



OSNOVE ELEKTROTEHNIKE 1

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

TEMA 11-14

ELEKTROMAGNETSKA POLJA

Tema 11. - OSNOVNE VELIČINE I OPIS MAGNETSKIH POLJA

- *uvodna razmatranja*
- *tok Φ , gustoća toka \vec{B} i jakost magnetskog polja \vec{H}*
- *homogeno i nehomogeno magnetsko polje*
- *zakon protjecanja*
- *magnetsko polje ravnog vodiča*
- *Biot-Savartov zakon*

Uvod u magnetska polja (1)

- Navedeni su osnovni učinci električne struje među kojima je i magnetsko polje

učinci električne struje:

toplinski

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t$$

toplinska energija

magnetski

$$I_u = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

strujno protjecanje

kemijski

$$m = a \cdot I \cdot t$$

masa *elektrokemijski ekvivalent*

- izraz $I_u = \int_l H \cdot dl$ predstavlja zakon protjecanja koji povezuje električna i magnetska polja i taj zakon pokazuje da tamo gdje postoji određeno strujno protjecanje I_u nastaju i vrtlozi magnetskog polja $\vec{H} \cdot d\vec{l}$

učinci magnetskog polja:

- sila** koja se javlja kada se vodič protjecan strujom nalazi u magnetskom polju
- inducirani napon** zbog promijene magnetskog toka

mehaničke sile

$$F = B \cdot I \cdot l$$

elektromagnetska indukcija

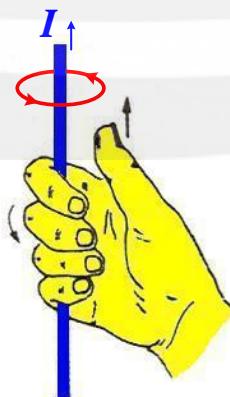
$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$

- osnovni učinci magnetskog polja sadržani su u dinamici elektromagnetskih polja kao

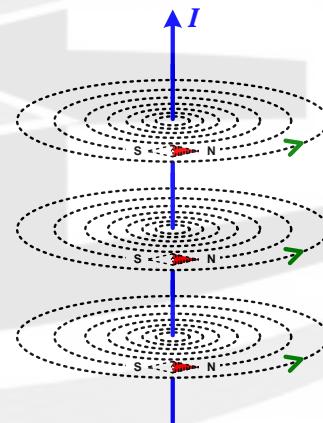
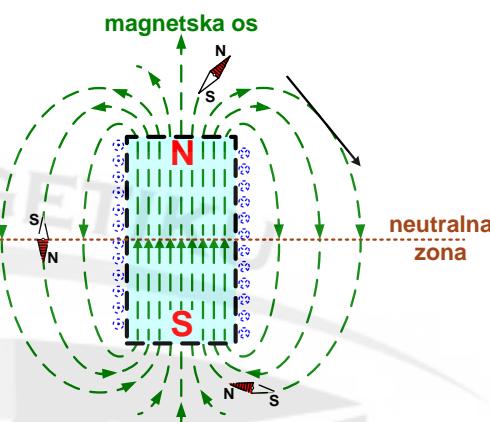
Magnetske silnice (1)

Magnetskim silnicama opisujemo magnetsko polje u prostoru

- elektromagnet je magnetski materijal omotan električnom žicom kroz koju prolazi struja
Magnetske silnice elektromagneta prikazane uz pomoć željezne piljevine
- magnetska sila je vektorska veličina
- silnice magnetskog polja opisuju veličinu i smjer magnetske sile
- silnice se izvan magneta prostiru od "**N**" ka "**S**", a unutar magneta od "**S**" ka "**N**"
 ➤ na sl.11.2 prikazane su silnice magnetskog polja kao posljedica protoka struje **I**



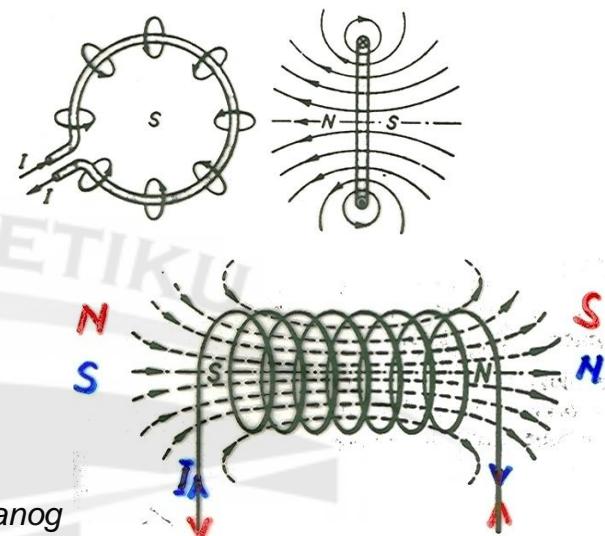
Pravilo prstiju desne ruke



Sl.11.2 Silnice magnetskog polja ravnog vodiča protjecanog strujom **I**

Magnetski tok Φ

- Svitak predstavlja kružno namotani veći ili manji broj vodljive električne žice u zraku ili oko nekog magnetskog materijala
- na sl.11.5. prikazan je svitak sa jednim zavojem i svitak protjecan strujom u zraku sa većim brojem zavoja
- više zavoja \Rightarrow jače magnetsko polje
- unutar svitka u sredini polje je homogeno, a izvan svitka polje je nehomogeno.



Sl.11.5 Magnetsko polje zavoja i svitka protjecanog električnom strujom

- Tok električne struje je **dinamička pojava gibanja električnog naboja**
- **magnetski tok Φ** nije neko gibanje, već je to **posebno energetsko stanje prostora stvoreno strujom I**
- to energetsko stanje prostora prikazujemo silnicama magnetskog polja,
- veličinu sa kojom obuhvaćamo sve magnetske silnice u nekom prostoru nazivamo **magnetski tok Φ**
- pokusima se pokazuje da je direktna **posljedica promijene magnetskog toka Φ** u vremenu nastanak **električnog napona e** te se može definirati jedinicu za mjerjenje toka Φ :

$$I = \frac{Q}{t}$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{ili} \quad d\phi = -e \cdot dt$$

$$[\phi] = [e] \cdot [t] = [V \cdot s] = [Wb]$$

Weber (voltekunda)

e - inducirani napon ovisi o brzini promjene magnetskog toka

Gustoća magnetskog toka B - homogeno magnetsko polje

$$\bar{B} = \text{konst.}$$

- Na sl.11.18 prikazano je magnetsko polje sa silnicama magnetskog toka Φ
- u prostoru silnica magnetskog toka Φ nacrtana je ploha površine S pod kutem α na smjer silnica toka Φ ,
- na slici je ucrtan i vektor gustoće magnetskog toka \vec{B} koji je konstantan u svakoj točki polja po iznosu, orijentaciji i smjeru,
- vektor B predstavlja dakle gustoću silnica magnetskog toka Φ po površini S ,
- ako se prepostavi da je ploha površine S okomita na silnice magnetskog polja tada slijedi izraz koji povezuje veličine Φ i \vec{B} u slijedećem obliku,

$$B = \frac{\phi}{S} \quad \dots \quad \alpha = 0$$

$$\phi = B \cdot S \quad (11.1)$$

- za slučaj da silnice magnetskog toka nisu okomite na plohu površine S tada vrijedi:

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

$$\rightarrow \alpha \neq 0$$

$$B = \frac{\phi}{S \cdot \cos \alpha}$$

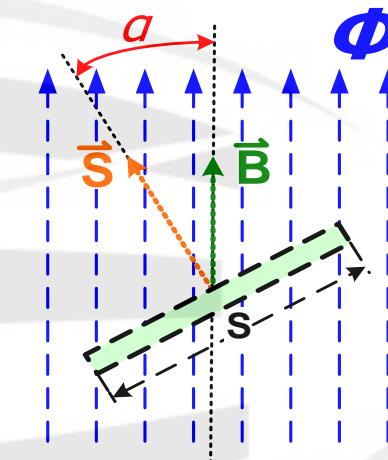
$$\phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha$$

skalarni produkt vektora \vec{B} i \vec{S}

- prema izrazu (11.1) može se sada definirati i jedinica za mjerenje gustoće magnetskog polja \vec{B}

$$[B] = \left[\frac{\phi}{S} \right] = \frac{[Wb]}{[m^2]} = \frac{[V \cdot s]}{[m^2]} = [T]$$

(Tesla)



Gustoća magnetskog toka B - nehomogeno magnetsko polje

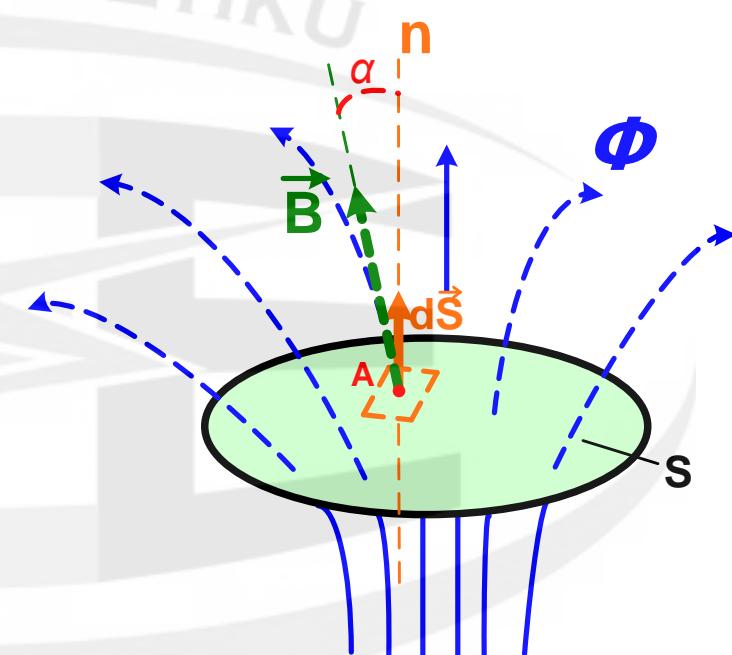
$$\vec{B} \neq \text{konst.}$$

- U nehomogenom magnetskom polju vektor \vec{B} nema u svakoj točki plohe S istu vrijednost
- na sl.11.19 prikazano je nehomogeno magnetsko polje kroz plohu S , a posebno je u točki A prikazan diferencijal površine dS sa jediničnim vektorom \hat{dS} i vektorom \vec{B} kao tangentom u odabranoj točki A
- za takvo magnetsko polje potrebno je postaviti diferencijalnu jednadžbu te se za odnos toka Φ i gustoće toka \vec{B} može pisati slijedeći izraz:

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (11.4)$$

dS - infinitezimalno mali element površine

$d\phi$ - diferencijal toka



Sl.7.19 Prikaz nehomogenog magnetskog polja

- ukupni tok je zbroj svih diferencijala $d\phi$ te vrijedi

$$\phi = \oint_S d\phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

- ako se još definira da je $B_n = B \cdot \cos \alpha$ normalna komponenta vektora \vec{B} na $d\vec{S}$ tada se za tok Φ može pisati

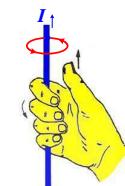
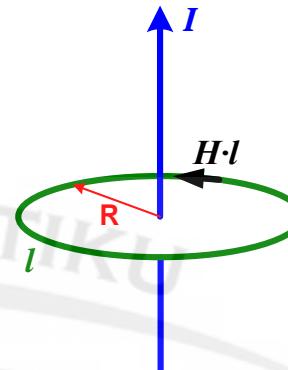
$$\phi = \oint_S B_n \cdot dS \quad (11.5)$$

$$\longrightarrow$$

$$\phi = \oint_S B \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

Jakost magnetskog polja \vec{H} (magnetska uzbuda)

- Jakost magnetskog polja \vec{H} je veličina koja je direktno vezana sa protokom struje I
- na slici je prikazana silnica magnetskog polja $H \cdot l$ kao posljedica struje I



Pravilo prstiju
desne ruke

- Definicija: jakost magnetskog polja H je veličina koja pokazuje mjeru magnetskog intenziteta prostora uslijed protjecanja određene struje $I \cdot N$ koja predstavlja magnetomotornu силу

- za odnos struje i magnetskog polja vrijedi,

$$I \cdot N = H \cdot l$$

$$H = \frac{I \cdot N}{l}$$

$$[H] = \left[\frac{I}{l} \right] = \frac{[A]}{[m]}$$

- može se utvrditi da je zbog magnetomotorne sile $I \cdot N$ prostor magnetski uzbuđen, a mjera te uzbude u pojedinim točkama prostora je veličina H

$$\Theta = I \cdot N \quad \text{magnetomotorna sila}$$

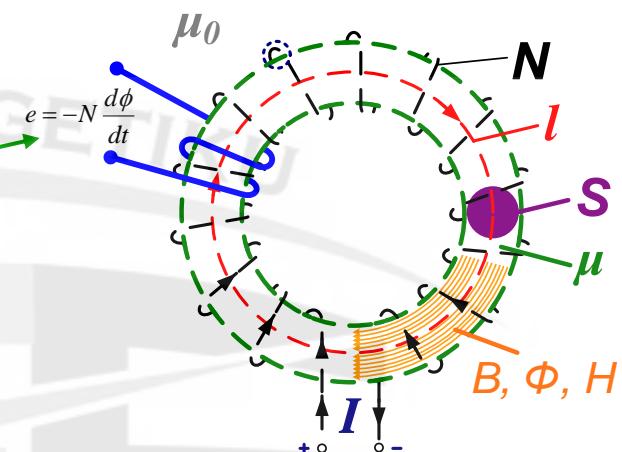
$$V_m = H \cdot l \quad \text{magnetski napon}$$

Torusni svitak- odnos vektora \vec{H} i \vec{B}

- Za definiranje odnosa između magnetske uzbude \vec{H} i vektora gustoće magnetskog polja \vec{B} koristi se torusni svitak sl.11.21
- specijalnim mjeranjem induciranih napona u pomoćnom zavoju utvrđeno je da za magnetski tok torusnog svitka vrijedi:

$$\phi = \frac{I \cdot N \cdot S \cdot \mu_0}{l} \quad (11.8)$$

(11.8)



- dijeljenjem sa S slijedi
 l – duljina zatvorene silnice

$$\frac{\phi}{S} = \frac{I \cdot N \cdot \mu_0}{l}$$

Sl.11.21 Prikaz torusnog svitka

- uz relaciju $\rightarrow \frac{\phi}{S} = B$ slijedi izraz

$$B = \frac{I \cdot N}{l} \cdot \mu_0$$

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

(11.9)

 \vec{H}

B i H ... vektori
 μ_0 ... skalar

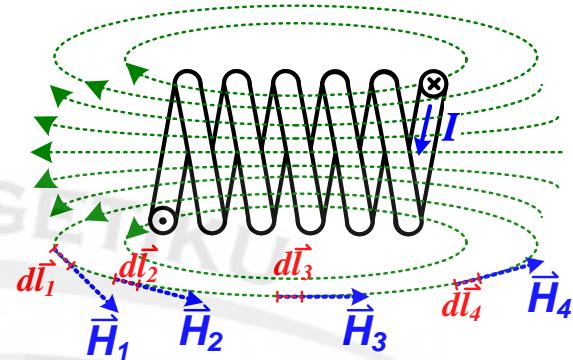
Zakon protjecanja (1)

- Zakon protjecanja je jedan od osnovnih zakona elektromagnetskog polja,
- \vec{B} i \vec{H} se mijenjaju od točke do točke po cijeloj duljini silnice,
- zbog promjenljivih veličina \vec{B} i \vec{H} i nehomogenog polja slijedi da je na infinitezimalnoj duljini $d\vec{l}$ magnetska uzbuda konstantna ($H = \text{konst.}$),

$$dV_m = \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad dV_m - \text{magnetski napon}$$

- a izraz za ukupni magnetski napon za zatvorenu silnicu \vec{l} je:
- za zatvorenu silnicu sav magnetski napon V dobiven je od struje u svim zavojima, tj. od svih amperzavoja, te vrijedi
- izraz $I_u = I \cdot N$ je ukupan broj ampera kroz plohu koju obuhvaća zatvorena linija \vec{l} i naziva se strujno protjecanje a prikazana jednadžba naziva se ZAKON PROTJECANJA i

- Definicija: zatvoren linijski integral magnetske uzbude \vec{H} po bilo kojoj zatvorenoj konturi \vec{l} jednak je algebarskoj sumi struja koje linija \vec{l} obuhvaća



Sl.11.22 Svitak protjecan strujom i silnici nehomogenog magnetskog polja

$$V_m = \int_l \vec{H} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \cdot N \quad [\text{Az}]$$

$$\oint_l \vec{H}_l \cdot d\vec{l} = I_u \quad [\text{Az}]$$

strujno protjecanje

$$\text{alg} \sum_i^n I \times N_i = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_u$$

$$I \cdot N = H \cdot l$$

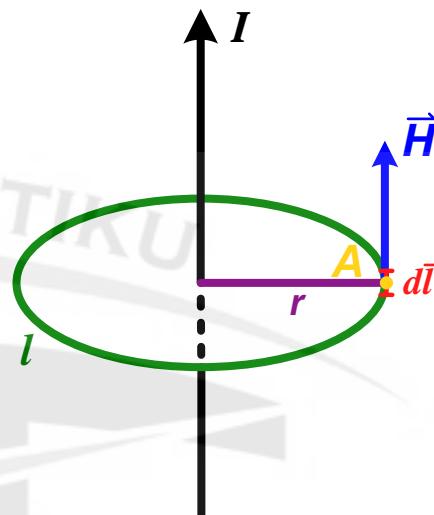
Magnetsko polje ravnog vodiča (1)

Traži se magnetska uzbuda \vec{H} i magnetska gustoća \vec{B} dugog ravnog vodiča protjecanog strujom I na udaljenosti r od osi vodiča

- zbog aksijalne simetrije vrijediti će za sve točke na silnici radijusa r $\vec{H} = \text{konst.}$
- ako vrijedi $I_u = I$, i ako je prema slici $\alpha = 0 \rightarrow \cos \alpha = 1$
- slijedi prema zakonu protjecanja
- i uz $\vec{H} = \text{konst.}$ u svim točkama kružne magnetske silnice slijedi
- ako za silnicu l radijusa r vrijedi $\rightarrow l = 2 \cdot r \cdot \pi$
- tada slijedi $\rightarrow H \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = I$

$$\oint_l \vec{H}_l \cdot d\vec{l} = I$$

$$H \cdot \oint_l dl = I$$



Sl. 11.23 Magnetsko polje izvan dugog ravnog vodiča protjecanog strujom

$$H = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} \quad [A/m]$$

- za gustoću magnetsku polja B vrijedi $\rightarrow B = \mu_0 \cdot H$

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{r} \quad [T]$$

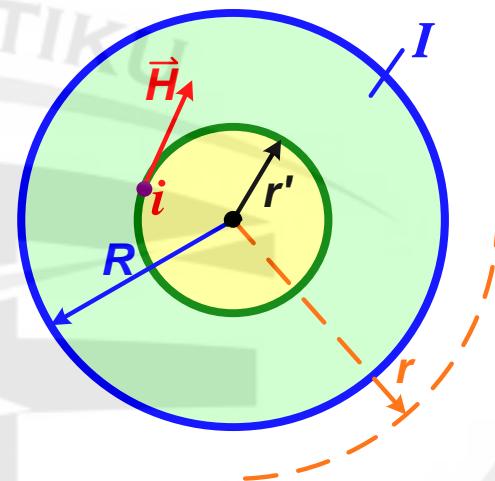
Magnetsko polje unutar vodiča protjecanog strujom I (1)

Traži se \vec{H} i \vec{B} u unutrašnjosti samog vodiča polumjera R prema slici 11.24

- struja I je ukupna struja kroz cijeli presjek vodiča $(R^2\pi)$

$$J = \frac{I}{R^2\pi} \quad (11.16)$$

- gustoća struje J za istosmjernu struju je konstantna po cijelom presjeku vodiča



- struja malo i predstavlja struju koja je obuhvaćena radijusom r' te vrijedi:

$$i = J \cdot r'^2 \cdot \pi = \frac{I}{R^2 \cdot \cancel{\pi}} \cdot r'^2 \cdot \cancel{\pi}$$

$$i = I \cdot \frac{r'^2}{R^2} \quad (11.17)$$

te je konačni izraz za veličinu magnetskog polja unutar vodiča

$$H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot r' \quad \left[\frac{A}{m} \right] \quad (11.18)$$

- a za gustoću magnetsku polja B vrijedi

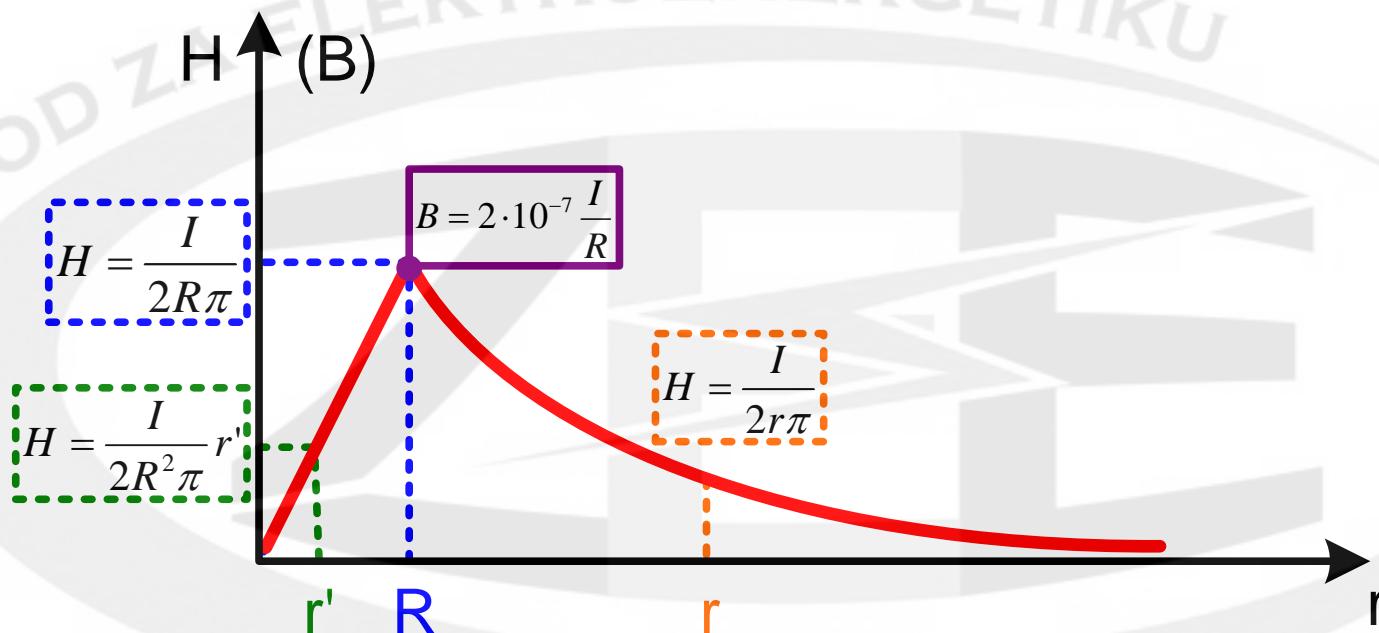
$$B = \mu_0 \cdot H = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} \quad \longrightarrow$$

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{r} \quad [T] \quad (11.20)$$

Sl. 11.24 Magnetsko polje unutar vodiča protjecanog strujom I

Magnetsko polje unutar vodiča protjecanog strujom I (3)

- Slijedi grafički prikaz kako se jakost magnetskog polja mijenja unutar i izvan vodiča protjecanog strujom I



Sl.11.25 Grafički prikaz magnetske uzbude u vodiču i izvan vodiča

- prema izvedenim matematičkim relacijama i prema grafičkom prikazu može se zaključiti magnetsko polje unutar vodiča linearno raste od središta prema obodu vodiča, a izvan vodiča jakost magnetskog polja eksponencijalno pada sa udaljenošću od vodiča

Biot - Savartov zakon

Biot-Savartov zakon objedinjuje u jednoj jednadžbi veličinu jakosti struje I u strujnoj silnici bilo kojeg oblika i magnetsku uzbudu \vec{H} u bilo kojoj točki prostora

- na slici je prikazana strujna silnica proizvoljnog oblika protjecana strujom I te se promatra magnetska uzbuda u točki A prostora
- Biot-Savartov zakon:
nastajanje magnetske uzbude \vec{H} i magnetske gustoće \vec{B} može se shvatiti tako kao da svaki element $d\vec{l}$ vodiča koji je protjecan strujom I , dakle $I \cdot d\vec{l}$ stvara u promatranoj točki polja A jedan doprinos uzbude $d\vec{H}$ za ukupnu uzbudu \vec{H}
- za diferencijal magnetske uzbude $d\vec{H}$ i rezultantnu uzbudu \vec{H} mogu se pisati izrazi

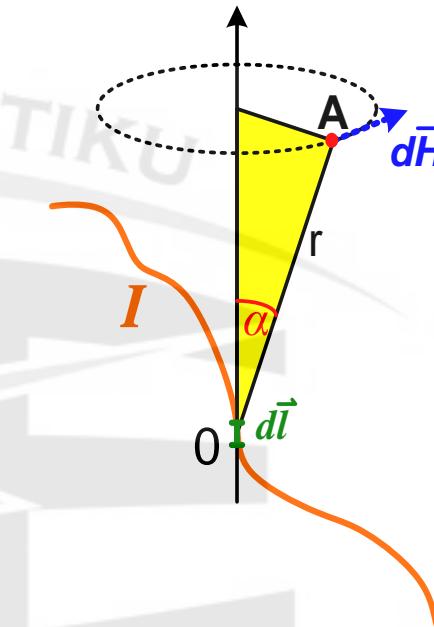
$$dH = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

I - jakost struje u vodiču

dl - element vodiča

r - udaljenost dl od točke A

α - kut između dl i spojnice r -OA



$$\vec{H} = \oint_I \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \sin \alpha \, dl$$

- ovim zakonom i principom superpozicije može se izračunati magnetsko polje bilo kako oblikovanog vodiča
- smjer vektora $d\vec{H}$ je prema pravilu vektorskog produkta okomit na ravninu koju čine $I \cdot dl$ i \vec{r}

- slijedi vektorski oblik Biot-Savartovog zakona

$$d\vec{H}_A = \frac{I}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \left(d\vec{l} \times \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

Primjer 1: Traži se gustoća B u točki M na osi x kružnog zavoja protjecanog strujom

- prema Biot - Sav. zakonu slijede relacije za H i B

$$dH = \frac{I \cdot dl}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi r^2}$$

- dB_y komponente u smjeru y se poništavaju
- za komponente u smjeru osi x vrijedi:

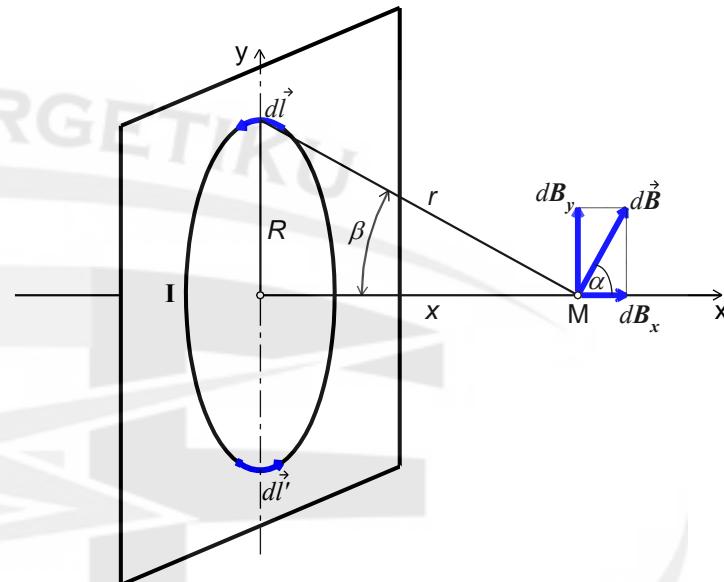
$$dB_x = dB \cos \alpha = dB \sin \beta = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl}{4\pi r^2} \sin \beta$$

- slijedi kratki proračun i konačni izraz za magnetsku indukciju B

$$B = \oint_{2R\pi} \frac{\mu_0 \cdot I \cdot dl \cdot \sin \beta}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin \beta}{4\pi r^2} \oint_{2R\pi} dl = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot \sin \beta \cdot 2R\pi}{4\pi r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R \sin \beta}{r^2}$$

ako imamo N zavoja i
ako prema slici vrijedi:



$$\begin{aligned} r^2 &= R^2 + x^2 \\ \sin \beta &= R/r \end{aligned}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + X^2)^{3/2}}$$

za točku **M** ($X=0$) u središtu kružnog zavoja slijedi

$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2R}$$

Primjer 2: Traži se jakost polja u središtu A kružnog zavoja koji je protjecan strujom I

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \frac{R \sin \beta}{r^2}$$

uz N zavoja i ako je:

$$r^2 = R^2 + x^2$$

$$\sin \beta = R/r$$

slijedza točku M u središtu kružnog zavoja i ($X=0$)

$$B_0 = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2R}$$

- prema Biot - Savartovom zakonu vrijedi relacija

$$dH = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \sin \alpha}{r^2}$$

- $I \cdot dl$ - element struje kružnog zavoja
- r - udaljenost elemenata dl od središta
- kut između r i dl je 90° te vrijedi $\sin \alpha = 1$

- slijedi kratki izračun i izraz za jakost magnet. polja H u središtu kružnog zavoja

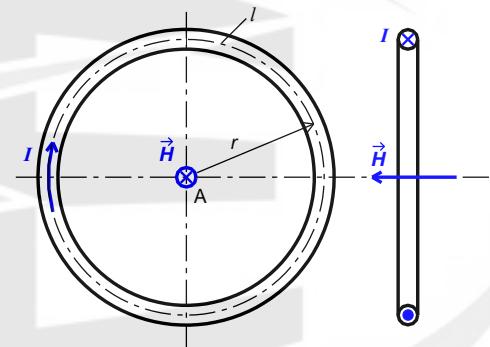
$$H = \frac{I}{4\pi r^2} \oint_l dl = \frac{I}{4\pi r^2} \cdot 2r\pi$$

$$H = \frac{I}{2r}$$

uz N zavoja vrijedi za jakost mag. polja

$$H = \frac{I \cdot N}{2r}$$

a za gustoću magnetskog toka u vakuumu i u središtu A kružnog zavoja slijedi



$$B = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot N}{2r}$$

a to je upravo granični slučaj iz prethodnog primjera za vrijednost $X=0$



Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 12. - **SILA U MAGNETSKOM POLJU**

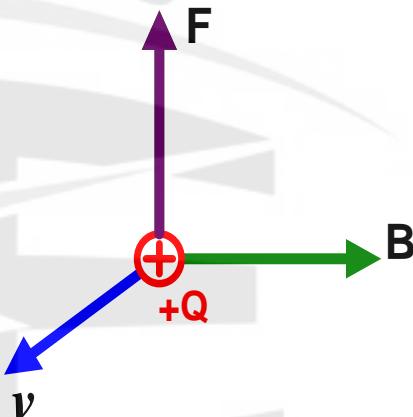
- sila na električne naboje u magnetskom polju*
- sila na vodič protjecan strujom I u magnetskom polju*
- magnetski krug*
- serijski i pralelni spoj induktiviteta*
- induktivitet zračnog voda i kabela*

Sile magnetskog polja na električni naboј Q u gibanju (1)

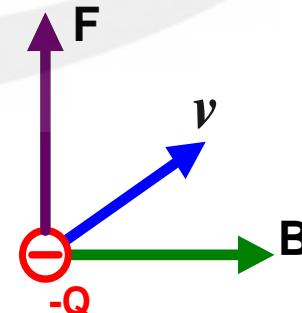
- Kada se razmatra sila na vodič protjecan strujom u magnetskom polju u stvari se promatra sila koja djeluje na električne naboje koji se gibaju uzduž vodiča, a vodič se promatrao kao kruto tijelo
- kada vektori \vec{B} i \vec{v} zatvaraju kut $\alpha=90^\circ$ za silu na vodič protjecan strujom I i koji se nalazi u magnetskom polju vrijedi poznata relacija $F = B \cdot I \cdot l$
- ako znamo da za struju I vrijedi $I=Q/t$ tada slijedi za silu (Lorentzova sila) koja djeluje na naboј Q i koji se kreće u magnetskom polju

$$F = B \cdot \frac{Q}{t} \cdot l = B \left(\frac{l}{t} \right) Q \rightarrow F = B \cdot v \cdot Q \quad (12.1)$$

- u provedenom postupku predpostavilo se da je pozitivni smjer struje smjer gibanja "+" naboja
- smjer sile \vec{F} određuje se prema **pravilu lijevog dlana:**
ako su silnice magnetskog polja usmjerene na dlan i ako ispruženi prsti pokazuju smjer brzine kretanja pozitivnog naboja \vec{v} tada ispruženi palac pokazuje smjer sile \vec{F}



Sl. 12.1 Sila na pozitivni naboј koji se kreće u magnetskom polju



Sl. 12.2 Sila na negativni naboј koji se kreće u magnetskom polju

Sile magnetskog polja na električni naboj Q u gibanju (2)

- › ako vektori \vec{v} i \vec{B} zatvaraju kut $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, tada se naboje kreće u poprečnom magnetskom polju te vrijedi jednadžba za silu u trigonometrijskom i vektorskom obliku

$$F = B \cdot v \cdot Q \cdot \sin \alpha \quad (12.2)$$

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (12.3)$$

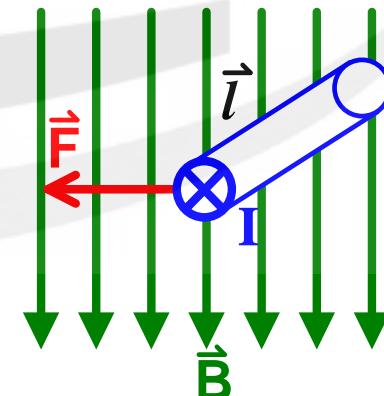
Homogeno magnetsko polje (1)

- › Promatramo homogeno magnetsko polje u kojem su sila \vec{F} i vektor \vec{B} konstantni u svakoj točki polja i u kojem se nalazi vodič duljine l i protjecan strujom I
- › 1. slučaj - vodič je okomit na magnetske silnice $\alpha = 90^\circ$

$$F = B \cdot v \cdot Q = B \cdot \frac{l}{t} \cdot I \cdot t = B \cdot I \cdot l \quad (12.4)$$

$$F = B \cdot I \cdot l \quad [N] \quad (12.5)$$

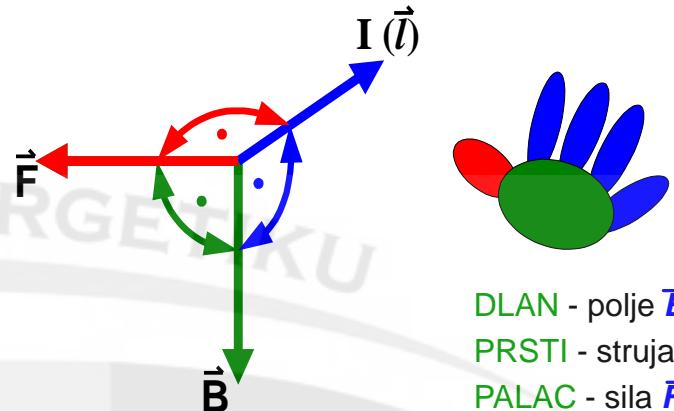
I - duljina vodiča u homogenom polju
 I - struja
 B - gustoća silnica magnetskog polja



Sl. 12.4 Sila na vodič protjecan strujom I u magnetskom polju indukcije \vec{B}

Homogeno magnetsko polje (2)

- DEFINICIJA: na vodič duljine \vec{l} koji je protjecan strujom I i koji se nalazi u magnetskom polju \vec{B} djeluje sila \vec{F} po pravilu lijevog dlana
- smjer sile \vec{F} određuje se upravo prema **pravilu lijevog dlana**:
 - ako su silnice magnetskog polja usmjerene na dlan i ako ispruženi prsti pokazuju smjer struje tada ispruženi palac pokazuje smjer sile \vec{F}

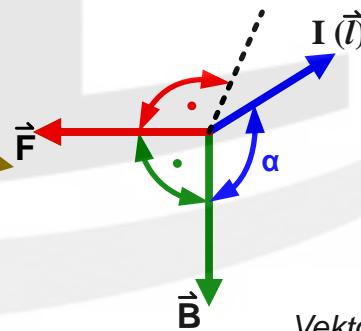
Sl. 12.5 Vektori \vec{B} , \vec{l} , \vec{F} i pravilo lijevog dlana

- 2. slučaj - vodič nije okomit na silnice magnetskog polja \vec{B}
- slijede izrazi za силу на вodič protjecan strujom I koji se nalazi u magnet. polju gustoće B



$$F = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha \quad [N]$$

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}) \quad [N]$$



Vektori \vec{B} i \vec{l} nisu pod pravim kutem

Nehomogeno magnetsko polje

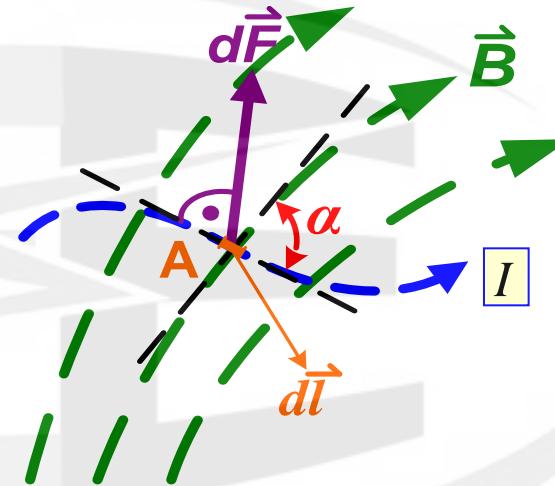
- Promatramo sada magnetsko polje u kojem sila \vec{F} i magnetska indukcija \vec{B} nisu konstantni u svakoj točki polja,
- u takvom polju promatramo vodič duljine l protjecan strujom I
- na sl.12.8 prikazane su silnice za nehomogeno magnetsko polje, a uz to i vodič duljine l nije okomit na silnice
- s obzirom da se radi sa promijenjivim veličinama potrebno je u ovom slučaju analizirati silu sa diferencijalnim veličinama
- za prikazani slučaj potrebno je izraze za silu ((12.6) i (12.7)) prikazati u diferencijalnom oblik te slijedi jednadžba

$$d\vec{F} = B \cdot I \cdot dl \cdot \sin \alpha$$

- za ukupnu silu F vrijedi

$$F = \int_l B \cdot I \cdot \sin \alpha \cdot dl$$

- a izraz za diferencijal sile u vektorskem obliku je slijedeći
- a za ukupnu silu F vrijedi konačno relacija i u integralnom obliku



Sl.12.8 Sila na vodič u nehomogenom magnetskom polju

$$d\vec{F} = I \cdot (\vec{dl} \times \vec{B}) \quad (12.9)$$

$$F = \int_l B \cdot I \cdot \sin \alpha \cdot dl \quad (12.10)$$

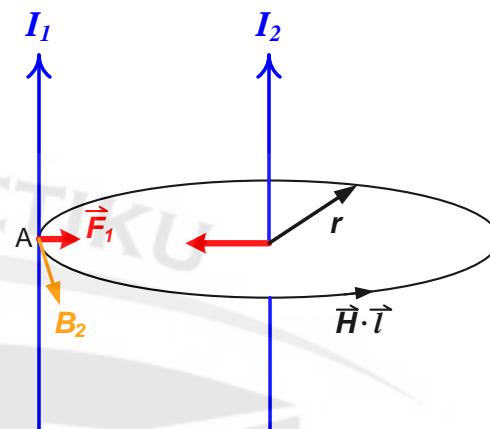
Sile između dva paralelna vodiča (1)

- Promatrati će se primjeri sile \vec{F} između dva paralelna vodiča
- **primjer 1.** - struje u vodičima teku u istom smjeru
- promatra se sila \vec{F}_1 koju stvara magnetsko polje \vec{B}_2 (od struje I_2) na vodič protjecan strujom I_1 duljine l_1
- za promatrani slučaj sile na vodič 1 pod utjecajem magnet. polja vodiča 2 vrijedi

$$F_1 = B_2 \cdot I_1 \cdot l_1$$

B_2 - indukcija vodiča 1 na mjestu vodiča 2 l_1 - duljina vodiča 1

- zaključak- ako su struje u vodičima u istom smjeru, sila je privlačna i djeluje kao tlak na vodiče



Sl.12.9 Sila \vec{F} na vodiče protjecane strujom u istom smjeru

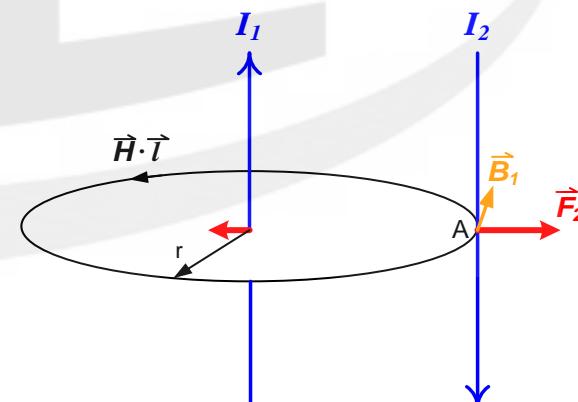
- **primjer 2.** - struje u vodičima teku u različitim smjerovima

- promatra se sila \vec{F}_2 koju stvara magnet. polje \vec{B}_1 (od struje I_1) na vodič protjecan strujom I_2 duljine l_2
- izraz za silu \vec{F}_2 na vodič 2 pod utjecajem magnetskog polja \vec{B}_1 vodiča 1 je

$$F_2 = B_1 \cdot I_2 \cdot l_2$$

B_1 - indukcija vodiča 2 na mjestu vodiča 1
 l_2 - duljina vodiča 2

- zaključak- ako su struje u vodičima u različitim smjerovima, tada je sila odbojna i djeluje kao vlačna sila



Sl.12.10 Sila \vec{F} na vodiče protjecane strujom u različitim smjerovima

Sile između dva paralelna vodiča (3)

-ELEKTROMAGNETSKA POLJA -

- ako se sada u izraz za silu \vec{F}_1 uvrsti poznati izraz za magnetsku indukciju \vec{B}_2
- a u izraz za silu \vec{F}_2 uvrsti izraz za magnetsku indukciju \vec{B}_1
- i uz uvjet da su duljine vodiča jednake $I_1 = I_2 = l$ dobije se izraz za silu između dva paralelna vodiča
- ako se sila F izrazi *po jedinici dužine vodiča* slijedi
- ako se sada koristi izraz za silu između dva paralelna vodiča po duljini vodiča ($I=1\text{m}$) te ako se pojava promatra u vakuumu ($\mu_0=4\cdot\pi\cdot10^{-7}$) slijedi relacija za silu

$$B_2 = \mu \cdot \frac{I_2}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

$$B_1 = \mu \cdot \frac{I_1}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

$$F = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2 \cdot r \cdot \pi} \cdot l_2$$

$$\frac{F}{l} = \mu \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

$$F = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{r}$$

- sada se može definirati i *fizikalna jedinica za silu* prema izrazu

$$[F] = \left[\frac{V \cdot s}{m^2} \cdot A \cdot m \right] = \left[\frac{V \cdot A \cdot s}{m} \right] = \left[\frac{J}{m} \right] = [N] \quad \text{Njutn}$$

slijede definicije za 1 Amper i 1 Tesla

- Definicija 1A: električna struja ima jakost **1A** ako prolazi kroz vrlo dugi vodič i djeluje na isti takav vodič na udaljenosti od **1m**, i po duljini **1m** sa silom od **$2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$** u vakuumu.

- prema relaciji $F=B \cdot I \cdot l$ može se napisati

$$B = \frac{F}{I \cdot l} = \frac{F}{I'} \quad \left[\frac{N}{(A \cdot m)} = T \right]$$

- a uz **$I=1\text{A}$** i **$l=1\text{m}$**
- slijedi $B = F$
- i definicija za **1T** je

- Definicija 1T: magnetska indukcija je brojčano jednaka **1 T** ako na vodič dužine **1 m** pri struci od **1 A** djeluje sila od **1 N**.

Induktivitet dvožičnog dalekovoda - vanjski induktivitet (1)

➤ **Primjer:** Induktivitet vrlo dugog dvožičnog dalekovoda

R – radius kružnih vodiča

d – razmak vodiča (vodiči su paralelni)

x,dx - dio razmaka između vodiča

dS - diferencijal površine između vodiča

$\mu \approx \mu_0$ - vodiči su od neferomagnetskih materijala

$l \gg d$ - (**l** – duljina vodiča)

N=1 te je **$\psi = \Phi$** (**ψ** – ulančani tok)

$B_u = B_1 + B_2$

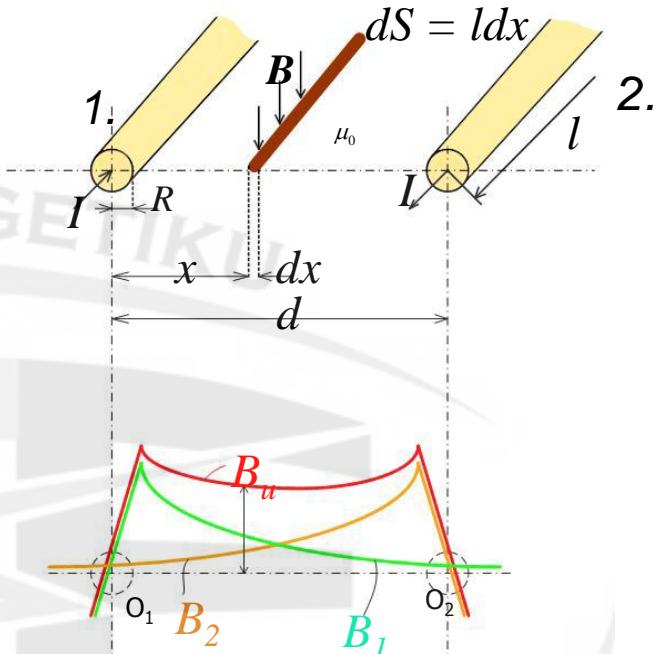
B_1 – gustoća magnetskog polja vodiča 1

B_2 – gustoća magnetskog polja vodiča 2

B_u – ukupna gustoća magnetskog polja

B_{va} -dio magnetskih silnica u zraku
između vodiča

B_{uv} -magnetske silnice unutar vodiča



Sl. 12.19 Skica dvožičnog voda i pripadne raspodjele magnetske indukcije B

- ukupna vanjska magnetska indukcija dobije se superponiranjem magnet. toka lijevog i desnog vodiča na slici te prema zakonu protjecanja vrijedi

$$B_{uv} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot x} - \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot (d-x)}$$

$$\rightarrow B_{uv} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right)$$

- za ukupni magnetski tok **Φ** kroz površinu $ds=l \cdot dx$ slijedi

$$d\phi_u = B \cdot l \cdot dx = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \right) \cdot dx$$

$$\rightarrow \phi_u = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{d-R}{R}$$

- uz uvjet **$d \gg R$** koji je kod dugačkih vodova ispunjen slijedi

$$\rightarrow \phi_u = \frac{\mu_0 \cdot I \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{R}$$

Induktivitet dvožičnog dalekovoda -

- izraz za vanjski *induktivitet dvožičnog dalekovoda* je

$$L_v = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 \cdot l}{\pi} \cdot \ln \frac{d}{R}$$

- i uz

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$$

$$L_v = 4 \cdot l \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{d}{R}$$

Induktivitet dvožičnog dalekovoda - unutarnji induktivitet

- Promatra se magnetsko polje unutar presjeka vodiča

- gustoća struje **J** po presjeku vodiča je konstantna

$$J = \frac{I}{R^2 \pi} \quad [\frac{A}{m^2}]$$

- unutar vodiča za $r < R$ vrijedi za struju $I_r = J \cdot r^2 \cdot \pi = I \cdot \frac{r^2}{R^2}$ polumjera **r**

$$I_r = I \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

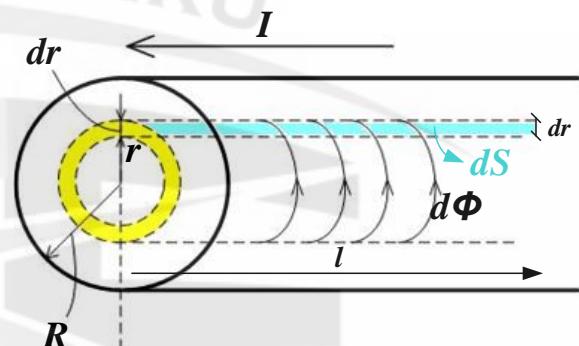
- u izraz za mag. uzbudu **H_r** unutar vodiča

$$H_r = \frac{I_r}{2 \cdot r \cdot \pi} \rightarrow H_r = \frac{I \cdot r}{2 \cdot R^2 \cdot \pi}$$

uvrsti izraz za struju I_r , slijedi

$$H_r = I \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

ako je $\mu \approx \mu_0$ slijedi za magnetsku indukciju **B**



Prikaz magnetskog toka Φ u unutarnjem presjeku vodiča

- ako se još proračuna i ulančani tok $\Psi = \Phi \cdot N$ kao

$$\Psi = \frac{10^{-7}}{2} \cdot I \cdot l$$

- za ukupni unutarnji induktiv. **L_{un}** za oba vodiča uz $2 \cdot \Psi$ slijedi

$$L_{un} = l \cdot 10^{-7} \quad [H]$$

- i konačno za zbroj unutarnjeg i vanjskog induktiviteta **L_u** dalekovoda vrijedi relacija

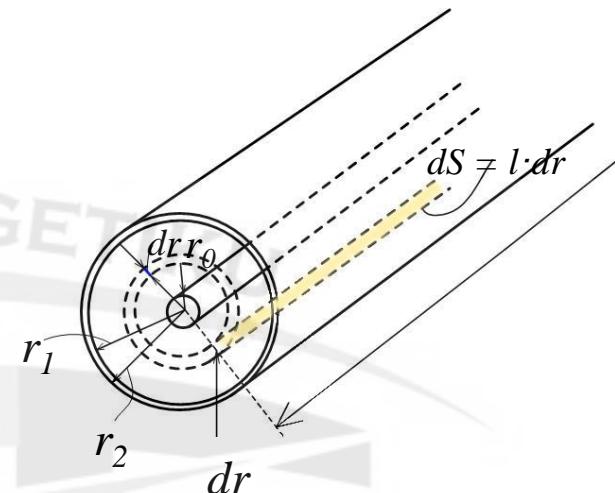
$$L = L_v + L_{un} = l \cdot \left(4 \cdot \ln \frac{d}{R} + 1 \right) \cdot 10^{-7} \quad [H]$$

Induktivitet koaksijalnog kabela (1)

- Na slici je prikazan cilindrični puni vodič radiusa r_0 i oko njega je koncentrično postavljen šuplji cilindrični vodič radiusa r_1 i r_2
- kroz svaki vodič prolazi struja I i to kroz unutarnji vodič u jednom smjeru, a kroz vanjski u drugom smjeru
- magnetske silnice u izolacijskom prostoru su koncentrične kružnice
- uzbuda ovisi samo o struci unutarnjeg vodiča te su ovdje prilike iste kao da je unutarnji vodič sam
- na radaju r definiramo jakost magnetskog polja H_1 , i gustoću magnetskog polja B_1

$$H_1 = \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi}$$

$$B_1 = \mu_0 \cdot \frac{I}{2 \cdot r \cdot \pi} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{I}{r}$$



- r_1, r_2 - radijusi šupljeg cilindričnog vodiča
- r_0 - radijus punog vodiča

Prikaz karakterističnih veličina presjeka kabela

- ako se površina ds definira kao $ds = l \cdot dr$ tada za magnetski tok Φ vrijedi:

$$d\phi_1 = l \cdot 2 \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \frac{dr}{r}$$

$$\phi_1 = 2 \cdot l \cdot 10^{-7} \cdot I \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}$$

- ako se još uz ulančani tok $\Psi = \Phi N$ koristi i izraz $L = \Phi/I$ slijedi za induktivitet L_1

$$L_1 = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{r_1}{r_0}$$

L₁ - po jedinici duljine

- ako se još doda induktivitet magnet. toka unutar vodiča

$$L_u = 10^{-7} \cdot \frac{1}{2} [H/m]$$

- slijedi i izraz za ukupni induktivitet L_u po jedinici duljine kabela:

$$L_u = L_1 + L_u = \left(2 \cdot \ln \frac{r_1}{r_0} + \frac{1}{2} \right) \cdot 10^{-7} [H/m]$$

induktivitet izvan vodiča

induktivitet od mag. toka unutar vodiča



Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 13. - **MATERIJA U MAGNETSKOM POLJU**

- *magnetska provodnost μ*
- *vakuum, paramagnetski, dijamagnetski i feromagnetski materijali*
- *krivulja magnetiziranja i magnetska histereza*
- *zakon loma magnetskih silnica*

Magnetska provodljivost μ

- Za odnos vektora B i vektora H vrijedi relacija
$$B = \mu \cdot H$$
- ponašanje materije u magnetskom polju ovisi o karakteristikama *magnetske vodljivosti μ*

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0 \quad [Vs/Am] \quad (13.1)$$

absolutna magnetska vodljivost
 (permeabilitet, inducijska konstanta) relativna magnetska vodljivost vodljivost vakuuma

$$\mu_r = 1 \pm \kappa \quad (13.3)$$

magnetska susceptibilnost

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \quad [Vs/Am] \quad (13.2)$$

- veličine μ i μ_0 imaju istu mjernu veličinu u $[Vs/Am]$, a μ_r je *bezdimenzionalan* broj,
- za vakum je veličina $\mu_r = 1$, a za ostale mag. materijale može biti veća ili manja od jedan tj. $1 > \mu_r > 1$,
- veličina magnetske susceptibilnosti κ pokazuje samo dodatni iznos magnetiziranja materijala

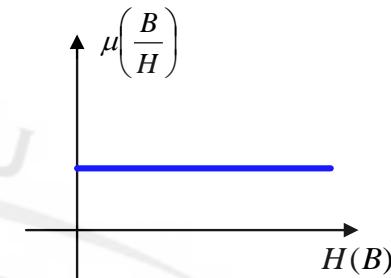
- vakuum (μ_v) - $\kappa_0 = 0 \rightarrow \mu_{rv} = 1$
- dijamagnetski materijali (μ_d) $\kappa_d < 0 \rightarrow \mu_{rd} < 1 \quad \mu_{rd} = \text{konst.}$
- (srebro, bakar, živa)
- paramagnetski materijali (μ_p) $\kappa_p > 0 \rightarrow \mu_{rp} > 1 \quad \mu_{rp} = \text{konst.}$
- (aluminij, platina)
- feromagnetski materijali (μ_f) $\kappa_p \gg 0 \rightarrow \mu_{rf} \gg 1 \quad \mu_{rf} \neq \text{konst.}$
- (željezo, kobalt)

Vrste materijala - Vakuum

$$\mu_{rv} = 1 \rightarrow \kappa_0 = 0$$

- Za vakuum je magnet. vodljivost konstantna označava se sa μ_0 , a relat. magnet. vodljivost je $\mu_{r0}=1$
- odnos gustoće magnetskog polja B i magnetske uzbude H je konstantan
- ako se promatra zavisnost veličina B i H u vakuumu dobije se linearna karakteristika prikazana na sl.2.

Zavisnost vodljivosti μ u vakuumu o veličini $H(B)$



$$B = \mu_0 \cdot H$$

$$B_0 = \mu_0 \cdot \mu_{rv} \cdot H$$

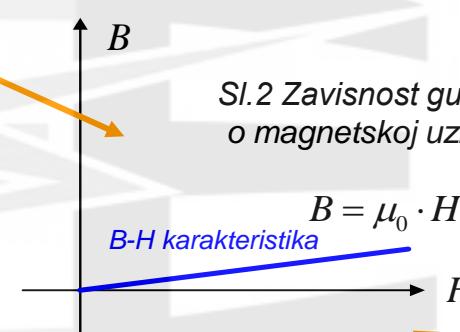
Paramagnetski materijali

- To su slabo izraženi magnetski materijali za koje vrijedi $\mu_{rp} > 1$ i $\mu_{rp} = \text{konst.}$
- ukupna gustoća magnetskog polja B jednaka je zbroju gustoće magnetskog polja B_0 u zraku i udjela unutarnje gustoće magnetskog polja B_m :
- promjena unutarnje magnet. uzbude magnetiziranja materijala H_m direktno prati promjenu vanjske magnet. uzbude H , a postoji i KONSTANTNA proporcionalnost između H i H_m

$$\mu_{rp} > 1$$

$$\mu_{rp} = \text{konst.}$$

$$B = B_0 + B_m$$



Sl.2 Zavisnost gustoće mag. polja B o magnetskoj uzbudi H u vakuumu

$$H_m = \kappa_p \cdot H$$

$$B = \mu_0 \cdot H \underbrace{\left(1 + \kappa_p\right)}_{\mu_{rp}} = \mu_0 \cdot \mu_{rp} \cdot H$$

κ - magnetska susceptibilnost

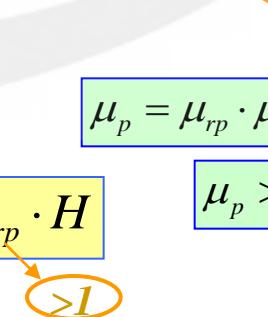
- μ_p i μ_0 se neznatno razlikuju

$$\mu_{rp} \approx 1$$

$$B = \mu_p \cdot H$$

$$\mu_p = \mu_{rp} \cdot \mu_0 = \text{konst.}$$

$$\mu_p > \mu_0$$



Vrsta materijala - Dijamagnetski materijali

$$\begin{aligned}\mu_{rd} &< 1 \\ \mu_{rd} &= \text{konst.}\end{aligned}$$

- To su suprotno izraženi magnetski materijali a relativna dielektrična provodljivost manja je od 1
- takav materijal ima svojstvo *odbijanja* magnetskih silnica vanjskog polja a unutarnja magnetska uzbuda **H** djeluje suprotno od vanjske magnetske uzbude
- za magnetsku provodljivost dijamagnetskog materijala vrijede relacije

$$\mu_d = \mu_{rd} \cdot \mu_0$$

<1

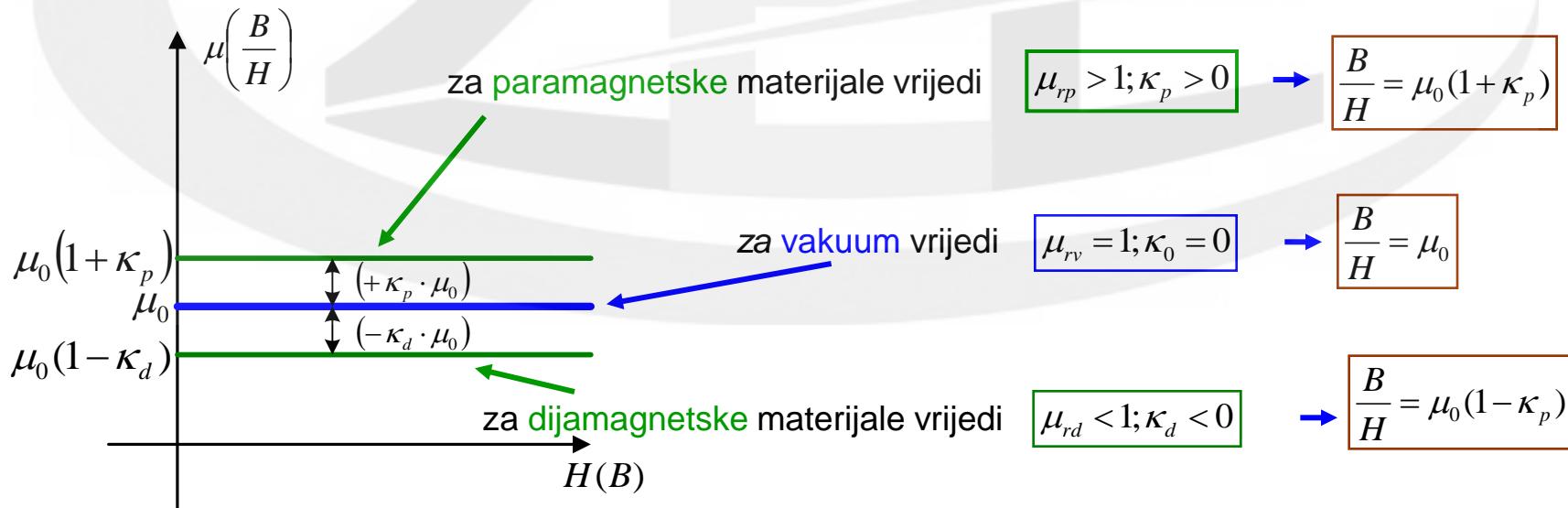
$$\mu_{rd} < 1$$

➤ vektori \vec{H}_u i \vec{H} su suprotnog smjera a za odnos **B** i **H** vrijedi:

$$B = \mu_d \cdot H$$

- dijagrami zavisnosti **B/H** karakteristike za navedene materijale nacrtane su prema relaciji

$$\frac{B}{H} = \mu_0 \cdot \mu_r = \mu_0 \cdot (1 \pm \kappa)$$

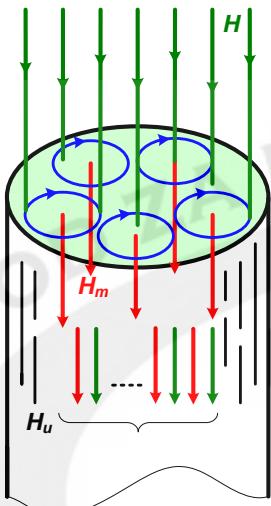


Sl.13.4 Zavisnost magnetske provodljivosti μ (B/H) za vakuum te paramagnetske i dijamagnetske materijale

Vrsta materijala - Feromagnetski materijali (1)

Kratki fizikalni opis feromagnetskih materijala

$$\begin{aligned}\mu_{rf} &>> 1 \\ \mu_{rf} &\neq \text{konst.}\end{aligned}$$



Sl. 13.5 Skica magnetskih uzbuda u feromagnetskom materijalu

› uz uvjet da je $B_m = \mu_0 \cdot H_m$ i $B_0 = \mu_0 \cdot H$ →

slijedi: $B = \mu_0 \cdot H + \mu_0 \cdot H_m = \mu_0 (H + H_m)$

magnetska polarizacija B_m

› i konačno →

$$B = \mu_0 \cdot \mu_{rf} \cdot H$$

$$\mu_{rf} = 1 + \kappa_f$$

$$H = \frac{I \cdot N}{l}$$

vanjska uzbuda

unutarnja uzbuda
 $H_m = f(\text{materijala})$



elementarna strujna petlja je rezultat feromagnetskih materijala

› u magnet. materijalu djeluju dvije uzbude i to vanjska uzbuda H kao u vakuumu i magnet. uzbuda unutarnjeg magnetiziranja H_m te slijedi

$$B = B_0 + B_m$$

B_0 - indukcija pri uzbudi H u vakuumu

B_m - doprinos ukupnoj indukciji od strane unutarnje uzbude H

H_m - dodatna uzbuda stvorena od unutarnjih elementarnih struja nije konstantna i naziva se *magnetiziranje* ili *intenzitet magnetiziranja*

$$B = \mu_0 \cdot (H + \kappa_f \cdot H) = \mu_0 \cdot (1 + \kappa_f) \cdot H$$

μ_{rf}

κ_f - mag. susceptibilnost ferom.tvari $\kappa_f \neq \text{konst.}$

vanjska uzbuda

faktor s kojim se modelira *utjecaj magnetiziranja* elementarnih strujnih petlji unutar materijala

› Relativ. magnet. provodnost sastoji se od konst. člana $\mu_{ro}=1$ za vakuum i promjenljivog člana $\kappa_f \gg 1$ koji daje utjecaj feromag. materijala

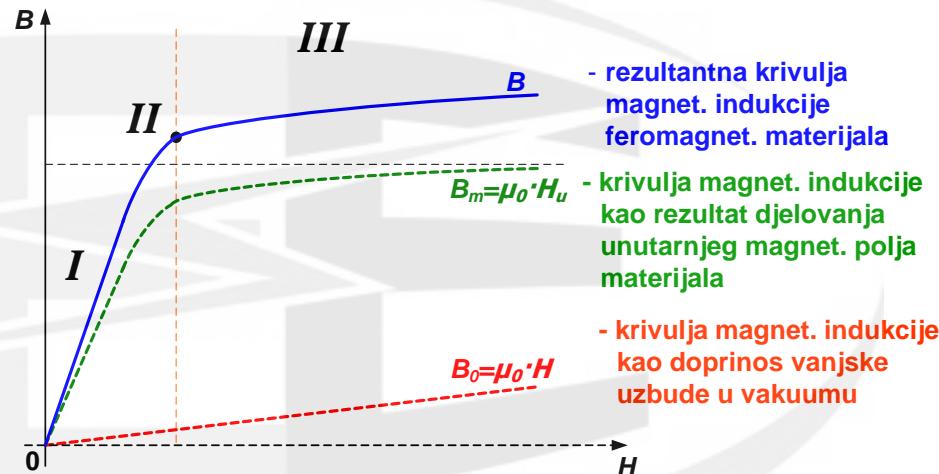
Krivulja prvog magnetiziranja (1) B-H karakteristika

- B-H karakteristika predstavlja zavisnost magnet. indukcije B o jakosti magnet. polja $H = \frac{I \cdot N}{l}$
- kod feromagnetskog materijala veza između vanjske magnet. uzbude H i unutarnje uzbude magnetiziranja materijala H_m nije linearna
- kada magnet. materijal ***prvi puta*** magnetiziramo dobijemo tzv. ***krivulju prvog magnetiziranja*** koja je prikazana na slici

$$\mathbf{B} = f(H)$$

$$\mu_{fe} \neq konst.$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \cdot \mu_{rf} \cdot H$$



- imamo **tri karakteristična** područja krivulje:
 - 1.) **područje I - izrazito naglog porasta B**
 - 2.) **prijelomna točka krivulje II, - KOLJENO krivulje**
 - 3.) **područje zasićenja III - B raste samo zbog člana $\mu_0 \cdot H$**
- kod **krivulje prvog magnetiziranja** feromagn. materijala prema slici, magnet. uzbuda $H=I \cdot N/l$ povećavala se od 0 do neke maksimalne vrijednosti H_m ,
- u praksi se feromagnetski materijali često nalaze i u prostoru izmjenične magnetske uzbude i tada dolazi do magnetiziranja i razmagnetiziranja materijala,
- kada se jakost magnetskog polja H mijenja između $(+H_m)$ i $(-H_m)$ (npr. frekvencija mreže 50 Hz) gustoća magnet. polja \mathbf{B} mijenja se po jednoj karakterističnoj krivulji koja se u nastavku obrađuje

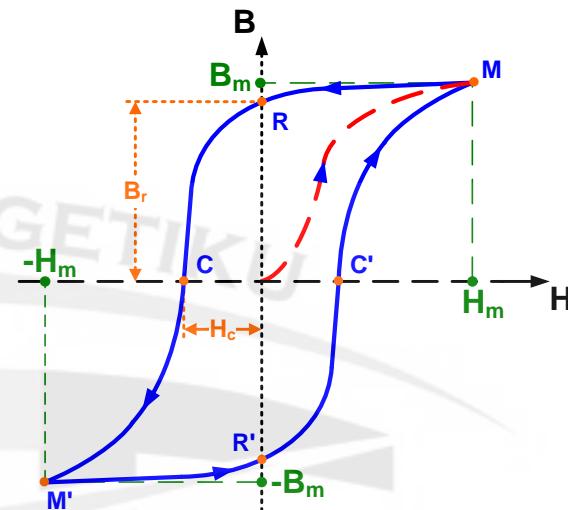
Magnetska histereza

- nastaje krivulja (**M-R-C-M'-R'-C'-M**) koja se mijenja od $+B_m$ preko $+B_r$ i $B=0$ do $-B_m$ te natrag preko $-B_m$, $B=0$ do $+B_m$
- ta krivulja naziva se **PETLJA HISTEREZE**, a cijela pojava **MAGNETSKA HISTEREZA**

H_m , B_m - max. indukcija i max. magnetska uzbuda

B_r - remanentni tok (zaostalo magnetsko polje u materijalu uz $H=0$)

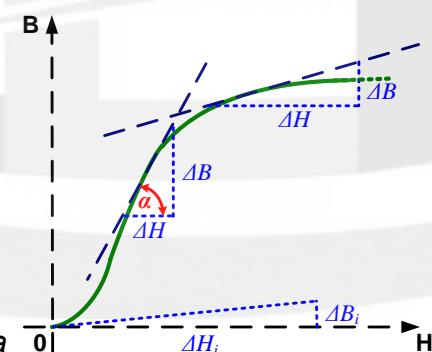
H_c - koercitivnost (jakost magnet. polja potrebna da se poništi zaostali magnetizam u materijalu)



Prikaz krivulje magnetske histereze

Magnetska vodljivost μ_{rf} za feromagnetske materijale

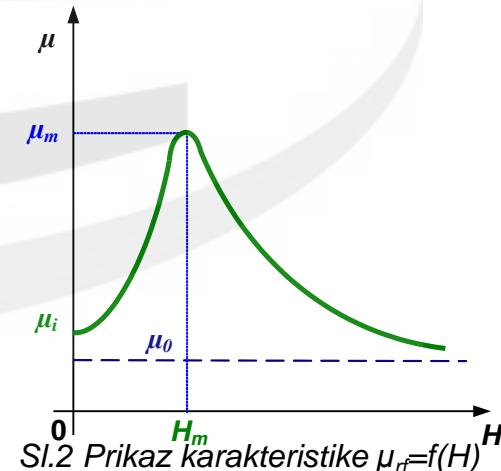
- za feromagnet. materijale magnet. provodljivost nije konstantna, $\mu_{rf} \neq \text{konst}$ a $B-H$ funkcija dana je na slici1.
 - za odnos B i H i za veličinu μ_{rf} vrijede relacije
- $$B = \mu \cdot H = \mu_0 \cdot \mu_{rf} \cdot H \rightarrow \mu_{rf} = \frac{B}{\mu_0 \cdot H}$$
- μ_0 je konstanta i μ_{rf} se može definirati kao strmina tangente u pojedinoj točki krivulje na sl.1 te slijedi



Sl.1 Krivulja $B=f(H)$ za feromagnet, materijal

$$\Delta \mu_{rf} = \frac{\Delta B}{k \cdot \Delta H} = \operatorname{tg} \alpha$$

μ_i je početna permeabilnost - μ_m je maximalna permeabilnost za željezo približno vrijedi $\mu_i=200$ $\mu_m=5000$



Sl.2 Prikaz karakteristike $\mu_{rf}=f(H)$

Gubici histereze i vrtložnih struja (3)

Gubici histereze

- Magnetsko polje u feromagnet. jezgrama mijenja se npr. uz $f=50\text{ Hz}$ sa 50 promjena petlje histereze u sekundi i kao posljedica promjena magnet. uzbude H troši se neka energija a za određivanje te gubitaka histereze postoji empirijska formula:

$$W_h = \eta \cdot B_m^{1,6} \quad [J]$$

(džula)

W'_h - gubitak histereze po jedinici volumena magnet. materijala u jednom ciklusu (1Hz)

B_m - maksimalna vrijednost gustoće magnetskog toka [T]

η - koeficijent koji ovisi o vrsti magnetskog materijala (uvrđuje se eksperimentalno)

$n \approx 130$ - za transformat. lim $n \approx 3700$ - za lijevano željezo

- za ukupne gubitke W_{hu} za cijeli volumen materijala je

$$W_{hu} = W_h \cdot V \cdot n$$

V - volumen materijala

n - broj ciklusa promjene magnetskog toka

- a nakon uvrštavanja W' vrijedi konačno za gubitke histereze:

$$W_{hu} = \eta \cdot B_m^{1,6} \cdot V \cdot n \quad [J]$$

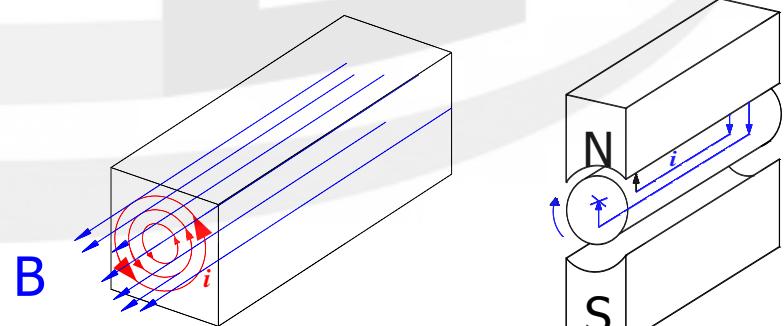
može se konačno zaključiti da gubici histereze ovise o vrsti i volumenu materijala te o intenzitetu i brzini promjena magnetskog polja

Gubici vrtložnih struja W_v

- Gubici vrtložnih struja u feromagnet. materijalu nastaju zbog promjenjivog magnet. toka u kojem se nalazi magnet. materijal koji i dobar vodič električne struje vrtložne električne strujnice koje stvaraju toplinske gubitke za vrijedi relacija

$$W_v = f(I^2, R, t)$$

vrijeme promatranja pojave
otpor feromagnet. materijala
struja vrtložnih električnih silnica



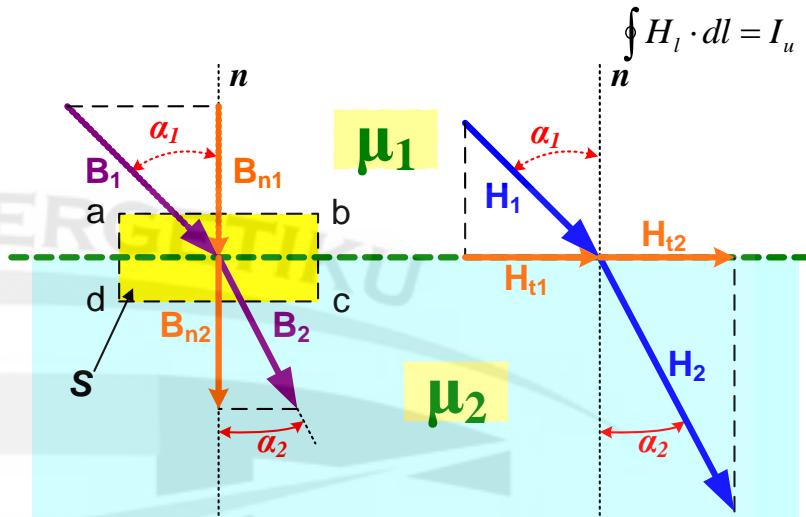
Skica vrtložnih električnih strujnica u magnet. materijalu

