TEHNIČKI FAKULTET
Sveučilište u Rijeci

OSNOVE ELEKTROTEHNIKE 1

TEMA 1-6

ELEKTROSTATSKA POLJA

Materijali za studente - (ak.god. 2011/2012.)

Tema 1. - ***UVOD U ELEKTROSTATSKA POLJA***

- ***atomi, elektroni, električni naboj***
- ***općenito o elektrostatskom polju***
- ***sila u električnom polju***
- ***vektor jakosti električnog polja***
- ***električno polje u prostoru – vektori F i E***

Atomi - elektroni - električni naboj (1)

Prikaz jednostavne strukture atoma

- *SASTAV SVE MATERIJE -* niz sitnih čestica različitih vrsta i svojstava
- *POJAVA ELEKTRICITETA -* gibanje i raspored čestica unutar mikrostrukture materije

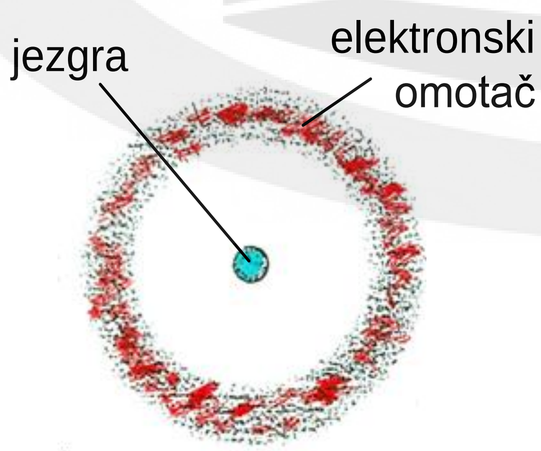
JEDNOSTAVNA SLIKA ATOMA

jezgra
(nalazi se u središtu atoma)

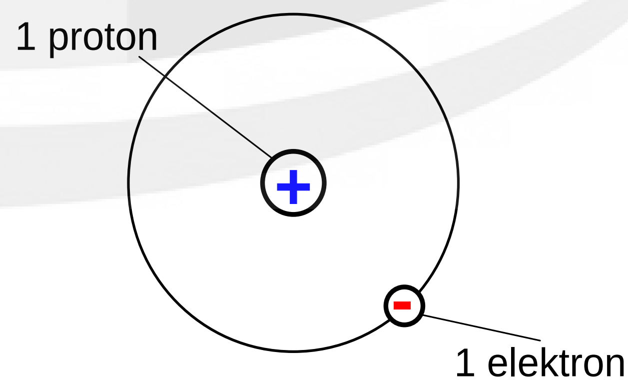
elektroni
(kruže oko jezgre)

elektronski omotač
(prostor oko atoma u kojem kruže elektroni)

- na sl.1.1 prikazan je načelni ustroj atoma sa elektronskim omotačem u kojem kruže elektroni,
- na sl.1.2 prikazan je jednostavan vodikov atoma sa jednim pozitivnim nabojem u jezgri i jednim elektronom kao negativnom električnim česticom koja kruži oko jezgre



Sl.1.1 Načelni ustroj atoma



Sl.1.2 Vodikov atom

Atomi - elektroni - električni naboj (2)

Elektroni u strukturi atoma

- ***JEZGRA ATOMA - PROTONI***
  - nalazi se u središtu atoma, zauzima mali prostor u strukturi atoma i u njoj je sadržana glavnina mase atoma
  - u jezgri se nalaze protoni i neutroni koji su približno jednakih masa
  - *masa protona* je *$1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg*
  - *naboj protona* je ***pozitivan*** i iznosi *$+1{,}6 \cdot 10^{-19}$ [As]*
- *ELEKTRONI*
  - elektroni kruže oko jezgre velikom brzinom u točno određenim energetskim putanjama
  - *masa* elektrona je *$9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg* *(1840 puta manje od protona)*
  - *naboj elektrona* je ***negativan*** i iznosi *$-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ [As]*

- *svaki ELEKTRON ima* ***dva oblika gibanja***

kruženje oko jezgre

okretanje oko vlastite osi *(spin elektrona)*

- u svakom trenutku elektron sadrži dvije vrste *ENERGIJE*
  - *KINETIČKU* energiju - zbog gibanja elektrona
  - *POTENCIJALNU* energiju položaja - zbog sile privlačenja
- uspostavlja se *ENERGETSKA BILANCA* kinetičke i potencijalne energije
- s obzirom na broj i položaj elekrona u atomu vrijedi: - *u atomu se ne mogu nalaziti dva ili više elektrona sa jednakim energetskim nivoima i jednakim spinovima (PAULIJEV PRINCIP)*

  - *SVAKA ORBITA može imati najviše* ***dva elektrona***

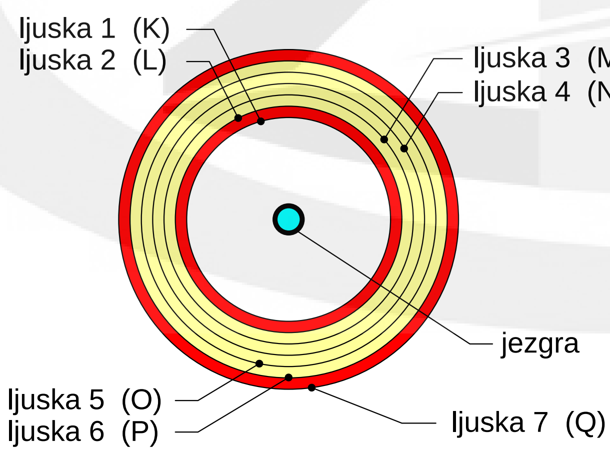
1 jednaki energetski nivo

2 različiti spinovi

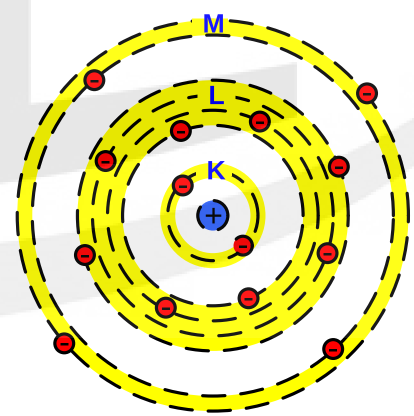
Atomi - elektroni - električni naboj (3)

- Na slikama su prikazane elektronske ljuske sa karakterističnim oznakama i osnovni raspored elektrona u pojedinim ljuskama
- u elektrotehnici su nam u većini slučajeva interesantni samo *slobodni elektroni* u vanjskim ljuskama koji su energetski slabije vezani za jezgru atoma, te se lakše odvajaju od atoma i kreću se po strukturi materijala

- jedna ili više putanja formira ELEKTRONSKE LJUSKE koje se označavaju slovima **K**,**L**,**M**,**N**,**O**,**P** i **Q** *(ili brojkama od 1 do 7)* (sl.1.3)
- ljuska "K" je najbliža jezgri i sadrži najmanju energiju
- ako je m broj ljuske tada ona može imati najviše $2 \cdot m^2$ elektrona (sl.1.4)



Sl.1.3 Model elektronskih ljuski



Sl.1.4 Elektroni u elektronskim ljuskama atoma

$$\left(n_e = 2 \cdot m^2 \rightarrow \begin{array}{l} \text{m} - \text{broj ljuske} \\ \text{n}_\text{e} \text{ - broj elektrona} \end{array} \right)$$

Atomi - elektroni - električni naboj (4)

- NORMALNO STANJE ATOMA
  - elektroni prvo popunjavaju orbite sa nižim energetskim nivoima (bliže jezgri)
  - nisu popunjene samo najudaljenije orbite od jezgre
- POPUNJENE ENERGETSKE ZONE
  - to su energetske zone (ljuske) čiji su svi nivoi popunjeni elektronima
- SLOBODNA ENERGETSKA ZONA
  - to je energetska zona kod koje **nisu** svi nivoi popunjeni elektronima
  - ove energetske zone su u pravilu udaljenije od jezgre
- SLOBODNI-VALENTNI ELEKTRONI
  - nalaze se u slobodnim najudaljenijim zonama od jezgre te na njih djeluju slabije privlačne sile jezgre,
  - mogu se relativno lagano odvojiti od atoma i slobodno se kretati u strukturi materije te predstavljaju osnovu električne struje
- BROJ SLOBODNIH ELEKTRONA
  - u vodičima ≈ 10^{20} u 1 cm^3
  - u poluvodičima ≈ 10^{11} do 10^{15} u 1 cm^3
  - u izolatorima ≈ do 10^{3} u 1 cm^3

Općenito o elektrostatskom polju (1)

Pojava elektrostatskog polja

- U PRIRODI često susrećemo ELEKTROMAGNETSKA POLJA koja djeluju kao cjelina

- takvo polje ima dvije komponente → električnu i magnetsku

- poznato je da svaka promjena električnog polja uzrokuje i promjenu magnetskog polja i obrnuto

- ta dva polja se u općem slučaju ne mogu odvojiti i najčešće se događaju i promatraju zajedno

- međutim samo kada naboji miruju tada se električno polje i magnetsko polje mogu promatrati odvojeno *jer nema PROMJENA te nema niti međudjelovanja između električnog i magnetskog polja što je kasnije detaljnije objašnjeno*

- dolazimo do promatranja mirnih naboja i električnog polja koje se ne mijenja, te je predmet daljnjeg razmatranja upravo električno polje naboja koji miruju

Općenito o elektrostatskom polju (2)

Pojava elektrostatskog polja

- spomenuto je da za strukturu atoma vrijedi

ATOMI → pozitivna jezgra

ATOMI → “oblak” negativnih elektrona

- za *NORMALNO* stanje materijalnih predmeta vrijedi ravnoteža pozivitnih i negativnih naboja a sama materija i njeno okruženje je u električki neutralnom stanju

RAVNOTEŽA

+ naboja — naboja

- *POSEBNO INDUCIRANO* stanje materijalnih predmeta nastaje kada se realizira odvajanje pozitivnih i negativnih naboja u materijalnom predmetu ili promatranom prostoru

- GIBANJE materijalnih predmeta + TRENJE

  - stvaranje polariziranog statičkog naboja koji se ne mogu slobodno gibati

  - stvara se **statički elektricitet** kao pojava vezana uz statički naboj

ODVAJANJE NABOJA

↓

ELEKTROSTATSKO POLJE

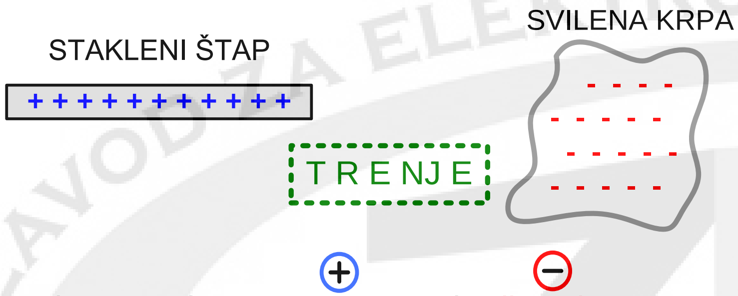
- *ELEKTROSTATIKA* je dio nauke o elektricitetu koji govori o pojavama što nastaju u prostoru u kojem električni naboji miruju

Općenito o elektrostatskom polju (3)

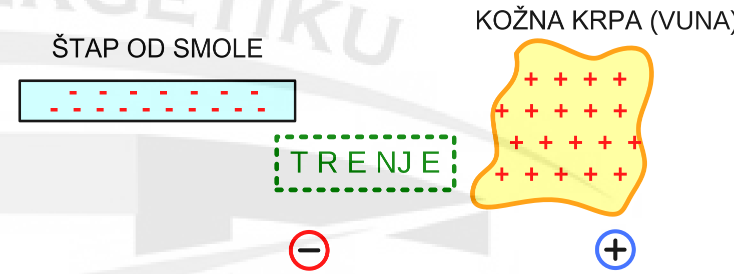
Primjeri odvajanja elektrostatskih naboja

Primjer 1. Trljanje staklenog štapa svilenom krpom

Primjer 2. Trljanje štapa od smole kožnom krpom

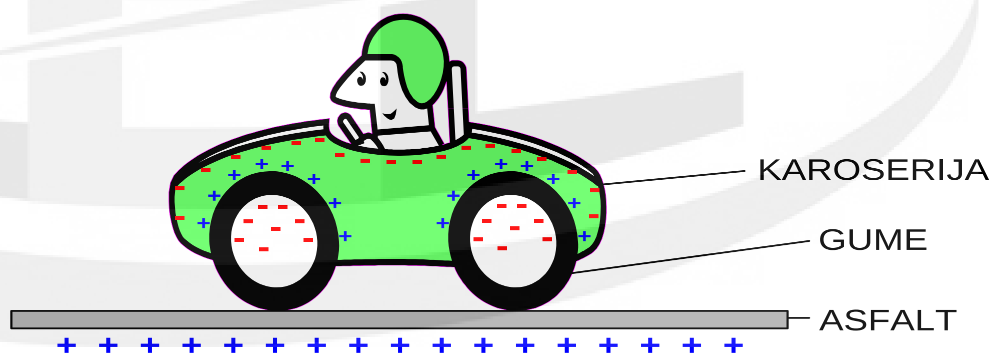


Sl.1.6 Trenje staklenog štapa i svilene krpe



Sl.1.7 Trenje ebonitnog štapa (smola) i kožne krpe

Primjer 3. Vožnja automobila po asfaltu (trenje guma automobila i asfalta)



Sl.1.8 Gibanje automobila po asfaltu

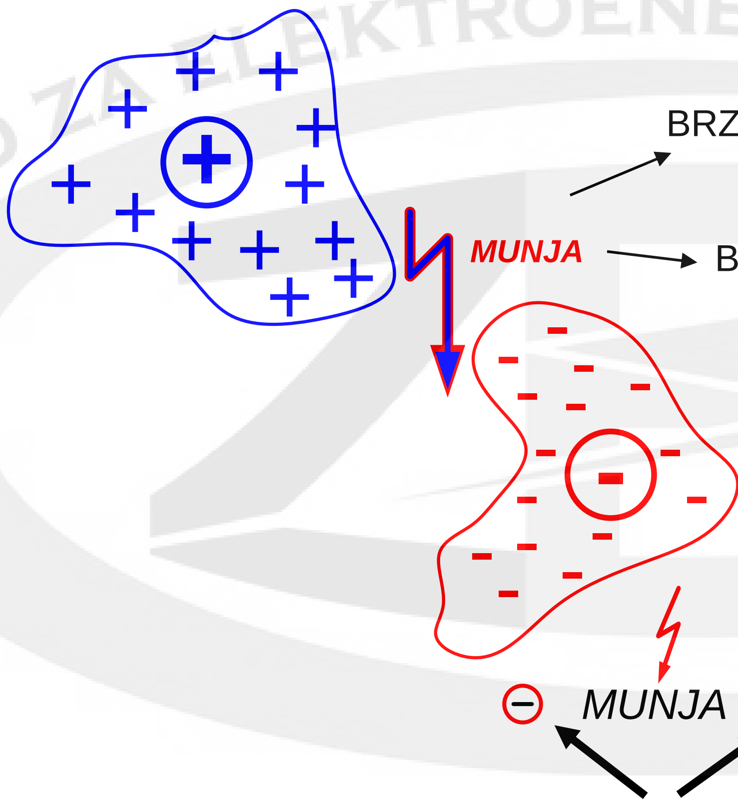
KAROSERIJA + ZRAK + TRENJE → *POLARIZIRANI NABOJI*

Primjer 4. Gibanje BENZINA kroz METALNU CIJEV

- ova pojava je jako značajna u praksi gdje se često koristi punjenje i pražnjenje raznih spremnika naftnim derivatima te dolazi do nakupina statičkog naboja

Općenito o elektrostatskom polju (4)

Primjer 5. Gibanje nakupina zraka (oblaka) u atmosferi.
Stvaraju se nakupine vlažnog zraka sa pozitivnim i negativnim nabojem.



BRZINA SVJETLOSTI → $v_s = 300000 km/s$

BRZINA ZVUKA → $v_z = 0{,}333 km/s$

$$v_z = 333\frac{m}{s}\cdot\frac{km}{1000m} = \frac{333}{1000}\frac{km}{s}$$

Sl.1.9 Gibanje OBLAKA u atmosferi

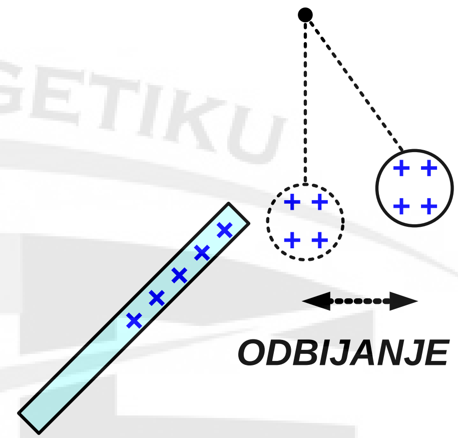
Primjer 6. Trenje AVIONA sa česticama KIŠE (SNIJEGA)

⊖ ⊕

Općenito o elektrostatskom polju (5)

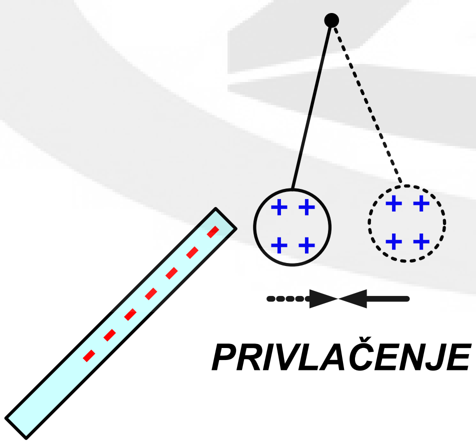
- između statički odvojenih električnih naboja, prema prikazanim primjerima, javljaju se privačne i odbojne sile i pri tome vrijedi pravilo:

1. dva tijela nabijena *istoimenim nabojem*
   međusobno se odbijaju
   SILA ODBIJANJA

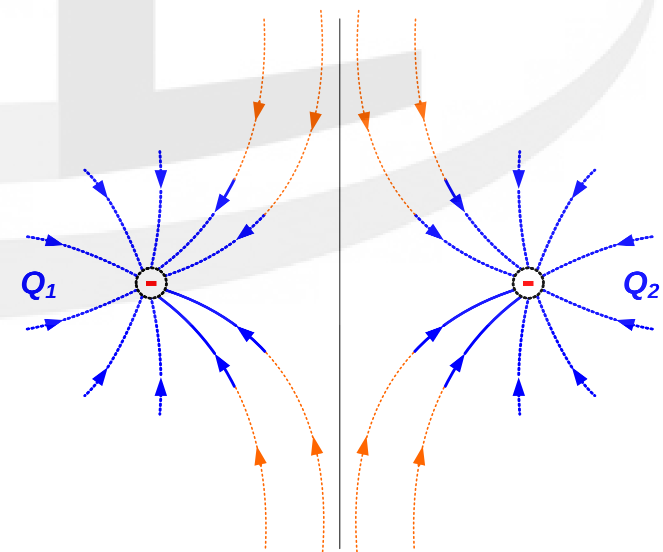


Sl.1.10 Sila odbijanja istoimenih naboja

2. dva tijela nabijena *različitim nabojem*
   međusobno se privlače
   SILA PRIVLAČENJA



Sl.1.11 Sila privlačenja raznoimenih naboja



Sl.1.12 skica električnog polja dva istoimena negativna naboja

Sila u električnom polju (1)

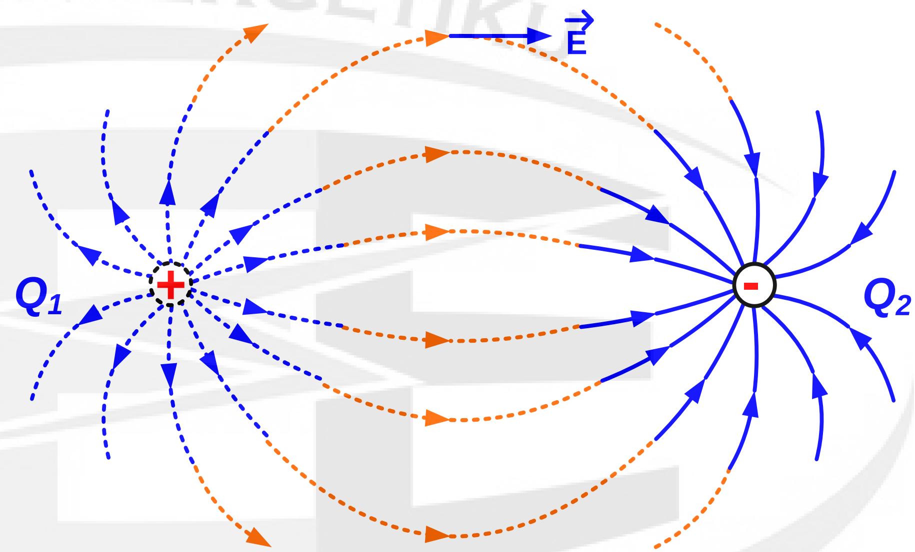
Coulombova sila i električno polje točkastog naboja

- ELEKTRIČNO POLJE možemo definirati kao posebno stanje prostora u okolini električnog naboja i u kojem djeluju električne sile na električne naboje koji se nalaze u tom prostoru

- slika rasporeda i oblika silnice električnog polja između dva raznoimena točkasta naboja prikazana je na sl.1.13

- *silnice* električnog polja imaju vektorski karakter

- *tangenta* u odabranoj točki na silnice određuje:
  - smjer jakosti vektora električnog polja $\vec{E}$ i
  - smjer djelovanja sile $\vec{F}$ na jedinični naboj Q' koji se nalazi u električnom polju



- silnice izviru iz naboja
- silnice poniru u naboj

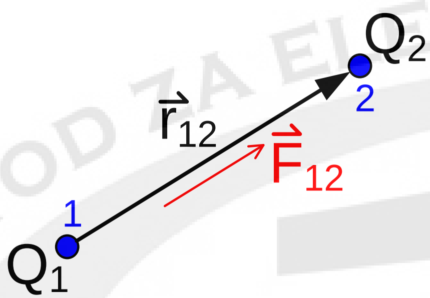
Sl.1.13 Silnice električnog polja pozitivnog i negativnog naboja

- prikazano električno polje točkastih naboja je ***nehomogeno električno polje***

- *vektori* sile $\vec{F}$ i jakosti električnog polja $\vec{E}$ *nisu konstantni* po veličini i smjeru u svakoj točki promatranog električnog polja

Sila u električnom polju (2)

- Na sl.1.14 prikazana su dva istoimena naboja na udaljenosti $\vec{r}_{12}$



Sl.1.14 Dva istoimena električna naboja na udaljenosti $\vec{r}_{12}$

- ***Opis slike***
- naboj Q_1 je pozicioniran u točki 1, a naboj Q_2 se dovede u točku 2
- traži se sila kojom naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2

$\vec{r}_{12}$ - vektor udaljenosti naboja koji spaja središta dvaju naboja i usmjeren je ***od*** naboja Q_1 ***prema*** naboju Q_2

$\vec{r}_{(12)_0} = \dfrac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ - jedinični vektor, tj. vektor duljine 1 koji ima isti smjer kao vektor $\vec{r}_{12}$

$|\vec{r}_{12}|$ - modul ili veličina vektora i to je SKALARNA veličina (može se pisati i kao r_{12})

- za definiranu Coulombovu silu sada vrijedi izraz:

$$\vec{F}_{12} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r}_{(12)_0} \quad [N] \qquad (1.1)$$

ovaj dio definira iznos sile

jedinični vektor definira smjer

Sila u električnom polju (3)

- za silu između naboja Q_1 i Q_2 slijedi definicija:
  - dva se mirna točkasta električna naboja odbijaju ili privlače silom koja je razmjerna umnošku njihovih naboja Q_1 i Q_2, a obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti između njih

- ako su oba naboja istog predznaka sila $\vec{F}_{12}$ je odbojna
- ako su naboji različitog predznaka sila $\vec{F}_{12}$ je privlačna

- prikazani Coulombov zakon za silu vrijedi za točkaste naboje u bilo kojem materijalu

- u izrazu *(1.1)* *konstanta* ***k*** *jefunkcija materijala u kojem promatramo silu F te* za konstantu ***k*** vrijedi izraz:

$$k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} = 8{,}987 \cdot 10^9 \left[\frac{Nm^2}{(As)^2} = \frac{Vm}{As} \right] \qquad (1.2)$$

- za konstantu ***k*** u vakuumu vrijedi izraz

- ε_0 je dielektrična konstanta vakuuma (dielektrična permitivnost (propustljivost))

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \, As/Vm$$

- Izrazom *(1.3)* definirao se izraz za ***silu F*** između *dva naboja u potpunom obliku*

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{12}^{\;2}} \cdot \vec{r}_{(12)_0} \quad [N] \qquad (1.3)$$

Jakost električnog polja (1)

- Određivanje sile – kvantitativno obilježje električnog polja
  - Jakost električnog polja - ***sila***
  - Potencijal električnog polja - ***energija***

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \quad \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

- Električno polje djeluje na naboj Q silom ***F*** koja je proporcionalna vrijednosti naboja:

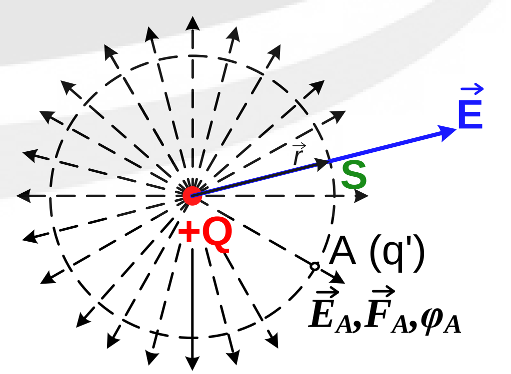
$$\vec{F} = \vec{E} \cdot q'$$

- ***E*** – jakost električnog polja

- Točkasti naboj **Q** djeluje na pokusni naboj q u svojoj okolini električnim poljem apsolutne vrijednosti

$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\left|\vec{F}\right|}{q'} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q \cdot q'}{r^2}}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

- Vizualizacija električnog polja točkastog naboja
  - Linije električnog polja – radijalni pravci
  - Tangenta na linije – definira smjer polja

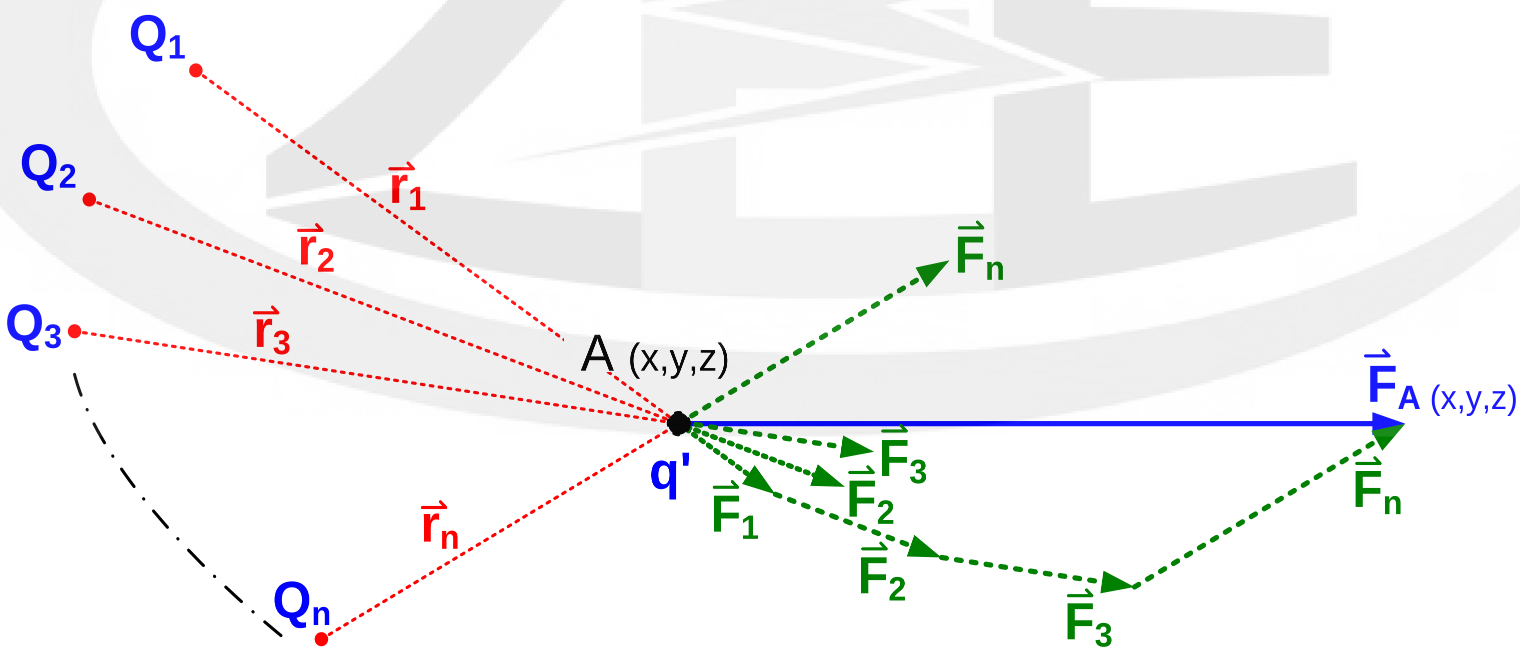


Sl.2.8 Presjek električnog polja točkastog naboja

Električno polje u prostoru (vektori $\vec{F}$ i $\vec{E}$) (1)

- Na primjeru električnog polja u prostoru razmatrati će se sila $\vec{F}$ između skupine naboja i veličina jakosti električnog polja $\vec{E}$ u promatranoj točki prostora

- na slici je prikazan prostorni razmještaj električnih naboja Q_1, Q_2,...Q_n
- sile između naboja Q_1 do Q_n nas trenutno ne zanimaju
- promatra se samo djelovanje naboja Q_1 do Q_n na naboj q' koji se dovede u njihovu okolinu u točku A(x,y,z)



Sl.1.14 Električno polje skupine točkastih naboja promatrano u točki A(x,y,z)

Električno polje u prostoru (vektori $\vec{F}$ i $\vec{E}$) (2)

Princip SUPERPOZICIJE

- Kako bi definirali silu $\vec{F}$ skupine točkastih naboja u prosotru potrebno je koristiti *princip SUPERPOZICIJE*
- po principu SUPERPOZICIJE sila kojom dva električna naboja međusobno djeluju NE mijenja se zbog prisutnosti trećeg naboja
- to znači, bez obzira koliko naboja ima u promatranom sustavu, Coulombov zakon vrijedi za svaki par naboja
- na iznesenim principima temelji se i definiranje sile $\vec{F}$ kojom naboji Q_1, Q_2,...Q_n djeluju na pokusni naboj q' (sl.1.14) te vrijedi

$$\vec{F}_{x,y,z} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q' \cdot Q_j}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_j^2} \cdot \vec{r}_{j0} \qquad (1.4)$$

$\vec{r}_j$ - *vektor od j-tog naboja sustava do točke (x,y,z)*

$|r_j|$ - *veličina ili modul vektora* $\vec{r}_j$

$\vec{r}_{j0}$ - *pripadni jedinični vektor* $\vec{r}_{j0} = \dfrac{\vec{r}_j}{|r_j|}$

Električno polje u prostoru (vektori $\vec{F}$ i $\vec{E}$) (3)

- ako se sada izraz za silu dijeli sa veličinom pokusnog naboja q' u točki A, dobije se *vektorska veličina* koja ovisi o
  - razmještaju naboja $Q_1, \ldots, Q_n$
  - veličini naboja $Q_1, \ldots, Q_n$
  - položaju točke A (x, y, z) u prostoru

    (udaljenost točke A od naboja u prostoru)

$$\vec{F}_{x,y,z} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q' \cdot Q_j}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r_j^2} \cdot \vec{r}_{j0}$$

- ova VEKTORSKA VELIČINA naziva se ***JAKOST ELEKTRIČKOG POLJA SUSTAVA NABOJA*** ($Q_1, \ldots, Q_n$) i označava se sa $\vec{E}$ i matematički je definirana izrazom *(1.5)*

$$\vec{E}_{x,y,z} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q_j}{r_j^2} \cdot \vec{r}_{j0} \qquad \left[\frac{N}{C} = \frac{V}{m}\right] \qquad (1.5)$$

- ova relacija predstavlja definiciju ELEKTROSTATSKOG POLJA E u prostoru i pridjeljuje svakoj točki prostora (x,y,z) vektor $\vec{E}_{x,y,z}$

Vektor jakosti električnog polja $\vec{E}$ (1)

- Slijede osnovne relacije u općem obliku koje povezuju silu $\vec{F}$ i jakost električnog polja $\vec{E}$,

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q'} \quad [N/C]} \qquad (1.6) \longrightarrow \boxed{\vec{F} = \vec{E} \cdot q' \quad [N]} \qquad (1.7)$$

Njutn/Coulon

- ako je prema sl.1.14 naboj ***Q'*** jedinični naboj tada slijedi za vektor $\vec{E}$:

JAKOST ELEKTRIČNOG POLJA JE SILA NA POZITIVNI JEDINIČNI NABOJ

- dalje se može zaključiti da u realnom promatranju električnog polja i sam naboj ***Q'*** djeluje na električno polje $\vec{E}$ u kojem se nalazi

- zato je potrebno pretpostaviti da je ***Q'*** tako mali da ne utječe na električno polje u kojem se nalazi, te se u strogo teoretskom smislu mora izraz *(1.6)* za vektor $\vec{E}$ pisati u slijedećem obliku

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q' \to 0} \frac{\vec{F}}{q'}} \qquad (1.8)$$

KRAJ - Tema 1-oe1

Materijali za studente

TEMA 1-6

ELEKTROMAGNETSKA POLJA

TEHNIČKI FAKULTET
Sveučilište u Rijeci

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 2. - *HOMOGENO I NEHOMOGENO ELEKTRIČNO POLJE*

- sila u električnom polju $\vec{F}$

- jakost električnog polja $\vec{E}$

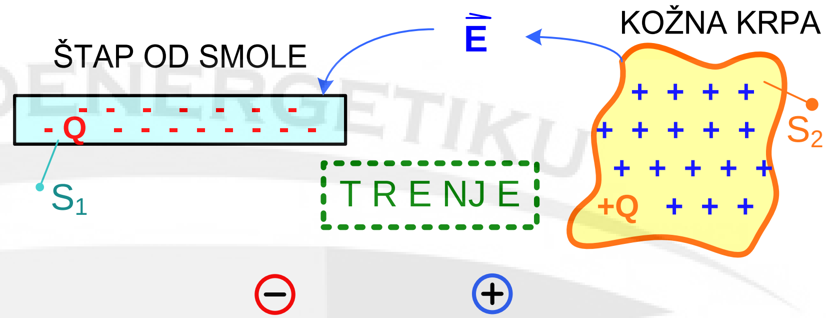
- vektor gustoće električnog pomaka $\vec{D}$

- električni tok Ψ i električni tok Φ_E

Električni naboj Q po površini S

- ***Vektor*** $\vec{D}$ *kao* gustoća električnog naboja *po površini* **S** *i **tok*** **Ψ** vektora $\vec{D}$

- na sl.2.1 prikazan je primjer dobivanja statičkog naboja koji nastaje trenjem tj. trljanjem štapa od smole sa kožnom krpom i tako dobiveni pomačni naboj **Q** smješten je na površini S_1 i S_2



Sl.2.1 Nakupine negativnog i pozitivnog naboja na površini S_1 i S_2

- na temelju prikazanog električnog naboja na površini **S** (sl.2.1), može se definirati pojam **gustoće** električnog naboja **Q** po površini **S**, te slijedi osnovna relacija za veličinu ***D***

$$\boxed{D = \frac{Q}{S} \;\left[{}^{As}\!/_{m^2}\right]} \qquad (2.1)$$

- može se sada definirati i **tok Ψ** kao **umnožak** vektora $\vec{D}$ i $\vec{S}$ te slijedi relacija

$$\boxed{\Psi = \vec{D}\cdot\vec{S} = D\cdot S\cdot\cos\alpha = Q} \qquad (2.2)$$

- veličina $\vec{D}$ *kao gustoća električnog pomaka naboja* ima u stvari vektorski karakter kao i električno polje $\vec{E}$
- eksperimentalno je pokazano da je veličina **D** direktno proporcionalan veličini **E,** zavisno o materijalu u kojem promatramo električno polje,

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\cdot\vec{E} \;\left[{}^{As}\!/_{m^2}\right]} \qquad (2.3)$$

ε - *dielektrična konstanta izolacijskog materijala* u kojem je prisutno električno polje

Karakteristični slučajevi skupina električnog naboja (1)

Općenito o električnom naboju

U praksi se često koriste karakteristični modeli nakupina električnih naboja

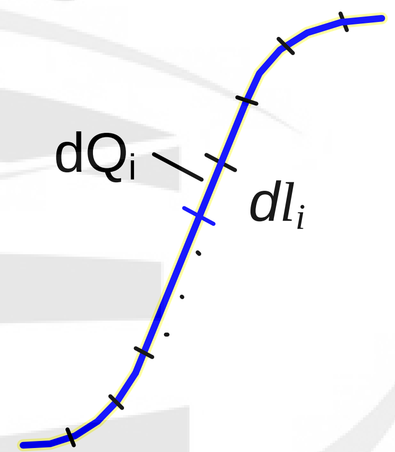
- svako naelektrizirano tijelo ima veliki broj elementarnih statičkih naboja e_s = 1.6021·10-19 C
- za sustave naboja karakterističnih skupina diskretnih točkastih naboja korisno je definirati pojam gustoće tih elementarnih statičkih naboja s obzirom na promatranu **liniju**, **površinu** ili **volumen**

Linijska gustoća naboja λ

- Na sl. 2.2 prikazana je određena linija duljine l i pretpostavlja se da se na toj liniji l nalazi određeni naboj Q
- ako je naboj *jednoliko* raspoređen po duljini linije za linijsku gustoću naboja vrijedi

$$\lambda = \frac{Q}{l}\left[\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}}\right] \quad (2.4)$$

- na promatranoj liniji duljine *l nalazi se nejednoliko raspoređeni naboj, te je* duljinu l potrebno podijeliti na **n** jednakih elemenata linije Δl,



Sl.2.2 Linijska raspodjela naboja

- sada svaki element linije Δl_i sadrži djelić ΔQ_i ukupnog naboja **Q**
- za linijsku gustoću naboja λ_i po svakom djeliću linije Δl_i vrijedi

$$\lambda_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta l_i}\left[\frac{As}{m}\right] \quad (2.5)$$

- a za ukupni naboj na promatranoj liniji l sada vrijedi

$$Q = \int_l \lambda \cdot dl \quad [As]$$

Karakteristični slučajevi skupina električnog naboja (2)

Kratki izračun za linijsku gustoću naboja λ

- prema izrazu *(2.5)* može se definirati i ukupni naboj na liniji ***l*** prema izrazu(2.6)

$$\boxed{Q_l = \sum_i^n \lambda_i \cdot \Delta l_i \left[As\right]} \qquad (2.6)$$

- ako za elemente linije vrijedi $\boxed{\Delta l \to 0}$ i $\boxed{n \to \infty}$ tada slijedi izraz za linijsku gustoču naboja na liniji ***l***

$$\boxed{\lambda = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i}{n}}$$

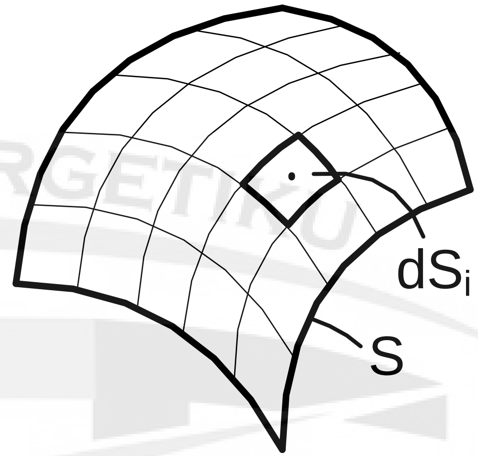
- te se može pisati i konačni izraz za naboj $\mathbf{Q}_l$ u integralnom obliku

$$\boxed{Q_l = \int_l \lambda \cdot dl \left[As\right]} \qquad (2.7)$$

Karakteristični slučajevi skupina električnog naboja (3)

Površinska gustoća naboja σ

- Na sl. 2.3 prikazana je skica površine *S* na kojoj promatramo gustoću površinskog naboja
- ako je raspodjela naboja ***jednolika*** tada za površinsku gustoću naboja σ vrijed izraz



Q_S – ukupni naboj na površini S

dQ_i – naboj na površini dS_i

Sl.2.3 Površinska raspodjela naboja

$$\sigma = \frac{Q_s}{S}\left[\frac{As}{m^2}\right] \quad (2.8)$$

- u slučaju kada raspodjela naboja po površini ***S*** ***nije jednolika*** potrebno je površinu ***S*** podijeliti na ***n*** jednakih elementarnih površina ***ΔS*** i svaki element površine ΔS_i sadrži dijelić ukupnog naboja ΔQ_i
- za površinsku gustoću naboja σ_i, po svakom segmentu površine dS_i, sada vrijedi slijedeće

$$\sigma_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta S_i}\left[\frac{As}{m^2}\right] \quad (2.9)$$

- a za ukupni naboj Q_s po površini S vrijedi slijedeće

$$Q_S = \int_S \sigma \cdot dS \quad (2.10)$$

Karakteristični slučajevi skupina električnog naboja (4)

Kratki izračun za površinsku gustoću naboja σ

- prema izrazu *(2.9)* može se definirati i ukupni naboj na površini **S** prema izrazu

$$\boxed{Q_S = \sum_{i}^{n} \sigma_i \cdot \Delta S_i \quad [As]} \qquad (2.10)$$

- ako za elemente površine vrijedi $\boxed{\Delta S \to 0}$ i $\boxed{n \to \infty}$ tada slijedi za plošnu gustoču naboja na površini S

$$\boxed{\sigma = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}{n}}$$

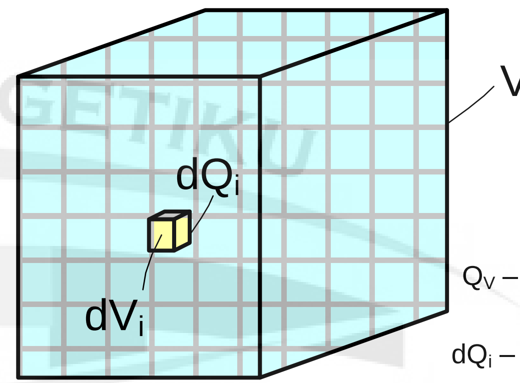
- te se može pisati i konačni izraz za naboj Q_S u integralnom obliku je

$$\boxed{Q_S = \int_S \sigma \cdot dS} \qquad (2.11)$$

Karakteristični slučajevi skupina električnog naboja (5)

Prostorna gustoća naboja ρ

- Na sl.2.4 prikazana je skica volumena V sa diferencijalom segmenta volumena dV



Sl.2.4 Prostorna raspodjela naboja

- za jednoliku raspodjelu naboja po volumenu vrijedi izraz za prostornu gustoću naboja ρ

$$\boxed{\rho = \frac{Q_V}{V}\left[\frac{As}{m^3}\right]} \qquad (2.12)$$

- u slučaju kada prostorna raspodjela naboja ρ nije konstantna po promatranom volumenu, potrebno je volumen podijeliti na elementarne volumene ΔV te za prostornu gustoću naboja po elementu volumena Δv_i vrijedi

$$\boxed{\rho_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta V_i}\left[\frac{As}{m^3}\right]} \qquad (2.13)$$

- a konačno vrijedi za kontinuiranu raspodjelu prostorne gustoće naboja u integralnom obliku

$$\boxed{Q = \int_V \rho \cdot dV \quad [As]} \qquad (2.15)$$

Karakteristični slučajevi skupina električnog naboja (6)

Kratki izračun za prostornu gustoću naboja ρ

- za ukupni naboj po volumenu ***V*** sada slijedi izraz

$$Q = \sum_{i}^{n} \rho_i \cdot \Delta V_i \quad [As] \qquad (2.14)$$

- ako za elemente površine vrijedi $\Delta V_i \to 0$ i $n \to \infty$ tada za prosječnu prostornu gustoću naboja slijedi

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \Big/ n$$

- te je konačni izraz za kontinuiranu raspodjelu prostorne gustoće naboja u integralnom obliku

$$Q = \int_V \rho \cdot dV \quad [As] \qquad (2.15)$$

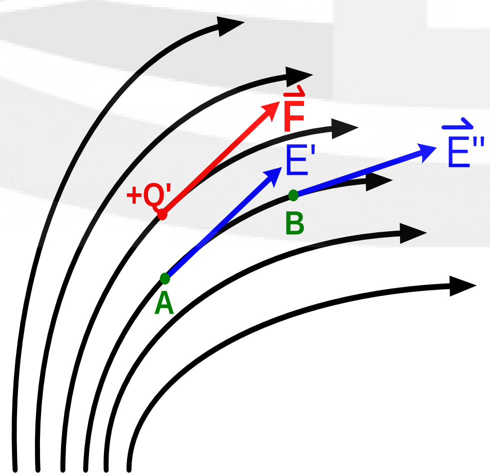
Nehomogeno električno polje (1)

Osnovni pojmovi

- Za nehomogeno električno polje se može navesti slijedeća definicija:
  - vektor jakosti električnog polja $\vec{E}$ nema u svakoj točki polja istu veličinu, smjer i orijentaciju te se vektori $\vec{E}$ i $\vec{F}$ mijenjaju od točke do točke električnog polja te slijedi

$$\boxed{\vec{F} \neq konst. \text{ i } \vec{E} \neq konst.} \quad (2.16)$$

- za vektor $\vec{E}$ u **nehomogenom** električnom polju može se navesti još slijedeće
  - **vektor $\vec{E}$** je tangenta na silnicu u odabranoj točki i mijenja svoj smjer od točke do točke električnog polja
  - **(E'≠E")-** kod nehomogenog električnog polja nije raspodjela gustoće silnice jednaka te se mijenja i intezitet električnog polja od točke do točke električnog polja



$$\vec{E}' \neq \vec{E}''$$

Q' - točkasti pokusni naboj doveden u neku točku polja

$\vec{F}$ - sila koja djeluje na pokusni naboj

$\vec{E}$ - jakost električnog polja

Q' << Q

Sl.2.5 Skica silnica nehomogenog električnog polja

Nehomogeno električno polje (2)

Fizikalna slika i matematički opis

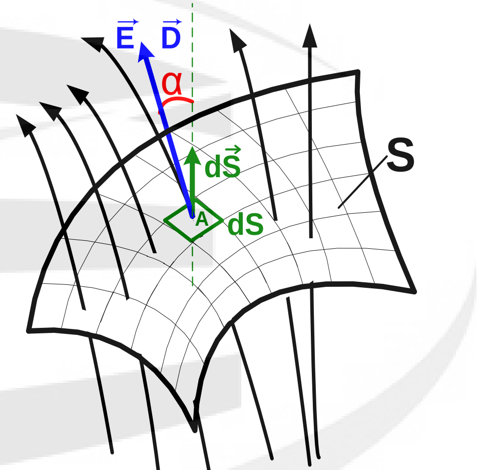
- Na sl.2.6 prikazan je dio nehomogenog električnog polja površine S sa označenim malim segmentom površine **dS** i vektorom jakosti električnog polja **E** kao tangentom u točki **A**
- zbog nehomogenosti promatranog električnog polja uvodimo **infinitezimalno** („beskonačno”) male površine, i pretpostavlja se da se električno polje u tim malim površinama **dS** ne mijenja
- u nehomogenom električnom polju treba računati sa **diferencijalnim veličinama** , te izraz za električni tok **Ψ** ima slijedeći oblik:

$$\boxed{d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{S}} \qquad (2.17)$$

$d\vec{S}$ - vektor diferencijala površine S (okomit na dS)
dΨ - diferencijal električnog toka

$$\boxed{d\Psi = \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S}} \qquad (2.18)$$

- drugi oblik električnog toka Ψ, izražen sa vektorom jakosti električnog polja E:



Sl.2.6 Skica nehomogenog električnog polja

- prema izrazima (2.17) i (2.18) imamo skalarni produkt dviju vektorskih veličina

$$d\Psi = \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot dS \cdot \cos\alpha \qquad (2.19)$$

$$d\Psi = \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot d\vec{S} = \varepsilon \cdot E \cdot dS \cdot \cos\alpha$$

- ukupni električni tok Ψ kroz zatvorenu plohu S, koja se naziva i **Gaussova ploha,** jednak je sumi svih diferencijalnih tokova dΨ kroz pojedine elementarne površine dS te slijedi za tok **Ψ** u integralnom obliku:

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \qquad (2.20)$$

$$\Psi = \varepsilon \cdot \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Nehomogeno električno polje i Gaussov teorem

- ako vrijedi da je tok **Ψ** jednak ukupnom naboju koji je obuhvačen razmatranom plohom tj. $\boxed{\Psi = Q}$ tada slijedi:

PRVI oblik GAUSSOVOG TEOREMA *u integralnom obliku*

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q \quad [As]} \qquad (2.21)$$

- ako je naboj **Q** u jednoličnom dielektričkom materijalu tada slijedi uz

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$$

DRUGI oblik GAUSSOVOG TEOREMA *u integralnom obliku*

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \oint \varepsilon\cdot\vec{E}\cdot d\vec{S} = Q \longrightarrow \boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon} \quad [Vm]} \qquad (2.22)$$

Primjeri nehomogenog električnog polja (1) (Primjer 1.)

Primjer 1. Električno polje točkastog naboja na plohi kugle

Potrebno je odrediti jakost električkog polja na udaljenosti R od nekog točkastog naboja Q primjenom Gaussovog teorema

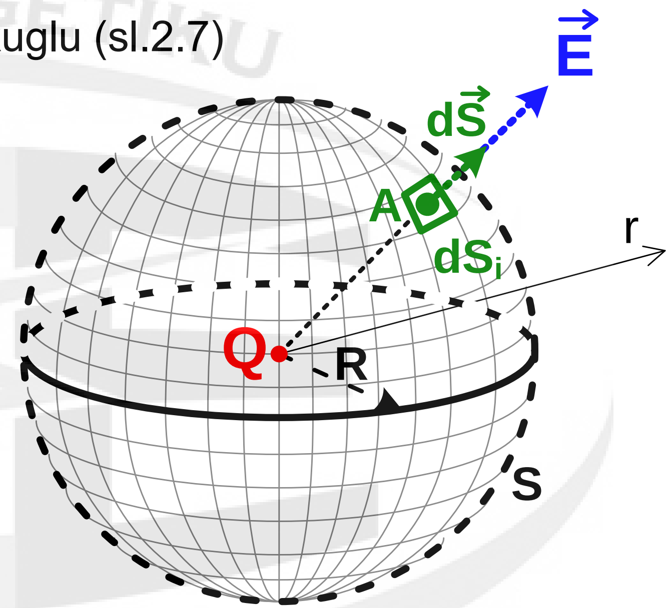
- zatvorenu plohu koja obuhvaća naboj zamislimo kao kuglu (sl.2.7)

- vektori $\vec{E}$ i $d\vec{S}$ su jednako usmjereni u svim točkama na kugli te vrijedi

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\cdot dS\cdot \cos 0^o = E\cdot \oint_S dS$$

- ako plošni integral $\boxed{\oint dS}$ predstavlja površinu kugle, *a dS diferencijal plohe kugle*, tada vrijedi

$$\boxed{E\cdot \oint_S dS = E\cdot 4\cdot \pi \cdot R^2}$$



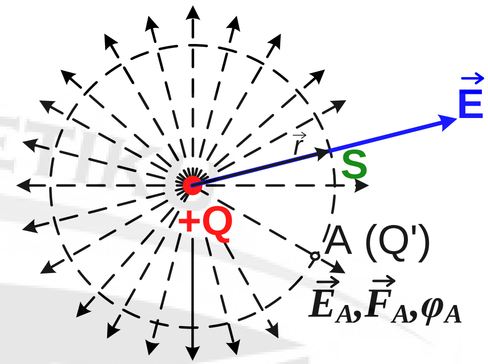
Sl.2.7 Jakost električnog polja točkastog naboja

- koristeći Gaussov teorem prema izrazu *(2.22)* $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$ može se konačno definirati izraz za jakost električnog polja ***E*** u točki A na sl.2.8:

$$E_A\cdot 4\cdot \pi \cdot R^2 = \frac{Q}{\varepsilon}$$ te slijedi $\longrightarrow$ $$\boxed{E_A = \frac{Q}{4\cdot \pi \cdot R^2\cdot \varepsilon}}$$

Primjeri nehomogenog električnog polja (2) (Primjer 1.)

- uz vektor $\vec{E}_A$ mogu se definirati još i izrazi za silu $\vec{F}$ točkastog naboja **Q'** u točki **A** plohe kugle (sl.2.8)

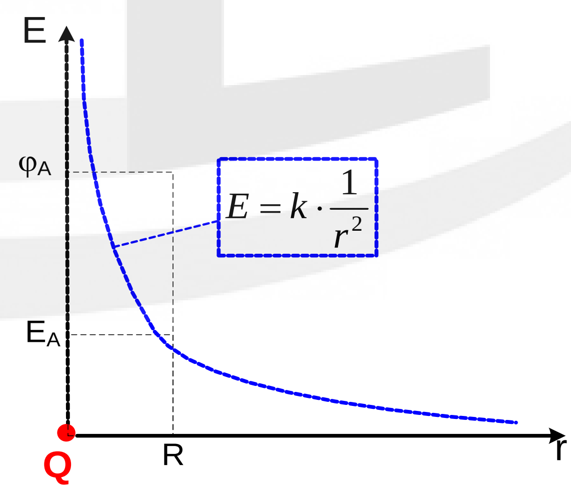


Sl.2.8 Presjek električnog polja točkastog naboja

- ako se koristi poznata relacija $\boxed{\vec{F} = \vec{E} \cdot Q'}$ tada izraz za silu koja djeluje na naboj u električnom polju glasi:

$$\boxed{F_A = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot Q'} \qquad (2.24)$$

- prema izrazu (2.23) prikazana je grafički, na sl.2.9, zavisnosti vektora električnog polja $\vec{E}$ o udaljenosti **r** od točkastog naboja **Q**



Sl.2.9 Električno polje točkastog naboja

Primjeri nehomogenog električnog polja (3) (Primjer 2.)

Primjer 2. Električno polje nabijenog pravca

- Na slici je prikazan segment beskonačno dugog nabijenog pravca dužine l , a oko nabijenog pravca prikazan je jedan zamišljeni valjak (Gaussova ploha) polumjera x_A
- kratki opis veličina sa slike

$z\ [m]$ - dužina pravca

$dz\ [m]$ - diferencijal dužine pravca

$r\ [m]$ - udaljenost linijskog naboja od točke A

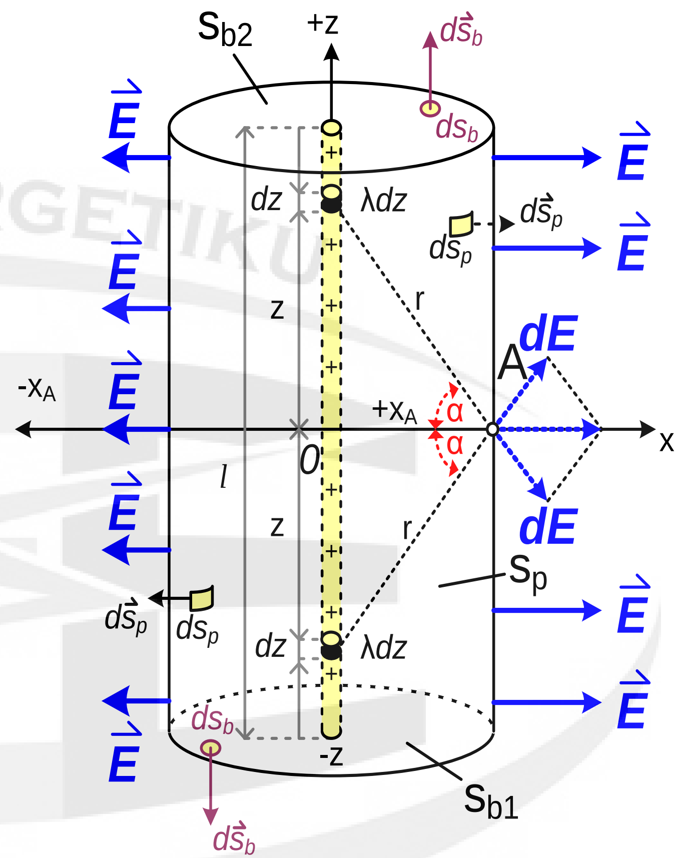
$x_A\ [m]$ - udaljenost točke A od središta pravca i polumjer zamišljenog valjka koji predstavlja Gaussovu plohu

$\alpha\ [^\circ]$ - kut koji zatvara spojnica linijskog naboja sa točkom A i os apscisa

s_p - površina plašta Gaussove plohe

s_b - površina baze Gaussove plohe

$\lambda\ \left[\frac{As}{m}\right]$ - linijska gustoća naboja



Sl.2.10 Električko polje u okolišu nabijenog ravnog vodiča (pravca)

Postupak 1.

- za linijsku gustoću naboja slijedi izraz za diferencijal naboja nabijenog pravca

$$\boxed{dQ = \lambda \cdot dz}$$

- za linijski naboj konstantne gustoće može se pisati za ukupni naboj na pravcu

$$\boxed{Q = \lambda \cdot l}$$

Primjeri nehomogenog električnog polja (4) (Primjer 2.)

Postupak 1.

- prije konačnog riješavanja problema treba zaključiti
  - silnice iz ravnog naelektriziranog pravca izlaze okomito zbog simetrije naboja s lijeve i desne strane bilo koje zamišljene točke pravca
  - na površini baze zamišljenog koncentričnog valjka (Gaussova ploha) su vektori $\vec{E}$ i $\vec{dS}_b$ okomiti te nema toka kroz baze $(\vec{E}\cdot\vec{dS} = 0)$
  - na površini plašta zamišljenog valjka (Gaussova ploha) su $\vec{E}$ i $\vec{dS}$ paralelni te vrijedi $\vec{E}\cdot\vec{dS}_p = E\cdot dS_p$
  - električno polje je na plaštu konstantno (**$E=konst.$**)
  - za površinu plašta vrijedi izraz $P = 2\cdot x_A\cdot\pi\cdot l$

- koristeći sve navedene pretpostavke može se koristiti drugi oblik Gausovog teorema $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$ te slijedi

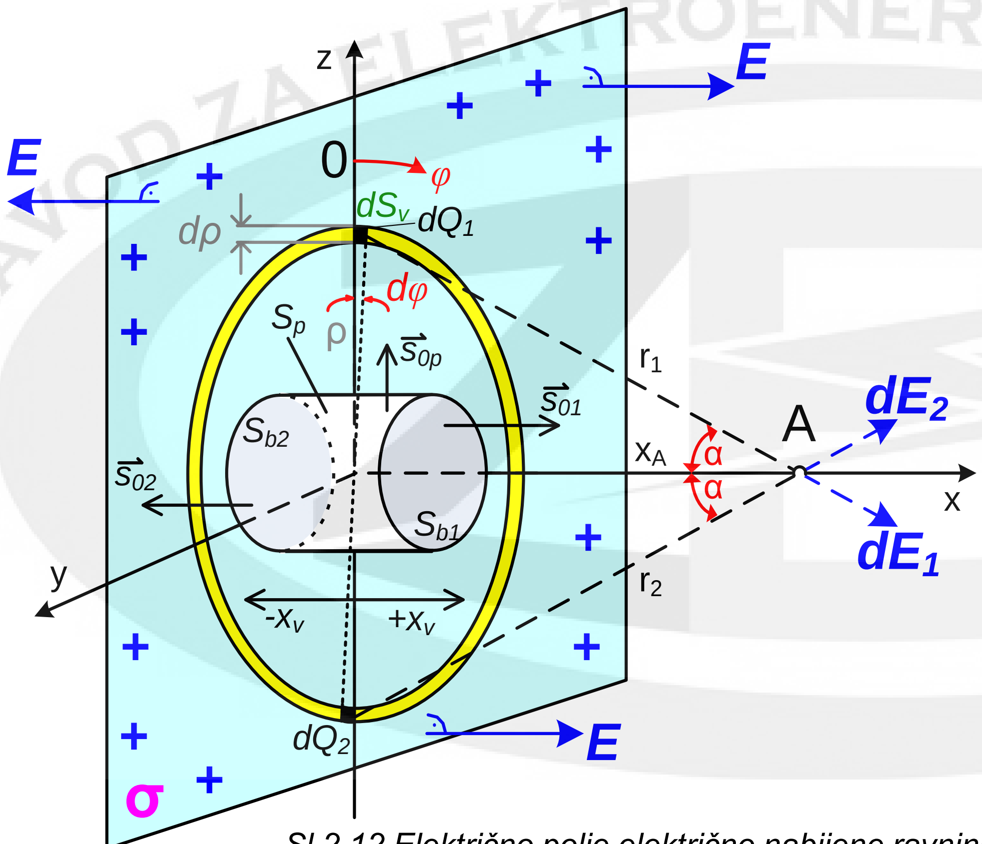
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\cdot dS = E\cdot 2\cdot x_A\cdot\pi\cdot l = \frac{Q}{\varepsilon} \longrightarrow E\cdot 2x_A\pi\cdot l = \frac{\lambda\cdot l}{\varepsilon} \quad /:l$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot x_A}}$$

Primjeri homogenog električnog polja (1) (Primjer 1.)

Primjer 1. Električno polje nabijene ravnine

- definirati će se električno polje s jedne strane i druge strane nabijene ravnine električnim nabojem



Sl.2.12 Električno polje električno nabijene ravnine

x, y - dužina i širina ravnine

ρ - polumjer kružnog vijenca

dS - diferencijal površine kružnog vijenca

dQ - diferencijal naboja kružnog vijenca

x_A - udaljenost točke A od (x,y) ravnine [m]

σ - plošna gustoća naboja [As/m^2]

S_p - površina plašta valjka

S_{b1}, S_{b2} - površine baze valjka

$\vec{s}_{01}, \vec{s}_{02}$ - jedinični vektori baza valjka

$\vec{s}_{0p}$ - jedinični vektor plašta valjka

- električno polje nabijene ravnine definirati će se uz pomoć drugog oblika Gausova teorema,

Primjeri homogenog električnog polja (2) (Primjer 1.)

- pretpostavlja se da je ravnina naelektrizirana nabojem konstantne plošne gustoće (σ=konst.), te se sa obje strane stvara simetično električno polje okomito na ravninu

Postupak

- Jakost polja je na nekim zamišljenim ravninama na udaljenosti **+x** i **–x** istog iznosa i suprotnih smjerova
- u navedenom smislu postavljen je i valjak između ravnine **+x** i **–x**
- ako je raspodjela naboja jednolika tada vrijedi za ukupni naboj valjka

$$\boxed{Q = \sigma \cdot S_b}$$

$S_b = S_{b1} = S_{b2}$ – površina baze valjka

- sada se za ukupni tok vektora ***E*** kroz površinu valjka ($S=2S_b+S_p$) može provesti kratki izračun

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_{b1}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_{b2}} \vec{E} \cdot d\vec{S} + \oint_{S_p} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

- kako je produkt $\vec{E} \cdot d\vec{S}$ za površinu plašta S_p jednak nuli to je tok vektora $\vec{E}$ po plaštu jednak nuli te uz konstataciju da je $S_{b1} = S_{b2}$ slijedi

$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2 \cdot E \cdot S_b}$$

- korištenjem drugog oblika Gausovog teorema dobije se

$$2 \cdot E \cdot S_b = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{\sigma \cdot S_b}{\varepsilon}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon}}$$

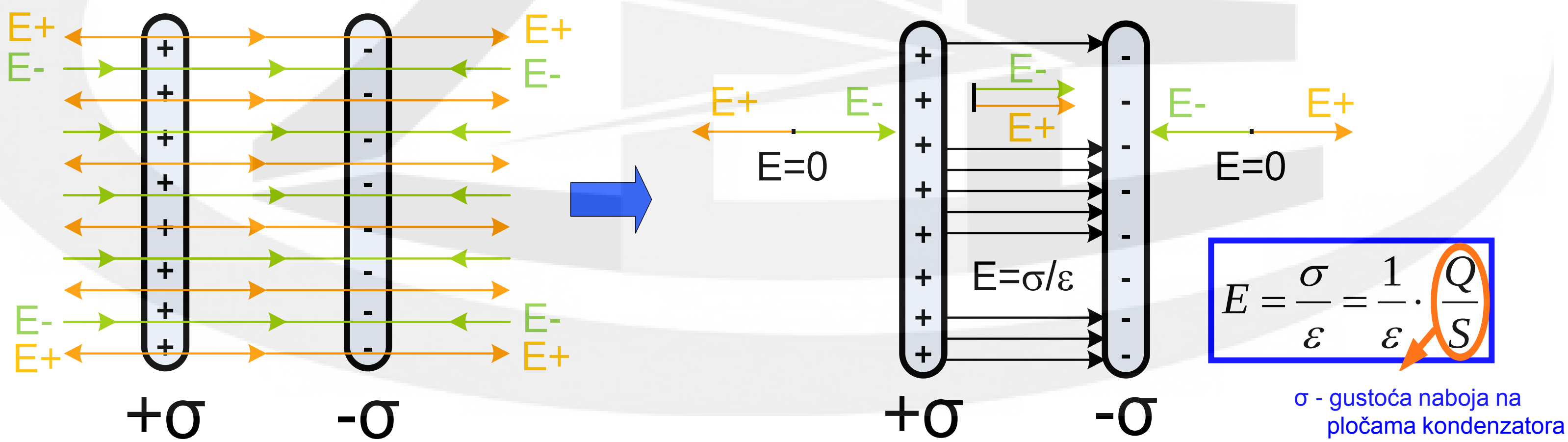
Primjeri homogenog električnog polja (3) (Primjer 2.)

Primjer 2. Električno polje dviju nabijenih ravnina

- Za električko polje **dvije ravnine** nabijene istom količinom naboja ali suprotnih predznaka i čiji je međusobni razmak mali u odnosu na njihove dimenzije vrijedi relacija:

$$\boxed{E = 2 \cdot \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \qquad (2.36)$$

- ako se koristi raspored silnica električnog polja dvaju nabijenih ravnina može se povezivanjem tih dviju ravnina dobiti električno polje pločastog kondenzatora (prikaz na sl.2.13)



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{Q}{S}}$$

Sl.2.13 Električno polje između 2 ravnine nabijene suprotnim električkim nabojima

- *definicija:* ***Homogeno električno polje je ono u kojem je jakost električnog polja $\vec{E}$ jednaka po veličini, orijentaciji i smjeru u svakoj točki tog polja.***
  I sila $\vec{F}$ tog polja na pokusni naboj Q' konstantna je u svakoj točki polja.

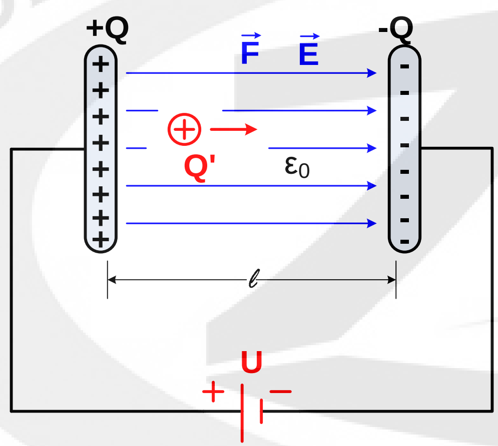
$$\boxed{\vec{F} = konst. \text{ i } \vec{E} = konst.}$$

Homogeno električno polje (1)

Rad i sila u električnom polju pločastog kondenzatora

Fizikalni prikaz i matematički izrazi:

- Na sl.2.15 prikazano je električno polje unutar pločastog kondenzatora priključenog na izvor istomjernog napona U
- u prostoru promatranog električnog polja dielektrika **ε_0** nalazi se pokusni naboj **Q'** na koji djeluju vektor jakosti električnog polja $\vec{E}$ i vektor sile $\vec{F}$



Sl.2.15 Pločasti kondenzator u strujnom krugu

- rubne uvjete na krajevima ploča zanemarujemo

- prostor između ploča je vakuum ε_0

- na naboj **Q'** djeluje sila $\vec{F} = \vec{F}_{\oplus} + \vec{F}_{\ominus}$

- pod utjecajem sile $\vec{F}$ pokusni naboj Q' se giba na putu $\vec{l}$ u smjeru silnica električnog polja, i to gibanje predstavlja **RAD**.

$$A = \vec{F} \cdot \vec{l} = F \cdot l \cdot \cos\alpha \; [Nm]$$

- jakost električnog polja **E** definirana je kao djelovanje sile **F** po jediničnom naboju **Q'** te slijedi poznata relacija za odnos sile **F** i jakosti električnog polja **E**

$$F = E \cdot Q' \quad [VAs/m]$$

- kako je **rad A,** dobiven utroškom **energije električnog polja** slijedi drugi oblik izraza za rad

$$A = \vec{E} \cdot \vec{l} \cdot Q' = E \cdot l \cdot Q' \cdot \cos\alpha \; [Nm]$$

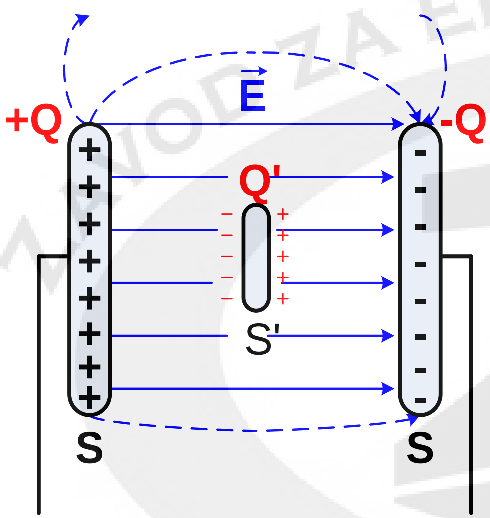
- ako se još koristi i izraz za električno polje između dviju nabijenih ravnina $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ i ako je cosά=0, slijedi za rad **A** :

$$A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot l \cdot Q' = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{l}{S} \cdot Q \cdot Q'$$

Homogeno električno polje (2)

Električna influencija i vektor $\vec{D}$ → kut između $\vec{D}$ i $\vec{S}$ =0°

- Promatra se pojava ubacivanja vodljive metalne ploče **S'** u prostor gdje djeluje električno polje $\vec{E}$ (sl.2.16)



E - električno polje pločastog kondenzatora

S' - električki vodljivo metalno tijelo

Sl.2.16 Električna influencija

- u metalu će se slobodni elektroni pod utjecajem sile električkog polja pomaknuti unutar vodljive metalne ploče ***S'***
- elektroni odlaze prema → **+Q** ploči te **desna** strana tijela **S'** postaje **"+"** a **lijeva "-"**
- pojava odvajanja naboja unutar vodljivog tijela koje se nalazi u električnom polju naziva se **ELEKTRIČNA INFLUENCIJA.**
- prikazanom pojavom električne influencije opisan je vektor gustoće električnog pomaka $\vec{D}$
- pojava električne influencije ovisi o:
  - jakosti električkog polja $\vec{E}$
  - veličini površine **S'**
  - međusobnom položaju površine **S'** i polja $\vec{E}$

ako je površina pločice **S' okomita na silnice polja $\vec{E}$** tada je influencija najveća.

- mjera za influencijsko djelovanje je veličina koja se naziva
  - **GUSTOĆA ELEKTRIČKOG POMAKA D**

Homogeno električno polje (3)

- kako učinak influencije ovisi o **kutu** koji zatvara vektor polja $\vec{E}$ s površinom $\vec{S}'$, veličina gustoće električnog pomaka ima vektorski karakter i označujemo je sa $\vec{D}$ te slijedi relacija

$$\vec{D} = \frac{Q'}{\vec{S}'} \quad [As/m^2]$$

$$Q_i = \vec{D} \cdot \vec{S} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot \vec{S}$$

Odnos vektora $\vec{D}$ i $\vec{E}$

- Eksperimentalno je pokazano da je $\vec{D}$ direktno proporcionalan vektoru $\vec{E}$, zavisno o materijalu u kojem promatramo električno polje, te slijedi relacija:

$$\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E} \quad [As/m^2] \qquad (2.43)$$

ε - *dielektrična konstanta izolacijskog materijala* u kojem je prisutno električno polje

- ako je električno polje promatrano u vakuumu tada vrijedi:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \qquad (2.44)$$

- a za konstantu **ε** vrijedi:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \quad [As/Vm] \qquad (2.45)$$

- ε_r - *relativna dielektrična konstanta* (bezdimenzionalan broj)
- ε_0 - *dielektrična konstanta vakuuma*

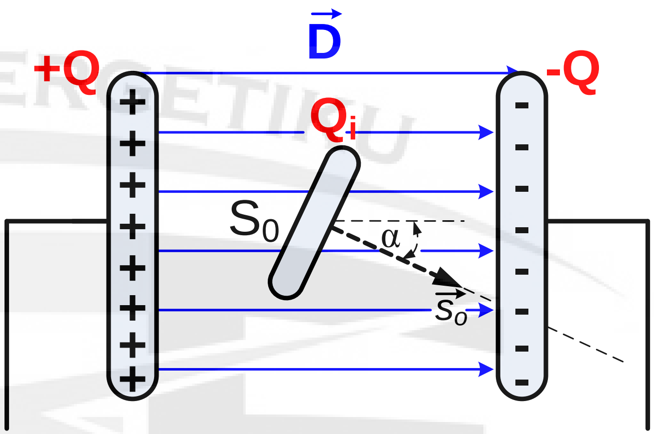
$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \qquad (2.46)$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \quad [As/Vm] \qquad (2.47)$$

Homogeno električno polje (4)

Električna influencija i vektor $\vec{D}$ → kut između $\vec{D}$ i $\vec{S}$ ≠90°

- Razmotriti će se sada određivanje influencijom stvorenog naboja u slučaju kada je umetnuta vodljiva ploča pod nekim kutem u odnosu na silnice vektora $\vec{D}$
  - sredstvo je vakuum - ε_0
  - vektor električnog polja - $\vec{E}$
  - vektor gustoće elektičnog pomaka - $\vec{D}$
  - naboj influencije - Q_i



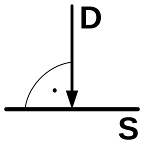
Sl.2.21 Električna infuencija

- za veličine Q, $\vec{S}$ i $\vec{D}$ prikazane na sl.2.21 prema izrazima (2.39) i (2.40) vrijede relacije

$$Q_i = \vec{D} \cdot \vec{S} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot \vec{S} \tag{2.49}$$

- prema sl.2.21 i na temelju izraza *(2.46)* može se napisati izraz za influencijom stvoreni naboj Q_i:

$$Q_i = D \cdot S_0 \cdot \cos\alpha \tag{2.50}$$

- a za slučaj  vrijedi:

$$Q_i = D \cdot S \tag{2.51}$$

Homogeno električno polje (5)

Tok Ψ -tok vektora gustoče električnog pomaka $\vec{D}$

- Ako veličina $\vec{D}$ predstavlja gustoću linija elektičnog pomaka tada umnožak $\vec{D} \cdot \vec{S}$ predstavlja ukupan broj linija koje "prolaze" kroz površinu S
- umnožak $\vec{D} \cdot \vec{S}$ naziva se i tok vektora $\vec{D}$ i označava se sa grčkim slovom "ksi" Ψ

$$\boxed{\Psi = \vec{D} \cdot \vec{S} = D \cdot S \cdot \cos\alpha = Q} \qquad (2.52)$$

- Ψ kao električni tok vektora $\vec{D}$ je skalarna veličina i predstavlja u stvari ukupni naboj influenciran na plohi S, a ako se promatra jednoličan dielektrični materijal,slijedi i drugi oblik za tok Ψ

$$\boxed{\Psi = \varepsilon \cdot \vec{E} \cdot \vec{S} \doteq Q \quad [As]} \qquad (2.53)$$

Q = algebarska suma svih naboja obuhvaćenih razmatranom plohom

- ***GAUSOV TEOREM***

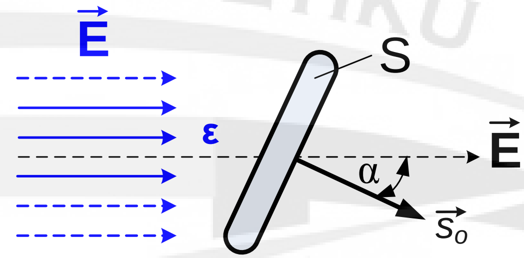
  Veličina električnog toka Ψ kroz zatvorenu plohu jednaka je ukupnom broju naboja koji su obuhvaćeni tom plohom.

Homogeno električno polje (6)

Tok Φ_E -tok vektora jakosti električnog polja $\vec{E}$

- Interesantno je izdvojiti još jednu karakterističnu veličinu sa kojom opisujemo električna polja, a to je tok vektora električnog polja **Φ_E** kroz odabranu površinu **S,** (sl.2.22)

- tok vektora **$\vec{E}$** kroz površinu **S** predstavlja skalarnu veličinu i ona je proporcionalna "broju silnica" u promatranom prostoru i računa se prema izrazu



$\vec{s}_0$ – jedinični vektor normale na površinu S

$$\boxed{\vec{S} = S \cdot \vec{s}_0}$$

Sl.2.22 Tok vektora $\vec{E}$ u homogenom polju

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos\alpha \quad [Vm] \qquad (2.54)$$

- može se još napomenuti da je veličina električnog toka **Φ_E** pozitivna ako je $\boxed{\alpha < 90^\circ}$, a ako je kut $\boxed{\alpha > 90^\circ}$ tada je veličina **Φ_E** negativna

- ako se još koristi izraz (2.8) za odnos električnog polja, naboja i površine $\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{S}}$ slijedi odnos tokova **Φ_E** i **Ψ** te drugi oblik za tok **Φ_E**

$$\boxed{\Psi = \varepsilon \cdot \Phi_E [As]} \rightarrow \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon}\frac{Q}{\cancel{S}} \cdot \cancel{S} \rightarrow \boxed{\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon} [Vm]} \qquad (2.55)$$

KRAJ - Tema 2-oe1

Materijali za studente

TEMA 1-6

ELEKTROMAGNETSKA POLJA

TEHNIČKI FAKULTET
Sveučilište u Rijeci

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 3. - *ELEKTRIČNI POTENCIJAL I NAPON*

- električni potencijal

- električni napon

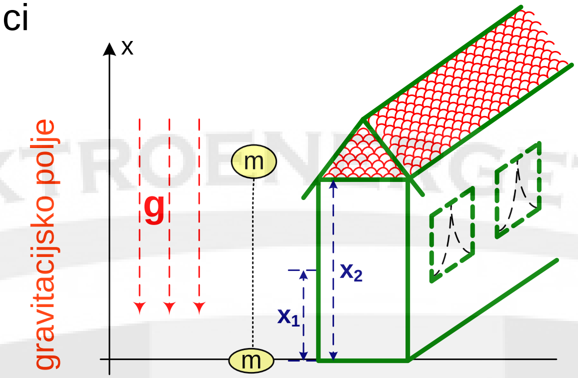
- rad u električnom polju

Analogija potencijalne energije u mehanici (1)

- Potencijalna energija u mehanici i mehanički potencijal

$$\boxed{F_v = m \cdot g}$$

- vanjska sila $\mathbf{F_v}$ za dizanje tereta mase **m** protiv sile teže



m - predmet mase m
g - sila gravitacije
x - visina položaja predmeta
A - izvršeni rad
U_m - mehanički napon predmeta mase **m**

Sl.3.1 Prikaz gibanja mase ***m*** *u gravitacijskom polju*

- **A** je izvršeni rad za dizanje tereta na visinu *x* :

$$\boxed{A_x = m \cdot g \cdot x = F_v \cdot x \;\; [Nm]}$$

- vidi se da prikazani rad ***A'*** ne ovisi putu već samo o sili F i o koordinatama početne i krajnje točke.

- izvršeni rad **A** sadržan je u utegu kao potencijalna energija $\mathbf{A_p}$ i može se dobiti natrag ako uteg pod utjecajem sile $\mathbf{F_t}$ dođe u položaj *x=0,* te slijedi relacija za potencijalnu energiju

$$\boxed{A_p = A_0 + A_x = A_0 + m \cdot g \cdot x}$$

$\mathbf{A_0}$ - energija utega u početnom položaju *x=0*

- ako se podijeli potencijalna energiju $\boldsymbol{A_p}$ s masom ***m***, i ako je $A_0=0$ dobije se jedna interesantna veličina $\boldsymbol{\varphi_m}$ za koju vrijedi
- tu novonastalu veličinu $\boldsymbol{\varphi_m}$ možemo si predočiti i prikazati kao [***mehanički potencijal***]

$$\varphi_m = \frac{A_0}{m} + \frac{A_x}{m} \;\longrightarrow\; \boxed{\varphi_m = \frac{A_p}{m} = g \cdot x \;\; \left[\frac{N \cdot m}{kg}\right]}$$

- **veličina $\boldsymbol{\varphi_m}$ fizikalno je analogna veličini električnog potencijala $\boldsymbol{\varphi_{el}}$ koja je predmet daljnjeg razmatranja.**

Rad pri gibanju naboja Q' u električnom polju (1)

Kratki fizikalni opis rada A u električnom polju

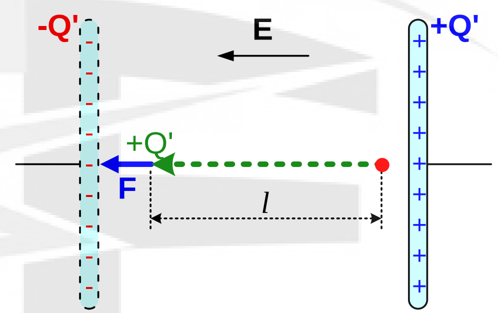
*U daljnjim izlaganjima često će se koristiti pojam rada pri gibanju naboja **Q'** u električnom polju, te se slijedećim prikazom daju osnovne relacije za gibanje naboja silom **F** na putu **l***

- za rad ***A*** pri gibanju naboja na putu ***l*** pod utjecajem sile ***F*** vrijedi izraz

$$\boxed{A = \vec{F} \cdot \vec{l}\ [Nm]} \quad (3.5)$$

- ako pravac smjera sile ***F*** i pravac smjera puta ***l*** padaju zajedno, (sl.3.2) slijedi,

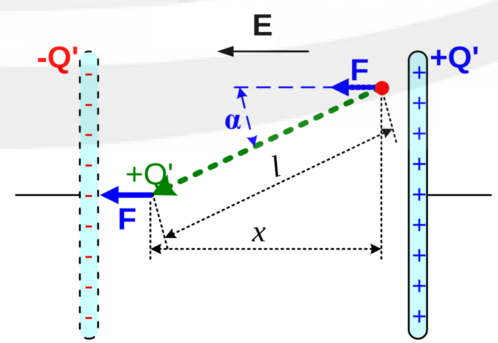
$$\boxed{A = F \cdot l} \quad (3.6)$$



Sl.3.2 Kretanje naboja okomito na silnice polja $\vec{E}$

- kada se gibanje vrši na putu ***l*** koji zatvara kut α sa smjerom sile ***F*** *(sl.3.3)* vrijedi:

$$\boxed{A = F \cdot \cos\alpha \cdot l} \quad (3.7)$$



$$\vec{F} = Q' \cdot \vec{E}$$

$$E = \frac{U}{l}$$

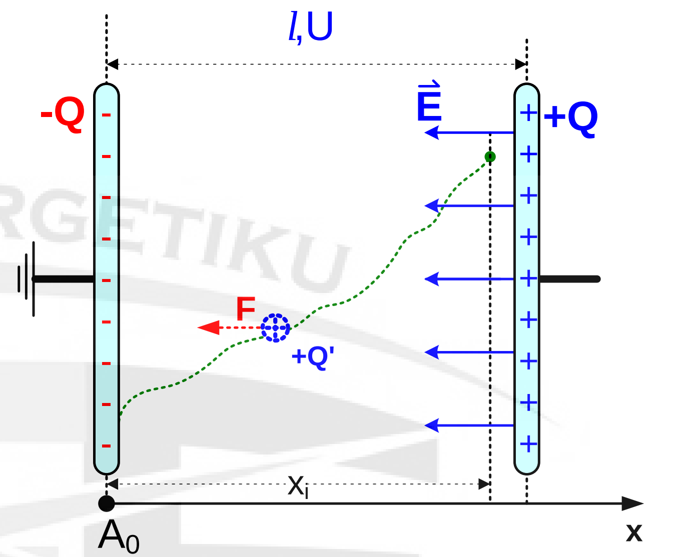
Sl.3.3 Kretanje naboja pod kutem α na silnice polja $\vec{E}$

Rad pri gibanju naboja Q' u električnom polju (2)

- u električnom polju između ploča nabijenog kondenzatora (sl.3.4) nalazi se naboj **+Q'**
  - na naboj **+Q'** djeluje konstantna sila $\vec{F}$ u smjeru vektora $\vec{E}$

$$\boxed{F = Q' \cdot E \; [Nm]} \qquad (3.8)$$

$$E = U / l$$



Sl.3.4 Potencijalna energija naboja ***+Q'*** *u električnom polju kondenzatora*

- naboj **+Q'** može se sada pomaknuti na udaljenost **x** od negativne ploče,
- tom pomaku protivi se sila **F** i troši se rad A_x

$$A_x = F \cdot x = Q' \cdot E \cdot x_i \qquad (3.10)$$

- ako je naboj **+Q'** posjedovao u početnom položaju ***x=0*** već neku energiju A_0 tada je u položaju **x** ukupna potencijalna energija

$$A_p = A_0 + Q' \cdot E \cdot x_i \qquad (3.11)$$

A_x - potencijalna energija u točki x_i, u odnosu na referentnu točku x_0

- vrijedi konačni izraz za ukupnu potencijalnu energiju A_P u točki x_i

$$\boxed{A_P = A_o + A_x \quad [\mathrm{Nm}]} \qquad (3.12)$$

Električni potencijal u homogenom električnom polju (1)

Potencijal φ kao izvršeni rad A po jediničnom naboju Q'

$$A_P = A_o + A_x \quad [\mathrm{Nm}] \qquad (3.12)$$

- ako se prema prikazanom opisu rada i potencijalne energije električnog polja kondenzatora, veličine A_p, A_0 i A_x podijele sa $+Q'$ dobije se slijedeći izraz:

$$\underbrace{\frac{A_p}{Q'}}_{\varphi_u} = \underbrace{\frac{A_0}{Q'}}_{\varphi_0} + \underbrace{\frac{A_x}{Q'}}_{\varphi_x} \quad \left[\frac{Nm}{As}\right] \qquad (3.13)$$

- veličine $\dfrac{A_p}{Q'}, \dfrac{A_0}{Q'}$ i $\dfrac{A_x}{Q'}$ predstavljaju izvršeni rad po jediničnom naboju Q',
- te skalarne veličine nazivamo ***električni potencijal*** i označiti će se grčkim slovom φ

- prema izrazu *(3.13)* mogu se definirati veličine:
  - ukupni potencijal φ_u,
  - referentni potencijal φ_0 u početnoj točki $x=0$
  - i potencijal φ_x na udaljenosti x od početne točke $x_0=0$,

$$\varphi_u = \frac{A_p}{Q'} \quad [V] \qquad (3.14)$$

$$\varphi_0 = \frac{A_0}{Q'} \quad [V] \qquad (3.15)$$

- potencijal φ_x ne ovisi o putu već o koordinati krajnje točke u odnosu na referentnu točku, te se može napisati :

$$A_x = F \cdot x = Q' \cdot E \cdot x_i \;\rightarrow\; \varphi_x = \frac{A_x}{Q'} \qquad (3.16)$$

- ukupni potencijal φ_u između nabijenih paralelnih ravnina definira se kao zbroj referentnog potencijala φ_0 i potencijala φ_x (izvršeni rad po jediničnom naboju Q' na putu x)

$$\varphi_u = \varphi_0 + \varphi_x \quad [\mathrm{V}] \qquad (3.17)$$

Električni potencijal u homogenom električnom polju (3)

Potencijal φ i jakost električnog polja $\vec{E}$

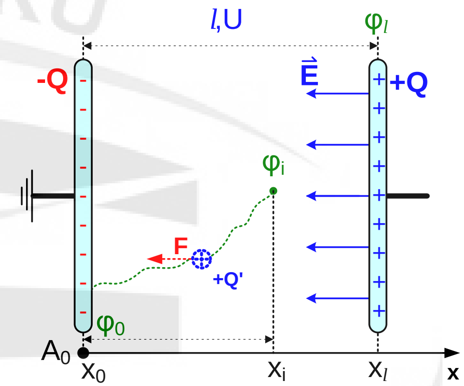
- Prema izrazu (3.5) za rad $\boxed{A = F \cdot l}$ i izrazu (3.9) za silu $\boxed{F = Q' \cdot E}$ može se utvrditi da se potencijal kao kvocijent potencijalne energije A_p i jediničnog naboja Q' može izraziti i preko veličine električnog polja $\vec{E}$ između ploča kondenzatora, te slijedi prikaz povezanosti potencijala **φ** i jakosti električnog polja $\vec{E}$

$$\varphi_x = \frac{A_p}{Q'} = -\int_{x_0}^{x_i} \vec{E} \cdot d\vec{x} = -E(x_i - x_0) = -E \cdot x_i$$

$$\boxed{0 \le x_i \le l}$$

$$\boxed{\varphi_x = -E \cdot x_i \quad [V]} \qquad (3.18)$$

▪ predznak" **−** " fizikalno znači da potencijal raste suprotno smjeru silnica električnog polja



Sl.3.5 Potencijal φ i vektor jakosti električnog polja E

- ako je prema $\boxed{x_i = l}$, i ako za električno polje između dvije paralelne suprotno naelektrizirane ravnine (σ=konst.) vrijedi izraz (2.8) $\boxed{E = \sigma/\varepsilon}$, tada za potencijal na pozitivnoj ploči u odnosu na referentnu točku φ_0 vrijedi:

$$\boxed{\varphi_x = \varphi_l = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot l = U_\ell \quad [V]} \qquad (3.19)$$

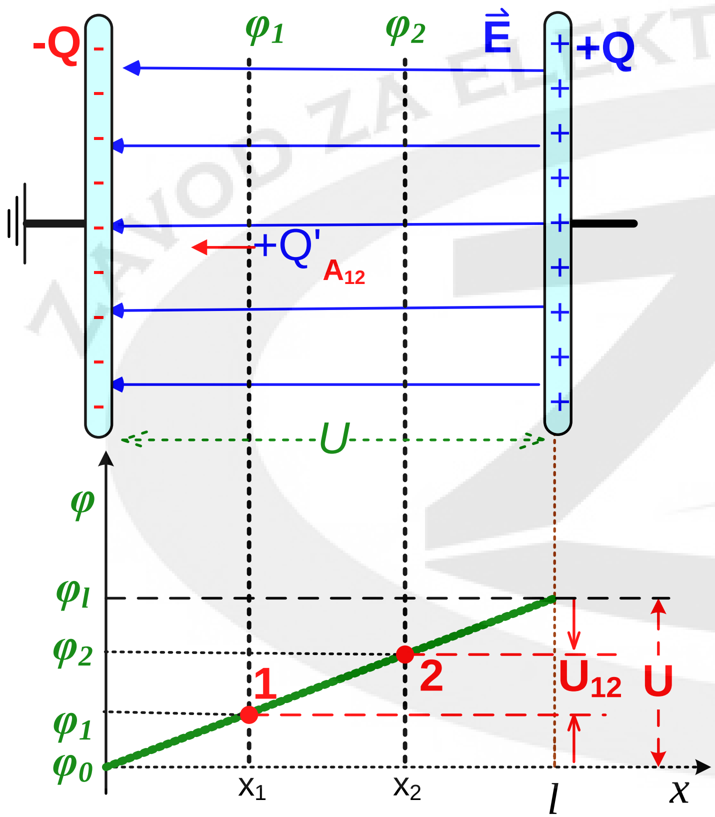
- interesantno je još prikazati i povezanost razlike potencijala **U_l** sa nabojem **Q**,
- uz relaciju za gustoću naboja po površini S, **σ=Q/S**, slijedi

$$\boxed{U_l = \frac{Q}{\varepsilon \cdot \frac{S}{l}} \quad [V]} \qquad (3.20)$$

$$\varepsilon \cdot \frac{S}{l} \rightarrow C$$

Električni napon u homogenom električnom polju (4)

- U odnosu na električni potencijal koji se promatra u jednoj točki električnog polja, električni napon se uvijek promatra i definira između dvije točke u električnom polju



U - ukupni napon između ploča kondezatora

Sl.3.6 Prikaz napona kao razlike potencijala

- kao što je prikazano izrazima (3.19) i (3.20) kada je ***x=l*** tada za razliku potencijala između gornje i donje ploče kondenzatora vrijedi:

$$\Delta\varphi = \varphi_l - \varphi_0 = \left(\frac{U}{l}\cdot l + \varphi_0\right) - \varphi_0 = U \qquad (3.21)$$

- razlika potencijala između ploča jednaka je upravo naponu **U** koji vlada među pločama

$$U = \varphi_l - \varphi_0 \;\; [V] \qquad (3.22)$$

- a općenito za napon između bilo kojih točaka **1** i **2** električnog polja čiji su potencijali $\boldsymbol{\varphi_1}$ i $\boldsymbol{\varphi_2}$ vrijedi izraz

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \;\; [V] \qquad (3.23)$$

- obično se referentnoj točki pripisuje potencijal $\boldsymbol{\varphi_0=0}$, i često se uzima u inžinjerskoj praksi da je to tlo, te se potencijal računa s obzirom na potencijal tla $\boldsymbol{\varphi_0=0}$

Električni napon u homogenom električnom polju (6)

- a prema sl.3.6 napon U_{12} može se definirati i kao izvršeni rad po jediničnom naboju Q' te slijedi

$$\boxed{U_{12} = \frac{A_1}{Q'} - \frac{A_2}{Q'} = \frac{\Delta A_{12}}{Q'} \; [V]} \qquad (3.25)$$

- prema izrazu *(3.25)* može se za napon U_l između ploča kondenzatora pisati i slijedeći izraz

$$\boxed{U_l = \frac{A_l}{Q'}} \qquad (3.28)$$

Definicija napona: *Napon je razlika potencijala između dvije točke električnog polja i brojčano je jednak radu koji se izvrši pri pomicanju jediničnog naboja između tih točaka, tj. jednak je razlici potencijala između tih točaka*

- očito je iz prikazanog da se veličina potencijala **φ** mjeri istom jedinicom kao i veličina napona **U** a to je **volt [V]** (jedinica 1V definirana je u opisu nehomogenog elek. polja)

- odnos napona i jakosti električnog polja u homogenom električnom polju između nabijenih ravnih ploča kondenzatora

$$\boxed{A_l = F \cdot l} \rightarrow \boxed{F = Q' \cdot E} \rightarrow A_l = F \cdot l = Q' \cdot E \cdot l \rightarrow U_l = \frac{Q' \cdot E \cdot l}{Q'}$$

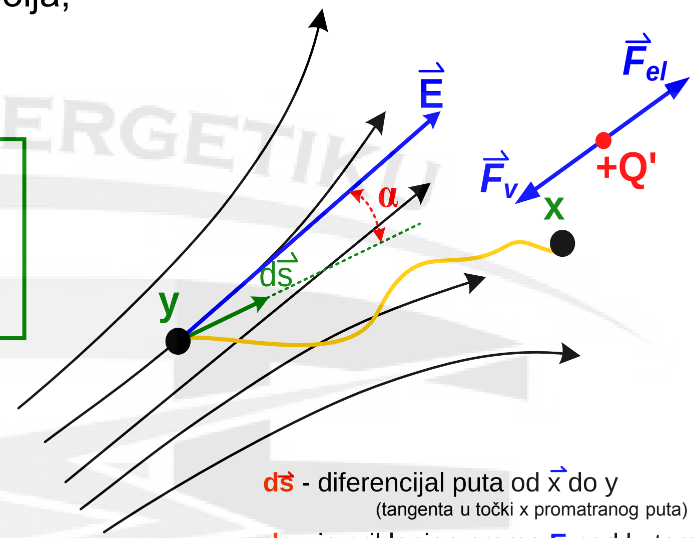
$$\boxed{U = E \cdot l}$$

Električni potencijala u nehomogenom električnog polju (1)

- Za nehomogeno električno polje vrijedi, da sila $\vec{F}$ i električno polje $\vec{E}$ nisu konstantni u svakoj točki polja,

$$\vec{F} \neq konst. \text{ i } \vec{E} \neq konst.$$

- u navedenim uvjetima mora se rad **A**, pri pomicanju naboja **Q'** u električnom polju, promatrati na infinitezimalnim djelovima puta **ds** u kojima se predpostavlja da su veličine **E** i **F** konstantne



$d\vec{s}$ - diferencijal puta od $\vec{x}$ do y (tangenta u točki x promatranog puta)

ds - je priklonjen prema **E** pod kutom ***α***

Q' - pokusni naboj

F_v - vanjska sila

x i y su međusobno dosta udaljene točke

Sl.3.9 Prikaz nehomogenog električnog polja

- zbog napomenutih uvjeta u nehomogenom električnom polju, može se zaključiti da se izvršeni *RAD* za gibanje naboja **Q'** od točke **x** do točke **y** polja, mora računati preko diferencijalnog računa te slijedi relacija:

$$dA = Q' \cdot \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q' \cdot E \cdot \cos\alpha \cdot ds$$

- da se dobije ukupno izvršeni rad ***A_{xy}*** za pomicanje naboja između točaka ***x*** i ***y***, *potrebno je* integrirati umnoške vektora jakosti električnog polja $\vec{E}$ i infinitezimalnih djelića puta $\vec{ds}$ pri gibanju naboja u električnom polju

$$A_{xy} = Q' \cdot \int_x^y \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- slijedi i drugi oblik izraza za izvršeni rad **A_{xy}** u nehomogenom električnom polju, uz pomoć vektora sile $\vec{F}$ promatranog električnog polja

$$A_{xy} = \int_x^y \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Električni potencijal u nehomogenom električnom polju (2)

Prikaz potencijala φ i napona U

- Na temelju opisa rada **A** u nehomogeno električnom polju definirati se i potencijali točaka ***x*** i ***y*** (φ_x,φ_y) i napon U_{xy}
- prema sl.3.9 A_x predstavlja rad koji se troši da silom F_v naboj $+Q'$ dovedemo iz referentne točke u beskonačnosti do točke ***x*** u promatranom električnom polju
- kako potencijal φ_x po definiciji predstavlja izvršeni rad po jediničnom naboju Q' slijede izrazi za φ_x i A_x

$$A_x = Q' \cdot \int_{\infty}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{s} \longrightarrow \varphi_x = -\frac{A_x}{Q'} = -\int_{\infty}^{x} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- potencijal φ_y može se računati kao izvršeni rad A_y koji se troši da naboj $+Q'$ iz točke izvan polja dovedemo do točke **y** u električnom polju, a može se računati i kao zbroj potencijala φ_x i napona U_{xy}

$$A_y = Q' \cdot \int_{\infty}^{y} \vec{E} \cdot d\vec{s} \longrightarrow \varphi_y = -\frac{A_y}{Q'} \longrightarrow \varphi_y = \varphi_x - \underbrace{\frac{A_{xy}}{Q'}}_{U_{xy}}$$

- Slijedi definiranje napona U_{xy} kao razlika potencijala između točke ***x*** i ***y***
- za prilike prikazane na sl.3.9 vrijedi da je $\boxed{A_y > A_x}$ te je i $\boxed{\varphi_y > \varphi_x}$, a za napon U_{xy} konačno slijedi

$$U_{xy} = \varphi_x - \varphi_y = \frac{A_{xy}}{Q'} = -\int_{x}^{y} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Jedinica električnog napona i potencijala – 1volt

$$[\varphi] = \frac{[A]}{[Q]} = \frac{J}{C} = \frac{VAs}{A \cdot s} = [V]$$

Primjer potencijala u električnom polju točkastog naboja (1)

- **Ponovimo definiciju za potencijal točke u prostoru oko točkastog naboja +Q**
  Potencijal električnog polja pozitivnog naboja u nekoj točki prostora brojčano je jednak radu koji izvrši sila izvana $\mathbf{F_v}$ pri pomicanju jediničnog naboja **+Q'** iz prostora izvan polja u određenu točku polja

- Zadatak u promatranom primjeru je definirati potencijal **φ** i napon $\mathbf{U_{12}}$ na plohi usamljene kugle polumjera R u električnom polju točkastog naboja (sl.3.11)

- u prvom koraku se prikazuju poznate relacije koje općenito povezuju veličine sile $\vec{F}$, rada **A** i vektora $\vec{E}$ u električnom polju

- za djelovanje sile $\vec{F}_{el}$ na pokusni naboj **Q'** u točki x električnog polja, prema Coullombovom zakonu vrijedi

$$F_x = E_x \cdot Q' = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{R_x^{\;2}} \cdot Q' \qquad (3.38)$$

- a za izvršeni rad ***A*** koji sila F izvrši na jedinični naboj koji se dovede u točku x na udaljenosti R_x od točkastog naboja slijedi opća relacija,

$$A_x = E_x \cdot Q' \cdot r = \frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{R_x} \qquad (3.39)$$

Kratki komentari u svezi razmatranog električnog polja

- navedeni izrazi za rad **A**, silu $\vec{F}$ i jakost polja $\vec{E}$, prikazani su kao podsjetnik sa *konstantnim veličinama* koje vrijede u razmatranju *homogenog* električnog polja
- u nastavku se promatra ***nehomogeno*** električno polje točkastog naboja (sl.3.11), *te se proračuni provode sa diferencijalnim veličinama*
- izvršeni rad **A** ili potencijalnu energiju $\mathbf{W_p}$ neke točke u električnom polju promatramo u pravilu u odnosu na neku izabranu točku polja koju nazivamo referentna točka
- u razmatranom slučaju referentna točka će se izabrati u dovoljno udaljenom mjestu (točka ∞), u kojem se predpostavlja da je potencijalna energija te točke jednaka nuli.

Primjer potencijala u električnom polju točkastog naboja (2)

- definiranje potencijala φ_r pojedine točke polja i napona U_{12} u prostoru oko točkastog naboja provesti če se uz pomoć opisa rada **A** i potencijalne energije W_p pojedenih točkaka u električnog polja

Opis rada, potencijalne energije i potencijala oko točkastog naboja +Q prostoru

- Kao što je ranije spomenuto potrebno je u promatranom primjeru raditi sa veličinama diferencijala rada ***dA*** i diferencijala puta ***dr***, te se za diferencijal rada **dA** može pisati izraz

$$\boxed{dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}} \qquad (3.35)$$

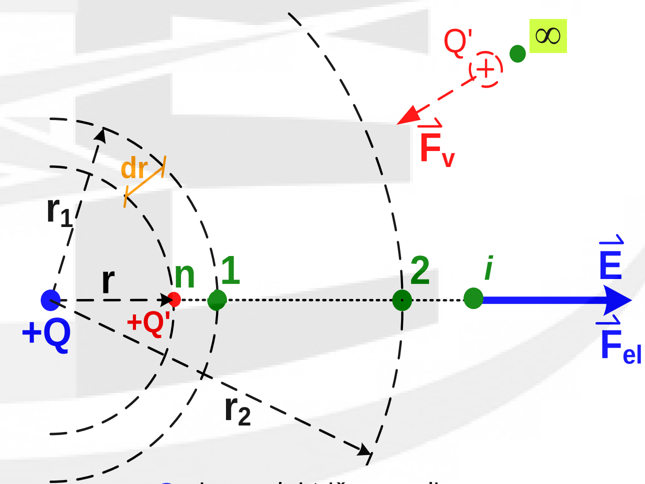
- ako se sada koristi izraz za *silu* dobije se nova relacija diferencijal rada

$$dA = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot Q \cdot Q' \cdot \frac{dr}{r^2} \qquad (3.36)$$

- pomicanjem naboja ***+Q'*** od točke $r_{ref} = \infty$ do točke **r=n** izvršiti će se rad A_r uz pomoć vanjske sile $\vec{F}_v$ te slijedi izraz:

$$A_r = \int_{\infty}^{r} dA = \int_{\infty}^{r} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r^2} dr \qquad (3.37)$$

- sada se računaju i veličine rada A_1 i A_2 za pomicanje naboja ***+Q'*** od ∞ do točaka **1** i **2** u električnom polju uz pomoć vanjske sile $F_{v,}$



+Q - izvor električnog polja
Q' - pokusni naboj
r - udaljenost Q' od izvra električnog polja
dr - diferencijal pomaka naboja Q'
A - rad koji je izvršila sila $\vec{F}$ na račun polja $\vec{E}$

Sl.3.10 Prikaz električnog polja točkastog naboja

Primjer potencijala u električnom polju točkastog naboja (3)

- na temelju izraza (3.37) mogu se sada izračunati i veličine rada A_1 i A_2 za pomicanje naboja $+Q'$ od ∞ do točaka **1** i **2** u električnom polju uz pomoć vanjske sile $F_{v,}$ te slijedi izračun za rad A_1 **i A2**

$$A_1 = \int_{\infty}^{r_1} \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \int_{\infty}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} \qquad (3.38)$$

$$(-\frac{1}{r})_{\infty}^{r_1} = -\frac{1}{r_1} - (-\frac{1}{\infty}) = -\frac{1}{r_1}$$

$$= -\frac{1}{r_1}$$

$$A_2 = \int_{\infty}^{r_2} \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \int_{\infty}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2} \qquad (3.39)$$

$$-\frac{1}{r_2}$$

- veličine izvršenog rada A_1 i A_2 predstavljaju ujedno i potencijalnu energiju W_{p1} **i** W_{p2} u odabranim točkama **1** i **2** električnog polja točkastog naboja

- ako se sada veličine rada A_1 **i** A_2 podijele sa jediničnim nabojem **Q'** dobiti će se skalarne veličine potencijala φ_1 **i** φ_2 u odabranim točkam polja

$$\varphi_1 = \frac{-A_1}{Q'} = -\int_{\infty}^{r_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_1} \qquad \varphi_2 = \frac{-A_2}{Q'} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_2} \qquad (3.40)$$

Primjer potencijala u električnom polju točkastog naboja (4)

Napon u električnom polju točkastog naboja +Q

- Da se dobije i veličina napona U_{12}, može se prema izrazima (3.38) i (3.39) definirati i veličina za rad A_{12} pri pomicanju naboja Q‘ iz točke **1** u točku **2** promatranog električnog polja točkastog naboja na sl.3.10

$$\boxed{A_{12} = A_{r1} - A_{r2} = \frac{Q \cdot Q'}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \qquad (3.41)$$

- ako se sada izraz ***(3.46)*** podijeli sa jediničnim nabojem ***Q'*** tj. $\frac{A_{12}}{Q'} = U_{12}$ dobije se konačno i izraz za napon U_{12}, kao razlika potencijala φ1 i φ2 dviju točaka u električnom polju točkastog naboja

$$\boxed{U_{12} = \frac{A_{12}}{Q'} = \varphi_1 - \varphi_2} \longrightarrow \boxed{U_{12} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \qquad (3.42)$$

Jedinica električnog napona i potencijala – 1volt	$[\varphi] = \frac{[A]}{[Q]} = \frac{J}{C} = \frac{VAs}{A \cdot s} = [V]$

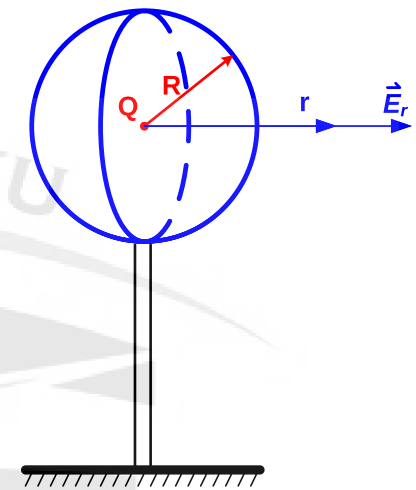
Primjer potencijala u električnom polju točkastog naboja (6)

Potencijal usamljene kugle točkastog naboja

$$U_{12} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

- Ako se sada pretpostavi:
  - da je polumjer $r_1 = R$,
  - da polumjer r_2 teži ka beskonačnosti $(r_2 \to \infty)$
  - da vrijednost $1/r_2$ teži ka nuli $\left(1/r_2 \to 0 \right)$,
  - slijedi konačno izraz za potencijal plohe kugle na udaljenosti **R** od točkastog naboja **+Q**:

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{R} \qquad (3.43)$$



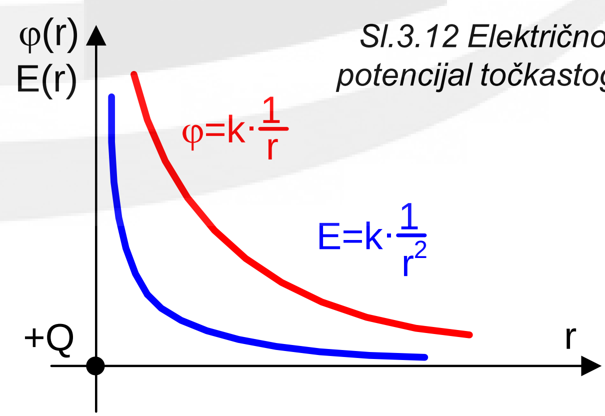
Sl.3.11 Potencijal osamljene kugle

Električno polje na plohi usamljene kugle

- Prema poznatoj relaciji $d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{r}$ za odnos potencijala i jakosti električnog polja slijedi i izraz za električno polje na plohi usamljene kugle

