Opće rješenje zatvorenog radioaktivnog niza

Opće rješenje proizvoljno dugačkog radioaktivnog niza

$$\mathrm{X}_1 \xrightarrow{\lambda_1} \mathrm{X}_2 \xrightarrow{\lambda_2} \mathrm{X}_3 \xrightarrow{\lambda_3} \cdots \xrightarrow{\lambda_{j-1}} \mathrm{X}_j \xrightarrow{\lambda_j} \cdots \xrightarrow{\lambda_{n-1}} \mathrm{X}_n \text{ (stabilan)}$$

s početnim uvjetima

$$N_j(t=0) = \begin{cases} N_{10}, j = 1 \\ 0, 2 \le j \le n \end{cases}$$

je dano s Batemanovom jednadžbom. Aktivnost j-tog člana u nizu je:

$$A_j(t) = N_{10} \sum_{i=1}^{j} C_i e^{-\lambda_i t} = N_{10}(C_1 e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} + \cdots + C_j e^{-\lambda_j t}) \ .$$

Koeficijenti C_m se dobivaju iz produkata

$$C_m = \frac{\prod_{i=1}^{j} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{j} (\lambda_i - \lambda_m)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \cdots \lambda_j}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_2 - \lambda_m) \cdots (\lambda_j - \lambda_m)}$$

gdje je $i = m$ isključeno iz nazivnika.

Kao primjer, pogledajmo traženje aktivnosti prvog i drugog člana u nizu. Za j = 1 imamo

$A_1(t) = N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t}$, što je poznati zakon dobiven iz radioaktivnog raspada. Iz jednadžbe za traženje koeficijenata dobiva se $C_1 = \lambda_1$. Za drugi član, j = 2, imamo

$$A_2(t) = N_{10} C_1 e^{-\lambda_1 t} + N_{10} C_2 e^{-\lambda_2 t} \ .$$

Nepoznate koeficijente opet tražimo iz relacije produkata za m = 1 i m = 2:

$$C_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

$$C_2 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Aktivnost se dobiva prema maloprije izvedenoj relaciji:

$$A_2(t) = A_{10} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right].$$

Primjer: Radioaktivni nuklid A s konstantom raspada λ_A prelazi u radioaktivni nuklid B, s konstantom raspada λ_B, a ovaj prelazi u stabilni nuklid C. Valja odrediti:

a. Vremensku ovisnost broja jezgri nuklida A
b. Vremensku ovisnost broja jezgri nuklida B ako u t=0 nije bilo jezgri nuklida B
c. Vremensku ovisnost broja jezgri nuklida C.

Rješenje.

A $\rightarrow$ (λ_A) $\rightarrow$ B $\rightarrow$ (λ_B) $\rightarrow$ C

a. $N_A(t) = N_0 e^{-\lambda_A t}$

b. $dN_b = \lambda_a N_a dt - \lambda_b N_b dt$

$$\frac{dN_b}{dt} + \lambda_b N_b = \lambda_a N_a$$

$$\frac{dN_b}{dt} + \lambda_b N_b = \lambda_a N_0 e^{-\lambda_a t}$$

$$N_b = C \cdot e^{-\lambda_b t} + \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 e^{-\lambda_a t}$$

Za $t = 0$ vrijedi $N_b(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} N_0$

$$N_b = \frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t})$$

c. $\frac{dN_c}{dt} = \lambda_b N_b$

$$N_c = \int \lambda_b N_b dt + C$$

$$N_c = \int \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 (e^{-\lambda_a t} - e^{-\lambda_b t}) dt + C$$

$$N_c = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 \left(-\frac{1}{\lambda_a} e^{-\lambda_a t} + \frac{1}{\lambda_b} e^{-\lambda_b t} \right) + C$$

$$N_c(t) = \frac{\lambda_a \lambda_b}{\lambda_b - \lambda_a} N_0 \frac{1}{\lambda_a} \frac{1}{\lambda_b} \left(\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t} \right) + C$$

$$N_c(0) = 0 = \frac{N_0}{\lambda_b - \lambda_a} (\lambda_a - \lambda_b) + C \;\Rightarrow\; N_0 = C$$

$$N_c(t) = N_0 \left[1 + \frac{(\lambda_a e^{-\lambda_b t} - \lambda_b e^{-\lambda_a t})}{\lambda_b - \lambda_a} \right]$$

Otvoreni sistemi

Za razliku od zatvorenih sistema, otvoreni sistemi dozvoljavaju unošenje ili uklanjanje nestabilne jezgre mehanizmom drugačijim od radioaktivnog raspada. Simbolički možemo napisati radioaktivni niz otvorenog sistema kao:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
P_1(t) & & P_2(t) & & P_3(t) & & & & P_j(t) & & & & P_n(t) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
X_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & X_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & X_3 & \xrightarrow{\lambda_3} & \cdots & \xrightarrow{\lambda_{j-1}} & X_j & \xrightarrow{\lambda_j} & \cdots & \xrightarrow{\lambda_{n-1}} & X_n \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & \downarrow \\
L_1(t) & & L_2(t) & & L_3(t) & & & & L_j(t) & & & & L_n(t)
\end{array}$$

gdje je zadnji član niza X_n stabilan.

