Završni ispit iz Numeričke matematike
26. lipnja 2013.

1. (10 bodova)

(i) **(2 boda)** Pomoću kompozitne trapezne formule aproksimirajte vrijednost integrala

$$I = \int_0^{\pi} f(x)dx, \quad f(x) = \cos^4(x)$$

na mreži $x_i = i\dfrac{\pi}{4}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4.$

(ii) **(3 boda)** Ocijenite pogrešku integracije kompozitnom trapeznom formulom na mreži zadanoj u (i).

(iii) **(5 bodova)** Znajući da je $\max\limits_{x\in[0,\pi]} |f''(x)| = 4$, odredite koliko točaka mreže je potrebno uzeti da apsolutna pogreška integracije kompozitnom trapeznom formulom bude manja ili jednaka od 10^{-4}?

Uputa: Jednostavna trapezna formula i pogreška integracije.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in C^2(\mathbb{R}),\ I = \int_a^b f(x)dx$$

$$T_1(f) = \frac{b-a}{2}\Big(f(a) + f(b)\Big), \quad I - T_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\tau),\ \tau \in \langle a, b\rangle$$

2. (5 bodova)

(i) **(2 boda)** Za zadane podatke $\{(x_i, y_i),\ i = 0, \ldots, n\}$ definirajte kubni splajn.

(ii) **(3 boda)** Odredite parametre a, b, c tako da funkcija

$$s(x) = \begin{cases} 1 + 2x - x^3, & x \in [0,1] \\ 2 + a(x-1) + b(x-1)^2 + c(x-1)^3, & x \in [1,2] \end{cases}$$

bude prirodni kubni splajn na intervalu $[0, 2]$.

3. (10 bodova)

(i) **(1 bod)** Problem aproksimacije podataka

x	0	1	3
y	1	2	3

linearnom funkcijom u smislu najmanjih kvadrata zapišite u matričnom obliku.

(ii) Pokažite da ortogonalna transformacija "čuva" euklidsku normu.

(iii) **(2 boda)** Definirajte QR rastav matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $k < n$.

(iv) **(5 bodova)** Objasnite kako se QR rastav matrice A iz (ii) koristi za rješavanje problema najmanjih kvadrata $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^k} \|Ax - b\|_2$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Okrenite!

4. (10 bodova)

(i) **(2 boda)** Objasnite geometrijsku interpretaciju Newtonove metode za traženje (jednostruke) nultočke funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(ii) **(6 bodova)** Kako glasi Newtonova metoda za rješavanje nelinearne jednadžbe $F(\mathbf{x}) = 0$ gdje je $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Izračunajte prvu iteraciju Newtonove metode za rješavanje sustava

$$\begin{aligned} x^3 + y &= 1, \\ y^3 - x &= -1, \end{aligned}$$

pri čemu je početna iteracija $[0.5,\, 0.5]^T$.

(iii) **(2 boda)** Objasnite kada se javlja potreba za skraćivanjem Newtonovog koraka (skicirajte sliku).

5. (5 bodova) U sljedećem zadatku odgovorite na pitanja ili nadopunite tekst. Pitanje (i) nosi 2 boda, dok ostala vrijede po jedan bod.

(i) Konstruirajte sve ortonormirane matrice dimenzije $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(ii) Navedite barem jednu primjenu SVD-dekompozicije.

(iii) Skraćivanje koraka u Newtonovoj metodi vrši se ako je ______________________

(iv) Navedite barem jedan kriterij zaustavljanja Newtonove metode.

6. (5 bodova) U sljedećem zadatku zaokružite Točno ili Netočno. Svaki točan odgovor nosi 1 bod, netočan ili neodgovoren 0 bodova.

1. Matrice $AA^\top$ i $A^\top A$ koje koristimo u SVD dekompoziciji matrice A imaju isti spektar[1]. Točno. Netočno.
2. QR rastav matrice A temelji se na Gramm-Schmidtovom postupku ortogonalizacije stupaca matrice A. Točno. Netočno.
3. Složenost algoritma FFT iznosi $\mathcal{O}(n \log n)$. Točno. Netočno.
4. Strogo dijagonalno dominantne matrice su regularne Točno. Netočno.
5. Jednostavna Simpsonova formula je egzaktna na polinomima petog stupnja. Točno. Netočno.

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora.