



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE 1

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

TEMA 7-10

ISTOSMJERNI STRUJNI KRUGOVI

Tema 7. - UVOD U ISTOSMJERNE STRUJNE KRUGOVE

- osnovni pojmovi električnog strujnog kruga
- model vođenja električne struje kroz cilindrični vodič
- električni otpor R i vodljivost G
- Ohmov zakon
- temperaturna zavisnost otpora
- kemijski izvor električne energije

Osnovni pojmovi istosmjernog strujnog kruga

- U razmatranju elektrostatskih polja promatrali su se električne pojave u okruženju **naboja koji su mirovali**
- kada se ostvari **uređeno gibanje naboja** kroz odgovarajući materijal dolazimo do pojma jednolike električne struje

NOSITELJI NABOJA mogu biti:

1. U vodičima (metalima) elementarne čestice slobodnih elektrona,
 2. U elektrolitima i plinovima elektroni i ioni (atomi ili molekule kojima nedostaju ili imaju višak elektrona)
.....(+) ioni **kationi** (-) ioni **anioni**
 3. Nabijene čestice (npr. prašina, nabijene kapljice kiše, ...)
- električnu struju uzrokuje stalno električno polje koju daje vanjski izvor električne energije
 - ne postoje direktni izvori električne energije već samo drugi vidovi energije koji se pretvaraju u električnu energiju te tako dobijemo izvor električne energije
 - osnovni vidovi energije koji se koriste za pretvorbu u električnu energiju mogu biti: energija vode, toplinska energija izgaranja krutih ili plinovitih tvari, energija sunca (fotonaponske elektrane), energija kemijskih procesa.....
 - **ISTOSMJERNA STRUJA** - električno polje u vodiču **ne mijenja** smjer u vremenu te se ne mijenja ni smjer protjecanja naboja (*intenzitet struje se može mijenjati*)
 - **IZMJENIČNA STRUJA** - elaktrično polje **mijenja** smjer u određenim vremenskim razmacima te se mijenja i smjer protjecanja naboja
 - u nastavku se u osnovi promatraju struje u **METALIMA** gdje su nositelji naboja **slobodni elektroni** koji se gibaju pod utjecajem sile električnog polja

Električna strujna kao tok naboja Q u vremenu t (1)

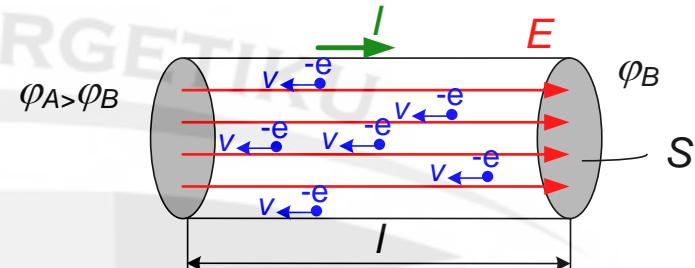
- **ELEKTRIČNA STRUJA** je usmjereni gibanja nositelja naboja, tj.električni nabijenih elementarnih ili složenih čestica, pod utjecajem stalno prisutnog električnog polja

Model vođenja električne struje

- Na krajeve cilindričnog vodiča duljine l i površine presjeka S doveden je napon $U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B > 0$
- kroz cilindričan vodič poteći će tok naboja uslijed potencijalne razlike između krajeva vodiča $\varphi_A - \varphi_B > 0$, i prisutnosti električnog polja E

- komentar smjera protjecanja toka električne struje:

- *fizikalni smjer struje* je smjer gibanja slobodnih elektrona
- *tehnički smjer struje* suprotan je smjeru gibanja slobodnih elektrona tj. ima smjer od višeg k nižem potencijalu



Prikaz toka naboja u cilindričnom vodiču

Jakost i gustoća električne struje

Jakost električne struje

➤ **Definicija:** jakost električne struje je količina naboja koja u jedinici vremena prođe kroz presjek vodiča

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad [A] \quad \rightarrow \quad Q = \int_0^t i \cdot dt \quad [As]$$

- za promjenjivu struju i ukupni naboju u vremenu t vrijedi opća relacija

$$\longrightarrow I = \frac{Q}{t} \quad [A] \quad \rightarrow \quad Q = I \cdot t \quad [As]$$

1As=1Coulon

$$1[C] = 1[As] = 6,24 \cdot 10^{18} \text{ elektrona/s}$$

Električna strujna kao tok naboja Q u vremenu t (3)

Gustoća električne struje

- **gutoćom struje J** opisujemo broj nosilaca naboja u različitim presjecima vodiča

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS} \quad [\frac{A}{m^2}]$$

- **homogeno električno polje** u vodiču uzrok je protjecanja naboja te vrijedi relacija

$$E = \frac{U_{AB}}{l} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{l}$$

Električna vodljivost i električni otpor (1)

- Isto električno polje pokrene u različitim materijalima različitu gustoću električne struje

- **električna provodnost κ** - veličina koja pokazuje odnos električnog polja i gustoće električne struje

$$\kappa = \frac{J}{E} \quad [\frac{S}{m}]$$

- κ je električna provodnost i predstavlja značajku materijala
- mjeri se u simensima/metru: (1S=1A/1V)

- **električna otpornost ρ** kao recipročna vrijednost provodnosti κ :

$$\frac{\vec{E}}{\vec{J}} = \frac{1}{\kappa} = \rho$$

- ρ je električna otpornost
- mjeri se u om-metrima
(1Ωm=1/S=1V/1A)

- za električnu struju u vodiču vrijede izrazi:

$$I = J \cdot S \xrightarrow{\kappa \cdot E} I = \kappa \cdot \frac{S}{l} \cdot U_{AB} [A]$$

- Veličina G se naziva **električna vodljivost materijala** i mjeri se u **S**(simensima)

$$G = \kappa \frac{S}{l} [S] \xrightarrow{\text{simens}} R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\kappa} \frac{l}{S}$$

Električna vodljivost i električni otpor (2)

- recipročnu vrijednost vodljivosti G je **električni otpor R**

- definicija 1Ω**

$1\Omega = \text{otpor stupca žive dugog } 106,25 \text{ [cm] presjeka}$

$1[\text{mm}^2]$ na temperaturi 0°C

$1\Omega = \text{otpor vodiča koji uz napon } 1 \text{ V uzima struju od } 1 \text{ A}$

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad [\Omega]$$

om

$$\frac{1}{\kappa} = \rho$$

ρ – električna otpornost materijala

S - presjek vodiča

l – duljina vodiča

- mjerna jedinica za električnu otpornost** materijala

$$\rho = R \frac{S}{l}$$

$$[\rho] = [\Omega \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{m}} = \Omega \text{m}]$$

$$\Rightarrow S \rightarrow \text{mm}^2 \\ \Rightarrow l \rightarrow \text{m}$$

$$1\Omega \text{m} = 10^6 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

- mjerna jedinica za električnu provodnost** materijala

$$\kappa = G \frac{l}{S_{pv}}$$

$$[\kappa] = [S \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}^2} = S / \text{m}]$$

$$\Rightarrow S \rightarrow \text{mm}^2 \\ \Rightarrow l \rightarrow \text{m}$$

$$1\text{S/m} = 10^{-6} \text{S} \frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$$

simens

- izraz za izračun otpora vodiča R_{20} pri 20°C okolne temperature je

$$R_{20} = \rho \cdot \frac{l}{S} \quad [\Omega]$$

R_{20} - radni otpor pri temperaturi od 20°C

ρ – električna otpornost materijala

l – duljina vodiča [m]

S – presjek vodiča [m^2]

Utjecaj temperature na otpor R

- ako se zbog bilo kojeg razloga temperatura električnog vodiča mijenja tada vrijedi relacija

$$R = R_{20} + \Delta R$$

- eksperimentalno se pokazuje da je ΔR ovisan o R_{20} , $\Delta \vartheta$ i o vrsti materijala (α_{20}) te vrijedi

$$\Delta R = R_{20} \cdot \alpha_{20} \cdot \Delta \vartheta$$

α_{20} - temperaturni koeficijent otpora

- ako je $t_0 = 20^\circ C$, a sa t_2 označimo trenutnu temperaturu vodiča tj. $t = \vartheta$ vrijedi

$$\Delta \vartheta = t - t_0 = \vartheta - 20^\circ$$

- ako se u izraz za otpor R uvrsti izraz za ΔR slijedi za otpor

$$R = R_{20} \cdot [1 + \alpha_{20}(\vartheta - 20)] \quad [\Omega]$$

- sada se može dobiti izraz za temperaturni koeficijent otpora

$$\alpha_{20} = \frac{\Delta R}{R_{20} \cdot \Delta \vartheta} \quad \left[\frac{1}{^\circ C} \right]$$

α_{20} - numerički predstavlja iznos veličine koja pokazuje za koliko se ohma mijenja svaki prvotni ohm (otpor prije zagrijavanja) uslijed promjene za $1^\circ C$

- može se još zaključiti da je

$$\rightarrow \tan \beta = \frac{\Delta R}{\Delta \vartheta} = \alpha_{20} \cdot R_{20} = \text{konst.}$$

- mogu se još pisati odnosi R i ΔR u slijedećem obliku

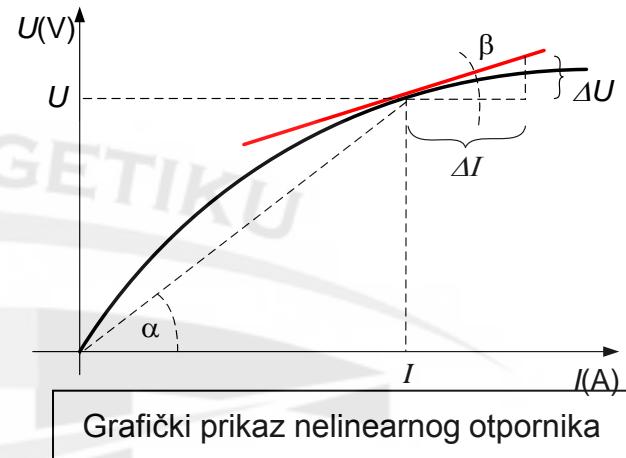
$$\begin{aligned} \Delta R &= \alpha_{20} \cdot R_{20} \cdot \Delta \vartheta & \rightarrow & \Delta R = k \cdot \Delta \vartheta \\ R &= R_{20}(1 + \alpha_{20} \Delta \vartheta) & \rightarrow & R = f(\vartheta) \end{aligned}$$

Voltamperske karakteristike

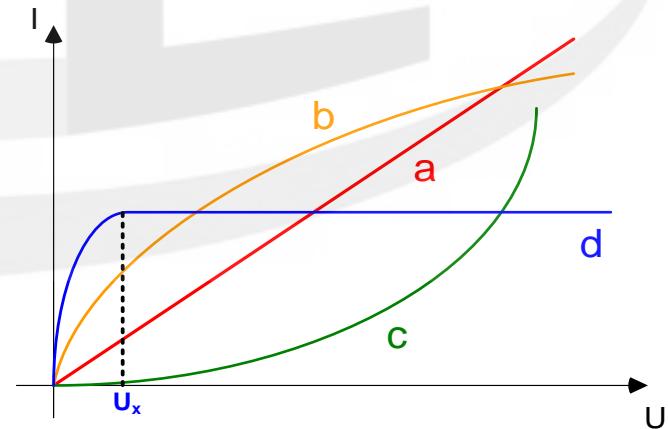
- Naponsko-strujne karakteristike tj. U-I karakteristike, $R = U/I$ nazivamo i **voltamperske karakteristike**
- ako otpor otpornika ovisi o priključenom naponu otpornik je nelinearan
- za nelinearne otpornike definiraju se **statički** i **dinamički** otpor
- **statički otpor R_s** definiran je kutem α
- **dinamički otpor R_d** definiran je kutem β

$$R_s = \frac{U}{I} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$R_d = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \operatorname{tg} \beta$$



- **U-I karakteristike nelinearnih otpora R za različite vrste električnih materijala**
- a – linearna karakteristika $R=\text{konstantno}$
odnos U i I je konstantan
- b – karakteristika žarulje s metalnom žarnom niti
sa povećanjem opterećenja otpor se povećava
- c – karakteristika žarulje s ugljenom niti
sa povećanjem opterećenja otpor se smanjuje, a struja naglo raste
- d – žarulja smještena u staklenoj cjevčici u atmosferi vodika
nakon napona U_x otpor naglo skače na $R \rightarrow \infty$



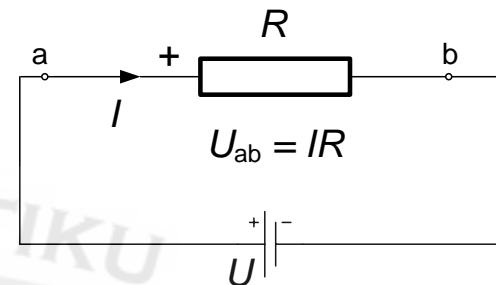
U-I karakteristike različitih materijala

Ohmov i Jouelov zakon

- U analizi elektrostatskih polja opisani su pojmovi napona ***U*** i potencijala ***φ***, toka električne struje ***I*** i otpora ***R***

- Georg Simon Ohm je 1826. godine otkrio je zakon koji povezuje napon, struju i otpor

Georg Simon Ohm (1789-1854)
Ohmov zakon (1826)



Sl.7.7 Napon, struja i otpor povezani u strujni krug

- slijedi Ohmov zakon

$$I = \frac{U_{AB}}{R} = \frac{U}{R} [A]$$

- slijedi: - ...struja kroz izvor teče od višeg k nižem naponu, - struja ulazi u vodič otpora R na njegov kraj koji je na višem potencijalu a izlazi na kraju koji je na nižem potencijalu, - i na otporu nastaje pad (gubitak) napona koji predstavlja umnožak otpora i struje kroz otpor

Jouelov zakon

James Prescott Joule (1818-1889)

- Pri prolasku struje kroz vodič elektroni se ubrzavaju i sudaraju s jezgrama i drugim elektronima gubeći pri tom kinetičku energiju koja se pretvara se u toplinsku energiju
- tu pojavu je opisao James Prescott Joule 1941. godine,
- količina naboja koja u vremenu Δt prođe vodičem može definirati kao
- pri prolasku kroz vodič naboј izgubi energiju: $\Delta W = \Delta Q(\varphi_A - \varphi_B) = I \cdot \Delta t \cdot U_{AB}$
- Izraz za snagu ***P*** predstavlja i **Juelov zakon**

$$\Delta Q = I \cdot \Delta t$$

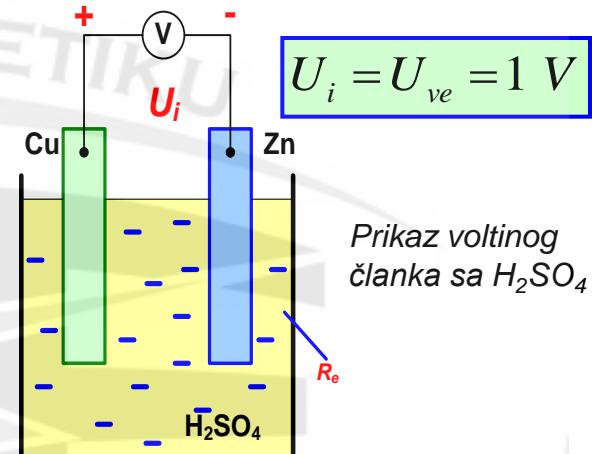
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = U \cdot I = I \cdot R \cdot I \quad \longrightarrow \quad P = I^2 R$$

Primarni elementi kao izvori istosmjrenog električnog napona

Uvodni prikaz

- **Kemijski izvori električne energije** spadaju u posebnu grupu uređaja koji stvaraju *istosmjerni napon* na svojim stezalkama kao posljedicu kemijskih reakcija koje se zasnivaju na naponu polarizacije U_p
- **napon polarizacije U_p** predstavlja elektrokemijsku pojavu pri kojoj se javlja električni napon na krajevima elektroda uronjenih u elektrolit
- prikazani su voltin element i element suhe baterije

Voltin element - u slučaju uranjanja elektrode od bakra (**Cu**) i elektrode od cinka (**Zn**) u elektrolit sumporne kiseline (H_2SO_4) na krajevima elektroda dobijemo napon polarizacije U_p od **1 V**



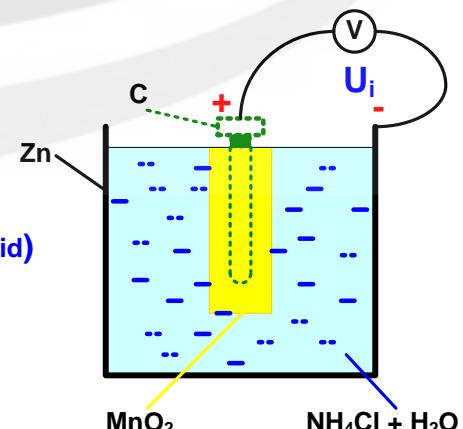
ELEKTROLIT – razrijeđena sumporna kiselina H_2SO_4 ANODA – od bakra **Cu** KATODA – od cinka **Zn** --OTPOR ELEKTROLITA - R_e

Element suhe baterije - ako se u elektrolit amonijevog klorida uroni elektroda od ugljenog štapića, a kućište od cinka (**Zn**) predstavlja drugu elektrodu dobije se napon polarizacije U_p od 1,5 V.

- napon elementa suhe baterije U_{sb} kao napon polarizacije predstavlja napon izvora istosmjernog napona U_i te slijedi relacija

$$U_i = U_{sb} = 1,5 \text{ V}$$

ELEKTROLIT – vlažna kašasta smjesa (**NH₄Cl** - amonijev klorid)
ANODA – ugljeni štapić
KATODA – cinkov lim **Zn**
MnO₂ – manganov superoksid



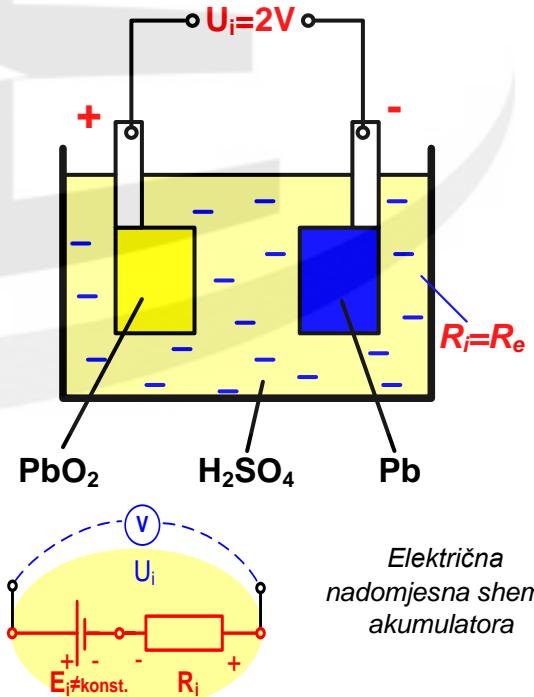
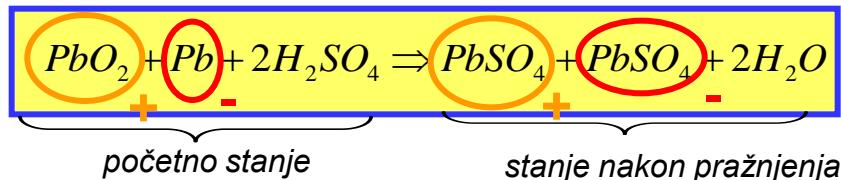
Akumulator kao izvor istosmjernog napona (1)

Općenito o akumulatorima

- **Akumulatori** su kemijski izvori napona koji se **mogu regenerirati** i fizikalno su zasnovani na pojavi elektrolize i pojavi napona polarizacije
- **režim pražnjenja** akumulatora je takav pogon u kojem je akumulator **aktivni izvor napona** i na njega su priključena trošila, - elektrolit postaje sve rijedji, - a napon polarizacije U_p se smanjuje
- u **režimu punjenja** akumulator predstavlja trošilo i priključuje se na vanjski izvor napon

Režim pražnjenja akumulatora – akumulator kao izvor istosmjernog napona

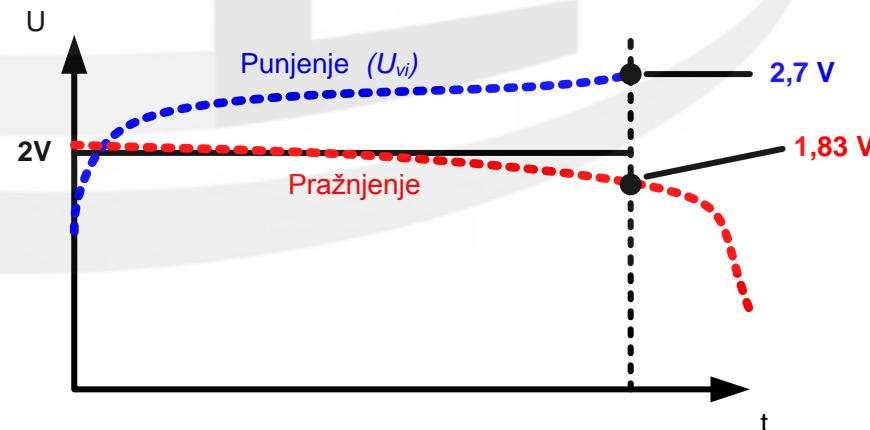
- Na slici je prikazana akumulatorska čelija sa dvije uronjene elektroda u elektrolit od sumporne kiseline (H_2SO_4)
- pozitivna elektroda je od olovnog superoksida (PbO_2) a negativna elektroda je od olova (Pb)
- akumulator je napunjen, na njegovim stezalkama je napon polarizacije od 2V te je on sada izvor istosmjernog napona
- otpor elektrolita R_e predstavlja unutarnji otpor akumulatora
- kemijska proces pražnjenja akumulatora kao izvora električne energije definiran je izrazom



Akumulator kao izvor istosmjernog napona (2)

- **napon pražnjenja** akumulatora kao izvora električne energije ($U_{pr}=U_i$) kreće se u pravilu, između 2 V i 1,80 V tj. vrijedi izraz
 - $2V > U_{pr} > 1,80V$
 - akumulator se u pravilu pri naponima ispod 1,8 V isprazni, te pražnjenje ispod tih veličina dovodi do naglog pada napona kao što se i vidi na slici
 - nakon pražnjenja potrebno je akumulator staviti u **režim punjenja** u kojem je akumulator priključen kao trošilo na vanjski izvor napona,
 - kao kemijska reakcija elektrode se vraćaju u prvobitno stanje olovne elektrode kao katode i anode od olovnog sulfata
 - kemijski proces koji prati **punjene** akumulatora je slijedeći
- $$PbSO_4 + PbSO_4 + 2H_2O \rightleftharpoons PbO_2 + Pb + 2H_2SO_4$$

puni akumulator
- **krivulja napona pri pražnjenju** akumulatora prikazuje karakteristiku napona akumulatora kao izvora električne energije
 - **krivulja napona pri punjenju** akumulatora pokazuje da se akumulatori pune sa povećanim naponom kako bi se kemijski procesi regeneracije elektroda i elektrolita kvalitetno proveli





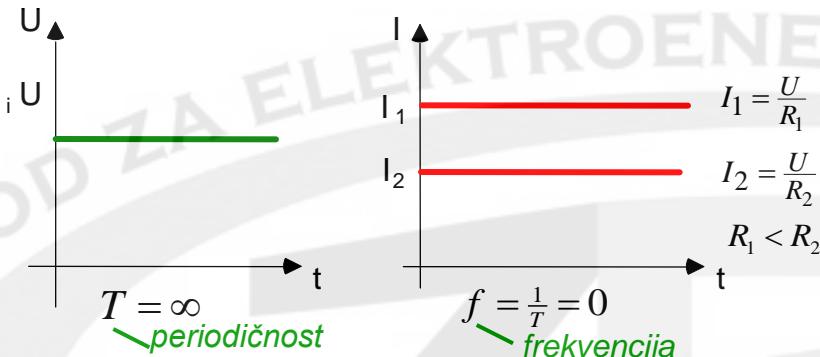
Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 8. - **OPIS ISTOSMJERNOG STRUJNOG KRUGA 1.dio**

- *osnovni elementi istosmjernog strujnog kruga*
- *realni naponski izvor*
- *serijski i paralelni spojevi otpora i izvora*
- *Kirchhoffovi zakoni*
- *potencijalni dijagram*

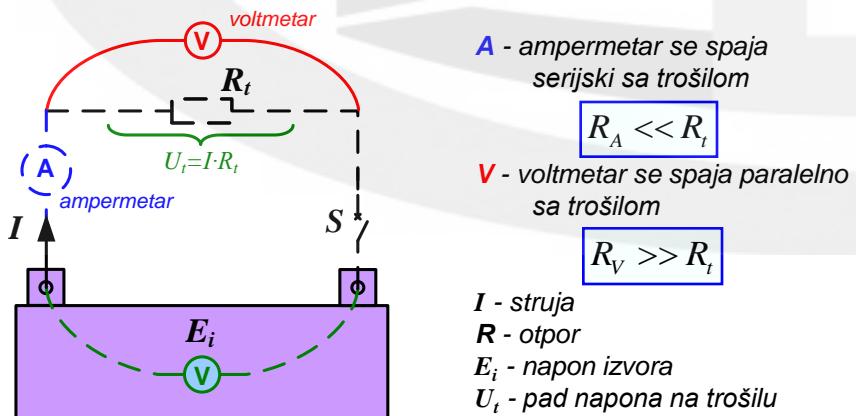
Opis jednostavnog istosmjernog strujnog kruga

- Istosmjerni strujni krug sastoji se od izvora, spojnih vodova i trošila,
- veličina struje ovisi samo o promjeni otpora trošila R promatranog električnog kruga

Sl. 8.1 Funkcije promjene istosmjernog napona U i struje I

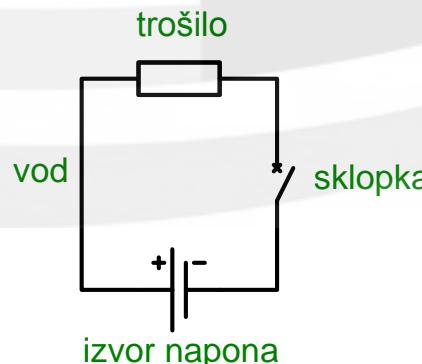
Osnovni simboli strujnoga kruga

	- simbol za općeniti prikaz izvora istosmjerne struje
	- simbol baterije kao izvora istosmjerne struje
	- sklopka za prekidanje struje
	- simboli za ampermeter i voltmetar
	- simbol radnog otpora



Sl. 8.2 Shematski i prikaz prikaz osnovnih elemenata istosmjernog strujnog kruga

- oblici Ohmovog zakona



$$I = \frac{U}{R} \quad [A]$$

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega]$$

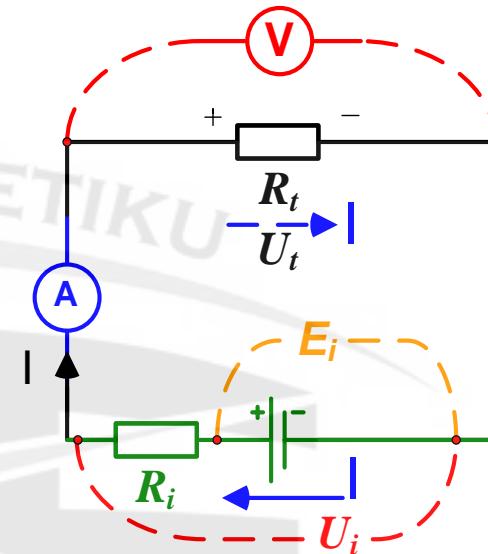
$$U = I \cdot R \quad [V]$$

Realni naponski izvor u istosmjernom strujnom krugu

- **Realni naponski izvor** nazivamo model kojim opisujemo izvor električnog napona uz pomoć:
 - idealne elektromotorne sile E_i i
 - unutarnjeg otpora R_i spojenog u seriju sa E_i
- pored veličina E_i i R_i postoji i vanjski napon izvora U_i
- napon U_i je u napon koji izvor predaje potrošačima sa unutarnjim otporom naponskog izvora R_i iskazuju se gubici naponskog izvora,
- odnosi električnih veličina realnog naponskog izvora prikazuju se slijedećom jednadžbom

$$U_i = E_i - I \cdot R_i \quad [V] \quad (8.4)$$

- za sve režime rada strujnog kruga sa modelom realnog naponskog izvora, uz promjenu otpora trošila $[0 < R_t < \infty]$, vrijedi **OHMOV ZAKON**
- ~~u nastavku će se opisati slučaj praznog hoda i kratkog spoja realnog naponskog izvora~~



E_i - elektromotorna sila ili unutarnji napon izvora

R_i - unutarnji otpor izvora

U_i - vanjski napon izvora

R_t - radni otpor trošila

$\Delta U_i = I \cdot R_i$ - unutarnji pad napona na izvoru

$U_t = I \cdot R_t$ – pad napona na trošilu

Sl.8.4 Prikaz realnog naponskog izvora u istosmjernom strujnom krugu

Prazni hod i kratki spoj realnog naponskog izvora

- Prazni hod** je režim pogona izvora istosmjernog napona (sl.8.5) pri kojem:

- **ne teče** struja u strujnom krugu i
- trošilo nije priključeno na izvor napona

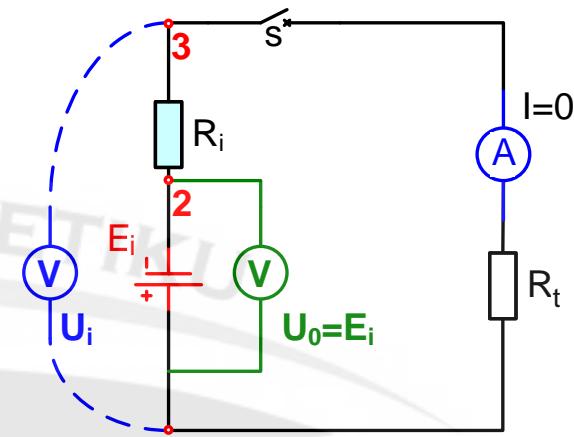
- sklopka S je otvorena i za ovaj režim pogona električnog strujnog kruga vrijede izrazi:

$$R = \infty \quad I = \frac{U}{R} = 0$$

- koristeći izraz **za napon U_i** slijedi za ovaj režim pogona :
- vanjski napon U_i i unutarnji napon E_i su jednaki,

$$E_i = U_i = U_0$$

E_i - elektromotorna sila
(unutarnji napon izvora)
 U_i - vanjski napon izvora



Sl.8.5 prazni hod realnog naponskog izvora

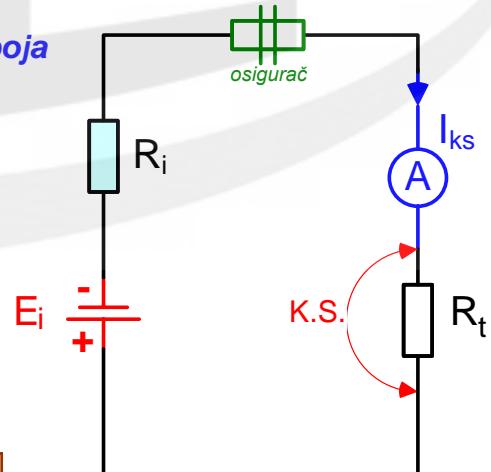
U_0 - napon praznog hoda
 R_i - unutarnji otpor izvora
 R_t - otpor trošila

Kratki spoj realnog naponskog izvora

- U strujni krug je uključen samo izvor sa svojim unutarnjim otporom, a trošilo je kratko spojeno ($R_t=0$),
- uz navedeni uvjet da je $R_t = 0$ slijedi osnovna jednadžba za ovaj režim pogona električnog strujnog kruga
- ako vrijedi da je unutarnji otpor jako mali tj. $R_i \approx 0$
tada je $R_i < R_t$,
- slijedi da je I_{ks} jako veliki tj. $I_{ks} \approx \infty$,

$$I_{ks} = \frac{E_i}{R_i}$$

$$R_i \rightarrow 0 \dots \dots I_{ks} \rightarrow \infty$$



Sl.8.6 prazni hod realnog naponskog izvora

Vanjska karakteristika realnog naponskog izvora (2)

- Vanjska karakteristika realnog naponskog izvora opisuje sve režime između pogona praznog hoda i kratkog spoja
- za prikazani strujni krug sa realnim naponskim izvorom vrijedi Ohmovom zakonu

$$I = \frac{E_i}{R_i + R_t} \quad (8.10)$$

- zavisnost vanjskog napona izvora U_i o struji opterećenja I , $U_i = f[I]$ predstavlja vanjsku karakteristiku realnog naponskog izvora

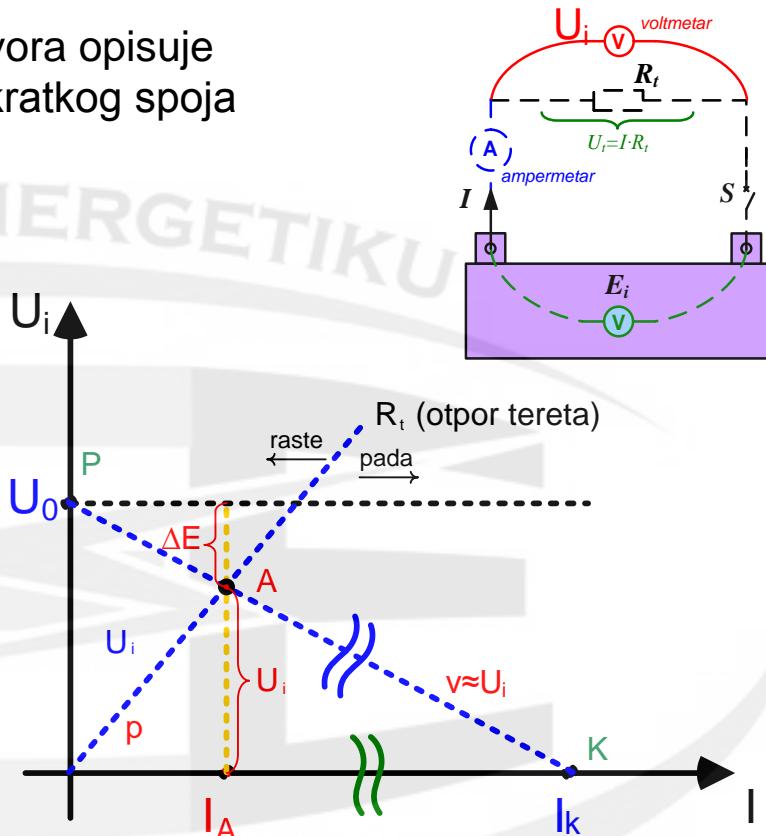
$$U_i = E_i - I \cdot R_i \quad (8.11)$$

$$\Delta E_i = I \cdot R_i \quad (8.12)$$

- karakteristične veličine

$$E_i = \text{konst.}$$

$$R_i = \text{konst.}$$



pravac v - napon na stezaljkama izvora
 pravac p - karakteristika vanjskog otpora R_t

A - radna točka kruga

ΔE_i - unutarnji pad napona izvora

K - točka kratkog spoja..... $I_k = \frac{E_i}{R_t}$
 I_k - struja kratkog spoja

P - točka praznog hoda..... $I = 0 \quad U_0 = E$

U_0 - napon praznog hoda

sl.8.8 Prikaz vanjske karakteristike realnog naponskog izvora

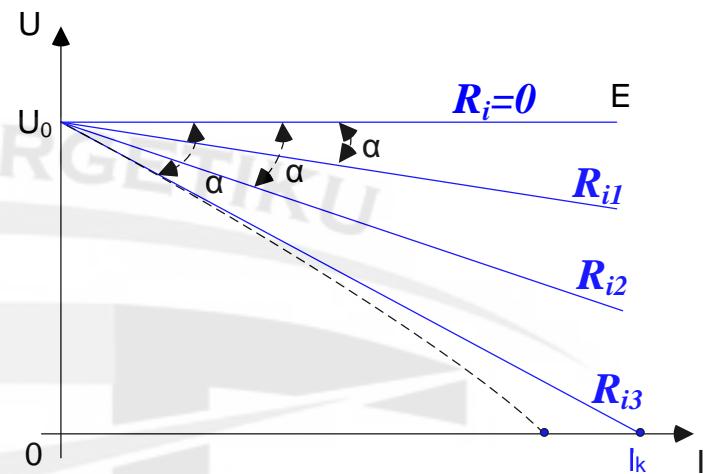
Dijagram utjecaja unutarnjeg otpora na vanjsku karakteristiku izvora

- Unutarnji otpor izvora R_i direktno utječe na vanjsku karakteristiku izvora i u stvari je pokazatelj gubitaka izvora

$$R_{i1} < R_{i2} < R_{i3}$$

$$R_i = k_R \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$R_i = 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow E = \text{konst.} \rightarrow I_k = \infty$$



Utjecaj unutarnjeg otpora R_i na vanjsku karakteristiku izvora

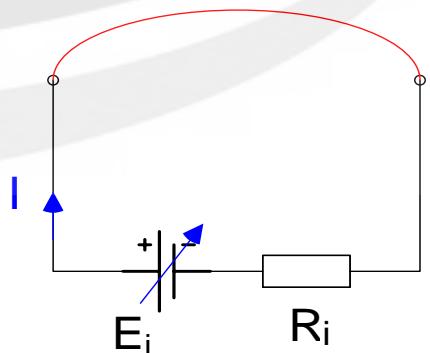
Pokus kratkog spoja izvora

- otpor izvora R_i može se dobiti i **pokusom** kratkog spoja izvora pri kojem se izvor napona uključuje u poseban režim rada
- definicija:** **Pokus kratkog spoja** je takav režim rada realnog naponskog izvora u kojem su stezaljke izvora kratko spojene, a napon E_i se povećava sve dok ne poteče u strujnom krugu nazivna struja I_n
- vrijednost unutarnjeg otpora R_i može se dobiti prema relaciji

E_k – napon izvora pri kojem u strujnom krugu poteče nazivna struja I_n

$$R_i = E_k / I_n$$

$$R_i = \frac{E_k}{I_n}$$



Skica pokusa kratkog spoja naponskog izvora

Serijski spoj izvora električnog napona

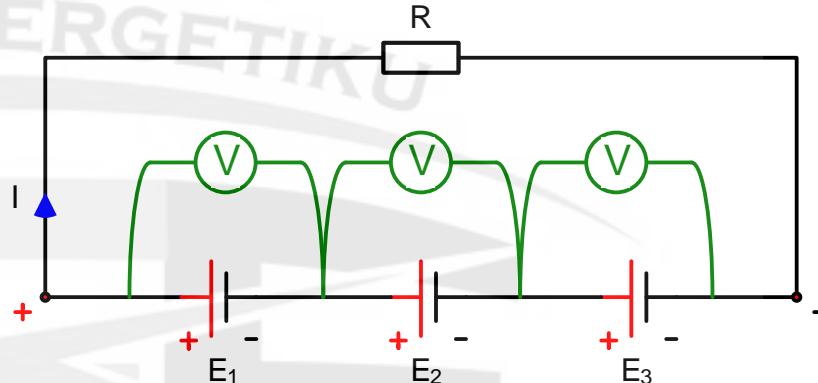
- Serijsko spajanje izvora električnog napona koristi se **DA SE POSTIGNE VIŠI NAPON SUSTAVA**
- izvori električnog napona spajaju se serijski tako da se "-" pol jednog izvora napona spaja sa "+" polom drugog izvora napona

- prema slici je izabran model idealnog naponskog izvora te vrijedi izraz za ukupan napon

$$E_1 + E_2 + E_3 = I \cdot R$$

R_{i1}, R_{i2}, R_{i3} zanemareno

$$E_i = U_i$$



Sl. 8.20 Serijski spoj izvora električnog napona

- a općenita relacija za ukupni napon serijskih spojenih izvora je

$$E_s = \text{alg} \sum_i^n E_i$$

*E_s - ukupni napon serijski
spojenih izvora
E_i - napon i-tog izvora*

- za struje u promatranom strujnom krugu vrijedi:



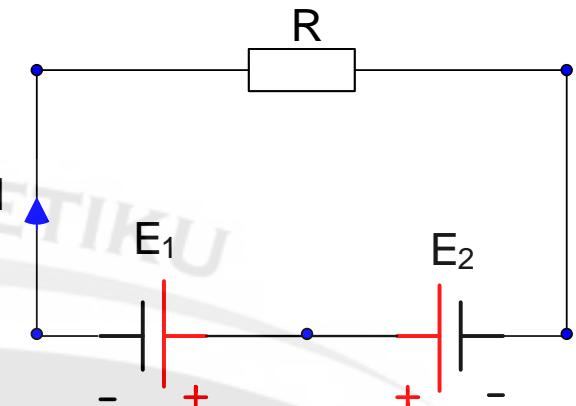
$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

- najveće dozvoljeno strujno opterećenje je ono koje dozvoljava izvor sa najmanjom nazivnom strujom **I_n**

Protuspoj izvora električnog napona

- Kao oblik serijskog spajanja izvora koristi se **protuspoj izvora** kojemu je često svrha kompenziranje napona u pojedinim električnim strujnim krugovima
- za prikazani strujni krug vrijedi prema Ohmovom zakonu

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R} = \frac{\Delta E}{R}$$



Serijski protuspoj izvora za kompenzaciju napona

Kompenzacija napona

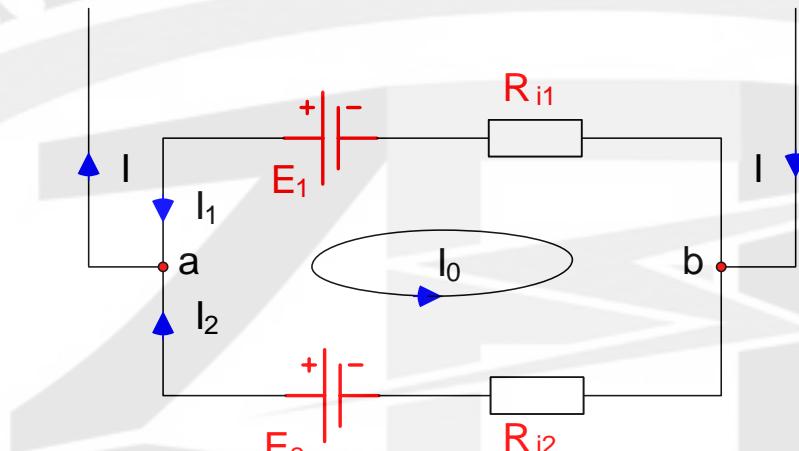
- za **djelomičnu** kompenzaciju vrijede slijedeći naponsko strujni uvjeti
- a kod **potpune** kompenzacije su naponi izvora jednaki te slijedi

$$\Delta E \neq 0 ; I \neq 0$$

$$\begin{aligned} E_1 &= -E_2 \\ \Delta E &= 0 \end{aligned} \rightarrow I = \frac{\Delta E}{R} = 0$$

Paralelni spoj izvora (1)

- Paralelni spoj izvora koristi se da se poveća struja koju daju tako spojeni izvori
- izvori električnog napona se paralelno spajaju tako da se istoimeni polovi spoje zajedno
- pri opisu paralelno spojenih izvora napona koristimo model realnog naponskog izvora



Sl.8.13 Paralelni spoj realnih naponskih izvora

- pri paralelnom spajanju treba paziti da vanjski naponi izvora U_i budu jednaki kako bi se izbjegle štetne struje izjednačenja I_0 koje bi tekle unutar paralelno spojenih izvora te slijedi izraz

$$U_{i1} = U_{i2} \quad (8.26)$$

Paralelni spoj izvora (2)

- prema drugom Kicrhoffovom zakonu vrijedi:

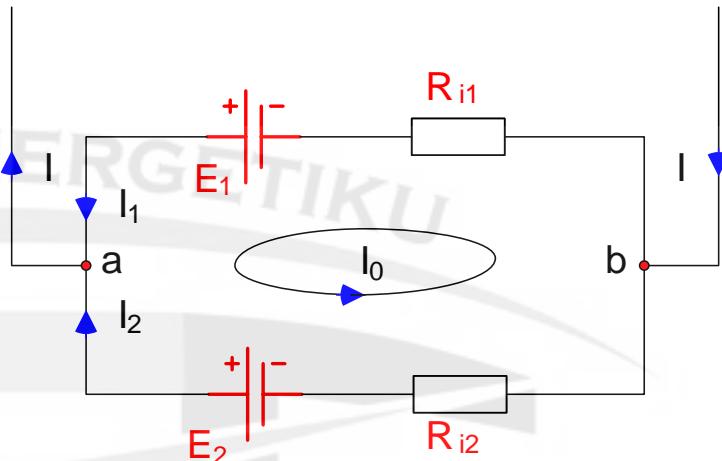
$$E_1 - E_2 = I_1 R_{i1} - I_2 R_{i2} \quad (8.27)$$

- uz ispunjenje uvjeta jednakosti unutarnjih napona izvora slijedi

$$E_1 = E_2 \rightarrow I_0 = 0$$

$$I_1 R_{i1} = I_2 R_{i2} \rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_{i2}}{R_{i1}} \quad (8.28)$$

- struje koje daju pojedini izvori uz jednake elektromotorne sile E odnose se obrnuto proporcionalno veličini unutarnjih otpora R_i



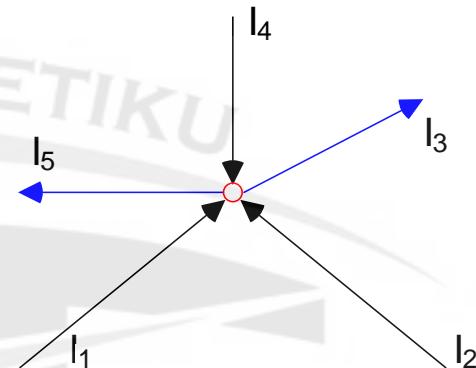
Prvi Kirchhoffov zakon

- Prvi Kirchhoffov zakon odnosi se na struje u čvorištima električnih mreža

- Definicija: **Algebarska suma struja koje ulaze u jedno čvorište električne mreže jednaka je nuli.**
(ili suma struja koje ulaze u čvorište električne mreže jednaka sumi struja koje izlaze iz tog čvorišta)

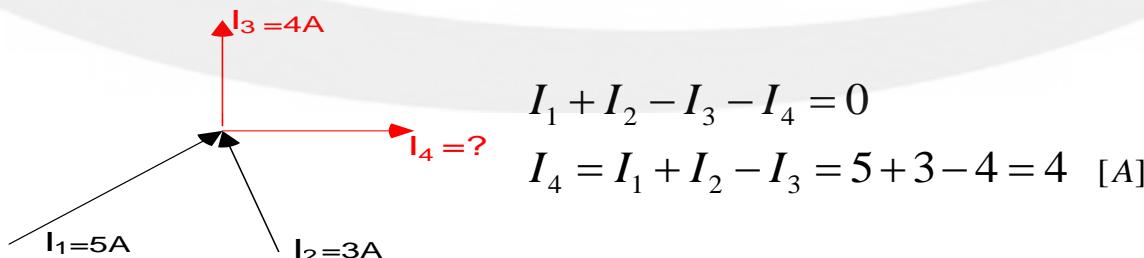
$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0 \rightarrow \text{alg } \sum_{i=1}^n I_i = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_4 = I_3 + I_5$$



Ulagane i izlazne struje promatranog čvorišta

Primjer



Drugi Kirchhoffov zakon

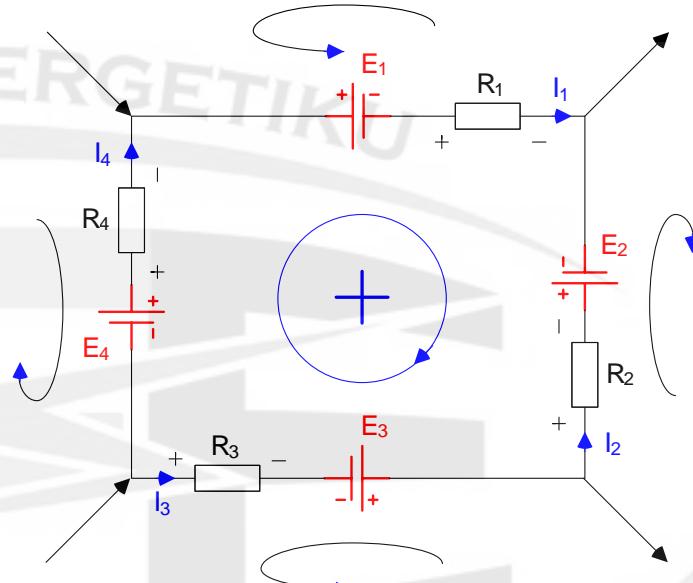
- naponska jednadžba petlje
prema slici

$$-E_1 + E_2 - E_3 + E_4 = +I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_3 R_3 + I_4 R_4$$

- izraz za drugi Kirchhoffov zakon :

$$\text{alg} \sum_{i=1}^n E_i = \text{alg} \sum_{j=1}^m I_j R_j$$

- Definicija: **Algebarska suma svih aktivnih izvora napona u jednoj petlji električne mreže jednaka je algebarskoj sumi svih padova napona u toj istoj petlji.**
(ili algebarska suma aktivnih i pasivnih napona u jednoj petlji električne mreže jednaka je nuli)



Prikaz električne strujne petlje

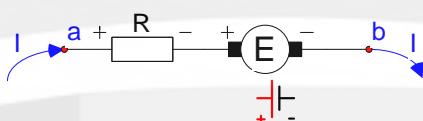
- smjer struja I_1 do I_4 u granama odabran je proizvoljno a zavisno o pozitivnom ili negativnom predznaku u rezultatu proračuna odabrani smjer ili ostaje ili se mijenja
- pri definiranju naponske jednadžbe predznak napona izvora je pozitivan ako smjerom promatranja petlje prolazimo unutar izvora od "—" prema "+" predznaku
- pad napona na otporu je pozitivan ako smjerom promatranja petlje prolazimo kroz otpor od "+" prema "-"

Potencijalni dijagram (1)

- Određivanje potencijala pojedine točke električnih mreža
- osnovni princip označavanja predznaka pasivnih i aktivnih napona u grani električne mreže prikazani su na slikama 1 i 2



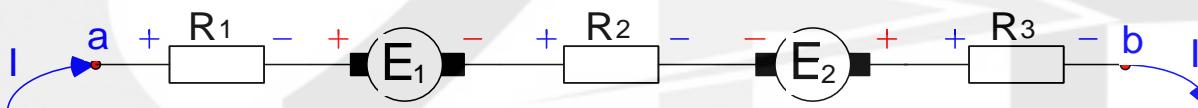
Sl.1 Grana mreže uz pozitivno orijentirani napon izvora



