Tenzor inercije

Miha the mighty,

listopad 2012.

Uvod

Općenito govoreći, tenzor inercije je "konstanta proporcionalnosti" između vektora kutne količine gibanja i vektora kutne brzine. Radi se o dvama vektorima koji općenito nisu istog smjera. Zbog toga, tehnički rečeno, ta konstanta nije samo broj, nego mora biti matrica.

Upravo ta dva vektora su paralelna jedino kada se smjer vektora kutne brzine podudara sa smjerom jedne od glavnih osi tijela (svako tijelo ima barem tri međusobno okomite).

Kada to nije tako, tijelo svojim gibanjem čuva vektor kutne količine gibanja, ali ne nužno i vektor kutne brzine. Ako krenemo vrtjeti tijelo oko neke osi koja nije glavna, tijelo "će se pokušati oteti", "iščupati", iz tog stanja vrtnje. Pokušat će promijeniti smjer vektora kutne brzine u nastojanju da očuva vektor kutne količine gibanja.

Vezano za dijagonalne i nedijagonalne članovime tenzora inercije – ako napišemo tenzor u sustavu osi oko koje se tijelo vrti i ako tenzor ima nule na mjestima koja bi vektor kutne količine gibanja učinila neparalelnim s vektorom kutne brzine, imamo situaciju u kojoj se ne vrtimo oko glavne osi.

U slučaju da se ne vrtimo oko glavne osi, a očekujemo da se orijentacija osi vrtnje (vektora kutne brzine) ne mijenja u vremenu, morat ćemo rezultantnu promjenu kutne količine gibanja "kontrirati" vanjskim momentima sile. Njih osigurava osovina, odnosno njeni ležajevi, a čitav stroj trpi vibracije.

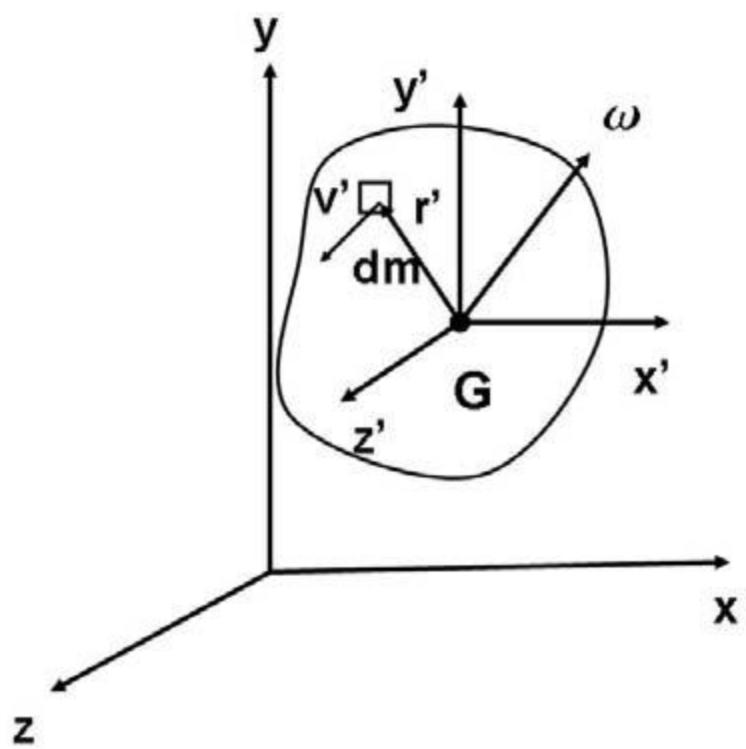
Matematička pozadina

Počinjemo s definicijom već poznatog pojma kutne količine gibanja sustava čestica koji se nalaze oko centra mase, $\boldsymbol{H}_G$:

$$\boldsymbol{H}_g = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{r}'_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i {r'_i}^2 \boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{H}_g = \sum_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{r}'_i \times m_i(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i {r'_i}^2 \boldsymbol{\omega} = \int_m \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{v}' dm$$

gdje je $\boldsymbol{r}'$ vektor položaja čestice s obzirom na centar mase, $\boldsymbol{v}'$ brzina čestice s obzirom na centar mase. Zamjetimo da, u gornjem izrazu, koristimo integral umjesto sumacije pošto ovdje radimo s kontinuiranom raspodjelom mase.



