# Numerička matematika, 7. predavanje

Pina Milišić, Ana Žgaljić Keko

Skripta

# Sadržaj

# 1

# Uvod

## 1.1 Greške

## 1.2 Prikaz realnih brojeva u računalu

### 1.2.1 Preciznost, strojni epsilon i greška zaokruživanja

### 1.2.2 Propagiranje grešaka kroz aritmetičke operacije

## 1.3 Stvarne katastrofe uzrokovane greškom

# 2

# Linearni sustavi

## 2.1 Gaussove eliminacije i LU faktorizacija

## 2.2 Pivotiranje

## 2.3 Neki posebni tipovi linearnih sustava

### 2.3.1 Simetrične pozitivno definitne matrice

#### Faktorizacija Choleskog

### 2.3.2 Rješavanje tridijagonalnog sustava. Thomasov algoritam

## 2.4 Analiza greške rješenja

# 3

# Interpolacija i aproksimacija funkcija

## 3.1 Polinomijalna interpolacija

**Greška interpolacije.**

### 3.1.1 Primjena: numerička integracija

Polinomijalna interpolacija jednu od svojih primjena nalazi u izvođenju formula za numeričku integraciju. Ovdje je potrebno naglasiti da je numeričko integriranje mnogo šira tema koja obično u standardnim knjigama iz numeričke matematike zauzima cijelo poglavlje, a ne samo podsekciju kao kod nas. No, kako smo već u uvodu naglasili, naša namjera je ovom knjigom upoznati studente sa nekim osnovnim idejama numeričke matematike koje se koriste u inženjerskoj praksi, pri čemu smo nužno morali napraviti odabir tema kojih ćemo se dotaknuti. Daljni samostalan rad, odnosno produbljivanje znanja o određenom području numeričke matematike ovisi naravno o interesima studenta.

Neka je $f(x)$ realna funkcija jedne varijable definirana na segmentu $[a, b]$. Želimo izračunati vrijednost integrala

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

U primjenama često nije moguće naći eksplicitnu formulu primitivne funkcije $F$ za koju je $F' = f$. U takvim slučajevima integral $I$ aproksimiramo koristeći formule numeričke integracije. Formule numeričke integracije često se u literaturi zajedničkim imenom nazivaju kvadraturne formule.

**Newton-Cotesove formule.**

Osnovna ideja numeričke integracije je da podintegralnu funkciju $f(x)$ aproksimiramo interpolacijskim polinomom $p_n(x)$ te da za približnu vrijednost integrala uzmemo

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_n(x)\,dx.$$

Kako integral polinoma možemo egzaktno izračunati time dobivamo dobro definiranu formulu numeričke integracije. Formule dobivene na ovaj način nazivamo Newton-Cotesove formule.

Neka su zadane ekvidistantne interpolacijske točke

$$x_i = a + hi \quad \text{gdje je} \quad h = (b-a)/n \;\; \text{te} \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

U Sekciji 3.1 pokazali smo da je pripadni Lagrangeov interpolacijski polinom oblika:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x)\,dx$$

gdje je

$$\varphi_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x - x_j)}{\displaystyle\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (x_i - x_j)}.$$

Stoga dolazimo do formule

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b \varphi_i(x)\,dx.$$

Integrale na desnoj strani u ovoj formuli možemo egzaktno izračunati. Nakon zamjene varijabli $x = a + th$ dobivamo

$$\int_a^b \varphi_i(x)\,dx = h \int_0^n \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t-j}{i-j}\,dt = h\lambda_{n,i}$$

što nam daje eksplicitnu zavisnost koeficijenata formule o parametru $h$ (duljini intervala). Konačno, za aproksimaciju integrala $I(f)$ dobivamo Newton-Cotesovu kvadraturnu formulu $Q(f)$ danu izrazom

$$Q(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\lambda_{n,i},$$

pri čemu koeficijenti $\lambda_{n,i}$ ne ovise o $a$ i $b$. Promotrimo kako izgledaju Newton-Cotesove formule za vrijednosti $n = 0$, $n = 1$ i $n = 2$.

**1.** Uzmimo da je $n = 0$. Funkciju $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ aproksimiramo konstantnom funkcijom koja prolazi točkom $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, kako je prikazano na Slici 3.1. Na taj način smo vrijednost integrala $I(f)$ aproksimirali pravokutnom ili midpoint formulom koja je dana sljedećim izrazom

$$M(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{3.1}$$

Očito je da kvadraturna formula $M(f)$ egzaktno integrira konstantne funkcije. Štoviše, ona egzaktno integrira i linearne funkcije. Zaista, ako je $f(x) = x$ onda je $I(x) = \frac{b^2 - a^2}{2}$. S druge strane je također $M(x) = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Nadalje, lako se vidi da $I(x^2) \neq M(x^2)$. Na ovom mjestu je zgodno uvesti pojam stupnja egzaktnosti kvadraturne formule.

**Definicija 3.1** Kažemo da je kvadraturna formula stupnja egzaktnosti $n$ ako ona egzaktno integrira polinome stupnja manjeg ili jednakog $n$.

Dakle, pravokutna formula ima stupanj egzaktnosti jednak 1. **2.** Neka je sada $n = 1$. Funkciju $f(x)$ interpolirajmo linearnom funkcijom kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, čime dolazimo do (jednostavne) trapezne formule

$$T(f) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \tag{3.2}$$

Očito je da je trapezna formula točna ukoliko je $f$ linearna funkcija. Drugim riječima kaže se da je trapezna formula *egzaktna* na polinomima prvog stupnja. Direktan računa daje da trapezna formula nije egzaktna na polinomima drugog stupnja. Zaista, za $f(x) = x^2$ imamo da je $I = \frac{b^3 - a^3}{3}$, dok je s druge strane $T(x^2) = \frac{b-a}{2}\left(a^2 + b^2\right)$, pa očito $I(x^2) \neq T(x^2)$. U skladu sa definicijom 3.1 vidimo da je stupanj egzaktnosti trapezne formule jednak 1.

**3.** Konačno, uzmimo da je $n = 2$, odnosno podijelimo segment $[a, b]$ na dva podintervala te interpolirajmo funkciju $f(x)$ kvadratnim polinomom kroz točke

$$(a, f(a)), \quad (b, f(b)), \quad \left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Direktnim računom dolazimo do (jednostavne) Simpsonove formule

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{3.3}$$

Pokažimo da je Simpsonova formula egzaktna na polinomima trećeg stupnja. Zaista, neka je $f(x) = x^3$. Tada je

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{b^4 - a^4}{4}.$$

Slika 3.1: Pravokutna, trapezna i Simpsonova formula.

S druge strane, Simpsonova formula daje

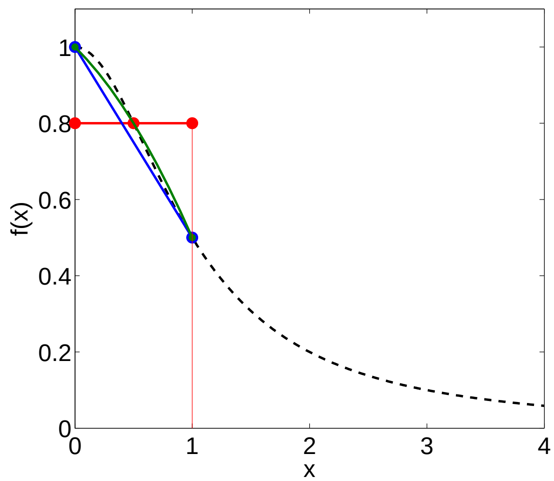
$$\begin{aligned} S(x^3) &= \frac{b-a}{6}\Big(a^3 + 4\Big(\frac{a+b}{2}\Big)^3 + b^3\Big) \\ &= \frac{b-a}{4}(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = \frac{b^4 - a^4}{4}, \end{aligned}$$

odakle vidimo da je Simpsonova formula točna na polinomima trećeg stupnja. Slično, lako se vidi da Simpsonova formula nije egzaktna na polinomima četvrtog stupnja. Dakle, prema definiciji 3.1 kažemo da je stupanj egzaktnosti Simpsonove formule jednak 3.

**Primjer 3.1** Pomoću jednostavne pravokutne, trapezne i Simpsonove formule aproksimirajmo vrijednost integrala $I(f) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Podintegralna funkcija je $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $a = 0$, $b = 1$. Prema formulama (3.1), (3.2) i (3.3) dobivamo:

$$\begin{aligned} M(f) &= f(0.5) = \frac{4}{5} = 0.8, \\ T(f) &= \frac{1}{2}\Big(f(0) + f(1)\Big) = \frac{3}{4} = 0.75, \\ S(f) &= \frac{1}{6}\Big(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\Big) = \frac{47}{60} \approx 0.783. \end{aligned}$$




Slika 3.2: Aproksimacija vrijednosti integrala $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ pravokutnom, trapeznom i Simpsonovom formulom.

Uočimo da je egzaktna vrijednost integrala jednaka $\pi/4$, odnosno približno iznosi 0.7853982. Dakle, najbolju aproksimaciju vrijednosti zadanog integrala dobili smo korištenjem Simpsonove formule. Slika 3.3 daje grafički prikaz aproksimacije zadanog integrala pravokutnom, trapeznom i Simpsonovom formulom.

### Ocjene greške formula numeričke integracije

Formule numeričke integracije daju određenu aproksimaciju egzaktne vrijednosti integrala $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. U tom kontekstu prirodno dolazi pitanje ocjene greške napravljene aproksimacije. Radi kraćeg zapisa, kao i dosada, trapeznu formulu označavat ćemo sa $T(f)$ a Simpsonovu sa $S(f)$. Za zadanu, dovoljno glatku funkciju $f$ zanima nas koliko iznosi $I(f)-M(f)$, $I(f)-T(f)$, odnosno $I(f)-S(f)$. Slično kao kod numeričkog deriviranja (vidi Primjer **??**) i ovdje uvodimo pojam reda točnosti aproksimacijske formule. Preciznije, imamo sljedeću definiciju.

**Definicija 3.2** *Kažemo da je kvadraturna formula $Q(f)$ konvergentna reda s $s \in \mathbb{N}$ ako vrijedi da je*

$$|I(f) - Q(f)| = \mathrm{O}(h^s),$$

*gdje je $h$ udaljenost točaka mreže.*

Primijetimo, ako za grešku promatrane kvadraturne formule postoji konstanta $C$, neovisna o $h$ takva da vrijedi

$$|I(f) - Q(f)| \leq Ch^s$$

onda numerička metoda konvergira jer se greška smanjuje ako $h \to 0$.

Pravokutnu, trapeznu i Simpsonovu kvadraturnu formulu izveli smo aproksimirajući podintegralnu funkciju interpolacijskim polinomom odgovarajućeg stupnja. Da bismo dobili izraze za ocjenu greške pripadne kvadraturne formule, krenimo od ocjene greške interpolacijskog polinoma $p_n \in \mathcal{P}_n$ dane izrazom (**??**). Integriramo li tamo navedeni izraz od $a$ do $b$ dobivamo

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)dx, \tag{3.4}$$

pri čemu je $\xi_x \in \langle a, b\rangle$ dan Teoremom **??**, dok smo integral $\int_a^b p_n(x)dx$ označili sa $I_n(f)$. Iz izraza (3.4) slijedi ocjena

$$|I(f) - I_n(f)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \Big| \int_a^b w_{n+1}(x)dx \Big| \leq (b-a)^{n+2} \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}. \tag{3.5}$$

Pokažimo da je za slučaj pravokutne, trapezne i Simpsonove formule moguće dobiti finije ocjene greške od upravo dobivene (3.5).

**Propozicija 3.1** *Neka je $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$. Tada postoji $\tau \in [a, b]$ takav da vrijedi*

$$I(f) - M(f) = \frac{h^3}{24} f''(\tau), \quad h = b - a. \tag{3.6}$$

**Dokaz.** Razvijemo li funkciju $f(x)$ u Taylorov red oko točke $c = (a + b)/2$ dobivamo

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - c)^2,$$

odakle integriranjem od $a$ do $b$ slijedi

$$I(f) = M(f) + \int_a^b f''(\xi_x) \frac{(x-c)^2}{2} dx.$$

Konačno, primjenom integralnog teorema srednje vrijednosti dobivamo da postoji $\tau \in [a, b]$ takav da vrijedi

$$\int_a^b f''(\xi_x) \frac{(x-c)^2}{2} dx = \frac{1}{2} f''(\tau) \int_a^b (x-c)^2 dx = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\tau),$$

odakle slijedi ocjena (3.6). $\square$

Slično, za grešku integracije dobivenu upotrebom trapezne formule vrijedi sljedeći rezultat.

**Propozicija 3.2** *Neka je $f \in C^2(\langle a, b\rangle)$. Tada postoji $\tau \in [a, b]$ takav da vrijedi*

$$I(f) - T(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\tau) \tag{3.7}$$

*pri čemu je $h = b - a$.*

**Dokaz.** Prema Teoremu **??** o ocjeni greške interpolacijskog polinoma za svako $x \in [a, b]$ postoji $\xi_x \in \langle a, b \rangle$ takav da je

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x-a)(x-b).$$

Integriramo gornji izraz od $a$ do $b$. Dobivamo

$$\int_a^b (f(x) - p_1(x))dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)dx.$$

Kako je $\frac{(x-a)(x-b)}{2} \leq 0$ za sve $x \in [a, b]$ koristeći poopćeni teorem o srednjoj vrijednosti integralnog računa (vidi Dodatak), dobivamo

$$I(f) - T(f) = \int_a^b \Big( - f''(\xi_x)\Big)\Big( - \frac{(x-a)(x-b)}{2}\Big)dx = -\frac{h^3}{12} f''(\tau).$$

čime je propozicija dokazana. □

Na sličan način može se pokazati da za Simpsonovu formulu vrijedi sljedeći rezultat.

**Propozicija 3.3** *Neka je $f \in C^4(\langle a, b \rangle)$. Tada postoji $\tau \in \langle a, b \rangle$ takav da vrijedi*

$$I(f) - S(f) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\tau) \tag{3.8}$$

*pri čemu je $\tau \in \langle a, b \rangle$, te $h = \frac{b-a}{2}$.*

Uzimajući u obzir dobivene ocjene greške, u skladu sa definicijom 3.2 vidimo da su pravokutna i trapezna formula reda 3, dok je red Simpsonove formule jednak 5.

### Kompozitne formule

U Sekciji 3 vidjeli smo da povećanje stupnja interpolacijskog polinoma ne vodi nužno do bolje aproksimacije. Ta činjenica ima za posljedicu da povećanje broja točaka mreže segmenta na kojem radimo integraciju neće općenito dovesti do *preciznije* formule numeričke integracije. Zaista, promotrimo li dobivene ocjene

$$\begin{aligned} |I(f) - M(f)| &\leq \frac{h^3}{24}\|f''\|_\infty, \quad h = b-a, \\ |I(f) - T(f)| &\leq \frac{h^3}{12}\|f''\|_\infty, \quad h = b-a, \\ |I(f) - S(f)| &\leq \frac{h^5}{90}\|f^{(4)}\|_\infty, \quad h = \frac{b-a}{2}, \end{aligned}$$

vidimo da ukoliko segment $[a, b]$ nije dovoljno malen, pripadne greške integracijskih formula mogu biti velike. Pokazuje se da bolje (*točnije*) formule numeričke integracije možemo dobiti tako da zadani interval $[a, b]$ podijelimo na podintervale te na svakom od njih primijenimo integracijsku formulu nižeg reda. Na taj način dobivamo kompozitne formule numeričke integracije koje se uglavnom koriste u primjenama.

**Kompozitna pravokutna formula.** Podijelimo segment $[a, b]$ na $n$ ekvidistantnih dijelova

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Udaljenost između čvorova mreže označimo sa $h = \dfrac{b-a}{n}$. Radi aditivnosti integrala imamo

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \tag{3.9}$$

Sada iskoristimo pravokutnu formulu na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = (x_i - x_{i-1}) f\Big(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\Big) + E_i^M(f), \tag{3.10}$$

pri čemu smo grešku integracije pravokutnom formulom na $i$-tom podintervalu označili sa $E_i^M(f)$. Iz ocjene greške (3.6) znamo da postoji $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ takav da vrijedi

$$E_i^M(f) = \frac{h^3}{24} f''(\tau_i),$$

gdje je $h = x_i - x_{i-1}$. Izrazi (3.9) i (3.10) daju

$$I(f) \approx M_n(f)$$

gdje smo sa $M_n(f)$ označili dobivenu kompozitnu pravokutnu (midpoint) formulu danu izrazom

$$M_n(f) = h\Big(f\Big(\frac{x_0 + x_1}{2}\Big) + f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) + \cdots + f\Big(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\Big)\Big)$$

pri čemu je pripadna greška integracije dana sumom $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} E_i^M(f)$. Nadalje, pripadnu grešku integracije možemo ocijeniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} |I(f) - M_n(f)| &= \sum_{i=1}^{n} \frac{h^3}{24} |f''(\tau_i)| \leq \frac{h^3}{24} \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \sum_{i=1}^{n} 1 \\ &= h^2 \|f''\|_\infty \frac{b-a}{24}. \end{aligned}$$

Usporedimo li dobivenu ocjenu greške sa ocjenom greške jednostavne pravokutne formule vidimo da smo, radi akumuliranja grešaka na svakom podintervalu, ovdje *izgubili* jedan red točnosti.

**Kompozitna trapezna formula.** Kompozitnu trapeznu formulu izvodimo na sličan način kao što smo izveli kompozitnu pravokutnu formulu. Najprije podijelimo segment $[a, b]$ na $n$ jednakih dijelova

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Radi aditivnosti integrala imamo

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx. \tag{3.11}$$

Sada iskoristimo trapeznu formulu na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\Big(f(x_i) + f(x_{i-1})\Big) + E_i^T(f), \tag{3.12}$$

pri čemu smo grešku integracije označili sa $E_i^T(f)$. Iz ocjene greške (3.7) znamo da postoji $\tau_i \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$ takav da vrijedi

$$E_i^T(f) = -\frac{h^3}{12} f''(\tau_i),$$

gdje je $h = x_i - x_{i-1}$. Izrazi (3.11) i (3.12) daju

$$I(f) = \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + 2(f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})) + f(x_n)\Big) + \sum_{i=1}^{n}\Big(-\frac{h^3}{12}\Big) f''(\tau_i),$$

čime smo dobili kompozitnu trapeznu formulu

$$T_n(f) = \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\Big). \tag{3.13}$$

Sada imamo sve što je potrebno da izvedemo ocjenu greške aproksimacije integrala $I(f)$ kompozitnom trapeznom formulom. Naime,

$$|I(f) - T_n(f)| \le \frac{h^3}{12} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|\; n = h^2 \|f''\|_\infty \frac{b-a}{12}.$$

Usporedimo li dobivenu ocjenu greške sa ocjenom greške jednostavne trapezne formule vidimo da smo ovdje, kao i kod kompozitne pravokutne formule, *izgubili* jedan red točnosti. Kompozitna trapezna formula implementirana je u Matlabu funkcijom `trapz`.

**Kompozitna Simpsonova formula.** Na gotovo isti način možemo izvesti kompozitnu Simpsonovu formulu. Uočimo ovdje samo da jednostavna Simpsonova formula zahtijeva tri točke mreže, dakle dva podintervala. Odatle slijedi da i kompozitna Simpsonova formula mora također imati paran broj podintervala.

Neka je dakle $n \in \mathbb{N}$ paran broj. Podijelimo segment $[a, b]$ na jednake dijelove

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

te iskoristimo aditivnost integrala

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \tag{3.14}$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx. \tag{3.15}$$

Primijetimo da je duljina svakog podintervala $\langle x_{2i-2}, x_{2i} \rangle$ jednaka $2h$. Sada na svakom tom podintervalu duljine $2h$ iskoristimo jednostavnu Simpsonovu formulu:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\Big(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\Big), \tag{3.16}$$

čime dobivamo kompozitnu Simpsonovu formulu

$$S_n(f) = \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-2} f(x_{2i}) + f(b)\Big).$$

Slično kao i kod kompozitne trapezne formule dobivamo ocjenu greške za aproksimaciju integrala $I$ kompozitnom Simpsonovom formulom

$$|I(f) - S_n(f)| \le h^4 \|f^{(4)}\|_\infty \frac{b-a}{180}. \tag{3.17}$$

**Primjer 3.2** Vrijednost integrala

$$\int_0^{2\pi} xe^{-x} \cos(2x)dx$$

aproksimirajmo kompozitnom trapeznom i Simpsonovom formulom te grafički odredimo red konvergencije spomenutih metoda.

