KOLEKTIVNA SVOJSTVA PLAZME

ELEKTRONSKA PLAZMENA FREKVENCIJA

Razmatrat ćemo sustav u kojem je isti broj elektrona naboja $-e$ i iona naboja $+e$, tj. plazmu vodikovog tipa. Uzet ćemo da je početna raspodjela elektrona i iona ravnomjerna, tj. plazma je početno svuda električki neutralna. Isto tako ćemo zanemariti termičko gibanje i pretpostaviti da radimo s hladnom plazmom.

Ako dio elektrona iz određenog područja premjestimo u neko drugo područje, u tom dijelu plazmenog sustava se uspostavlja pozitivan naboj, a negativan tamo gdje su premješteni elektroni. Uspostavljena raspodjela naboja stvara električno polje i ima određenu električnu potencijalnu energiju (koja je jednaka radu uloženom u razdvajanje naboja).

Kako elektroni imaju mnogo manju masu od iona, gibanje iona možemo zanemariti. Električno polje ubrzava elektrone i time nastoji poništiti uspostavljenu raspodjelu naboja. Kako elektroni dobivaju kinetičku energiju, tako sustav gubi početnu potencijalnu energiju i električno polje se smanjuje. Kad se elektroni vrate u početni položaj, električno polje je jednako 0. Na elektrone više ne djeluje sila, ali oni nastavljaju gibanje stvarajući električno polje u suprotnom smjeru od početnog. Kinetička energija elektrona prelazi u potencijalnu, elektroni se usporavaju i dolaze u položaj u kojem je električno polje istog iznosa prvobitnom, ali suprotnog smjera.

Ovo je opis polovice ciklusa titranja elektrona oko položaja ravnoteže u kojem se energija elektrostatskog polja pretvara u kinetičku energiju elektrona i obrnuto. Učestalost s kojom se takve oscilacije odvijaju naziva se **elektronskom plazmenom frekvencijom** ω_{pe}.

Pogledajmo jednodimenzionalno gibanje elektrona u električnom polju. Uzet ćemo da je u smjeru osi x pa pišemo jednadžbu gibanja:

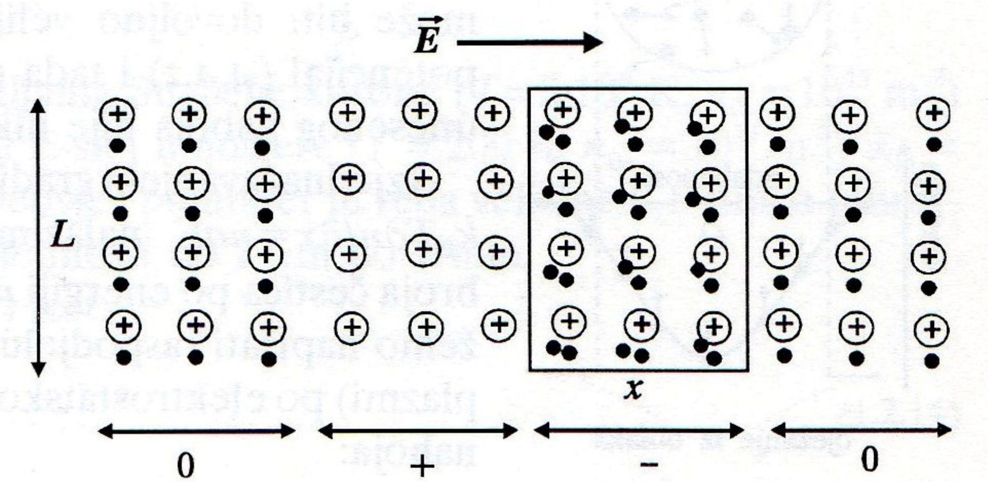
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{e}{m_e} E \qquad (1)$$

Ovdje je električno polje u smjeru osi x. Iz Maxwellovih jednadžbi izvučemo:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \qquad \textbf{Poissonova jednadžba} \qquad (2)$$

S obzirom da električno polje ima samo komponentu u smjeru x-osi, slijedi:

$$LE = -\frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{Lxn_e e}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$



Slika 1.1. Raspodjela naboja i električno polje pri plazmenim oscilacijama

L – duljina stranice zatvorene površine integriranja,
x – pomak elektrona iz položaja ravnoteže (vidljivo iz slike),
Q – električni naboj po jedinici duljine okomito na ravninu slike.

Uvrštavanjem (3) u (1) dobijemo:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\omega_{pe}^2 x \qquad (4)$$

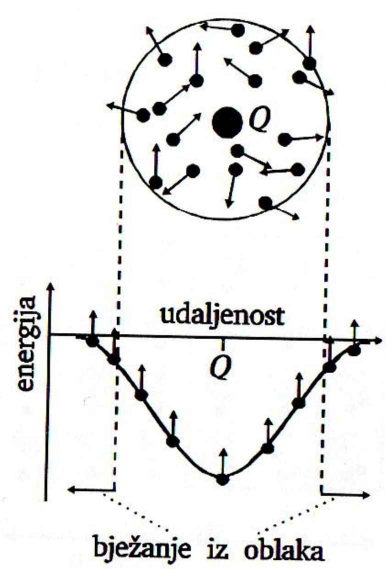
$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega_{pe}^2 E$$

Elektronska plazmena frekvencija je dana s:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}} = 56{,}3\sqrt{n_e} \qquad (5)$$

Jedinica je rad/s.

DEBYEVA DULJINA



Slika 1.2. Bježanje naboja iz Debyjevog oblaka zbog termičkog gibanja

I dalje ćemo razmatrati hladnu plazmu vodikovog tipa i u nju uvesti točkasti pozitivni naboj Q. Uneseni pozitivni naboj će privlačiti okolne elektrone i odbijati pozitivne ione tako da će biti elektrostatski zasjenjen i izvan stvorenog oblaka naboja (Debyev oblak) njegovo polje će iščezavati.

Ako sad polako povećamo temperaturu plazme, povećat ćemo prosječnu brzinu čestica. Duboko u oblaku, u blizini unesenog pozitivnog naboja, nasumično gibanje elektrona neće biti dovoljno da ga odvoji od tog pozitivnog naboja.

No pri rubu oblaka, gdje je električno polje zbog zasjenjenja mnogo manje, kinetička energija može biti dovoljno velika da premaši elektrostatski potencijal i elektron bježi iz oblaka – polje unesenog naboja nije nikada potpuno zasjenjeno.

Izjednačavanjem gradijenta tlaka s električnom silom:

$$k_B T \frac{\partial n}{\partial x} = nqE \qquad (6)$$

nalazimo Boltzmannovu raspodjelu broja čestica po energiji:

$$n(W) = n_0 \exp(-\frac{W}{k_B T}) \qquad (7)$$

Odatle možemo napisati izraze za raspodjelu iona, odnosno elektrona u plazmi vodikovog tipa po elektrostatskom potencijalu ϕ oko unesenog naboja (vodimo brigu o naboju iona, odnosno elektrona):

$$n_i(\phi) = n_{0e} \exp(-\frac{e\phi}{k_B T}) \qquad \text{raspodjela iona} \qquad (8)$$

$$n_e(\phi) = n_{0e} \exp(\frac{e\phi}{k_B T}) \qquad \text{raspodjela elektrona} \qquad (9)$$

Raspodjela naboja po potencijalu je:

$$\rho_{el} = e(n_i - n_e) = -2n_{0e} e \sinh(\frac{e\phi}{k_B T}) \qquad (10)$$

Ovdje vrijedi da je: $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$

Raspodjela naboja u jednadžbi (10) je posljedica potencijala ϕ, a potencijal možemo izraziti kao posljedicu naboja.