Za kruto tijelo, udaljenost između bilo koje čestice i centra mase je konstantna, pa brzinu čestice s obzirom na centar mase možemo pisati kao:

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'.$$

Od tuda slijedi:

$$\boldsymbol{H}_g = \int_m \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{v}' dm = \int_m \boldsymbol{r}' \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')\, dm = \int_m [(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}')\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}']\, dm \ .$$

Ovdje smo iskoristili identitet koji vrijedi za vektore $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$. Dobro je zamijetiti da za planarna tijela koja vrše pomicanje u 2D prostoru, vektor $\boldsymbol{r}'$ je okomit na vektor $\boldsymbol{\omega}$ i da izraz $(\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{\omega})$ je jednak nuli. U tom slučaju vektori $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{H}_G$ su uvijek paralelni. U trodimenzionalnom slučaju ovo pojednostavljenje se neće dogoditi, što kao posljedicu ima da, u generalnom slučaju, vektor kutne brzine $\boldsymbol{\omega}$ i vektor kutne količine gibanja $\boldsymbol{H}_G$ nisu međusobno paralelni.

U koordinatnom sustavu vrijedi da je $\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{i} + y'\boldsymbol{j} + z'\boldsymbol{k}$ i $\boldsymbol{\omega}' = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k}$. Uvrštavajući izraze za r' i ω' u gornju jednadžbu izraz za kutnu količinu gibanja postaje:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_G = \quad & \left(\omega_x \int_m (x'^2 + y'^2 + z'^2)dm - \int_m \left(\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z'\right)x' dm\right)\boldsymbol{i} \\
& + \left(\omega_y \int_m (x'^2 + y'^2 + z'^2)dm - \int_m \left(\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z'\right)y' dm\right)\boldsymbol{j} \qquad (1) \\
& + \left(\omega_z \int_m (x'^2 + y'^2 + z'^2)dm - \int_m \left(\omega_x x' + \omega_y y' + \omega_z z'\right)z' dm\right)\boldsymbol{k} \\
& = \left(I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \right)\boldsymbol{i} \\
& + \left(-I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z\right)\boldsymbol{j} \\
& + \left(-I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

Veličine I_{xx} , I_{yy} i I_{zz} nazivamo momentima inercije tijela s obzirom na x, y i z os respektivno. Vrijedi:

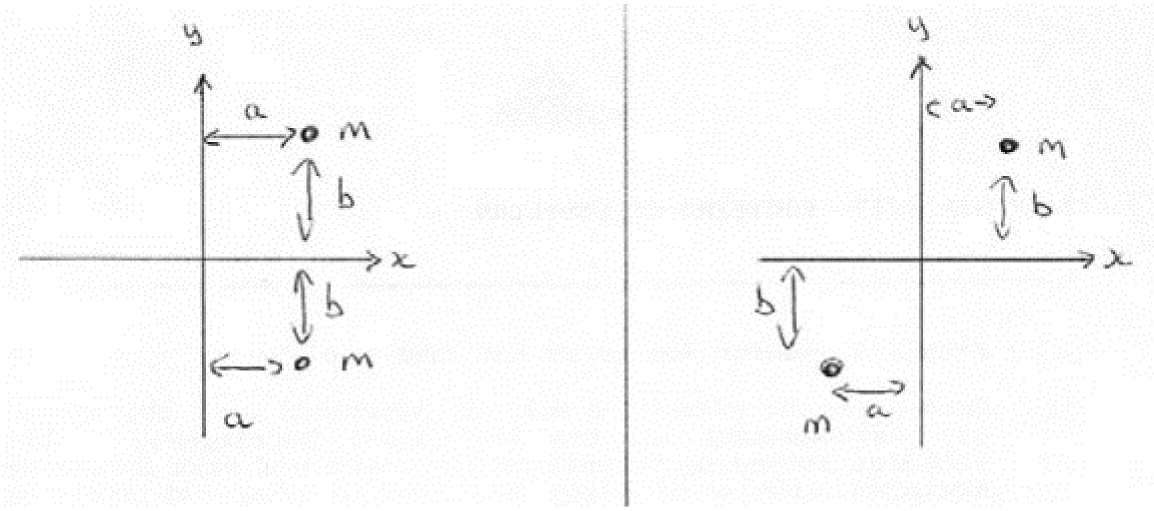
$$I_{xx} = \int_m (y'^2 + z'^2)dm, \qquad I_{yy} = \int_m (x'^2 + z'^2)dm, \qquad I_{zz} = \int_m (x'^2 + y'^2)dm$$

