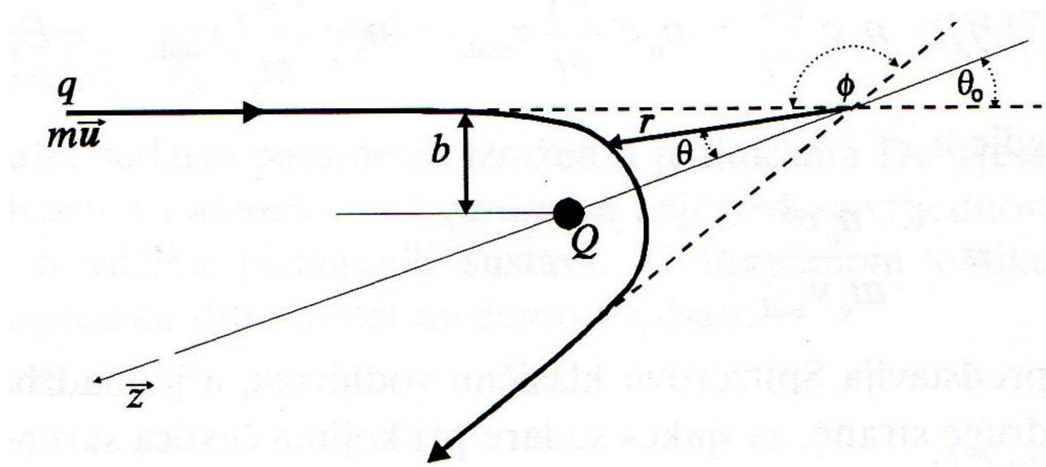
PONAŠANJE JEDNE ČESTICE

DVOČESTIČNI SUDARI

U prethodnim razmatranjima smo gledali kolektivna svojstva plazme i pri tom opisivali samo kolektivnu dinamiku elektrona. Uloga iona u tom opisu je svedena na to da postoje i da se pomoću njih ostvaruje makroskopska elektroneutralnost plazme.

Međutim, u stvarnosti, elektroni ipak s vremena na vrijeme dolaze u blizak kontakt s ionima i tada međudjelovanje 2 čestice postaje važno. Razmatrat ćemo ulogu kulonskog međudjelovanja u dvojnim sudarima elektrona i iona.

Razmatrat ćemo elastični sudar nabijene čestice naboja q i mase m s mnogo masivnijom česticom naboja Q koja tijekom sudara ostaje na mjestu.



Slika 1.4. Elastični sudar čestice male mase s česticom velike mase

Putanja naboja q određena je početnom brzinom u_0, a to je brzina na velikoj udaljenosti od naboja Q.

Svojstva putanje se iskazuju preko dva parametra:

- parametra sudara b (normalna ili okomita (najkraća) udaljenost od centra nabijene čestice Q do pravca početnog kretanja nabijene čestice q)
- iznosa brzine na velikoj udaljenosti u_0

Neka je z-os os simetrije s obzirom na putanju naboja q. Kut pod kojim naboj q nalijeće na naboj Q je označen s θ_0 - to je polukut kuta suplementa kuta raspršenja ϕ.

Polarna koordinata čestice q s obzirom na naboj Q je θ, a radijalna koordinata r.

Coulombova sila u određenom smjeru z-osi u danom trenutku iznosi:

$$F_z = \frac{qQ\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{1}$$

Za vrijeme sudara čestica q promijeni količinu gibanja za:

$$\Delta p_z = 2mu_0\cos\theta_0 = \int_{-\infty}^{\infty} F_z dt \tag{2}$$

Uvrstimo li jednadžbu (1) u (2) i prijeđemo li na integriranje po θ, dobijemo:

$$\Delta p_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{qQ}{r^2}\frac{\cos\theta}{\theta}d\theta = \frac{qQ\sin\theta_0}{2\pi\varepsilon_0 bu_0} \tag{3}$$

Također smo pretpostavili da je kutna količina gibanja $mr^2 d\theta / dt$ konstantna u polju centralne sile i jednaka početnoj vrijednosti mbu_0.

Iz (2) i (3) slijedi: $$\tan\theta_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0 mu_0^2 b}{qQ} \tag{4}$$

Tijekom sudara čestica je skrenula za kut raspršenja $\phi = \pi - 2\theta$, što znači da vrijedi:

$$\sin(\phi/2) = \cos\theta_0$$
$$\cos(\phi/2) = \sin\theta_0$$
$$\cot(\phi/2) = \tan\theta_0$$

Jednadžbu (4) možemo pisati kao:

$$\cot(\phi/2) = \frac{4\pi\varepsilon_0 mbu_0^2}{qQ} \tag{5}$$

RUTHERFORDOVA FORMULA RASPRŠENJA

Za vodikovu plazmu vrijedi:

$$\cot(\phi/2) = \frac{4\pi\varepsilon_0 m_e bu_0^2}{e^2} \tag{6}$$

Za male kutove raspršenja ($\phi \to 0$) nalazimo da $\cot(\phi/2) \to \infty$ pa jednadžba (5) pokazuje da parametar sudara b postaje velik pri raspršenju pod malim kutom:

$$b \propto \cot(\phi/2)$$

To znači da postoji neki kut raspršenja pri kojem je b tako velik da naboj q ima manji parametar za sudar s nekom drugom česticom nego za sudar s česticom naboja Q.

Svaka nabijena čestica u plazmi istodobno doživljava sudar s mnoštvom čestica podjednakim intenzitetom. Tek vrlo rijetko doživljava dvočestični sudar i to kad se nađe izrazito blizu samo jedne čestice za što je mala vjerojatnost. Ovo svojstvo potječe od dugog dosega Coulombove sile i pokazuje da je za opis plazmenog sustava pogodniji kolektivni pristup.

SPITZEROVA VODLJIVOST

Izračunajmo sada klasičnu električnu vodljivost potpuno ionizirane vodikove plazme (uzima se točnost na red veličine). Za vodikovu plazmu vrijedi: $|Q| = |q| = e$

Takva vodljivost, koja se temelji samo na razmatranju dvojnih sudara se zove **SPITZEROVA ELEKTRIČNA VODLJIVOST**.

Kad su u plazmi pobuđeni elektrostatski valovi te dolazi do raspršenja elektrona i na električnom polju vala, povećava se efektivna učestalost sudara pa je električna vodljivost manja od Spitzerove vodljivosti. Takvu električnu vodljivost nazivamo **ANOMALNOM ELEKTRIČNOM VODLJIVOŠĆU**.

Ako s τ_{sud} označimo tipično vrijeme koje protekne između dva sudara, onda je:

$\nu_{sud} = 1/\tau_{sud}$ **SUDARNA UČESTALOST**.

Radi jednostavnosti uzmemo da je električno polje u smjeru osi x pa slijedi:

$$j_x = n_e e \frac{\partial x}{\partial t} = n_e e \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \tau_{sud} = n_e e \frac{eE_x}{m_e} \tau_{sud} = \sigma E_x \qquad (7)$$

Gdje je:

$$\sigma = n_e \frac{e^2}{m_e \nu_{sud}} \qquad \textbf{Spitzerova klasična vodljivost} \qquad (8)$$

a jednadžba (7) $j_x = \sigma E_x$ **Ohmov zakon**.

Za „jake“ sudare pri kojima čestica skrene za kut reda veličine $\pi/2$ i više (tzv. sudari koji „zaustavljaju“ česticu), možemo reći da je red veličine promjene količine gibanja jednak samom iznosu količine gibanja:

$$\Delta p_x \approx p_x$$

$$\Delta p_x \approx m_e u_x \approx F\tau_0 \qquad (9)$$

Ovdje je:

$\tau_0 = b/u$ **procjena trajanja sudara**,

b **sudarni parametar**.

$F = e^2 / 4\pi\varepsilon_0 b^2$ **procjena iznosa Coulombove sile**

Iznos količine gibanja je:

$$\Delta p_x \approx m_e u_x \approx F\tau_0 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 b u_x} \tag{10}$$

Odatle je sudarni parametar:

$$b = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e u_x^2} \tag{11}$$

Udarni presjek možemo približno procijeniti na:

$$A_{sud} = \pi b^2 = \frac{e^4}{16\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 u_x^4} \tag{12}$$

Kako za sudarnu učestalost možemo pisati:

$$\nu_{sud} = n_e A u_x \tag{13}$$

Nalazimo: $\nu_{sud} \propto \frac{1}{u_x^3}$, tj.

$$\nu_{sud} = \frac{n_e u_x e^4}{16\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 u_x^4} \tag{14}$$

Jednadžba koja definira električnu vodljivost postaje:

$$\sigma = \frac{16\pi m_e \varepsilon_0^2 u_x^3}{e^2} \tag{15}$$

Uz

$$u = v_T = (k_B T / m_e)^{1/2}$$

nalazimo približni oblik za Spitzerovu električnu vodljivost:

$$\sigma = \frac{16\pi m_e \varepsilon_0^2 k_B^{3/2}}{m_e^{1/2} e^2} T^{3/2} \tag{16}$$

Detaljnijim razmatranjem (koje mi nismo provodili) nalazi se točan oblik izraza za sudarnu učestalost:

$$\nu_{sud} = \frac{4}{3}\left(\frac{2\pi}{m_e}\right)^{1/2} \frac{n_e e^4}{16\pi\varepsilon_0^2 (k_B T)^{3/2}} \ln\Lambda \tag{17}$$

Ovdje je:

$\Lambda = r_D / b$ **maksimalni sudarni parametar izražen u jedinicama Debyeva polumjera**.

Član $\ln\Lambda$ nazivamo **COULOMBOVIM LOGARITMOM** i njegova se vrijednost kreće u intervalu od 10 do 20 za većinu plazmenih sustava.

U brojčanom obliku električnu vodljivost i magnetsku difuzivnost možemo napisati kao:

$$\sigma \approx 10^{-3} T^{3/2}$$

$$\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \approx 10^{9} T^{-3/2} \tag{18}$$

Pogledajmo važne posljedice jednadžbe (12), odn. (14):

$$A_{sud} = \pi b^2 = \frac{e^4}{16\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 u_x^4} \qquad \nu_{sud} = \frac{n_e u_x e^4}{16\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 u_x^4}$$

Udarni presjek je proporcionalan s u^{-4} što znači da je vjerojatnost sudara znatno manja za brže elektrone.

Srednji slobodni put

$l_{sud} = v\tau_{sud} \propto u^4$ je znatno veći za brže elektrone.

Ako srednji slobodni put za elektron dane brzine postane veći od razmjera sustava, taj elektron „bježi“ iz sustava. Pri Maxwellovoj raspodjeli elektrona dio elektrona koji mogu pobjeći iz sustava je zanemariv. No pojavi li se dovoljno jako vanjsko električno polje te je veći broj elektrona znatno ubrzan između dva sudara, **PROCES BJEŽANJA ELEKTRONA** može zahvatiti značajni dio elektronske populacije.

Dio elektrona u repu Maxwellove raspodjele (elektroni s brzinom većom od neke kritične vrijednosti za dano polje) uopće ne doživljavaju sudare i snop brzih elektrona napušta plazmeni sustav u smjeru suprotnom od smjera električnog polja.

Elektroneutralnost se uspostavlja tzv. **POVRATNOM STRUJOM** u ostatku plazme za koju nije uspostavljen režim „bježanja“ – to je tzv. **POZADINSKA PLAZMA**.

Efekt **MASOVNOG BJEŽANJA** počinje ako elektroni između dva uzastopna sudara dobije energiju veću od termičke energije:

$$eE\lambda_{sud} \geq eE_D\lambda_{sud} = k_B T_e \tag{19}$$

E_D predstavlja kritično električno polje pri kojem nastaje pojava masovnog bježanja elektrona.

Uzevši u obzir (14) i uvrštavanjem $\lambda_{sud} = u\tau_{sud}$, nalazimo:

$$E \geq \frac{n_e e^3}{16\pi\varepsilon_0^2 k_B T_e} \tag{20}$$

Točnije razmatranje temeljeno na kinetičkoj teoriji daje procjenu vrijednosti kritičnog električnog polja:

$$E_D = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_D^2} \tag{21}$$

Ovdje je:

$r_D = \lambda_D$ Debyev polumjer.

GIBANJE NABIJENE ČESTICE U HOMOGENOM MAGNETSKOM POLJU

Plazma se sastoji od nabijenih čestica pa magnetsko polje znantno utječe kako na ponašanje pojedinih čestica tako i na ponašanje cijelog plazmenog sustava.

Na česticu naboja q, koja se u magnetskom polju $\vec{B}$ giba brzinom $\vec{u}$, djeluje **LORENTZOVA SILA**:

$$\overrightarrow{F_L} = q\vec{u} \times \vec{B} \qquad (22a)$$

Kako je Lorentzova sila uvijek okomita na smjer brzine, ona ne može mijenjati iznos brzine već samo smjer.

Prethodnu jednadžbu smatramo zapravo jednadžbom gibanja i možemo je pisati u sljedećem obliku:

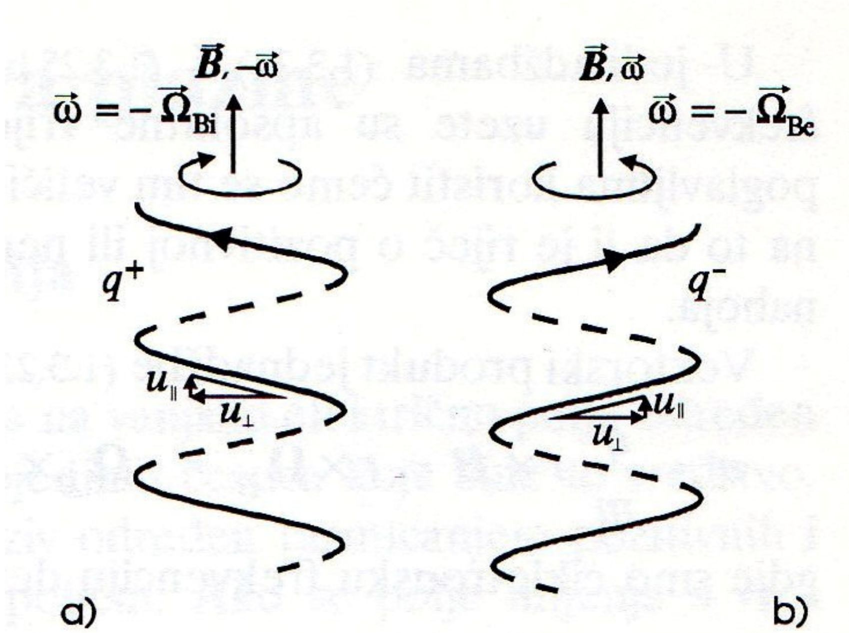
$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{q}{m}\vec{u} \times \vec{B} \qquad (22b)$$

Skalarnim množenjem s $\vec{u}$ nalazimo $u^2 = konst.$, tj. energija čestica koja se giba u stacionarnom magnetskom polju je konstantna.

Da bi se promijenila energija čestice, potrebna je neka druga vanjska sila ili nestacionarno polje (promjena magnetskog polja dovodi do pojave indukcije električnog polja koje može ubrzati česticu).

Jednadžba $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \frac{q}{m}\vec{u} \times \vec{B}$ (22b) pokazuje da je pri konstantnom iznosu komponente brzine, okomite na homogeno i stacionarno polje, projekcija gibanja čestice u ravnini okomitoj na magnetsko polje <u>kružnica</u>.

Pozitivno nabijene čestice kruže u smjeru kazaljke na satu, a negativne u suprotnom smjeru (slika).



Slika 1.5. Kruženje nabijenih čestica pri $u_\parallel$=konst. u homogenom magnetskom polju **a)** pozitivno nabijena čestica; **b)** negativno nabijena čestica

Iz jednadžbe $\vec{F_L} = q\vec{u} \times \vec{B}$ (22a) vidimo da u smjeru magnetskog polja ne djeluje sila pa se u smjeru silnica čestica giba konstantnom brzinom.

Superpozicija tih dvaju gibanja opisana je **HELIKOIDOM** (slika).

Lorentzova sila uzrokuje **centripetalno ubrzanje**:
$a = u^2 / r = \omega^2 r$

r - polumjer zakrivljenosti putanje
ω - kutna brzina ili kružna frekvencija

Slijedi:

$$-\frac{u^2 \vec{r}}{r^2} = \frac{q}{m} \vec{u} \times \vec{B} \qquad (23a)$$

Ili:

$$\frac{u_\perp^2}{r} = \frac{q}{m} u_\perp B \qquad (23b)$$

Gdje su:

$u_\perp$ - komponenta brzine okomita na smjer magnetskog polja
m - masa čestice

Iz ovih jednadžbi možemo naći polumjer kružnog gibanja naboja u ravnini okomitoj na magnetsko polje (**LARMOROV POLUMJER**):

$$r_L = \frac{m}{qB} u_\perp \qquad (24)$$

Uzevši u obzir
$u_\perp = \omega r = \Omega_B r_L$

nalazimo iznos kružne frekvencije:

$$\Omega_B = \frac{qB}{m} \qquad (25a)$$

To je **CIKLOTRONSKA FREKVENCIJA.**

Elektronska ciklotronska frekvencija i ionska ciklotronska frekvencija:

$$\left|\Omega_{Be}\right| = \frac{eB}{m_e} \qquad \left|\Omega_{Bi}\right| = \frac{eB}{m_i} \qquad (25b)$$

U jednadžbama za Larmorov polumjer i ciklotronsku frekvenciju uzete su apsolutne vrijednosti, ali u detaljnim razmatranjima treba uzeti u obzir da li se radi o pozitivnoj ili negativnoj čestici.

$-\frac{u^2 \vec{r}}{r^2} = \frac{q}{m}\vec{u}\times\vec{B}$ (23a) vektorski pomnožimo s $\vec{B}$ te uz $\frac{u_\perp^2}{r} = \frac{q}{m}u_\perp B$ (23b) dobijemo:

$$\vec{u} = \frac{q}{m}\vec{r}\times\vec{B} = \vec{r}\times\overrightarrow{\Omega_B} = -\overrightarrow{\Omega_B}\times\vec{r} \qquad (26)$$

Ciklotronsku frekvenciju smo definirali kao vektor
$\overrightarrow{\Omega_B} = \vec{B}q/m$

tj. za elektrone i ione onda imamo:

$$\overrightarrow{\Omega_{Be}} = -\vec{B}q/m_e \qquad \overrightarrow{\Omega_{Bi}} = \vec{B}q/m_i \qquad (27)$$

Uspoređivanjem jednadžbe (26) $\quad \vec{u} = \frac{q}{m}\vec{r}\times\vec{B} = \vec{r}\times\overrightarrow{\Omega_B} = -\overrightarrow{\Omega_B}\times\vec{r}$

S $\quad \vec{u} = \vec{\omega}\times\vec{r}$,

vidimo da je $\quad \overrightarrow{\Omega_B} = -\vec{\omega}$

Ciklotronsku frekvenciju možemo shvatiti kao pseudovektor u smjeru magnetskog polja za pozitivnu česticu i obrnuto smjeru magnetskog polja za negativnu česticu.

Uzevši u obzir smjer rotacije pozitivne i negativne čestice, nalazimo da je taj pseudovektor usmjeren suprotno smjeru pseudovektora kutne količine gibanja.

