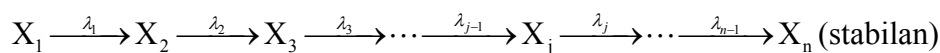


## Opće rješenje zatvorenog radioaktivnog niza

Opće rješenje proizvoljno dugačkog radioaktivnog niza



s početnim uvjetima

$$N_j(t=0) = \begin{cases} N_{10}, j=1 \\ 0, 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

je dano s Batemanovom jednačom. Aktivnost  $j$ -tog člana u nizu je:

$$A_j(t) = N_{10} \sum_{i=1}^j C_i e^{-\lambda_i t} = N_{10} (C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + C_j e^{-\lambda_j t}).$$

Koeficijenti  $C_m$  se dobivaju iz produkata

$$C_m = \frac{\prod_{i=1}^j \lambda_i}{\prod_{i=1}^j (\lambda_i - \lambda_m)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_j}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_2 - \lambda_m) \dots (\lambda_j - \lambda_m)}$$

gdje je  $i = m$  isključeno iz nazivnika.

Kao primjer, pogledajmo traženje aktivnosti prvog i drugog člana u nizu. Za  $j = 1$  imamo

$A_1(t) = N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t}$ , što je poznati zakon dobiven iz radioaktivnog raspada. Iz jednačbe za traženje koeficijenta dobiva se  $C_1 = \lambda_1$ . Za drugi član,  $j = 2$ , imamo

$$A_2(t) = N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} + N_{10} C_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Nepoznate koeficijente opet tražimo iz relacije produkata za  $m = 1$  i  $m = 2$ :

$$C_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Aktivnost se dobiva prema maloprije izvedenoj relaciji:

$$A_2(t) = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} [e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}].$$

**Primjer:** Radioaktivni nuklid  $A$  s konstantom raspada  $\lambda_A$  prelazi u radioaktivni nuklid  $B$ , s konstantom raspada  $\lambda_B$ , a ovaj prelazi u stabilni nuklid  $C$ . Valja odrediti:

- Vremensku ovisnost broja jezgri nuklida  $A$
- Vremensku ovisnost broja jezgri nuklida  $B$  ako u  $t=0$  nije bilo jezgri nuklida  $B$
- Vremensku ovisnost broja jezgri nuklida  $C$ .

Rješenje.

$$A \rightarrow (\lambda_A) \rightarrow B \rightarrow (\lambda_B) \rightarrow C$$

a.  $N_A(t) = N_0 e^{-\lambda_A t}$

b.  $dN_b = \lambda_a N_a dt - \lambda_b N_b dt$

$$\frac{dN_b}{dt} + \lambda_b N_b = \lambda_a N_a$$

$$\frac{dN_b}{dt} + \lambda_b N_b = \lambda_a N_0 e^{-\lambda_a t}$$

$$N_b = C \cdot e^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 e^{-\lambda_a t}$$

Za  $t = 0$  vrijedi  $N_b(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} N_0$

$$N_b = \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})$$

c.  $\frac{dN_c}{dt} = \lambda_b N_b$

$$N_c = \int \lambda_b N_b dt + C$$

$$N_c = \int \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) dt + C$$

$$N_c = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 \left( -\frac{1}{\lambda_a} e^{-\lambda_a t} + \frac{1}{\lambda_b} e^{-\lambda_b t} \right) + C$$

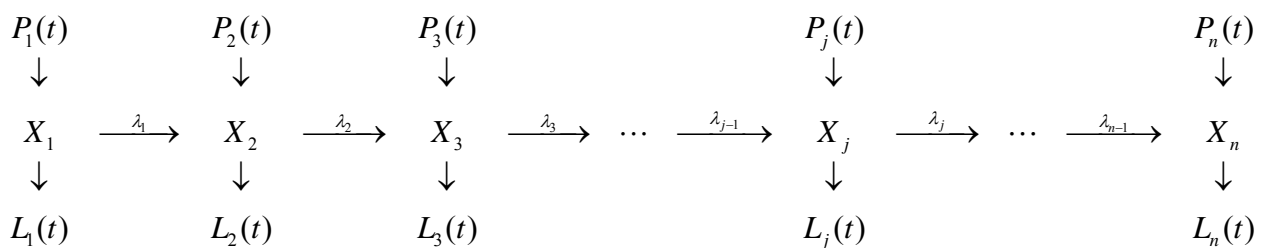
$$N_c(t) = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 \frac{1}{\lambda_a} \frac{1}{\lambda_b} (\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t}) + C$$

$$N_c(0) = 0 = \frac{N_0}{\lambda_b - \lambda_a} (\lambda_a - \lambda_b) + C \Rightarrow N_0 = C$$

$$N_c(t) = N_0 \left[ 1 + \frac{(\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t})}{\lambda_b - \lambda_a} \right]$$

## Otvoreni sistemi

Za razliku od zatvorenih sistema, otvoreni sistemi dozvoljavaju unošenje ili uklanjanje nestabilne jezgre mehanizmom drugačijim od radioaktivnog raspada. Simbolički možemo napisati radioaktivni niz otvorenog sistema kao:



gdje je zadnji član niza  $X_n$  stabilan.

Tu je  $P_j(t)$  vremenski ovisna funkcija proizvodnje (atomi/s) za atome tipa  $j$  koji ulaze u sistem, a  $L_j(t)$  je vremenski ovisna funkcija uklanjanja (atomi/s) za atome tipa  $j$  u sistemu.

Općenito, funkcija proizvodnje i gubitka su dozvoljene za svaku komponentu radioaktivnog niza uključujući i stabilne izotope  $X_n$ . Jednadžba prvog reda za proizvoljnu komponentu  $j$  u nizu postaje:

$$\frac{dN_j(t)}{dt} = P_j(t) + \lambda_{j-1}N_{j-1}(t) - \lambda_j N_j(t) - L_j(t).$$

Rubni članovi,  $X_1$  i  $X_2$ , imaju malo drugačiju diferencijalnu jednadžbu pošto je  $\lambda_{j-1} = 0$  kada je  $j = 1$  i  $\lambda_n = 0$ . Matematički, ovaj sistem predstavlja skup do  $n$  povezanih diferencijalnih jednadžbi prvog reda koje se moraju rješavati sekvencijalno za  $j = 1$  pa sve do  $n$ . Za potpuno rješenje potrebno je  $n$  početnih uvjeta za  $n$  funkcija  $P_j(t)$  i  $n$  funkcija  $L_j(t)$ . Poznavajući spomenute funkcije, nije garantirano da će se moći pronaći analitičko rješenje sistema. U takvim situacijama primjenjuju se numeričke metode.

Opće rješenje  $j$ -te komponente radioaktivnog niza se dobiva integracijom faktora  $e^{\lambda_j t}$ , međutim, diferencijalna jednadžba ima malo drugačiji oblik:

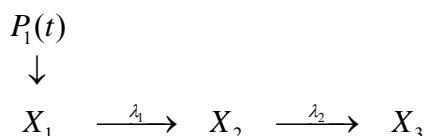
$$\frac{d}{dt} [N_j(t)e^{\lambda_j t}] = [P_j(t) + \lambda_{j-1}N_{j-1}(t) - \lambda_j N_j(t) - L_j(t)]e^{\lambda_j t}.$$

Zapis rješenja bez eksplicitnog izraza za funkcije proizvodnje i gubitka glasi

$$N_j(t) = N_{j0}e^{-\lambda_j t} + e^{-\lambda_j t} \cdot \int_0^t [P_j(t') + \lambda_{j-1}N_{j-1}(t') - L_j(t')]e^{\lambda_j t'} dt'$$

gdje je  $N_{j0} = N_j(t=0)$ . Analitička integracija je moguća samo kad funkcije proizvodnje i gubitka poprima povoljan oblik. Kada su sve funkcije  $P_j(t)$  i  $L_j(t)$  identički jednake nuli, otvoreni sistem prelazi u zatvoreni. Vidimo da je zatvoreni sistem samo specijalni slučaj općenitog, otvorenog sistema.

Kao primjer, promotrimo radioaktivni niz tri izotopa sa jednim članom koji opisuje proizvodnju. Izotop  $X_3$  je stabilan.



Ovaj problem uključuje i proizvodnju i gubitak, čije opće rješenje tražimo po ranije izvedenim jednadžbama:

$$N_1(t) = N_{10}e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_1 t} \int_0^t P_1(t')e^{\lambda_1 t'} dt'$$

$$N_2(t) = N_{20}e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_2 t} \int_0^t \lambda_1 N_1(t') e^{\lambda_2 t'} dt'$$

$$N_3(t) = N_{30} + \int_0^t \lambda_2 N_2(t') dt'$$

Za rješenje sistema je potrebno znati funkciju  $P_1(t)$  i početne uvjete  $N_{10}$ ,  $N_{20}$  i  $N_{30}$ .

Promotriti ćemo nadalje neke karakteristične funkcije izvora.

**Step funkcija** u  $t_0 = 0$ :

$$P_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ P_0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Uzimamo za početne uvjete  $N_{10} = N_{20} = N_{30} = 0$ . Ovo ne vodi na trivijalno rješenje, kao kod zatvorenog sistema, pod uvjetom da je  $P_1(t) \neq 0$ . Koncentracija i aktivnost za  $X_1$  su:

$$N_1(t) = \frac{P_0}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}),$$

$$A_1(t) = P_0 (1 - e^{-\lambda_1 t}).$$

Vidimo da se aktivnost asimptotski približava konstantom iznosu  $P_0$ .

**Linearna funkcija** od  $t_0 = 0$ :

$$P_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ k \cdot t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Uzimamo  $N_{10} = 0$  i dobivamo

$$N_1(t) = \frac{kt}{\lambda_1} - \frac{k}{\lambda_1^2} (1 - e^{-\lambda_1 t}).$$

Vidimo da je rješenje fizikalno smisleno samo za  $t < \infty$  - to znači da izvor mora biti ograničen.

**Eksponencijalna funkcija** u  $t_0 = 0$ :

$$P_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ P_0 e^{-kt}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Rješenje ovog problema glasi:

$$N_1(t) = \frac{P_0}{\lambda_1 - k} (e^{-kt} - e^{-\lambda_1 t})$$

Ovo rješenje predstavlja oblik koji se dobiva kao rješenje druge komponente zatvorenog sistema sa  $k = \lambda_2$  i  $P_0 = A_{10}$ .

**Sinusoidalna** funkcija

$$P_1(t) = P_0 + a \cdot \sin(kt), \text{ za svaki } t.$$

Sa početnim uvjetom  $N_1(t=0) = 0$  dobivamo integralnu jednadžbu:

$$N_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \int_0^t [P_0 + a \cdot \sin(kt')] e^{\lambda_1 t'} dt'.$$

Dvostruka parcijalna integracija daje analitičku formu rješenja:

$$N_1(t) = \frac{P_0}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{a}{\lambda_1^2 + k^2} [\lambda_1 \sin(kt) - k(\cos(kt) - e^{-\lambda_1 t})].$$