Kako je $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$, Poissonovu jednadžbu možemo napisati u obliku:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \tag{11}$$

Uvrštavanjem (10) u (11) dobijemo:

$$\nabla^2\phi = \frac{2n_{0e}e}{\varepsilon_0}\sinh(\frac{e\phi}{k_B T}) \tag{12}$$

Pri rubu oblaka elektrostatska energija $e\phi$ je mnogo manja od termičke energije $k_B T$:

$e\phi << k_B T$

pa približno vrijedi:

$$\sinh(\frac{e\phi}{k_B T}) \approx \frac{e\phi}{k_B T}$$

Jednadžba (12) prelazi u:

$$\nabla^2\phi = \frac{2}{\lambda_D^2}\phi \tag{13}$$

Veličinu λ_D zovemo **Debyevom duljinom** ili **Debyevim polumjerom**:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n_{0e}e^2}} = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}}\frac{1}{\omega_{pe}} \approx \frac{v_T}{\omega_{pe}} \tag{14}$$

Debyeva duljina opisuje doseg električnog polja nekog naboja u plazmi.

Nakon uvrštavanja poznatih konstanti, za vodikovu plazmu imamo:

$$\lambda_D = 69{,}1\sqrt{\frac{T}{n_{0e}}} \tag{15}$$

Rješenje jednadžbe $\nabla^2\phi = \frac{2}{\lambda_D^2}\phi$ je:

$$\phi = \frac{Q}{r}\exp(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D}) \tag{16}$$

Rješenje oblika $\phi \propto \exp(+\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D})$ otpada zbog rubnog uvjeta $\phi = 0$ za $r \to \infty$

Iz samog rješenja vidimo da je time iskazan doseg djelovanja unesenog naboja. Doseg je manji od dosega kulonske sile, te je veći u vrućoj i rijetkoj plazmi nego u hladnoj i gustoj plazmi. Ako imamo visokotemperaturnu plazmu, na nekoj udaljenosti od unesenog naboja više će elektrona pobjeći iz oblaka nego u niskotemperaturnoj plazmi i zasjenjenje će biti manje izraženo. Kod rijetke plazme elektroni moraju biti prikupljeni s veće udaljenosti da bi zasjenili promatrani naboj.

Pojam **elektrostatskog zasjenjenja** ima fizikalni smisao samo ako se u oblaku oko nekog naboja nalazi velik broj čestica. Ako u zasjenjenju sudjeluje malo čestica, većinu vremena će uneseni naboj biti nezasjenjen u mnogim smjerovima.

Znajući temperaturu i početnu gustoću broja elektrona, možemo odrediti broj čestica koje se nalaze u Debyevom oblaku N_D :

$$N_D = \frac{4\pi}{3}\lambda_D^3 n_{0e} = 10^6\sqrt{\frac{T^3}{n_{0e}}} \qquad (17)$$

To su čestice unutar sfere polumjera λ_D koje sudjeluju u zasjenjenju.

Oko svakog naboja u plazmi se stvara zasjenjenje i potencijal oko svake čestice je približno oblika $\phi = \frac{Q}{r}\exp(-\frac{\sqrt{2}r}{\lambda_D})$ ako je N_D >>> 1.

Još jednom moramo ponoviti da plazmeni sustav gledan u cjelini nema naboja, a ako stavimo plazmu u vanjsko polje, čestice se razmještaju tako da, stvarajući vlastito polje, nastoje poništiti vanjsko polje.

ELEKTROSTATSKI PLAZMENI VALOVI

Promatrajmo grupu elektrona u nekoj točki prostora i zatitrajmo ih. Titranje elektrona oko položaja ravnoteže stvara promjenjivo električno polje i tako dolazi do poremećaja okolne raspodjele naboja. Titranje se prenosi u okoliš i nastaje **elektrostatski val** koji titra plazmenom frekvencijom. Takav val zovemo **Langmuirovim valom**.

Da bi elektroni sudjelovali u titranju elektrostatskog vala, tj. da bi se osigurao opstanak vala, elektroni moraju titrati koherentno s lokalnim električnim poljem. Time smo odredili donju granicu mogućih valnih duljina. Lokalno električno polje se znatnije mijenja u vremenu reda veličine $1/\omega$, a za to vrijeme se elektron zbog termičkog gibanja prosječno pomakne za v_T/ω. Prema (14) to je jednako λ_D.

Samim time smo našli uvjet za valne duljine – koherentno titranje je moguće samo ako je $\lambda_D << \lambda$.