Podsjetnik: Aksijalni vektori

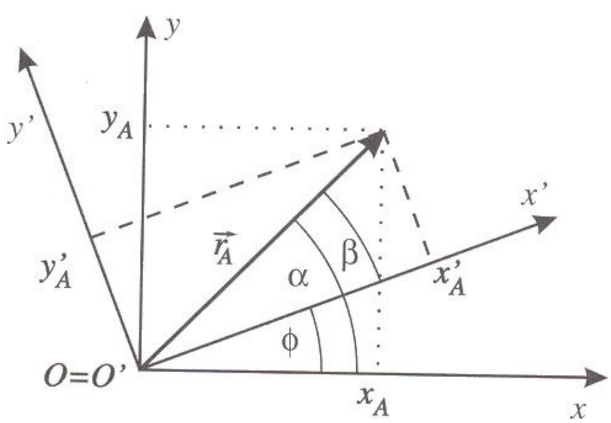
Vektor kutne brzine $\vec{\omega}$ je **aksijalni vektor**, to jest vektor koji se pri rotaciji koordinatnog sustava transformira kao vektor, ali se pri zrcaljenju ne mijenja. Općenito, uzmimo neki vektor $\vec{r}$ u pravokutnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}r\cos\alpha + \vec{j}r\sin\alpha \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

U zarotiranom koordinatnom sustavu (rotacija je oko osi z, koja gleda „iz papira“, izvedena za kut φ u pozitivnom smjeru) komponente istog vektora su:

$$\vec{r} = \vec{i}\,'x' + \vec{j}\,'y' = \vec{i}\,'r\cos\beta + \vec{j}\,'r\sin\beta \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

Vidimo da je iznos vektora nepromjenjiv (invarijantan s obzirom na rotaciju koordinatnog sustava).



SLIKA: KOMPONENTE VEKTORA U DVA MEĐUSOBNO ZAROTIRANA SUSTAVA – Horvat, Fizika 1: Mehanika i toplina, slika D2.5 str. D2-11

Pri **zrcaljenju osi**, za zrcalo postavljeno okomito na x-y ravninu, koordinate x i y promijene predznak pa imamo:

$$\vec{r} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{r})$$

Pri rotaciji, komponente vektora u fizici kao što su $\vec{v}, \vec{F}, \vec{a}, \vec{\alpha}$ ...mijenjaju se po istom pravilu kao i $\vec{r}$. Pri zrcaljenju vrijedi:

$$\vec{v} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{v})\,;\ \vec{F} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{F})\,;\ \vec{a} \xrightarrow{zrcaljenje} (-\vec{a})$$

$\vec{\omega} \xrightarrow{zrcaljenje} (\vec{\omega})$ Vektori koji se pri zrcaljenju ne mijenjaju zovu se **aksijalni vektori** (ili, ponekad, **pseudovektori**).

Za vrijeme jednog okreta (T) čestica u smjeru magnetskog polja prevali put (duljina uspona helikoide) $\lambda = u_{II} T$, gdje je komponenta brzine u smjeru silnica, a T **ciklotronski period**

$$T = 2\pi / |\Omega_B|$$

Ako je **frekvencija sudara mnogo manja od ciklotronske frekvencije**, čestica će učiniti mnogo okreta prije nego li je neki sudar odbaci do neke druge vodeće silnice (silnica u središtu ciklotronskog okretanja).

Ako je **frekvencija sudara mnogo veća od ciklotronske frekvencije**, ciklotronsko gibanje je od manje važnosti i čestica vrlo često preskače na razne vodeće silnice pa nasumično gibanje dominira nad uređenim ciklotronskim gibanjem pa je učinak magnetskog polja zanemariv.

Kružno gibanje naboja predstavlja električnu struju – gibanje naboja u ravnini okomitoj na magnetsko polje odgovara struji

$$I = q / T = q u_{\perp} / 2\pi r$$

Kružna struja I stvara magnetsko polje u smjeru suprotnom od vanjskog polja bez obzira na naboj čestice.

Taj efekt možemo opisati **MAGNETSKIM MOMENTOM** naboja koji kruži

$$r^2 \pi I = \frac{m u_{\perp}^2}{2B} \qquad (29)$$

Vidimo da je proporcionalan kinetičkoj energiji gibanja čestice okomito na magnetsko polje.