

Drugi međuispit iz Numeričke matematike  
28. lipnja 2016.

1. (8 bodova)

- (i) **(1 bod)** Kompozitna trapezna formula za računanje integrala  $\int_a^b f(x)dx$  na mreži  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, \dots, n$  glasi:

(A)  $T_n(f) = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$

(B)  $T_n(f) = h \left[ f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) \right]$

- (ii) **(2 boda)** Izvedite ocjenu pogreške integracije kompozitnom trapeznom formulom.

- (iii) **(2 boda)** Pomoću kompozitne trapezne formule aproksimirajte vrijednost integrala

$$I = \int_0^\pi f(x)dx, \quad f(x) = \cos^4(x)$$

na mreži  $x_i = i \frac{\pi}{4}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, 4$ .

- (iv) **(3 boda)** Znajući da je  $\max_{x \in [0, \pi]} |f''(x)| = 4$ , odredite koliko točaka mreže je potrebno uzeti da apsolutna pogreška integracije kompozitnom trapeznom formulom bude manja ili jednaka od  $10^{-4}$ ?

Uputa: Jednostavna trapezna formula i pogreška integracije.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \quad I = \int_a^b f(x)dx$$

$$T_1(f) = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)), \quad I - T_1(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\tau), \quad \tau \in (a, b)$$

2. (7 bodova)

- (i) **(3 boda)** Za zadane podatke  $\{(x_i, y_i), i = 0, \dots, n\}$  definirajte prirodni kubni splajn.

- (ii) **(4 boda)** Provjerite da li je funkcija

$$s(x) = \begin{cases} -\frac{9}{2}x^3 + x, & x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{9}{2}x^3 - 9x^2 + 4x - \frac{1}{3}, & x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ -2x + 1, & x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

kubni splajn na intervalu  $[0, 1]$ . Je li  $s(x)$  prirodni kubni spline?

4. (10 bodova) Zadani su matrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $k < n$ ,  $r(A) = k$  i vektor  $b \in \mathbb{R}^n$ .

- (i) **(6 bodova)** Za rješavanje problema  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$ , postavite sustav normalnih jednadžbi. Detaljno objasnite postupak! Ima li dobiveni sustav jedinstveno rješenje? Objasnite svoju tvrdnju.

- (ii) **(1 bod)** Definirajte QR rastav matrice  $A$ .

- (iii) **(3 boda)** Objasnite kako se QR rastav matrice  $A$  iz (ii) koristi za rješavanje problema najmanjih kvadrata  $\min_{x \in \mathbb{R}^k} \|Ax - b\|_2$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ .

Okrenite!

**3. (5 bodova)**

- (i) **(1 bod)** Objasnite geometrijsku interpretaciju Newtonove metode za traženje (jednostruke) nultočke funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (ii) **(1 bod)** Kako glasi Newtonova metoda za rješavanje nelinearne jednačbe  $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  gdje je  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  glatka funkcija?
- (iii) **(3 boda)** Izračunajte prvu iteraciju Newtonove metode za rješavanje sustava

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 &= 4\end{aligned}$$

pri čemu je početna iteracija  $\mathbf{x}^0 = [1, 2]^\top$ .

- 5. (10 bodova)** U sljedećem zadatku odgovorite na pitanja, nadopunite tekst, zaokružite točan odgovor ili zaokružite **Točno** ili **Netočno**. Svaki točan odgovor nosi 1 bod, netočan ili neodgovoren 0 bodova.

1. Ako konvergira, Newtonova metoda konvergira lokalno:  
linearno                      superlinearo                      kvadratično.
2. Problem aproksimacije podataka  $\frac{x}{y} \parallel \begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \parallel \frac{2}{3}$  linearnom funkcijom u smislu najmanjih kvadrata zapisan u matričnom obliku glasi:
3. Za sve  $x, y \in \mathbb{R}^n$  vrijedi  $|(x, y)| > \|x\|\|y\|$ .                      **Točno.**                      **Netočno.**
4. Strogo dijagonalno dominantne matrice su regularne.                      **Točno.**                      **Netočno.**
5. Kubni splajn je na svakom podintervalu jednak polinomu stupnja točno 3.  
**Točno.**                      **Netočno.**
6. Niz  $(x_n)$  konvergira linearno prema  $x^*$  ako postoje  $L > 1$  i  $n_0 \in \mathbb{N}$  takvi da  $\forall n \geq n_0$  vrijedi  $|x_{n+1} - x^*| \leq L|x_n - x^*|$ .                      **Točno.**                      **Netočno.**
7. Kompozitne formule za numeričku integraciju gube jedan red točnosti obzirom na pripadne jednostavne kvadraturene formule.  
**Točno.**                      **Netočno.**
8. Kvadratna forma  $f(x) = x^\top Qx + b^\top x + \gamma$  je konveksna ako i samo ako je matrica  $Q$  \_\_\_\_\_
9. Za ortogonalne matrice  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vrijedi  $\|Qx\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n$ .                      **Točno.**                      **Netočno.**
10. Napišite primjer ortogonalne matrice  $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

Vrijeme pisanja je **120 minuta**. Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora.