SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA
ZAVOD ZA PRIMIJENJENU MATEMATIKU

NUMERIČKA MATEMATIKA

Zadaci za vježbu

Zagreb, 2003.

Sadržaj

1 Interpolacija i aproksimacija funkcija

1.1 Interpolacijski polinom

1. Jednadžba $x^3-15x+4=0$ ima korijen u okolini 0.3. Koristeći interpolaciju odredite taj korijen s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

2. Jednadžba $x^3+12x-1=0$ ima korijen u okolini 0.1. Koristeći interpolaciju odredite taj korijen s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

3. Dana je tablica vrijednosti vjerojatnosnog integrala

$$y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

x	0.45	0.46	0.47	0.48	0.49	0.50
y	0.4754818	0.4846555	0.4937452	0.5027498	0.5116683	0.5204999

Za koju vrijednost od x je vrijednost integrala $\frac{1}{2}$?

4. Dana je tablica vrijednosti vjerojatnosnog integrala $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$

x	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
y	0.9103	0.9340	0.9523	0.9661	0.9763	0.9838

Koristeći dane podatke izračunajte vrijednost integrala za $x = 1.43$ i ocijenite grešku aproksimacije.

5. Dana je tablica vrijednosti funkcije

$$y = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt,$$

x	0.02	0.03	0.04	0.05
y	3.3547	2.9591	2.6813	2.4679

Izračunajte y za $x = 0.0378$. Ocijenite grešku aproksimacije. Zašto je procijenjena greška velika?

6. Koristeći vrijednosti funkcije

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

u točkama x_1 i x_2 $\left(0 < x_1 < \frac{1}{2}, x_2 > 1\right)$ konstruiran je Lagrangeov interpolacijski polinom prvog stupnja $P_1(x)$. Dokažite da za grešku aproksimacije vrijedi ocjena

$$|f(x) - P_1(x)| < \frac{(x_2 - x_1)^2}{2\sqrt{2\pi e}}.$$

7. Zadana je tablica vrijednosti polinoma trećeg stupnja

x	-1	0	2	3	5	6
$f(x)$	9	3	-3	-15	-177	-327

Poznato je da u njoj postoji jedna greška. Pronađite i ispravite grešku.

8. Zadana je tablica vrijednosti polinoma trećeg stupnja

x	-1	0	2	3	5	6
$f(x)$	-16	-1	113	381	1754	3029

Poznato je da u njoj postoji jedna greška. Pronađite i ispravite grešku.

9. Dana je tablica vrijednosti vjerojatnosnog integrala $y = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt$

x	1.3	1.4	1.5	1.6
y	0.9340	0.9523	0.9661	0.9763

Koristeći dane podatke izračunajte vrijednost integrala za $x = 1.45$ i ocijenite grešku aproksimacije.

1.2 Interpolacijski splajn

1. Provjerite je li funkcija

$$s(x) = \begin{cases} 2(x+1) + (x+1)^3, & x \in [-1, 0] \\ 3 + 5x + 3x^2, & x \in [0, 1] \\ 11 + 11(x-1) + 3(x-1)^2 - (x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

kubični splajn na intervalu $[-1, 2]$.

2. Postoje li a i b takvi da funkcija

$$s(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \in (-\infty, 2] \\ (x-2)^3 - (x-3)^2, & x \in [2, 3] \\ (x-3)^3 + b(x-2)^2, & x \in [3, \infty) \end{cases}$$

bude kubični splajn?

3. Je li funkcija
$$s(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & x \in [-1, \frac{1}{2}] \\ 3x^3 - 1, & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$
kubični splajn?

4. Odredite parametre a, b, c i d tako da funkcija
$$s(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x \in (-\infty, -3] \\ a + bx + cx^2 + dx^3, & x \in [-3, 4] \\ 157 - 32x, & x \in [4, \infty) \end{cases}$$
bude kubični splajn.

5. Provjerite je li funkcija
$$s(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \in [0, 1] \\ 2(x-1)^3, & x \in [1, 2] \end{cases}$$
kubični splajn na intervalu $[0, 2]$.

1.3 Polinom najmanjih kvadrata

1. Zadane su točke $(1, 5.2)$, $(2, 4.3)$, $(3, 3.5)$, $(4, 3.2)$ i funkcija oblika $y = a + \frac{b}{x}$ koja predstavlja najbolju aproksimaciju tih čvorova u smislu metode najmanjih kvadrata. Odredite vrijednost od a i b.

2. Za funkciju zadanu tablicom polinom najmanjih kvadrata prvog stupnja $x = q(y)$ za kojeg je
$$\sum_{i=0}^{4} (q(y_i) - x_i)^2$$
minimalna ima jednadžbu $20x - 27y + 21 = 0$. Izračunajte vrijednost od a i b ako je tablica dana s

x_i	0	1	a	b	8
y_i	0	2	3	4	6

3. Zadane su točke $T_0(1, 1)$, $T_1(2, 3)$, $T_2(4, 2)$ i $T_3(6, 4)$. Nađite točku u kojoj se pravac najmanjih kvadrata $p_1(x)$ za kojeg je $\sum_{i=0}^{3} (p_1(x_i) - y_i)^2 \longrightarrow \min$, podudara s pravcem najmanjih kvadrata $q_1(y)$ za kojeg je $\sum_{i=0}^{3} (q_1(y_i) - x_i)^2 \longrightarrow \min$.

4. Odredite kvadratičnu funkciju za koju je izraz
$$\sum_{k=1}^{5} |f(2k) - k^2|^2$$
minimalan.

5. Zadane su točke $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3.5)$, $(4,3.2)$ i funkcija oblika $y = a + \frac{b}{x}$ koja predstavlja najbolju aproksimaciju tih čvorova u smislu metode najmanjih kvadrata. Odredite vrijednost od a i b.

6. Eksperimenti u nekom periodičkom procesu dali su slijedeće rezultate

t_j	0	50	100	150	200	250	300	350
$f(t_j)$	0.754	1.762	2.041	1.412	0.303	-0.484	-0.380	0.520

(vrijednosti t_j su dane u stupnjevima). Odredite parametre a i b u modelu $\Phi(t) = a + b\sin t$ korištenjem metode najmanjih kvadrata.

7. Neka su rezultati mjerenja veličina x i y dani u tablici

x	4.48	4.98	5.60	6.11	6.62	7.42
y	4.15	1.95	1.31	1.03	0.74	0.63

Odredite parametre a i b u modelu $y = \frac{1}{a+bx}$ korištenjem metode najmanjih kvadrata.

8. Zadane su točke $T_0(-1,1)$, $T_1(2,4)$, $T_2(4,5)$ i $T_3(6,4)$. Nađite točku u kojoj se pravac najmanjih kvadrata $p_1(x)$ za kojeg je $\sum_{i=0}^{3}(p_1(x_i) - y_i)^2 \longrightarrow \min$, podudara s pravcem najmanjih kvadrata $q_1(y)$ za kojeg je $\sum_{i=0}^{3}(q_1(y_i) - x_i)^2 \longrightarrow \min$.

9. Zadane su točke $(1,5)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(4,4)$ i funkcija oblika $y = ax^2 + \frac{b}{x}$ koja predstavlja najbolju aproksimaciju tih čvorova u smislu metode najmanjih kvadrata. Odredite vrijednost od a i b.

10. Za funkciju $y = f(x)$ zadanu tablicom, pravac najmanjih kvadrata ima jednadžbu $y = 3x + 4$. Izračunajte vrijednosti od a i b ako je tablica dana s

x_i	0	1	2	4	7	9
$f(x_i)$	0	4	3	a	30	b

11. Funkciju $f(x) = \frac{10}{x^2+10}$ aproksimirajte na segmentu $[-1,1]$
a) interpolacijskim polinomom u točkama -1, $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1,
b) polinomom najmanjih kvadrata drugog stupnja.

12. Za funkciju zadanu tablicom polinom najmanjih kvadrata prvog stupnja $x = q(y)$ za kojeg je $\sum_{i=0}^{4}(q(y_i) - x_i)^2$ minimalna ima jednadžbu $10x - 17y + 11 = 0$. Izračunajte vrijednost od a i b ako je tablica dana s

x_i	0	1	a	b	8
y_i	0	2	3	4	6

13. Za funkciju zadanu tablicom polinom najmanjih kvadrata prvog stupnja $x = q(y)$ za kojeg je
$$\sum_{i=0}^{4}(q(y_i) - x_i)^2$$
minimalna ima jednadžbu $22x - 28y + 21 = 0$. Izračunajte vrijednost od a i b ako je tablica dana s

x_i	0	1	a	b	8
y_i	0	2	3	4	6

.

14. Točkama $T_0(-1, 0)$, $T_1(0, 1)$, $T_2(1, -1)$, $T_3(2, 3)$ povucite parabolu najmanjih kvadrata $x = p_2(y)$ za koju je $\sum_{i=0}^{3}(p_2(y_i) - x_i)^2 \longrightarrow \min$.

15. Funkciju $f(x) = x^4$ aproksimirajte polinomom drugog stupnja na intervalu $[0, 2]$
a) metodom najmanjih kvadrata,
b) Lagrangeovim polinomom.

16. Funkciju f definiranu s
$$f(x) = \frac{451}{10x^2 + 1}$$
aproksimirajte na segmentu [-1,2]
a) interpolacijskim polinomom u točkama $-1, 0, 1, 2$,
b) polinomom najmanjih kvadrata prvog stupnja.

2 Numeričko integriranje

1. Primjenom trapezne formule izračunajte s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ integral
$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

2. Primjenom Simpsonove formule izračunajte s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ integral
$$\int_1^2 \frac{dx}{1 + x}.$$

3. Primjenom Simpsonove formule izračunajte
$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x dx}$$
s točnošću 10^{-2}.

4. Primjenom Simpsonove formule izračunajte integral
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$$
s točnošću 10^{-3}. Prethodno iz ocjene pogreške odredite korak h.

5. Do na točnost $\varepsilon = 10^{-4}$ izračunajte duljinu luka elipse $x^2 + y^2/4 = 1$

6. Trapeznom formulom izračunajte s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ integral
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+x} dx.$$

7. Izračunajte
$$\int_0^1 e^{-e^{-x}} dx$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

8. S točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ izračunajte
$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx.$$

9. S točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ izračunajte površinu izmedju krivulja $y = \cos x$ i $y = e^{-x}$ $(0 \le x < \pi/2)$.

3 Sustavi linearnih jednadžbi

3.1 Direktne metode

1. Gaussovom metodom izračunajte inverznu matricu matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

2. Gaussovom metodom eliminacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je
$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
Može li se sustav riješiti metodom Choleskog? Obrazložite.

3. Gaussovom metodom eliminacije nađite rješenje sustava $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Može li se sustav riješiti metodom Choleskog? Obrazložite.

4. Metodom Choleskog riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

5. Metodom Choleskog riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & -4 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

6. Metodom Choleskog riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte $\|A\|_2$.

7. Metodom Choleskog riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

8. Metodom Choleskog riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

9. Nađite inverz simetrične pozitivno definitne matrice

$$R = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

10. Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 3 & 5 \\ -6 & 8 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & 4 & 11 \\ 5 & -9 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Izračunajte operatorsku normu $\|A\|_1$.

3.2 Iteracijske metode

1. Neka je $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$. Dokažite da je formulom

$$\|x\| = (\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} |x_i|^2)^{1/2}$$

definirana norma na R^n.

2. Skicirajte krivulju $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$. Je li za dvodimenzionalne realne vektore $x = (x_1, x_2)$ formulom

$$\|x\| = (|x_1|^{2/3} + |x_2|^{2/3})^{3/2}$$

zadana vektorska norma?

3. Pokažite da se sustav $Ax = b$ može riješiti Jacobijevom metodom, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite onu aproksimaciju za koju je greška manja od $\varepsilon = 0.005$. Izračunajte za tu aproksimaciju grešku u normama $\|.\|_1$ i $\|.\|_2$.

4. Dokažite da se Jacobijeva metoda ne može primijeniti na jednadžbe

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 10z & = & 59 \\ 2x & + & 8y & + & z & = & -4 \\ 20x & - & y & + & 2z & = & 74 \end{array}$$

u danom poretku. Promijenite poredak jednadžbi tako da Jacobijeva metoda daje konvergentno rješenje i nađite to rješenje.

5. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ -q & p \end{bmatrix}.$$

Odredite realne brojeve p i q tako da Jacobijeva metoda konvergira za sustav
a) $Ax = b$
b) $x = Ax + b$
uz proizvoljan izbor početne iteracije.

6. Pokažite da se sustav $Ax = b$ može riješiti Jacobijevom metodom, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 10 \\ 10 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   Nađite onu aproksimaciju za koju je greška manja od $\varepsilon = 0.005$. Izračunajte za tu aproksimaciju grešku u normama $\|.\|_1$ i $\|.\|_2$.

7. Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

   Za koje realne brojeve a će Gauss–Seidelova matoda za sustav $Ax = b$ konvergirati uz proizvoljan izbor početne iteracije?

8. Gauss-Seidelovom metodom riješite sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0.5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

   s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

9. Gauss-Seidelovom metodom riješite sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 9.9 & -1.5 & 2.6 \\ 0.4 & 13.6 & -4.2 \\ 0.7 & 0.4 & 7.1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2.1 \\ 3.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

   s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

10. Ispitajte konvergenciju Jacobijeve i Gauss–Seidelove metode primijenjene na sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. Pokažite da za sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -0.25 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.8 \\ 0.9 \end{bmatrix},$$

   Gauss-Seidelova metoda konvergira brže od Jacobijeve. Gauss-Siedelovom metodom izračunajte prve tri iteracije.

12. Dokažite konvergenciju Gauss–Seidelove metode za rješavanje sustava

$$\begin{array}{rcrcrcr} 11x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & = & 16 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & = & 1. \end{array}$$

Izračunajte prve četiri iteracije i ocijenite grešku metode.

13. Diskutirajte konvergenciju Jacobijeve i Gauss–Siedelove metode za rješavanje sustava $Ax = b$ ako je

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Linearni sustav $Ax = b$ ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Napišite matrice iteracije za pripadni Jacobijev i Gauss–Seidelov postupak. Pokažite da će obje metode konvergirati ili divergirati.

15. Usporedite brzine konvergencije Jacobijeve i Gauss–Seidelove primijenjene na sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & 0 \\ -0.4 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{bmatrix}.$$

16. Iterativnom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 20 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 30 & 3 \\ 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

17. Dokažite da se za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{4}x_3 & = & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & -\frac{3}{2} \end{array}$$

može primijeniti Gauss–Seidelov postupak. Uzimajući za $x^{(0)} = [1, 1.5, -1.5]$ izračunajte $x^{(2)}$. Odredite broj iteracija k tako da vrijedi ocjena

$$\|x^{(k)} - x\|_1 \leq 10^{-3} \|x^{(0)} - x\|_1$$

gdje je x točno rješenje sustava.

18. Gauss–Seidelovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 2.8 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & = & 7 \\ 2x_1 & - & 7x_2 & - & 10x_3 & = & -17. \end{array}$$

19. Gauss–Seidelovom metodom riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 2y & + & 2z & = & -1 \\ -x & + & 4y & - & 3z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & - & 6z & = & 8 \end{array}$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Dokažite konvergenciju metode.

20. Jacobijevom i Gauss–Seidelovom metodom riješite sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6.1x & + & 2.2y & + & 1.2z & = & 16.55 \\ 2.2x & + & 5.5y & - & 1.5z & = & 10.55 \\ 1.2x & - & 1.5y & + & 7.2z & = & 16.80 \end{array}$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Usporedite brzine konvergencije metoda.

21. Ispitajte konvergenciju Jacobijeve i Gauss–Seidelove metode za sustav

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y - 4$$

$$y = -\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y + 6.$$

22. Ispitajte konvergenciju Gauss-Seidelove metode primijenjene na sustav $x = Bx + b$, gdje je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 11/4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

23. Gauss-Seidelovom metodom s točnošću 10^{-3} riješite sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 20 \\ 3 \\ -12 \end{bmatrix}.$$

24. Dan je sustav jednakosti

$$x = 2x - y - 6, \qquad y = \frac{22}{9}x - \frac{4}{3}y - 15$$

za čije rješavanje se primijenjuju
a) Jacobijeva metoda,
b) Gauss–Seidelova metoda.
Ispitajte konvergencije tih metoda.

25. Gauss-Seidelovom metodom riješite sustav $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 9.9 & -1.5 & 2.6 \\ 0.4 & 13.6 & -4.2 \\ 0.7 & 0.4 & 7.1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 8.2 \\ -0.3 \end{bmatrix},$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

26. Ispitajte konvergenciju Jacobijeve i Gauss–Seidelove metode primijenjene na sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & -0.5 \\ -1 & 1 & -1 \\ -0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Gauss–Seidelovom metodom izračunajte prve tri iteracije za sustav

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 10x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 8. \end{array}$$

Obrazložite konvergenciju metode i izračunajte broj iteracija dovoljan da se postigne točnost 10^{-4}.

28. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbf{R}$ ispitajte konvergenciju Gauss-Seidelove metode primijenjene na sustav $x = Bx + b$, gdje je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & a \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 11/4 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

29. Gauss–Seidelovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & \frac{1}{4}x_3 & = & 1 \\ \frac{1}{2}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{4}x_3 & = & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4}x_1 & + & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & = & -\frac{3}{2}. \end{array}$$

30. Ispitajte konvergenciju Gauss-Seidelove metode primijenjene na sustav $Ax = b$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

31. Matrica $X = X_0 = \begin{bmatrix} -3.9 & 4.1 & -0.9 \\ 4.1 & -5.1 & 1.9 \\ -0.9 & 1.9 & -1.1 \end{bmatrix}$ je aproksimativni inverz matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$. Inverz matrice A, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Izračunajte X_1, X_2, X_3, gdje je
$$X_{n+1} = X_n(2I - AX_n), \quad n > 0.$$
Izračunajte i $\|I - AX_n\|_1$ i $\|A^{-1} - X_n\|_1$ za $n = 0, 1, 2, 3$.

4 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori matrice

1. Izračunajte najveću svojstvenu vrijednost matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
s točnošću 10^{-3}. Obrazložite konvergenciju odabrane metode.

2. Metodom Danielvskog nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
Nađite isti polinom Leverrierovom metodom.

3. Krilovljevom metodom nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Leverrierovom metodom nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

5. Metodom neodređenih koeficijenata nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Metodom neodređenih koeficijenata nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. Krilovljevom metodom nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Metodom Danielvskog nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}.$$
Nađite isti polinom Krilovljevom metodom.

9. Metodom Danielvskog nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$
Nađite isti polinom Krilovljevom metodom.

10. Metodom Danielvskog nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Metodom Danielvskog nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Leverrierovom metodom pronađite parametar $\alpha \in \mathbf{R}$ tako da karakteristični polinom matrice
$$B = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
bude $k_B(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$.

12. Metodom neodređenih koeficijenata nađite karakteristični polinom matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
Nađite isti polinom Krilovljevom metodom.

13. Metodom Danielvskog nađite karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Leverrierovom metodom pronađite parametar $\alpha \in \mathbf{R}$ tako da karakteristični polinom matrice

$$B = \begin{bmatrix} -1 & \alpha \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

bude $k_B(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5$.

14. Misesovom metodom potencija nađite spektralni radijus matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor y_0 odaberite sami! Dovoljno je izračunati dvije iteracije! Nađite karakteristični polinom iste matrice Leverrierovom metodom.

15. Misesovom metodom potencija nađite spektralni radijus matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix},$$

polazeći od vektora $y_0 = [1, 1, -1, -1]$. Dovoljno je izračunati tri iteracije!

16. Metodom neodređenih koeficijenata nađite karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Nađite isti polinom Krilovljevom metodom.

17. Metodom neodređenih koeficijenata nađite karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nađite isti polinom metodom Danielvskog te Krilovljevom metodom.

5 Nelinearne jednadžbe

1. Iterativnom metodom $x_{k+1} = a - bx_k^2$, računa se pozitivni korijen jednadžbe $x = a - bx^2$, (a i b pozitivni). Nađite nuždan uvjet konvergencije!

2. Metodom iteracije odredite pozitivnu nultočku funkcije
$$f(x) = x^2 + 4\sin x - 1$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

3. Metodom iteracije riješite jednadžbu
$$4 - x^2 - \ln^2 x = 0$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$. Obrazložite konvergenciju metode.

4. Newtonovom metodom nađite najveću nultočku funkcije $f(x) = 2x - 100\cos(x) - 1$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Napravite ocjenu greške.

5. Metodom sekante izračunajte pozitivni korijen jednadžbe $x^2 = \mathrm{tg}(0.55x + 0.1)$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

6. Metodom iteracije nađite s točnošću ε najveće rješenje jednadžbe
$$f(x) = \ln(\frac{x}{2}).$$
$f(x)$ je periodička funkcija perioda 2, zadana s $f(x) = \frac{x^2}{2}$ za $0 < x < 2$ i $\varepsilon = 10^{-2}$. Obrazložite konvergenciju.

7. Metodom iteracije nađite oba rješenja jednadžbe
$$2x - 4\ln(x) - 3 = 0$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$. Obrazložite konvergenciju metode.

8. Metodom iteracije riješite s točnošću ε jednadžbu
$$f(x) = \ln x,$$
gdje je $f(x)$ periodička funkcija perioda 3/4, zadana sa $f(x) = x$, $0 < x < 3/4$ i $\varepsilon = 10^{-2}$. Obrazložite konvergenciju.

9. Metodom iteracije riješite jednadžbu
$$\ln(\frac{x}{2}) = |\cos(x)|$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Obrazložite konvergenciju.

10. Funkcija

$$x \mapsto g(x) = \frac{x^3}{0.05 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+x}}$$

ima lokalni minimum u točki $a \approx 2.5$. Koristeći metodu iteracije odredite a s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

11. Metodom iteracije riješite jednadžbu $4e^x - x - 10 = 0$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Obrazložite konvergenciju metode.

12. Metodom iteracije riješite jednadžbu

$$\ln(\frac{x}{2}) = |\cos(x)\sin(x)|$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$. Obrazložite konvergenciju.

13. Metodom iteracije riješite jednadžbu

$$4 - x^3 - \ln^2(x) = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

14. S točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$ nađite najmanju vrijednost od a tako da je $ax^{1/2} \geq \sin x$ za sve pozitivne x. Obrazložite konvergenciju metode.

15. Po teoremu o srednjoj vrijednosti za diferencijabilne funkcije, vrijedi

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(a + p(x-a)).$$

Do na točnost $\varepsilon = 10^{-3}$ nađite pozitivnu vrijednost x takvu da je $p = \frac{1}{2}$, ako je $f(x) = \operatorname{arctg} x$ i $a = 0$.

16. Metodom iteracije $x_{k+1} = F(x_k)$ $(k = 0, 1, ...)$ rješavamo jednadžbu $xe^{cx} = 1$ $(c > 0)$. Pomoću koje od danih funkcija F_i $(i = 1, 2, 3)$

$$F_1(x) = e^{-cx}, \quad F_2(x) = \frac{cx + e^{-cx}}{c+1}, \quad F_3(x) = \frac{cx^2 + e^{-cx}}{cx+1},$$

se jednadžba može riješiti? Koja funkcija je najbolji izbor?

17. Nađite apscisu točke infleksije krivulje $y = e^{-x}\ln x$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

18. Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ riješite jednadžbu

$$\operatorname{sh}(\ln x - x) - \cos x = 0.$$

Obrazložite konvergenciju metode.

19. Izračunajte $\sqrt{7}$ s točnošću 10^{-5}.

20. Kombiniranom metodom riješite jednadžbu

$$x^2\mathrm{arctg}(x) - 1 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

21. Metodom iteracije nađite s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ najmanje pozitivno rješenje jednadžbe

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

gdje je $f(x)$ periodička funkcija perioda 2, zadana s $f(x) = x$, $0 \le x < 1$, $f(x) = -x + 2$, $1 \le x < 2$. Obrazložite konvergenciju metode.

22. Za funkciju $f(x) = e^x - ax(\log x - 1)$ postoji jedna vrijednost $a = A$ takva da je $f'(x) = f''(x) = 0$ za neko x. Odredite A s točnošću 10^{-3}. Obrazložite konvergenciju upotrebljene metode.

23. Metodom iteracije odredite najmanju pozitivnu nultočku funkcije

$$f(x) = (x - 0.5)^2 + \mathrm{tg}\, x - 1$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

24. Newtonovom metodom nađite s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ korijen jednadžbe $\ln|x| = \mathrm{tg}\,\frac{x}{3}$ koji je najmanje udaljen od nule.

25. Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ riješite jednadžbu

$$\mathrm{sh}(\ln|x| - x) - \cos x = 0.$$

Obrazložite konvergenciju metode.

26. Odredite s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ konstantu K takvu da je x–os tangenta krivulje $y = Ke^{\frac{x}{10}} - \log x$ u točki $x > 0$.

27. Za $0 \le x \le 1$ promatramo funkciju

$$y = \frac{1.00158 - 0.40222x}{1 + 0.636257x} - e^{-x}.$$

Nađite maksimum i minimum funkcije (uključujući rubne točke).

28. Izračunajte s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ površinu među krivuljama $y = \cos x$ i $y = e^{-x}$, $0 \le x < \pi/2$. Koristite metodu iteracije.

29. Metodom iteracije nađite oba rješenja jednadžbe

$$x - 3\ln(x) - 2 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$. Obrazložite konvergenciju metode.

30. S točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ nađite najmanju vrijednost od λ tako da je
$$e^{-\lambda x} \leq \frac{1}{1+x^2}$$
za sve $x > 0$.

31. Newtonovom metodom s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ odredite najveću nultočku funkcije $f(x) = 2^x - 100\cos(x) - 1$. Napravite ocjenu greške.

32. Metodom iteracije riješite jednadžbu
$$4 - x^2 - \ln^2(\frac{x}{2}) = 0$$
s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$. Obrazložite konvergenciju metode.

33. Metodom iteracije s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ riješite jednadžbu
$$\mathrm{sh}(\ln x - x) + x = 0.$$
Obrazložite konvergenciju metode.

34. Na intervalu $0 \leq x \leq \pi$, y je definirano kao funkcija od x relacijom
$$y = -\int_0^x \ln(2\sin\frac{t}{2})dt.$$
Nađite maksimalnu vrijednost od y s točnošću 10^{-5}.

35. Za $a > 1$ i $0 < b < \frac{1}{2}$ jednadžba
$$\frac{1}{e^{\frac{x}{a}} - 1} - \frac{a}{e^x - 1} - (a-1)b = 0$$
ima jedinstven pozitivni korijen. Izračunajte taj korijen s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ ako je $a = 5, b = \frac{1}{4}$.

36. Metodom iteracije nađite s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$ najmanje pozitivno rješenje jednadžbe
$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$
gdje je $f(x)$ periodička funkcija perioda 2, zadana s
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ -x^2 + 2, & 1 \leq x < 2. \end{cases}$$
Obrazložite konvergenciju metode.

37. Jednadžbu $xe^{cx} = 1$ rješavamo metodom iteracije
$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$
gdje je $\varphi(x) = e^{-cx}$. Za koje $c > 0$ će metoda konvergirati?

38. Metodom iteracije nađite s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ oba korijena jednadžbe $x = 4e^x - 10$.

6 Nelinearni sustavi jednadžbi

1. Metodom iteracija riješite sustav jednadžbi

$$2x = \sin\left[\frac{1}{2}(x-y)\right], \qquad 2y = \cos\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]$$

   s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$. Dokažite konvergenciju metode!

2. Newtonovom metodom odredite rješenje sustava

$$\begin{aligned} 2x^3 - y^2 - 1 &= 0 \\ xy^3 - y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

   uzevši za početnu iteraciju $x_0 = 1$, $y_0 = 1.5$. Postupak prekinite nakon treće iteracije!

3. Metodom iteracija odredite s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$ rješenje sustava

$$\begin{aligned} 4y^2 + 20x + 4y - 15 &= 0 \\ 4x^2 - 4y^2 + 8x - 20y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

   koje leži u prvom kvadrantu.