Primijetimo da je funkcija koju integriramo točno kvadrat udaljenosti prema x, y ili z osi respektivno. Ti izrazi su analogni momentu inercije tijela u dvodimenzionalnom prostoru.

Također, jasno se vidi iz izraza za momente inercija da su oni uvijek pozitivni. Veličine I_{xy} , I_{xz} , I_{yx} , I_{yz} , I_{zx} i I_{zy} nazivamo produktima inercije (*engl. products of inertia*). Produkti inercije mogu biti pozitivni, negativni ili jednaki nuli te dani su izrazima:

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_m x'y'\,dm, \qquad I_{xz} = I_{zx} = \int_m x'z'\,dm, \qquad I_{yz} = I_{zy} = \int_m y'z'\,dm$$

Produkti inercije su mjera neravnoteže u raspodjeli mase. Drugim riječima, produkti inercije sadrže informaciju o raspodjeli mase u sustavu. Produkti inercije su razlikovna veličina između objekata koji imaju iste momente inercija. Primjerice u 2D prostoru:



Za sliku lijevo vrijedi: $I_{xx} = 2b^2m$, $I_{yy} = 2a^2m$, $I_{xy} = I_{yx} = 0$.

Za sliku na desno vrijedi: $I_{xx} = 2b^2m$, $I_{yy} = 2a^2m$, $I_{xy} = I_{yx} = 2abm$.

Ako želimo izračunati kutnu količinu gibanja s obzirom na čvrstu točku u prostoru O onda krajnji izraz poprima idući oblik:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_G = \;& \left((I_{xx})_O\,\omega_x - (I_{xy})_O\,\omega_y - (I_{xz})_O\,\omega_z\right)\boldsymbol{i} \\ &+ \left(-(I_{yx})_O\,\omega_x + (I_{yy})_O\,\omega_y - (I_{yz})_O\omega_z\right)\boldsymbol{j} \\ &+ \left(-(I_{zx})_O\,\omega_x - (I_{zy})_O\,\omega_y + (I_{zz})_O\,\omega_z\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

Ovdje, momenti i produkti inercije imaju izraze koji su analogni ranije navedenim izrazima uz zamjenu $x', y' i\ z'$ s $x,\ y\ i\ z$ respektivno. Od tuda slijede izrazi:

$$(I_{xx})_O = \int_m (y^2 + z^2)dm, \qquad (I_{yy})_O = \int_m (x^2 + z^2)dm, \qquad (I_{zz})_O = \int_m (x^2 + y^2)dm$$

i

$$(I_{xy})_O = (I_{yx})_O = \int_m xy\, dm, \quad (I_{xz})_O = (I_{zx})_O = \int_m xz\, dm, \quad (I_{yz})_O = (I_{zy})_O = \int_m yz\, dm$$

Zapis tenzora inercije

Izraz za kutnu količinu gibanja dan jednadžbom (1) može se zapisati u matričnom obliku kao:

$$\begin{bmatrix} H_{Gx} \\ H_{Gy} \\ H_{Gz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

ili

$$\boldsymbol{H}_G = [I_G]\boldsymbol{\omega}$$

gdje je $[I_G]$ tezor inercije zapisan u matričnom obliku oko centra mase G s obzirom na xyz osi. Tenzor inercije nam daje uvid u način na koji je masa raspodjeljena unutar krutog tijela. Analogno, možemo definirati tenzor inercije oko čvrste točke u prostoru O:

$$\boldsymbol{H}_O = [I_O]\boldsymbol{\omega}$$

gdje su komponente od $[I_O]$ momenti i produkti inercije oko date točke O. Iz same definicije produkta inercije slijedi da je tenzor inercije uvijek simetrična matrica.