Sl.2 Grana mreže uz negativno orijentirani napon izvora

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R + E$$

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I \cdot R - E$$



Sl.8.26 Grana električne mreže sa više aktivnih i pasivnih elemenata

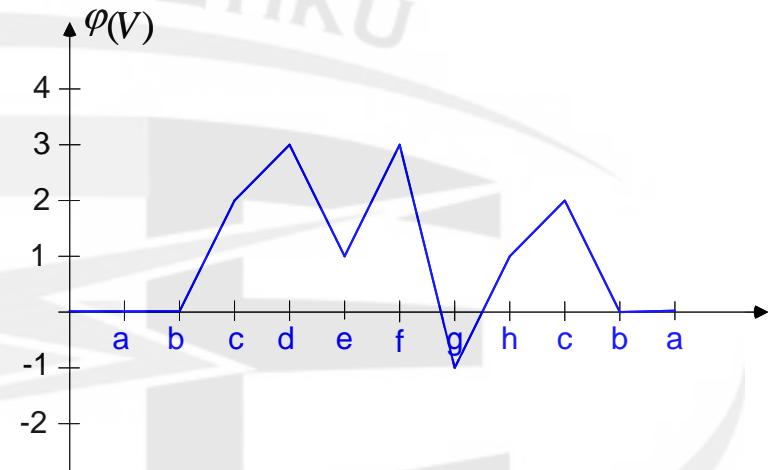
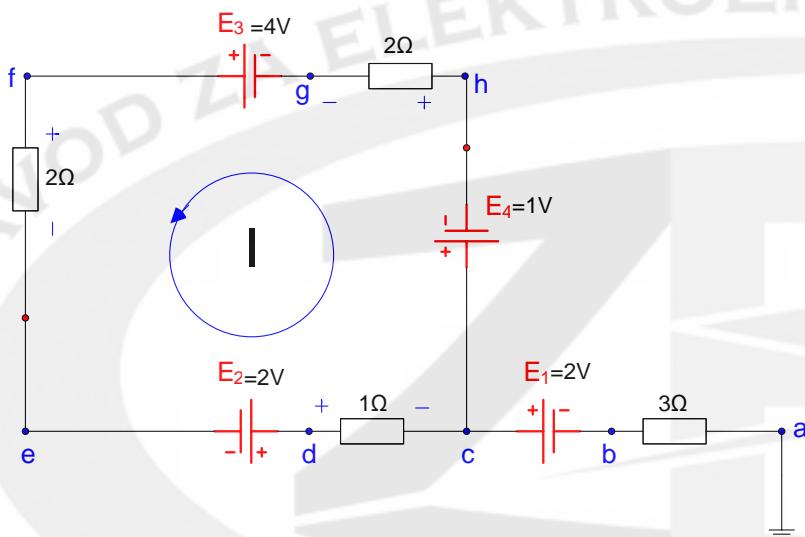
- izraz za definiranje potencijala **točke b** i **napona U_{ab}**

$$\varphi_b = \varphi_a - I \cdot R_1 + E_1 - I \cdot R_2 + E_2 - I \cdot R_3$$

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = I(R_1 + R_2 + R_3) - E_1 - E_2 = I \sum_i^n R_i - a \lg \sum_j^m E_j$$

Potencijalni dijagram (2)

- primjer: prikazana je električna shema za koju treba definirati potencijalni dijagram za navedene točke strujnog kruga (L1)



- primjeri očitanja napona između pojedinih potencijalnih točaka

$$U_{cf} = \varphi_c - \varphi_f = 2 - 3 = -1V$$

$$U_{gc} = \varphi_g - \varphi_c = -1 - 2 = -3V$$

Serijski spoj otpora

- U serijskom spoju vrijedi:
 - struja je jednaka za sve serijski vezane otpore,
 - padovi napona pojedinih otpora se zbrajaju

$$I = I_1 = I_2$$

$$U = U_1 + U_2$$

- prema Ohmovom zakonu vrijedi za napone na pojedinim trošilima:

$$I = \frac{U}{R}$$

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = I \cdot R_2$$

- koristeći početne uvjete i nakon sređivanja slijedi

$$\frac{U}{I} = R = R_1 + R_2$$

$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

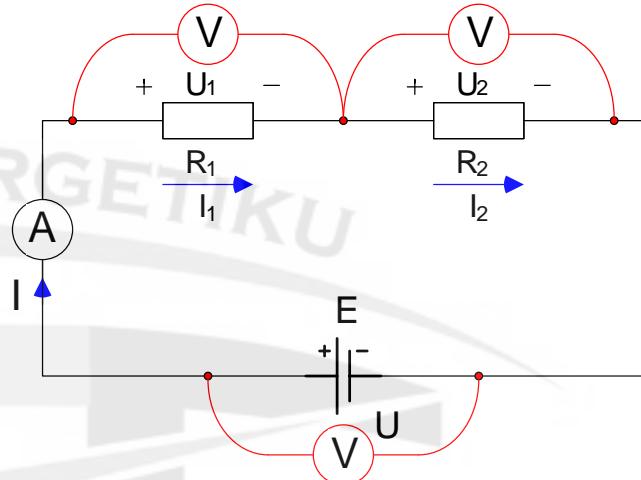
- Odnosi padova napona serijski vezanih otpora

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$U_1 : U_2 = R_1 : R_2$$

veći otpor veći pad napona,
manji otpor manji pad napona

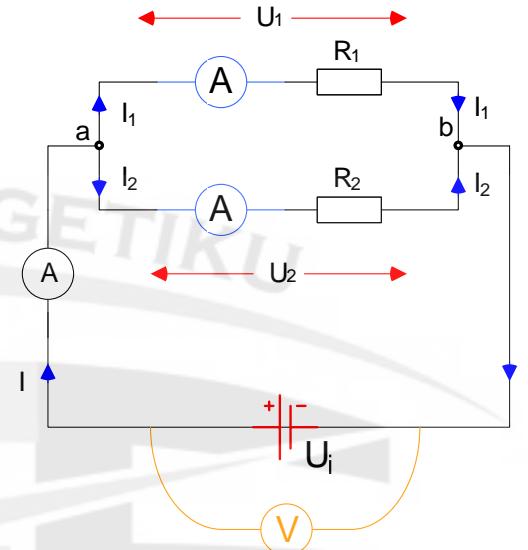


Serijski spojeni otpori u strujnom krugu

Paralelni spoj otpora

- Otpori su vezani između istih potencijalnih točaka
- početni uvjeti
- padovi napona pojedinih otpora su jednaki,
- ukupna struja je zbroj struja pojedinih trošila
- prema Ohmovom zakonu i početnim uvjetima slijedi:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{-----} \rightarrow I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} = U \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$



Sl.8.12 Paralelni spoj otpora

- sređivanjem jednadžbi slijedi opći izraz za otpor:
- za padove napona vrijedi $U_1=I_1R_1$ i $U_2=I_2R_2$ te uz uvjet $U=U_1=U_2$ slijedi ----- $I_1 : I_2 = R_2 : R_1$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Paralelni spoj vodljivosti

- Izrazi za *Ohmov zakon* ako se koristi vodljivost **G** umjesto otpora **R** su slijedeći
- za ukupnu vodljivost paralelno vezanih otpora prema slici vrijedi izraz

$$G = \frac{1}{R}$$

$$G = \frac{I}{U}$$

$$U = \frac{I}{G}$$

$$I = U \cdot G$$

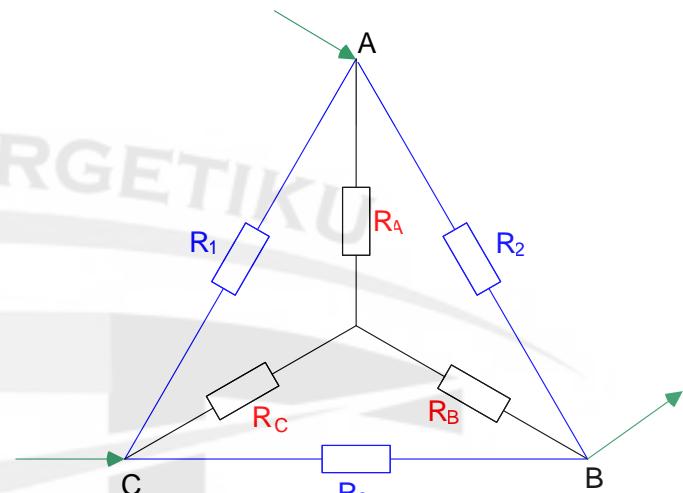
$$G = G_1 + G_2 \quad \text{-----} \rightarrow$$

$$G = \sum_i^n G_i$$

Transformacija spojeva otpora TROKUT-ZVIJEZDA-TROKUT

- U strujnim shemama javljaju se i spojevi otpora u zvijezdu i trokut,
- takve strukture otpora potrebno je prebaciti u paralelno-serijsku kombinaciju,
- pri tome je potrebno spoj zvijezda transformirati u trokut, a spoj trokut zvijezda

- otpori R_A , R_B i R_C su spojeni u spoju zvijezda,
- otpori R_1 , R_2 i R_3 su spojeni u spoju trokut



Otpori u spoju trokut i spoju zvijezda

trokut-zvijezda

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

zvijezda-trokut

$$R_1 = \frac{R_A R_C + R_A R_B + R_B R_C}{R_B}$$

$$R_2 = \frac{R_A R_C + R_A R_B + R_B R_C}{R_C}$$

$$R_3 = \frac{R_A R_C + R_A R_B + R_B R_C}{R_A}$$



Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 9. - **OPIS ISTOSMJERNOG STRUJNOG KRUGA 2.dio**

- naponski i strujni izvor
- relacije transformacija i nadomjesni spojevi
- snaga i energija istosmjerne struje
- prilagođenje izvora i tereta o snazi

Naponski izvor

Naponski izvor je model u kojem električni izvor prikazujemo sa jednom idealnom elektromotornom silom E_i i serijski vezanim unutarnjim otporom R_i

- za vanjski napon izvora vrijedi:

$$U_i = E_i - I \cdot R_i \quad (9.1)$$

- za struju u prikazanom strujnom krugu prema Ohmovom zakonu vrijedi:

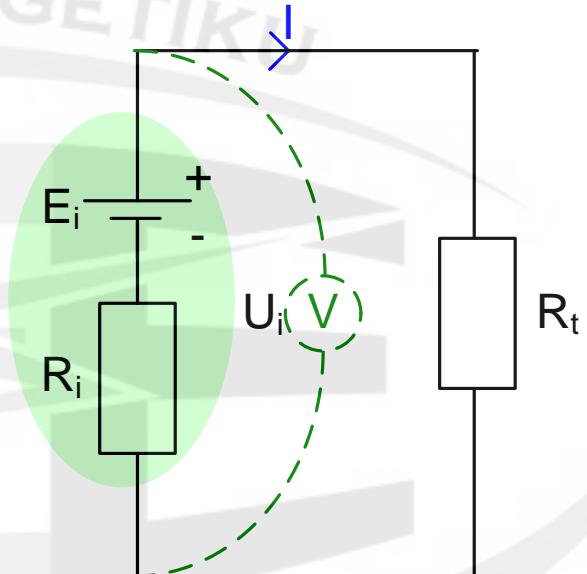
$$I = \frac{E_i}{R_i + R_t} \quad (9.2)$$

- koristeći izraze (12.1) i (12.2) može se provesti kratki izračun

$$U_i = E_i - \frac{E_i}{R_i + R_t} \cdot R_i = E_i \cdot \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R_t} \right)$$

- te slijedi drugi oblik jednadžbe vanjskog napona U_i

$$U_i = E_i \cdot \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R_t} \right) \quad (9.3)$$



Sl.9.1 Realni naponski izvor

Strujni izvor (1)

Strujni izvor je model sa kojim električni izvor prikazujemo sa strujom kratkog spoja I_k i paralelno vezanim unutarnjim otporom R_i

- za vanjsku struju I strujnog izvora vrijedi:
- $$I_i = I_k - I_s \quad (9.4)$$
- uz shemu na sl.12.2 vrijede još i slijedeće relacije

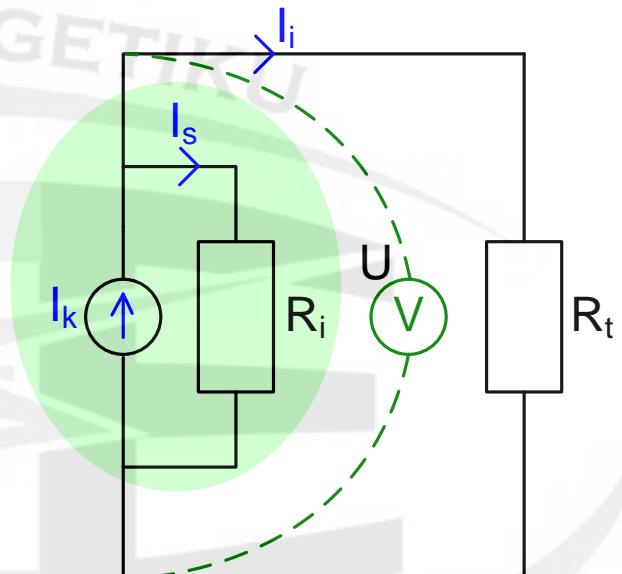
$$I_s = \frac{U}{R_i} = U \cdot G_i \quad I_i = \frac{U}{R_t} = U \cdot G_t \quad (12.5)$$

- sada se uz kratki izračun dobije i drugi oblik izraza (9.4)

$$I_i = I_k - \frac{U}{R_i} = I_k - U \cdot G_i$$

$U \cdot G_i$

$$I_i = I_k - U \cdot G_i \quad (9.6)$$



I_k – struja kratkog spoja
 I_s - unutarnja struja gubitaka
 I_i - vanjska struja

Sl.9.2 Realni strujni izvor

Strujni izvor (2)

- prema iznesenom može se za struju I_k definirati slijedeća relacija:

$$I_k = I_i + I_s = U \cdot G_t + U \cdot G_i = U \cdot (G_t + G_i) \longrightarrow I_k = U \cdot (G_t + G_i) \quad (9.7)$$

- te se za napon U može pisati:

$$U = \frac{I_k}{G_t + G_i} \quad (9.8)$$

- konačno se može definirati i izraz za vanjsku struju I_i strujnog izvora:

$$I_i = I_k - U \cdot G_i = I_k - \frac{I_k}{G_i + G_t} \cdot G_i \longrightarrow I_i = I_k \cdot \left(1 - \frac{G_i}{G_i + G_t} \right) \quad (9.9)$$

- vidi se da je struktura izraza (9.9) potpuno analogna strukturi izraza (9.3) za vanjski napon U_i , a ako se umjesto vodljivosti G_i i G_t uvrste otpori R_i i R_t dobije se drugi oblik izraza (9.9)

$$I_i = I_k \cdot \left(\frac{R_i}{R_i + R_t} \right) \quad (9.9.a)$$

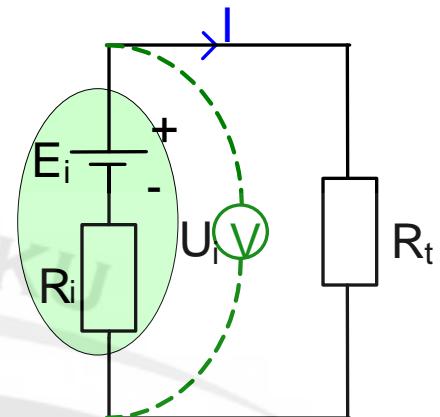
Naponski i strujni izvor

- Za vanjski napon U_i naponskog izvora vrijedi:
- za unutarnji napon E_i u strujnom krugu prema Ohmovom zakonu vrijedi:
- koristeći gornje izraze uz kratki izračun slijedi za vanjski napon U_i

$$U_i = E_i - I \cdot R_i$$

$$E_i = I \cdot (R_i + R_t)$$

$$U_i = E_i \cdot \left(1 - \frac{R_i}{R_i + R_t}\right)$$



Realni naponski izvor

Strujni izvor

- Za vanjsku struju I_i strujnog izvora vrijedi:
- uz odgovarajuće transformacije mogu se za struje I_k i I_i definirati relacije:
- za unutarnji struju I_k u strujnom krugu prema Ohmovom zakonu vrijedi:
- koristeći gornje izraze uz kratki izračun slijedi za vanjsku struju I_i

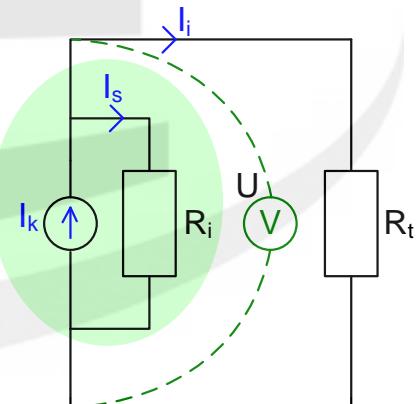
$$I_i = I_k - I_s$$

$$I_i = I_k - U \cdot G_i$$

$$I_k = U \cdot (G_t + G_i)$$

$$I_i = I_k \cdot \left(1 - \frac{G_i}{G_i + G_t}\right)$$

$$I_s = \frac{U}{R_i} = U \cdot G_i \quad I_i = \frac{U}{R_t} = U \cdot G_t$$



I_k - ukupna struja
 I_s - unutarnja struja gubitaka
 I_i - vanjska struja

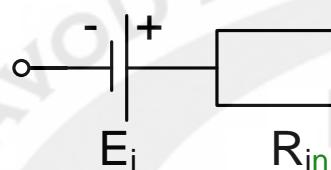
Realni strujni izvor

Relacije transformacija za strujni i naponski izvor

Često je potrebno u proračunima električnih mreža zamijeniti naponski izvor sa strujnim ili obrnuto

- Postupak 1.:**
- zadane su vrijednosti otpora i napona za naponski izvor E_i i R_{in}
 - traže se vrijednosti otpora i struje za strujni izvor I_k i R_{is}

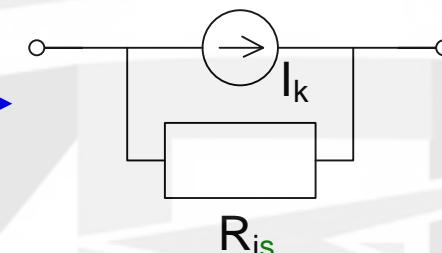
E_i, R_{in}



E_i - unutarnji napon izvora

R_{in} – unutarnji otpor naponskog izvora

I_k, R_{is}



I_k - struja kratkog spoja izvora

R_{is} – unutarnji otpor strujnog izvora

Jednadžbe transformacije

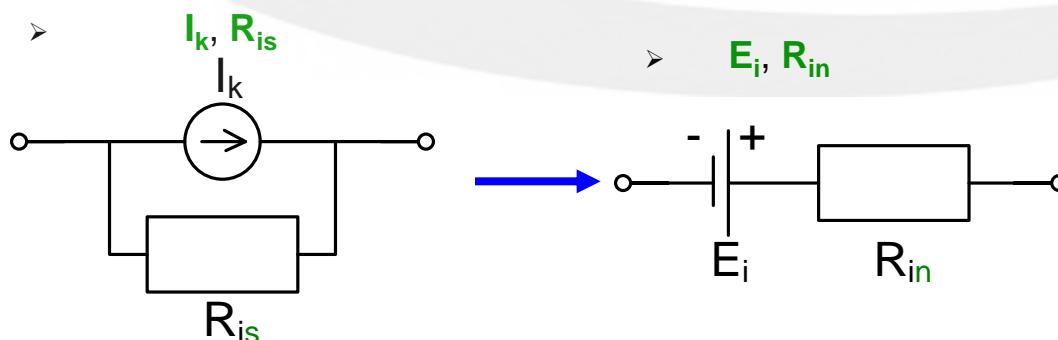
$$I_k = \frac{E}{R_{in}}$$

$$R_{in} = R_{is}$$

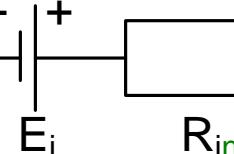
Prikaz transformacije naponskog
u strujni izvor

- Postupak 2.:**
- zadana je struja I_k i otpor R_{is} za strujni izvor
 - traže se napon E_i i otpor R_{in} naponskog izvora

I_k, R_{is}



E_i, R_{in}



Jednadžbe transformacije

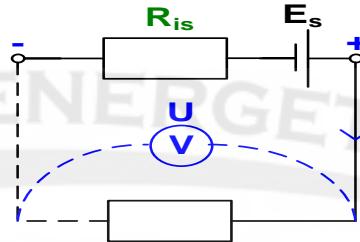
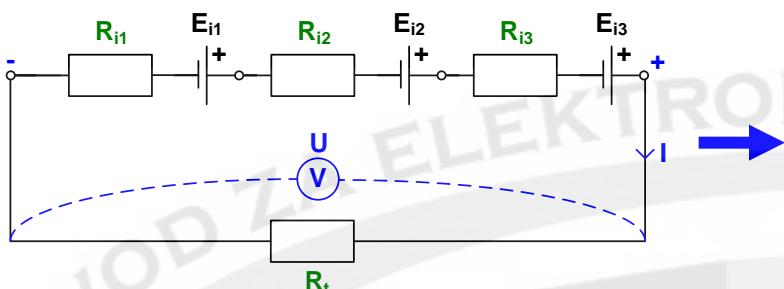
$$E_i = I_k \cdot R_{is}$$

$$R_{is} = R_{in}$$

Prikaz transformacije strujnog
u naponski izvor

Nadomjesni izvor serijski vezanih naponskih izvora

- U prikazanoj električnoj mreži imamo serijski vezane realne naponske izvore te se zbroje unutarnji naponi izvora E_i i unutarnji otpori izvora R_i kako bi se dobile vrijednosti sumarnog naponskog izvora



$$E_{is} = \text{alg} \sum_{l=1}^n E_{il}$$

$$R_{is} = \sum_{l=1}^n R_{il}$$

$$I_s = \frac{E_{is}}{R_{is} + R_t}$$

Prikaz nadomjesnog spoja serijski vezanih naponskih izvora

- E_{is} je ukupna elektromotorna sila a R_{is} je ukupni unutarnji otpor serijski vezanih naponi izvora vrijedi:

- slijedi opći izraz za struju prema sl.9.5:

$$I = \frac{\text{alg} \sum_l E_{il}}{\sum_l R_{il} + R_t}$$

- a za vanjski napon serijski vezanih izvora U_{is} slijedi kratki izračun:

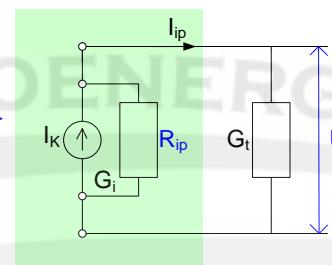
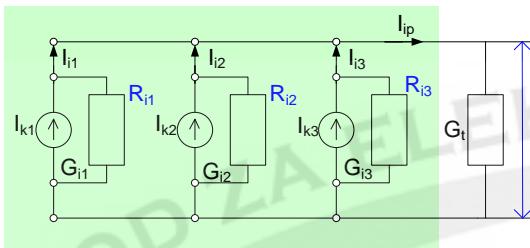
$$U_{is} = E_{is} - \Delta E_{is} = E_{is} - I \cdot R_{is} = \sum_l^n E_{il} - I \cdot \sum_l^n R_{il} = \sum_l^n E_{il} - \frac{\sum_l^n E_{il}}{\sum_l^n R_{il} + R_t} \cdot \sum_l^n R_{il} \longrightarrow U_{is} = \sum_l^n E_{il} \cdot \left(1 - \frac{\sum_l^n R_{il}}{\sum_l^n R_{il} + R_t} \right)$$

- i na kraju se nakon sređivanja dobije konačni izraz za napon U_{is}

$$U_{is} = \text{alg} \sum_l E_{il} \cdot \frac{R_t}{R_t + \sum_l R_{il}}$$

Nadomjesni izvor paralelno vezanih strujnih izvora

- U praksi se koristi i **paralelni spoj više strujnih izvora** i takav slučaj se rješava analogno kao i serijska veza naponskih izvora - tu se zbrajaju struje I_k i unutarnje vodljivosti $G_i = 1/R_i$ pojedinih izvora



$$I_{kp} = \text{alg} \sum_{l=1}^n I_{kl}$$

$$G_{ip} = \sum_{l=1}^n G_{il}$$

$$G_{il} = \frac{1}{R_{il}}$$

Prikaz nadomjesnog spoja paralelno vezanih strujnih izvora

- I_{kp} je ukupna struja a G_{ip} je ukupnu vodljivost paralelno vezanih strujnih izvora,
- za vanjski napon U_p i vanjsku struju I_{ip} slijede izrazi analogno izrazima za struju i napon serijski vezanih naponskih izvora (umjesto otpora R ovi izrazi su prikazani vodljivostima G)

$$U_p = \frac{I_{kp}}{G_{ip} + G_t} = \frac{\text{alg} \sum_l I_{kl}}{\sum_l G_{il} + G_t}$$

$$I_{ip} = U \cdot G_t$$

$$I_{ip} = a \lg \sum_l I_{kl} \cdot \frac{G_t}{G_t + \sum_l G_{il}}$$

I_{ip} - ukupna vanjska struja paralelno vezanih strujnih izvora

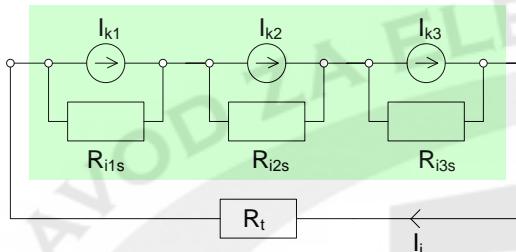
- vidi se da je izraz I_{ip} po strukturi identičan izrazu koji opisuje napon U_{is} serijski vezanih naponskih izvora

$$U_{is} = \text{alg} \sum_l E_{il} \cdot \frac{R_t}{R_t + \sum_l R_{il}}$$

Serijski spoj strujnih izvora (1)

U praksi se pojavljuju i situacije gdje su **strujni** izvori vezani u **serijskom** spoju i tako vezani strujni izvori ne mogu se riješavati na način da se struje i vodljivosti zbrajaju (kao naponski izvori u serijskom spoju)

- zato je prikladno da se u prvom koraku strujni izvori transformiraju u naponske izvore a u drugom koraku se sumarni naponski izvor transformira u serijski



Serijski spoj strujnih izvora

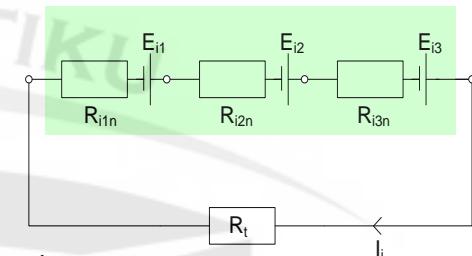
$$E_{i1} = I_{k1} R_{i1s}$$

$$E_{i2} = I_{k2} R_{i2s}$$

$$E_{i3} = I_{k3} R_{i3s}$$

$$R_{is} = R_{in}$$

R_{in} - unutarnji otpor naponskog izvora

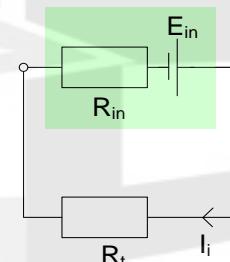


Serijski spoj nadomjesnih naponskih izvora

- slijede ukupni napon E_{in} i otpor R_{in} za serijski spojene naponske izvore

$$E_{in} = E_{i1} + E_{i2} + E_{i3}$$

$$R_{in} = R_{i1n} + R_{i2n} + R_{i3n}$$

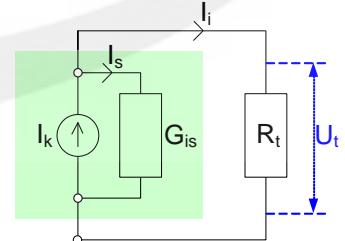


Ukupni naponski izvor serijski vezanih naponskih izvora

- sada se dobiveni sumarni naponski izvor treba pretvoriti u konačni traženi strujni izvor prema relacijama

$$I_k = \frac{E_{in}}{R_{in}} = \frac{E_{i1} + E_{i2} + E_{i3}}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$I_s = U \cdot G_{is} = \frac{I_k}{G_t + G_{is}} \cdot G_{is}$$



Ukupni strujni izvor serijski vezanih strujnih izvora

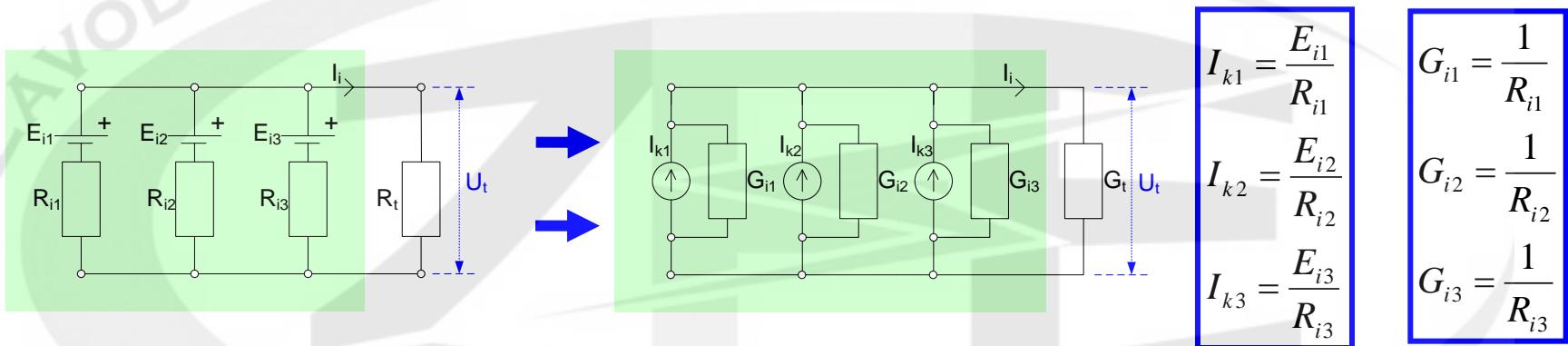
- a za napon na trošilu U_t slijedi:

$$U_t = \frac{\text{alg} \sum_l I_{kl} R_{il}}{R_t + \sum_l R_{il}} \cdot R_t$$

Paralelni spoj naponskih izvora (1)

Slično kao i serijski spoj strujnih izvora često se pojavljuju i slučajevi strujnih krugova sa **paralelnom vezom naponskih** izvora

- paralelno vezani naponski izvori **ne mogu** se riješavati jednostavnim zbrajanjem napona izvora E_i i otpora R_i već se to može elegantnije riješavati sa modelom strujnog izvora
- zato je prikladno da se *naponski izvori transformiraju u strujne izvore* kao što je prikazano na sl.9.11

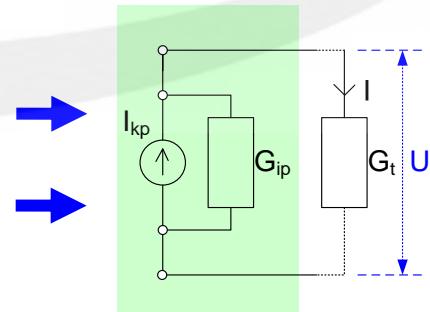


Sl.9.11 Paralelni spoj naponskih izvora i transformacija u strujne izvore sa prikazanim relacijama transformacije

- nakon definiranja strujnih izvora zbroje se struje i vodljivosti paralelno vezanih izvora i dobije se sumarni strujni izvor sa strujom I_{kp} i vodljivosti G_{ip} prema sl.9.12 i izrazu (9.27)

$$I_{kp} = I_{k1} + I_{k2} + I_{k3} \quad (9.27)$$

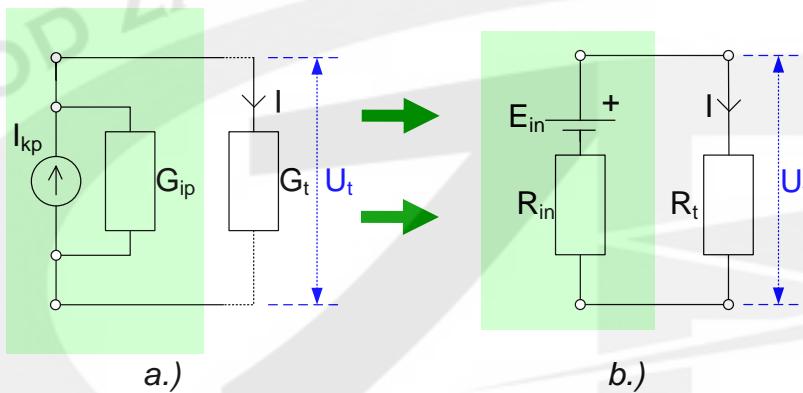
$$G_{ip} = G_{i1} + G_{i2} + G_{i3}$$



Sl.12.12 Sumarni strujni izvor

Paralelni spoj naponskih izvora (2)

- ako se koristi izraz (9.8) za vanjski napon strujnog izvora tada za napon trošila U_t na sl.9.12 vrijedi relacija
- sada se sumarni strujni izvor paralelno vezanih strujnih izvora pretvara u naponski koristeći pri tome jednadžbe transformacije za pretvorbu strujnih u naponski izvor,



Sl. 12.13 Slika pretvorbe i relacije transformacije strujnog u naponski izvor

- te slijedi za napon izvora E_{in}
- uz kratki proračun slijedi konačni izraz za struju I

$$I = \frac{\text{alg} \sum_l E_{il} \cdot G_{il}}{G_t + \sum_l G_{il}} \cdot G_t$$

$$U_t = \frac{I_k}{G_t + G_i} \quad (9.28)$$

$$I_{kx} = E_{ix} \cdot G_{ix}$$

$$E_{in} = \frac{I_{kp}}{G_{ip}} = \frac{I_{k1} + I_{k2} + I_{k3}}{G_{i1} + G_{i2} + G_{i3}}$$

$$R_{in} = \frac{1}{G_{ip}} = \frac{1}{G_{i1} + G_{i2} + G_{i3}}$$

$$E_{in} = \frac{\text{alg} \sum_l E_{il} \cdot G_{il}}{\sum_l G_{il}} \quad (9.29)$$

$$U_t = I \cdot R_t$$

$$R_t = \frac{1}{G_t}$$

$$U_t = \frac{\text{alg} \sum_l E_{il} \cdot G_{il}}{G_t + \sum_l G_{il}}$$

Električna energija i snaga istosmjerne struje

- Snaga je veličina koja predstavlja rad izvršen u jedinici vremena a kada se radi o istosmjernim veličinama tada se snaga, rad i vrijeme prikazuju konstantnim veličinama



$$P = \frac{A}{t} \left[\frac{J}{s} \right]$$

- kako se napon definira kao izvršeni rad po jediničnom naboju a struja je tok naboja u vremenu vrijedi

$$U = \frac{A}{Q}$$

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$U \cdot I = \frac{A}{t} \left[\frac{J}{s} \right]$$

- slijedi da umnožak $U \cdot I$ predstavlja izvršeni **rad** u jedinici vremena te se za **snagu i energiju** može pisati

$$P = U \cdot I \quad [J/s] \quad [V \cdot A] = [W]_{wat}$$

$$A = U \cdot I \cdot t \quad [J] \quad [V \cdot A \cdot s] = [Ws]_{vatsekunda}$$

- uz primjenu Ohmovog zakona $I = U/R$

slijede dva nova izraza za snagu i energiju

$$P = I^2 \cdot R$$

$$P = \frac{U^2}{R}$$

$$A = I^2 \cdot R \cdot t$$

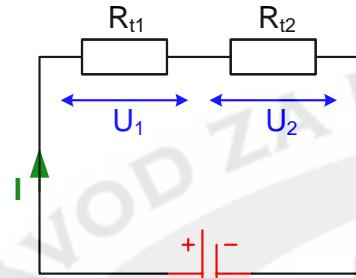
$$A = \frac{U^2}{R} \cdot t$$

- jedinica za radnu snagu u elektrotehnici je **1 Wat**, za radnu energiju je **1 Ws** a za veličinu **Wh** vrijedi

$$1Wh_{vatsat} = 3600Ws_{vatsekunda} = 3600J_{dul}$$

Električna energija i snaga istosmjerne struje

- Ako u nekoj električnoj mreži imamo više uključenih trošila tada je ukupna snaga tih trošila jednaka snazi izvora.
- **Strujni krug sa serijski vezanim trošilima**



Sl. 9.14 Serijski spoj trošila u električnom strujnom krugu

- za strujni krug sa serijski vezanim trošilima vrijede relacije:

$$I = I_1 = I_2$$

$$E = U_1 + U_2$$

- za snagu pojedinog trošila slijede relacije:
- za ukupnu snagu serijski vezanih trošila vrijedi:

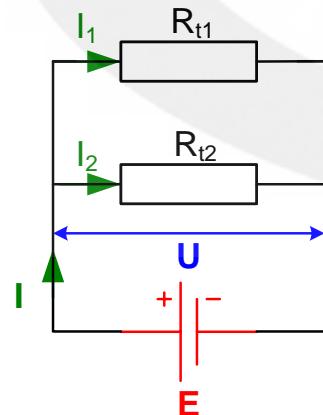
$$P_1 = U_1 \cdot I$$

$$P_2 = U_2 \cdot I$$

$$P = E \cdot I = U_1 \cdot I + U_2 \cdot I$$

$$P = P_1 + P_2$$

- **Strujni krug sa paralelno vezana trošila**



- za prikazanu shemu paralelno vezanih trošila vrijede slijedeći osnovni uvjeti,

$$E = U$$

$$U = U_1 = U_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

- za snagu pojedinog trošila vrijede relacije,

$$P_1 = U_1 \cdot I_1 = U \cdot I_1$$

$$P_2 = U_2 \cdot I_2 = U \cdot I_2$$

- za ukupnu snagu paralelno vezanih trošila slijedi,

$$P = U \cdot I = U \cdot I_1 + U \cdot I_2$$

$$P = P_1 + P_2$$

- ukupna snaga serijski i paralelno vezanih trošila jednaka je zbroju snaga pojedinih trošila

Stupanj korisnosti električnih uređaja (koeficijent iskoristivosti)

- Svaki električni uređaj koji vrši svoju funkciju u pogonu stvara pri tome veće ili manje gubitke o veličini gubitaka u samom uređaju ovisi koliki je stupanj korisnosti ili iskoristivosti uređaja u pogonu zato je potrebno definirati **stupanj korisnosti** sa matematičkim veličinama koje ga opisuju
- definicija: Stupanj korisnosti nekog uređaja predstavlja veličinu (brojčanu ili postotnu) koja pokazuje koliki je odnos izlazne korisne snage (energije) uređaja u odnosu na ukupnu ulaznu snagu (energiju) koju uređaj prima iz nekog izvora energije.

➤ za idealni uređaj: $P_g = 0 \quad A_g = 0 \quad (9.50)$

P_u - ukupna ulazna snaga
 P_k - korisna snaga
 P_g - snaga gubitaka
 A - energija

➤ za realni uređaj: $P_u = P_k + P_g \quad A_u = A_k + A_g \quad (9.51)$

- koristeći izraze (9.50) i (9.51) može se stupanj korisnosti η definirati relacijama:

$$\eta = \frac{P_k}{P_u} = \frac{P_k}{P_k + P_g} \quad (9.52)$$

$$\eta = \frac{A_k}{A_u} = \frac{A_k}{A_k + A_g} \quad (9.53)$$

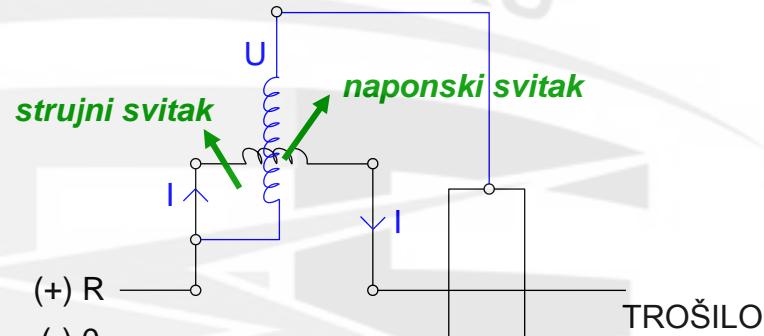
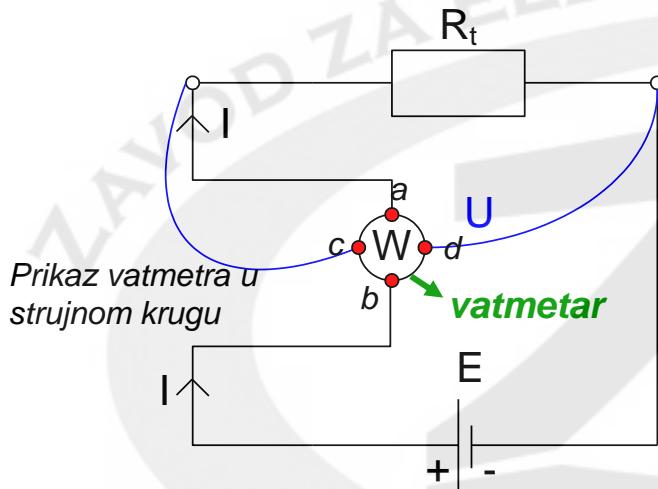
- a za stupanj korisnosti u % vrijede izrazi:

$$\eta = \frac{P_k}{P_u} \cdot 100\% \quad (9.54)$$

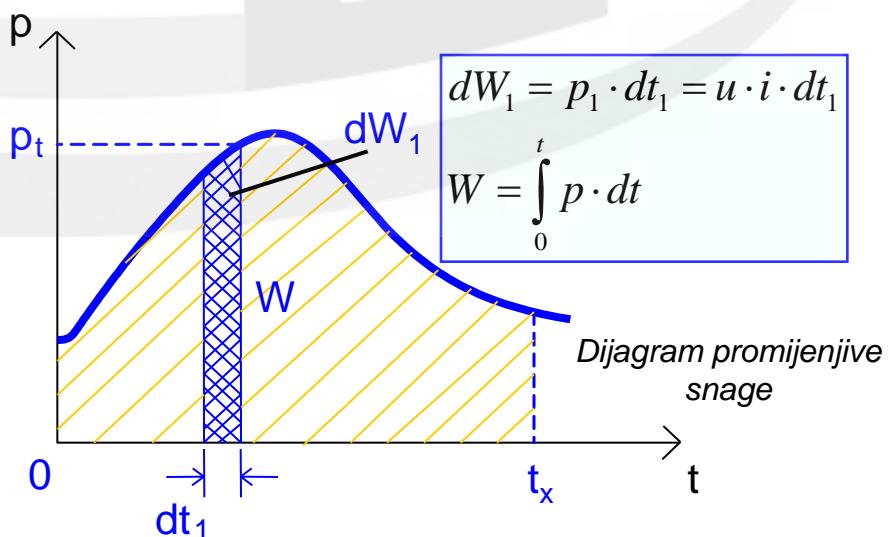
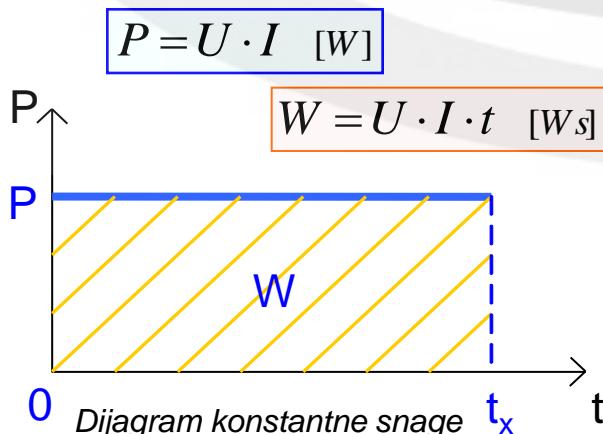
$$\eta = \frac{A_k}{A_u} \cdot 100\% \quad (9.55)$$

Mjerenje snage i energije

- U dosadašnjim izlaganjima koristili su se ampermetar i voltmetar kao uređaji za mjerenje struje i napona - ampermetar se spaja u seriju sa trošilima, a voltmetar paralelno
- uređaj za mjerjenje električne snage naziva se vatmetar, a za mjerjenje energije koristi se brojilo el.en.
- strujne grane vatmetra spajaju se u seriju sa trošilom, a naponske grane paralelno sa

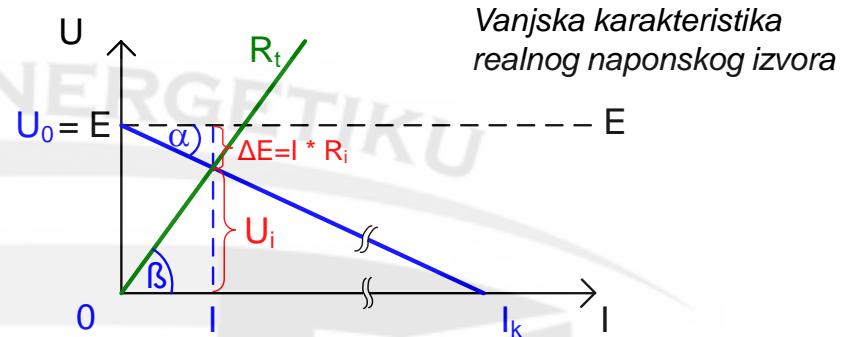
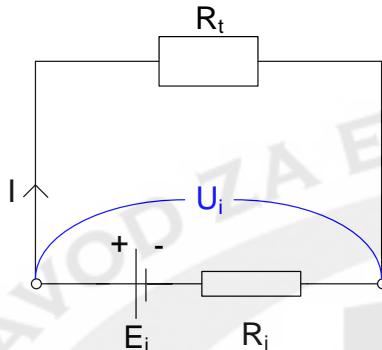


Shematski prikaz strujnog i naponskog svitka vatmetra



Prilagođenje realnog naponskog izvora i tereta po snazi (1)

- Traže se karakteristike ponašanja snage izvora P_i , snage gubitaka u izvoru P_{gi} i snage tereta P_t u zavisnosti odnosa otpora trošila i unutarnjeg otpora izvora,



- za krajnje režime pogona strujnog kruga vrijedi:

$$\begin{array}{ll} R_t = \infty & I_t = 0 \\ R_t = 0 & U_t = 0 \end{array}$$

- za oba navedena granična slučaja vrijedi za snagu tereta:

$$P_t = U \cdot I = 0$$

$$P(t) = f(R_t)$$

- kako bi se odredio maksimum funkcije P_t , treba definirati vrijednost otpora trošila R_t , uz parametre izvora E_i i R_i

- ako za struju I kruga vrijedi:

$$I = \frac{E_i}{R_i + R_t}$$

▪ tada slijedi za snagu izvora P_i i snagu tereta P_t

▪ snaga izvora P_i

$$P_i = E_i \cdot I = E_i \cdot \frac{E_i}{R_i + R_t} = \frac{E_i^2}{R_i + R_t}$$

$$P_i = \frac{E_i^2}{R_i + R_t}$$

▪ snaga tereta P_t

$$P_t = I^2 \cdot R_t = \left(\frac{E_i}{R_i + R_t} \right)^2 \cdot R_t = \frac{E_i^2 \cdot R_t}{(R_i + R_t)^2}$$

$$P_t = \frac{E_i^2}{(R_i + R_t)^2} \cdot R_t$$

Prilagođenje izvora i tereta po snazi (2)

- uvjet za maksimalnu funkciju snage P_t je

$$\frac{\partial P_t}{\partial R_t} = \frac{E^2 \cdot (R_i + R_t)^2 - E^2 \cdot R_t \cdot 2(R_i + R_t)}{(R_i + R_t)^4} = 0$$

- ako se sada *brojnik izjednači sa 0* slijedi: $\rightarrow E^2 \cdot (R_i + R_t)^2 - E^2 \cdot R_t \cdot 2(R_i + R_t) = 0$
- nakon sređivanja konačno se dobije uvjet da izvor preda trošilu maksimalnu snagu

$$P_t = \max \quad ??? \rightarrow \frac{\partial P_t}{\partial R_t} = 0 \rightarrow$$

$$R_t = R_i = R$$

$$I = \frac{E_i}{R_i + R_t} = \frac{E_i}{2R}$$

- za *snagu izvora* vrijedi:

$$P_i = I \cdot E_i = \frac{E_i}{2R} \cdot E_i \rightarrow P_i = \frac{E_i^2}{2R}$$

- za *snagu gubitaka* izvora slijedi:

$$P_{gi} = I^2 \cdot R_i = \frac{E_i^2}{4R^2} \cdot R \rightarrow P_{gi} = \frac{E_i^2}{4R}$$

- snaga* iskorištena *na trošilu*:

$$P_t = I^2 \cdot R_t = \frac{E_i^2}{4R^2} \cdot R \rightarrow P_t = \frac{E_i^2}{4R}$$

- prema navedenim relacijama slijedi odnos snage izvora i snage tereta:

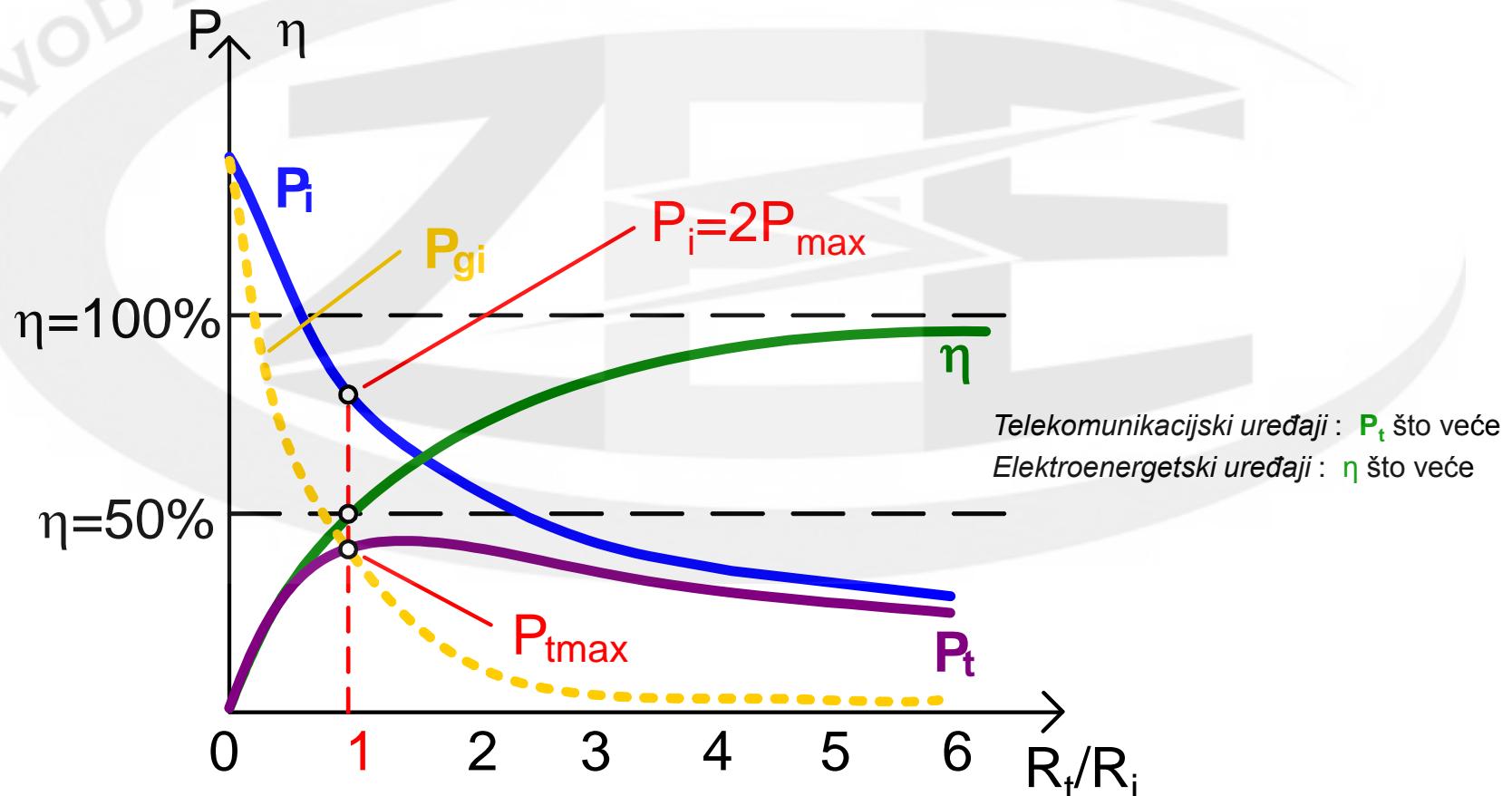
$$P_i = 2 \cdot P_t$$

Prilagođenje izvora i tereta po snazi (3)

- a za koeficijent iskoristivosti dobije se slijedeći izraz,

$$\eta = \frac{P_t}{P_i} = \frac{P_t}{2P_t} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \eta\% = 50\% \quad (9.67)$$

- dakle samo 50% ukupno proizvedene snage izvora iskorištena je na trošilu R_t , a druga polovica se troši na otporu R_i kao što je uz ostale veličine prikazano na sl.12.22



Sl.12.22 Karakteristike snage P_i , P_t i P_g u zavisnosti odnosa otpora trošila i izvora



Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 10. - ***METODE PRORAČUNA ISTOSMJERNOG STRUJNOG KRUGA***

- *metoda konturnih struja*
- *Theveninov teorem*
- *Nortonov teorem*
- *Millmanov teorem*
- *metoda superpozicije*

Uvodna razmatranja

Rješavanje linearnih mreža

- primjenom Kirchhoffovih zakona
 - metodom napona čvorova
 - metodom konturnih struja
 - Theveninov teorem i Nortonov teorem,
 - u specifičnim i složenim slučajevima rješavanja električnih mreža primjena samo Kirchhoffovih zakona je nedovoljna, spora ili je previše komplikirana
 - zato se i koristi niz posebnih metoda i teorema kako bi se rješavanje električnih mreža učinilo lakšim i efikasnijim
- *prilikom obrade navedenih metoda i pri razmatranju električnih mreža postoje dva osnovna postupka: analize električnih mreža i sinteza električnih mreža*

Analiza električnih mreža:

Zadana je mreža sa podacima o izvorima i otporima trošila

Traže se struje u granama te naponi i snage trošila.

Sinteza električnih mreža:

Zadane su struje i naponi trošila za pojedine čvorove i grane

Traži se odgovarajuća električna mreža.

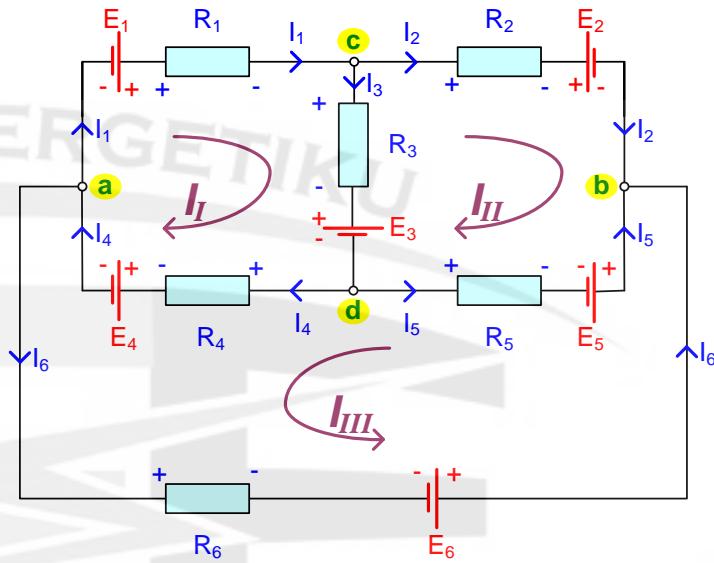
-
- *u nastavku izlaganja ove teme uglavnom će se koristiti postupak analize električne mreže*
 - *kao prvi postupak analize električne mreže obraditi će se **metoda konturnih struja***
 - *metodom konturnih struja definiraju se struje nezavisnih kontura i uz pomoć tih konturnih struja izračunavaju se struje i naponi u pojedinim granama električne mreže*

Metoda konturnih struja (1)

Osnovni pojmovi:

- > **grana električne mreže (g)** sastoji se samo od serijski nanizanih izvora napona i otpora opterećenih istom strujom,
- > **čvorište električne mreže (č)** je točka u kojoj se sastaju barem tri ili više grana,
- > **nezavisne konture** su one konture koje se razlikuju barem za jednu granu od ostalih kontura..... ($n=g-\check{c}+1$)

Na sl.10.1 prikazana je električna mreža sa 6 grana, 4 čvora i 3 nezavisne konture



Sl.10.1 Električna shema sa tri konture

Osnovne veličine prikazane mreže

$$g=6 ; \check{c}=4$$

$$n = 6-4+1=3 \quad \text{nezavisne konture}$$

I_I , I_{II} , I_{III} – konturne struje

I_1 , I_2 , I_6 – vanjske struje u granama

(struje koje pripadaju samo jednoj konturi)

I_3 , I_4 , I_5 – međašne struje u granama

(struje između dvije konture)

- > prema slici vrijedi za odnos **vanjskih** i konturnih struja

$$I_1 = I_I$$

$$I_2 = I_{II}$$

$$I_6 = I_{III}$$

Opis slike:

- > smjerovi struja u granama (I_1 ... I_6) su proizvoljno odabrani
- > smjerovi konturnih struja (I_I , I_{II} , I_{III}) su također proizvoljno odabrani

- > a za odnos **međašnih** i konturnih struja slijedi

$$I_3 = I_I - I_{II}$$

$$I_4 = I_I + I_{III}$$

$$I_5 = -I_{II} - I_{III}$$

> ako je kao rezultat proračuna pojedina struja u grani negativna, stvarni smjer struje je suprotan pretpostavljenom

Metoda konturnih struja (2)

- uvodenjem *konturnih otpora*

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_4$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_5$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6$$

$$R_{12} = R_{21} = R_3$$

$$R_{13} = R_{31} = R_4$$

$$R_{23} = R_{32} = R_5$$

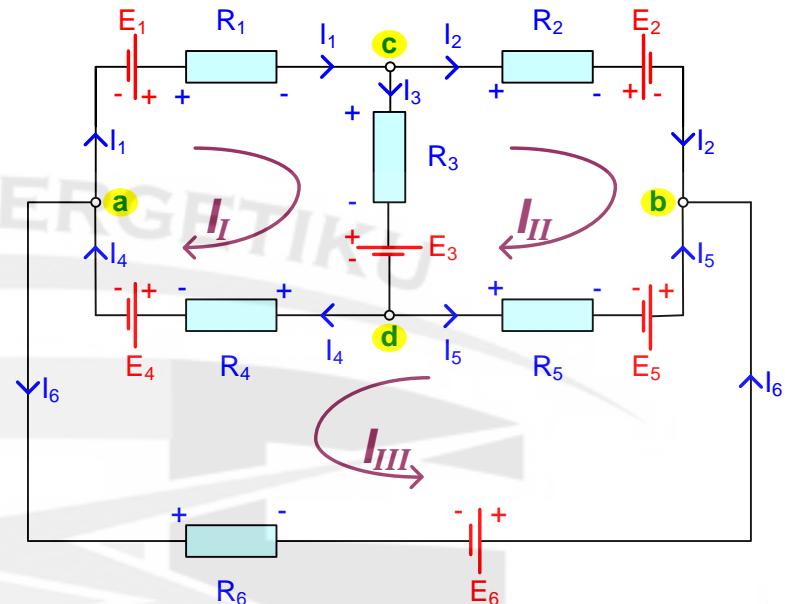
$$E_{11} = E_1 - E_3 - E_4$$

$$E_{22} = -E_2 + E_3 - E_5$$

$$E_{33} = -E_4 - E_5 + E_6$$

- i *međašnih otpora*

- i *konturnih elektromotornih sila*



Sl. 10.1 Električna shema sa tri konture

- slijede na kraju tri jednadžbe *kontrurnih struja* u općem obliku

$$I_{11}R_{11} + I_{22}R_{12} + I_{33}R_{13} = E_{11}$$

$$I_{11}R_{21} + I_{22}R_{22} + I_{33}R_{23} = E_{22}$$

$$I_{11}R_{31} + I_{22}R_{32} + I_{33}R_{33} = E_{33}$$

- zbog prikladnije matematičke forme zamjenile su se oznake *konturnih struja* prema relacijama

$$I_I \equiv I_{11} \quad I_{II} \equiv I_{22} \quad I_{III} \equiv I_{33}$$

Metoda konturnih struja (3)

- na temelju postavljenih jednadžbi mogu se uz pomoć determinanti izračunati kontrune struje I_1, I_{II}, I_{III}
- slijedi **determinanta sustava**
- a za **determinante pojedinih kontura** vrijedi

$$D = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad D_{22} = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E_{33} & R_{33} \end{vmatrix} \quad D_{33} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E_{33} \end{vmatrix}$$

- pojedina konturna struja može se na kraju računati prema izrazu
- za odnos **vanjskih** i konturnih struja vrijedi

$$I_K = \frac{D_K}{D}$$

$$I_1 = I_1$$

$$I_2 = I_{II}$$

$$I_6 = I_{III}$$

➤ Slijedi za odnos **međašnih** i vanjskih struja

$$I_3 = I_1 - I_2$$

$$I_4 = I_1 + I_6$$

$$I_5 = -I_2 - I_6$$

Metoda konturnih struja (6)

Postupak Kirchhoffovim zakonima

- Prikazana mreža na sl.10.1 mogla bi se riješiti primjenom Kirchhoffovih zakona, ali bi postupak bio složeniji i sporiji
- bilo bi potrebno postaviti sedam jednadžbi, i to četiri jednadžbe prvog Kirchhoffovog zakona za čvorišta (10.14) i tri jednadžbe drugog Kirchhoffovog zakona za konture (10.15)
- rješavanjem navedenih jednadžbi dobili bi struje u svim granama mreže
- poznavajući struje izračunali bi sve padove napona i snage na trošilima

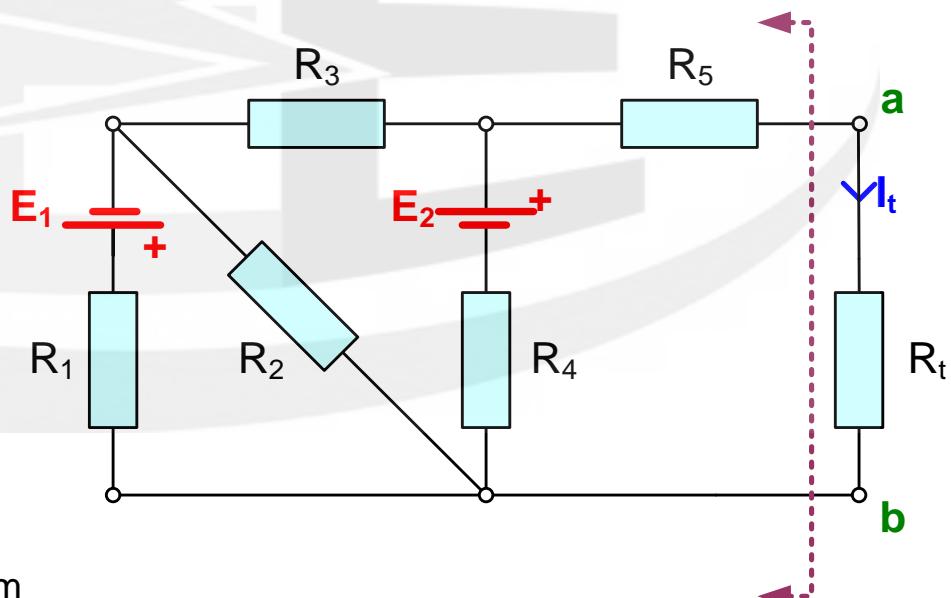
$$\left. \begin{array}{l} a) \quad I_4 - I_1 - I_6 = 0 \\ b) \quad I_2 + I_5 + I_6 = 0 \\ c) \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ d) \quad I_3 - I_4 - I_5 = 0 \end{array} \right\} \text{jednadžbe čvorišta} \quad (10.14)$$

$$\left. \begin{array}{l} I. \quad E_1 - E_3 - E_4 = I_1 R_1 + I_3 R_3 + I_4 R_4 \\ II. \quad - E_2 + E_3 - E_5 = I_2 R_2 - I_3 R_3 - I_5 R_5 \\ III. \quad - E_4 - E_5 + E_6 = I_4 R_4 - I_5 R_5 + I_6 R_6 \end{array} \right\} \text{jednadžbe kontura} \quad (10.15)$$

- sigurno da je prikazani primjer na sl.10.1 relativno vrlo jednostavan slučaj električne mreže te se samo na tom primjeru ne mogu u cijelosti vidjeti prednosti metode konturnih struja u odnosu na postupak Kirchhoffovim zakonima

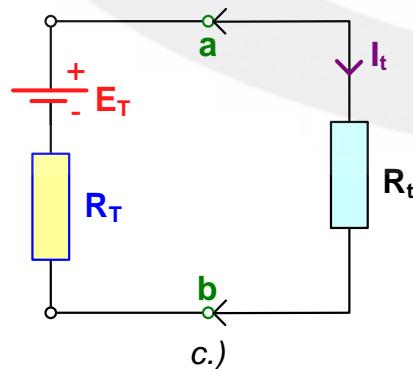
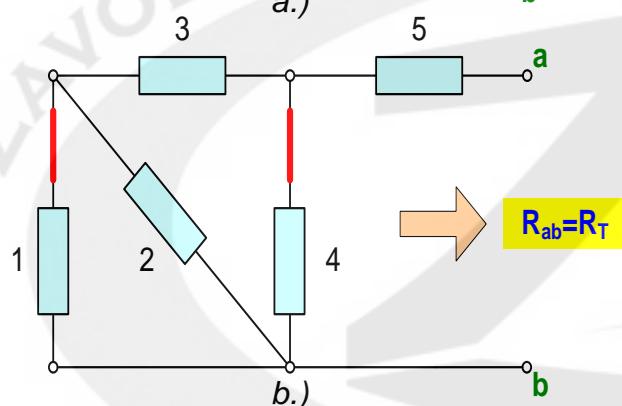
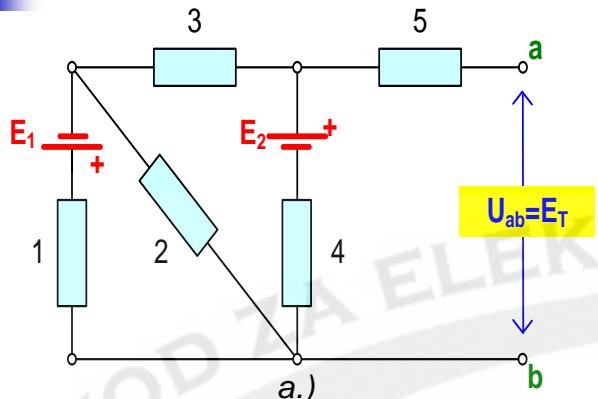
Theveninov teorem (1)

- Theveninov teorem predstavlja jedan fizikalno-matematički postupak sa kojim se olakšava i ubrzava proračun struje, napona i snage jednog izabranog trošila u promatranoj elektrinoj mreži
- Teorem je pogodan za analizu pojedinih elemenata mreže kada npr. treba provesti niz analiza za različite vrijednosti parametara promatranih elementa mreže
- **definicija Theveninovog teorema:**
gleđano sa strane bilo kojih dvaju priključaka, svaka električna mreža sastavljena iz niz linearnih pasivnih i aktivnih elemenata može se predstaviti sa nadomjesnim spojem koji sadrži jedan ekvivalentni izvor **elektromotorne sile E_T** i jedan ekvivalentni serijski vezani **unutarnji otpor R_T** .
- fizička slika:
 - prikazana je električna mreža sa tri nezavisne konture
 - traži se samo struja I kroz otpor trošila R_t između točaka **a** i **b**
 - na sl.10.3.a.), b.) i c.) prikazan je postupak definiranja struje I_t uz pomoć Theveninove metode
- nadomjesni strujni krug koji se dobije ovom metodom vrlo je jednostavan i lagan za analizu,



Sl.10.2 Električna shema sa izabranim trošilom između točaka **a** i **b**

Theveninov teorem (2)



- u prvom koraku definira se Theveninov napon između odabralih točaka **a** i **b**,
- napon $U_{ab} = E_T$ predstavlja Theveninov napona

$$U_{ab} = E_T$$

- u drugom koraku kratko se spoje naponski izvori (strujni izvori se odspajaju) i računa se Theveninov otpor R_T između točaka **a** i **b**

$$R_{ab} = R_T$$

- u trećem koraku se na realni naponski izvor Thevenina (E_T, R_T) spoji trošilo otpora R_t i računa struja I_t i pad napona U_t

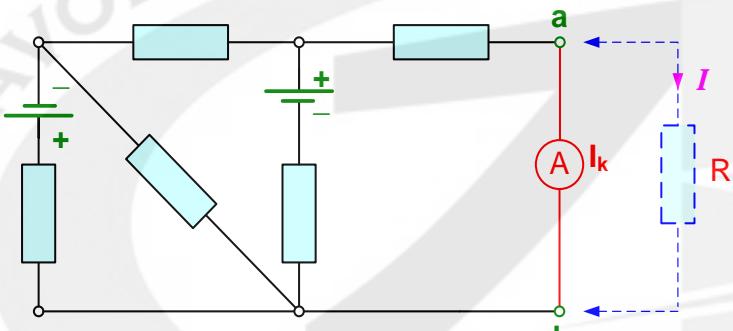
$$I_t = \frac{E_T}{R_T + R_t}$$

$$U_t = I_t \cdot R_t$$

$$U_i = E_T \frac{R_t}{R_T + R_t}$$

Nortonov teorem (1)

- Nortonov teorem adresira isto područje problema kao i Theveninov teorem i predstavlja jednu od metoda kojom se olakšava proračun struje, napona i snage za izabrano trošilo u električnoj mreži
- Nortonovim teoremom promatranu mrežu zamjenjujemo **strujnim izvorom**, a **ne naponskim izvorom**
- **definicija Nortonog teorema:**
gleđano sa strane bilo kojih dvaju priključaka, svaka električna mreža sastavljena iz niz linearnih pasivnih i aktivnih elemenata može se predstaviti sa nadomjesnim spojem koji sadrži jedan **ekvivalentni strujni izvor sa strujom I_K** i jedim paralelno spojenim **unutarnjim otporom R_N** .



Sl.10.4 Električna shema sa traženom strujom I_K između točaka a i b

Postupak riješavanja po Nortonovom teoremu:

- početna mreža (sl.10.4) je ista kao i u primjeru Theveninovog teorema,
- traži se struja I kroz otpor trošila R_t
- otpor R_t kao element mreže koji se želi analizirati izdvaja se iz strujnog kruga,
- ostatak mreže nadomiješta se s realnim strujnim izvorom
- struja I_K nadomjesnog strujnog izvora za ovaj slučaj dobije se tako da se otpor trošila R_t odstrani a stezaljke a i b kratko spoje.
- otpor R_N dobije se tako da izračuna otpor mreže koji se vidi sa točaka a i b, pri tome se **naponski izvori kratko spajaju, strujni izvori se odspajaju**, a unutarnji otpori izvora se zadrže

Nortonov teorem (2)

Fizikalna slika i matematičke relacije:

- prvi korak fizikalne slike problema utvrđen je sa opisom sl.10.4
- završni slikovni prikaz postupka Nortonovog teorema dat je na sl.10.5
- za električnu shemu na sl.10.5 vrijede relacije

$$I_i = I_k \cdot \frac{R_N}{R_N + R_t} \quad (10.20)$$

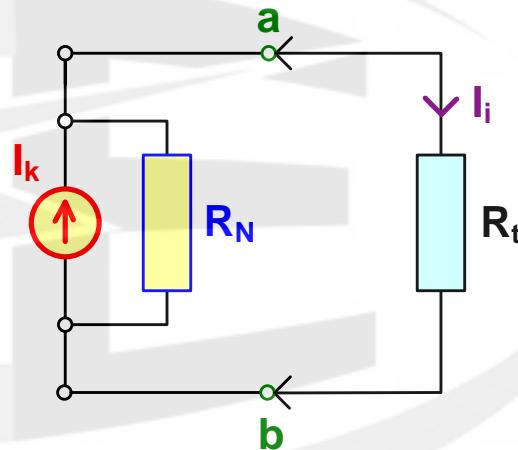
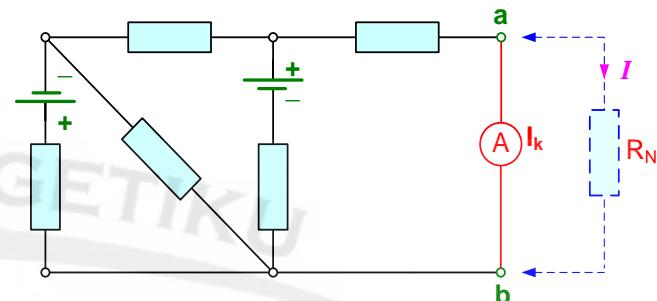
$$U_t = I_i \cdot R_t = I_k \cdot \frac{R_N \cdot R_t}{R_N + R_t} \quad (10.21)$$

- ako se sada još transformiraju otpori u izrazu (10.20) u vodljivosti

$$\frac{R_N}{R_N + R_t} = \frac{\frac{1}{G_N}}{\frac{1}{G_N} + \frac{1}{G_t}} = \frac{\frac{1}{G_N}}{\frac{G_t + G_N}{G_N \cdot G_t}} = \frac{\cancel{G_N} \cdot G_t}{\cancel{G_N} \cdot (G_t + G_N)} = \frac{G_t}{G_t + G_N}$$

- slijedi i drugi oblik za traženu struju Nortonovog izvora I_i

$$I_i = I_k \cdot \frac{G_t}{G_t + G_N}$$



Sl. 10.5 Strujni izvor prema Nortonovom teoremu vezan sa trošilom R_t

$$U_i = E_T \frac{R_t}{R_t + R_T}$$

Teorem superpozicije (1)

- Osnovni princip na kojem se bazira metoda superpozicije bazira se na činjenici da se jedna kompleksna cjelina dijeli na veći broj manje kompleksnih podcjelina
- na primjeru strujnih krugova jednostavnije rješavanje izabranih podcjelina svodi se na slijedeće:
 - utjecaj svakog pojedinog izvora u strujnom krugu promatra se odvojeno od ostalih izvora na analizirane elemente te se time pojednostavljuje proračun strujno-naponskih prilika
 - strujno-naponske prilike koje stvarno vladaju na promatranom elementu dobiju se sumiranjem dobivenih utjecaja od pojedinih izvora
- u svojim osnovnim crtama primjena ove metode na **linearne mreže** svodi se na slijedeću proceduru:
 - gase se svi izvori napajanja u strujnom krugu tako da se naponski izvori kratko spoje a strujni izvori potpuno odspoje iz strujnog kruga
 - pojedini se izvori jedan po jedan uključuju i tako da je u određenom trenutku samo jedan od tih izvora aktivan, te se izračunava njihov utjecaj na promatrani element mreže
 - u konačnici se svi utjecaju (struje i naponi) na promatranim elementima zbrajaju kako bi se dobio ukupan utjecaj na njima

Prednosti i nedostaci

- Metoda superpozicije je vrlo jednostavna metoda kojom se analiza složene mreže razbija u analizu niza jednostavnim mreža
- postupak rješavanja električnih mreža se pojednostavljuje i to čini metodu atraktivnom za primjenu
- za očekivati je zato da će ova metoda biti najpovoljnija za analizu relativno složenih mreža ali kada se u njima nalazi mali broj izvora

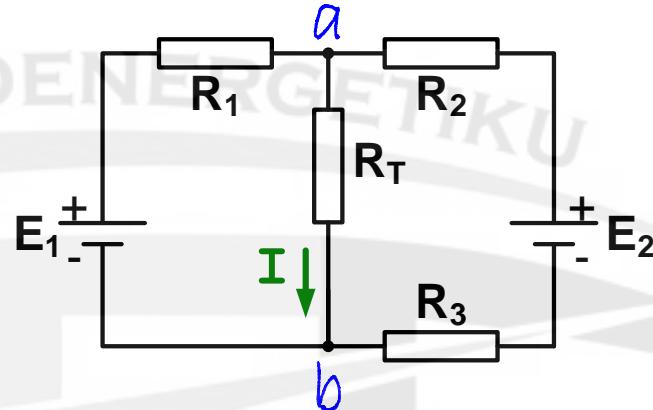
Teorem superpozicije (2)

- definicija: u električnoj mreži **linernih elemenata** koja sadrži dva ili više izvora, može se ukupna struja ili pad napona, na bilo kojem elementu mreže, izračunati tako da se algebarski zbroje pojedine struje odnosno naponi uzrokovani **od svakog izvora posebno**

- primjer postupka teorema superpozicije:

- Traži se struja na elementu R_T između točaka **a** i **b**

- u prvom koraku se traži doprinos struje iz izvora E_1
- izvor E_2 se kratko spoji kao što je prikazano na sl.10.8



$$\begin{aligned}R_1 &= 30 \Omega \\R_2 &= 5 \Omega \\R_3 &= 15 \Omega \\R_T &= 10 \Omega \\E_1 &= 30 \text{ V} \\E_2 &= 60 \text{ V}\end{aligned}$$

Primjer električne mreže sa dvije konture i dva čvora

- slijedi kratki proračun ukupne struje I' koju daje izvor napona E_1 ,

$$I' = \frac{E_1}{R'} \rightarrow R' = R_1 + \frac{R_T \cdot (R_2 + R_3)}{R_T + R_2 + R_3} \rightarrow R' = 36,7 \Omega$$

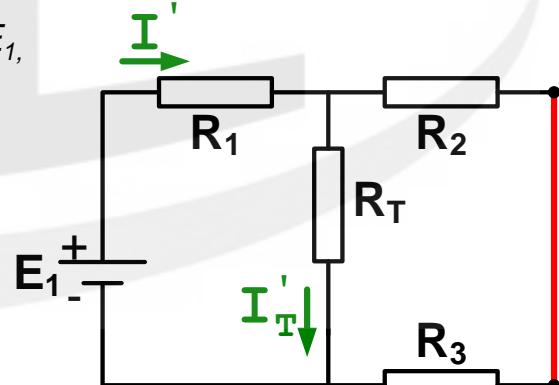
$$I' = \frac{30}{36,7} = 0,82 \text{ A}$$

- Za izračun struje I'_T vrijedi

(doprinos struje iz izvora E_1)

$$I'_T = I' \frac{(R_2 + R_3)}{(R_2 + R_3) + R_T}$$

$$I'_T = 0,55 \text{ A}$$



Sl.10.8 Prema slici kratko se prespaja izvor napona E_2

Teorem superpozicije (3)

- u drugom koraku se traži doprinos struje u elementu R_T iz izvora E_2 a izvor E_1 se kratko spoji

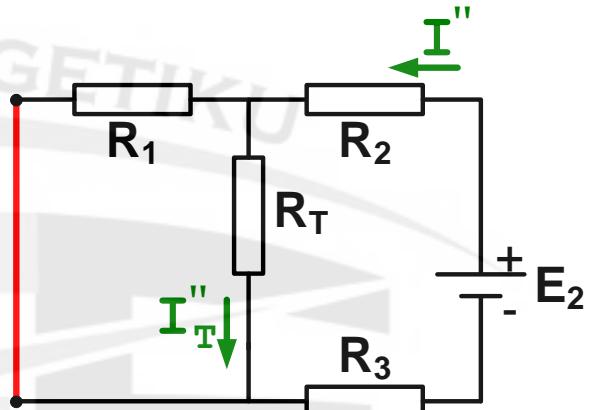
- slijedi kratki proračun ukupne struje I'' koju u mrežu daje napon izvora E_2

$$I'' = \frac{E_2}{R''}$$

$$R'' = \frac{R_1 \cdot R_T}{R_1 + R_T} + R_2 + R_3$$

$$R'' = 27,5 \Omega$$

$$I'' = \frac{60}{27,5} = 2,18 A$$



- slijedi izraz za doprinos struje I''_T koju daje napon izvora E_2 kroz promatrano trošilo R_T

$$I''_T = I'' \frac{R_1}{R_1 + R_T}$$

(doprinos struje iz izvora E_2)

$$I''_T = 1,64 A$$

- slijedi kratki proračun ukupne struje I'' koju u mrežu daje napon izvora E_2

$$I_T = I'_T + I''_T$$

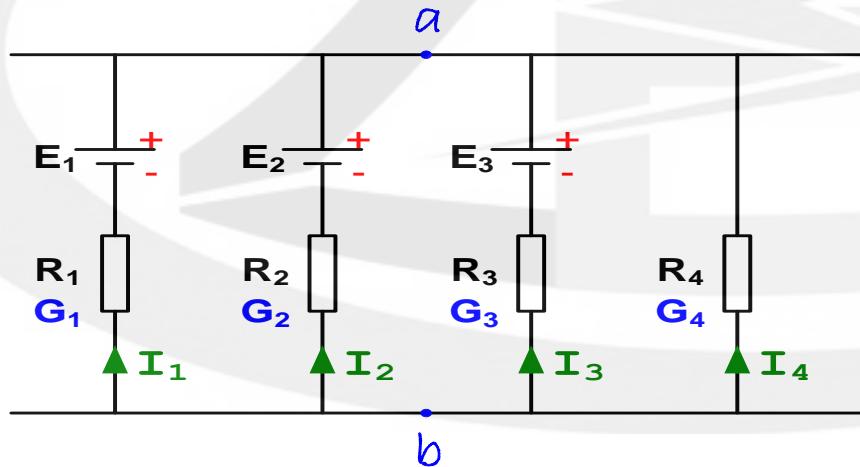


$$I_T = 0,55 + 1,64 = 2,19 A$$

(ukupna struja kroz element mreže R_T)

Millmanov teorem (ili metoda dvaju čvorova) (1)

- U praksi se vrlo često susreću strujni krugovi u kojima su elementi mreže spojeni paralelno,
- topološki gledano takvi se strujni krugovi sastoje od **velikog broja grana** i **samo dva čvorišta**,
- može se zaključiti da se metoda napona čvorišta koristi kada je više elektrotehničkih uređaja i trošila spojeno paralelno na samo dva čvorišta,
- budući da se radi o slučaju sa svega dva čvorišta u mreži metoda napona čvorova je dodatno pojednostavljena i nazvana je Millmanov teorem,
- na sl.10.10 zadane su elektromotorne sile i otpori u granama i traži se jednadžba napona između čvorišta **a** i **b**



Sl. 10.10 Promatrana mreža sa dva čvorišta i više paralelno spojenih trošila

- svi izvori u pojedinoj grani nadomješteni su jednim izvorom a sva trošila zamijenjuju se u jednoj grani jednim otporom
- pozitivan smjer struja i elektromotornih sila označen je proizvoljno na slici i tako izabrani predznak koristiti će se u dalnjim proračunima

Millmanov teorem (ili metoda dvaju čvorova) (2)

- › ako je napon za sve grane jedan te isti (U_{ab}) to se može za bilo koju granu pisati

$$U_{ab} = E_l - I_l \cdot R_l \quad (10.31)$$

- › a struja koja protječe pojedinim granama može se računati prema slijedećem izrazu

$$I_l = \frac{E_l - U_{ab}}{R_l} \quad (10.32)$$

- › uz I. Kirchhoffov zakon za čvorište **a**

$$\sum_{l=1}^n I_l = 0$$

, slijedi kratki izračun:

$$\sum_l (E_l - U_{ab}) \cdot G_l = \sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l - \sum_{l=1}^n U_{ab} \cdot G_l = \sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l - U_{ab} \cdot \sum_{l=1}^n G_l = 0$$

$$\sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l = U_{ab} \cdot \sum_{l=1}^n G_l \quad (10.33)$$

- › sređivanjem izraza (10.33) može se konačno dobiti izraz za napon **U_{ab}** između dva čvora

$$U_{ab} = \frac{\sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l}{\sum_{l=1}^n G_l} \quad (10.34)$$

suma $\sum_{l=1}^n E_l \cdot G_l$ predstavlja kao što je spomenuto algebarsku sumu svih struja u granama

- › dobiveni izraz vrlo je jednostavan te je zaista lagano dobiti vrijednosti struja u pojedinim granama,
- › u slučaju postojanja strujnih izvora u mreži, sumi u brojniku samo se pribrojava vrijednost struje koju daje takav izraz ukoliko struja tog izvora ulazi u čvor **a**, - odnosno oduzima se ukoliko struja izvora ulazi u čvor **b**
- › elektromotorne sile **E_l** koje su usmjerene prema čvoru **a** su pozitivne a elektromotorne sile suprotnog smjera su negativne,
- › uz poznavanje i definiranje napona **U_{ab}** sada se mogu računati struje svake grane prema izrazu

$$I_l = (E_l - U_{ab}) \cdot G_l \quad (10.35)$$