Numerička matematika, 8. predavanje

Pina Milišić, Ana Žgaljić Keko

Skripta

Sadržaj

1

Uvod

1.1 Greške

1.2 Prikaz realnih brojeva u računalu

1.2.1 Preciznost, strojni epsilon i greška zaokruživanja

1.2.2 Propagiranje grešaka kroz aritmetičke operacije

1.3 Stvarne katastrofe uzrokovane greškom

2

Linearni sustavi

2.1 Gaussove eliminacije i LU faktorizacija

2.2 Pivotiranje

2.3 Neki posebni tipovi linearnih sustava

2.3.1 Simetrične pozitivno definitne matrice

Faktorizacija Choleskog

2.3.2 Rješavanje tridijagonalnog sustava. Thomasov algoritam

2.4 Analiza greške rješenja

3

Interpolacija i aproksimacija funkcija

3.1 Polinomijalna interpolacija

Greška interpolacije.

3.1.1 Primjena: numerička integracija

Newton-Cotesove formule.

Ocjene greške formula numeričke integracije

Kompozitne formule

3.2 Interpolacija splajnovima

Na Rungeovom primjeru (vidi Primjer **??**) vidjeli smo da interpolacija funkcije polinomom visokog stupnja ne daje dobre rezultate ukoliko ne možemo birati položaj interpolacijskih točaka. Nadalje, na rubu područja interpolacije polinomi višeg stupnja pokazuju jake oscilacije. Rješenje spomenutih problema daje *interpolacija po dijelovima*. Ideja se sastoji u tome da segment interpolacije razbijemo na niz manjih podintervala na kojima ćemo zadanu funkciju interpolirati polinomima relativno niskog stupnja. Na rubovima podintervala dobivena interpolirajuća funkcija naravno neće biti proizvoljno glatka, no ipak se može postići zadovoljavajući stupanj diferencijabilnosti. U većini slučajeva važnije je izbjeći eventualne oscilacije nego težiti za postizanjem visoke glatkoće interpolirajuće funkcije.

Po dijelovima glatke funkcije koje interpoliraju zadane točke nazivaju se splajnovi. Ime dolazi od engleske riječi *spline* koja označava naprave koje su se u tehničkom crtanju, za potrebe strojarstva ili brodogradnje, koristile za konstrukciju glatkih krivulja. Radi se ustvari o dužoj elastičnoj napravi koja se može saviti tako da prođe kroz određen broj fiksiranih čvorova. U našim razmatranjima krenimo najprije od matematičke definicije splajna.

Definicija 3.1 Neka je na intervalu $[a, b]$ zadana mreža

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}. \tag{3.1}$$

Splajn (*eng. spline*) reda $l \in \mathbb{N}$ na zadanoj mreži Δ je funkcija $s(x) \in C^{l-1}(a, b)$ koja se na svakom podintervalu $[x_i, x_{i+1}]$ podudara sa polinomom stupnja najviše l, odnosno vrijedi

$$s|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathcal{P}_l, \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Skup svih splajn funkcija reda l na mreži Δ označavamo sa $S_{\Delta,l}$ i zapisujemo na sljedeći način:

$$\begin{gathered} S_{\Delta,l} = \{s \in C^{l-1}(a, b) \colon \forall k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\ \exists p_k \in \mathcal{P}_l \\ \text{td } s(x) = p_k(x),\ \forall x \in [x_k, x_{k+1}]\} \end{gathered}$$

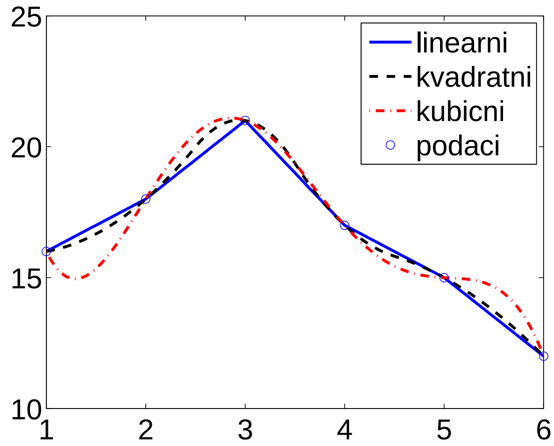
Najvažniji primjeri splajn funkcija su linearni splajn $(l = 1)$ i kubični splajn $(l = 3)$.

Primjer 3.1 Podatke zadane sljedećom tablicom

x_i	1	2	3	4	5	6
y_i	16	18	21	17	15	12

treba interpolirati po dijelovima linearnom funkcijom, kvadratnim splajnom, te kubničnim splajnom. Ovaj problem možemo u Matlabu riješiti pomoću skripte `spline_my.m` koristeći naredbe `spapi` i `fnplt` iz Spline Toolbox-a. Naime, naredba `spk = spapi(k,x,y)` daje splajn `spk` reda $k - 1$, dok naredba `fnplt` crta dobiveni splajn. Kako je naša želja da studenti u okviru ovog kolegija nauče osnovne ideje numeričke matematike, neovisno o odabiru programskog jezika za implementaciju pojedine metode, ovdje nećemo ulaziti u detaljan opis naredbi iz Matlabovog Spline Toolbox-a.

```
% spline_my.m
x = [1:6];
y = [16 18 21 17 15 12];
sp2 = spapi(2,x,y);
fnplt(sp2,2), hold on
sp3 = spapi(3,x,y);
fnplt(sp3,2,'k--'), set(gca,'Fontsize',20)
sp4 = spapi(4,x,y); fnplt(sp4,2,'r-.'), plot(x,y,'o')
legend('linearni','kvadratni','kubni','podaci'), hold off
```



Slika 3.1: Interpolacija splajnovima

x_i	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
f_i	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Tablica 3.1: Podaci za interpolacijski splajn

Rezultat je prikazan na slici 3.1. Vidimo da je po dijelovima linearni interpoland neprekidna funkcija čija pak prva derivacija nije neprekidna. Nadalje, kvadratični splajn je manje zanimljiv za primjene, budući da nije klase C^2. Naime, tek krivulje čija je druga derivacija neprekinuta smatramo vizualno glatkima. Na slici 3.1 jasno se vidi da je kubnični splajn *glađi* od kvadratičnog.

U ovom poglavlju detaljnije ćemo se baviti linearnim i kubičnim splajnovima. Kako smo već spomenuli na početku poglavlja o interpolaciji i aproksimaciji, uzmimo da podaci zadani tablicom 3.1 predstavljaju izmjerene vrijednosti neke fizikalne veličine koja je predstavljena funkcijom $f(x)$ a čiju eksplicitnu formulu ne znamo. Dakle, diskretni skup podataka dan tablicom 3.1 želimo interpolirati najprije linearnim, a zatim i kubičnim splajnom.

3.2.1 Linearni splajn

Linearni splajn nije ništa drugo nego po dijelovima linearna funkcija koja prolazi zadanim podacima. Odredimo linearni splajn za podatke zadane tablicom 3.1. U tu svrhu treba naći splajn $s \in \mathcal{S}_{\Delta,1}$ koji zadovoljava uvjete interpolacije

$$s(x_i) = y_i, \text{ za } i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Nadalje, na svakom intervalu $[x_{i-1}, x_i\rangle$ linearni splajn s je oblika $s(x) = a_i x + b_i$, pa imamo ukupno $2n$ koeficijenata a_i, b_i, $i = 0, \ldots, n-1$ koje trebamo odrediti da bismo dobili traženi splajn. U tom smislu kažemo da imamo ukupno $2n$ stupnja slobode koje ćemo odrediti tako da zadovoljimo uvjete neprekidnosti

$$s(x_i - 0) = s(x_i + 0) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{3.3}$$

te uvjete interpolacije dane izrazom (3.2). Prebrojimo li uvjete interpolacije te uvjete neprekidnosti dobivamo da imamo $(n-1)+(n+1) = 2n$ uvjeta. S druge strane, broj nepoznatih parametara je također $2n$, pa zaključujemo da problem interpolacije podataka zadanih tablicom 3.1 linearnim splajnom ima jedinstveno rješenje.

Ocjena greške za linearni splajn dana je sljedećom propozicijom.

Propozicija 3.1 Neka je $f \in C^2(a,b)$ i neka je $s \in S_{\Delta,1}$ linearni splajn pri čemu je $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Tada vrijedi

$$\|f - s\|_\infty \le \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

gdje je $h = \max_i (x_{i+1} - x_i)$ duljina najvećeg podintervala.

Dokaz. Na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ je $s(x) = p(x)$ gdje je $p \in \mathcal{P}_1$ takav da vrijede uvjeti interpolacije

$$p(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad p(x_i) = f(x_i).$$

Iskoristimo sada na svakom podintervalu ocjenu greške interpolacijskog polinoma stupnja 1, pa imamo da za svako $x \in [x_{i-1}, x_i]$ vrijedi

$$|f(x) - s(x)| \le \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f''(x)| \frac{(x - x_{i-1})(x_i - x)}{2}.$$

Nadalje, iskoristimo li ocjenu

$$(x - x_{i-1})(x_i - x) \le \left(\frac{x_i - x_{i-1}}{2} \right)^2 \le \frac{h^2}{4}$$

dobivamo traženu ocjenu greške. $\square$

Primjer 3.2 Linearni splajn za zadane podatke može se u Matlabu dobiti korištenjem funkcije `interp1`. Naredba `yi = interp1(x,y,xi,'linear')` daje vrijednosti traženog linearnog splajna izračunate u točkama `xi` pri čemu su `x,y` zadani podaci.

3.2.2 Kubični splajn

Ponekad je aproksimacija danih podataka linearnim splajnom sasvim zadovoljavajuća. No, ukoliko želimo postići veću glatkoću interpolanda, potrebno je konstruirati splajn višeg reda. Na primjeru 3.1 vidjeli smo da, radi skokova prve derivacije u točkama mreže, kvadratni splajn nije od posebne važnosti u primjenama. S druge strane, vidjeli smo da kubični splajn predstavlja krivulju koju naše oko prepoznaje kao *glatku*.

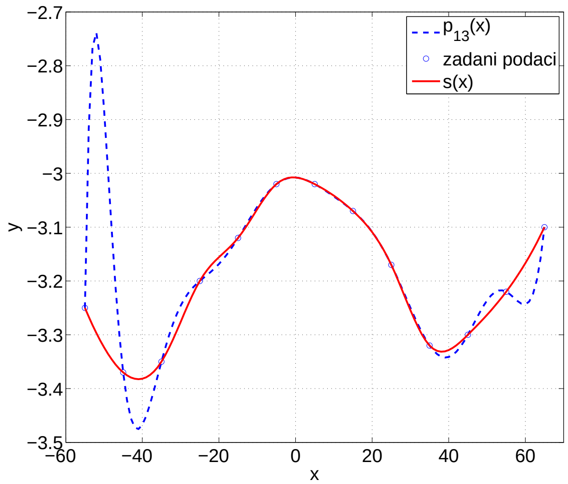
Kubični splajn za podatke dane tablicom 3.1 je funkcija $s(x) \in C^2(\langle x_0, x_n \rangle)$ koja je na svakom podintervalu $[x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ polinom najviše trećeg stupnja, u čvorovima interpolacije zadovoljava uvjete interpolacije te ima neprekidnu drugu derivaciju. Prije nego što krenemo na konstrukciju kubičnog splajna vratimo se na primjer sa početka Sekcije o splajnovima, te odgovorimo na pitanje zašto je aproksimacija kubičnim splajnom u ovom primjeru bolja od standardne polinomijalne interpolacije Lagrangeovim polinomom.

Primjer 3.3 Za uvodni primjer iz klimatologije **??** usporedimo Lagrangeov interpolacijski polinom sa kubičnim splajnom. Rezultat prikazan na slici 3.2 dobiva se upotrebom sljedećeg niza naredbi:

```
x = [-55:10:65];
y = [-3.25 -3.37 -3.35 -3.2 -3.12 -3.02 -3.02...
    -3.07 -3.17 -3.32 -3.3 -3.22 -3.1];
xu = [-55:1:65];
p = polyinterp(x,y,xu);
s = interp1(x,y,xu,'spline');
%-----------------------------------------------------------%
plot(x,y,'o');hold on; plot(xu,p);hold on;plot(xu,s);grid on;
```

Konstrukcija kubičnog splajna. Pokažimo kako se konstruira kubični splajn za podatke dane tablicom 3.1. Da bismo se uvjerili da je konstrukcija moguća provjerit ćemo broj parametara koji nam stoje na raspolaganju i broj uvjeta koje moramo zadovoljiti. Iz definicije 3.1 slijedi da je traženi kubični splajn po dijelovima polinomijalna funkcija, odnosno na svakom podintervalu se podudara sa polinomom stupnja najviše 3. Polinom trećeg stupnja ima 4 koeficijenta tako da je ukupan broj parametara (*stupnjeva slobode*) jednak $4n$. Uvjeti koje treba zadovoljiti su sljedeći:

- neprekidnost funkcije: $s(x_i - 0) = s(x_i + 0)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
- interpolacija: $s(x_i) = y_i$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, n$;
- neprekidnost prve derivacije: $s'(x_i - 0) = s'(x_i + 0)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$;
- neprekidnost druge derivacije: $s''(x_i - 0) = s''(x_i + 0)$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$;



Slika 3.2: Usporedba Lagrangeove interpolacije i kubičnog splajna za Primjer ??

Vidimo da imamo ukupno $3(n-1)+(n+1) = 4n-2$ uvjeta. Dakle, naš problem interpolacije ima $4n$ nepoznatih parametara koje moramo odrediti koristeći $4n-2$ poznata uvjeta. Da bismo jedinstveno odredili svih $4n$ nepoznatih koeficijenata moramo postaviti još dva dodatna uvjeta. U literaturi se ti dodatni uvjeti obično odnose na ponašanje splajna na rubovima zadanog intervala,a postavljaju se na jedan od sljedećih načina:

(i) Ako je poznata derivacija funkcije f na rubovima, možemo postaviti uvjete oblika

$$s'(x_0) = f'(x_0), \quad s'(x_n) = f'(x_n). \tag{3.4}$$

Na taj način dobivamo potpuni splajn.

(ii) Druga mogućnost bila bi postavljanje periodičnih rubnih uvjeta na prvu i drugu derivaciju

$$s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n). \tag{3.5}$$

U tom slučaju dobivamo periodički splajn.

(iii) Radi jednostavnosti računa, mi ćemo uglavnom uzimati tzv. prirodne rubne uvjete:

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0, \tag{3.6}$$

a dobiveni splajn nazivat ćemo prirodni kubični splajn.

Napomena 3.1 Jedan od načina kako u Matlabu možemo dobiti kubični splajn je korištenjem funkcije `spline`. Spomenuta funkcija koristi takozvani not-a-knot uvjet. Naime, ukoliko derivacije $f'(x_0)$ i $f'(x_n)$ nisu poznate, može se postaviti uvjet na neprekidnost treće derivacije kubnog splajna u točkama x_1 i x_{n-1}.

Kako smo već napomenuli, mi ćemo ovdje konstruirati prirodni kubični spline. Uvedimo oznake:

$$\gamma_i = s''(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Druga derivacija s'' je po dijelovima linearna funkcija koja mora interpolirati točke γ_i (koje nam trenutno nisu poznate). Stoga je

$$s_i''(x) = \frac{\gamma_i}{h_i}(x_{i+1} - x) + \frac{\gamma_{i+1}}{h_i}(x - x_i) \tag{3.7}$$

gdje smo uveli oznake $h_i = x_{i+1} - x_i$, te $s_i = s|_{[x_i, x_{i+1}]}$.

Integriramo li dva puta izraz (3.7) dobivamo

$$\begin{aligned} s_i'(x) &= -\frac{\gamma_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{\gamma_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \alpha \\ s_i(x) &= \frac{\gamma_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + \beta x + \delta. \end{aligned}$$

Radi kasnijih računa pokazuje se da je zadnji izraz zgodnije napisati u obliku

$$s_i(x) = \frac{\gamma_i}{6h_i}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{\gamma_{i+1}}{6h_i}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x). \tag{3.8}$$

Uvjeti neprekidnosti i interpolacije daju

$$s_i(x_i) = \frac{\gamma_i}{6}h_i^2 + Dh_i = y_i \quad \Rightarrow \quad D = \frac{y_i}{h_i} - \frac{\gamma_i}{6}h_i \tag{3.9}$$

$$s_i(x_{i+1}) = \frac{\gamma_{i+1}}{6}h_i^2 + Ch_i = y_{i+1} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i+1}}{6}h_i. \tag{3.10}$$

Potrebno je još osigurati neprekidnost prve derivacije, što će nam dati koeficijente γ_i. Imamo

$$s_i'(x) = -\frac{\gamma_i}{2h_i}(x_{i+1} - x)^2 + \frac{\gamma_{i+1}}{2h_i}(x - x_i)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{\gamma_{i+1}}{6}h_i\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{\gamma_i}{6}h_i\right), \tag{3.11}$$

odnosno za $x = x_i$ dobivamo

$$s_i'(x_i) = -\frac{h_i}{3}\gamma_i - \frac{h_i}{6}\gamma_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}.$$

Posve analogno

$$s_{i-1}'(x) = -\frac{\gamma_{i-1}}{2h_{i-1}}(x_i - x)^2 + \frac{\gamma_i}{2h_{i-1}}(x - x_{i-1})^2 + \left(\frac{y_i}{h_{i-1}} - \frac{\gamma_i}{6}h_{i-1}\right) - \left(\frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{\gamma_{i-1}}{6}h_{i-1}\right),$$

odnosno za $x = x_i$ imamo

$$s'_{i-1}(x_i) = \frac{h_{i-1}}{6}\gamma_{i-1} + \frac{h_{i-1}}{3}\gamma_i - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}.$$

Konačno, iz uvjeta neprekidnosti prve derivacije

$$s'_i(x_i) = s'_{i-1}(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

dobivamo linearni sustav

$$\frac{h_{i-1}}{6}\gamma_{i-1} + \frac{h_i + h_{i-1}}{3}\gamma_i + \frac{h_i}{6}\gamma_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{3.12}$$

sa nepoznanicama γ_i, pri čemu je $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Kako u sustav ulaze i vrijednosti γ_0 i γ_n, njih moramo zadati. To su dva stupnja slobode koji nam preostaju. Za prirodni kubični splajn uzimamo

$$\gamma_0 = \gamma_n = 0.$$

Promotrimo detaljnije strukturu matrice sustava (3.12). U tu svrhu uvedimo sljedeće oznake:

$$u_i = 2(h_i + h_{i-1}), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}.$$

Matrični zapis sustava (3.12) glasi

$$A\gamma = v,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & h_2 & u_3 & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{n-1} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & & h_{n-2} & h_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_{n-2} \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Dakle, da bismo odredili prirodni kubični splajn, trebamo riješiti tridijagonalni linearni sustav (3.12). Podsjetimo se, sustav $A\gamma = v$ gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je matrica sustava regularna. Promotrimo pobliže strukturu matrice sustava A. Uočimo najprije da je A tridijagonalna matrica. Nadalje, u svakom retku matrice A element na dijagonali je veći od zbroja vrijednosti ostalih elemenata u promatranom retku. Matrice sa tim svojstvom često se javljaju prilikom diskretizacije mnogih fizikalnih problema. Na primjer, matrica linearnog sustava kojeg smo dobili diskretizacijom rubnog problema $-u''(x) = f(x)$, za $x \in [0,1]$ uz rubne uvjete $u(0) = u(1) = 0$ (vidi primjer **??**) imala je upravo navedeno svojstvo. Gornja razmatranja vode nas na sljedeću definiciju:

Definicija 3.2 *Za matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kažemo da je strogo dijagonalno dominantna ako vrijedi*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| < |a_{kk}|, \quad \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Pomoću sljedeće propozicije, koju ovdje navodimo bez dokaza, neposredno slijedi da su strogo dijagonalno dominantne matrice regularne.

Propozicija 3.2 Neka je matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ strogo dijagonalno dominantna. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|x\|_\infty \leq \max_{k=1,\ldots,n} \Big(|a_{kk}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|\Big)^{-1} \|Ax\|_\infty. \tag{3.13}$$

Dokaz. Odaberemo indeks k takav da vrijedi $|x_k| = \|x\|_\infty$. Tada vrijede sljedeće ocjene

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_\infty \geq |(Ax)_k| = |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| &\geq a_{kk}||x_k| - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}||x_j| \\
&\geq |a_{kk}||x_k| - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|\|x\|_\infty \\
&= \Big(|a_{kk}| - \sum_{j=1, j\neq k}^{n} |a_{kj}|\Big)\|x\|_\infty,
\end{aligned}$$

čime je propozicija dokazana. $\Box$.

Dakle, ako je A strogo dijagonalno dominantna matrica, iz ocjene (3.13) slijedi da ne postoji vektor $x \neq 0$ takav da je $Ax = 0$, pa zaključujemo da je A regularna. Gornja razmatranja vode nas konačno do sljedećeg teorema.

Teorem 3.1 *Za danu mrežu (3.1) i zadane vrijednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$ postoji jedinstveni kubični interpolacijski splajn $s \in S_{\Delta,3}$ koji zadovoljava prirodne rubne uvjete (3.6).*

Napomena 3.2 Ostali rubni uvjeti koje smo spomenuli (3.4) i (3.5) vode također na linearni sustav sa strogo dijagonalno dominantnom matricom, pa zaključujemo da i za njih također imamo jedinstvenost pripadnog kubičnog splajna.

Na sljedećem primjeru proučimo glavne korake konstrukcije prirodnog kubičnog splajna.

Primjer 3.4 Za funkciju $f(x) = x\cos(\pi x)$ odredimo prirodni kubični splajn ako je zadana mreža

$$\Delta = \{x_k = k/3 \colon 0 \leq k \leq 3\}.$$

Diskretni podaci zadani su tablicom

x_i	0	$1/3$	$2/3$	1
f_i	0	$1/6$	$-1/3$	-1

U skladu sa gornjim razmatranjima, kubični splajn za ovaj konkretni primjer na svakom podintervalu glasi

$$s_i(x) = \frac{\gamma_i}{6h}(x_{i+1} - x)^3 + \frac{\gamma_{i+1}}{6h}(x - x_i)^3 + C(x - x_i) + D(x_{i+1} - x),$$

gdje je $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2$, te pri čemu su C, $D \in \mathbb{R}$, te ovise o promatranom podintervalu. Dakle, konstrukcija pripadnog kubičnog splajna svodi se na rješavanje sljedećeg linearnog sustava

$$\frac{h}{6}\gamma_{i-1} + \frac{2h}{3}\gamma_i + \frac{h}{6}\gamma_{i+1} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h}, \quad i = 1, 2,$$

pri čemu smo sa h označili udaljenost točaka zadane ekvidistantne mreže. Prirodni rubni uvjeti glase $\gamma_0 = \gamma_3 = 0$, čime dobivamo linearni sustav

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_i \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 \\ -9 \end{bmatrix}$$

čije rješenje je $\gamma_1 = -9$, $\gamma_2 = 0$. Sada preostaje na svakom podintervalu odrediti pripadne koeficijente C i D. Tako na primjer, za $i = 0$ imamo

$$s_0(x) = -\frac{9}{2}x^3 + Cx + D\big(\frac{1}{3} - x\big).$$

Iz jednakosti

$$\begin{aligned} D &= \frac{y_0}{h} - \frac{\gamma_0}{6}h = 0, \\ C &= \frac{y_1}{h} - \frac{\gamma_1}{6}h = 1 \end{aligned}$$

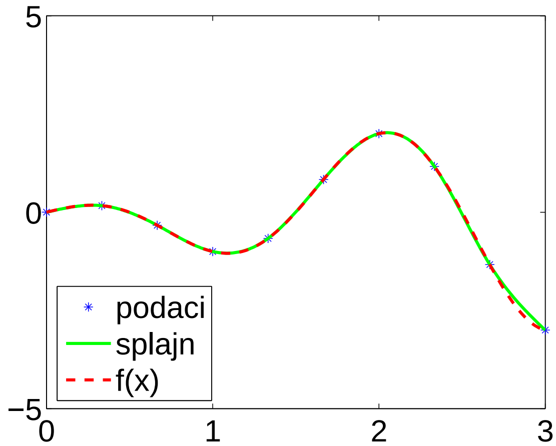
slijedi

$$s_0(x) = -\frac{9}{2}x^3 + x, \quad x \in [0, \frac{1}{3}].$$

Slično se odrede $s_1(x)$ za $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, te $s_2(x)$ za $x \in [\frac{2}{3}, 1]$. Konačno, traženi prirodni kubični splajn je

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{9}{2}x^3 + x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{9}{2}x^3 - 9x^2 + 4x - \frac{1}{3}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -2x + 1, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Prirodni kubični splajn iz primjera 3.4 prikazan je na slici 3.3.



Slika 3.3: Prirodni kubični splajn za funkciju $f(x) = x\cos(\pi x)$

Spomenimo nakraju i ocjene greške interpolacije kubnim splajnovima. Pokazuje se da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.2 *Neka je zadana funkcija $f \in C^4(a,b)$ takva da vrijedi $f''(a) = f''(b) = 0$. Nadalje neka je zadana mreža (3.1) te neka je $s \in S_{\Delta,3}$ interpolirajući kubični splajn koji zadovoljava prirodne rubne uvjete (3.6). Tada vrijede sljedeće ocjene greške:*

$$\|s(x) - f(x)\|_\infty \leq c_0\|f^{(4)}\|_\infty h^4, \tag{3.14}$$

$$\|s'(x) - f'(x)\|_\infty \leq c_1\|f^{(4)}\|_\infty h^3, \tag{3.15}$$

$$\|s''(x) - f''(x)\|_\infty \leq c_2\|f^{(4)}\|_\infty h^2, \tag{3.16}$$

$$\|s'''(x) - f'''(x)\|_\infty \leq c_3\|f^{(4)}\|_\infty h, \tag{3.17}$$

pri čemu je $h = \max_{i=0,\ldots,n-1}(x_{i+1} - x_i)$, dok su konstante c_i, $i = 0, \ldots, 3$ neovisne o h.

Konačno, naglasimo još jednom prednosti splajn interpolacije u odnosu na standardnu polinomijalnu interpolaciju. Vidjeli smo da kod polinomijalne interpolacije povećanje broja točaka interpolacijske mreže (odnosno smanjenje udaljenosti između čvorova mreže) nužno zahtijeva povećanje stupnja interpolacijskog polinoma što dovodi do jakih oscilacija, odnosno do loše aproksimacije na rubovima segmenta. S druge strane, vidjeli smo da kod splajn interpolacije pripadni h možemo smanjiti, a da pritom i dalje na određenom podintervalu radimo sa polinomima željenog reda.

Minimalno svojstvo prirodnog kubičnog splajna. Vidjeli smo da kubični splajnovi imaju neprekidne druge derivacije te vizualno odgovaraju našoj predodžbi glatke funkcije. S druge strane, pokazuje se da kubični splajnovi imaju, u određenom smislu, minimalnu zakrivljenost. Naime, zakrivljenost krivulje $y = f(x)$ dana je izrazom

$$\kappa(x) = \frac{|f''|}{(1+|f'|^2)^{-3/2}},$$

vidi na primjer []. Ukoliko pretpostavimo da su oscilacije f' zanemarive, vidimo da veličima $|f''(x)|$ *mjeri* zakrivljenost promatrane krivulje u točki x. Štoviše, pokazuje se da vrijedi sljedeći rezultat.

