2. DOMAĆA ZADAĆA IZ NUMERIČKE MATEMATIKE

NAPOMENA: Ako nije navedeno koji je kubični splajn potrebno koristiti (prirodni, potpuni, periodički), možete koristi kubični splajn po izboru.

1. Vrijeme izvršavanja programa uglavnom ovisi o broju funkcija i broju aritmetičkih operacija. Pretpostavimo da želimo izvrijedniti polinom

$$p(x) = a_1x^4 + a_2x^3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$$

u nekoj zadanoj točki. Je li bolje koristiti gornju ili sljedeću formulaciju:

$$p(x) = (((a_1x + a_2)x + a_3)x + a_4)x + a_5?$$

Za zadani $x_0 \in \mathbf{R}$ izračunajte broj operacija potreban za računanje $p(x_0)$ u prvom i drugom slučaju. Napišite program u Matlabu koji izvrednjava polinom

$$\sum_{i=0}^{N-1} a_i x^i$$

za $N = 10^6$ za ulaznu vrijednost x, ako je $a_i = i + 1$ koristeći prvi i drugi zapis polinoma (poopćen za polinom proizvoljnog stupnja). Koristeći naredbu 'tic' 'toc' izmjerite potrebno vrijeme izvršavanja programa za svaki od ovih zapisa.

2. *Ovaj zadatak sastoji se od 2 dijela (A dio -3 boda, B dio -2 boda)*
(A) Za sljedeće standardne izbore čvorova interpolacije na zadanim intervalima izračunajte uvjetovanost Vandermondeove matrice u ovisnosti o n:

- $[-1, 1]$, $x_i = -1 + \frac{2}{n}i, \quad i = 0, 1, \ldots, n$
- $[0, 1]$, $x_i = \frac{i}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$
- $[0, 1]$, $x_i = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$

Za svaki primjer uvjetovanost prikažite grafički u ovisnosti o n.

(B) Za podatke

x	0	1	2	3	4
f(x)	-5	-6	-1	16	20

odredite Lagrangeovu bazu i prikažite polinome Lagrangeove baze grafički na intervalu $[0, 4]$.

3. Eksperiment je dao sljedeće podatke

t	0.0	0.5	1.0	6.0	7.0	9.0
y	0.0	1.6	2.0	2.0	1.5	0.0

Želimo interpolirati podatke s glatkom krivuljom u nadi da dobijemo razumne vrijednosti od y za vrijednosti od t između kojih je uzeto mjerenje.
a) Odredite polinom stupnja 5 koji interpolira zadane podatke i nacrtajte graf za $0 \leq t \leq 9$.
b) Odredite kubični splajn koji interpolira dane podatke i prikažite dobiveni splajn grafički za $0 \leq t \leq 9$.
c) Koja metoda po vašem mišljenju bolje odgovara ovom skupu podataka.
d) Može li po dijelovima linearna interpolacija biti dobar izbor za ovakve podatke? Odredite i grafički prikažite po dijelovima linearni interpoland.

4. Zadan je sljedeći skup vrijednosti koji predstavlja vrijednosti kvadratnog korijena u odabranim točkama.

t	0	1	4	9	16	25	36	49	64
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

a) Izračunajte polinom stupnja 8 koji interpolira ove točke. Prikažite taj polinom grafički na domeni $[0, 64]$ i na istoj slici nacrtajte i funkciju $\sqrt{x}$.
b) Upotrijebite kubični splajn za interpolaciju istih podataka i prikažite dobiveni splajn grafički.
c) Dobivamo li na cijelom intervalu veću točnost u a) ili b) slučaju?
d) Na temelju slike zaključite koji je interpoland točniji na segmentu $[0, 1]$.

5. Gama funkcija definirana je na sljedeći način

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \, dt \quad x > 0.$$

Za prirodni broj n Gama funkcija ima vrijednost $\Gamma(n) = (n-1)!$, pa bi interpolacija skupa podataka

t	1	2	3	4	5
y	1	1	2	6	24

trebala voditi k aproksimaciji Gama funkcije.
a) Izračunajte polinom stupnja 4 koji interpolira ove točke i prikažite grafički na istom grafu kao i Gama funkciju.
b)Izračunajte kubični splajn koji interpolira ove točke i prikažite grafički na istom grafu kao i Gama funkciju.
c) Dobivamo li na cijelom intervalu veću točnost u a) ili b) slučaju?
d) Na temelju slike zaključite koji je interpoland točniji na segmentu $[1, 2]$.

6. Napišite program koji računa prirodni kubični splajn na temelju $n+1$ ulaznih podataka $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \ldots, n$. Odaberite 3 funkcije iz kojih ćete izgenerirati ulazne podatke za vaš program i izračunati kubični splajn za njih. Za svaki primjer prikažite dobiveni splajn i funkciju na istom grafu.

7. Napišite program koji računa kubični splajn s potpunim rubnim uvjetima ($s'(x_0) = f'(x_0)$, $s'(x_N) = f'(x_N)$, gdje su $f'(x_0)$ i $f'(x_N)$ zadane veličine), i za zadane podatke $(x_i, f(x_i)), i = 0, \ldots, n$. Odaberite 3 funkcije iz kojih ćete izgenerirati ulazne podatke za vaš program i izračunati kubični splajn za njih. Za svaki primjer prikažite dobiveni splajn i funkciju na istom grafu.

8. Napišite program koji računa kubični splajn s periodičkim rubnim uvjetima ($s'(x_0) = s'(x_N)$, $s''(x_0) = s''(x_N)$), na temelju $n+1$ ulaznih podataka $(x_i, f(x_i)), i = 0, 1, \ldots, n$. Odaberite 3 funkcije iz kojih ćete izgenerirati ulazne podatke za vaš program i izračunati kubični splajn za njih. Za svaki primjer prikažite dobiveni splajn i funkciju na istom grafu.

9. *Ovaj zadatak sastoji se od 2 dijela (A dio -3 boda, B dio -2 boda)*
(A) Neka je dana funkcija $f(x) = \sin(x)$ i neka je $[a, b] = [0, \pi]$. Nadalje, neka su čvorovi interpolacije ekvidistantno raspoređeni, tj. $x_j = \frac{j\pi}{n}$ za $j = 0, 1, \ldots, n$. Kako je $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty = 1$ slijedi:

$$\begin{aligned}\|f - p_n\|_\infty &\leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x\in[0,\pi]} \left|(x-0)(x-\frac{\pi}{n})(x-\frac{2\pi}{n})\ldots(x-\pi)\right| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{n+1} \to 0,\ n \to \infty.\end{aligned}$$

Nacrtajte grešku interpolacije $\|f - p_n\|_\infty$ u ovisnosti o $n = 1, \ldots, 7$, te interpolirajte funkciju $\sin x$ kvadratnim polinomom i nacrtajte sliku.

(B) Za podatke

x	0	1	2	3	4
f(x)	-5	-6	-1	16	20

odredite Lagrangeovu bazu i prikažite polinome Lagrangeove baze grafički na intervalu $[0, 4]$.

10. Zadani su podaci

x	1	2	3	5	6
f(x)	4.75	4	5.25	19.75	36

Napišite program koji računa interpolacijski polinom, linearni i kubični splajn za zadane podatke i dobivene funkcije prikažite na istom grafu.

11. Napišite program koji računa kvadratni prirodni splajn. Odredite i linearni i kubični splajn za sljedeće podatke i prikažite sve na istom grafu.

x	0	5	7	8	10
f(x)	0	2	-1	-2	20

12. Napišite program koji će učitati točke $T(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ i definirati linearni interpolacijski splajn. Za zadani broj $z_0 \in [x_1, x_2]$ izračunajte vrijednost linearnog interpolacijskog splajna.

13. Zadani su podaci

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	2	3	1	0.5

Konstruirajte prirodni i not-a-knot kubični splajn. Prikažite ih grafički i usporedite dobivene rezutate.

14. Zadana je funkcija $f(x) = \pi \sin(\frac{x}{\pi})$ na intervalu $[-5, 5]$ i točke $x_i = -5 + ih$ za $i = 0, 1, \ldots, 10$ i $h = 1$. Odredite prirodni i not-a-knot kubični splajn. Prikažite ih na istom grafu sa zadanom funkcijom i usporedite dobivene rezultate.

15. Budući da vrijedi
$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx = \pi$$
približnu vrijednost broja π možemo odrediti numeričkom integracijom. Napišite program koji računa navedeni integral kompozitnom pravokutnom, trapeznom i Simpsonovom formulom i to za različite korake mreže h. Budući da je točna vrijednost broja π poznata, za svaku od metoda u ovisnosti o h nacrtajte apsolutnu i relativnu grešku za dobiveni rezultat. Dodatno, riješite navedeni integral koristeći Matlabovu funkciju *quad* (ili neku drugu rutinu koja koristi adaptivnu integraciju).

16. Poznato je da vrijedi:
$$\int_0^1 \sqrt{x}\ln x\,dx = -\frac{4}{9}.$$
Napišite program koji računa navedeni integral kompozitnom pravokutnom, trapeznom i Simpsonovom formulom i to za različite korake mreže h. Budući da znamo da je vrijednost integrala $-\frac{4}{9}$ za svaku od metoda u ovisnosti o h nacrtajte apsolutnu i relativnu grešku za dobiveni rezultat. Dodatno, riješite navedeni integral koristeći Matlabovu funkciju *quad* (ili neku drugu rutinu koja koristi adaptivnu integraciju).

17. Zadan je integral
$$\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx.$$
Odredite točnu vrijednost ovog integrala, te napišite program koji koristi kompozitnu pravokutnu, trapeznu i Simpsonovu formulu, te Matlabovu funkciju *quad* (ili neku drugu rutinu koja koristi adaptivnu integraciju). Za svaku od metoda u ovisnosti o h nacrtajte apsolutnu i relativnu grešku za dobiveni rezultat. Računski odredite h tako da apsolutna greška bude manja od zadane točnosti ε, za kompozitnu pravokutnu, trapeznu i Simpsonovu formulu.

18. Zadan je integral
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\, dx.$$
Odredite točnu vrijednost ovog integrala, te napišite program koji koristi kompozitnu pravokutnu, trapeznu i Simpsonovu formulu, te Matlabovu funkciju *quad* (ili neku drugu rutinu koja koristi adaptivnu integraciju). Za svaku od metoda u ovisnosti o h nacrtajte apsolutnu i relativnu grešku za dobiveni rezultat.

19. Zadan je integral
$$\int_{0}^{10} \frac{50}{\pi(2500x^2+1)}\, dx.$$
Odredite točnu vrijednost ovog integrala, te napišite program koji koristi kompozitnu pravokutnu, trapeznu i Simpsonovu formulu za njegovo izračunavanje. Grafički odredite red konvergencije spomenutih metoda.

20. Zadan je integral
$$I = 4\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-(1-a^2)\sin^2 t}\, dt$$
Za $a \neq 1$ ne može se elementarno naći primitivna funkcija ove podintegralne funkcije. Napišite program koji izračunava vrijednost ovog integrala za neku ulaznu vrijednost a primjenom kompozitne trapezne i Simpsonove formule. U oba slučaja, za $a = 0.5$, računski odredite n tako da greška bude manja od 0.00005.

21. Za podintegralnu funkciju u nepravom integralu
$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt$$
ne postoji elementarna primitivna funkcija. Napišite program koji računa vrijednost ovog integrala kompozitnim trapeznom i kompozitnim Simpsonovom formulom, za $x = 0.5,\ 1,\ 5$. Izračunajte vrijednost tog integrala za različit broj točaka n uzet u

kompozitnom pravilu i prikažite grafički izračunate vrijednosti za svaku od formula u ovisnosti o n.
Uputa: Iskoristite

$$I(x) = 0.5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\frac{t^2}{2})\, dt.$$

22. Zadan je eliptički integral

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2\theta}}.$$

Napišite program koji numerički računa vrijednost ovog integrala za različite vrijednosti od x, kojih ima dovoljno mnogo, tako da grafički prikažete funkciju $K(x)$ na intervalu $0 \le x \le 1$. Svoje rezultate usporedite s rezultatima koje daje neka već postojeća (Matlabova) rutina za računanje eliptičkih integrala na istom skupu točaka. Sve prikažite na istom grafu.

