Numerička matematika

6.predavanje

Primjer 1.

U donjoj tablici su, za svaku geografsku širinu dani rezultati mjerenja odstupanja temperature tla od odgovarajuće srednje vrijednosti.

geogr. širina	65	55	45	35	25	15	5
δ_K	-3.1	-3.22	-3.3	-3.32	-3.17	-3.07	-3.02
geogr. širina	-5	-15	-25	-35	-45	-55	
δ_K	-3.02	-3.12	-3.2	-3.35	-3.37	-3.25	

Zadatak: naći aproksimaciju odstupanja temperature tla na proizvoljnoj geografskoj širini

interpolacija aproksimacija ekstrapolacija

Primjer 1.

U donjoj tablici su, za svaku geografsku širinu dani rezultati mjerenja odstupanja temperature tla od odgovarajuće srednje vrijednosti.

geogr. širina	65	55	45	35	25	15	5
δ_K	-3.1	-3.22	-3.3	-3.32	-3.17	-3.07	-3.02
geogr. širina	-5	-15	-25	-35	-45	-55	
δ_K	-3.02	-3.12	-3.2	-3.35	-3.37	-3.25	

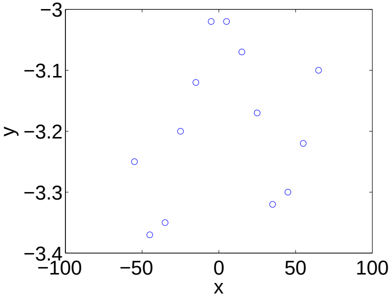
Zadatak: naći aproksimaciju odstupanja temperature tla na proizvoljnoj geografskoj širini

interpolacija aproksimacija ekstrapolacija

Interpolacija funkcija

- osnovna ideja i primjeri
- interpolacijske funkcije: polinomi, trigonometrijske funkcije, racionalne funkcije

```
x = [-55:10:65];
y = [-3.25 -3.37 -3.35 -3.2 -3.12 -3.02 -3.02...
    -3.07 -3.17 -3.32 -3.3 -3.22 -3.1];
plot(x,y,'o');
```



Polinomijalna interpolacija

- $\mathcal{P}_n = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \text{stupanj od } p \leq n,\ n \in \mathbb{N}\}$, skup svih realnih polinoma čiji je stupanj najviše n
- $\mathcal{P}_n$ je vektorski prostor dimenzije $n+1$
- $p \in \mathcal{P}_n$, $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Interpolacijska zadaća

Neka su zadani međusobno različiti čvorovi interpolacije x_i, te u njima izmjerene pripadne vrijednosti f_i, $i = 0, \ldots, n$. Za zadane podatke:

x_0	x_1	$\cdots$	x_n
f_0	f_1	$\cdots$	f_n

treba naći polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \tag{1}$$

gdje je $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, koji zadovoljava uvjete interpolacije

$$p_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Teorem. Interpolacijska zadaća (1)-(2) ima jedinstveno rješenje.
Dokaz. predavanja

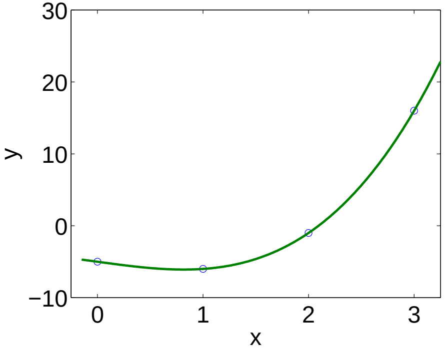
Primjer 2.

Za zadane podatke odredimo interpolacijski polinom.

```
>> x = 0:3;
>> y = [-5 -6 -1 16];
>> disp([x; y])
     0     1     2     3
    -5    -6    -1    16
```

$$p_3(x) = x^3 - 2x - 5\ ;$$

```
a = [ 1 0 -2 -5];
z = -0.15:0.01:3.25;
p = polyval(a,z);
plot(x,y,'o',z,p)
```



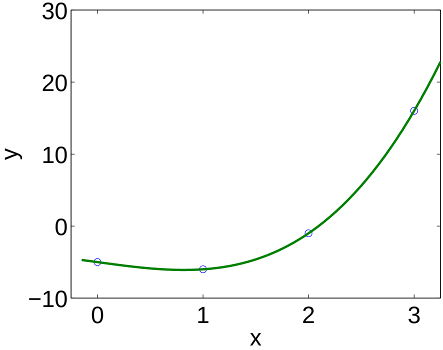
Primjer 2.

Za zadane podatke odredimo interpolacijski polinom.

```
>> x = 0:3;
>> y = [-5 -6 -1 16];
>> disp([x; y])
     0     1     2     3
    -5    -6    -1    16
```

$$p_3(x) = x^3 - 2x - 5 \;;$$

```
a = [ 1 0 -2 -5];
z = -0.15:0.01:3.25;
p = polyval(a,z);
plot(x,y,'o',z,p)
```



Hornerov algoritam

$$p_n(x) = \Big(\cdots (((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-3})x + \cdots + a_1 \Big) x + a_0$$

- Proučite Hornerov algoritam dan funkcijom `horner`.

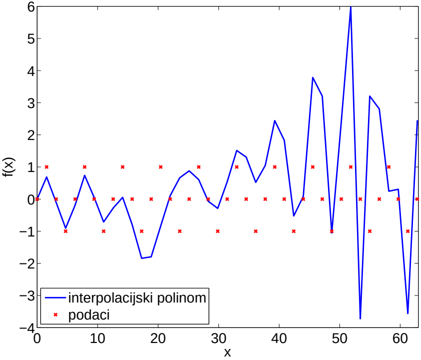
```
function y = horner(a,x)
% Ulaz: vektor a koeficijenata polinoma p_n
%       vektor x duljine n
% Izlaz: vektor y sa vrijednostima polinoma p_n
%        u cvorovima x(1),...,x(n).
k = length(a)-1; n = length(x);
y(1:n,1) = a(k+1);
for j = k:-1:1
    y = a(j) + y.*x;
end
```

- Usporedite funkciju texttthorner s Matlabovom funkcijom `polyval`.

Povećanje broja čvorova: *bolja* interpolacija?

Primjer 3. Interpolirajte funkciju $f(x) = \sin(x)$ na intervalu $[0, 20\pi]$ na ekvidistantnoj mreži koja ima 41 čvorova ($n = 40$).

```
% InterpSin.m
n = 40;
x = linspace(0,20*pi,n+1)';
y = sin(x);
V = zeros(n+1);
for i = 1:n+1
    V(:,i) = x.^(i-1);
end
a = V\y;
f = horner(a,x);
plot(x,f,'b-',x,y,'rx');
```



Slika: Interpolacija funkcije $\sin(x)$ na $[0, 20\pi]$

```
>> InterpSin
Warning: Matrix is close to singular or badly scaled.
         Results may be inaccurate. RCOND = 1.857867e-75.
> In InterpSin at 8
```

Što se dogodilo?

- interpoland ne prolazi kroz čvorove interpolacije
- koef. interp.polinoma su neprecizno izračunati
- **uzrok problema:** loša uvjetovanost matrice V

Sumnja: loša način rješavanja interpolacijskog problema

Želja: izbjeći rješavanje sustava sa Vandermondeovom matricom

Ideja: odabrati neku drugu bazu prostora $\mathcal{P}_n$

Kako riješiti problem?

- standardna baza prostora $\mathcal{P}_n$: $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
- odabir druge baze prostora $\mathcal{P}_n$: $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$
- $p_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x)$
- interpolacijski uvjeti vode na rješavanje sljedećeg linearnog sustava

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \cdots & \varphi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

Lagrangeov interpolacijski polinom

- želimo: $\varphi_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$
- $\varphi_j(x) = \displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$
- $\{\varphi_j(x), j = 0, \ldots, n\}$ Lagrangeova baza prostora $\mathcal{P}_n$
- $p_n(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} f_j \varphi_j(x)$ Lagrangeov I.P.
- pokažite da Lagrangeov I.P. zadovoljava interpolacijski problem (1)-(2).

Primjer 4. Pokažite da vrijede sljedeće formule:

- $n = 0$, $p_0(x) = f_0$
- $n = 1$, $p_1(x) = f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$
- $n = 2$,
  $p_2(x) = f_0 + \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \dfrac{1}{x_2 - x_0}\left(\dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)(x - x_1)$

- Napišite interpolacijski polinom za podatke iz primjera 2 u Lagrangeovom obliku.