Dinamika elektrostatskih valova se može predočiti jednostavnom mehaničkom analogijom. Za sustav vezanih njihala, kad je valna duljina λ mnogo veća od razmaka njihala *d*, jednadžba koja povezuje frekvenciju i valnu duljinu vala (disperzijska jednadžba) je:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{k}{m}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2 \qquad (18)$$

Ovdje su:
g – akceleracija sile teže,
k – koeficijent elastičnosti opruga koje povezuju njihala,
l – duljina niti njihala,
m – masa utega.

Prvi član $\frac{g}{l}$ je posljedica djelovanja vanjske elastične sile koja uzrokuje titranje svakog njihala neovisno.

Drugi član $\frac{k}{m}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)^2$ se pojavljuje zbog međudjelovanja susjednih njihala i ne ovisi o vanjskoj sili.

Disperzijska jednadžba za Langmuirove valove za plazmu u kojoj nema magnetskog polja ima identičan oblik:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2\left(1 + 3\frac{\lambda_D^2}{\lambda^2}\right) \qquad (19)$$

Elektronska plazmena frekvencija je prirodna frekvencija elektrostatskog titranja plazme. Fazna brzina širenja vala je dana s $\lambda\omega/2\pi$.

U jednadžbi (19) **prvi član** ω_{pe}^2 predstavlja prirodnu frekvenciju titranja plazme zbog pojave elastične sile (električnog polja).

Drugi član $\omega_{pe}^2 3\frac{\lambda_D^2}{\lambda^2}$ ne ovisi o električnom naboju, ali ovisi o temperaturi elektrona, dakle o elektronskom tlaku, tj. o sudarnom međudjelovanju elektrona.

Titranje naboja obično dovodi do stvaranja elektromagnetskog zračenja, ali kad radimo s Langmuirovim valovima to nije tako.

Pogledajmo Maxwellovu jednadžbu za rotaciju magnetskog polja:

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (20)$$

Član koji dovodi do stvaranja elektromagnetskog zračenja je **struja pomaka** $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

U aproksimaciji možemo uzeti da su ioni nepokretni pa električna struja dolazi samo od elektronskog doprinosa $\vec{j} = -n_e e\vec{u}$, gdje je $\vec{u}$ brzina titrajućih elektrona.

Ako je $m_e\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -e\vec{E}$, dobijemo $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = \frac{n_e e^2\vec{E}}{m_e}$.

Deriviramo po vremenu jednadžbu (20):

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{n_e e^2\vec{E}}{m_e} - \varepsilon_0\omega_{pe}^2\vec{E} = 0 \qquad (21)$$

Ako se podsjetimo izraza za elektronsku plazmenu frekvenciju $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e\varepsilon_0}}$, vidimo da su prvi i drugi član istog iznosa, ali suprotnih predznaka i pokazuje se da nema izvora promjenjivog magnetskog polja – promjena u vremenu električnog polja je takva da struju pomaka poništava efekt struje vezane za titranje elektrona.

LANDAUOVO PRIGUŠENJE

Promotrimo sad česticu koja se giba brzinom bliskom brzini gibanja Langmuirova elektrostatskog vala. To je slučaj **rezonancije**. U slučaju rezonancije jako je izraženo međudjelovanje vala i čestice.

Pogledajmo na trenutak neke poznate činjenice:

- postoji reverzibilnost mikroskopskih procesa u kojima je dinamika čestica opisana Newtonovim aksiomima
- postoji ireverzibilnost makroskopskih procesa opisanih 2. zakonom termodinamike
- postoji razlika između prvih i drugih procesa

Svaki termodinamički sustav se sastoji od mnoštva čestica pri čemu se svaka ponaša u skladu s Newtonovim aksiomima. Da bismo mogli razumjeti pojavu Landauova prigušenja, trebali bismo povezati ta dva fizikalna opisa.

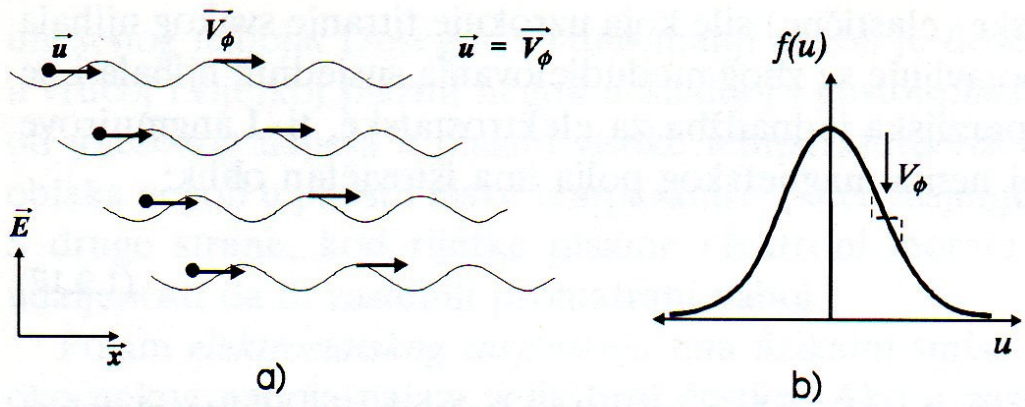
Landauovo prigušenje se javlja u slučaju rezonancije nabijene čestice i elektromagnetskog vala pri čemu dolazi do razmjene energije jedne čestice i kolektivnog poremećaja koji predstavlja val.

Razmatrat ćemo radi jednostavnosti 1D plazmeni sustav: titrajući niz elektrona i niz jednoliko raspoređenih mirujućih protona. Elektrostatski val elektrona opisan je kružnom frekvencijom ω, valnim vektorom k i faznom brzinom $v_f = \frac{\omega}{k}$. Ubačeni elektron ima brzinu $u = v_f$.

Kako se ubačeni elektron giba brzinom koja je jednaka brzini vala, on osjeća konstantno električno polje prouzročeno valom. Elektron će se ubrzavati ili usporavati već ovisno o tome koji je predznak polja – energija prelazi iz vala na česticu ili obrnuto. Čestice koje imaju nešto manju brzinu od fazne brzine, budu ubrzane, a čestice s nešto većom brzinom usporene. Do prestanka međudjelovanja čestice i vala dolazi spontano kad zbog procesa prijenosa energije brzina čestica postane ili znantno veća, ili znantno manja od fazne brzine vala – time prestaje stanje rezonancije.

U procesu vrijedi zakon očuvanja energije – energija se samo preraspodjeljuje između čestice i vala.

Opisani proces predstavlja jednu vrstu kolektivnog kulonskog raspršenja – električno polje koje djeluje na ubačenu česticu, posljedica je kolektivnog električnog polja mnoštva elektrona i iona.



Slika 1. 3. a) Međudjelovanje nabijene čestice i elektrostatskog vala: čestica brzine podjednake brzini vala osjeća približno konstantno električno polje; **b)** Poremećaj Maxwellove raspodjele čestica po brzinama u smjeru valnog vektora: za bilo koju faznu brzinu uvijek je više čestica sporijih od vala negoli bržih od vala, pa Landauovo prigušenje dovodi do prelaska energije vala u termičko gibanje čestica; Landauovo prigušenje poremećuje raspodjelu (isprekidana crta: val predaje energiju česticama).

Plazmena oscilacija na kojoj se čestica raspršuje je kao treće tijelo u plazmi i ono je uzrokom raspršivanja čestica.

Zato se elektrostatski plazmeni val često naziva **plazmonom** (točnije, **longitudinalnim plazmonom** zbog longitudinalne prirode vala).

U slučaju plazme s Maxwellovom raspodjelom elektrona koja je okarakterizirana termičkom brzinom v_{Te}, broj elektrona s komponentom brzine u smjeru vala nekoliko puta većom od termičke brzine, eksponencijalno opada s kinetičkom energijom.

Elektrostatski val fazne brzine v_f koja je nekoliko puta veća od termalne brzine elektrona v_{Te}, sreće vrlo mali broj rezonantnih elektrona s kojima može izmijeniti energiju pa se može širiti plazmom: $v_f >> v_{Te}$

Kad je fazna brzina v_f usporediva ili manja od termičke brzine v_{Te}, val predaje energiju značajnom broju elektrona pa je val vrlo brzo prigušen: $v_f \leq v_{Te}$

Taj proces nazivamo **Landauovim prigušenjem** (slika 1.3.b).