23. Intenzitet svjetla nakon difrakcije pokraj ravnog brida je određen vrijednošću Fresnelovih integrala

$$C(x) = \int_0^x \cos(\frac{\pi t^2}{2})\, dt,$$
$$S(x) = \int_0^x \sin(\frac{\pi t^2}{2})\, dt.$$

Napišite program koji numerički računa vrijednost ovih integrala za različite vrijednosti od x, kojih ima dovoljno mnogo, tako da grafički približno prikažete funkcije $C(x)$ i S(x) na intervalu $0 \le x \le 5$.

24. a) Za svaku vrijednost od m, $m = 1, 2, \ldots, 5$ izračunajte DFT niza $x_k = \cos(mk\pi)$, $k = 0, 1, \ldots, 7$
b) Nacrtajte grafove funkcija $\cos(\pi t)$ i $\cos(3t)$. Izračunajte DFT niza $x_k = cos(\pi k)$ i niza $x_k = \cos(3k)$, $k = 0, 1, \ldots, 7$ i usporedite rezultate. Objasnite zašto dobivene transformacije mogu biti tako različite dok su funkcije slične.

25. Neka je C matrica oblika

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & \ldots & c_2 & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \ldots & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \ldots & c_1 & c_0 \end{bmatrix}$$

Primjetimo da je matrica C određena vektorom $(c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1, c_0)$. Generirajte neku matricu C reda $n \ge 8$ i pokažite empirijski da matrica $\frac{1}{\sqrt{n}} F_n$ dijagonalizira C. Što ovaj rezultat govori o svojstvenim vektorima od C?

26. Konvolucija dva niza definirana je formulom

$$z_m = (u * v)_m = \sum_{k=0}^{n-1} v_k u_{m-k},\ m = 0, 1, \dots, n-1$$

Gornja je formula ekvivalentna rješavanju sljedećeg sustava

$$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 & u_{n-1} & \dots & u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 & u_{n-1} & \dots & u_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2} & \dots & u_1 & u_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

Transformirani sustav zadovoljava

$$\begin{bmatrix} \hat{z}_0 \\ \hat{z}_1 \\ \vdots \\ \hat{z}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \hat{u}_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \hat{u}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_0 \\ \hat{v}_1 \\ \vdots \\ \hat{v}_{n-1} \end{bmatrix}$$

Implementirajte algoritam koji računa konvoluciju dva niza. Morate upotrijebiti DFT i inverznu DFT.

27. Polinom stupnja $n-1$ jedinstveno je određen vrijednostima u n različitih točaka. Vrijednost produkta polinoma u nekoj točki t jednaka je produktu faktora u toj točki tj. $(p \cdot q)(t) = p(t) \cdot q(t)$. Dakle polinom stupnja $2n-2$, produkt dva polinoma stupnja $n-1$ jedinstveno je određen vrijednostima produkata polinoma $p(x)$ i $q(x)$ u $2n-1$ različitih točaka. Ukoliko su točke u kojima računamo vrijednosti polinoma odgovarajući korijeni iz jedinice tada se računanje vrijednosti u danim točkama i interpolacija mogu zamijeniti računanjem DFT i inverzne DFT. Implementirajte funkciju koja ce množiti polinome koristeći FFT i to na sljedeći način. Želimo pomnožiti dva polinoma stupnja $n-1$ da dobijemo polinom stupnja $2n-2$.

    (a) Svaki polinom zadan je koeficijentima. Formirajte nizove koeficijenata polinoma,tako da za koeficijente koji su uz potencije veće od $n-1$ pa do $2n-2$ zapišete 0.
    (b) Izračunajte FFT za svaki niz koeficijenata.
    (c) Pomnožite dobivene vektore po koordinatama.
    (d) Izračunajte inverznu Fourierovu transformaciju vektora iz c). Na taj način dobivate koeficijente produkta polinoma.

    Testirajte svoj program na polinomima po izboru.