2. međuispit iz Numeričke matematike
02. svibnja 2011.

1. (1 bod) Polinomijalna interpolacijska zadaća glasi:

Za zadane podatke

x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_0	y_1	$\ldots$	y_n

želimo pronaći interpolacijski polinom u standardnoj bazi prostora $\mathcal{P}_n$. Napišite linearni sustav koji se dobije rješavanjem ovog problema.

2. (4 boda)

Podaci zadani tablicom

x	0	1	2	3
y	1	0.5	0.25	0.125

predstavljaju vrijednosti neke fizikalne veličine koja je opisana funkcijom $f(x) = 2^{-x}$.

(a) (1 bod) Odredite Lagrangeov interpolacijski polinom $p(x)$.

(b) (1 bod) Napišite elemente Lagrangeove baze za ovaj skup podataka.

(2) (2 boda) Bez računanja Lagrangeovog interpolacijskog polinoma ocijenite grešku interpolacije u točki $x = \frac{1}{2}$.

3. (7 bodova)

(a) (2 boda) Pokažite da je Simpsonova formula egzaktna na polinomima 3. stupnja.

(b) (1 bod) Kako glasi kompozitna trapezna formula za $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ako je zadana ekvidistantna mreža $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ na intervalu $[a, b]$?

(c) (1 bod) Koja trapezna formula ima manji red točnosti: kompozitna ili jednostavna?

(d) (3 boda) Primjenom kompozitne trapezne formule izračunajte aproksimaciju integrala $I(f) = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2-1}\, dx$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$.

4. (8 bodova)

(a) (1 bod) Napišite definiciju splajna reda $l \in \mathbb{N}$.

(b) (2 boda) Postoje li realni brojevi a i b takvi da je funkcija

$$s(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + a(x-1)^2, & x \le 2 \\ (x-2)^3 - (x-3)^2, & 2 \le x \le 3 \\ (x-3)^3 + b(x-2)^2, & x \ge 3. \end{cases}$$

kubični splajn?

Okrenite!

(c) (2 boda) Navedite barem 2 tipa kubičnih splajnova koja dobivamo definiranjem različitih rubnih uvjeta, te navedite pripadne rubne uvjete.

(d) (2 boda) Dokažite sljedeću propoziciju:
Neka je $f \in C^2(a,b)$ i neka je $s \in S_{\Delta,1}$ linearni splajn pri čemu je $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Tada vrijedi

$$\|f - S\|_\infty \leq \frac{h^2}{8} \|f''\|_\infty$$

gdje je $h = \max_i(x_{i+1} - x_i)$ duljina najvećeg podintervala.

(e) (1 bod) Definirajte strogo dijagonalno dominantnu matricu.

5. (5 bodova)

(a) (2 boda) Definirajte diskretnu i inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju.

(b) (2 boda) Pretpostavimo da su koeficijenti faznog interpolacijskog polinoma $p(x) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ikx}$ dani vektorom

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 2i \\ -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i \\ -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}i \\ 1 + 2i \end{pmatrix}.$$

Odredite koeficijente a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 u zapisu trigonometrijskog interpolacijskog polinoma $\psi(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{2} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

(c) (1 bod) Za nalaženje DFT pomoću FFT algoritam treba $\mathcal{O}(...)$ operacija.

Upute i formule.

1. Greška polinomijalne interpolacije
Neka je $f \in C^{n+1}(a,b)$ zadana funkcija i neka su $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$ međusobno različite točke. Neka je $p_n \in \mathcal{P}_n$ polinom koji interpolira funkciju f u čvorovima $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Tada za svako $x \in [a,b]$ postoji točka $\xi_x \in (a,b)$ takva da je

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}(x),$$

gdje je $w_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$.

2. Greška integracije jednostavne trapezne formule.

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \in C^2(\mathbb{R}),\ I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

$$I(f) - T(f) = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\tau),\ \tau \in (a,b)$$

Napomena: Vrijeme pisanja je **90 minuta**.
Dozvoljena je upotreba džepnog kalkulatora (koji nije HP).