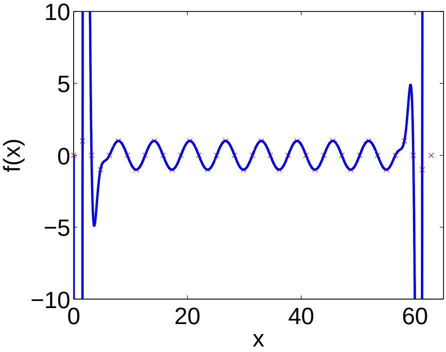
  Rj. $p_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-6)}(-5) + \frac{x(x-2)(x-3)}{2}(-6) + \frac{x(x-1)(x-3)}{(-2)}(-1) + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}16.$

- Proučite funkciju `polyinterp`.

```
function v = polyinterp(x,y,u)
n = length(x);
v = zeros(size(u));
for k = 1:n
    w = ones(size(u));
    for j = [1:k-1 k+1:n]
        w = (u - x(j))./(x(k)-x(j)).*w;
    end
    v = v + w*y(k);
end
```

Rješenje Primjera 3. pomoću polyinterp

```
n = 40;
x = linspace(0,20*pi,n+1)
y = sin(x);
xu = [0:0.01:20*pi];
v = polyinterp(x,y,xu)
plot(x,y,'rx',xu,v,'b-')
```



Diskusija

- interpolacijski polinom prolazi kroz zadane točke, koeficijenti dobro izračunati
- aproksimacija na rubu je izuzetno loša

Zaključak

- prijelazom na Lagrangeovu bazu riješili smo problem preciznog računanja koeficijenata interpolacijskog polinoma
- koliko dobro interpolacijski polinom visokog stupnja aproksimira funkciju?

$\Longrightarrow$

loša aproksimacija interpolacijskim polinomom na rubnim segmentima je posljedica oscilatornog svojstva polinoma višeg stupnja.

Greška interpolacije

- $f \in C^{n+1}([a,b])$ zadana funkcija
- $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$, $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$ čvorovi interpolacije
- $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinom koji interpolira funkciju f u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$

Tada za svako $x \in [a,b]$ postoji točka $\xi_x \in (a,b)$ takva da je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}. \tag{4}$$

$$w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$

Iz ocjene (4) direktno slijedi

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |w_{n+1}(x)| \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Kako ocijeniti $\max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)|$?

- gruba ocjena: $\displaystyle\max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \le (b-a)^{n+1}$
- ekvidistantna mreža: $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = (b-a)/n$

$$\max_{x\in[a,b]} |w_{n+1}(x)| \le n! h^{n+1}, \quad x \in [a,b]$$

$\Longrightarrow$

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{b-a} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)| h^{n+2} \tag{5}$$

Ocjena greške u sup-normi

- supremum norma funkcije $f \in C[a,b]$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

- ocjena greške interpolacije

$$\|f - p_n\|_\infty \le \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \|w_{n+1}\|_\infty$$

Da li proces interpolacije konvergira?

$$\|f - p_n\|_\infty \to 0 \text{ kada } n \to \infty?$$

Uvjeti na rast funkcije f?

Konvergencija procesa interpolacije

$$\text{Npr. } \|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f^{(n)}(x)| \leq K^n$$

$$\Longrightarrow \|f - p_n\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{K^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty,$$

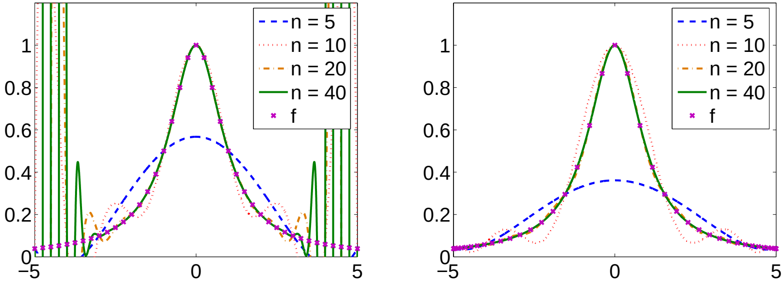
- iz ocjene (5) općenito ne možemo zaključiti da greška interpolacije teži prema nuli kada $n \to \infty$, bez obzira što član $h^{n+2} \to 0$
- maksimum $(n+1)$-ve derivacije funkcije f može rasti brže!
- moguće je naći funkcije f za koje vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[a,b]} |f(x) - p_n(x)| = \infty.$$

Rungeov primjer

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

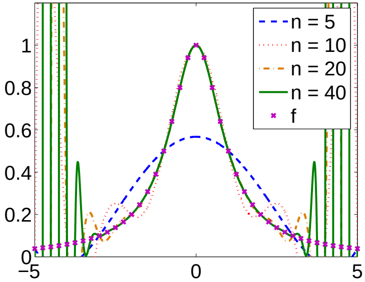
- ekvidistantne točke
- Čebiševljeve točke



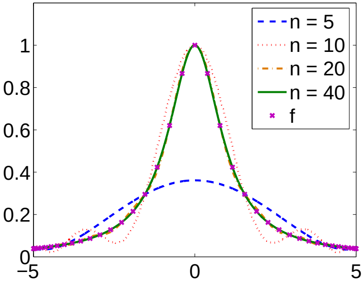
Rungeov primjer

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [-5, 5].$$

- ekvidistantne točke



- Čebiševljeve točke



Odabir čvorova interpolacije

Ideja: x_0, x_1, ..., x_n treba odabrati td

$$\|w_{n+1}\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)| \to \min .$$

Rješenje:
Nultočke (n+1)-vog Čebiševljevog polinoma minimiziraju $\|w_{n+1}\|_\infty$.

Čebiševljevi polinomi

- $T_0(x) = 1$ i $T_1(x) = x$. Tada je n-ti Čebiševljev polinom $T_n(x)$ definiran rekurzijom

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

- $T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \ldots$
- za $x \in [-1, 1]$ Čebiševljevi polinomi imaju sljedeći prikaz:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \geq 0.$$

Neka svojstva Čebiševljevih polinoma

- $|T_n(x)| \leq 1$ za $x \in [-1, 1]$
- $T_n(\cos \frac{j\pi}{n}) = (-1)^j$ za $j = 0, 1, \ldots, n$
- $T_n(\cos(\frac{2j+1}{2n}\pi)) = 0$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$
- vodeći koeficijent polinoma T_n jednak 2^{n-1} $(T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots)$
- normirani Čebiševljevi polinomi $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$
- vrijedi nejednakost

$$|\tilde{T}_n(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{za} \quad x \in [-1, 1].$$

Još jedno važno svojstvo Čebiševljevih polinoma

Neka je $p(x)$ polinom n-tog stupnja s jediničnim koeficijentom uz najvišu potenciju. Vrijedi:

$$\|p\|_\infty = \max_{-1 \leq x \leq 1} |p(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\Longrightarrow \|p\|_\infty \geq \|\tilde{T}_n(x)\|_\infty$$

Primjena na interpolaciju funkcija na segmentu $[-1, 1]$

- za proizvoljan izbor interpolacijskih točaka vrijedi

$$|w_{n+1}(x)| = \prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \geq \frac{1}{2^n}.$$

- jednakost imamo ako za interpolacijske točke uzmemo nultočke od T_{n+1}:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right), \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Čebiševljeve točke.

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{-1\leq x\leq 1} |f^{(n+1)}(x)| \to 0, \quad n \to \infty$$

$[a, b] \to [-1, 1]$

- preslikamo $[a, b]$ na $[-1, 1]$ pa interpoliramo u Čebiševljevim točkama na $[-1, 1]$
- Čebiševljeve točke na $[a, b]$

$$x_j = a + \frac{b-a}{2}\left(\cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right) + 1\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, n$$

Ocjena greške interpolacije:

$$\max_{a \le x \le b} |f(x) - p_n(x)| \le \frac{1}{2^n (n+1)!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} \max_{a \le x \le b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Zaključak: Kod interpolacije polinomom susreli smo se sa problemima:

- biranje interpolacijskih točaka
- oscilacije na rubovima

Rješenje: interpolacija po dijelovima!