \quad (151)$$

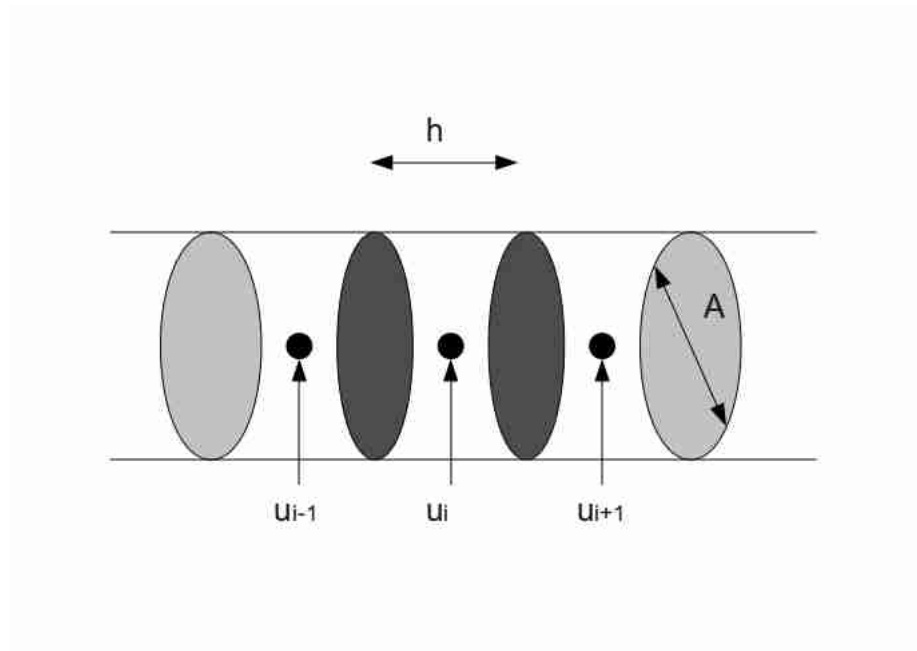


Figure 29: Diskretni model problema difuzije topline u žici

Za desnu stranu žice prikazane na slici (29) pretpostavlja se da je vremenski korak $(k+1)\delta t$, a lijevu $k\delta t$. U idućem koraku raspisuju se prema Fourierovom diskretnom zakonu topline jednadžbe koje opisuju difuziju topline s lijeve i desne strane kako je to prikazano na slici (29). Uz pretpostavku ($\frac{u_{i+1}^k - u_i^k}{h} > 0$) toplina koja difuzijom dolazi sa desne strane iznosi:

$$A\Delta t K \frac{(u_{i+1}^k - u_i^k)}{h} \quad (152)$$

Analogno tome toplina koja dolazi s lijeve strane, uz pretpostavku ($\frac{u_i^k - u_{i-1}^k}{h} > 0$) glasi:

$$A\Delta t K \frac{(u_i^k - u_{i-1}^k)}{h} \quad (153)$$

Pretpostavke koje su napravljene u izrazima (152) i (153) odnose se na fizikalnu situaciju u kojoj se izvor topline nalazi s desne strane, tako da je aproksimacija temperature $u_i^k > u_{i-1}^k$ i $u_{i+1}^k > u_i^k$. Sa lijeve strane stoga imamo rasipanje topline, pošto je ulijevo temperatura manja nego na promatranom segmentu, dok toplina s desne strane pridonosi. Ukupna toplina koja pridonosi segmentu na kojem se računa aproksimirana temperatura u_i^k prema prošlim izrazima iznosi:

$$A\Delta t K \frac{(u_{i+1}^k - u_i^k)}{h} - A\Delta t K \frac{(u_i^k - u_{i-1}^k)}{h} \quad (154)$$

Izvor topline koji u ovom slučaju predstavlja struja koja teče kroz samu žicu glasi:

$$A\Delta t f \quad (155)$$

Količina topline u segmentu hA u trenutku $k\Delta t$, koja predstavlja *toplinski kapacitet* segmenta, glasi:

$$\rho c u_i^k A h \quad (156)$$

Pri čemu je c specifični toplinski koeficijent, čija vrijednost varira ovisno o materijalu, ρ je specifična gustoća materijala, tako da je u izrazu (156) sa $\rho A h$ opisana masa te se izraz može izreći i na način: $m c u_i^k$. Ako se prisjetimo izraza (151) opis modela difuzije topline temelji se na razmatranju promjene topline na malom segmentu volumena žice Ah . Promjena topline se odnosi na vremensku promjenu topline na segmentu, stoga se opis modela svodi na sljedeći izraz:

$$\rho c u_{i+1}^k A h - \rho c u_i^k A h = A\Delta t f + A\Delta t K \frac{(u_{i+1}^k - u_i^k)}{h} - A\Delta t K \frac{(u_i^k - u_{i-1}^k)}{h} \quad (157)$$

Ako se izraz (157) sada podijeli sa $\rho c A h$ te ako se definira supstitucija $\alpha = \left(\frac{K}{\rho c}\right) \left(\frac{\Delta t}{h^2}\right)$ dobije se sljedeći izraz koji opisuje *eksplicitni model konačnih diferencija zakona difuzije topline*.

$$\begin{aligned} u_i^{k+1} &= \left(\frac{\Delta t}{\rho c}\right) f + \alpha (u_{i+1}^k + u_{i-1}^k) + (1 - 2\alpha) u_i^k \\ i &= 1, \dots, n-1 \\ k &= 0, \dots, \text{maxk} - 1 \\ u_i^0, za : i &= 1, \dots, n-1 \\ u_0^k &= u_n^k = 0, za : k = 1, \dots, \text{maxk} \end{aligned} \quad (158)$$

Početni uvjeti navedeni u izrazu (158) znače da je temperatura u početnom trenutku s temperatura 0, tj. ista na svim koordinatama žice, dok drugi početni uvjet znači da je temperatura na krajevima žice 0, tj. jednaka. Izraz (158) može se sada jednostavno prebaciti u matrični oblik, dovoljno je odrediti broj segmenata pozicije i broj vremenskih trenutaka u kojima će se izračunavati aproksimacije temperature. Ako se npr. žica podijeli na 3 segmenta po x-osi (promatramo slučaj 1D koordinatnog sustava) onda se prema izrazu (158) mogu raspisati sljedeće 3 jednačbe koje opisuju vremenske promjene topline na sva 3 segmenta.

$$\begin{aligned} u_1^{k+1} &= \left(\frac{\Delta t}{\rho c}\right) f + \alpha (u_2^k + 0) + (1 - 2\alpha) u_1^k \\ u_2^{k+1} &= \left(\frac{\Delta t}{\rho c}\right) f + \alpha (u_3^k + u_1^k) + (1 - 2\alpha) u_2^k \\ u_3^{k+1} &= \left(\frac{\Delta t}{\rho c}\right) f + \alpha (0 + u_2^k) + (1 - 2\alpha) u_3^k \end{aligned} \quad (159)$$

Izraz (159) se sada može prebaciti u matrični oblik, tako da se zapisuje na sljedeći način:

$$u^{k+1} = Au^k + b \quad (160)$$

Pri čemu je:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ u_3^k \end{bmatrix}, b = \left(\frac{\Delta t}{\rho c}\right) f \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 - 2\alpha & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 - 2\alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 - 2\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (161)$$

Mora se znati da je sa u_i^k zapravo označena temperatura segmenta i u trenutku $k\Delta t$.

7.2.2 Uvjet stabilnosti

Ako se promotri matrica A iz izraza (161) vrlo jednostavno se može vidjeti da će metoda konvergirati samo ako vrijedi da za svaku svojstvenu vrijednost matrice A , $\lambda(A) < 1$. Ako su sve svojstvene vrijednosti matrice A manje od 1 onda se jednostavno vidi da će matrica A^k konvergirati ka 0. Raspisivanjem izraza (161) se vidi sljedeće:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= Au^k + b = \\ &= A(Au^{k-1} + b) + b = A^2u^{k-1} + Ab + b = \\ &\vdots \\ &= A^{k+1}u^0 + A^kb + A^{k-1}b + \dots + Ab + b \end{aligned} \quad (162)$$

Ako se sada pretpostavi da postoji stacionarno stanje kojem niz $\{u^k\}$ konvergira onda za njega vrijedi:

$$u = Au + b \quad (163)$$

Ako se sada i izraz (163) raspiše na način kao i izraz (162) te ako se dobiveni izraz oduzme od (162) vrijedi sljedeće:

$$u^{k+1} - u = A^{k+1}(u^0 - u) \quad (164)$$

Sada se jasno vidi da ako $A^{k+1} = 0$ niz konvergira ka stacionarnom stanju u . Prema teoremu koji je poznat iz linearne algebre (kojeg neću navoditi ovdje) niz matrica potencija teži u 0, ako i samo ako svojstvene vrijednosti matrice A leže u jediničnoj kružnici, tj. ako su manje od 1. Pošto su svojstvene vrijednosti matrice A , kako je to ranije opisano, jednake $1 - 2\alpha$ sada se jednostavno postavlja uvjet stabilnosti kao $1 - 2\alpha < 1$, tj. $\alpha > 0$. Još je potrebno uvažiti činjenicu da je α zapravo $\alpha = \left(\frac{K}{\rho c}\right) \left(\frac{\Delta t}{h^2}\right)$, iz čega se onda jednostavno može ocijeniti valjani broj dijelova (segmenata žice) i vremenski korak, u odnosu na ostale konstante. Uz tako odabrane vrijednosti vremenskog koraka i broja segmenata za proizvoljan skup konstanti procesa difuzije topline, dobivene su sljedeće slike.

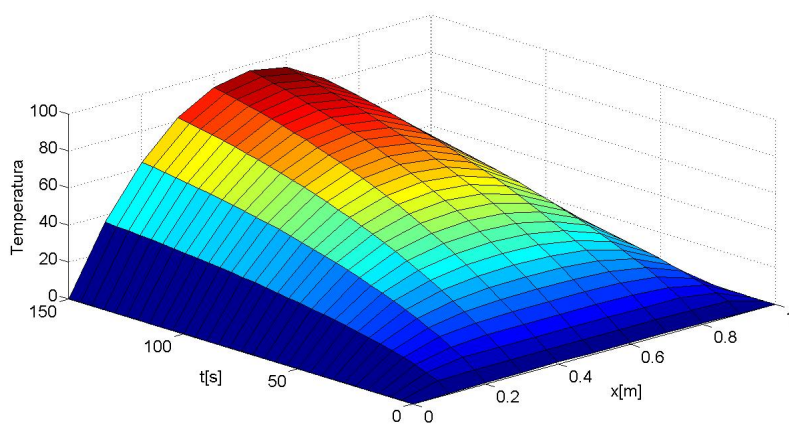


Figure 30: Graf temperature u odnosu na vrijeme i poziciju segmenta žice – stabilnost

Kao što se može vidjeti sa gornje slike dobiveni rezultati su i fizikalni, kako vrijeme prolazi žica se zagrijava počevši od sredine prema krajevima, dok je u početnom trenutku temperatura na cijeloj žici jednaka.

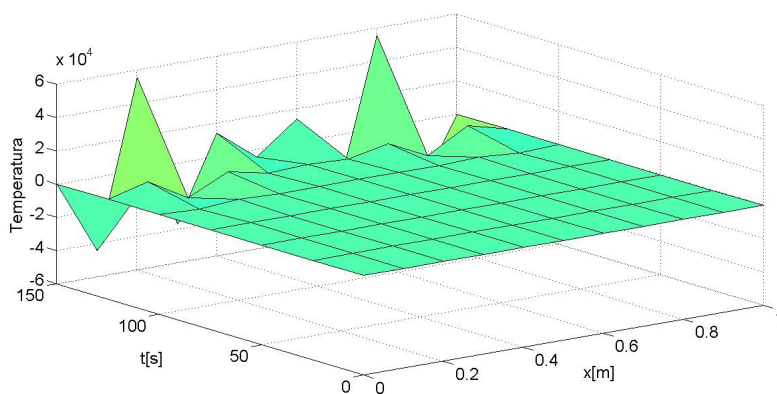


Figure 31: Graf temperature u odnosu na vrijeme i poziciju segmenta žice – nestabilnost

Na slici (31) se vidi da dobiveni model ne konvergira, tj. nestabilan je, što je posljedica kršenja uvjeta stabilnosti opisanog u prošlom dijelu. Na sljedećoj slici je produljeno vremensko trajanje simulacije te se jasno vidi da metoda postiže stacionarno stanje nakon 200[s]. Procesi zagrijavanja krutog tijela, pri razumno odabranim vrijednostima parametara, imaju velike vremenske konstante, stoga je rezultat valjan.

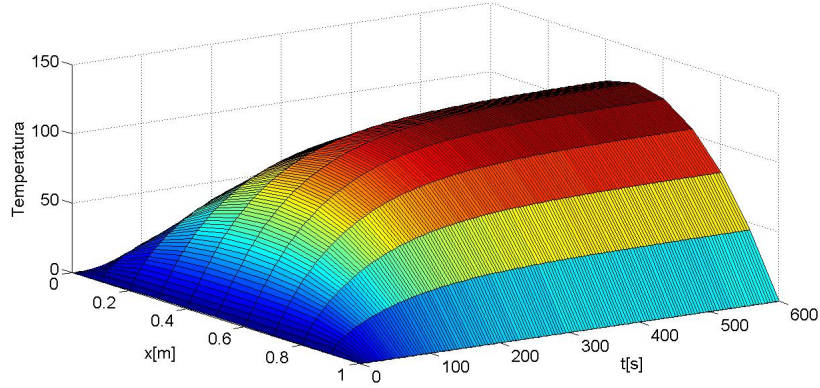


Figure 32: Graf temperature u odnosu na vrijeme i poziciju segmenta žice – stacionarno stanje

7.3 Problem epidemije i disperzije

Razmatra se problem širenja zaraze - odnosno epidemija. Populacija se može podijeliti na tri dijela: potencijalno zaraženi, zaraženi i oni koji su prebolili zarazu. Koristi se model koji uključuje i vremensku i prostornu ovisnost, tako da se u svakom koraku generira skup nelinearnih jednadžbi koje je potrebno riješiti. Za populaciju se pretpostavlja da se može gibati u dva smjera (uz rijeku i niz rijeku). Disperzija populacije može imati oblik nasumičnog kretanja. Ako je populacija dovoljno velika takvo kretanje se može opisati pomoću Fickovog zakona, koji je dosta sličan Fourierovom zakonu. Neka je $C = C(x, t)$ koncentracija zaraženih u populaciji.

Fickov zakon gibanja Razmatra se koncentracija $C(x, t)$ kao funkcija prostora u jednom smjeru kroz presjek A . Koncentracija se kroz presjek A :

- Kreće od više razine koncentracije prema nižoj razini koncentraciji.
- Promjena koncentracije je proporcionalna promjeni u vremenu, poprečnom presjeku i derivaciji koncentracije u odnosu na x .

Neka je D konstantna proporcionalnosti (disperzija), tako da je promjena količine po A u $x + \Delta x/2$:

$$D\Delta t A C_x(x + \Delta x/2, t + \Delta t) \quad (165)$$

Disperzija s obje strane volumena $A\Delta x$ daje aproksimaciju promjene količine:

$$\begin{aligned} & (C(x, t + \Delta t) - C(x, t)) A\Delta x \\ & \approx D\Delta t A (C_x(x + \Delta x/2, t + \Delta t) - C_x(x - \Delta x/2, t + \Delta t)) \end{aligned} \quad (166)$$

Odakle se dolazi do ovisnosti oblika $C_t = (DC_x)_x$.

7.3.1 Model problema

Ukupna populacija je dana zbrojem zaraženih ($I(t)$), potencijalno zaraženih ($S(t)$) i jedinki koje su prebolile zarazu ($R(t)$), tj. $P(t) = S(t) + I(t) + R(t)$. Pretpostavlja se da će sve zaražene jedinke preboliti zarazu i da sve jedinke koje su prebolile zarazu više nisu potencijalno zaražene. Pretpostavlja se da je promjena broja zaraženih proporcionalna produktu vremenskog intervala, broja zaraženih i broja potencijalno zaraženih.

$$I(t + \Delta t) - I(t) = \Delta t a S(t) I(t) - \Delta t b I(t) \quad (167)$$

pri čemu a označava očekivanu vjerojatnost zaraze, odnosno koliko se brzo zaraza širi, dok se b odnosi na stopu preboljenja. Sada se jednostavnim manipulacijama dolazi do sljedećeg izraza.

SIR model

$$\begin{aligned} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= a S(t) I(t) - b I(t) \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} &= a S(t) I(t) - b I(t) \\ \dot{I}(t) &= a S(t) I(t) - b I(t) \end{aligned} \quad (168)$$

Diferencijalne jednačbe koje opisuju promjene brojeva S i R , izražavaju se na analogan način. Ukupan model problema epidemije uz navedene pretpostavke sada se može napisati kao:

$$\begin{aligned} S' &= -aSI, uz : S(0) = S_0 \\ I' &= aSI - bI, uz : I(0) = I_0 \\ R' &= bI, uz : R(0) = R_0 \end{aligned} \quad (169)$$

Navedeni model se proširuje na dva načina:

- 1 Pretpostavlja se da zaraženi kroz vrijeme umiru, sa stopom $-bI$.
- 2 Pretpostavlja se da zaražena populacija disperzira u jednom smjeru prema Fickovom zakonu gibanja, a potencijalno zaražena populacija ne nestaje. Nepoznate koncentracije zaraženih i potencijalno zaraženih u tom slučaju su funkcije vremena i prostora.

SI model epidemije s disperzijom

$$\begin{aligned} S_t &= -aSI, uz : S(x, 0) = S_0, 0 \leq x \leq L, \\ I_t &= aSI - bI + DI_{xx}, uz : I(x, 0) = I_0, \\ I_x(0, t) &= 0 = I_x(L, t). \end{aligned} \quad (170)$$

U cilju rješavanja po npr. broju zaraženih, vidi se da se, pošto veličina ima dvije derivacije, po dimenziji i po vremenu, moraju postaviti rubni uvjeti. Izraz (170) opisuje rubne uvjete pri kojima je dopušteno da i lijevo i desno populacija ulazi i izlazi.

7.3.2 Algoritam rješavanja

Izvrši se diskretizacija izraza (170) po vremenu, tako da se dobije:

$$\begin{aligned} S^{k+1} &= S^k - \Delta t a S^{k+1} I^{k+1} \\ I^{k+1} &= I^k + \Delta t a S^k I^{k+1} - \Delta t b I^{k+1} + \Delta t D I_x x^{k+1} \end{aligned} \quad (171)$$

Koriste se konačni koraci $h = \Delta x = L/n$, tako da imamo $n + 1$ nepoznatih i za $S = S^{k+1}$ i $I = I^{k+1}$. U svakom koraku postupka potrebno je riješiti sustav od $2(n + 1)$ nelinearnih jednadžbi za S_i i I_i uz dani $\bar{S} = S^k$ i $\bar{I} = I^k$. Neka je $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ funkcija od (S, I) . Neka je $1 \leq i \leq (n + 1)$, $\alpha = D\Delta t/h^2$, $\hat{i} = i - (n + 1)$ za $i > n + 1$ i tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq n + 1 : F_i &= S_i - \bar{S} + \Delta t a S_i I_i \\ i = n + 2 : F_i &= I_i - \Delta t a S_i I_i + \Delta t b I_i - \alpha (-2I_i + 2I_{i+1}) \\ n + 2 < i < 2(n + 1) : F_i &= I_i - \bar{I}_i - \Delta t a S_i I_i + \Delta t b I_i - \alpha (I_{i-1} - 2I_i + I_{i+1}) \\ i = 2(n + 1) : F_i &= I_i - \bar{I}_i - \Delta t a S_i I_i + \Delta t b I_i - \alpha (2I_{i-1} - 2I_i) \end{aligned} \quad (172)$$

Za rješavanje sustava $\mathbf{F}(S, I) = \mathbf{0}$ koristi se Newtonova metoda. Nenul komponente Jacobijana $2(n + 1) \times 2(n + 1)$ matrice \mathbf{F}' su:

$$\begin{aligned} 1 \leq i \leq n + 1 : F_{iS_i} &= 1 + \Delta t a I_i \text{ i } F_{iI_i} = \Delta t a S_i \\ i = n + 2 : F_{iI_i} &= 1 + b\Delta t + 2\alpha - \Delta t a S_i \text{ i } F_{iI_{i+1}} = -2\alpha, F_{iS_i} = -\Delta t a I_i \\ n + 2 < i < 2(n + 1) : F_{iI_i} &= 1 + b\Delta t + 2\alpha - \Delta t a S_i, F_{iI_{i+1}} = -\alpha \\ &F_{iI_{i-1}} = -\alpha, F_{iS_i} = -\Delta t a I_i \\ i = 2(n + 1) : F_{iI_i} &= 1 + b\Delta t + 2\alpha - \Delta t a S_i, F_{iI_{i-1}} = -2\alpha, F_{iS_i} = -\Delta t a I_i \end{aligned} \quad (173)$$

Matrica \mathbf{F}' sada se može napisati kao blok matrica 2×2 , pri čemu su 4 bloka matrice veličine $(n + 1) \times (n + 1)$:

$$\mathbf{F}' = \begin{bmatrix} A & E \\ \tilde{F} & C \end{bmatrix}. \quad (174)$$

A , E i \tilde{F} su dijagonalne matrice čije su komponente F_{iS_i} , F_{iI_i} , F_{iS_i} i F_{iI_i} . Matrica C je tridijagonalna, npr. za $n = 4$ glasi:

$$C = \begin{bmatrix} F_{6I_1} & -2\alpha & & & \\ -\alpha & F_{7I_2} & -\alpha & & \\ & -\alpha & F_{8I_3} & -\alpha & \\ & & -\alpha & F_{9I_4} & -\alpha \\ & & & -2\alpha & F_{10I_5} \end{bmatrix} \quad (175)$$

Abstract

Za sve pogreške koje pronadete u pdf-u možete mi se obratiti se na mail markisa.jvm@gmail.com. Nadam se da će ovo biti od koristi, pokušao sam čim više sažeti osnovne tipove zadataka i ideja s kojima sam se susreo na ovom kolegiju. Svi zadatci koje sam, nadam se koliko toliko objasnio, vezani su za drugi i treći ciklus. Zadnje poglavlje vezano je za primjene numeričke matematike na klasične probleme.