Propozicija 3.3 *Neka je s prirodni kubični splajn koji interpolira podatke* (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$, *pri čemu je*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Nadalje, neka je f proizvoljna interpolirajuća funkcija klase $C^2(a,b)$ takva da vrijedi $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$\int_a^b |s''(x)|^2 dx \leq \int_a^b |f''(x)|^2 dx. \tag{3.18}$$

Napomena 3.3 Sa $L^2(a,b)$ označimo skup svih funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ takvih da vrijedi

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Gornjim izrazom definirana je norma funkcije f na sljedeći način

$$\|f\|_2 = \Big(|f(x)|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Nadalje, za $f, g \in L^2(a,b)$ dobro je definiran skalarni produkt

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Dokaz Propozicije 3.3. Pokažimo da vrijedi

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2 \geq 0,$$

odakle slijedi tvrdnja propozicije. Imamo

$$\|f'' - s''\|_2^2 = \int_a^b |f''(x) - s''(x)|^2 dx = \|f''\|_2^2 + \|s''\|_2^2 - 2\int_a^b f''(x)s''(x)dx \tag{3.19}$$

$$= \|f''\|_2^2 - \|s''\|_2^2 - 2\int_a^b (f''(x) - s''(x))s''(x)dx. \tag{3.20}$$

Integral u gornjem izrazu izračunamo na svakom podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$ i primijenimo parcijalnu integraciju. Dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f''(x)-s''(x))s''(x)dx &= (f'(x)-s'(x))s''(x)|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i}(f'(x)-s'(x))s'''(x)dx \\ &= (f(x)-s(x))s'''(x)|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-s(x))s^{(iv)}(x)dx,\end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned}\int_a^b(f''(x)-s''(x))s''(x)dx &= \sum_{i=1}^n\Big[(f'(x_i)-s'(x_i))s''(x_i)-(f'(x_{i-1})-s'(x_{i-1}))s''(x_{i-1})\Big] \\ &= (f'(b)-s'(b))s''(b)-(f'(a)-s'(a))s''(a)=0,\end{aligned}$$

čime je propozicija dokazana. $\square$.

3.3 Zadaci

1. Kompozitnom trapeznom formulom aproksimirajte vrijedost integrala

$$\int_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

tako da greška bude manja od 10^{-3} Izračunajte stvarnu grešku!

2. Koliko podintervala je potrebno da bi se integral

$$\int_0^{\pi} e^x\cos(x)dx$$

aproksimirao kompozitnom pravokutnom formulom s točnošću manjom od 10^{-4}.

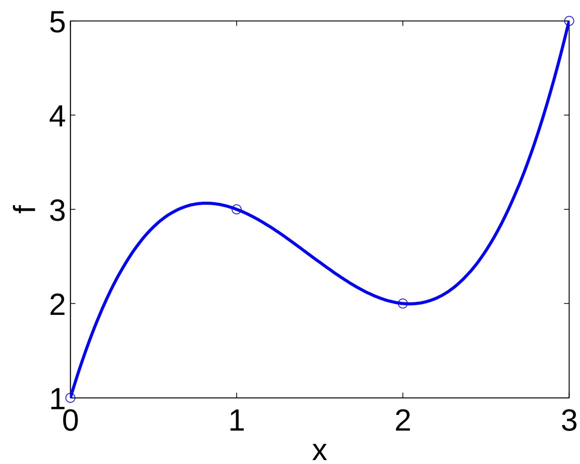
3. Neka je na segmentu $[a,b]=[0,3]$ zadana mreža $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$ i $x_3=3$, te neka su pripadni podaci $f_0=1$, $f_1=3$, $f_2=2$ i $f_3=5$. Pokažite da je interpolacijski prirodni kubični splajn dan formulama

$$s(x)=\begin{cases}1+\frac{46}{15}x-\frac{16}{15}x^3, & 0\le x\le 1\\ 3-\frac{2}{15}(x-1)-\frac{16}{5}(x-1)^2+\frac{7}{3}(x-1)^3, & 1\le x\le 2\\ 2+\frac{7}{15}(x-2)-\frac{19}{5}(x-2)^2-\frac{19}{15}(x-2)^3, & 2\le x\le 3.\end{cases} \tag{3.21}$$

Dobiveni kubični splajn prikazan je na slici (3.4).

4. Zadana je mreža $\Delta=\{0,1,2\}$. Odredite jesu li sljedeće funkcije splajnovi i ako jesu kojeg su reda?

(a) $s(x)=\begin{cases}x^3+2x+1, & 0\le x<1\\ x^2+2, & 1\le x\le 2\end{cases}$



Slika 3.4: Prirodni kubični splajn kroz točke $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,5)$.