- da se smanje vrtložne struje magnet. materijal koji treba imati što manji otpor zato se jezgra transformatora izrađuje od specijalnih međusobno izoliranih tankih limova kako bi se što više smanjila mogućnost protoka vrtložnih struja

Zakon loma magnetskih silnica (1)

- U praksi je često potrebno analizirati pojave na prijelazu silnica magnet. polja između različitih magnet. materijala
- potrebno je definirati zakon loma B -silnica i H -silnica na prijelazu između magnet. materijala sa različitim magnet. provodljivostima μ
- na slici je prikazan lom silnica vektora \vec{B} i silnica vektora \vec{H}
- sav tok Φ koji ulazi u plohu S mora iz nje i izlaziti te za B -linije vrijedi za ortogonalne članove

$$B_{n1} = B_{n2}$$



Prikaz loma silnica \vec{B} i \vec{H} između dva magnet. materijala

- za zatvorenu petlju $a b c d$ može se primjeniti zakon protjecan te je $H_{t1} \cdot l - H_{t2} \cdot l = 0$ → slijedi da su tangencijalni članovi vektora \vec{H} jednaki
- prema slici se mogu pisati izrazi
- kako su razmjeri ortogonalnih članova vektora \vec{B} i tangencijalnih članova vektora \vec{H} u pojedinim materijalima jednaki slijedi izračun i zakon loma magnetskih silnica

$$\begin{aligned} B_{n1} &= B_1 \cdot \cos \alpha_1 \\ B_{n2} &= B_2 \cdot \cos \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{t1} &= H_1 \cdot \sin \alpha_1 \\ H_{t2} &= H_2 \cdot \sin \alpha_2 \end{aligned}$$

$$\frac{B_{n1}}{H_{t1}} = \frac{B_{n2}}{H_{t2}} \Rightarrow \frac{B_1 \cdot \cos \alpha_1}{H_1 \cdot \sin \alpha_1} = \frac{B_2 \cdot \cos \alpha_2}{H_2 \cdot \sin \alpha_2} \Rightarrow \frac{\mu_1}{\tan \alpha_1} = \frac{\mu_2}{\tan \alpha_2} \rightarrow \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

- tangensi kutova loma silnica magnetskog polja na prijelazu magnetskih materijala odnose se upravo proporcionalno magnetkoj provodljivosti materijala

Magnetski krug (1)

Općenito

- Magnetski krug je određeni model kojim opisujemo i proračunavamo ponašanje elektromagnetskih pojava
- magnetski krug se sastoji od:
 - magnetomotorne sile $I \cdot N$ realizirane s određenim brojem zavoja
 - određenog broja magnetskih materijala različitih vodljivosti μ
- u takvom magnetskom krugu promatraju se odnosi magnetskih veličina Φ, B, H , struje I i konstrukcijskih elemenata kruga l, S, V, \dots

Torusni svitak

- U prvom koraku će se KVANTITATIVNO definirani magnetski tok Φ i ostale elektromagnetske veličine koje su potrebne za proračune magnetskog kruga
- prema sl.13.13 formira se TORUSNI svitak uz prepostavke:
 - silnice se zatvaraju unutar svitka
 - tok Φ je homogen unutar svitka i
 - $dr \ll l$
- ugradi se POMOĆNI svitak u kojem se mjeri inducirani napon prema poznatom izrazu

$$e = -N \frac{d\phi}{dt}$$

- promjenjivi magnetski tok Φ_{pro} dobije se prekidanjem struje I u glavnom svitku

Magnetski krug (2)

- specijalnim mjeranjem induciranih napona u pomoćnom zavoju utvrđeno je da za magnetski tok torusnog svtka vrijedi:

$$\phi = \frac{I \cdot N \cdot S}{l} \cdot \mu \quad [H] \quad (13.38)$$

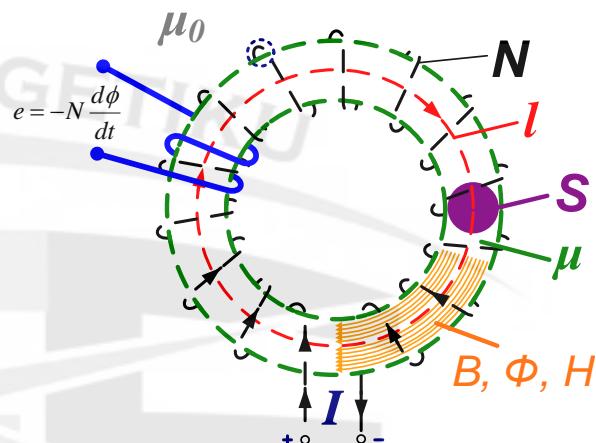
l – duljina zatvorene silnice

- pokazuje se da je tok Φ indirektno proporcionalan duljini silnica l , a direktno proporcionalan s veličinama I , N , S i μ
- sređivanjem izraza za magnetski tok Φ slijedi,

$$\phi = \frac{I \cdot N}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}} = \frac{\theta}{R_m}$$

magnetomotorna sila

otpor magnetskog kruga



SI.13.13 Magnetski krug na primjeru torusnog svtka

$$\theta = I \cdot N = \Phi \cdot R_m \quad [Az]$$

$$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S} = \frac{\theta}{\phi} \quad \left[\frac{A}{Vs} \right] \quad (13.39)$$

$$\phi = \frac{I \cdot N}{R_m} = \frac{\theta}{R_m}$$

- slijedi relacija zakona protjecanja

$$I \cdot N = H \cdot l = \phi \cdot R_m \quad (13.40)$$

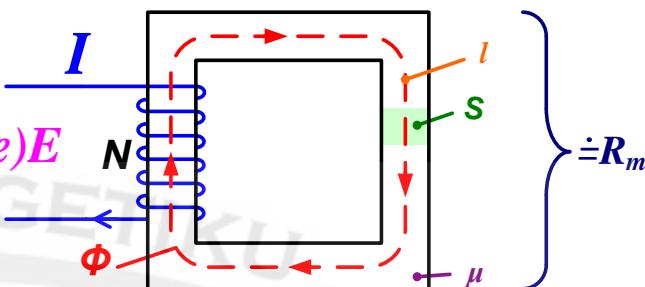
Θ

magnetski napon V_m

Proračun magnetskog kruga (1)

- Metodologija proračuna magnetskog kruga prikazati će se na primjeru jezgre jednofaznog transformatora

Magnetski krug na primjeru transformatorske jezgre



I. slučaj

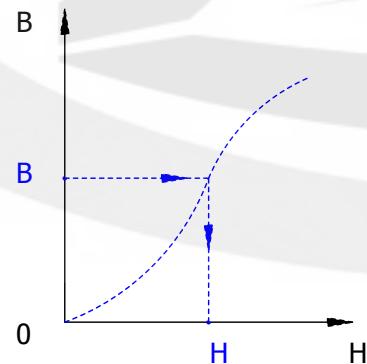
- a) tok Φ poznat traži se (mms) $\Theta = ?$
magnetomotorna sila

- prvo se izračuna magnetska indukcija B

$$B = \frac{\phi}{S}$$

- veličina H treba se očitati s dijagrama $B=f(H)$ na slici

Očitavanja veličine B uz poznatu veličinu H sa krivulje magnetiziranja



- a za mms Θ i struju I vrijedi

$$I = \frac{H \cdot l}{N} \rightarrow \Theta = I \cdot N$$

II. slučaj

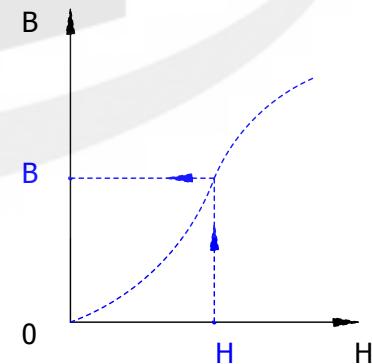
- b) mms $\Theta = I \cdot N$ je poznata traži se *magnetski tok* $\Phi = ?$

- prvi korak je izračun se magnetske uzbude H

$$H = \frac{I \cdot N}{l}$$

- veličina magnet. indukcije B očita se s dijagrama $B=f(H)$ na slici

Očitavanja veličine B sa krivulje magnetiziranja

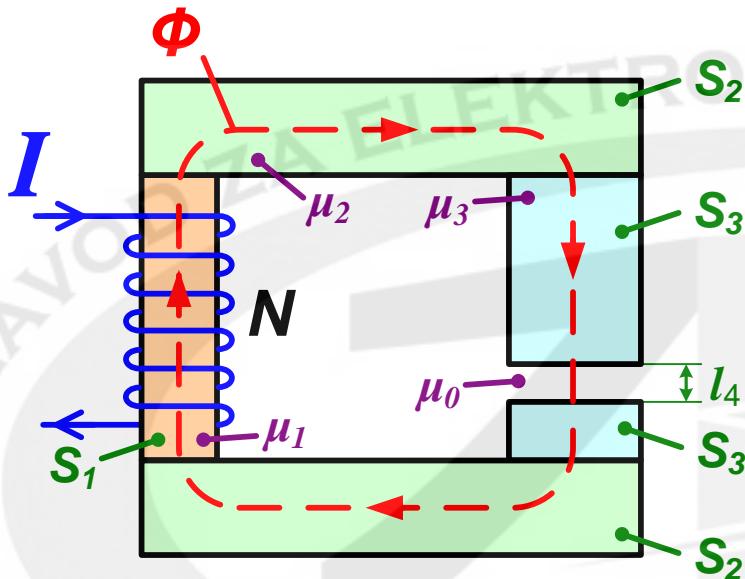


- i konačno vrijedi za *magnetski tok* Φ

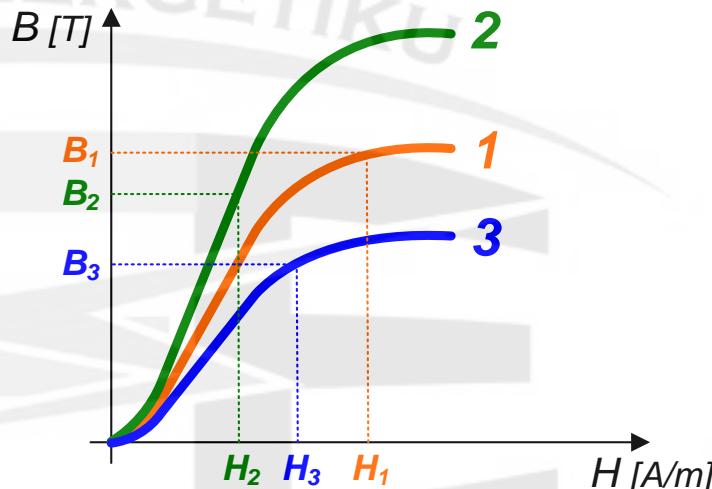
$$\Phi = B \cdot S$$

Složeni magnetski krug

- Na slici je prikazan jedan složeniji magnetski krug sa više u seriju vezanih magnetskih otpora, uz krivulje magnetiziranja za korištene magnetske materijale



Sl. 12.15 Složeni magnetski krug sa više serijski vezanih magnetskih otpora



Sl. 13.16 Krivulje magnetiziranja materijala

- prema postupku I. Prvo bi seочitale vrijednosti za H_1 , H_2 i H_3 sa sl.12.16
- nakon toga bi se prema zakonu protjecanja izračunali amperzavoji $I \cdot N$ i magnetomotorna sila Θ

$$I \cdot N = \oint H \cdot dl \quad \longrightarrow \quad I \cdot N = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_0 \cdot l_4$$



Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

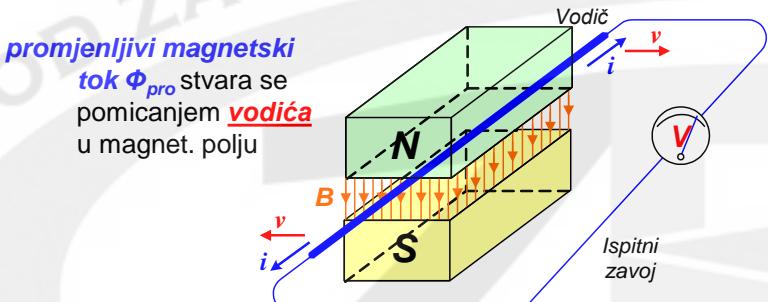
Tema 14. - **ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA**

- *elektromagnetska indukcija*
- *elektromagnetska samoindukcija*
- *elektromagnetska međuindukcija*
- magnetska energija svitka*

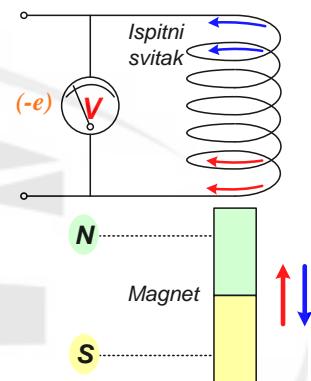
Elektromagnetska indukcija (1)

- Opisano je da protok električne struje uvijek prati nastanak magnet. polja prema pravilu desnog vijka i zakona protjecanja
- u nastavku će se objasniti pojava pri kojoj se pojavljuje **inducirani napon e** na krajevima vodiča koji se nalazi u **promjenljivom magnetskom polju Φ_{pro}**

$$I = \frac{Q}{t} \rightarrow \vec{H} \cdot d\vec{l}$$



Promjenljivi magnetski tok Φ_{pro} stvara se pomicanjem magneta u odnosu na svitak



- definicija: Elektromagnetska indukcija je pojava koja kaže da se na krajevima zavojnice ili bilo kojeg vodiča koji se nalazi u promjenjivom magnetskom toku Φ_{pro} inducira električni napon e

- prema definiciji slijedi i matematički izraz

$$e = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt} [V]$$

$d\Psi = N \cdot d\phi$ – ulančani tok

N – broj zavoja svitka

$\frac{d\phi}{dt}$ – promjena magnetskog toka u vremenu

- važno je još naglasiti da je **promjena napona $d\Phi/dt$** izazvana utjecajem iz nekog vanjskog uzroka,

Elektromagnetska samoindukcija (1)

- **Elektromagnetska samoindukcija** je u biti istovjetna pojava kao i elektromagnetska indukcija, a razlika je jedino u tome **KAKO** se stvara promjenljivo magnetsko polje Φ_{pro}
- u pojavi elektromagnetske samoindukcije promjenljivo magnet. polje Φ_{pro} stvara sama struja svita u kojem promatramo stvaranje induc. napona e
 - napon izvora u_i protjera kroz svitak izmjeničnu struju i , koja stvara promjenljivi magnetski tok Φ_{pro}
 - u promjenljivom magnetskom toku Φ_{pro} nalazi se svitak i u njemu se inducira napon e koji drži ravnotežu naponu izvora u_i

$$u_i = e$$

definicija elektromagnetske samoindukcije

Elektromagnetska samoindukcija je pojava pri kojoj promjenjivi magnet. tok Φ_{pro} stvara sama struja i svitka, te se uslijed tako stvorenog promjenjivog magnet.toka Φ_{pro} inducira napon e na krajevima svitka

- prema zakonu elektromagnet. indukcije vrijedi:

$$e = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

➤ koristeći poznate pretvorbe slijedi izračun:

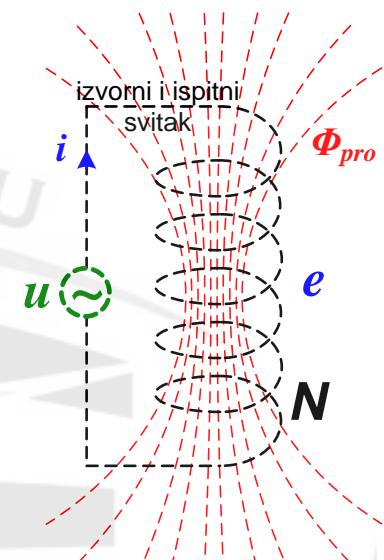
$$\phi = \frac{I \cdot N}{R_m} \rightarrow d\phi = \frac{N}{R_m} \cdot di \rightarrow e = -\frac{N^2}{R_m} \cdot \frac{di}{dt} [V] \rightarrow R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{s} \quad \text{magnetski otpor svitka}$$

napon samoindukcije e

- a veličina N^2/R_m predstavlja koeficijent samoindukcije L prema izrazu

$[H]$ henri

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{s}} [H] \quad (14.3)$$



Svitak priključen na izvor izmjeničnog napona u_i i pojava samoindukcije

Elektromagnetska samoindukcija (2)

- i na kraju se dobije konačni izraz za inducirani napon samoindukcije e ,

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt} \quad [V] \quad (14.4)$$

- u izrazu (14.3) za konstantu L je navedena mjerna jedinica Henri, te slijedi definicija jedinice 1H:

$$[L] = ? \quad e = -L \cdot \frac{di}{dt} \rightarrow L = -e \cdot \frac{dt}{di}$$

$$[L] = \left[\frac{e \cdot dt}{di} \right] = \frac{V \cdot s}{A} \Rightarrow \Omega s \rightarrow [H] = \left[\frac{V \cdot s}{A} \right]$$

- definicija 1H: svitak ima induktivitet 1 henri ako se uz promjenu struje od 1A u 1s inducira u svitku napon 1V
- s obzirom na koeficijent samoindukcije L može sa uz određene matematičke supstitucije dobiti i drugi oblik izraza za koeficijent L te slijedi kratki računski postupak

- ako se prema izrazu $L = \frac{N^2}{R_m} = N \cdot \frac{N}{R_m}$

→ i ako za tok Φ vrijedi $\phi = \frac{I \cdot N}{R_m} \rightarrow \frac{\phi}{I} = \frac{N}{R_m}$

- slijedi drugi oblik izraza za induktivitet L

$$L = N \cdot \frac{\phi}{I} = \frac{\Psi}{I} \quad (14.5) \quad \text{N} \cdot \phi = \Psi - \text{ulančani tok}$$

- izrazi za elektromagnetsku indukciju i samoindukciju

elektromagnetska indukcija

$$e = -N \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad (14.1)$$

elektromagnetska samoindukcija

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt} \quad (14.4)$$

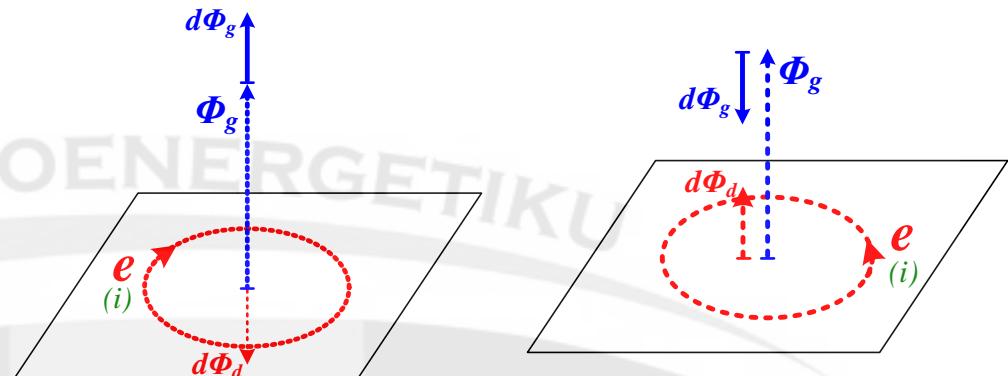
Lenzovo pravilo (1)

- Lenzovog pravilo nam objašnjava "−" u izrazima za elektromagnetsku indukciju i samoindukciju

e - mjerjenja pokazuju da je inducirani napon povezan sa promjenom glavnog toka Φ_g ($d\Phi_g$) sa **pravilom lijevog vijka**

i - struja koju bi potjerao napon e stvara prema **pravilu desnog vijka** dodatno magnetsko polje $d\Phi_d$

$d\Phi_d$ - pojava novog toka $d\Phi_d$ vezana induciranim naponom e **pravilom desnog vijka**



1.Utjecaj **porasta** magnetskog toka za $d\Phi$ na inducirani napon e

2.Utjecaj **smanjenja** magnetskog toka za $d\Phi$ na smjer induciranog napona e

- na sl.1 je glavni tok Φ_g povećan za $d\Phi_g$ i kao posljedica promijene tog toka inducirao se napon e smjera prema pravilu lijevog vijka
- inducirani napon e svojom strujom i stvara svoj dodatni tok $d\Phi_d$ prema pravilu desnog vijka
- vidimo da je dodatni tok $d\Phi_d$ koji je posljedica napona e suprotnog smjera od uzročne promijene glavnog toka $d\Phi_g$ i upravo to je tumačenje predznaka "−" u izrazima elektromag. indukcije i samoindukcije

- **LENZOVO PRAVILO** definirati se na slijedeći način:

smjer induciranog napona e je takav da po tom naponu realizirana struja i stvara dodatni magnetski tok $d\Phi_d$ koji se svojim djelovanjem suprostavlja promjeni osnovnog magnetskog toka $d\Phi_g$ koji je uzrok nastanka napona e

- mjerna jedinica za konstantu L je **1 Henri** →

definicija 1H: svitak ima induktivitet 1 henri ako se uz promjenu struje od 1A u 1s inducira u svitku napon 1V

Napon pomicanja (1)

- Prikazano je homogeno magnetsko polje u kojem se nalazi vodič duljine l koji se kreće u magnet. polju in koji sa svojim priključnim kabelima obuhvaća dio magnetskog toka Φ
- za **PRAVILO INDUCIRANJA NAPONA POMICANJA** vrijedi
 - ako električni vodič pomičemo brzinom \vec{v} u magnet. polju indukcije \vec{B} , na krajevima vodiča inducira se napon e

u homogenom magnet. polju vrijedi

$$e = (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot \vec{l} \quad [V]$$

u nehomogenom magnet. polju vrijedi

$$de = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

- ako vodič nije u okomitom položaju **ne pomiče se okomito** brzinom v na silnice magnetskog polja B vrijedi

$$e = B \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot l \cdot \cos \beta$$

$$de = B \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot dl \cdot \cos \beta$$

- a za ukupni napon vrijedi

$$e = \int_l (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

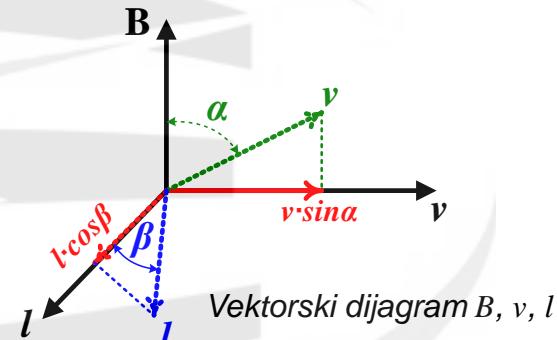
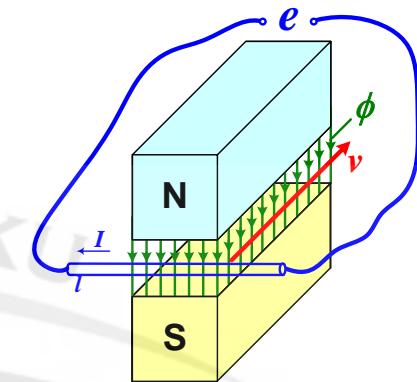
Prikaz podudarnost zakona elektromagnetske indukcije i napona pomicanja

- kako se vodič pomiče, mijenja se i veličina magnet. toka Φ koji vodič obuhvaća te vrijedi
- vidi se da umnožak $(ds \cdot l)$ predstavlja diferencijal površine dS i slijedi

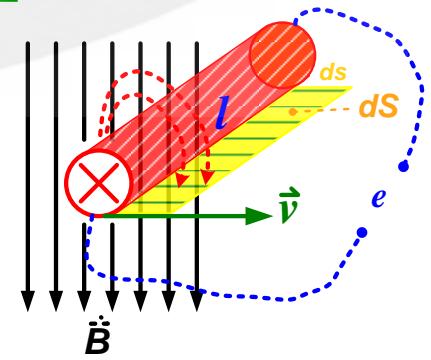
$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{dS \cdot B}{dt} = \left(\frac{ds}{dt} \right) \cdot l \cdot B$$

$\xrightarrow{\text{v - brzina}}$

$$e = \vec{B} \cdot \vec{v} \cdot \vec{l}$$



l – dužina vodiča
 ds – diferencijal put
 dS – diferenc. površine
 \vec{v} – brzina
 \vec{B} – magnet. indukcija



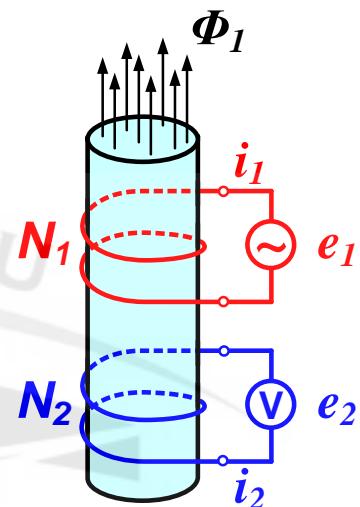
pomicanja vodiča duljine l u magnet. polju indukcije \vec{B}

Elektromagnetska međuindukcija (1)

- kao treća osnovna pojava inducirana napona e u vodiču koji se nalazi u promjenjivom magnetskom toku Φ_{pro} je pojava **ELEKTROMAGNETSKE MEĐUINDUKCIJE**

➤ opis fizikalne slike

- prikazana dva svitka povezana su jezgrom od magnet. materijala
- svitak 1** je priključen na izvor izmjeničnog napona e_1 , i kroz njega teče struja i_1 , a N_1 je broj zavoja svitka
- izmjenična struja i_1 stvara **promjenjivi** magnetski tok Φ_1 u kojem se nalazi i **svitak 2**
- svitak 2** je pasivan ispitni svitak koji mjeri napon elektromagn. međuindukcije e_2



Međuinduktivitet dvaju svitaka

- definicija elektromagnetske međuindukcije: Međuinduktivitet dvaju svitaka je veličina koja pokazuje koliki se napon e_2 inducira u svitku 2 ako se u svitku 1 odvija promjena struje u vremenu di_1/dt

matematička formulacija problema

- prema poznatoj relaciji $\phi = \frac{I \cdot N}{R_m}$ slijedi $\phi_1 = i_1 \cdot \frac{N_1}{R_m}$ $\rightarrow d\phi_1 = \frac{N_1}{R_m} di_1$
- a prema zakonu elektromagnetske indukcije slijedi relacija za inducirani napon e_2 u svitku 2 $e_2 = -N_2 \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{N_2}{R_m} \cdot \frac{N_1 \cdot di_1}{R_m} = -\frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \cdot \frac{di_1}{dt}$

$$M_{12} = M_{21} = \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m}$$

$$e_2 = -M_{12} \cdot \frac{di_1}{dt}$$

$$e_1 = -M_{21} \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Elektromagnetska međuindukcija (2)

- Mjerna jedinica za koeficijent međuindukcije M može se definirati kako slijedi:

definicija 1 H - međuinduktivitet 1 henri imaju dva svitka ako se u jednom svitku struja mijenja jednolično za 1A/1s, a u drugom svitku inducira napon 1V

$$[M] = \left[\frac{e \cdot dt}{di} \right] \Rightarrow \frac{V \cdot s}{A} = \Omega s$$

Henri

Potrebno je još definirati i međusobne odnose M i L_1, L_2

- pokazano je već prije da za L_1 i L_2 vrijedi

$$L_1 = \frac{N_1^2}{R_m} \quad \text{i} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{R_m}$$

a $L_1 \cdot L_2$ je

$$L_1 \cdot L_2 = \frac{N_1^2 \cdot N_2^2}{R_m^2} = \left(\frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \right)^2$$

- konačni je izraz za odnos M i L_1, L_2 dan relacijom

$$\rightarrow M = \sqrt{L_1 \cdot L_2} [H]$$

- kod realnih svitaka mora se još uzeti u obzir moguće rasipanje magnetskog polja Φ_1

$$M'_{12} = \frac{M_2 \cdot \phi_{12}}{i_1} < M_{12} = \frac{M_2 \cdot \phi_1}{i_1}$$

Φ_{12} - zajednički magnet. tok svitka 1 i 2
 Φ_1 - magnetski tok svitka 1
 Φ_r - rasipni tok $\phi_r = \phi_1 - \phi_{12}$

- razlika između glavnog magnetskog toka Φ_1 i zajedničkog magnetskog toka Φ_{12} uzima se u obzir sa konstantom magnetske veze k ,

$$M = k \sqrt{L_1 \cdot L_2} [H]$$

međuinduktivitet uz rasipanje

- a za faktor magnetske veze k vrijedi relacija

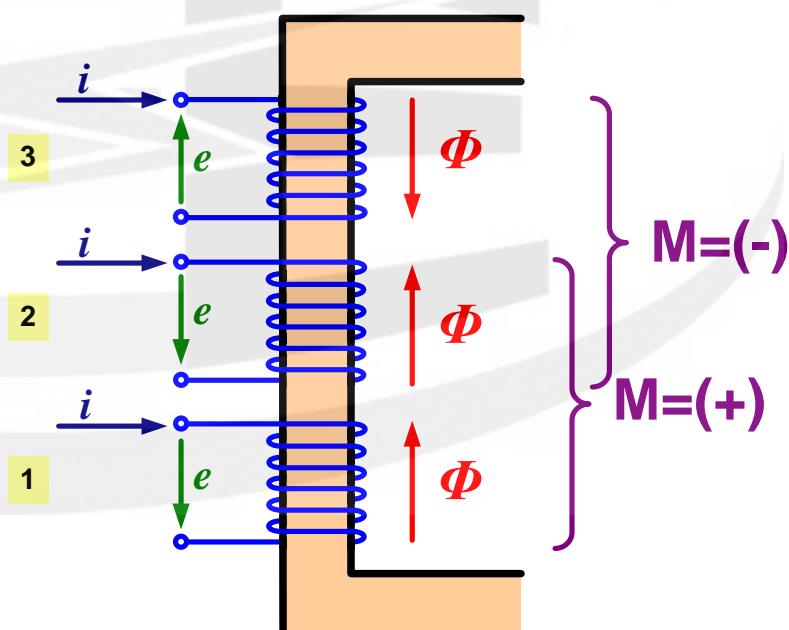
$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}$$

$k=1$ – za idealne prilike
 $k<1$ – za realne prilike

Međuinduktivitet svitaka protjecanih istom strujom i (1)

- U praktičnim proračunima električnih strujnih krugova potrebno je voditi računa o načinu namatanja i spajanja svitaka jer o tome ovisi ukupni induktivitet svitaka
- uz to potrebno je definirati i način označavanja smjera magnetskog toka Φ pojedinih svitaka
- na sl.14.11 prikazan je način određivanja smjera toka Φ prema pravilu desnog vijka i način određivanja predznaka koeficijenta međuindukcije M

- ako pozitivne struje svitaka (1 i 2) uspostave magnetski tok u istom smjeru tada je međuindukcija “+”
- ako pozitivne struje svitaka (1 i 3) potjeraju magnetski tok u suprotnom smjeru tad je međuindukcija “-”
- ako su elektromotorne sile e istog smjera tada je međuindukcija “+”



Sl.14.11 Prikaz međuindukcije za tokove Φ različitih smjerova

Međuinduktivitet svitaka protjecanih istom strujom i (1)

- U proračunima električnih strujnih krugova potrebno je voditi računa o načinu namatanja i spajanja svitaka i uz to je potrebno definirati i način označavanja smjera magnet. toka Φ pojedinih svitaka

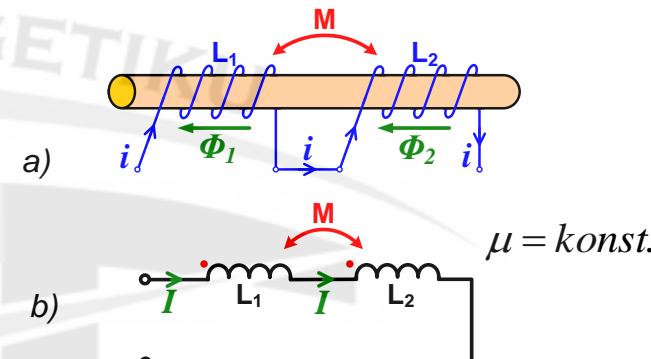
Slučaj 1: sukladno spojeni svici - magnetska polja se nadopunjavaju

- na sl.12.a) prikazan je slučaj kada struja ulazi u oba svitka u istom smjeru namatanja, i tokovi Φ_1 i Φ_2 se nadopunjavaju
- na sl.12.b) prikazan je način označavanja svitaka sa točkom ispred ili iza svitka
- pri sukladnom spajanju svitaka međuinduktiviteti se zbrajaju

$$L_u = L_1 + L_2 + M_{12} + M_{21}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$L_u = L_1 + L_2 + 2M$$



Sl. 14.12 Prikaz sukladno spojenih svitaka u strujnom krugu

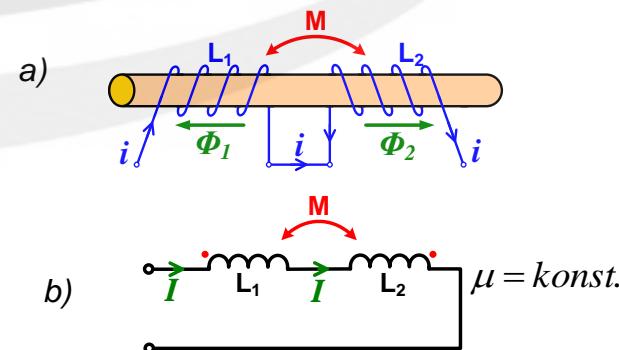
Slučaj 2: suprotno spojeni svici - magnet. polja se suprostavljaju

- na sl.13.a) prikazan je slučaj kada struja u oba svitka ne ulazi u istom smjeru namatanja, i tokovi Φ_1 i Φ_2 se suprostavljaju
- na sl.13.b) prikazano je označavanje svitaka kada struja u oba svitka ne ulazi na mjestu oznake "•" svitka i međuinduktiviteti svitaka se oduzimaju

$$L_u = L_1 + L_2 - M_{12} - M_{21}$$

$$M_{12} = M_{21} = M$$

$$L_u = L_1 + L_2 - 2M$$



Prikaz suprotno spojenih svitaka u strujnom krugu

Rad vodiča pri gibanju u magnet. polju i magnet. energija svitka

- Vodič se u magnet. polju kreće pod djelovanjem sile **F** na putu **s** a za izvršeni rad **A** vrijedi
- uz transformacije $B_n = B \cdot \sin \alpha$ i $B_n \cdot S = \phi$ slijedi za rad **A** pri gibanju vodiča u magnetskom polju

$$A = F \cdot s = B \cdot I \cdot l \cdot s \cdot \sin \alpha$$

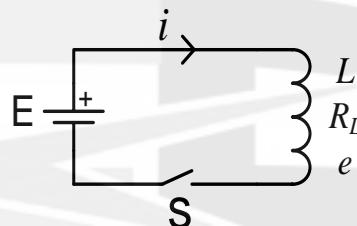
S - površina koju prekrije provodnik duljine *l* na putu s

$$A = B_n \cdot I \cdot S$$

$$A = \phi \cdot I \quad [J]$$

Magnetska energija svitka

- U strujnom krugu sa priključenim svitkom uključi se sklopka **S**, i prati se **prijelazna pojava** do uspostave ravnoteže u električnom strujnom krugu i energija koja se akumulira u svitku
- u svakom trenutku prijelazne pojave vrijedi za trenutnu snagu **p** i energiju **dW**:
- proračun 1.** - slijedi proračun akumulirane energije svitka pomoću koeficijenta samoind. **L**



L – induktivitet svitka
R – radni otpor svitka
e – elektromotorna sila

$$p = e \cdot i$$

$$dW = e \cdot i \cdot dt$$

e – inducirani napon samoindukcije
i – trenutna vrijednost struje

diferencijal energije u vremenu *dt*

- uz $e = -L \cdot \frac{di}{dt}$ slijedi za energiju $dW = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i \cdot dt = L \cdot i \cdot di$

$$dW = L \cdot i \cdot di$$

- ukupna mag.energija svitka dobije se integriranjem od **i=0** do **i=I**

$$W = L \cdot \int_0^I i \cdot di = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 \Big|_0^I$$

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \quad [J]$$

- uz relaciju da je $L \cdot I = \psi$ slijedi

$$W_m = \frac{1}{2} \cdot \psi \cdot I = \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi^2}{L}$$

$$W_{el} = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q \cdot U}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C}$$

Magnetska energija svitka (2)

- **proračun 2.** - proračun magnet. energije svitka pomoću karakterističnih veličina mag. polja (Φ , B , μ)

➤ uz izraz $e = -N \cdot \frac{d\phi}{dt}$ slijedi

$$dW_m = e \cdot i \cdot dt = N \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot i \cdot dt = N \cdot i \cdot d\phi$$

$$N \cdot i = H \cdot l$$

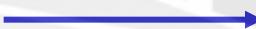
$$d\phi = S \cdot dB$$

$$dW_m = N \cdot i \cdot d\phi$$

$$dW_m = H \cdot l \cdot S \cdot dB$$

V - volumen

- ukupna energija svitka dobije se integriranjem magnet. indukcije B od 0 do B_m te je



$$W_m = V \int_0^{B_m} H \cdot dB$$

- a za magnetsku energiju po jedinici volumena slijedi dalje

$$W'_m = \frac{W_m}{V}$$

$$H = \frac{B}{\mu}$$

$$W'_m = \int_0^{B_m} \frac{B}{\mu} \cdot dB$$

- a nakon integriranja i korištenja izraza $B = \mu \cdot H$ slijedi za W_m

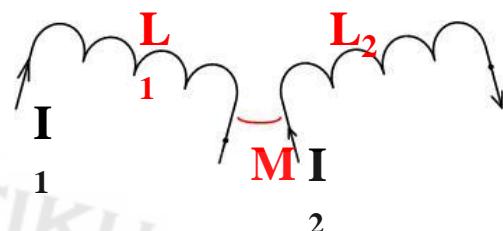
$$W'_m = \frac{B^2}{2 \cdot \mu} [J]$$

$$W'_m = \frac{B \cdot H}{2} = \frac{\mu \cdot H^2}{2} [J]$$

Magnetska energija sustava svitka (1)

- Opisati će se primjeru dva svitka prema slici
- **prvi korak:** struja i_1 raste u *svitku 1* od 0 do I_1 , a *svitak 2* je otvoren
- za magnetsku energiju W_{L1} *svitka 1* sada slijedi

$$W_{L1} = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2}$$

Dva svitka protjecana strujom I_1 i I_2

- **drugi korak:** struja i_2 povećava se postepeno od 0 do I_2 , a struja *svitka 1* je konstantno I_1 , tada uz $M > 0$ za ulančani tok drugog svitka Ψ_2 , uz konstantne i promjenljive veličine, vrijedi
- i integriranjem ulančanog toka od 0 do I_2 konačno vrijedi

$$\Psi_2 = L_2 \cdot i_2 + M \cdot I_1 \quad \text{ulančani tok drugog svitka vrijedi}$$

$$d\Psi_2 = L_2 \cdot di_2 + 0 \quad \text{jer je } I_1 \text{ konstantno}$$

$$W_{L2} = \int_0^{I_2} d\Psi_2 \cdot i_2$$

$$W_{L2} = \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2}$$

- **treći korak:** porast struje i_2 izazvat će i promjenu ulančanog toka prvog svitka Ψ_1 , te se i zbog toga povećava magnet. energija međuinduktiviteta W_M
- a za ukupnu energiju W_{uk} sustava svitaka sada slijedi
- uz supstitucije

$$\Psi_1 = L_1 \cdot I_1 \pm M \cdot I_2 \quad \text{i} \quad \Psi_2 = L_2 \cdot I_2 \pm M \cdot I_1 \quad \rightarrow W_{uk}$$

$$W_M = M \cdot I_1 \cdot I_2$$

$$W_{uk} = \frac{L_1 \cdot I_1^2}{2} + \frac{L_2 \cdot I_2^2}{2} \pm M \cdot I_1 \cdot I_2$$

$$W_{uk} = \frac{I_1 \cdot \Psi_1}{2} + \frac{I_2 \cdot \Psi_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (I_1 \cdot \Psi_1 + I_2 \cdot \Psi_2)$$

Serijski spoj induktiviteta

- Na slici je prikazan primjer serijskog spajanja induktiviteta a traži se **UKUPNI INDUKTIVITET**
- prema slici slijede početni električni uvjeti:
 - struja kroz sve serijski spojene svitke je jednaka
 - naponi svitaka se zbrajaju i jednaki su naponu izvora

$$i = i_1 = i_2 = i_3$$

$$e_i = e_1 + e_2 + e_3$$

- ako se koriste poznate relacije elektromagnetske samoindukcije te uz jednadžbe početnih uvjeta slijedi
- i konačno slijedi izraz za ukupni induktivitet serijski spojenih induktiviteta

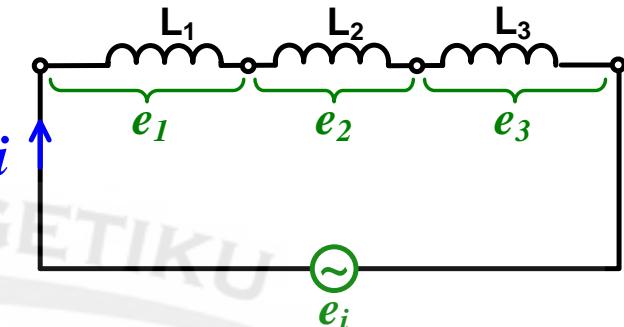
Ukupni induktivitet serijski spojenih svitaka jednak je zbroju induktiviteta pojedinih svitaka

- za odnos induciranih napona e_1 , e_2 , e_3 i veličina induktiviteta L_1 , L_2 , L_3 za promatrani strujni krug slijedi
- kako vrijedi $i = i_1 = i_2 = i_3$ $\rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} = \frac{di_3}{dt}$ slijede izrazi koji definiraju odnose induktiviteta L i napona

$$e = -L \cdot \frac{di}{dt};$$

$$L = \sum_i^n L_i$$

$$\begin{aligned} e_1 : e_2 &= L_1 : L_2 \\ e_1 : e_3 &= L_1 : L_3 \\ e_2 : e_3 &= L_2 : L_3 \end{aligned}$$



Prikaz serijskog spoja induktiviteta

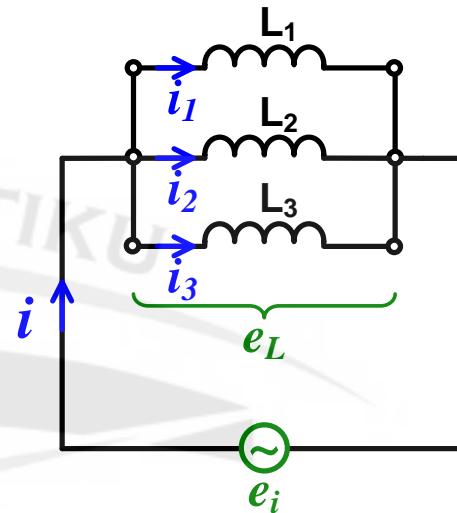
- *inducirani naponi e serijski vezanih svitaka odnose se upravo proporcionalno veličini induktiviteta svitaka L*

Paralelni spoj induktiviteta (1)

- prikaz primjer paralelnog spoja induktiviteta u izmjeničnom strujnom krugu
- početni električni uvjeti promatranog strujnog kruga:
 - naponi pojedinih svitaka i napon izvora su jednaki
 - struje svitaka se zbrajaju

$$e_i = e_{L1} = e_{L2} = e_{L3}$$

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$



- ako se koristi relacija za elektromagnetsku samoindukciju → $e = L \cdot \frac{di}{dt}$
- i koristeći relacije početnih uvjeta slijedi $L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = L_3 \cdot \frac{di_3}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$

Prikaz paralelnog spoja induktiviteta

- te ako je $di = e \cdot \frac{dt}{L}$...te uz početne uvjete

$$di = di_1 + di_2 + di_3 \rightarrow e \cdot \frac{dt}{L} = e_1 \cdot \frac{dt}{L_1} + e_2 \cdot \frac{dt}{L_2} + e_3 \cdot \frac{dt}{L_3}$$

- i nakon sređivanja dobijemo $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$

$$\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{L_i}$$

Recipročna vrijednost ukupnog induktiviteta jednaka je sumi recipročnih vrijednosti induktiviteta paralelno spojenih svitaka

Veličine struja paralelno spojenih svitaka odnose se obrnuto proporcionalno vrijednostima pojedinih induktiviteta

ZAVOD ZA ELEKTROENERGETIKU

KRAJ

TEMA 11-14
ELEKTROMAGNETSKA POLJA