Za potrebe rješenja ovog primjera implementirat ćemo sami pravokutnu, trapeznu i Simpsonovu formulu u Matlabu na sljedeći način:

```
function M_n = midpoint(a,b,n,my_fun)
h = (b-a)/n;
x = linspace(a+h/2,b-h/2,n);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n);
M_n = h * sum(f_n);
return;

function T_n = trapez(a,b,n,my_fun)
h = (b-a)/n;
x = linspace(a,b,n+1);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n+1);
T_n = sum( h * ( f_n(1:end-1) + f_n(2:end) )/2);
return;

function S_n = Simpson(a,b,n,my_fun)
h = (b-a)/n;
x = linspace(a,b,n+1);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n+1);
f_n(2:end-1) = 2 * f_n(2:end-1);
S_n = h * sum(f_n)/6;
x = linspace(a+h/2,b-h/2,n);
f_n = feval(my_fun,x).*ones(1,n);
S_n = S_n + 2*h*sum(f_n)/3;
return;
```

pri čemu je

```
my_fun = inline('x.*exp(-x).*cos(2*x)','x');
```

Lako se vidi da se zadani integral može izračunati egzaktno. Dobiva se

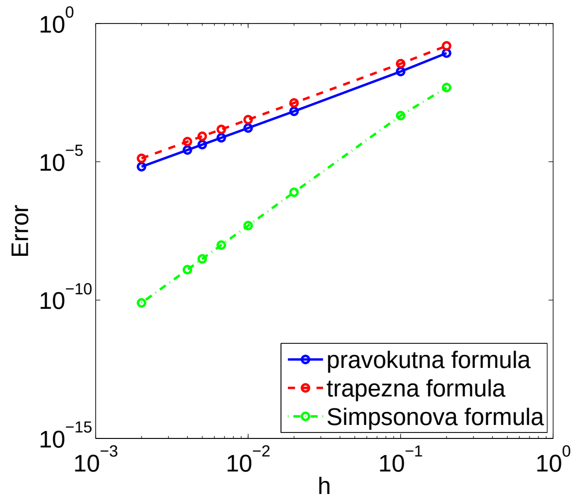
$$\int_0^{2\pi} xe^{-x}\cos(2x)dx = -\frac{1}{25}\frac{10\pi - 3 + 3e^{2\pi}}{e^{2\pi}} \approx -0.122122604618968.$$

Primjenom funkcija `midpoint.m`, `trapez.m` i `Simpson.m` na primjer, za $n = 6$, $a = 0$, $b = 2\pi$ naredbe

```
M = midpoint(a,b,n,my_fun)
T = trapez(a,b,n,my_fun)
S = Simpson(a,b,n,my_fun)
```

daju

```
M =  -0.065242222154540
T = -0.226993976161191
S = -0.119159473490091
```




Slika 3.3: Greška integracije za primjer 3.2 na logaritamskoj skali.

Na slici **??** prikazana je greška integracije na logaritamskoj skali, u ovisnosti o broju točaka mreže. Očito, što je veći nagib promatranog pravca to je veći red konvergencije odgovarajuće formule. Red konvergencije promatrane numeričke metode (vidi Primjer **??** i Definiciju 3.2). obično prikazujemo pomoću grafa koji daje ovisnost greške o $h$ na logaritamskoj skali. Naime, ako je numerička metoda reda $s$ onda za njenu grešku $E$ postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi

$$E = Ch^s,$$

odakle logaritmiranjem dobivamo pravac

$$\log(E) = \log(C) + s\log(h),$$

nagiba $s$. Dakle, ukoliko želimo usporediti red konvergencije dviju numeričkih metoda, tada će metoda kojoj pripada pravac većeg nagiba imati bržu konvergenciju. Grafove na logaritamskoj skali prikazujemo naredbom `loglog(x,y)`.

**Napomena 3.1** Jedna od standardnih Matlabovih funkcija za numeričku integraciju je `quad` koja predstavlja kombinaciju jedne vrste Simpsonove formule i adaptivne integracije. Bez ulaženja u detalje opišimo ovdje glavnu ideju spomenutog postupka. Adaptivna numerička integracija temelji se na pažljivom odabiru točaka u kojima će se računati vrijednosti funkcije $f(x)$ pri čemu želimo da broj potrebnih izvrednjavanja bude što manji, a točnost dobivene formule što veća. Polazna točka adaptivne integracije je aditivno svojstvo određenog integrala $I(f) = \int_a^b f(x)dx$. Dopuštenu grešku integracije označimo sa $E$. Zatim odaberemo metodu numeričke integracije te ocijenimo učinjenu grešku. Ukoliko je ona manja od željene vrijednosti $E$, postupak je gotov. No, ako je dobivena greška veća od $E$, postupak nastavljamo na lijevoj polovici promatranog segmenta. Ukoliko je greška manja od $E/2$, gotovi smo, a ako to nije ispunjeno ponavljamo postupak na lijevoj polovici intervala. Opisani postupak nastavljamo dok ne dostignemo podinterval duljine $(b-a)/2^k$, za neki $k \in \mathbb{N}$, na kojemu odabrana formula numeričke integracije daje aproksimaciju sa greškom manjom od $E/2^k$. Postupak se zatim nastavlja desno od prihvaćenog intervala. Adaptivna integracija ima za posljedicu da će polazni segment $[a,b]$ biti *gusto* podijeljen na dijelovima gdje se funkcija $f$ rapidno mijenja, dok će na dijelovima gdje se funkcija sporije mijenja gustoća mreže biti *manja*.

Na primjer, za kvadraturnu formulu uzmimo Simpsonovu formulu na intervalima duljine $2h$ i $h$. Dobivene aproksimacije integrala $I(f)$ označimo sa $S_{2h}$ i $S_h$. Za pripadne greške vrijedi

$$E_{2h} = -\frac{b-a}{180}(2h)^4 f^{(iv)}(\xi_1), \quad E_h = -\frac{b-a}{180}(h)^4 f^{(iv)}(\xi_2).$$

Očito vrijedi

$$E_{2h} \approx 16E_h.$$

Sada imamo

$$I(f) = S_{2h} + E_{2h} = S_h + E_h \approx S_{2h} + 16E_h,$$

odakle slijedi

$$S_h - S_{2h} \approx 15E_h,$$

odnosno

$$E_h \approx \frac{S_h - S_{2h}}{15}.$$

Konačno, gornja razmatranja nam mogu poslužiti za dobivanje *bolje* kvadraturne formule koju ćemo označiti sa $Q(f)$. Naime, iz aproksimacije

$$I(f) = S_h + E_h \approx S_h + \frac{S_h - S_{2h}}{15},$$

dobivamo izraz za novu kvadraturnu formulu

$$Q(f) = \frac{16S_h - S_{2h}}{15}.$$

Navedimo na kraju pojednostavljenu verziju Matlabove funkcije `quad` koju smo, uz neznatne izmjene, preuzeli iz knjige [**?**].

```
function [Q,fcount] = quadtx(F,a,b,tol)
%QUADTX
%   Q = QUADTX(F,A,B,tol) aproksimira vrijednost
%   integrala funkcije F(x) na segmentu [A,B]
```

```
%   tol =  zadana tolerancija, default = 1.e-6

if nargin < 4 | isempty(tol)
   tol = 1.e-6;
end

% Inicijalizacija
c = (a + b)/2;
fa = F(a);
fc = F(c);
fb = F(b);

% Rekurzivni poziv
[Q,k] = quadtxstep(F, a, b, tol, fa, fc, fb);
fcount = k + 3;

% ---------------------------------------------------------

function [Q,fcount] = quadtxstep(F,a,b,tol,fa,fc,fb)

% Rekurzivna funkcija koju koristi quadtx

h = b - a;
c = (a + b)/2;
fd = F((a+c)/2);
fe = F((c+b)/2);
Q1 = h/6 * (fa + 4*fc + fb);
Q2 = h/12 * (fa + 4*fd + 2*fc + 4*fe + fb);
if abs(Q2 - Q1) <= tol
   Q  = Q2 + (Q2 - Q1)/15;
   fcount = 2;
else
   [Qa,ka] = quadtxstep(F, a, c, tol, fa, fd, fc);
   [Qb,kb] = quadtxstep(F, c, b, tol, fc, fe, fb);
   Q  = Qa + Qb;
   fcount = ka + kb + 2;
end
```

# 4

# Dodatak

## 4.1 Neki važni pojmovi iz linearne algebre i matematičke analize

### 4.1.1 "Veliko" O i "malo" o notacija

Često je potrebno uspoređivati asimptotsko ponašanje zadanih realnih funkcija $f(x)$ i $g(x)$ kada varijabla $x$ teži ka $x_0$. U tu svrhu koristimo notaciju "veliko" i "malo" O[1] s kojom smo se upoznali u Matematici 2. Ponovimo ovdje, radi potpunosti, definiciju spomenutih simbola O i $o$. Neka su $f,\ g\colon X \mapsto \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ te $x_0$ točka gomilišta skupa $X$ ($x_0$ može biti jednako $\infty$). Simbole $\mathcal{O}(\cdot)$ i $o(\cdot)$ definiramo na sljedeći način:

$$f = \mathcal{O}(g) \quad (x \to x_0) \Longleftrightarrow \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty \tag{4.1}$$

$$f = o(g) \quad (x \to x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0. \tag{4.2}$$