(b) $s(x) = |x-1|^3, \quad x \in [0,2]$

(c) $s(x) = \begin{cases} 0.5x^2 + x + 1, & 0 \le x < 1 \\ -4.5x^2 + 11x - 4, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

5. Neka je zadana mreža $\Delta = \{-1, 0, 1, 2\}$, te funkcija

$$s(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x^2 - 3x + 1, & -1 \le x < 0, \\ p(x), & 0 \le x < 1, \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Postoji li polinom $p(x)$ takav da je funkcija $s(x)$ kubični splajn? Ako postoji, odredite ga!

4

Dodatak

4.1 Neki važni pojmovi iz linearne algebre i matematičke analize

4.1.1 "Veliko" O i "malo" o notacija

Često je potrebno uspoređivati asimptotsko ponašanje zadanih realnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ kada varijabla x teži ka x_0. U tu svrhu koristimo notaciju "veliko" i "malo" O[1] s kojom smo se upoznali u Matematici 2. Ponovimo ovdje, radi potpunosti, definiciju spomenutih simbola O i o. Neka su $f,\ g\colon X \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ te x_0 točka gomilišta skupa X (x_0 može biti jednako ∞). Simbole $\mathcal{O}(\cdot)$ i $o(\cdot)$ definiramo na sljedeći način:

$$f = \mathcal{O}(g) \quad (x \to x_0) \Longleftrightarrow \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty \tag{4.1}$$

$$f = o(g) \quad (x \to x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0. \tag{4.2}$$

Uočimo najprije da je izraz (4.1) ekvivalentan tvrdnji da postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C$, za svako x iz neke *okoline* točke x_0. Nadalje, važno je naglasiti da se znak jednakosti u izrazima (4.1), (4.2) koristi u simboličkom smislu. Tako naprimjer iz tvrdnji $f_1(x) = o(g(x))$ i $f_2(x) = o(g(x))$ ne slijedi nužno da je $f_1 = f_2$. Ono što u tom slučaju možemo zaključiti je naprimjer da vrijedi $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$, odnosno $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.

Primjer 4.1 Uvjerite se da vrijede sljedeće tvrdnje:

- $f(x) = 7x + 6x^2$, $g(x) = x^2$. Vrijedi: $f = \mathcal{O}(g)$, $x \to 1$

[1] Landauova notacija

- $f(x) = x\ln(1+x)$, $g(x) = x$. Vrijedi: $f = o(g)$, $x \to 0+$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, $x \to 0$
- $\ln(x) = o(x^\alpha)$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$
- $\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + \mathrm{O}(h^2)$, $h \to 0$ $(0 < h < 1)$
- $2n^4 + 3n^3 + 5n^2 + n = \mathrm{O}(n^4)$, $n \to \infty$

4.1.2 Vektorski prostori

Jedan od najvažnijih koncepata u matematici je pojam vekorskog prostora. Ugrubo rečeno, vektorski prostor je svaki skup u kome znamo zbrajati elemente i množiti ih s realnim, odnosno kompleksnim brojevima. Pri tome zbrajanje i množenje zadovoljava uobičajena pravila zbrajanja i množenja realnih brojeva i ono nas ne vodi izvan promatranog skupa. Preciznije, pogledajmo sljedeću definiciju.

Definicija 4.1 Za neprazni skup X kažemo da je vektorski prostor ukoliko su zadovoljeni sljedeći aksiomi.

A1 Suma svaka dva elementa $x, y \in X$ jedinstveno određuje element $z = x+y \in X$ pri čemu vrijede sljedeća pravila

(i) $x + y = y + x$ (komutativnost)

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost)

(iii) Postoji element $0 \in X$ takav da vrijedi $x + 0 = x$, $\forall x \in X$.

(iv) Za svaki element $x \in X$ postoji element $-x$ takav da vrijedi $x+(-x) = 0$.

A2 Za svaki realan broj $\alpha \in \mathbb{R}$ te za svaki element $x \in X$ jedinstveno je određen element $\alpha x \in X$ tako da vrijedi

(i) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(ii) $1x = x$

A3 Zbrajanje i množenje definirano aksiomima $A1$ i $A2$ zadovoljava zakone distributivnosti:

(i) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$

4.1.3 Neprekidnost, ograničenost, integrabilnost

4.1.4 Teoremi srednje vrijednosti

Propozicija 4.1 *Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na segmentu $[a,b]$, te neka je $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Tada vrijedi*

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx,$$

gdje je $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$.

Teorem 4.1 Integralni teorem srednje vrijednosti *Neka su funkcije f i g integrabilne na segmentu $[a,b]$ i neka je $m = \inf f(x)$ i $M = \sup f(x)$. Nadalje, neka je $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$ takav da vrijedi*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c \int_a^b g(x)dx. \tag{4.3}$$

Posebno, ako je g neprekidna na $[a,b]$ onda postoji $\tau \in [a,b]$ takav da vrijedi

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\tau) \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz.