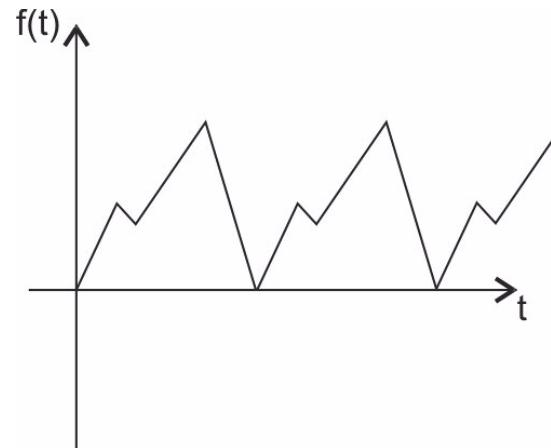
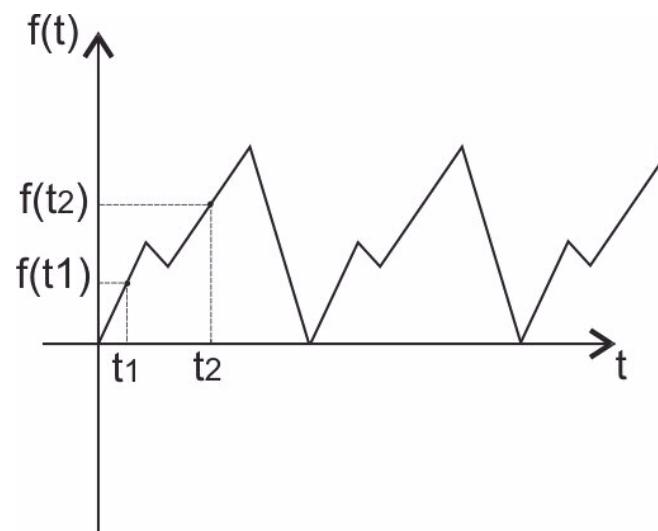


Vremenski promjenjive veličine

Vrijednost funkcije mijenja se s vremenom,



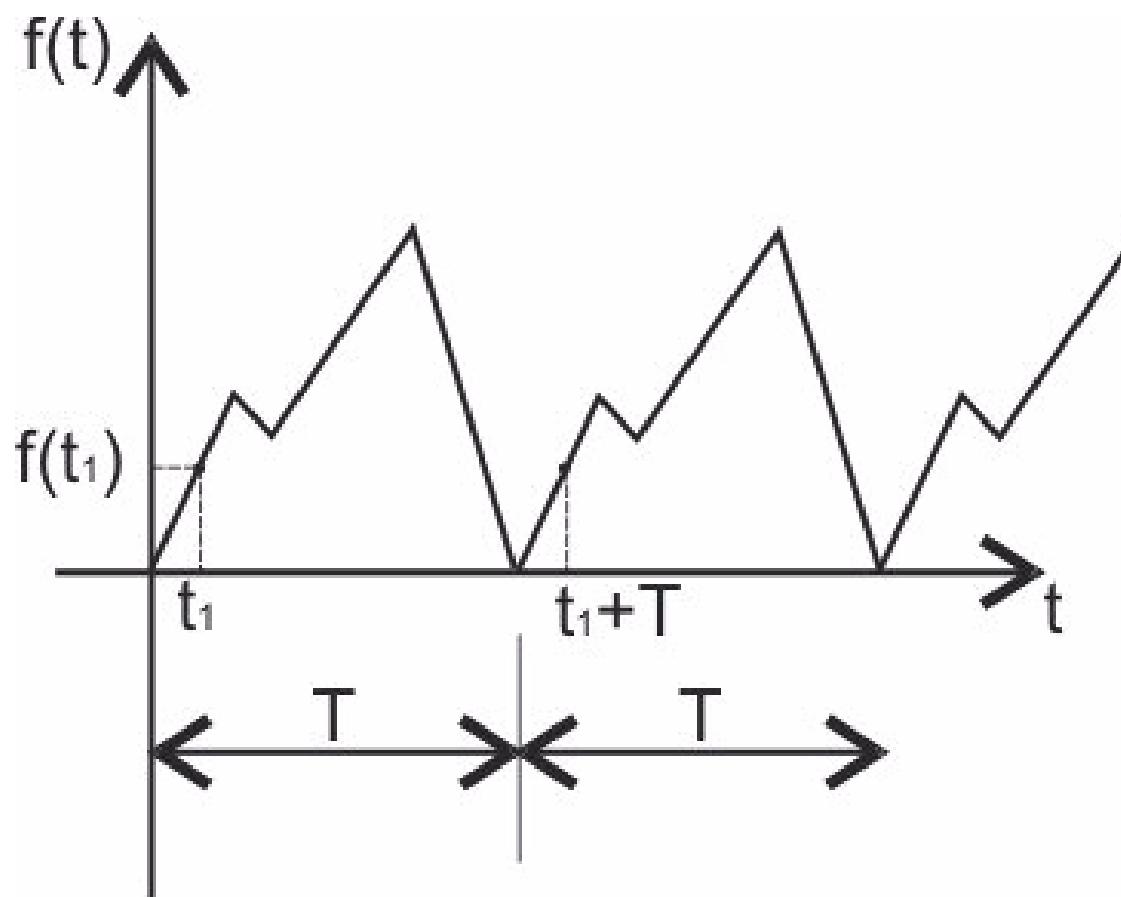
Trenutna vrijednost je vrijednost veličine u nekom određenom trenutku $f(t)$,



Trenutna vrijednost se vremenom periodički ponavlja:

$$f(t) = f(t + T) = f(t + kT) \quad k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

T – period unutar kojeg se ponavlja vrijednost vremenski promjenjive funkcije



15.1 SINUSNO PROMJENJAVA STRUJA

Zašto sinusno promjenjive struje?

1. Titrajni procesi u prirodi odvijaju se po sinusoidnom zakonu (titranje opruge, njihanje ljučke bez trenja...)
2. Sinus funkcija je najjednostavnija od svih vremenski promjenjivih funkcija i ne može se dalje razlagati
3. Sve ostale funkcije mogu se razlagati temeljem **Fouriereve transformacije** na sumu sinusnih komponenti i istosmjernih komponenti
4. Valni oblik sinusne veličine se ne mijenja:
 - zbrajanjem sinusnih oblika iste frekvencije

$$A \cdot \sin(t + \alpha) + B \cdot \sin(t + \beta) = C \cdot \sin(t + \gamma)$$

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cos(\beta - \alpha)}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{A \cdot \sin \alpha + B \cdot \sin \beta}{A \cdot \cos \alpha + B \cdot \cos \beta}$$

- množenjem s konstantom:

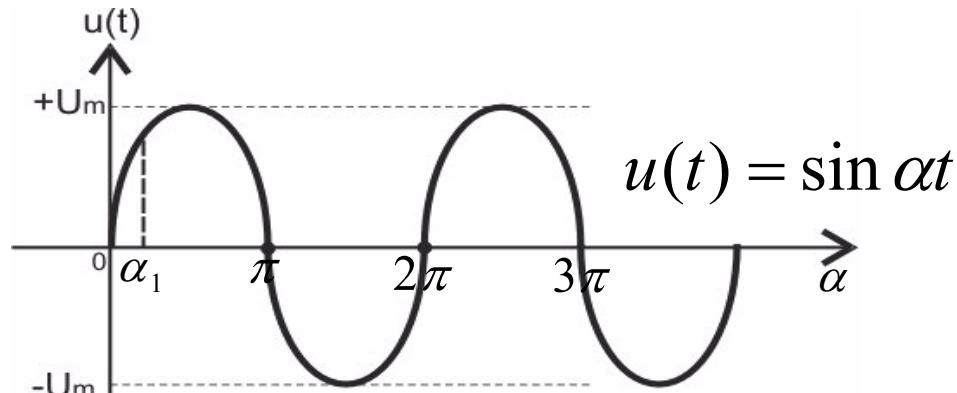
$$A \cdot \sin(t + \alpha) \cdot k = k \cdot A \cdot \sin(t + \alpha)$$

- deriviranjem i integriranjem

$$\frac{d}{dt}(\sin t) = \cos t = \sin(t + \frac{\pi}{2})$$

$$\int \sin t dt = -\cos t = -\sin(t + \frac{\pi}{2}) = \sin(t - \frac{\pi}{2})$$

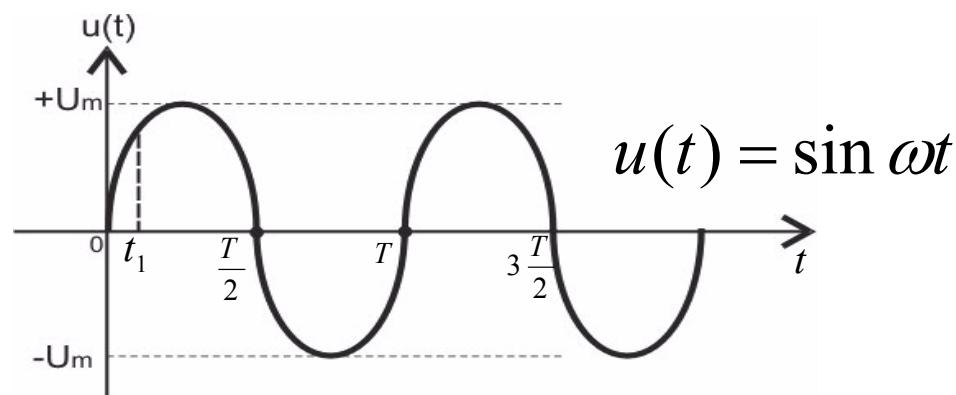
Veza između kuta sinusne funkcije i vremena:



$$t : T = \alpha : 2\pi$$

$$\frac{t}{T} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$



$$T = \frac{1}{f}$$

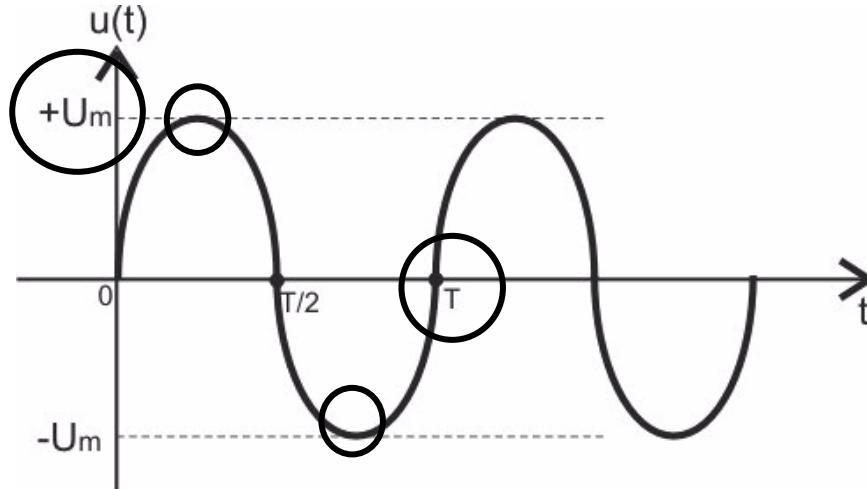
$$\alpha = 2\pi f \cdot t$$

$$\alpha = \omega \cdot t$$

ω – kružna frekvencija 4

Osnovni parametri sinusnih izmjeničnih veličina

Vršna (maksimalna) vrijednost ili amplituda: U_m, I_m, P_m, E_m



Period /Frekvencija: T/f

Period je vrijeme za koje izmjenična veličina izvrši jednu punu oscilaciju tj. punu promjenu po veličini i po smjeru

U jednom **periodu** izmjenična veličina postiže dva puta **maksimalnu (vršnu) vrijednost**, jednom u pozitivnom drugi put u negativnom smjeru)

Frekvencija je broj perioda ostvarenih u jednoj sekundi.

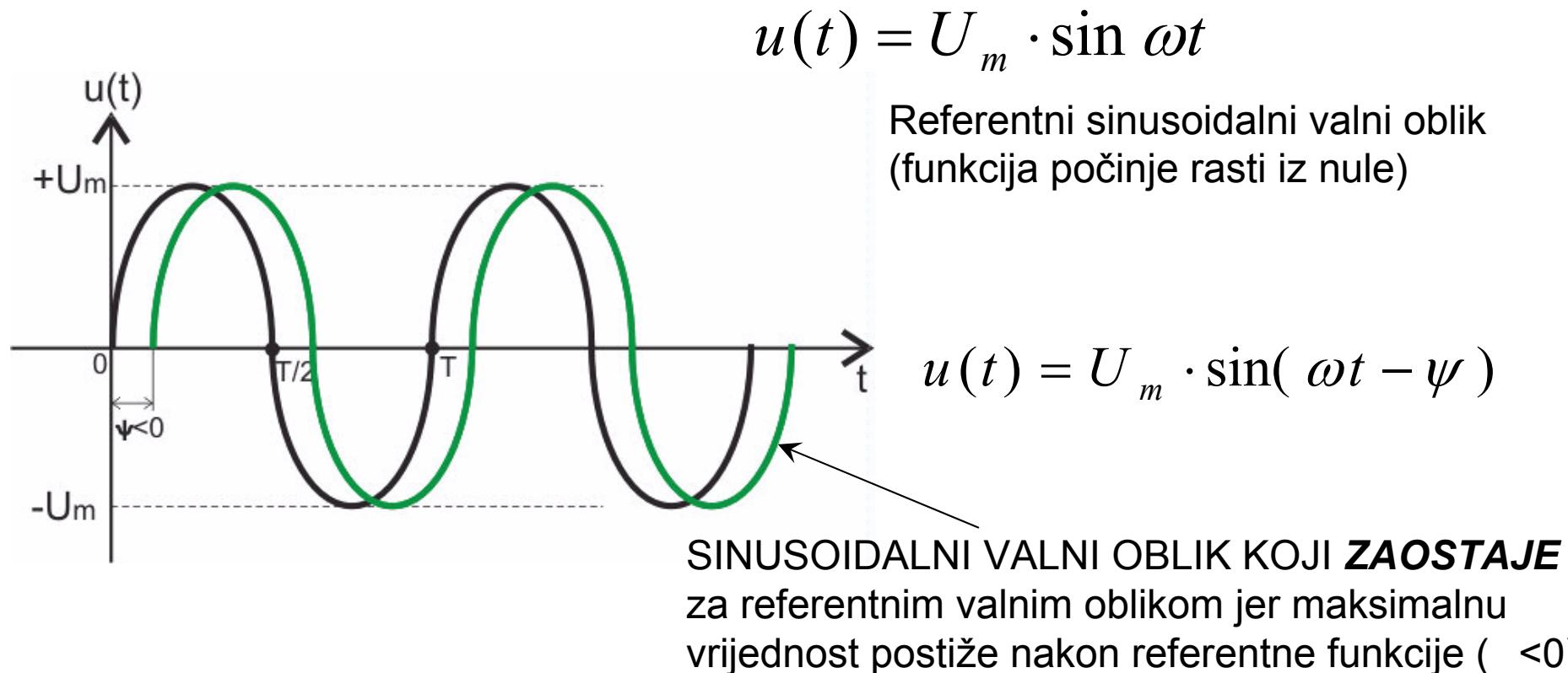
$$f = \frac{1}{T} (\text{Hz})$$

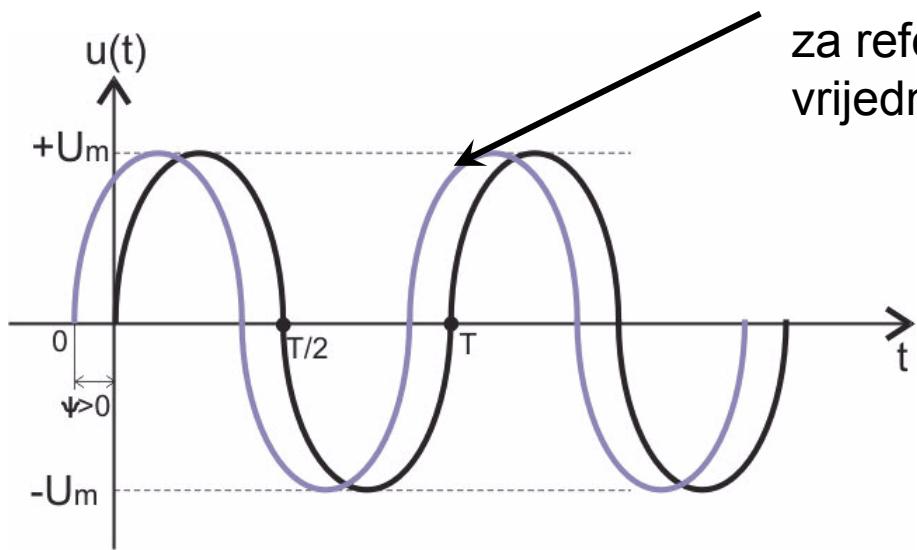
$$1 \text{ Hz} = 1 \frac{\text{ciklus}}{\text{sekunda}} = \text{s}^{-1}$$

kutna frekvencija: $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \text{ (rad / s)}$

Početni fazni kut: (psi)

Kut koji odgovara početnom vremenskom trenutku, određuje se kao fazna razlika između razmatranog sinusoidalnog valnog oblika i referentnog sinusoidalnog oblika (funkcija koja u trenutku $t=0$ ima vrijednost nula tj. funkcija počinje rasti iz nule).





SINUSOIDALNI VALNI OBLIK KOJI **PRETHODI**
za referentnim valnim oblikom jer maksimalnu
vrijednost postiže prije referentne funkcije (>0)

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi)$$

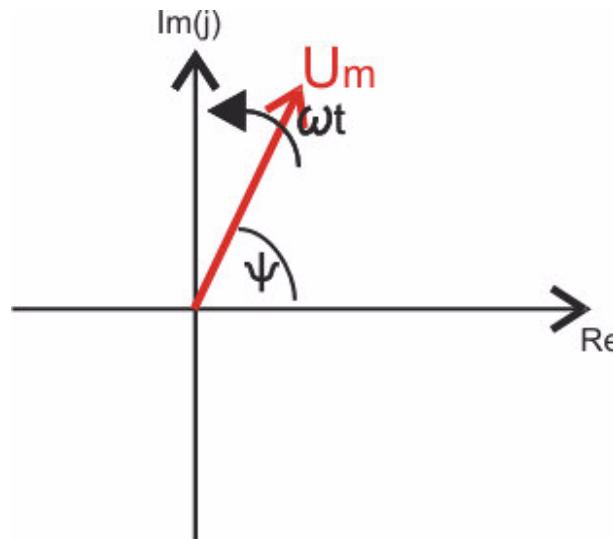
15.2. Vektorski (fazorski) prikaz sinusoidalnih veličina

Rješavanje zadataka sa sinusnim veličinama iskazanim u vremenskom obliku je vrlo komplikirano jer je potrebno dobro poznavanje rješavanje sustava diferencijalnih jednadžbi.

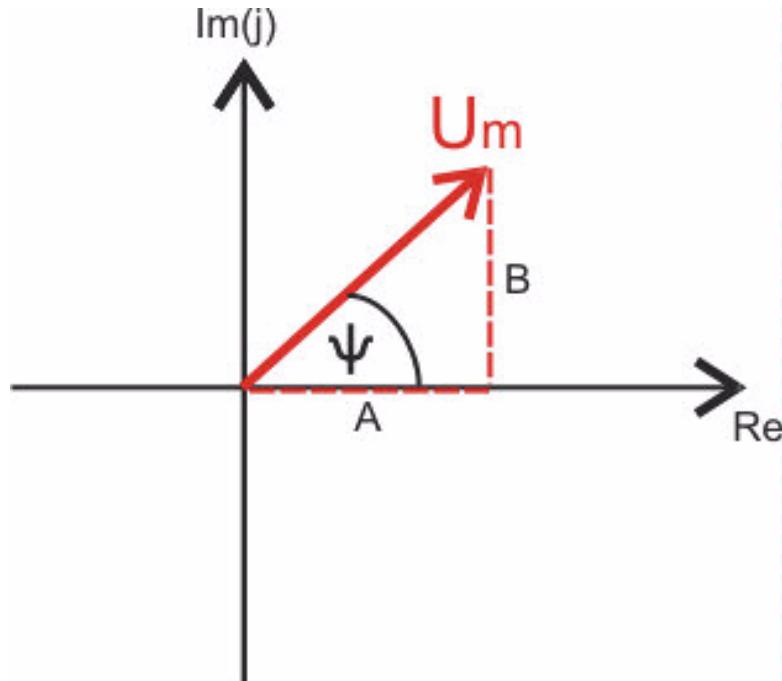
Preslikavanje sinusne veličine u kompleksno područje izbjegava se vremenski zapis i pojednostavljuje se proračun:

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \Rightarrow \text{Im}\{U_m \cdot e^{j(\omega t + \psi)}\}$$

Izraz u zagradi može se predočiti s rotirajućim vektorom (fazorom) gdje je ω kutna brzina kojom vektor rotira oko svog havišta a U_{\max} je maksimalna vrijednost vektora.



Rotirajući vektor je dvodimenzionalan pa se može prikazati na sljedeći način:



$$\cos \psi = \frac{A}{U_m} \Rightarrow A = U_m \cdot \cos \psi$$

$$\sin \psi = \frac{B}{U_m} \Rightarrow B = U_m \cdot \sin \psi$$

$$U_m = \sqrt{A^2 + B^2}$$

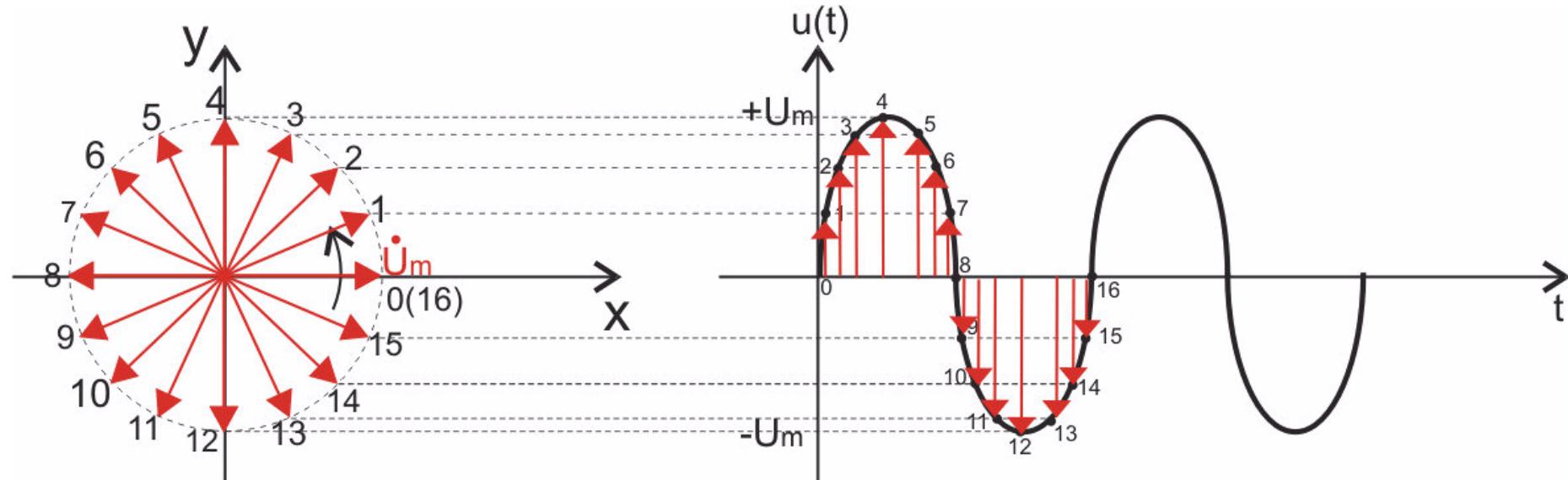
$$\operatorname{tg} \psi = \frac{B}{A} \Rightarrow \psi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A}$$

$$\dot{\vec{U}_m} = A + jB \quad (1. \text{ način})$$

$$\dot{\vec{U}_m} = U_m \angle \psi \quad (2. \text{ način})$$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \longrightarrow \dot{U}_m = U_m \angle \psi \quad \text{Fazor maksimalne vrijednosti napona}$$

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi) \longrightarrow \dot{I}_m = I_m \angle \psi \quad \text{Fazor maksimalne vrijednosti struje}$$



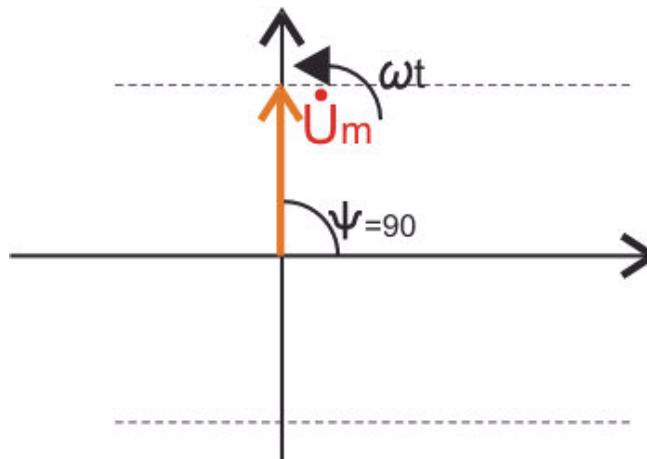
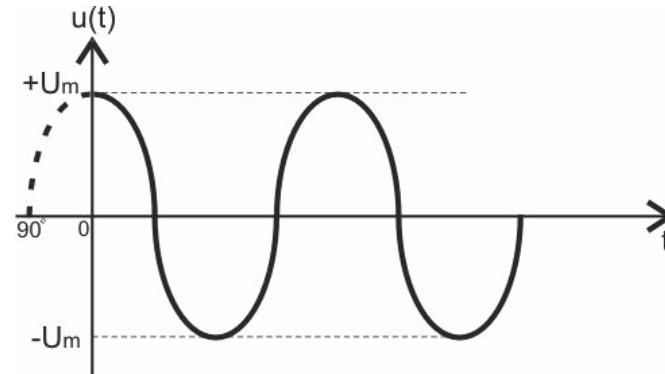
Rotirajući vektor (fazor) opisuje sinusoidu

Primjer 1.

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) V$$

$$\dot{U}_m = ?$$

$$\dot{U}_m = U_m \angle 90^\circ$$

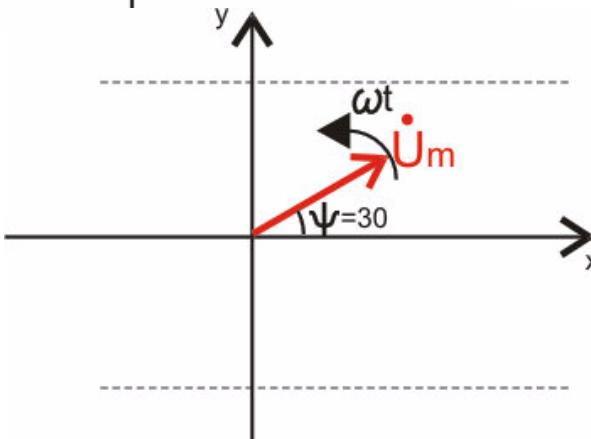


Primjer 2.

$$i(t) = 5 \sin(\omega t + 30^\circ) A$$

$$\dot{I}_m = ?$$

$$\dot{I}_m = 5 \angle 30^\circ A$$



15.3. OSNOVNE MATEMATIČKE OPERACIJE S FAZORIMA

$$\dot{U}_{1m} = A_1 + jB_1 \quad \text{Zbrajanje/oduzimanje}$$

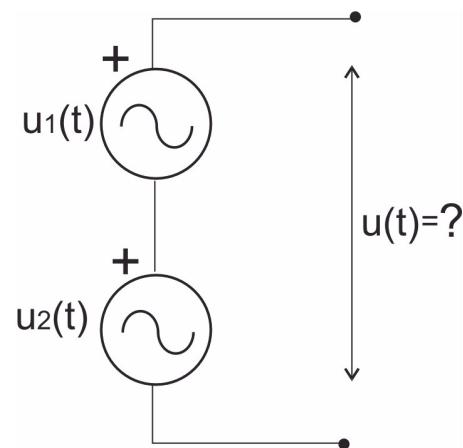
$$\underline{\dot{U}_{2m} = A_2 + jB_2} \quad \dot{U}_m = \dot{U}_{1m} \pm \dot{U}_{2m} = (A_1 + jB_1) \pm (A_2 + jB_2) = (A_1 + A_2) \pm j(B_1 + B_2)$$

$$\dot{U}_{1m} = U_{1m} \angle \psi_1 \quad \text{Množenje/dijeljenje}$$

$$\underline{\dot{U}_{2m} = U_{2m} \angle \psi_2} \quad \dot{U}_{1m} \cdot \dot{U}_{2m} = \dot{U}_{1m} \cdot \dot{U}_{2m} \angle (\psi_1 + \psi_2)$$

$$\frac{\dot{U}_{1m}}{\dot{U}_{2m}} = \frac{\dot{U}_{1m} \angle \psi_1}{\dot{U}_{2m} \angle \psi_2} = \frac{\dot{U}_{1m}}{\dot{U}_{2m}} \angle (\psi_1 - \psi_2)$$

Primjer. Za zadani strujni krug izračunati vrijednost ukupnog napona:



$$u_1(t) = 100 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$u_2(t) = 100 \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = ?$$

a) Rješenje zadatka koristeći napone u vremenskoj domeni:

$$u(t) = 100 \sin(\omega t + 30^\circ) + 100 \sin(\omega t + 60^\circ)$$

Općenito:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$u(t) = 100 \left[\sin \omega t \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos \omega t \right] + 100 \left[\sin \omega t \cdot \cos 60^\circ + \sin 60^\circ \cos \omega t \right]$$

$$u(t) = 100 \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \omega t + \frac{1}{2} \cdot \cos \omega t \right] + 100 \left[\sin \omega t \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \omega t \right]$$

$$u(t) = 100 \left[\sin \omega t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) + \cos \omega t \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) [\sin \omega t + \cos \omega t]$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \left[\sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Općenito:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \left[\sin \omega t + \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad \begin{array}{l} \text{Općenito:} \\ \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \end{array}$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \cdot 2 \cdot \sin \left(\frac{\omega t + \omega t + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\cancel{\omega t} - \cancel{\omega t} - \frac{\pi}{2}}{2} \right)$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \cdot 2 \cdot \sin \left(\frac{4\omega t + \pi}{4} \right) \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$u(t) = 100 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \cdot 2 \cdot \sin \left(\frac{4\omega t + \pi}{4} \right) \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

$$u(t) = \cancel{100} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} \right) \cdot \cancel{2} \cdot \sin \left(\frac{4\omega t + \pi}{4} \right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \Rightarrow u(t) = 50 \cdot \sqrt{2} \cdot (1 + \sqrt{3}) \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$u(t) = 193 \sin(\omega t + 45^\circ)(V)$$

b) Rješenje zadatka koristeći fazore:

$$u_1(t) = 100 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$u_2(t) = 100 \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}_{1m} &= 100 \cdot \cos 30^\circ + j100 \sin 30^\circ \\ \dot{U}_{2m} &= 100 \cdot \cos 60^\circ + j100 \sin 60^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\dot{U}_m = [100 \cdot \underline{\cos 30^\circ} + j100 \sin 30^\circ] + [100 \cdot \underline{\cos 60^\circ} + j100 \sin 60^\circ]$$

$$\dot{U}_m = 100[\cos 30^\circ + \cos 60^\circ] + j100[\sin 30^\circ + \sin 60^\circ]$$

$$\dot{U}_m = 100\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + j\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{U}_m = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2} + j100 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\dot{U}_m = 136,6 + j136,6$$

$$\begin{aligned} \dot{U}_m &= A + jB \\ A &= U_m \cdot \cos \psi & B &= U_m \cdot \sin \psi \\ U_m &= \sqrt{A^2 + B^2} & \psi &= \arctg \frac{B}{A} \end{aligned}$$

$$\dot{U}_m = \dot{U}_{1m} + \dot{U}_{2m}$$

$$U_m = \sqrt{136,6^2 + 136,6^2} = 193V$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{136,6}{136,6} \Rightarrow \psi = 45^\circ$$

$$\dot{U}_m = 193 \angle 45^\circ (V)$$

$$u(t) = 193 \sin(\omega t + 45^\circ)(V)$$

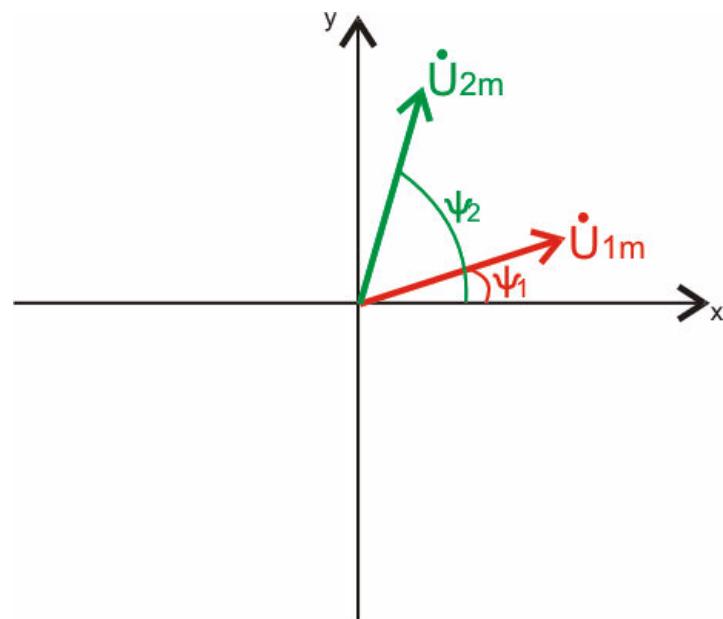
Grafičko zbrajanja/oduzimanja fazora

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1) \quad \dot{U}_{1m} = U_{1m} \angle \psi_1$$

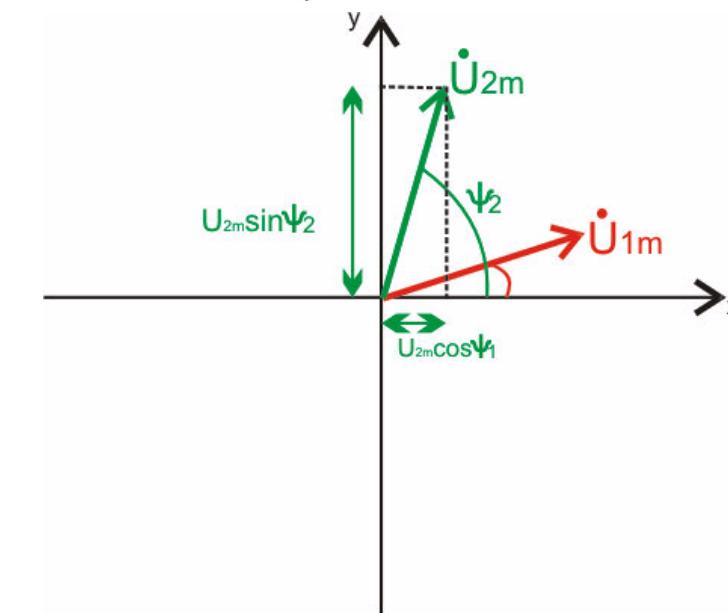
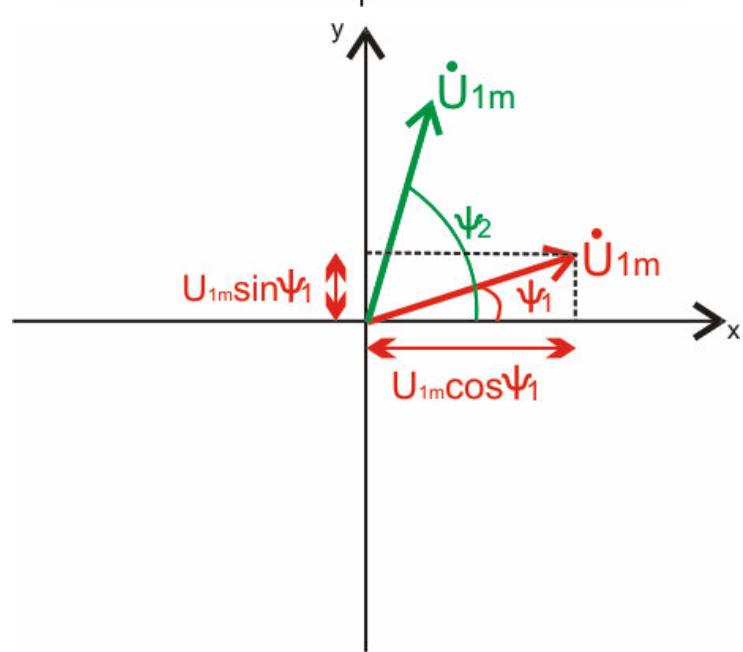
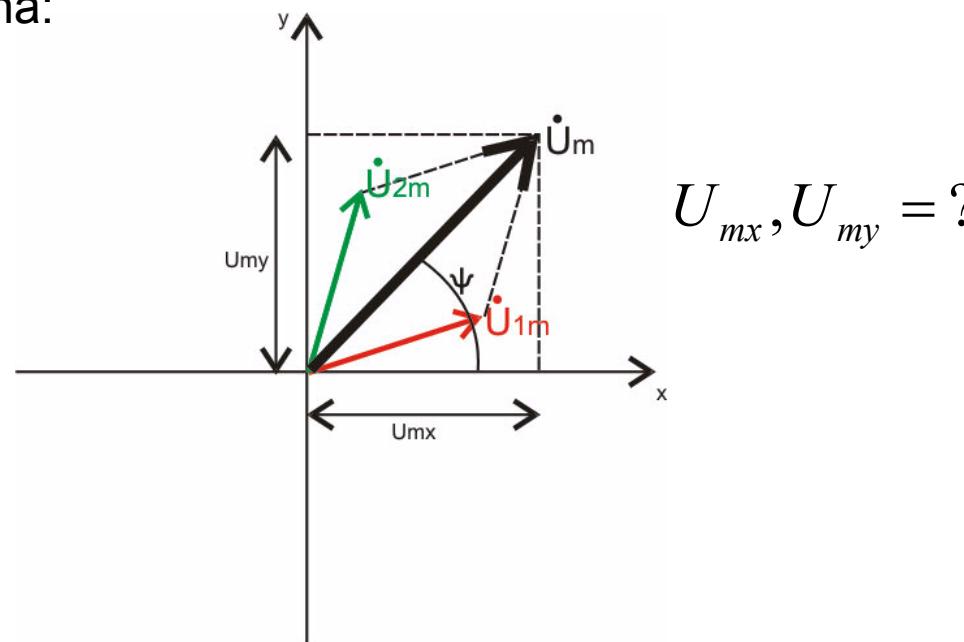
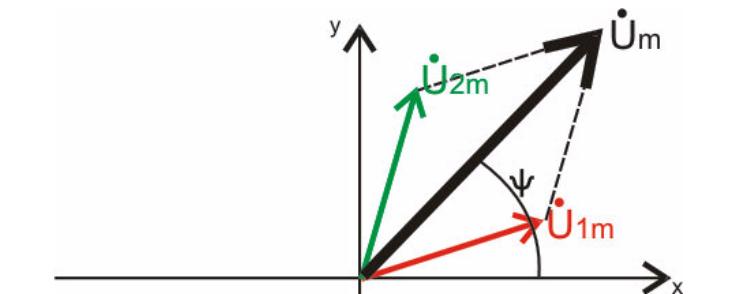
$$u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \psi_2) \quad \dot{U}_{2m} = U_{2m} \angle \psi_2$$

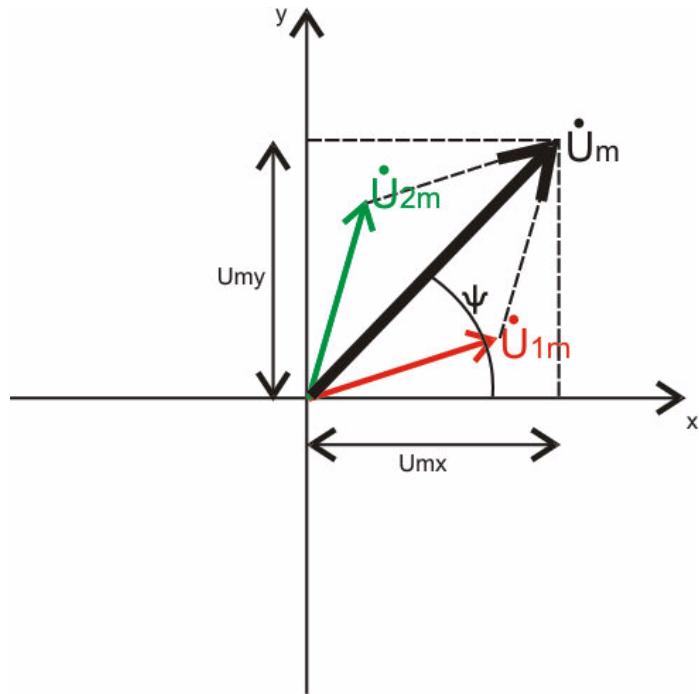
$$u = u_1 + u_2 = ?$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$



geometrijskim zbrajanjem fazora napona:





$$U_{mx} = U_{1m} \cos \Psi_1 + U_{2m} \cos \Psi_2$$

$$U_{my} = U_{1m} \sin \Psi_1 + U_{2m} \sin \Psi_2$$

$$U_m = \sqrt{U_{mx}^2 + U_{my}^2} =$$

$$U_m = \sqrt{(U_{1m} \cos \Psi_1 + U_{2m} \cos \Psi_2)^2 + (U_{1m} \sin \Psi_1 + U_{2m} \sin \Psi_2)^2}$$

$$\tan \Psi = \frac{U_{1m} \sin \Psi_1 + U_{2m} \sin \Psi_2}{U_{1m} \cos \Psi_1 + U_{2m} \cos \Psi_2}$$

$$\Psi = \arctan \frac{U_{1m} \sin \Psi_1 + U_{2m} \sin \Psi_2}{U_{1m} \cos \Psi_1 + U_{2m} \cos \Psi_2}$$

Primjer 1

$$u_1(t) = 10 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$u_2(t) = 20 \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$u(t) = ?$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}; \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$U_m = \sqrt{(U_{1m} \cos \Psi_1 + U_{2m} \cos \Psi_2)^2 + (U_{1m} \sin \Psi_1 + U_{2m} \sin \Psi_2)^2}$$

$$U_m = \sqrt{(10 \cos 30^\circ + 20 \cos 60^\circ)^2 + (10 \sin 30^\circ + 20 \sin 60^\circ)^2}$$

$$U_m = \sqrt{(10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2})^2 + (10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$U_m = \sqrt{(5 \cdot \sqrt{3} + 10)^2 + (5 + 10 \cdot \sqrt{3})^2}$$

$$U_m = 29.093V$$

$$\Psi = \operatorname{arctg} \frac{U_{1m} \sin \Psi_1 + U_{2m} \sin \Psi_2}{U_{1m} \cos \Psi_1 + U_{2m} \cos \Psi_2} = \operatorname{arctg} \frac{10 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2}} = 50.1^\circ$$

$$u(t) = 29.093 \sin(\omega t + 50.1^\circ) V$$

Primjer 2

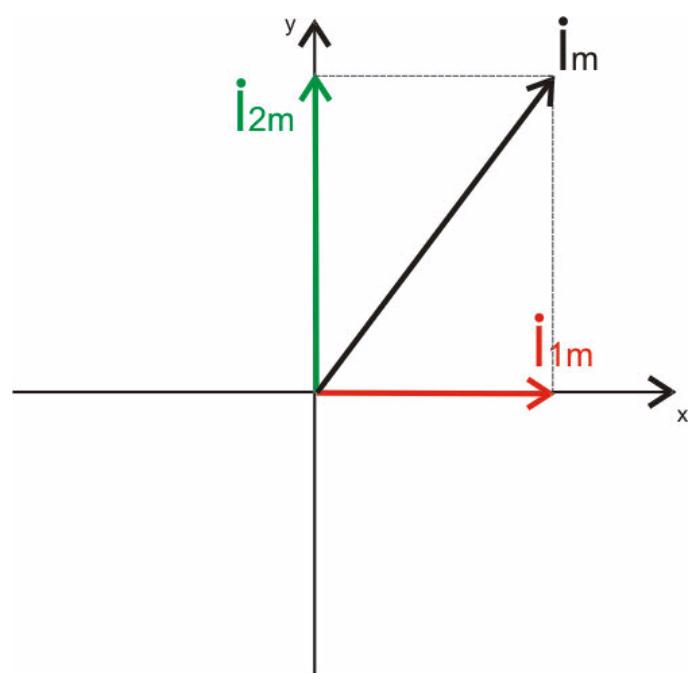
$$i_1(t) = 3 \sin \omega t A$$

$$\underline{i_2(t) = 4 \sin(\omega t + 90^\circ) A}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = ?$$

$$\dot{I}_{1m} = 3 \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_{2m} = 4 \angle 90^\circ$$



$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5A$$

$$\Psi = \arctg \frac{I_{2m}}{I_{1m}} = \arctg \frac{4}{3} = 53,13^\circ$$

$$\dot{I}_m = 5 \angle 53,13^\circ$$

$$i(t) = 5 \sin(\omega t + 53,13^\circ)$$

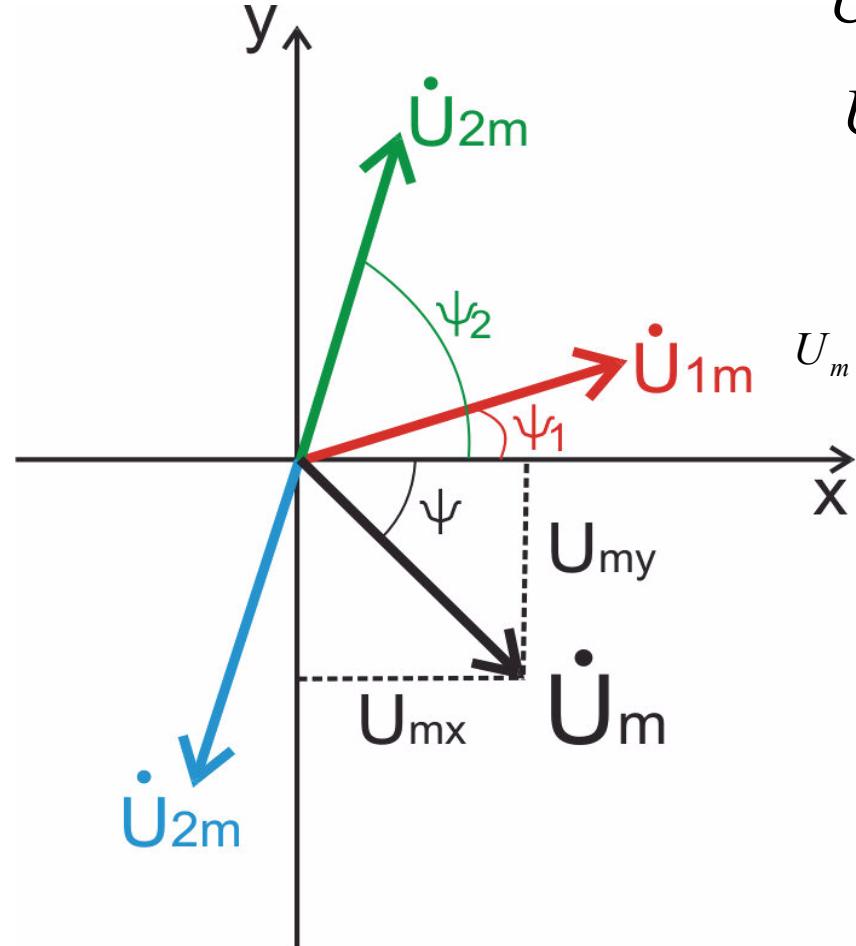
Oduzimanje fazora:

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$$

$$\underline{u_2(t) = U_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)}$$

$$u = u_1 - u_2 = ?$$

$$u = u_1 + (-u_2) = ?$$



$$\dot{U}_{1m} = U_{1m} \angle \psi_1$$

$$\dot{U}_{2m} = U_{2m} \angle \psi_2$$

$$U_{mx} = U_{1m} \cos \Psi_1 - U_{2m} \cos \Psi_2$$

$$U_{my} = U_{1m} \sin \Psi_1 - U_{2m} \sin \Psi_2$$

$$U_m = \sqrt{U_{mx}^2 + U_{my}^2}$$

$$U_m = \sqrt{(U_{1m} \cos \Psi_1 - U_{2m} \cos \Psi_2)^2 + (U_{1m} \sin \Psi_1 - U_{2m} \sin \Psi_2)^2}$$

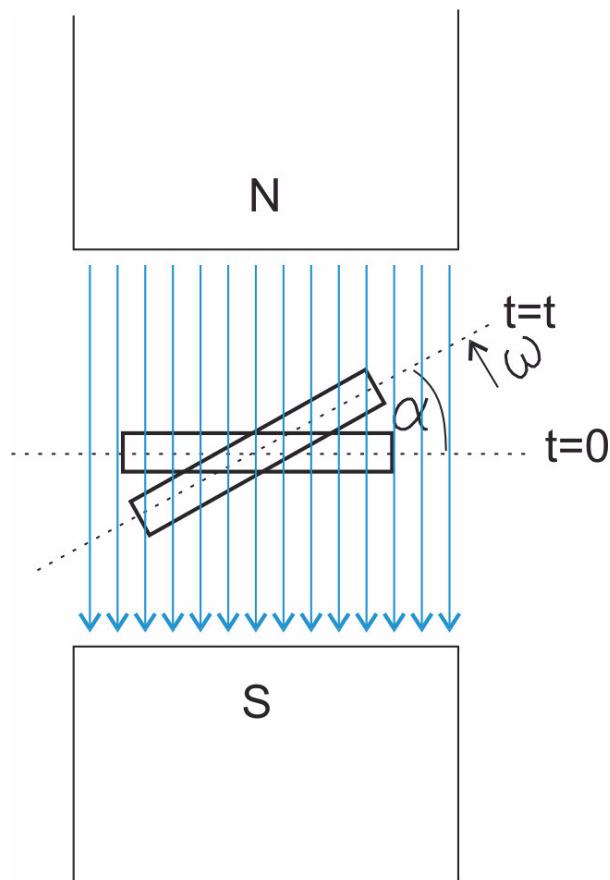
$$\tan \Psi = \frac{U_{1m} \sin \Psi_1 - U_{2m} \sin \Psi_2}{U_{1m} \cos \Psi_1 - U_{2m} \cos \Psi_2}$$

$$\Psi = \arctan \frac{U_{1m} \sin \Psi_1 - U_{2m} \sin \Psi_2}{U_{1m} \cos \Psi_1 - U_{2m} \cos \Psi_2}$$