Uočimo najprije da je izraz (4.1) ekvivalentan tvrdnji da postoji konstanta $C > 0$ takva da vrijedi $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C$, za svako $x$ iz neke *okoline* točke $x_0$. Nadalje, važno je naglasiti da se znak jednakosti u izrazima (4.1), (4.2) koristi u simboličkom smislu. Tako naprimjer iz tvrdnji $f_1(x) = o(g(x))$ i $f_2(x) = o(g(x))$ ne slijedi nužno da je $f_1 = f_2$. Ono što u tom slučaju možemo zaključiti je naprimjer da vrijedi $f_1(x) - f_2(x) = o(g(x))$, odnosno $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$.

**Primjer 4.1** Uvjerite se da vrijede sljedeće tvrdnje:

- $f(x) = 7x + 6x^2$, $g(x) = x^2$. Vrijedi: $f = \mathcal{O}(g)$, $x \to 1$

[1] Landauova notacija

- $f(x) = x\ln(1+x)$, $g(x) = x$. Vrijedi: $f = o(g)$, $x \to 0+$
- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3)$, $x \to 0$
- $\ln(x) = o(x^\alpha)$, $x \to \infty$, $\alpha > 0$
- $\dfrac{1}{1-h} = 1 + h + \mathrm{O}(h^2)$, $h \to 0$ $(0 < h < 1)$
- $2n^4 + 3n^3 + 5n^2 + n = \mathrm{O}(n^4)$, $n \to \infty$

### 4.1.2 Vektorski prostori

Jedan od najvažnijih koncepata u matematici je pojam vekorskog prostora. Ugrubo rečeno, vektorski prostor je svaki skup u kome znamo zbrajati elemente i množiti ih s realnim, odnosno kompleksnim brojevima. Pri tome zbrajanje i množenje zadovoljava uobičajena pravila zbrajanja i množenja realnih brojeva i ono nas ne vodi izvan promatranog skupa. Preciznije, pogledajmo sljedeću definiciju.

**Definicija 4.1** Za neprazni skup $X$ kažemo da je vektorski prostor ukoliko su zadovoljeni sljedeći aksiomi.

A1 Suma svaka dva elementa $x, y \in X$ jedinstveno određuje element $z = x+y \in X$ pri čemu vrijede sljedeća pravila

(i) $x + y = y + x$ (komutativnost)

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asocijativnost)

(iii) Postoji element $0 \in X$ takav da vrijedi $x + 0 = x$, $\forall x \in X$.

(iv) Za svaki element $x \in X$ postoji element $-x$ takav da vrijedi $x+(-x) = 0$.

A2 Za svaki realan broj $\alpha \in \mathbb{R}$ te za svaki element $x \in X$ jedinstveno je određen element $\alpha x \in X$ tako da vrijedi

(i) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(ii) $1x = x$

A3 Zbrajanje i množenje definirano aksiomima $A1$ i $A2$ zadovoljava zakone distributivnosti:

(i) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

(ii) $\alpha(x + y) = \alpha x + \beta y$

### 4.1.3 Neprekidnost, ograničenost, integrabilnost

### 4.1.4 Teoremi srednje vrijednosti

**Propozicija 4.1** *Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ integrabilne na segmentu $[a, b]$, te neka je $g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$. Tada vrijedi*

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx,$$

*gdje je $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$.*

**Teorem 4.1** Integralni teorem srednje vrijednosti *Neka su funkcije $f$ i $g$ integrabilne na segmentu $[a, b]$ i neka je $m = \inf f(x)$ i $M = \sup f(x)$. Nadalje, neka je $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$. Tada postoji $c \in \mathbb{R}$, $m \leq c \leq M$ takav da vrijedi*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = c \int_a^b g(x)dx. \tag{4.3}$$

*Posebno, ako je $g$ neprekidna na $[a, b]$ onda postoji $\tau \in [a, b]$ takav da vrijedi*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\tau) \int_a^b g(x)dx.$$

**Dokaz.**