Tu je $P_j(t)$ vremenski ovisna funkcija proizvodnje (atomi/s) za atome tipa *j* koji ulaze u sistem, a $L_j(t)$ je vremenski ovisna funkcija uklanjanja (atomi/s) za atome tipa *j* u sistemu. Općenito, funkcija proizvodnje i gubitka su dozvoljene za svaku komponentu radioaktivnog niza uključujući i stabilne izotope X_n. Jednadžba prvog reda za proizvoljnu komponentu *j* u nizu postaje:

$$\frac{dN_j(t)}{dt} = P_j(t) + \lambda_{j-1} N_{j-1}(t) - \lambda_j N_j(t) - L_j(t).$$

Rubni članovi, X_1 i X_2, imaju malo drugačiju diferencijalnu jednadžbu pošto je $\lambda_{j-1} = 0$ kada je j = 1 i $\lambda_n = 0$. Matematički, ovaj sistem predstavlja skup do *n* povezanih diferencijalnih jednadžbi prvog reda koje se moraju rješavati sekvencijalno za j = 1 pa sve do *n*. Za potpuno rješenje potrebno je *n* početnih uvjeta za *n* funkcija $P_j(t)$ i *n* funkcija $L_j(t)$. Poznavajući spomenute funkcije, nije garantirano da će se moći pronaći analitičko rješenje sistema. U takvim situacijama primjenjuju se numeričke metode.

Opće rješenje *j*-te komponente radioaktivnog niza se dobiva integracijom faktora $e^{\lambda_j t}$, međutim, diferencijalna jednadžba ima malo drugačiji oblik:

$$\frac{d}{dt}\left[N_j(t)e^{\lambda_j t}\right] = \left[P_j(t) + \lambda_{j-1} N_{j-1}(t) - \lambda_j N_j(t) - L_j(t)\right] e^{\lambda_j t}.$$

Zapis rješenja bez eksplicitnog izraza za funkcije proizvodnje i gubitka glasi

$$N_j(t) = N_{j0} e^{-\lambda_j t} + e^{-\lambda_j t} \cdot \int_0^t \left[P_j(t') + \lambda_{j-1} N_{j-1}(t') - L_j(t')\right] e^{\lambda_j t} dt'$$

gdje je $N_{j0} = N_j(t=0)$. Analitička integracija je moguća samo kad funkcije proizvodnje i gubitka poprime povoljan oblik. Kada su sve funkcije $P_j(t)$ i $L_j(t)$ identički jednake nuli, otvoreni sistem prelazi u zatvoreni. Vidimo da je zatvoreni sistem samo specijalni slučaj općenitog, otvorenog sistema.

Kao primjer, promotrimo radioaktivni niz tri izotopa sa jednim članom koji opisuje proizvodnju. Izotop X_3 je stabilan.

$$\begin{array}{l} P_1(t) \\ \downarrow \\ X_1 \xrightarrow{\lambda_1} X_2 \xrightarrow{\lambda_2} X_3 \end{array}$$

Ovaj problem uključuje i proizvodnju i gubitak, čije opće rješenje tražimo po ranije izvedenim jednadžbama:

$$N_1(t) = N_{10} e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_1 t} \int_0^t P_1(t') e^{\lambda_1 t} dt'$$

$$N_2(t) = N_{20}e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_2 t}\int_0^t \lambda_1 N_1(t')e^{\lambda_2 t}dt'$$

$$N_3(t) = N_{30} + \int_0^t \lambda_2 N_2(t')dt'$$

Za rješenje sistema je potrebno znati funkciju $P_1(t)$ i početne uvjete N_{10}, N_{20} i N_{30}. Promotriti ćemo nadalje neke karakteristične funkcije izvora.

Step funkcija u $t_0 = 0$:

$$P_1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ P_0, t \geq 0 \end{cases}$$

Uzimamo za početne uvjete $N_{10} = N_{20} = N_{30} = 0$. Ovo ne vodi na trivijalno rješenje, kao kod zatvorenog sistema, pod uvjetom da je $P_1(t) \neq 0$. Koncentracija i aktivnost za X_1 su:

$$N_1(t) = \frac{P_0}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}),$$

$$A_1(t) = P_0(1 - e^{-\lambda_1 t}).$$

Vidimo da se aktivnost asimptotski približava konstantom iznosu P_0.

Linearna funkcija od $t_0 = 0$:

$$P_1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ k \cdot t, t \geq 0 \end{cases}$$

Uzimamo $N_{10} = 0$ i dobivamo

$$N_1(t) = \frac{kt}{\lambda_1} - \frac{k}{\lambda_1^2}(1 - e^{-\lambda_1 t}).$$

Vidimo da je rješenje fizikalno smisleno samo za $t < \infty$ - to znači da izvor mora biti ograničen.

Eksponencijalna funkcija u $t_0 = 0$:

$$P_1(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ P_0 e^{-kt}, t \geq 0 \end{cases}$$

Rješenje ovog problema glasi:

$$N_1(t) = \frac{P_0}{\lambda_1 - k}(e^{-kt} - e^{-\lambda_1 t})$$

Ovo rješenje predstavlja oblik koji se dobiva kao rješenje druge komponente zatvorenog sistema sa $k = \lambda_2$ i $P_0 = A_{10}$.

Sinusoidalna funkcija

$P_1(t) = P_0 + a \cdot \sin(kt)$, za svaki t.

Sa početnim uvjetom $N_1(t=0) = 0$ dobivamo integralnu jednadžbu:

$$N_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \int_0^t \left[P_0 + a \cdot \sin(kt') \right] e^{\lambda_1 t'} dt' \ .$$

Dvostruka parcijalna integracija daje analitičku formu rješenja:

$$N_1(t) = \frac{P_0}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{a}{\lambda_1^2 + k^2}\left[\lambda_1 \sin(kt) - k(\cos(kt) - e^{-\lambda_1 t}) \right].$$