15.4. Princip rada generatora sinusnog napona

Primjer dobivanja izmjeničnog napona pomoću elektromagnetske indukcije, vremenski promjenjiv po sinusnom zakonu:

Svitak s N zavoja rotira konstantom brzinom ω u homogenom magnetskom polju gustoće magnetskih silnica B:



$$t = 0$$

$$\underline{\Phi_{\max} = B \cdot S}$$

$$t = t$$

$$\Phi = B \cdot S'$$

S' – efektivna površina

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

$$\Phi = \underline{\Phi_{\max} \cdot \cos \alpha}$$

$$S' = S \cdot \cos \alpha$$

Magnetski tok u bilo kojem trenutku:

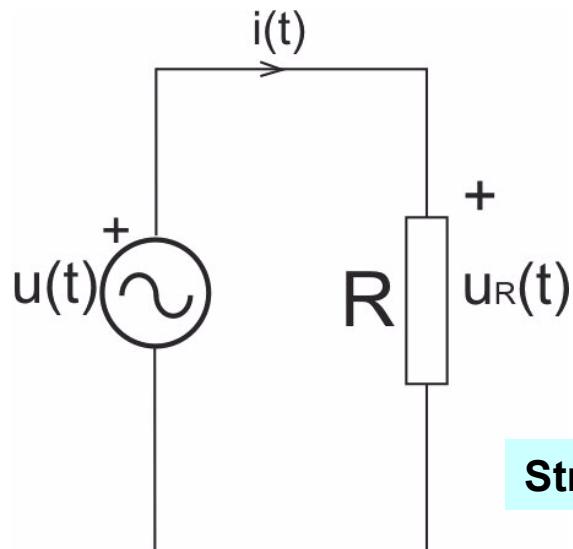
$$\alpha = \omega \cdot t \rightarrow \underline{\Phi = \Phi_{\max} \cdot \cos \omega t}$$

Inducirani napon za N=1:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot S \cdot \cos \omega t) = -B \cdot S \cdot \omega \cdot (-\sin \omega t) = B \cdot S \cdot \omega \cdot \sin \omega t = E_m \sin \omega t$$

16. Elementi električnih mreža u električnom krugu sinusne struje

16.1. Otpor na sinusnom naponu



$$u_R(t) = u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$$

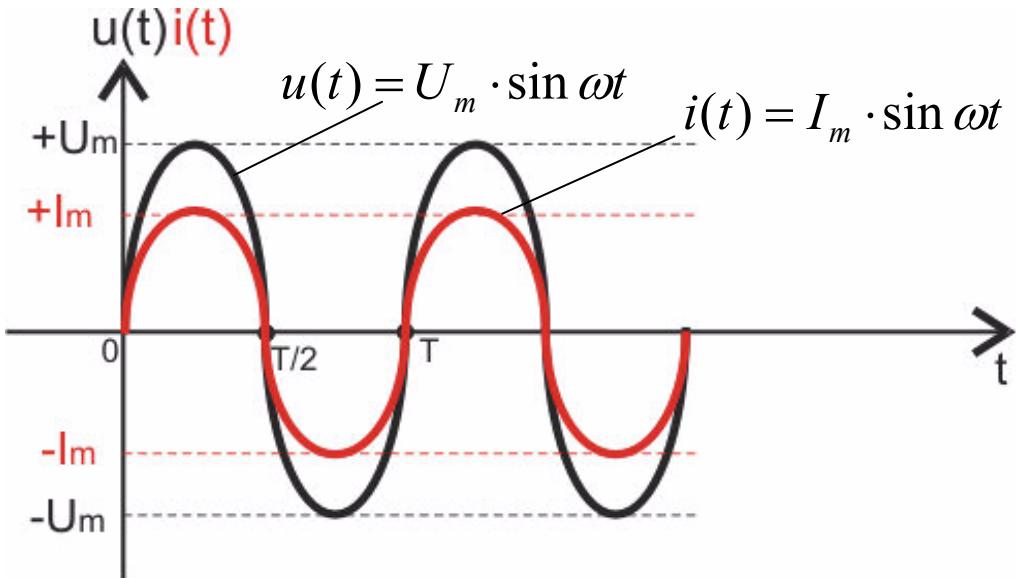
Ohmov zakon:

$$i = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t = I_m \cdot \sin \omega t$$

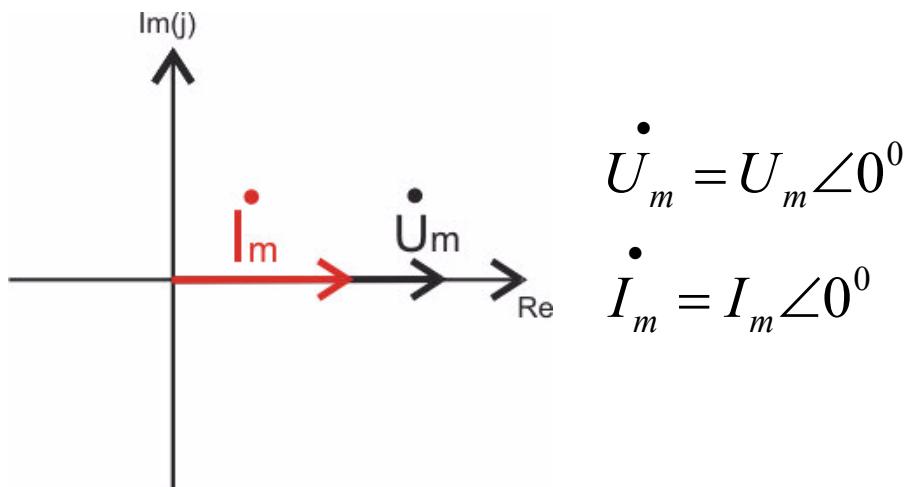
Struja kroz otpor je sinusnog oblika i frekvencije kao i napon.

zadano:

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$$



Napon i struja na otporu prikazani u vremenskoj domeni



$$\dot{U}_m = U_m \angle 0^0$$

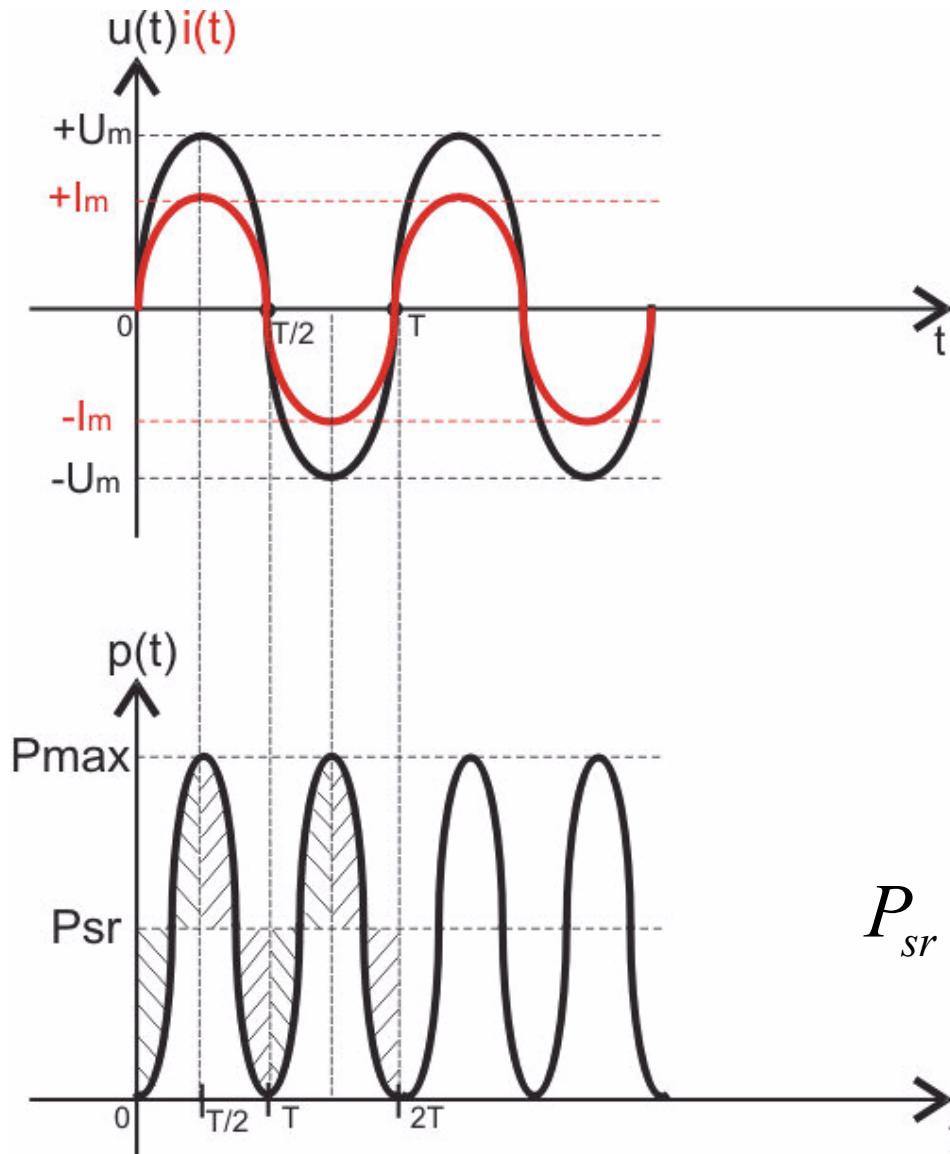
$$\dot{I}_m = I_m \angle 0^0$$

**NAPON I STRUJA NA
OTPORU SU U FAZI**
**(istovremeno prolaze kroz
minimum i maksimum)**

Napon i struja na otporu prikazani preko fazora

Trenutna snaga koja se troši na otporu:

$$p = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin \omega t = U_m \cdot I_m \sin^2 \omega t = P_m \cdot \sin^2 \omega t$$



$$P_{\min} = 0$$

$$P_{\max} = I_m \cdot U_m$$

$$P_{sr} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = \frac{I_m \cdot U_m}{2}$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$

$$U_m = I_m \cdot R$$

$$P_{sr} = \frac{I_m^2 \cdot R}{2} [W] \quad P_{sr} = \frac{U_m^2}{2 \cdot R} [W]$$

Na trošilima koja rade na izmjenični napon daje se podatak za srednju snagu i efektivnu vrijednost napona:

Efektivna vrijednost izmjenične sinusne veličine?

Način označavanja jednom brojkom (velikog broja vremenski promjenjivih vrijednosti) naziva se efektivna vrijednost izmjenične veličine.

Iz tog razloga ampermetar i voltmetar mjere efektivne vrijednosti struje odnosno napona, dok vatmetar srednju vrijednost snage.

Efektivna vrijednost izmjenične struje jednaka je onoj vrijednosti istosmjerne struje koja u otporu R za vrijeme T proizvede istu količinu topline kao i promatrana izmjenična struja:

$$\left. \begin{aligned} P &= R \cdot I^2 \\ P_{sr} &= \frac{I_m^2}{2} \cdot R \end{aligned} \right\} \cancel{R \cdot I^2 = \frac{I_m^2}{2} \cdot R} \Rightarrow I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad \text{efektivna vrijednost izmjenične struje}$$

analogno vrijedi za napone

$$\left. \begin{array}{l} P = \frac{U^2}{R} \\ P_{sr} = \frac{U_m^2}{2 \cdot R} \end{array} \right\} \frac{U^2}{R} = \frac{U_m^2}{2 \cdot R} \Rightarrow U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{efektivna vrijednost izmjeničnog napona}$$

Primjer. Kolika je maksimalna vrijednost izmjeničnog sinusnog napona ako je voltmetrom izmjereno 230V:

$$U = 230V$$

$$f = 50Hz$$

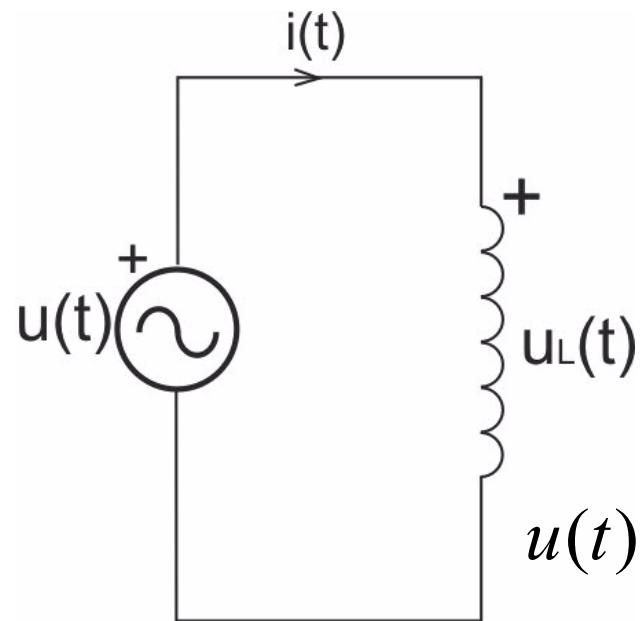
$$U_{\max} = ?$$

$$U = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_{\max} = U \cdot \sqrt{2} = 230 \cdot \sqrt{2} = 324.3V$$

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 = 314 \text{ rad / s}$$

$$u(t) = U_m \sin \omega t = 324,3 \sin 314t \text{ (V)}$$

16.2. Induktivitet na sinusnom naponu



$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$$

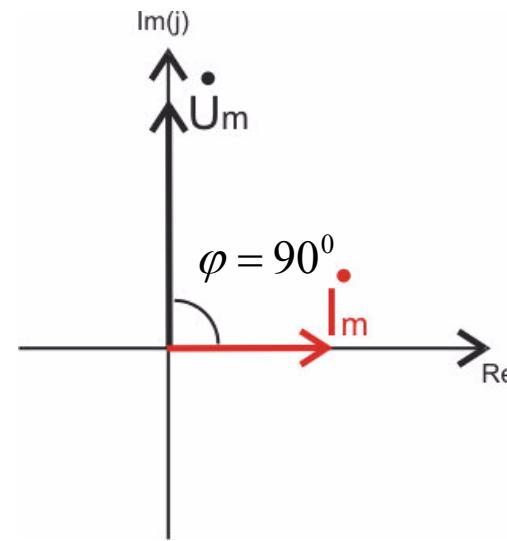
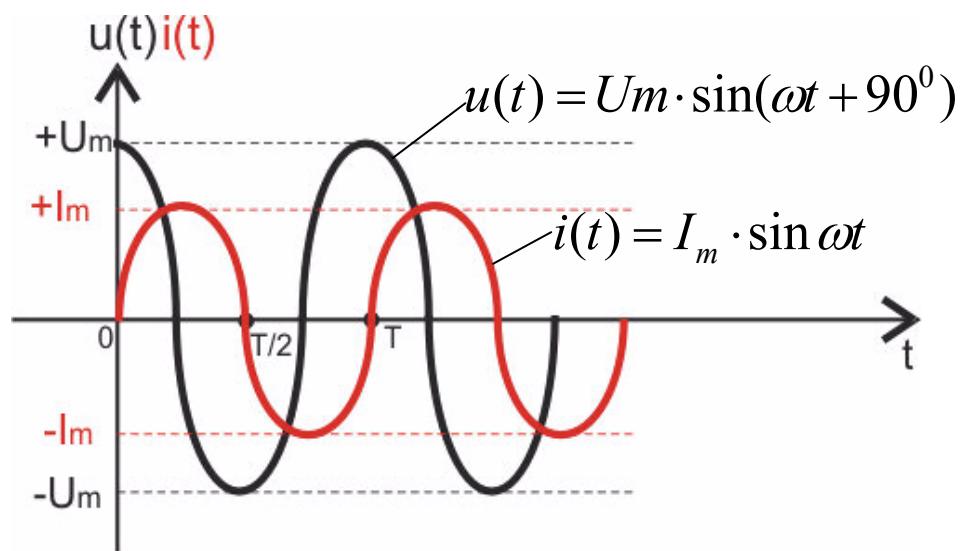
$$u(t) = ?$$

$$u(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}(I_m \cdot \sin \omega t) = L \cdot I_m \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

$$\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$u(t) = I_m \cdot \omega L \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) = U_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$x_L = \omega L \quad \text{induktivni ili reaktivni otpor}$$



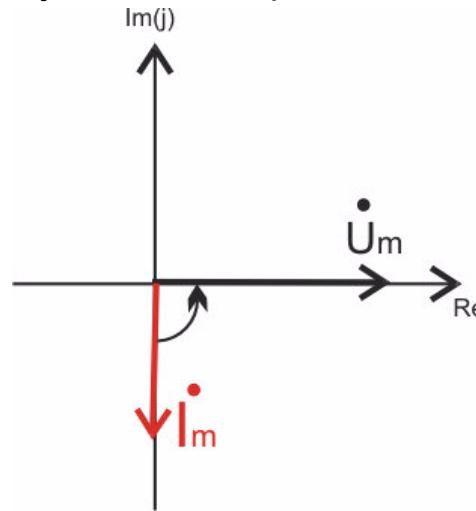
φ fazni kut između napona i struje

NA INDUKTIVITETIMA U KRUGU SINUSNE STRUJE NAPON PRETHODI STRUJI ZA 90°
 (na zavojnicu prvo "sjedne" napon, a onda nakon 90° prođe struja)

ILI: Struja na induktivitetima u krugu sinusne struje kasni za naponom za 90° :

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$$

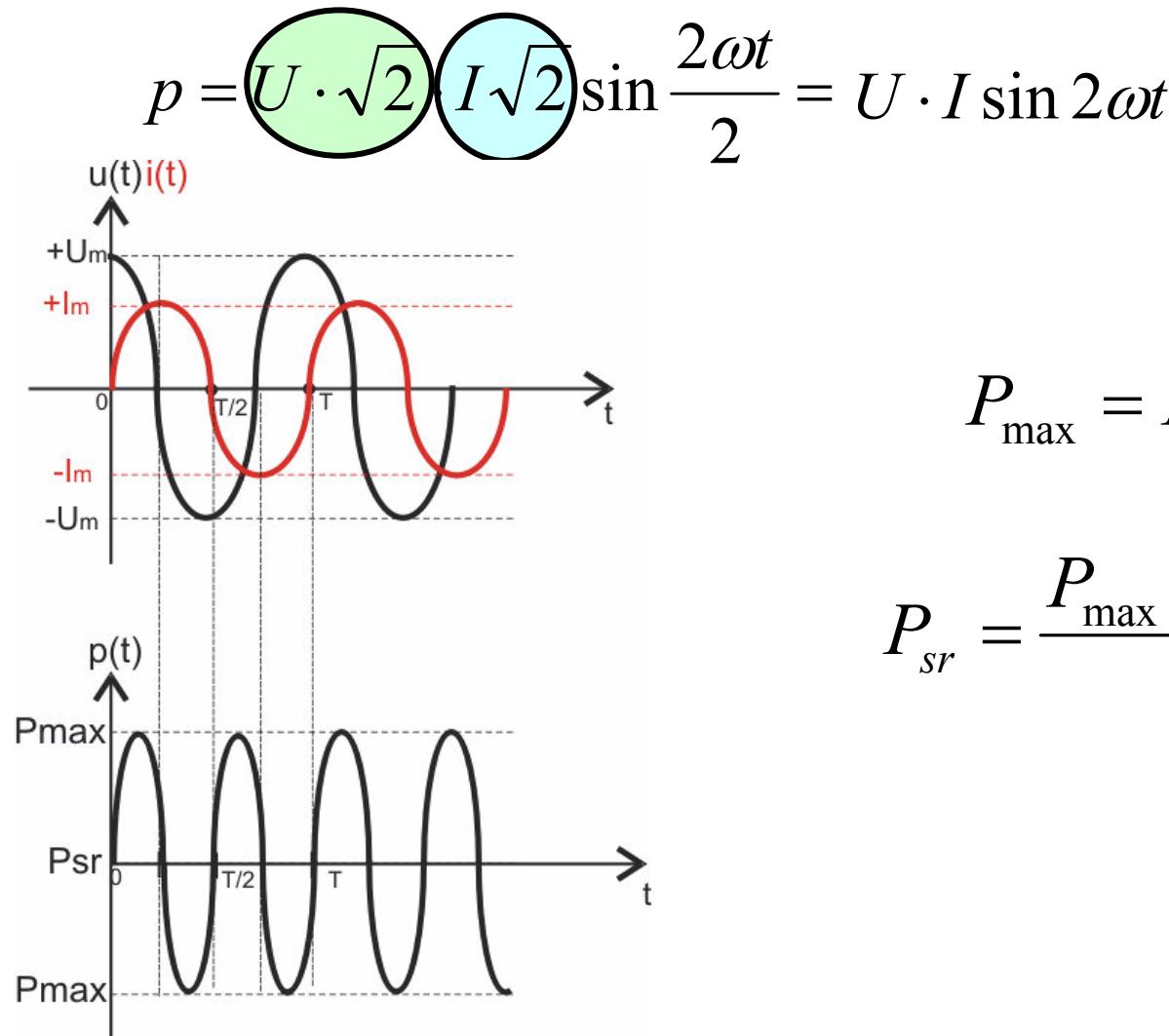
$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$



Trenutna snaga koja se troši na induktivitetu:

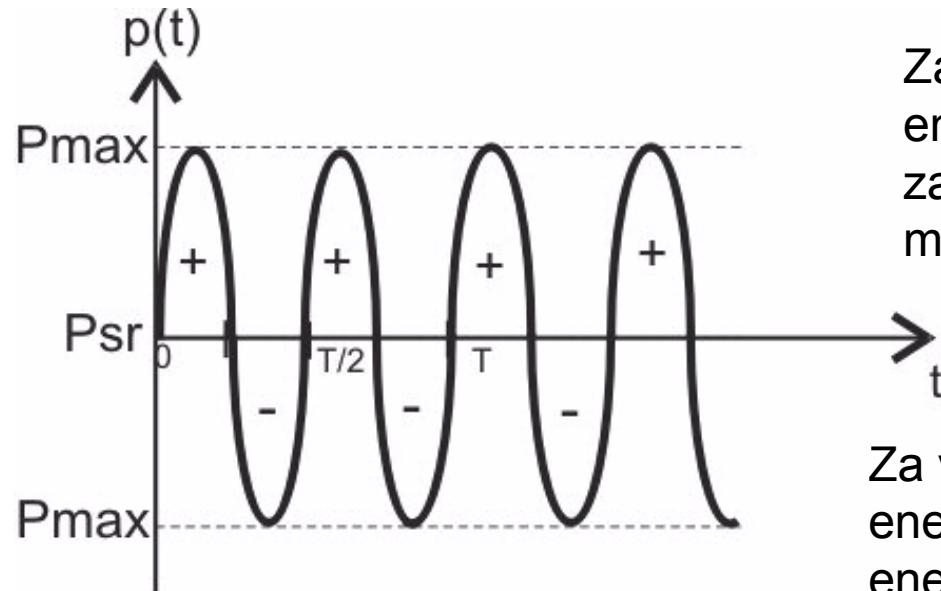
$$p = u(t) \cdot i(t) = I_m \sin \omega t \cdot U_m \cos \omega t = U_m \cdot I_m \frac{\sin 2\omega t}{2}$$

Prelazak na efektivne vrijednosti napona i struja:



$$P_{\max} = P_{\min}$$

$$P_{sr} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = 0$$



Za vrijeme (+) poluperiode $p(t)$, električna energija iz električnog izvora struji prema zavojnici i akumulira se u obliku magnetskog polja koje je u cijeloj zavojnici.

Za vrijeme (+) poluperiode $p(t)$, električna energija magnetskog polja se razgrađuje i energija se vraća u izvor.

Za konstrukciju zavojnice i uvid u energetske odnose važan je podatak o maksimalnom iznosu trenutne snage - **Q_L reaktivna ili prazna (jalova) snaga:**

$$Q_L = U \cdot I \Rightarrow Q_L = I^2 \cdot x_L \Rightarrow Q_L = \frac{U^2}{x_L} \quad (\text{VAr})$$

(Volt_Amper_reaktivno)

$$U = x_L \cdot I \Rightarrow I = \frac{U}{x_L}$$

Primjer: Kroz zavojnicu $L=10\text{mH}$ teče struja $i=5\sin 1000t \text{ A}$. Izračunati iznos U_m , X_L , $u(t)$, Q_L , $p(t)$.

$$I_m = 5\text{A}$$

$$\underline{\omega = 1000 \text{rad} / \text{s}}$$

$$x_L = \omega \cdot L = 1000 \cdot 10 \cdot 10^{-3} = \cancel{10^5} \cdot 10 \cdot \cancel{10^{-3}} = 10\Omega$$

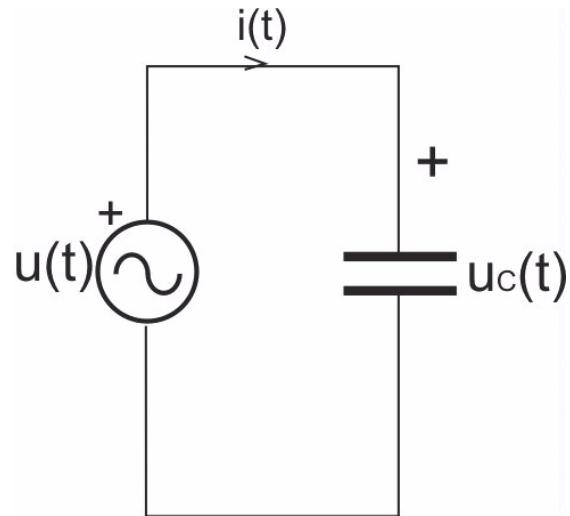
$$U_m = x_L \cdot I_m = 10 \cdot 5 = 50V$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + 90^\circ) = 50 \sin(\omega t + 90^\circ) V$$

$$Q_L = U \cdot I = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{250}{2} = 125 \text{Var}$$

$$p(t) = U \cdot I \cdot \sin 2\omega t = 125 \sin 2000t$$

16.3. Kapacitet na sinusnom naponu



$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$$

$$i(t) = ?$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt} = C \cdot \frac{d}{dt}(U_m \cdot \sin \omega t) = C \cdot U_m \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

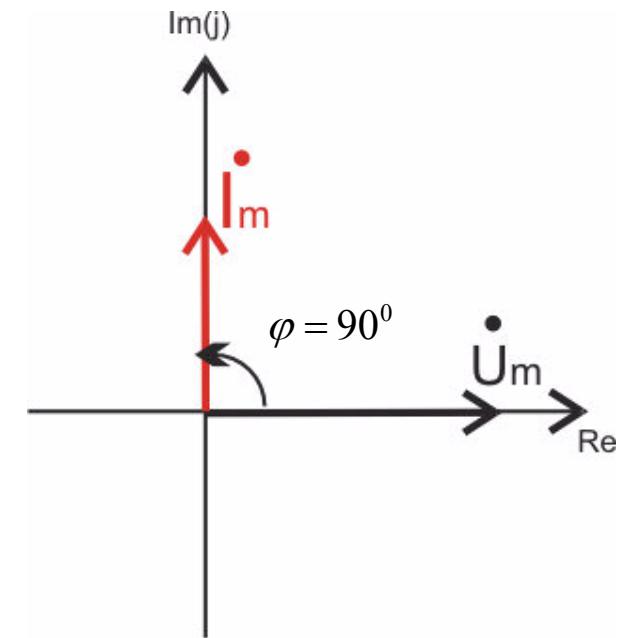
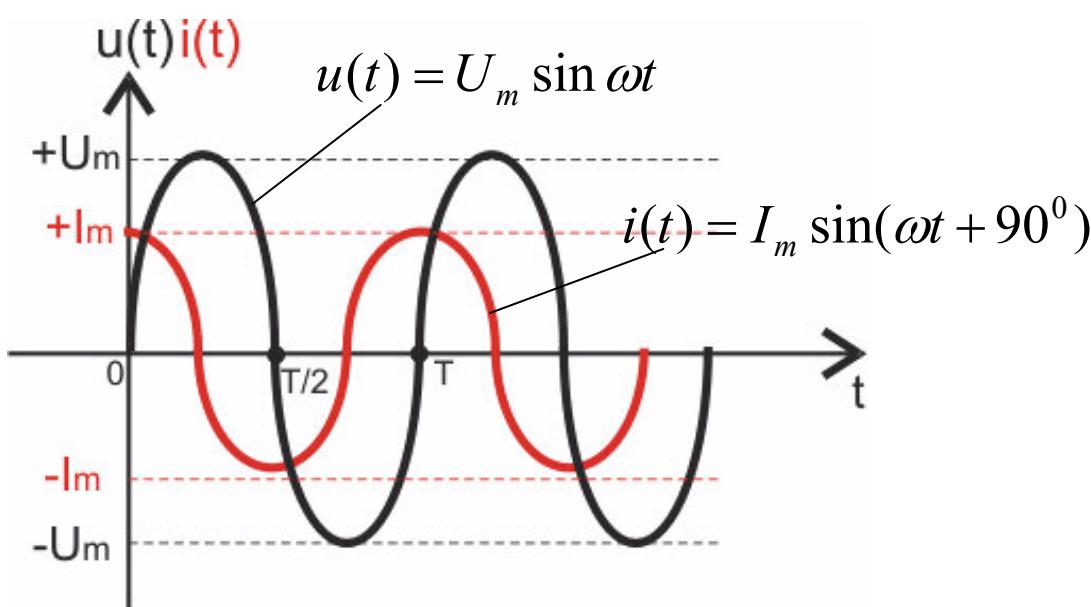
$$\cos \omega t = \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$i(t) = C \cdot U_m \cdot \omega \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$I_m = U_m \cdot C \cdot \omega = \frac{U_m}{\frac{1}{C \cdot \omega}} = \frac{U_m}{x_C}$$

$$x_C = \frac{1}{C \cdot \omega} = \frac{1}{C \cdot 2 \cdot \pi \cdot f}$$

kapacitvni ili
reaktivni otpor

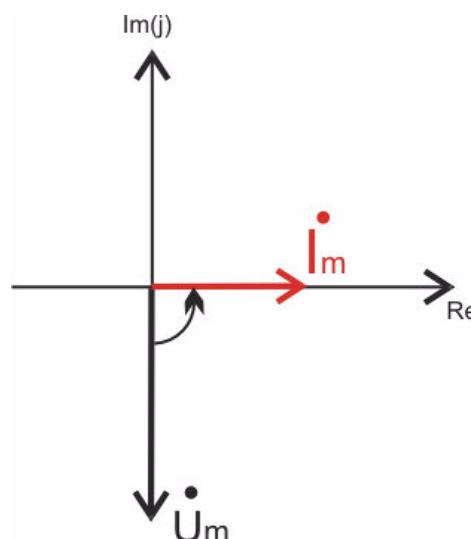


NA KAPACITETIMA U KRUGU SINUSNE STRUJE STRUJA PRETHODI NAPONU ZA 90^0
 (kroz kondenzator prvo prođe struja a onda 'sjedne' napon nakon 90^0)

ILI: Napon na kapacitetima u krugu sinusne struje kasni za strujom za 90^0 :

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$$

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t - 90^0)$$

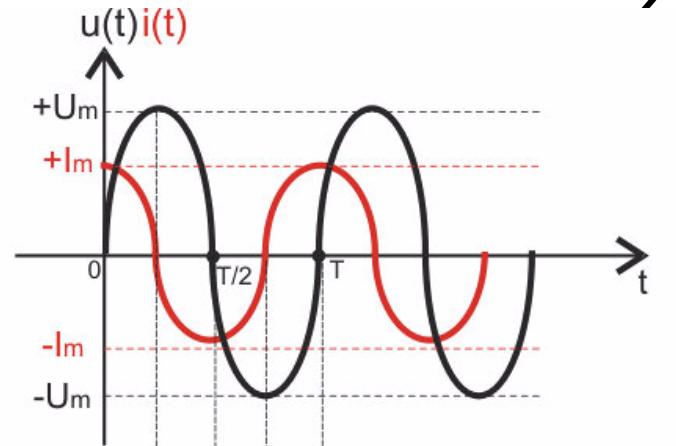


Trenutna snaga koja se troši na kapacitetu:

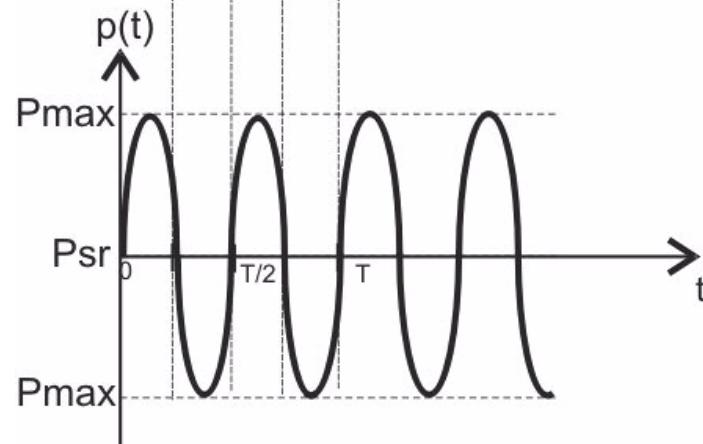
$$p = u(t) \cdot i(t) = I_m \cos \omega t \cdot U_m \sin \omega t = U_m \cdot I_m \frac{\sin 2\omega t}{2}$$

prelazak na efektivne vrijednosti napona i struja:

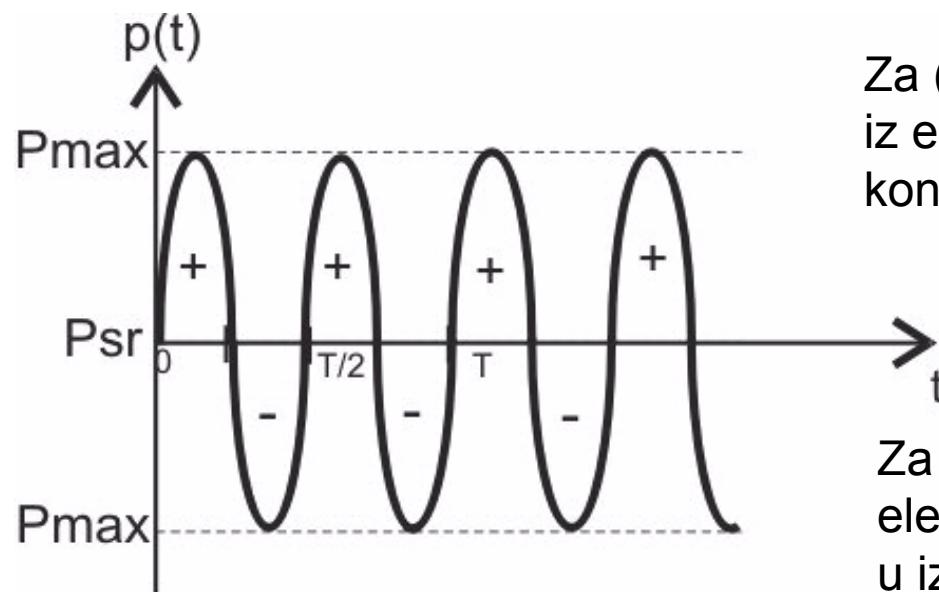
$$p = U \cdot \sqrt{2} \cdot I \sqrt{2} \sin \frac{2\omega t}{2} = U \cdot I \sin 2\omega t$$



$$P_{\max} = P_{\min}$$



$$P_{sr} = \frac{P_{\max} + P_{\min}}{2} = 0$$



Za (+) poluperiode $p(t)$, električna energija iz električnog izvora struji prema kondenzatoru i akumulira se u njemu.

Za (-) poluperiode $p(t)$, označeno s '-' električna energija se razgrađuje vraća u izvor.

Za konstrukciju kondenzatora i uvid u energetske odnose važan je podatak o maksimalnom iznosu trenutne snage - **Q_C reaktivna ili prazna (jalova) snaga:**

$$Q_C = U \cdot I \Rightarrow Q_C = I^2 \cdot x_C \Rightarrow Q_C = \frac{U^2}{x_C} \quad (\text{VAr})$$

(Volt_Amper_reaktivno)

$$U = x_C \cdot I \Rightarrow I = \frac{U}{x_C}$$

17. Trokut snaga

Prividna snaga [S]:

$$S = U \cdot I(VA)$$

Umnožak efektivnih vrijednosti napona i struja, prividno predočuje snagu, jer sve ovisi o **faktoru snage** (kosinusu kuta između napona i struje)

Djelatna (radna) snaga [P]:

$$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi(W)$$

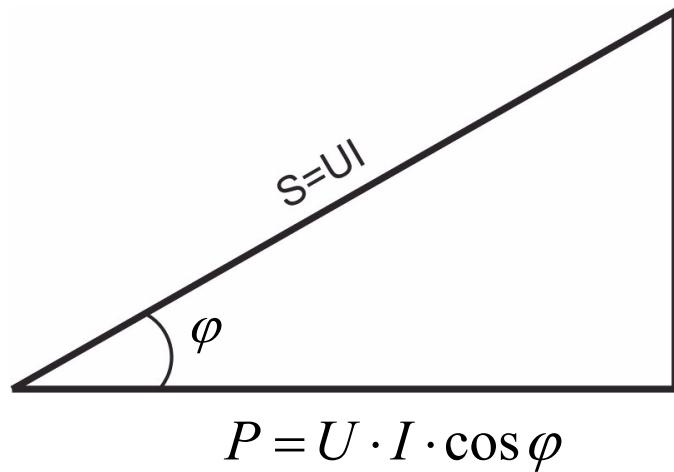
Električna energija koju izvor predaje strujnom krugu i u trošilu koristi za koristan rad.

Jalova snaga [Q]:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi(Var)$$

Električna energija koja ne obavlja koristan rad, nego energija predana trošilu se u potpunosti vraća izvoru.

Ovisnost triju veličina (S , P i Q) može se prikazati trokutom koji se naziva **trokut snaga**



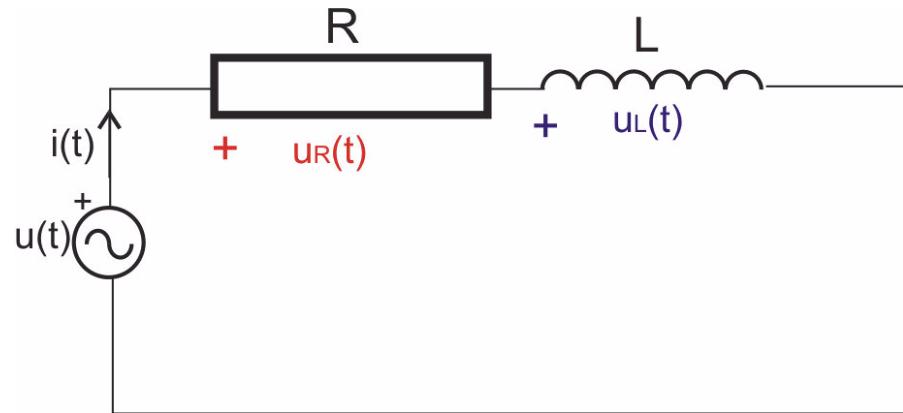
$$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Iz trokuta snaga se vidi da ako povećavamo jalovu snagu povećava se i prividna snaga, odnosno dodatno se opterećuje izvor a za isti iznos korisne energije.

18. Strujni krugovi izmjenične struje

18.1. Serijski spoj R i L



Zadano:

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$$

$$u(t) = ?$$

serijski spoj:

$$i(t) = i_R(t) = i_L(t)$$

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t)$$

$$u_R(t) = U_{Rm} \sin \omega t = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t \quad \text{napon na otporniku i struja su u fazi}$$

$$u_L(t) = U_{Lm} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \cdot x_L \cdot \sin(\omega t + 90^\circ) \quad \text{napon na induktivitetu prethodi struji za } 90^\circ$$

fazori padova napona i struje izvora:

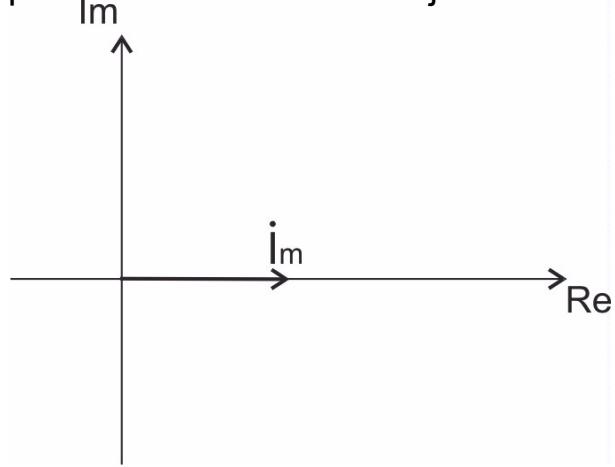
$$\dot{U}_{Lm} = U_{Lm} \angle 90^\circ$$

$$\dot{U}_{Rm} = U_{Rm} \angle 0^\circ \quad \dot{I}_m = I_m \angle 0^\circ$$

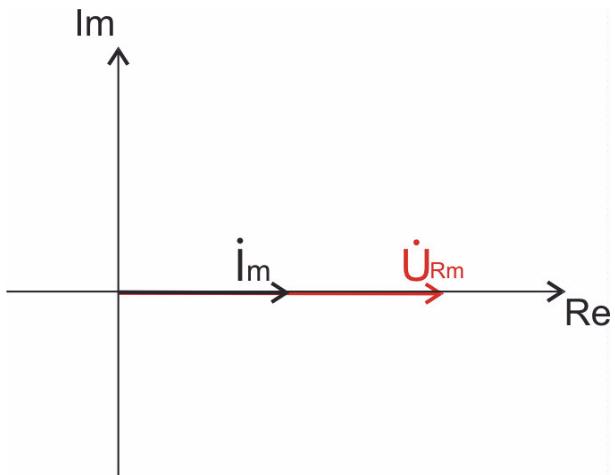
$$\dot{U}_m = ?$$

Fazorski dijagram napona i struja:

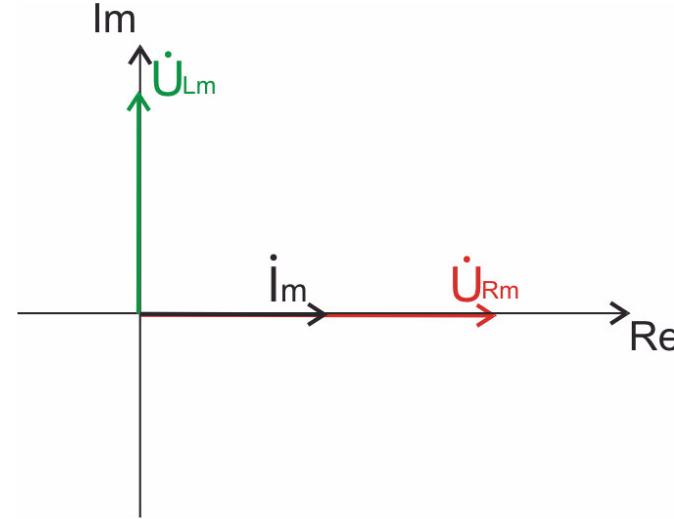
-struja je referentna veličina za sve elemente mreže
pa prvo ucrtavamo fazor struje:



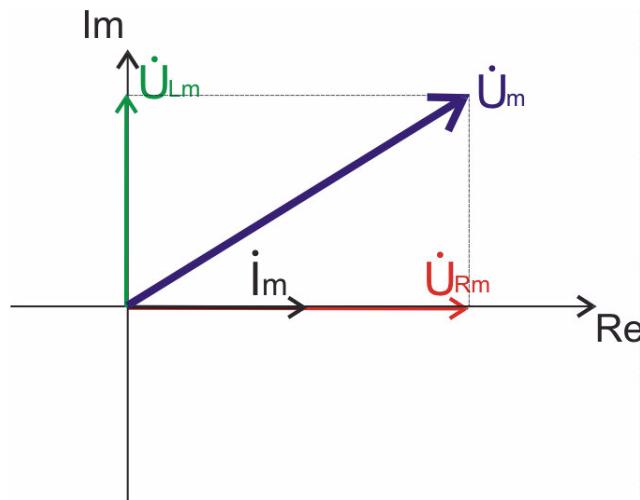
- fazor napona U_{Rm} je u fazi s fazorom struje:



- fazor napona U_{Lm} prethodi fazoru struje za 90^0 :



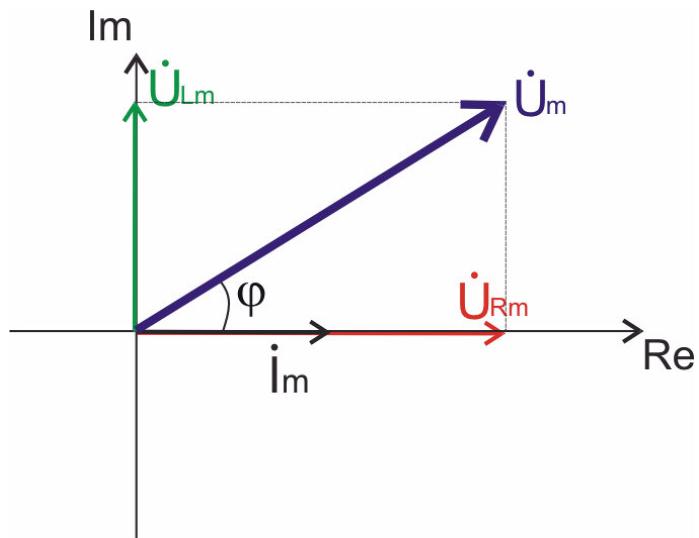
- fazor napona izvora U_m dobije se geometrijskim zbrajanjem U_{Lm} i U_{Rm} :



$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + U_{Lm}^2} = \sqrt{(I_m \cdot R)^2 + (I_m \cdot x_L)^2} = I_m \sqrt{R^2 + x_L^2}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + x_L^2}} = \frac{U_m}{Z} \quad Z = \sqrt{R^2 + x_L^2}$$

ukupni ili rezultanti
prividni otpor ili impedancija

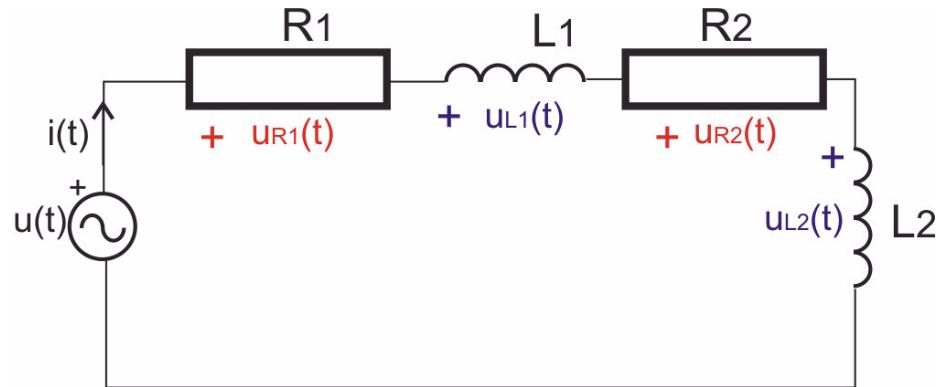


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{U}_{Lm}}{\dot{U}_{Rm}} = \frac{x_m \cdot x_L}{x_m \cdot R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L}{R} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{x_L}{R}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Ako se u električnoj mreži nalazi više serijski spojenih otpornika i induktiviteta:

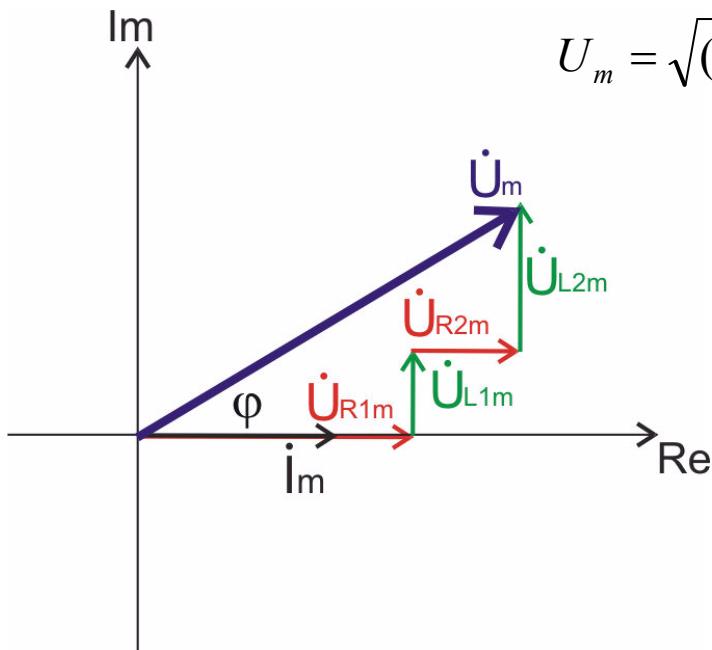


serijski spoj:

$$i(t) = i_{R1}(t) = i_{R2}(t) = i_{L1}(t) = i_{L2}(t)$$

$$u(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) + u_{L1}(t) + u_{L2}(t)$$

fazorski dijagram naponi i struja



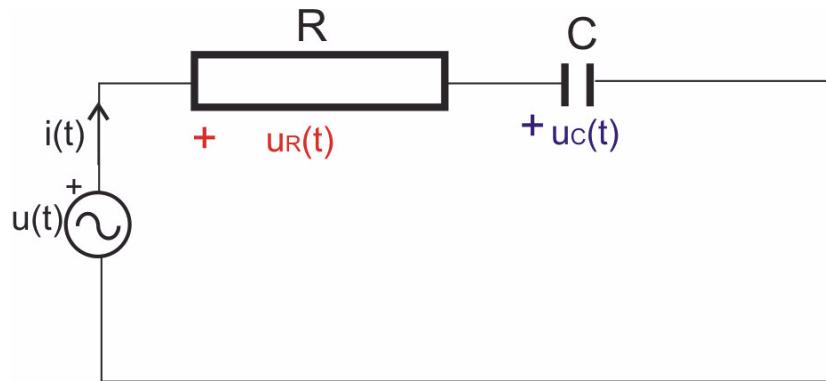
$$U_m = \sqrt{(U_{R1} + U_{R2})^2 + (U_{L1} + U_{L2})^2} = I_m \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (x_{L1} + x_{L2})^2}$$

Općenito:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n R_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_{Li}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Li}}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

18.2. Serijski spoj R i C



Zadano:

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$$

$$u(t) = ?$$

serijski spoj:

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t)$$

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$$

$$u_R(t) = U_{Rm} \sin \omega t = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t \quad \text{napon na otporniku i struja su u fazi}$$

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t - 90^\circ) = I_m \cdot x_C \cdot \sin(\omega t - 90^\circ) \quad \text{napon na kapacitetu kasni za strujom } 90^\circ$$

fazori padova napona i struje izvora:

$$\dot{U}_{Rm} = U_{Rm} \angle 0^\circ$$

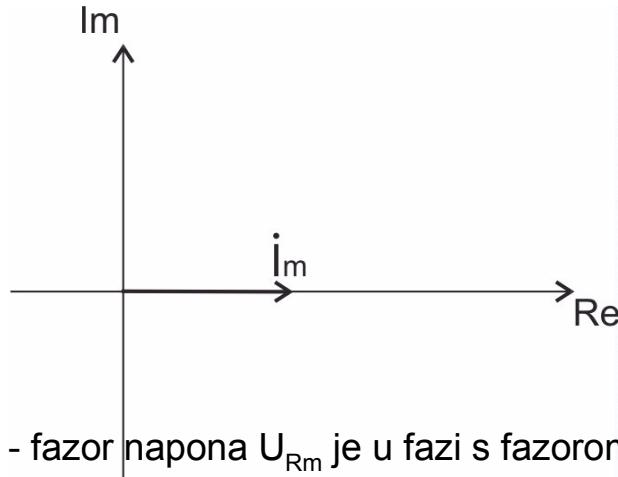
$$\dot{U}_{Cm} = U_{Cm} \angle -90^\circ$$

$$\dot{I}_m = I_m \angle 0^\circ$$

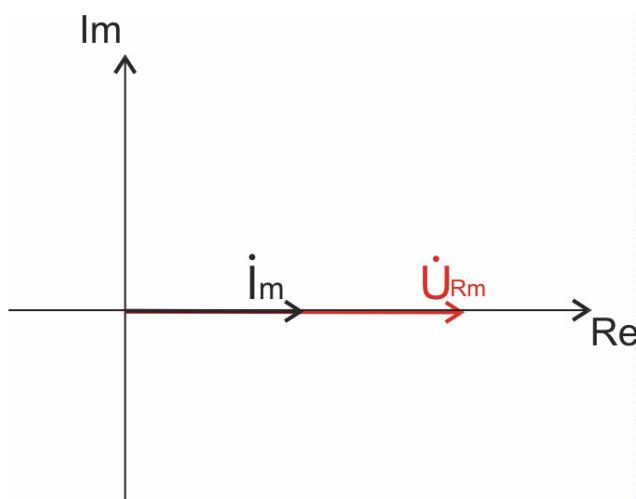
$$\dot{U}_m = ?$$

Fazorski dijagram napona i struja:

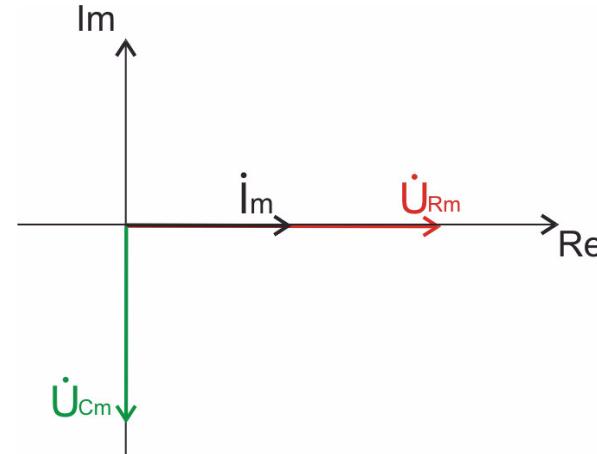
-struja je referentna veličina za sve elemente mreže
pa prvo ucrtavamo fazor struje:



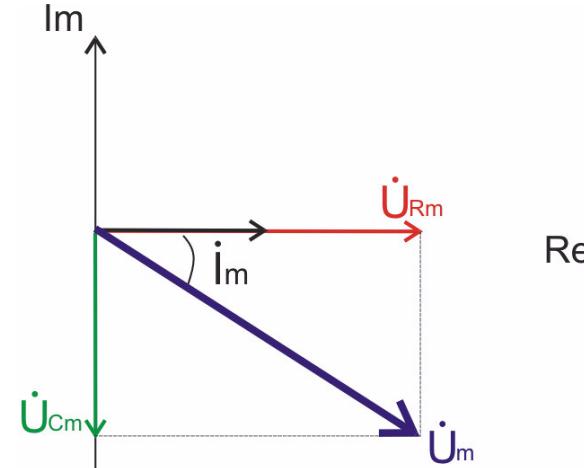
- fazor napona \dot{U}_{Rm} je u fazi s fazorom struje:



- fazor napona \dot{U}_{Cm} kasni za fazorom struje za 90° :



- fazor napona izvora \dot{U}_m dobije se geometrijskim zbrajanjem \dot{U}_{cm} i \dot{U}_{Rm} :

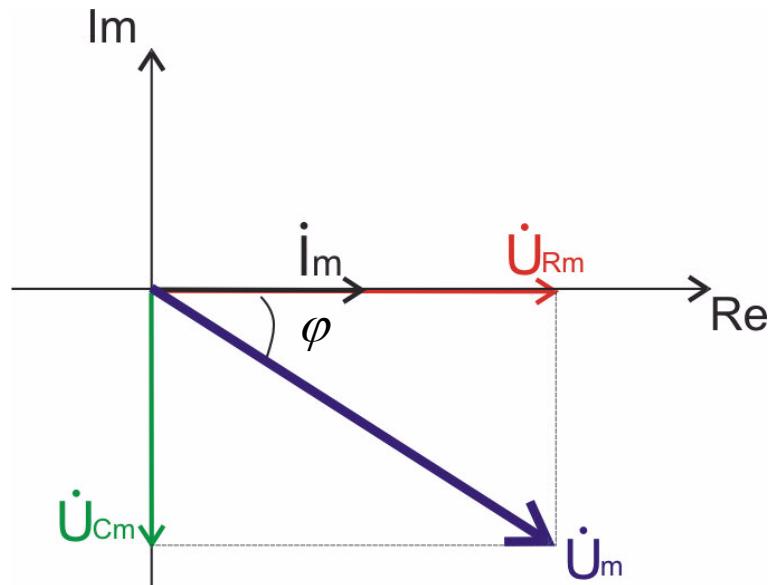


$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + U_{Cm}^2} = \sqrt{(I_m \cdot R)^2 + (I_m \cdot x_C)^2} = I_m \sqrt{R^2 + x_C^2}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + x_C^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + x_C^2}$$

ukupni ili rezultanti
prividni otpor ili impedancija

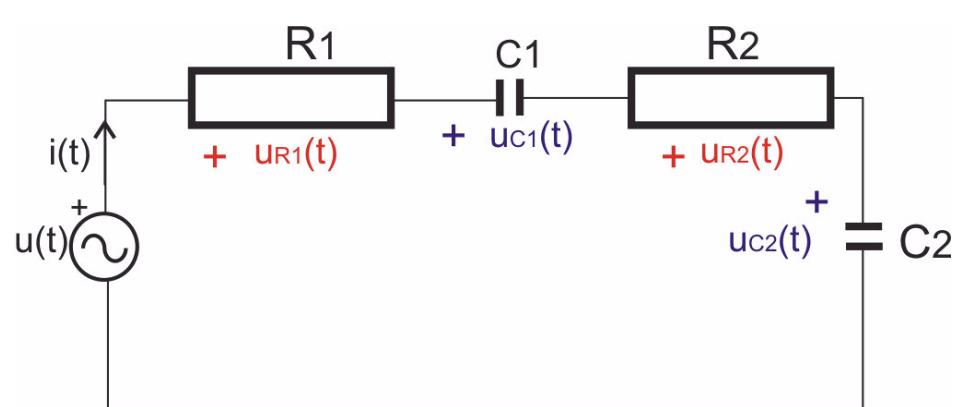


$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\dot{U}_{Cm}}{\dot{U}_{Rm}} = \frac{I_m \cdot x_C}{I_m \cdot R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_C}{R} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{x_C}{R}$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t - \varphi)$$

Ako se u električnoj mreži nalazi više serijski spojenih otpornika i kapaciteta:

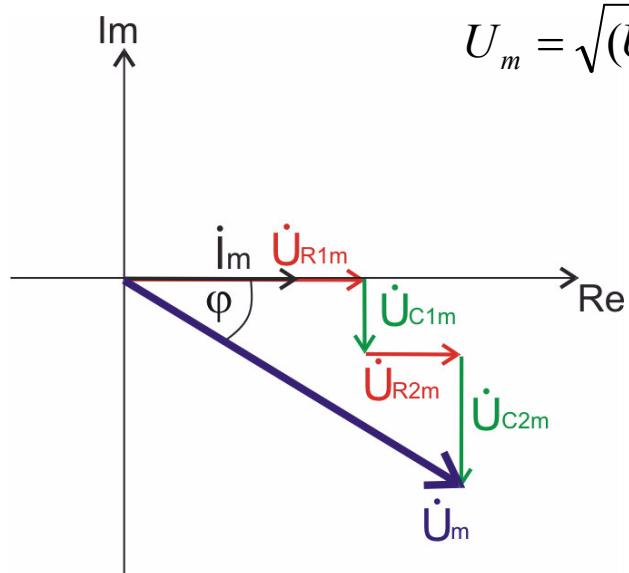


serijski spoj:

$$i(t) = i_{R1}(t) = i_{R2}(t) = i_{C1}(t) = i_{C2}(t)$$

$$u(t) = u_{R1}(t) + u_{R2}(t) + u_{C1}(t) + u_{C2}(t)$$

fazorski dijagram naponu i struja



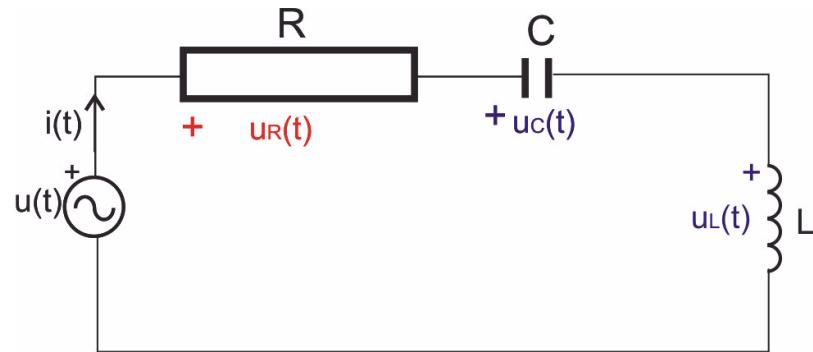
$$U_m = \sqrt{(U_{R1} + U_{R2})^2 + (U_{C1} + U_{C2})^2} = I_m \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (x_{C1} + x_{C2})^2}$$

Općenito:

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n R_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_{Li}\right)^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sum_{i=1}^n x_{Ci}}{\sum_{i=1}^n R_i}$$

18.3. Serijski spoj R, L i C



Zadano:

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t$$

$$u(t) = ?$$

serijski spoj:

$$i(t) = i_R(t) = i_C(t) = i_L(t)$$

$$u(t) = u_R(t) + u_C(t) + u_L(t)$$

$$u_R(t) = U_{Rm} \sin \omega t = I_m \cdot R \cdot \sin \omega t$$

$$u_C(t) = U_{Cm} \sin(\omega t - 90^\circ) = I_m \cdot x_C \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$u_L(t) = U_{Lm} \sin(\omega t + 90^\circ) = I_m \cdot x_L \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

fazori padova napona i struje izvora:

$$\dot{U}_{Cm} = U_{Cm} \angle -90^\circ$$

$$\dot{U}_{Rm} = U_{Rm} \angle 0^\circ$$

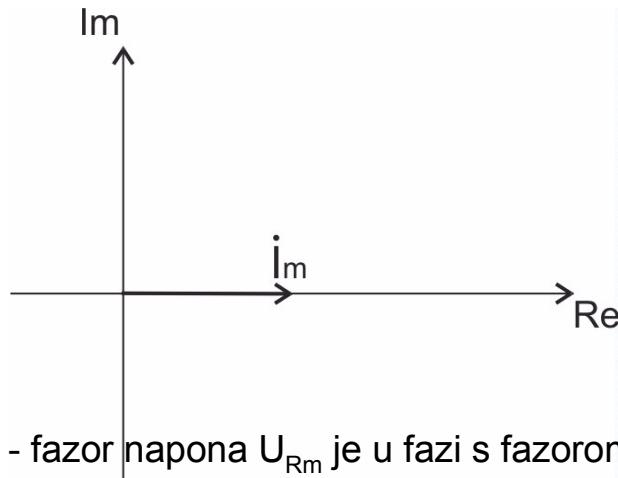
$$\dot{U}_{Lm} = U_{Lm} \angle +90^\circ$$

$$\dot{I}_m = I_m \angle 0^\circ$$

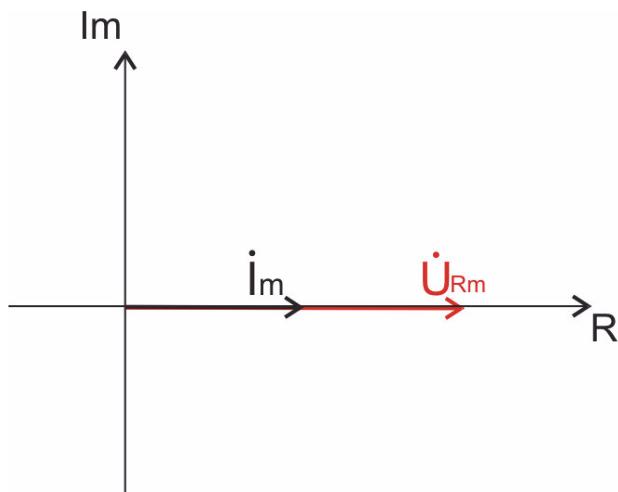
$$\dot{U}_m = ?$$

Fazorski dijagram naponi i struja:

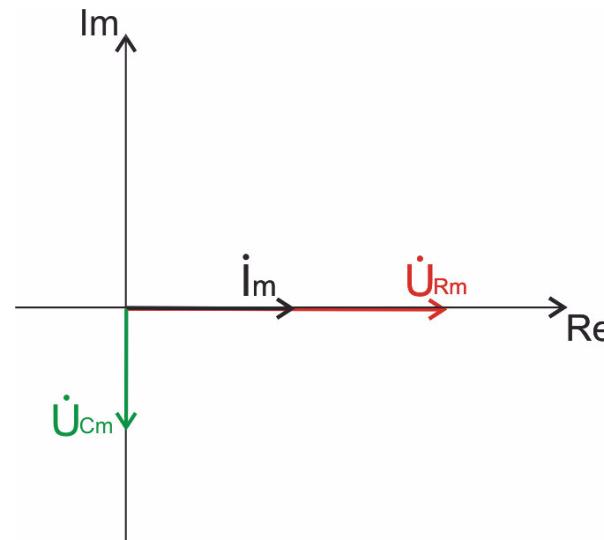
-struja je referentna veličina za sve elemente mreže
pa prvo ucrtavamo fazor struje:



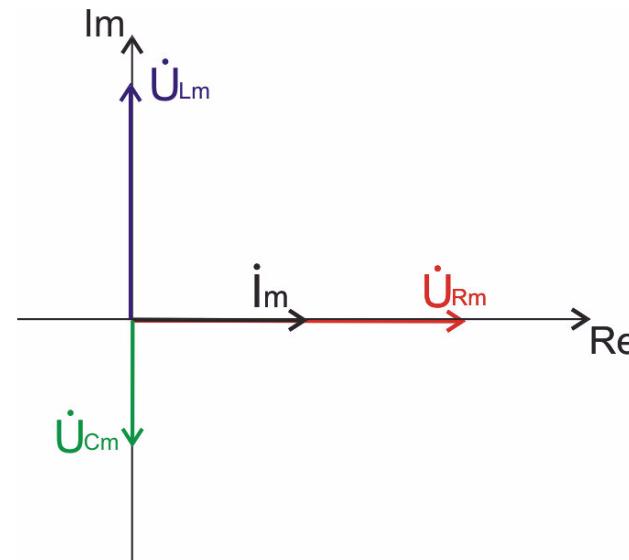
- fazor naponi \dot{U}_{Rm} je u fazi s fazorom struje:



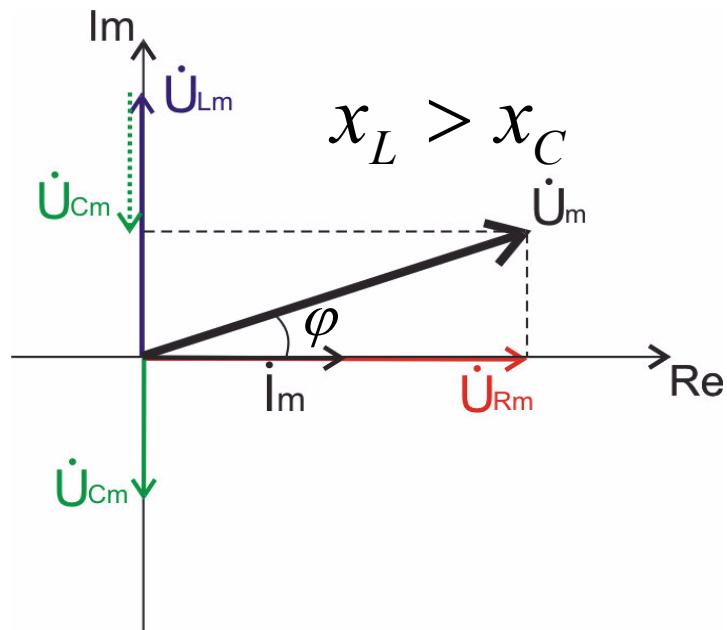
- fazor naponi \dot{U}_{Cm} kasni za fazorom struje za 90° :



- fazor naponi \dot{U}_{Lm} prethodi fazoru struje za 90° :



fazor napona izvora U_m dobije se geometrijskim zbrajanjem U_{cm} , U_{Lm} i U_{Rm} :



$$U_m = \sqrt{(I_m \cdot R)^2 + (I_m \cdot x_L - I_m \cdot x_C)^2}$$

$$U_m = \sqrt{U_{Rm}^2 + (U_{Lm} - U_{Cm})^2}$$

$$U_m = \sqrt{(I_m \cdot R)^2 + (I_m \cdot x_L - I_m \cdot x_C)^2}$$

$$U_m = \sqrt{I_m^2 \cdot R^2 + I_m^2 (x_L - x_C)^2}$$

$$U_m = I_m \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}} = \frac{U_m}{Z}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_{Lm} - U_{Cm}}{U_{Rm}} = \frac{x_L - x_C}{R} \Rightarrow \varphi = \operatorname{artg} \frac{x_L - x_C}{R}$$

ukupni ili rezultanti
prividni otpor ili impedancija

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{artg} \frac{x_L - x_C}{R}$$

Serijski RLC spoj može imati tri sljedeća karaktera:

- | | | |
|----------------|---------------|--|
| 1) $x_L > x_C$ | $\varphi > 0$ | induktivni karakter (napon prethodi struji za kut φ) |
| 2) $x_L < x_C$ | $\varphi < 0$ | kapacitvni karakter (napon kasni za strujom za kut φ) |
| 3) $x_L = x_C$ | $\varphi = 0$ | radni karakter (nastupila je serijska ili napomska rezonancija – napon i struja su u fazi) |

Radna snaga P se troši samo na radnom trošilu:

$$P = I^2 \cdot R = \frac{U_R^2}{R} = U_R \cdot I = U \cdot I \cdot \cos \varphi (W)$$

Jalova snaga:

$$Q = |Q_L - Q_C| = U \cdot I \cdot \sin \varphi (Var)$$

Prividna snaga:

$$S = U \cdot I = I^2 \cdot Z = \frac{U^2}{Z} (VA)$$

Primjer. Za serijski RLC strujni krug napisati vrijednost napona izvora u vremenskom obliku.

$$U_R = 8V$$

$$U_L = 198V$$

$$\underline{U_C = 192V}$$

$$U = ?$$

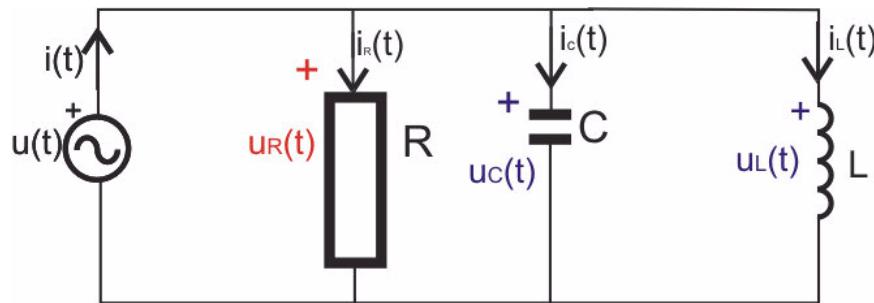
$$U_m = ? \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_m = U\sqrt{2} = 10\sqrt{2} = 14,1A$$

$$tg \varphi = \frac{U_{Lm} - U_{Cm}}{U_{Rm}} \Rightarrow \varphi = artg \frac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot (U_L - U_C)}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot U_R} = artg \frac{198 - 192}{8} = 36,9^0$$

induktivni karakter

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi) = 14,1 \sin(\omega t + 36,9^0)$$

18.4. Paralelni spoj R, L i C



Zadano:

$$u(t) = U_m \cdot \sin \omega t$$

$$i(t) = ?$$

paralelni spoj:

$$u(t) = u_R(t) = u_C(t) = u_L(t)$$

$$i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$$

$$i_R(t) = I_{Rm} \sin \omega t = \frac{U_m}{R} \cdot \sin \omega t$$

$$i_C(t) = I_{Cm} \sin(\omega t + 90^\circ) = \frac{U_m}{x_C} \cdot \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$i_L(t) = I_{Lm} \sin(\omega t - 90^\circ) = \frac{U_m}{x_L} \cdot \sin(\omega t - 90^\circ)$$

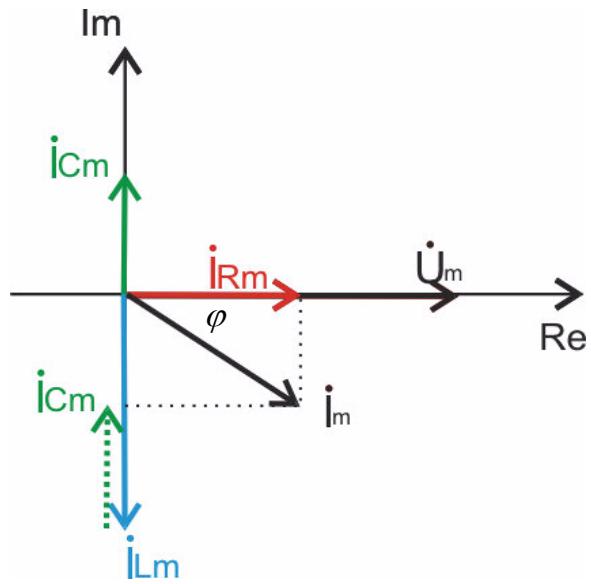
fazori padova napona i struja grana:

$$\dot{U}_m = U_m \angle 0^\circ \quad \dot{I}_{Lm} = I_{Lm} \angle -90^\circ$$

$$\dot{I}_{Cm} = I_{Cm} \angle +90^\circ \quad \dot{I}_{Rm} = I_{Rm} \angle 0^\circ$$

$$\dot{I}_m = ?$$

fazor struje izvora I_m dobije se geometrijskim zbrajanjem I_{cm} , I_{Lm} i I_{Rm} :



$$I_m = \sqrt{I_{Rm}^2 + (I_{Lm} - I_{Cm})^2}$$

$$I_m = \sqrt{\left(\frac{U_m}{R}\right)^2 + \left(\frac{U_m}{x_L} - \frac{U_m}{x_C}\right)^2}$$

$$I_m = U_m \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_L} - \frac{1}{x_C}\right)^2}$$

$$\frac{I_m}{U_m} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_L} - \frac{1}{x_C}\right)^2}$$

$$Y_m = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{x_L} - \frac{1}{x_C}\right)^2}$$

$$Y_m = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$$

ukupna ili rezultanta
admitancija

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{Lm} - I_{Cm}}{I_{Rm}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{artg} \frac{I_{Lm} - I_{Cm}}{I_{Rm}}$$

Primjer. Odrediti izraz za trenutnu vrijednost napon na kondenzatoru $C_1(t)$ za zadani električni krug. Zadano:

$$u_1(t) = 20 \sin(314t - \frac{\pi}{2}), V$$

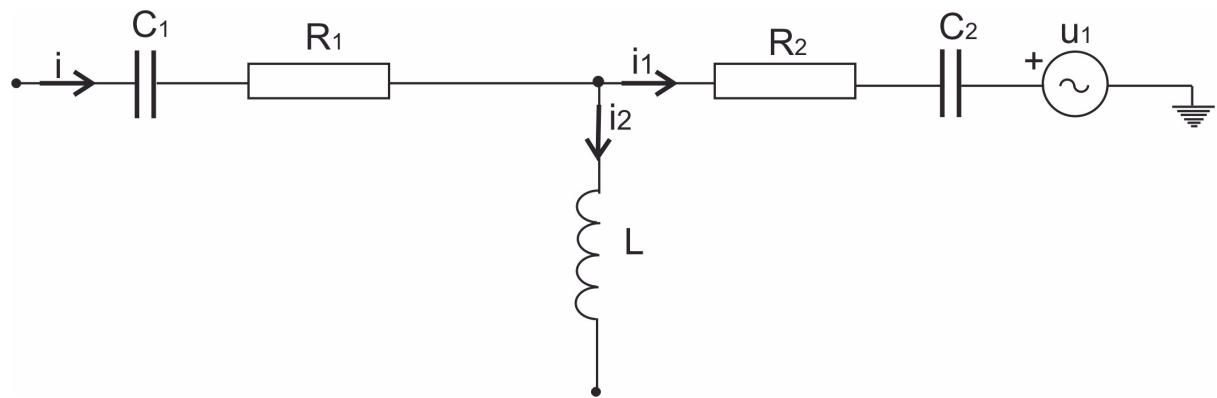
$$i_1(t) = 6 \sin(314t + \frac{\pi}{6}), A$$

$$i_2(t) = 5 \sin(314t - \frac{\pi}{3}), A$$

$$R_1 = 2\Omega, R_2 = 5\Omega$$

$$C_1 = 1mF, C_2 = 100\mu F$$

$$L = 8mH$$



Napon na kondenzatoru C_1 :

$$\dot{U}_{c1} = \dot{I} \cdot x_{c1} \quad x_{c1} = \frac{1}{\omega \cdot C_1} = \frac{1}{314 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 3,2\Omega$$

$$\dot{x}_{c1} = -j x_{c1} = 3,2 \angle -90^0$$

$$i_1(t) = 6 \sin(314t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \dot{I}_1 = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle 30^0$$

$$i_2(t) = 5 \sin(314t - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \dot{I}_2 = \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -60^0$$

$$\text{KZS: } \dot{\vec{I}} = \dot{\vec{I}}_1 + \dot{\vec{I}}_2$$

$$\dot{\vec{I}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \angle 30^\circ + \frac{5}{\sqrt{2}} \angle -60^\circ$$

$$\dot{\vec{I}} = \frac{6}{\sqrt{2}} (\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ) + \frac{5}{\sqrt{2}} (\cos(-60^\circ) + j \sin(-60^\circ))$$

$$\dot{\vec{I}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) + \frac{5}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} + j \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right)$$

$$\dot{\vec{I}} = 3,7 + 2,1j + 1,8 - 3,1j = 5,5 - 1j$$

$$I = \sqrt{5,5^2 + (-1)^2} = 5,6A \quad \varphi = \arctg \frac{-1}{5,5} = -10,3^\circ \Rightarrow \dot{\vec{I}} = 5,6 \angle -10,3^\circ A$$

$$\dot{\vec{U}}_{c1} = \dot{\vec{I}} \cdot \dot{\vec{x}}_{c1} = 5,6 \angle -10,3^\circ \cdot 3,2 \angle -90^\circ = 17,9 \angle -100,3^\circ$$

27/30

$$u_{c1}(t) = 17,9 \cdot \sqrt{2} \sin(314 - 100,3^\circ), V$$

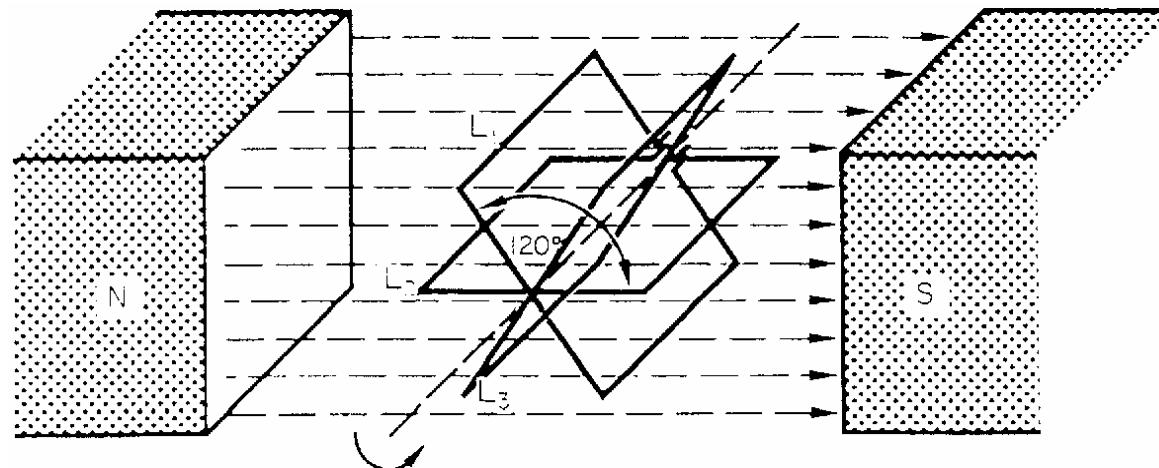
55

19. Trofazni sustavi

Stvaranje trofaznog sustava: tri vodljive petlje rotiraju konstantnom kutnom brzinom oko iste osi u homogenom magnetskom polju.

Petlje su geometrijski razmagnute za 120° i uvijek zadržavaju isti razmak.

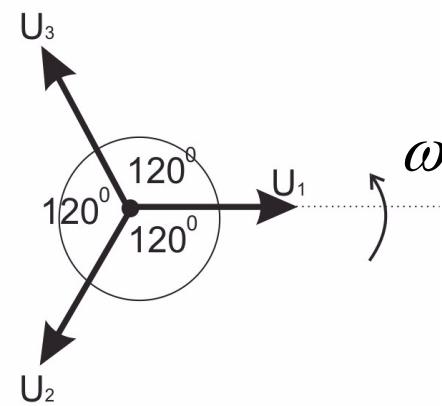
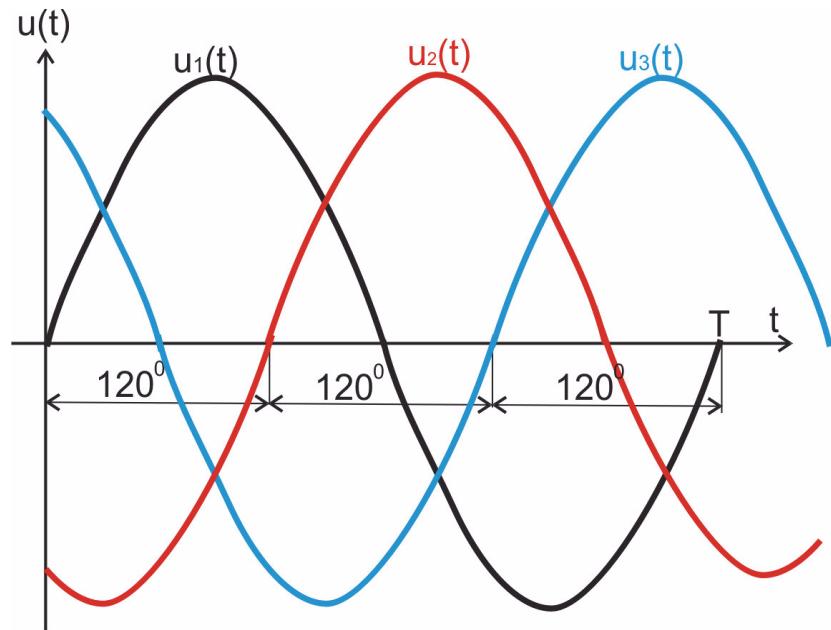
Tako razmagnute petlje tijekom jednog perioda induciraju napone fazno pomaknute za 120° jedan u odnosu na drugog.



$$u_1(t) = U_m \sin \omega t$$

$$u_2(t) = U_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

$$u_3(t) = U_m \sin(\omega t - 240^\circ) = U_m \sin(\omega t + 120^\circ)$$



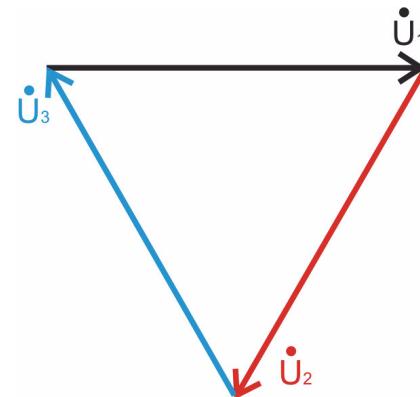
Zbroj napona izvora je nula:

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$$

$$\dot{U}_1 = U_1 \angle 0^\circ$$

$$\dot{U}_2 = U_2 \angle -120^\circ$$

$$\dot{U}_2 = U_2 \angle -240^\circ = U_2 \angle +120^\circ$$



Prednost 3f sustava u odnosu na 1f sustav:

ekonomičniji prijenos energije: za prijenos iste energije 3f sustav koristi manji broj vodiča (4 umjesto 6, u nekim slučajevima i 3 vodiča kada je spoj generatora u trokut)

jedan 3f generator jeftiniji je od tri 1f generatora

pomoću 3f sustava dobija se okretno magnetsko polje koje se koristi za pogon motora

3f uređaji su jednostavniji, robusniji i ekonomičniji

Trenutna snaga simetričnog trifaznog trošila je konstantna bez obzira na vrstu spoja (trokut ili zvijezda)

Trifazni sustavi izvora i trošila mogu biti spojeni u dva osnovna spoja:

- **spoj u zvijezdu**



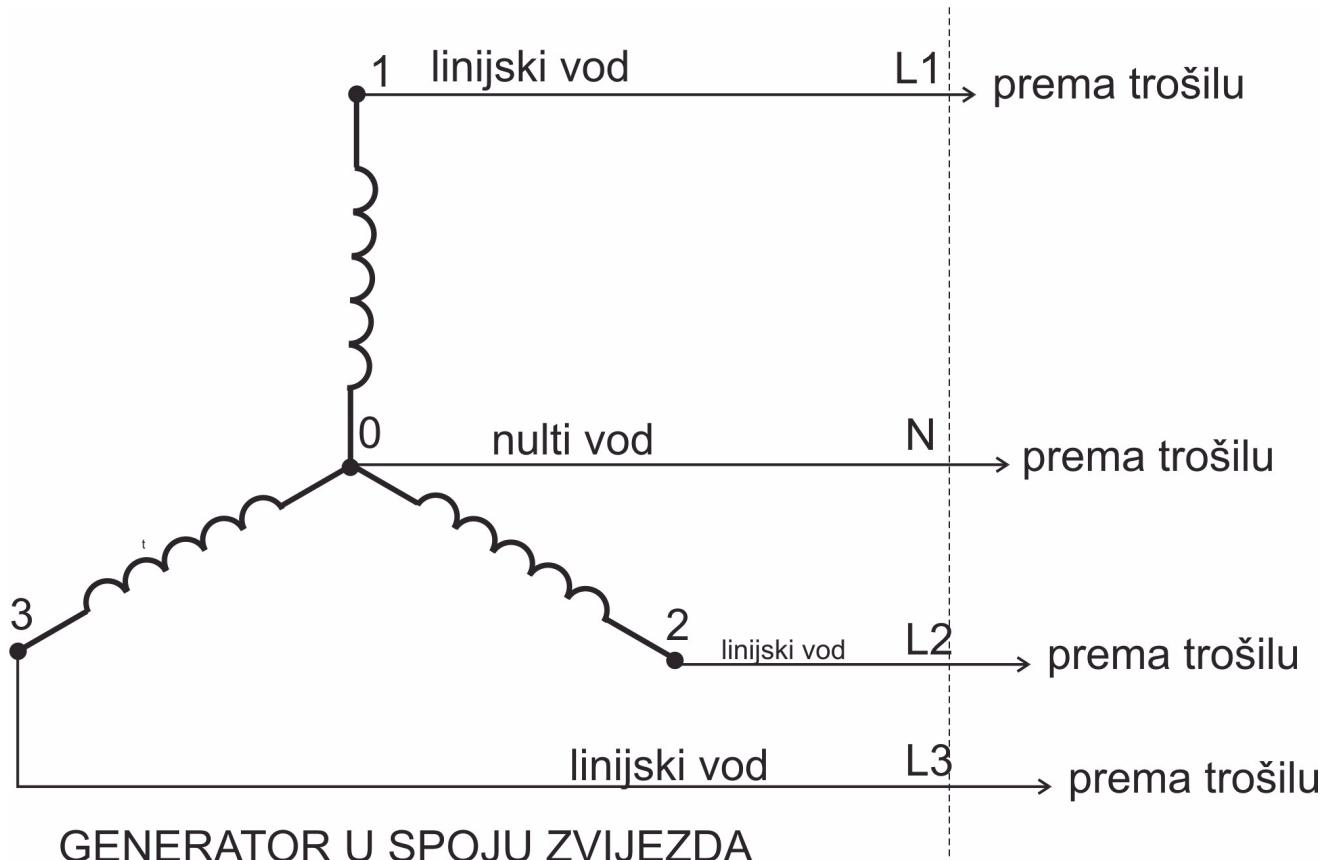
- **spoj u trokut**



19.1. Trofazni spoj zvijezda

Trofazni spoj: krajevi svakog namotaja (generatora ili trošila) međusobno se spoje u zajedničku točku koja se naziva **nultočka (nula)** ili **zvjezdiste (0)**.

Vodovi koji idu od početka namotaja generatora prema trošilu nazivaju se **linijskim**, a vod izведен iz nulte točke je **nulti vod**.



Fazni napon je napon između linijskog voda i nultog voda, jednaki su po iznosu i fazno pomaknuti za 120^0 :

$$U_{1f} = U_1$$

$$U_{2f} = U_2$$

$$U_{3f} = U_3$$

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

spoj u zvijezdu je tako zvan **serijski protuspoj** u kojem su vektori napona tako usmjereni da njihova suma počinje i završava u istoj točci.

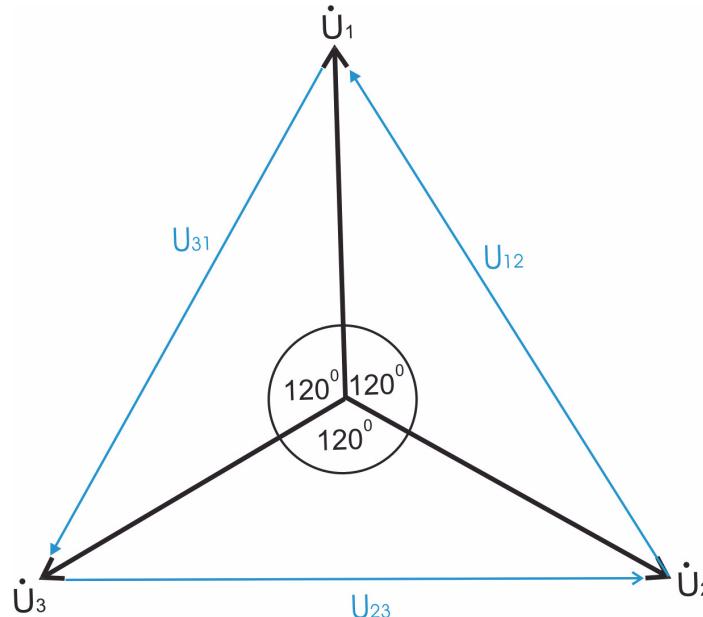
Linijski napon je napon između bilo koja dva linijskog voda:

vektorski dijagram faznih i linijskih napona:

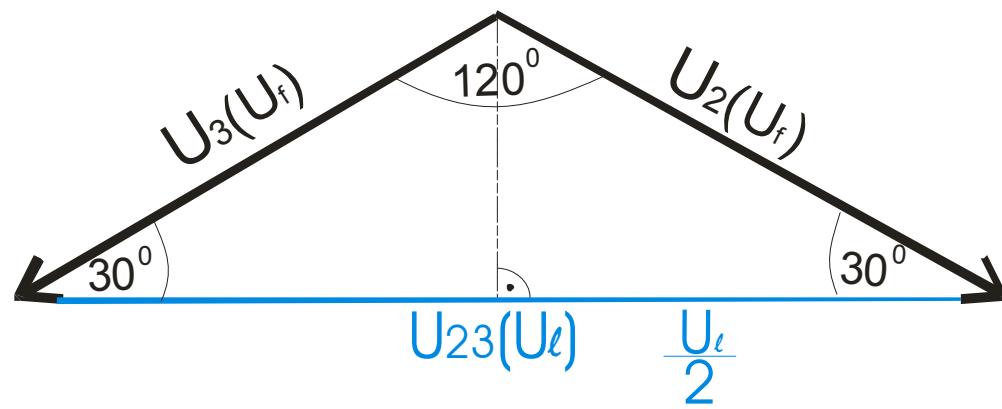
$$U_{L1,L2} = U_{12}$$

$$U_{L2,L3} = U_{23}$$

$$U_{L3,L1} = U_{31}$$



Odnos efektivnih vrijednosti linijskih i faznih napona:



$$I_l = I_f$$

$$\boxed{U_l = \sqrt{3} \cdot U_f}$$

$$I_l = I_f$$

$$U_l = 400V \Rightarrow U_f = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230V$$

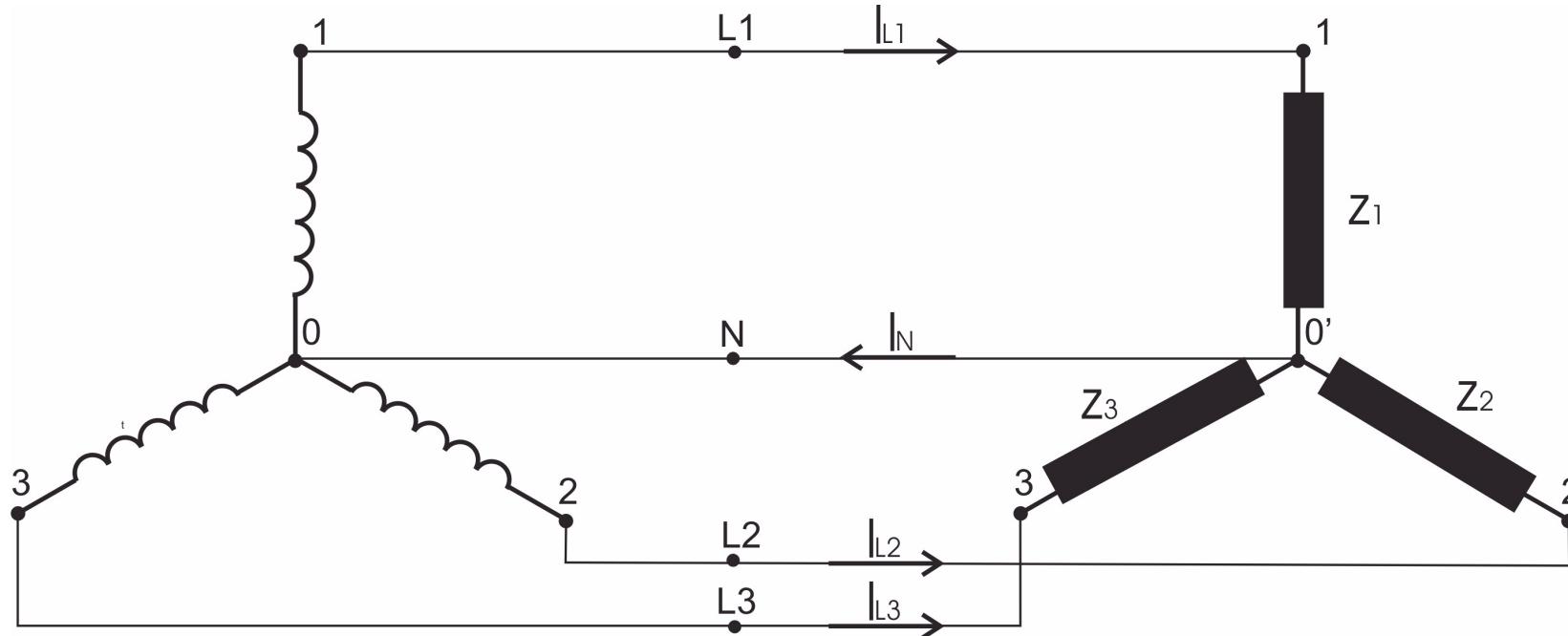
$$\cos 30^\circ = \frac{U_l}{U_f}$$

$$\frac{U_l}{2} = U_f \cdot \cos 30^\circ$$

$$U_l = 2 \cdot U_f \cdot \cos 30^\circ$$

$$U_l = \cancel{2} \cdot U_f \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3} \cdot U_f$$

Spoj generatora i trošila se ostvaruje na taj način da se počeci namotaja generatora spoje s početcima triju trošila.



GENERATOR U SPOJU ZVIJEZDA

TROŠILO USPOJU ZVIJEZDA

Pošto su zvjezdišta 0 i 0' međusobno spojena nalaze se na istom potencijalu, tako da na svakoj fazi trošila djeluje odgovarajući napon faze generatora.

Kaže se da je sustav napona na trošilu ***SIMETRIČNI TROFAZNI SUSTAV NAPONA GENERATORA U_1, U_2, U_3*** .

Najvažniji razlog postojanja nul – voda je u tome što sva fazna trošila rade na napon za kojeg su predviđeni.

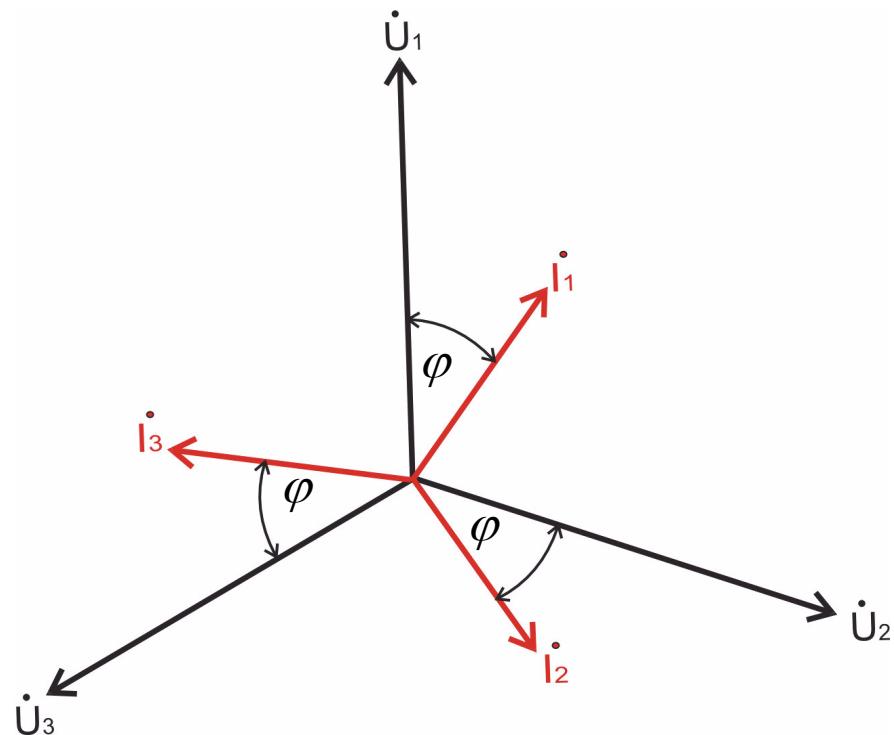
Trošilo spojem u zvijezdu može biti simetrično i nesimetrično:

SIMETRIČNO TROŠILO: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$

Sve faze su ravnomjerno opterećene, fazne struje će imati jednake iznose i isti kut u odnosu na napon:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_f}{Z} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi = \arctg \frac{x_L - x_C}{R}$$

(pretpostavka da impedanciju čini serijski RLC spoj)



Struja kroz nul - vodič:

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Ukupna radna, jalova i prividna snaga kod simetričnog trošila u spoju zvijezda (SIMETRIČNO TROŠILO):

$$P_1 = P_2 = P_3$$

$$P_{uk} = 3P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi = 3 \cdot \frac{U_l}{\sqrt{3}} \cdot I_f \cdot \cos \varphi$$

$$P_{uk} = \cancel{3} \cdot \cancel{\frac{U_l}{\sqrt{3}}} \cdot \cancel{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} \cdot I_f \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi$$

$$\underline{P_{uk} = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi}$$

$$Q_{uk} = 3Q = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \sin \varphi$$

$$S_{uk} = 3S = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l$$

NESIMETRIČNO TROŠILO: $Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$

Faze generatora su neravnomjerno opterećene, fazne struje su različitih iznosa kao kut u odnosu na napone:

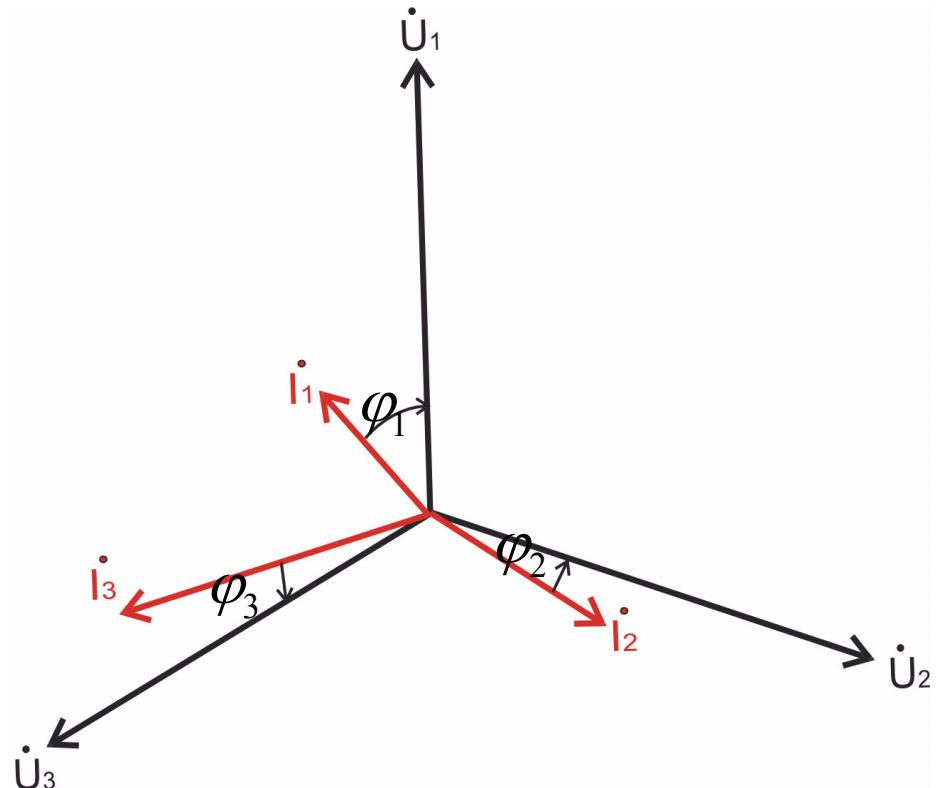
$$I_1 = \frac{U_f}{Z_1} \quad \varphi_1 = \arctg \frac{x_{L1} - x_{C1}}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U_f}{Z_2} \quad \varphi_2 = \arctg \frac{x_{L2} - x_{C2}}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U_f}{Z_3} \quad \varphi_3 = \arctg \frac{x_{L3} - x_{C3}}{R_3}$$

Struja kroz nul - vodič:

$$I_N = I_1 + I_2 + I_3 \neq 0$$



Ukupna radna, jalova i prividna snaga kod nesimetričnog trošila u spoju zvijezda:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$S_1 = \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot I_1$$

$$Q_1 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1$$

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2$$

$$S_2 = \sqrt{3} \cdot U_2 \cdot I_2$$

$$Q_2 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2$$

$$P_3 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3$$

$$S_3 = \sqrt{3} \cdot U_3 \cdot I_3$$

$$Q_3 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_3 \cdot \sin \varphi_3$$

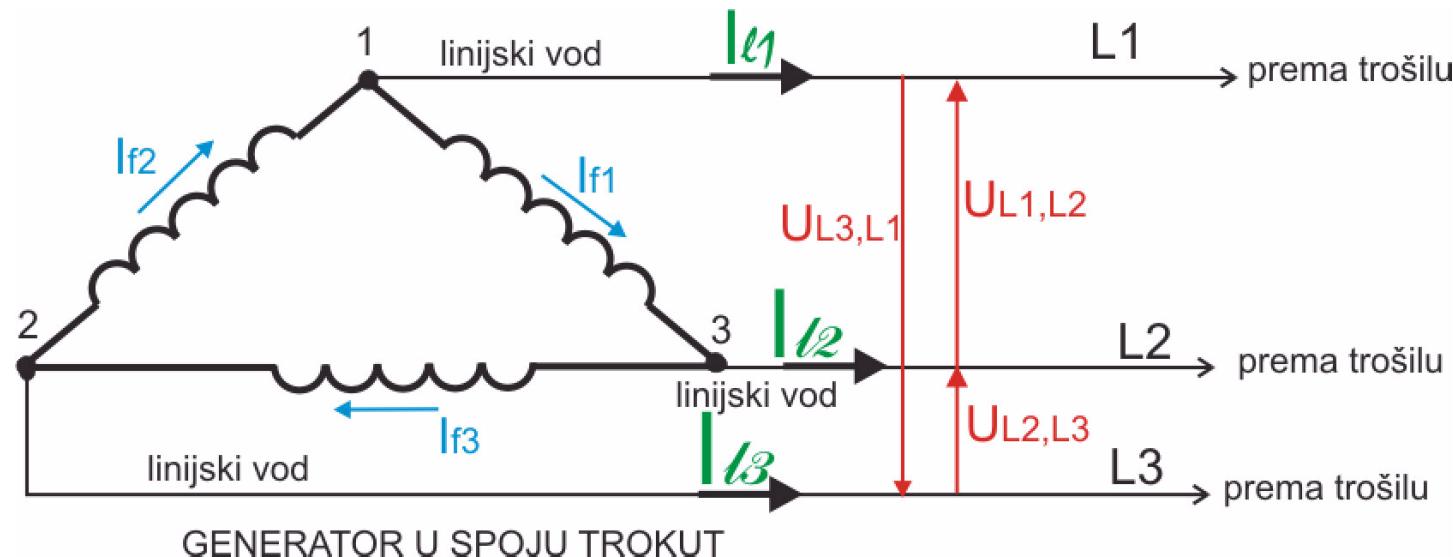
$$P_{uk} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$S_{uk} = S_1 + S_2 + S_3$$

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

19.2. Trofazni spoj trokut

Trofazni spoj u trokut nastaje tako da se krajevi namotaja (generatora ili trošila) povezuju na način da tvore električnu shemu u obliku trokuta.



U trokutnom spoju nema nul - vodiča i prijenos energije vrši se samo trofaznom linijom.⁶⁶

Strujne i naponske prilike u trokutnom spoju:

U uvjetima praznog hoda (bez trošila), izgleda kao da su namotaji kratko spojeni.

Kratkog spoja nema jer je rezultanta napona faza generatora jednaka nuli.

To se postiže spajanjem svitaka u zatvoreni strujni krug ispravnim serijskim spojem: početak namota jedne faze veže se sa završetkom namota susjedne faze.

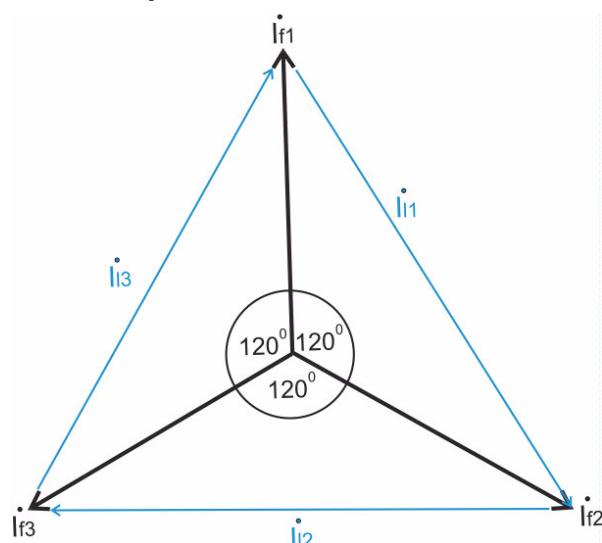
Pri zbrajanju referentni smjerovi svih faznih napona su istog smjera pa je ukupni napon:

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

Na krajevima jednog svitka priključena su dva linijska voda, linijski napon će biti jednak faznom:

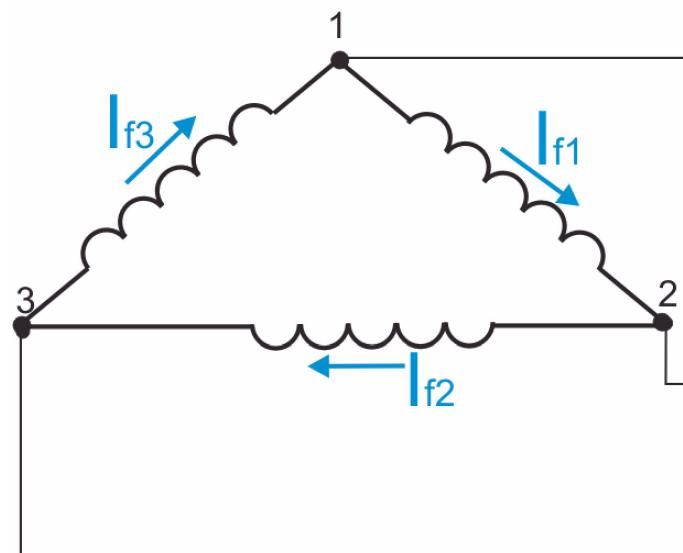
$$U_l = U_f$$

Odnos fazne i linijske struje dobiva se temeljem istog razmatranja kao kod spoja zvijezda između napona:

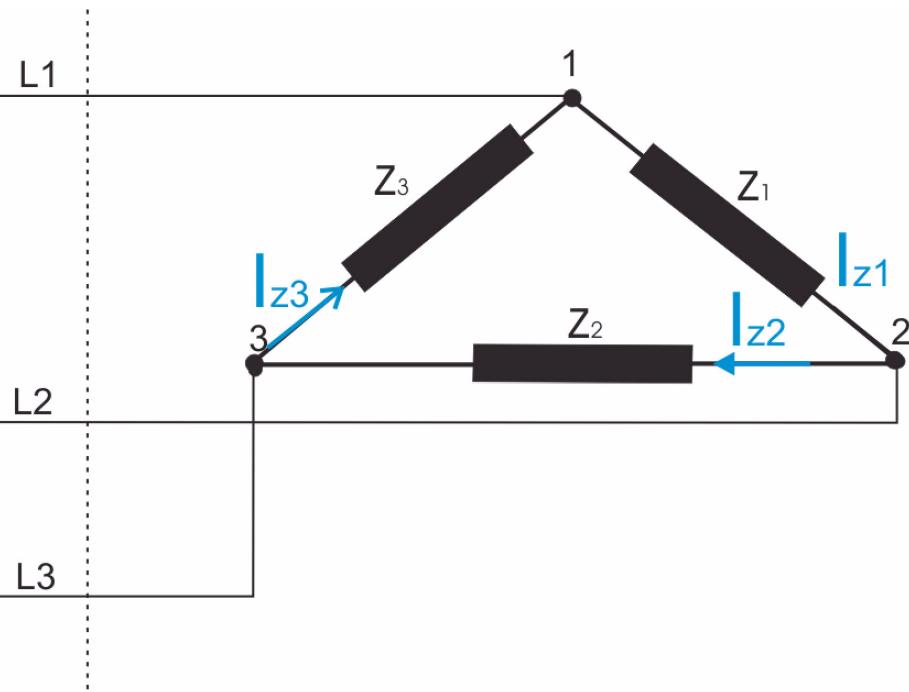


$$I_l = \sqrt{3} \cdot I_f$$

Spoj generatora i trošila :



GENERATOR U SPOJU TROKUT



TROŠILO U SPOJU TROKUT

SIMETRIČNO TROŠILO:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z$$

$$I_{Z1} = I_{Z2} = I_{Z3} = \frac{U_f}{Z} \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi = \arctg \frac{x_L - x_C}{R}$$

NESIMETRIČNO TROŠILO:

$$Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$$

$$I_{Z1} = \frac{U_f}{Z_1}; I_{Z2} = \frac{U_f}{Z_2}; I_{Z3} = \frac{U_f}{Z_3}$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{x_{L1} - x_{C1}}{R_1}$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{x_{L2} - x_{C2}}{R_2}$$

$$\varphi_3 = \arctg \frac{x_{L3} - x_{C3}}{R_3}$$

Ukupna radna, jalova i prividna snaga kod simetričnog trošila u spoju TROKUT:

$$P_1 = P_2 = P_3$$

$$P_{uk} = 3P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos \varphi = 3 \cdot U_l \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cdot \cos \varphi$$

$$P_{uk} = 3 \cdot \frac{I_l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot U_l \cdot \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi$$

$$\underline{P_{uk} = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \cos \varphi}$$

$$Q_{uk} = 3Q = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l \cdot \sin \varphi$$

$$S_{uk} = 3S = 3 \cdot U_f \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_l$$

Ukupna radna, jalova i prividna snaga kod nesimetričnog trošila u spoju TROKUT:

$$P_1 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1$$

$$P_2 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2$$

$$P_3 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_3 \cdot \cos \varphi_3$$

$$P_{uk} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$S_1 = \sqrt{3} \cdot U_1 \cdot I_1$$

$$S_2 = \sqrt{3} \cdot U_2 \cdot I_2$$

$$S_3 = \sqrt{3} \cdot U_3 \cdot I_3$$

$$S_{uk} = S_1 + S_2 + S_3$$

$$Q_1 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1$$

$$Q_2 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2$$

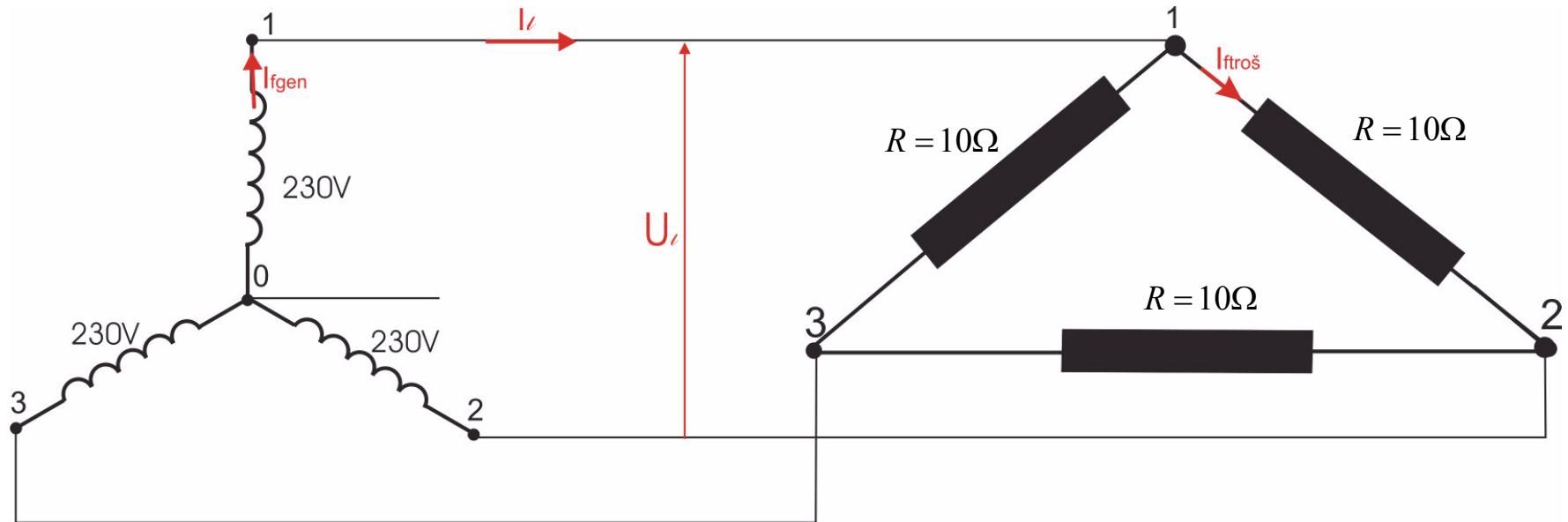
$$Q_3 = \sqrt{3} \cdot U_l \cdot I_3 \cdot \sin \varphi_3$$

$$Q_{uk} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Izrazi za snagu ostaju isti bez obzira da li je u pitanju spoj zvijezda ili trokut

MJŠ ANI simetrični SPOJ:

- generator spoj zvijezda, trošilo spoj trokut



Za spoj zvijezda linijski napon:

$$U_l = \sqrt{3} \cdot U_{fgen} = \sqrt{3} \cdot 230 = 398V$$

linijska struja:

$$I_l = \sqrt{3} \cdot I_f = \sqrt{3} \cdot 39,8 = 68,85A$$

Struja faze trošila:

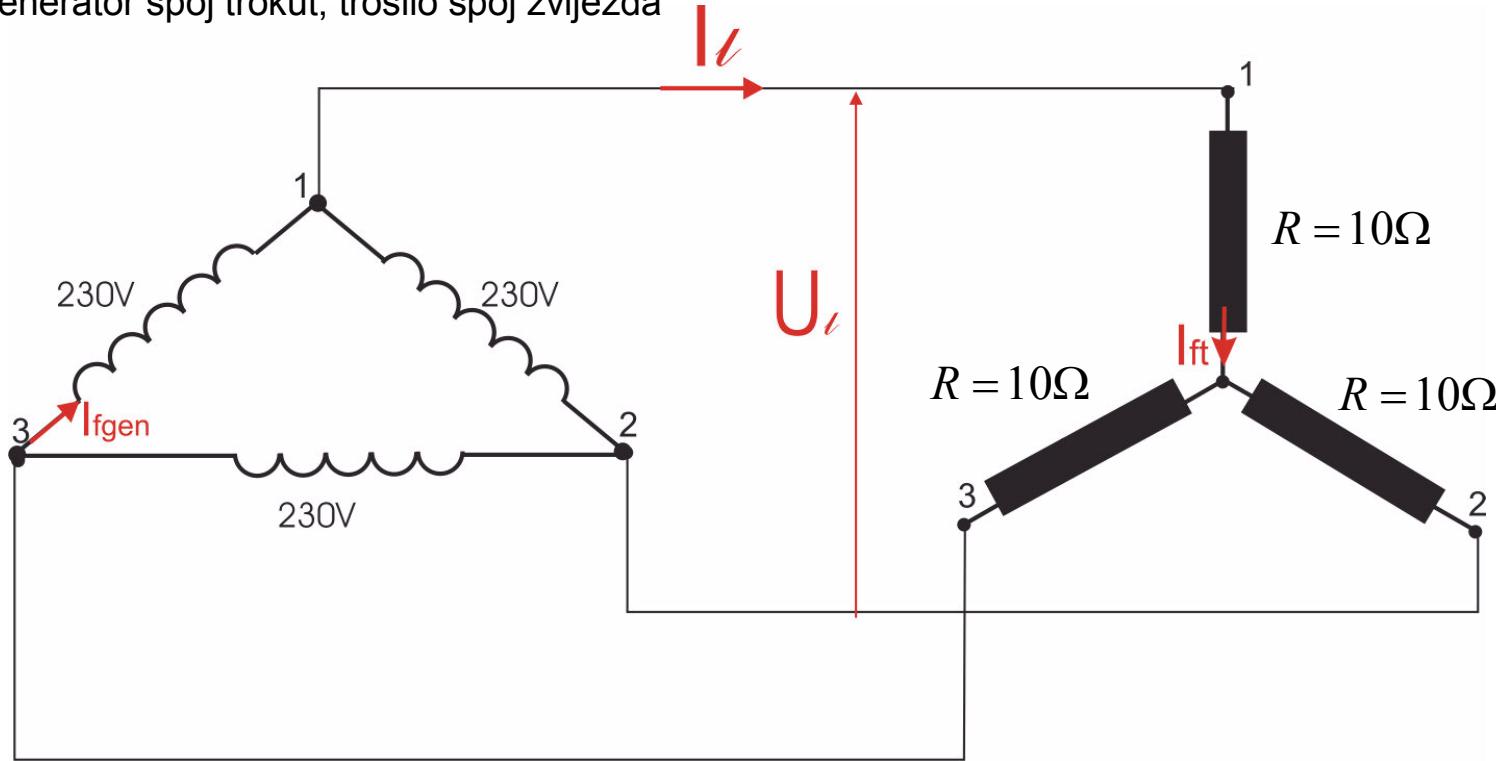
$$I_{f\text{troš}} = \frac{U_{f\text{troš}}}{R} = \frac{U_l}{R} = \frac{398}{10} = 39,8A$$

Struja faze generatora:

$$I_{f\text{gen}} = I_l = 68,85A$$

MJEŠANI simetrični SPOJ:

- generator spoj trokut, trošilo spoj zvijezda



Za spoj trokut linijski napon jednak je faznom generatora:

$$U_l = U_{fgen} = 230V$$

$$U_l = \sqrt{3} \cdot U_{ft} \Rightarrow U_{ft} = \frac{U_l}{\sqrt{3}} = \frac{230}{\sqrt{3}} = 133V$$

fazna struja trošila:

$$I_{ft} = \frac{U_{ft}}{R} = \frac{133}{10} = 13,3A$$

Jakost linijske struje:

$$I_l = I_{ft} = 13,3A$$

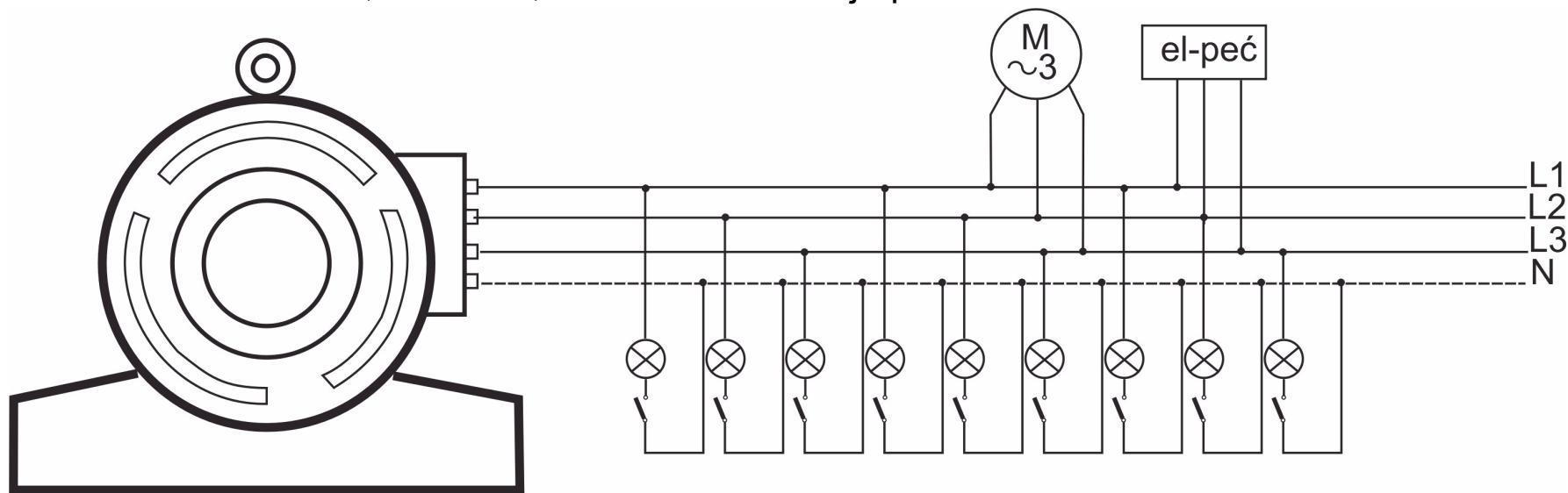
Struja faze generatora

$$I_{fg} = \frac{I_l}{\sqrt{3}} = \frac{13,3}{\sqrt{3}} = 7,7A$$

Jednofazna izmjenična trošila čine većinu trošila široke potrošnje (perilica rublja, hladnjak, klima - uređaj, perilica suđa, pećnica...) te se uključuju u rad prema potrebama potrošača ne vodeći računa o simetričnosti opterećenja.

Da bi se u pogonu donekle postigla što manja nesimetrija, već kod instaliranja se pokušava razdijeliti ukupni jednofazni teret što jednoličnije na sve tri faze generatora.

To se postiže tako da se jednofazna trošila priključuju na četverovodnu trofaznu mrežu naizmjence redom na faze L₁ L₂ L₃, L₁ L₂ L₃, L₁ L₂ L₃ ... kako je pokazano na slici.



Priklučak jednofaznih i trofaznih trošila na četverolinijsku trofaznu mrežu

Simetrična trofazna trošila priključujemo smo na tri fazna vodiča bez priključka na nulvod, a jednofazne priključujemo preko faznog i nulvoda.

20. Štetni utjecaj električne energije i osnovne metode zaštite od previsokog napona dodira:

20.1. Štetni utjecaj električne energije

Električna energija uslijed nestručnog i neodgovornog rukovanja može prouzročiti niz štetnih utjecaja na ljude, životinje i materijalna dobra.

Moguće štetne posljedice učinka električne energije:

- **zbog toplinskog učinka** mogu nastati požari zbog preopterećenja vodiča, pregrijanih uređaja, kratkih spojeva labavih kontakata.
- **zbog kemijskog učinka** dolazi do razlaganja tekućina, stvaranja eksplozivnih ili otrovnih plinova, korozija...
- **zbog magnetskog učinka** nastaju jake sile zbog visokih struja kratkog spoja i generiraju po zdravlje štetna polja
- **zbog svjetlosnog učinka** od svjetlosnog luka nastalog zbog kratkog spoja, zavarivanja mogu nastati oštećenja očiju.
- **fiziološki učinak** je utjecaj na ljudsko tijelo koje se ogledava u grčenju mišića, blokada disanja, rast krvnog tlaka, opeklane, živčane smetnje, treptanje i zastoj srca.

Elektroenergetski distributer je dužan osigurati potrošaču pouzdanu opskrbu električnom energijom odgovarajuće kvalitete (frekvencija, napon i oblik napona unutar dopuštenih granica odstupanja) potrošač mora pouzdano koristiti sva trošila i pri tom biti siguran od dodira vodljivih dijelova uređaja pod naponom.

Prema IEC (International Electrotechnical Commission) i EN (Europska Norma) normama napon koji nije štetan za ljudski život je **$u < 50 \text{ VAC}$, $U < 120 \text{ VDC}$** , pa se prema tim naponima provodi i odgovarajuća zaštita od izravnog i neizravnog dodira dijelova pod naponom.

4.8.2. Zaštitne mjere od električnog udara u električnim instalacijama

- 1) Istovremena zaštita od izravnog i neizravnog dodira
- 2) Zaštita od električnog udara u pravilnom radu
- 3) Zaštita od električnog udara u slučaju kvara

1) Istovremena zaštita od izravnog i neizravnog dodira

- a) zaštita sigurnosnim malim naponom (SELV – Safty Extra Low Voltage) – napon ispod 50VAC ili 120 VDC
- b) zaštita malim naponom (PELV – Protective Extra Low Voltage) – napon ispod 50VAC ili 120 VDC

osigurava da najveći napon strujnog kruga ne prelazi efektivnu vrijednost 50V u normalnom pogonu niti u slučaju kvara pri čemu izvor može biti: sigurnosni izolacijski transformator, elektrokemijski izvor (akumulator, baterija) ili drugi izvor npr. diesel – generator.

b) zaštite ograničavanjem ustaljene struje i naboja (izbijanje)

postiže se izvorom s ograničenom strujom i zaštitnom impedancijom(prag osjetljivosti 0,5mA AC ili 2mA DC za ustaljenu dodirnu struju koja teče između istodobno dodirljivih vodljivih dijelova kroz omski otpor od 2k Ω i za naboje između istodobno dodirljivih dijelova 0,5 μC – prag bola 3,5 mA AC/10 mA DC odnosno 50 μC)

2) Zaštita od električnog udara u pravilnom radu

a) Zaštita aktivnih (pod naponom) dijelova izoliranjem

Izvodi se na svim dijelovima pod naponom, kao osnovna izolacija, radi sprječavanja dodira s opasnim aktivnim dijelovima. Ako se kao osnovna izolacija koristi zrak, dodir s aktivnim dijelovima sprječava se pregradama ili kućištima, zaprekama ili smještajem izvan dohvata ruke.

b) Zaštite pregradama i kućištima

Mehanička je zaštita električnih uređaja i mora spriječiti pristup opasnim aktivnim dijelovima osiguravajući zaštitu od električnog *udara*.

c) Zaštite zaprekama

d) Zaštite smještajem izvan dohvata ruke

e) Dodatne zaštite strujnom zaštitnom sklopkom (RCD – Residual Current Device)

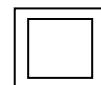
RCD sklopka je električni uređaj koji isključuje, uslijed kvara, električno trošilo s električne mreže i tako štiti od električnog udara.(npr.40/0,03A)

3) Zaštita od električnog udara u slučaju kvara

- a) Zaštite automatskim isklopom struje napajanja u TN, TT i IT sustavima električnih mreža uz uzemljenje i izjednačavanje potencijala.
- b) Zaštite uporabom opreme razreda II ili istovrijedne izolacije.

Dodatna izolacija je mjera zaštite u slučaju kvara i čini zajedno s osnovnom izolacijom dvostruku izolaciju. Istovrijedna dvostrukoj je pojačana izolacija tj. potpuna izolacija električnog uređaja (kućište električnog uređaja napravljeno je od izolacijskog materijala – oprema razreda II).

Simbol na uređajima je



- c) Zaštite nevodljivim prostorom

Zaštita nevodljivim prostorom postiže se izolacijskim podom, zidovima i razmakom između dostupnih vodljivih dijelova i stranih vodljivih dijelova.

- d) Zaštite električnim odjeljivanjem

Električno odjeljivanje je galvansko odvajanje trošila od opskrbne mreže pomoću transformatora za odjeljivanje

20.2. Zaštite automatskim isklopom struje napajanja u TN, TT i IT sustavima električnih mreža uz uzemljenje i izjednā avanje potencijala

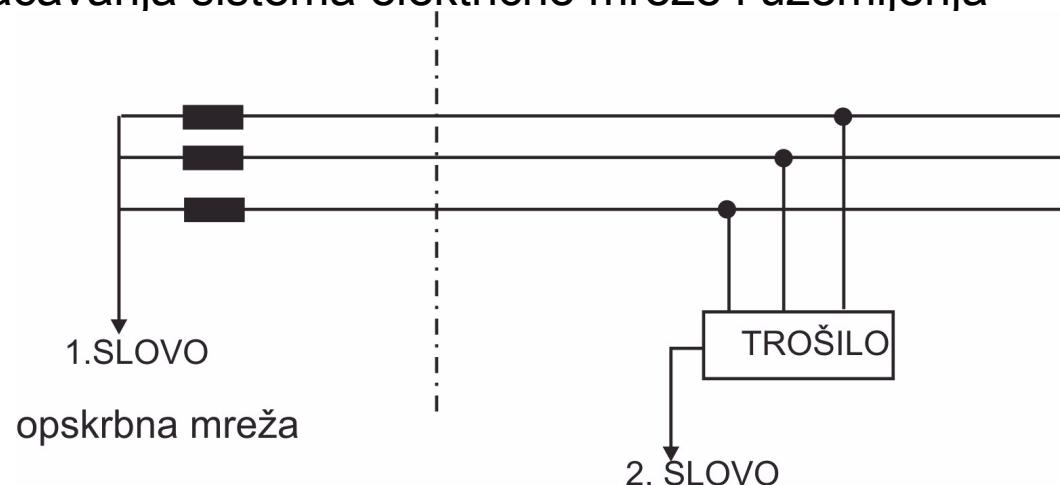
Zaštitni vodič - povezuje vodljive dijelove kućišta i označava se **zeleno – žutom** bojom.

Ako je zaštitni vodič poveza s nul-točkom transformatora ne kao dio strujnog kruga već kao dio zaštitnog sistema, što znači da nije protjecan pogonskom strujom, onda ga **smatramo zaštitnim nul-vodičem (zeleno-žuta PE)** za razliku od **pogonskog nul-vodiča plave boje (N)**.

Ako je iz posebnog razloga potrebno provesti izjednačavanje potencijala vodljivih dijelova koji nisu pod naponom, provodi se neovisno o el. mreži povezivanjem vodljivih dijelova i neelektričnih uređaja najkraćim putem, što se normalno provodi neizoliranim vodičem ili FeZn trakom koristeći se i metalnim strukturama postrojenja - **vodič za izjednačavanje potencijala (IP)**.

Sustavi električnih mreža razlikuju se prema načinu uzemljenja zvjezdišta opskrbne mreže i uzemljenja dostupnih vodljivih dijelova električnih uređaja

Način označavanja sistema električne mreže i uzemljenja



Prvo slovo se odnosi na opskrbnu mrežu i znači:

T - direktno povezivanje jedne točke mreže na zemlju (nul-točka transformatora)

I - svi dijelovi mreže izolirani od zemlje ili u jednoj točki spojeni sa zemljom preko impedancije

Drugo slovo se odnosi na uzemljenje dohvatljivih vodljivih dijelova električnih uređaja i znači:

T - direktno električno spajanje dohvatljivih vodljivih dijelova (kućišta) na zemlju, neovisno o sistemu uzemljenja mreže.

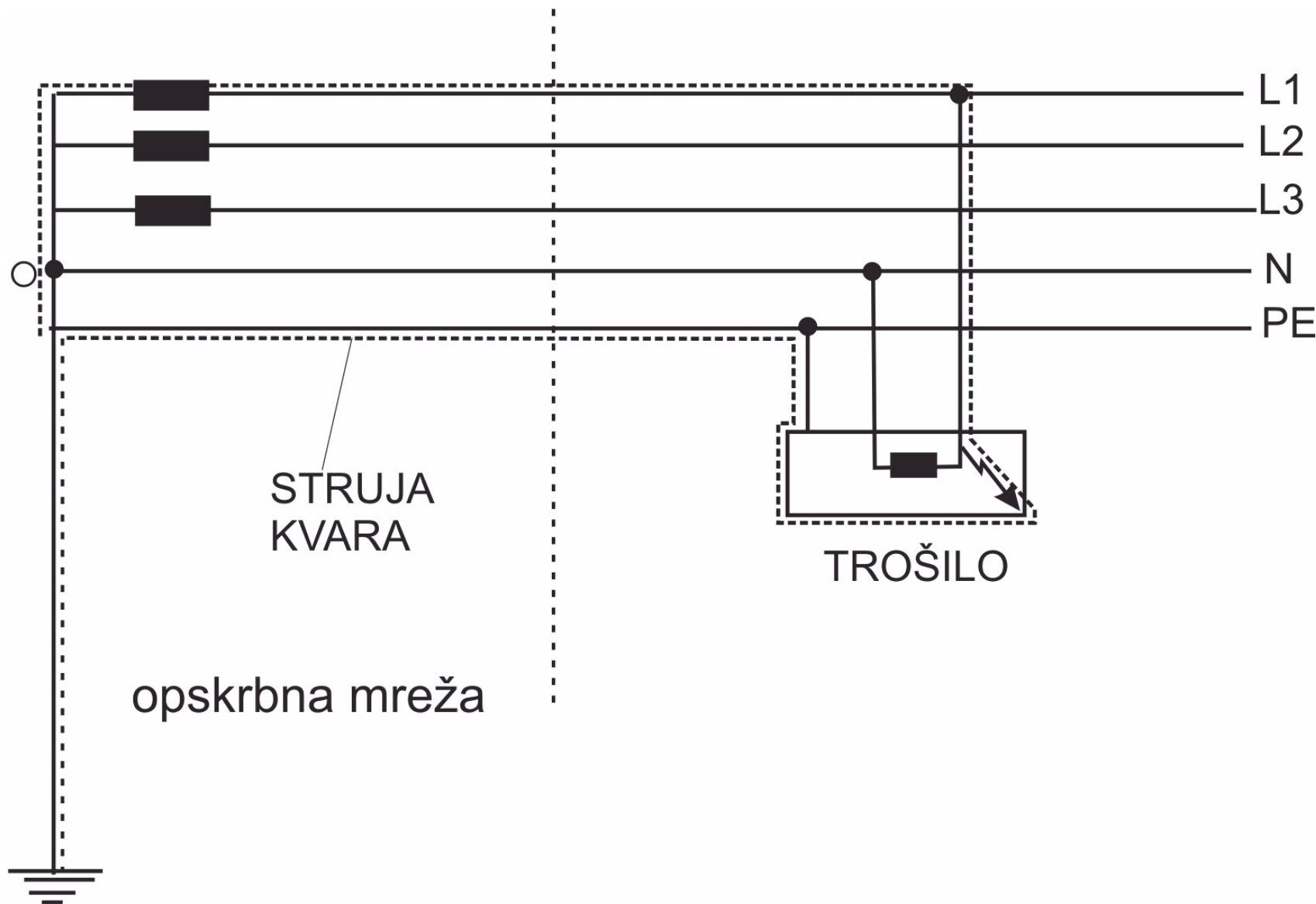
N - direktno električno spajanje dohvatljivih vodljivih dijelova (kućišta) na uzemljenu točku sistema mreže (na nul - točku transformatora)

Dodatna slova – raspoloživost neutralnog i zaštitnog vodiča:

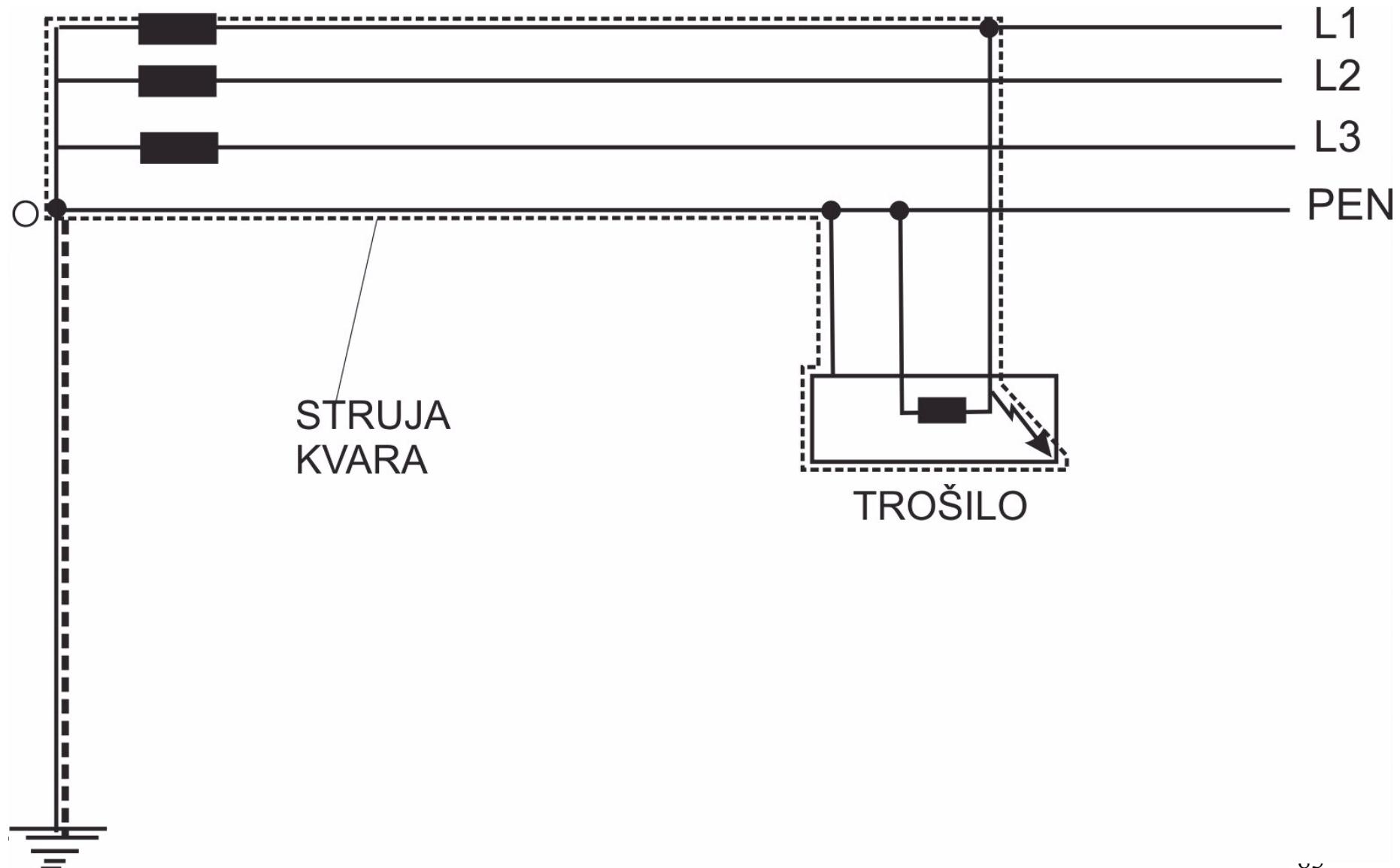
S – za zaštitnu funkciju predviđen je posebni vodič odijeljen od neutralnog vodiča ili uzemljenog aktivnog vodiča

C – funkcije neutralnog i zaštitnog vodiča objedinjene u jednom vodiču PEN vodiču

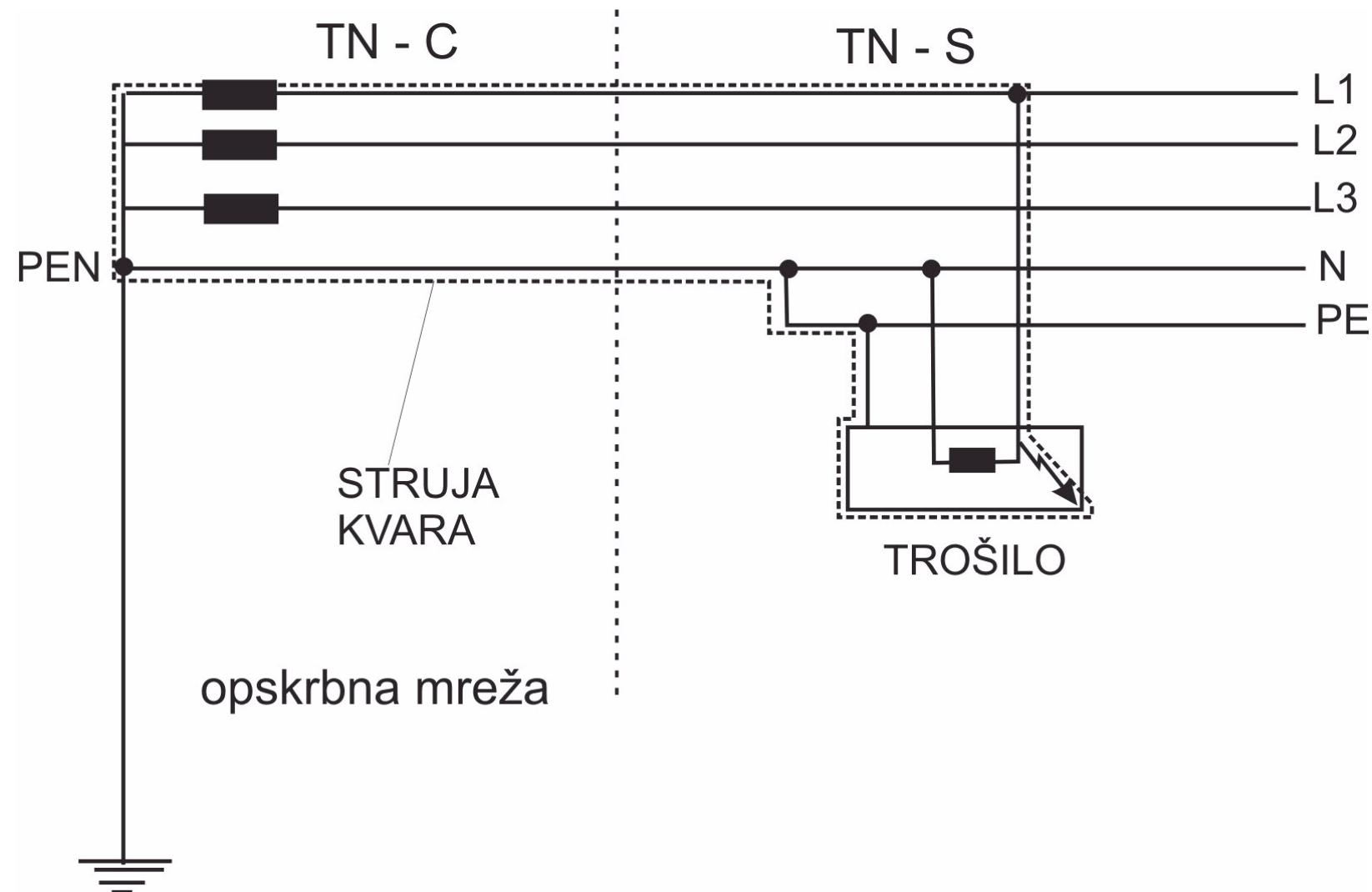
TN – S: znači da je zaštitni vodič PE u cijeloj mreži odvojen od nul - voda N, što znači da pogonska struja ne protjeće kroz PE (5 – žični sustav)



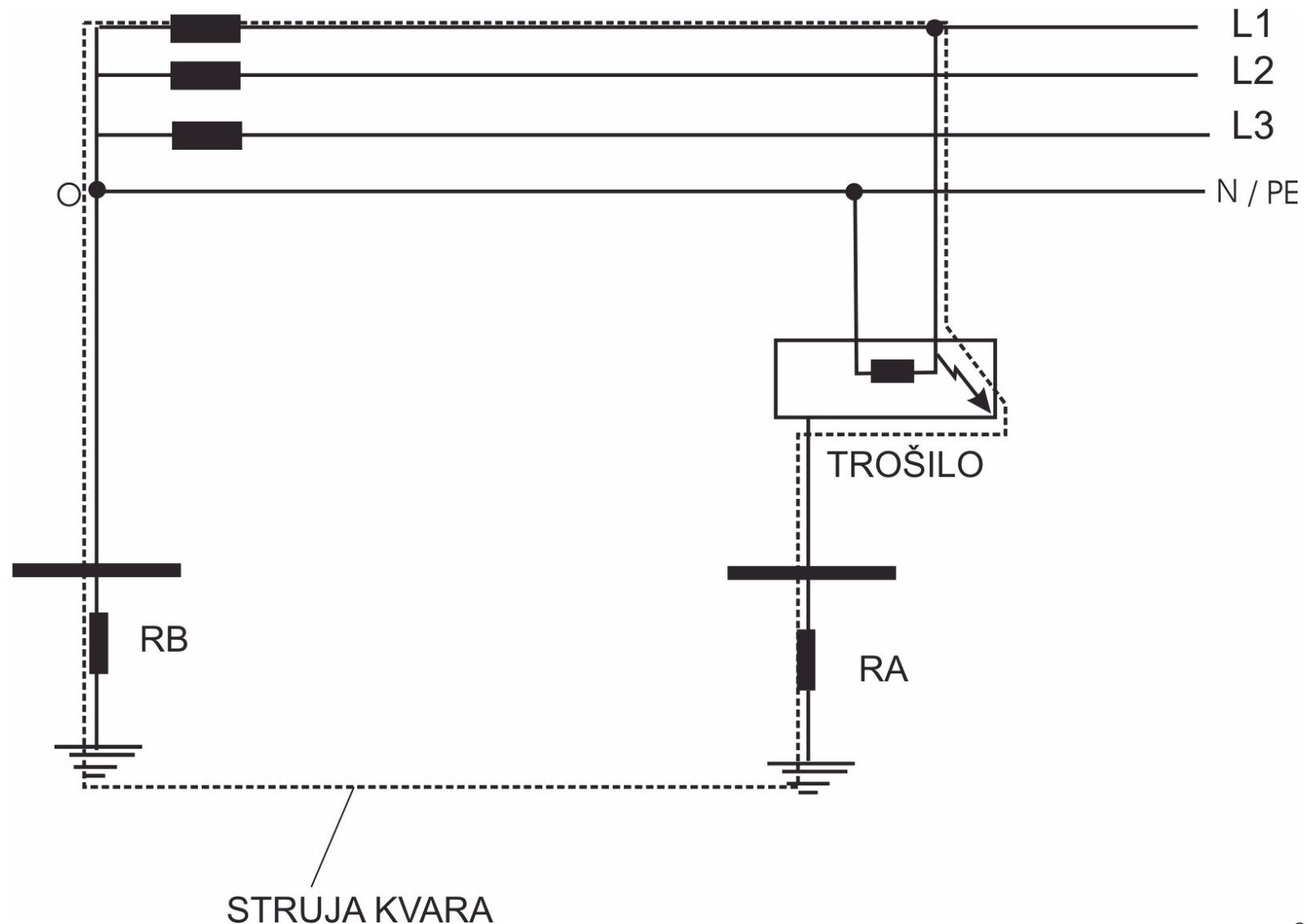
TN – C znači da su nul-vodič N i zaštitni vodič PE kombinirani u jednom vodiču, kroz koji potječe i pogonska struja i struja greške (**4 žični sustav**).



TN – C– S je kombinacija TN – C i TN – S, na dijelu mreže bliže transformatoru izveden je TN – C, a u pojedinim ograncima mreže TN - S sustav.



TT mreže – zvezdište (neutralna točka) i dostupni vodljivi dijelovi električne opreme uzemljeni su, ali tako da su priključeni na različite uzemljivače.



IT mreže – mreža je ovdje izolirana prema zemlji ili spojena preko dovoljno velike impedancije, a dostupni vodljivi dijelovi električne opreme posredovanjem zaštitnog vodiča spojeni su s uzemljivačem pojedinačno, u skupinama ili svi zajedno.