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{Q}{R^2} \qquad (3.44)$$

Sl.3.12 Električno polje i potencijal točkastog naboja



r – udaljenost od naboja Q do promatrane točke

Promjena potencijala i ekvipotencijalne plohe (1)

Promjena potencijala

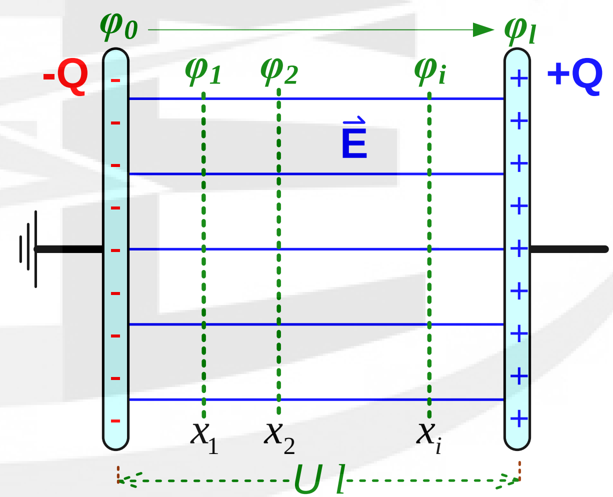
- Razmatranje ekvipotencijalnih linija i ekvipotencijalnih ploha, ***tj.područja u kojima je potencijal konstantan,*** provesti će se na primjerima homogenog i nehomogenog električnog polja

  - za ukupni potencijala φ_u u prostoru između ploča kondenzatora vrijedi
$$\varphi_u = (\varphi_0 + \varphi_x)$$

  - *ako je $\varphi_0=\varphi_{ref}=0$ slijedi:*
$$\varphi_u = \varphi_x$$

  - *konačno slijedi izraz za ukupni potencijal u **homogenom** polju između nabijenih ploča kondenzatora*
$$\varphi_u = \varphi_x = \frac{U}{l}\cdot x$$

  - *ako potencijalne plohe ravnomjerno razmaknute a sa φ_{x1} označimo potencijal prve potencijalne plohe tada za i-tu potencijalnu plohu φ_{xi} i za razmak x_i slijedi*



*Sl.3.13 Ekvipotencijalne plohe u **homogenom** električnom polju*

$$\varphi_{x_i} = i\cdot\varphi_{x_1} \quad \longrightarrow \quad x_i = i\cdot x_1$$

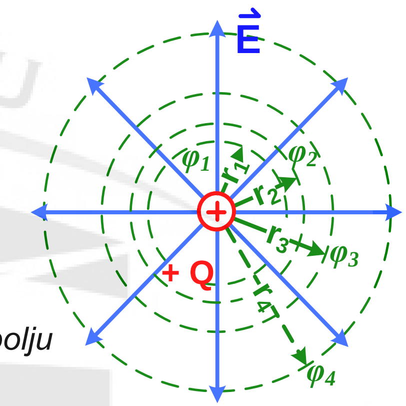
  - u *nastavku je prikazan izračun položaja ekvipotencijalnih ploha φ_{xi} u homogenom električnom polju za zadani potencijal $\varphi_{x1} = 100V$*

Promjena potencijala i ekvipotencijalne plohe

Nehomogeno električno polje točkastog naboja

$$\varphi_r = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}$$

- Na slici je prikazano **nehomogeno** električno polje točkastog naboja, te se može napisati i općeniti izraz za promjenu potencijala u prostoru električnog polja točkastog naboja te slijedi relacija
- može se zaključiti da potencijal pojedinih točaka u promatranom električnom polju s obzirom na referentni potencijal φ_∞ ovisi **samo** o udaljenosti r_i od izvora točkastog naboja
- *na slici su prikazane ekvipotencijalne plohe pojedinih točaka u promatranom električnom polju s obzirom na potencijal* φ_1*=100V i ostale potencijale cca 80V, 60V i 40V uz referentni potencijal* φ_∞*=0*



*Sl.3.15 Ekvipotencijalne plohe u **nehomogenom** električnom polju*

Ekvipotencijalne plohe

- proizlazi da sve točke električnog polja koje imaju **istu koordinatu x (odnosno r)** imaju i **isti potencijal φ (φ_1,φ_2,....φ_i= konst.)**
- ravnine paralelne sa pločama kondenzatora (x=konst.), odnosno plohe kugle oko točkastog naboja (r=konst.) nazivamo **EKVIPOTENCIJALNE PLOHE** te vrijedi

$$\varphi_{ekv} = konst.$$

$$W_{pekv} = konst.$$

- pomicanje jediničnog naboja **+Q'** po ekvipotencijalnoj plohi ne ostvaruje promjenu potencijalne energije W_p i ne vrši se rad **A'**, jer se gibanje naboja vrši okomito na smjer sile **F** i silnice polja **E**
- *slijedi-ekvipotencijalne plohe* su *okomite na silnice u elektrostatskom polju*
- gibanje naboja **+Q'** na putu $\vec{l}$ po ekvipotencijalnoj plohi vrši se okomito na silnice polja **E,** te za umnožak polja i puta, i za izvršeni rad **A,** pri pomicanju naboja **+Q'** slijede relacije

$$A_{12} = Q'\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

$$\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

KRAJ - Tema 3-oe1

Materijali za studente

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 4. - *PRIMJERI ELEKTRIČNOG POLJA I POTENCIJALA*

- primjeri u homogenom električnogm polju

- pločasti kondenzator s dvije ili tri ravnine,..

- primjeri u nehomogenom električnogm polju

- točkasti naboj, dugi nabijeni vodič, nabijena šuplja kugla, nabijena kuglina ljuska........

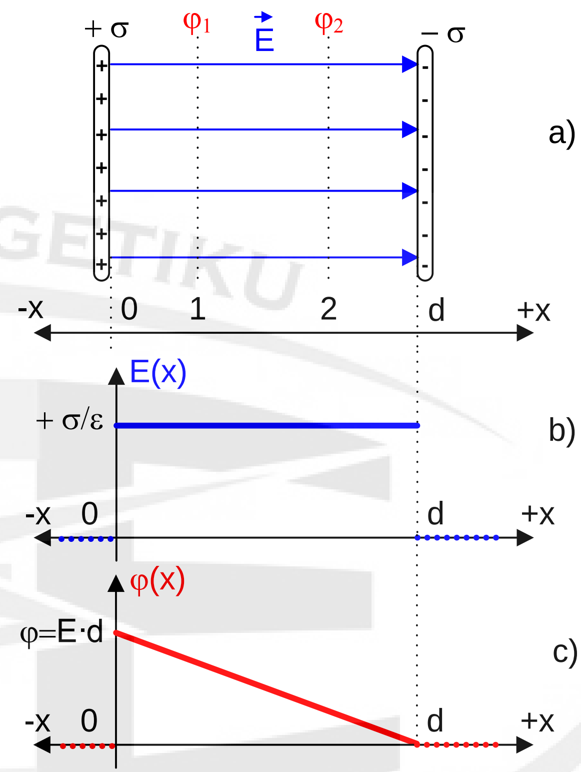
1. Primjeri homogenog električnog polja (1)

Primjer 1.1 Suprotno nabijene paralelne ravnine

- skica polja dana je na sl.4.1 a) i traži se $E=f(x)$ i $\varphi=f(x)$
- električno polje nabijenih ravnina računa se za $\boxed{0<x<d}$ prema izrazu $$\boxed{\left|\vec{E}\right| = \frac{\sigma}{\varepsilon}}$$
- izvan ravnina električno polje je jednako nuli ($E=0$) jer se utjecaji naboja "+" ravnine i "-" ravnine poništavaju
- za potencijal bilo koje točke između dvije ravnine vrijedi

$$\varphi(x) = -\int_{x_{ref}}^{x} E\cdot dx = -E\cdot x\Big|_{x_{ref}}^{x} = -E\cdot x + E\cdot x_{ref}$$

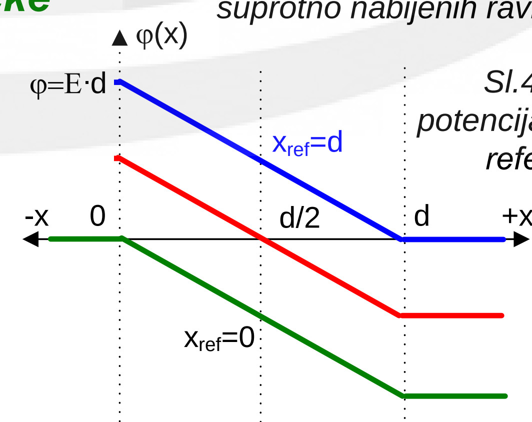
- i ako kao referentnu točku odredimo $x_{ref} = d$ tada slijedi $$\boxed{\varphi(x) = -E\cdot x + E\cdot d}$$



Sl.4.1 Veličine E i φ između dviju suprotno nabijenih ravnina

Primjer 1.2 Potencijal i promijena referentne točke

- na sl.4.2 prikazani su dijagrami φ(x) za različito odabrane referentne točke x_{ref}
- za $x_{ref} = 0$ → $\varphi(x) = -E\cdot x$
- za $x_{ref} = d/2$ → $\varphi(x) = -E\cdot x + E\cdot d/2$
- za $x_{ref} = d$ → $\varphi(x) = -E\cdot x + E\cdot d$



Sl.4.2 Promijena potencijala uz promjenjivu referentnu točku

1. Primjeri homogenog električnog polja (3)

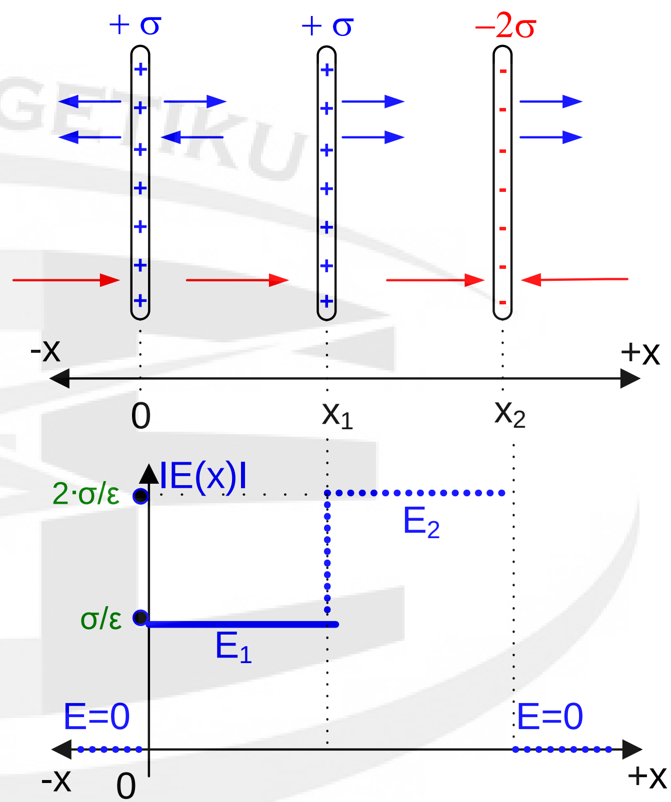
Primjer 1.3 Tri paralelne nabijene ravnine

- Za suprotno nabijene paralelne ravnine interesantno je promatrati i promijenu jakosti električnog polja ***E*** sa tri nabijene paralelne ravnine prema sl.4.3
- u ovom slučaju će se primijeniti zakon superpozicije za utjecaj svake pozitivno nabijene ravnine električnim nabojem plošne gustoće $+\sigma$
- kako je ukupni pozitivni naboj $+2\sigma$ i negativni -2σ za električno polje izvan ploča vrijedi $\boxed{E=0}$
- za električno polje između pozitivnih ploča vrijedi

$$\boxed{|E_1| = 2\cdot\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}} \qquad (4.2)$$

- a za električno polje između pozitivne ploče na poziciji x_1 i negativne ploče na poziciji x_2 vrijedi

$$\boxed{|E_2| = 4\cdot\frac{\sigma}{2\cdot\varepsilon} = \frac{2\cdot\sigma}{\varepsilon}} \qquad (4.3)$$



Sl.4.3 Električno polje triju nabijenih ravnina

- električno polje E_2 je dvostruko veće od E_1 što se vidi i na sl.4.3

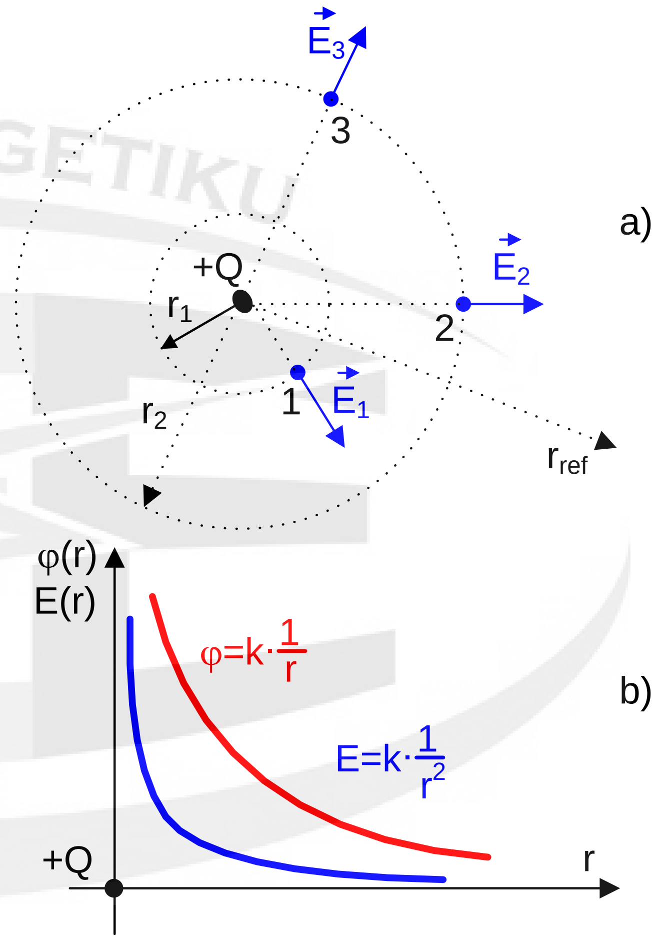
2.Primjeri nehomogenog električnog polja (1)

(Primjer 2.1)

Primjer 2.1 Električno polje i potencijal točkastog naboja

- Na sl.4.4 prikazan je izolirani točkasti naboj +Q sa smjerovima električnog polja u točkama 1, 2 i 3
- pokazano je (tema 2. izraz 2.23) da se **električno polje *E*** točkastog naboja računa prema izrazu

$$\boxed{\left|\vec{E}\right| = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r^2}} \quad (4.4) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\left|\vec{E}_1\right| > \left|\vec{E}_2\right| \\ \left|\vec{E}_2\right| = \left|\vec{E}_3\right|\end{array}}$$



r – udaljenost od naboja Q do promatrane točke

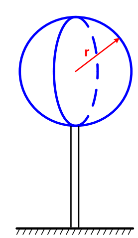
Sl.4.4 Električno polje i potencijal točkastog naboja

- **a za potencijal** u okruženju točkastog naboja vrijedi (tema 2.izraz 3.45)

$$\varphi(r) = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E}(r)\cdot d\vec{r} \longrightarrow \boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_{ref}}\right)}$$

- ako je referentna točka definirana u beskonačnosti (***r_{ref} = ∞***) slijedi izraz za potencijal točkastog naboja koji ujedno predstavlja i potencijal plohe usamljene kugle

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r}}$$



2. Primjeri nehomogenog električnog polja (2)

(Primjer 2.3)

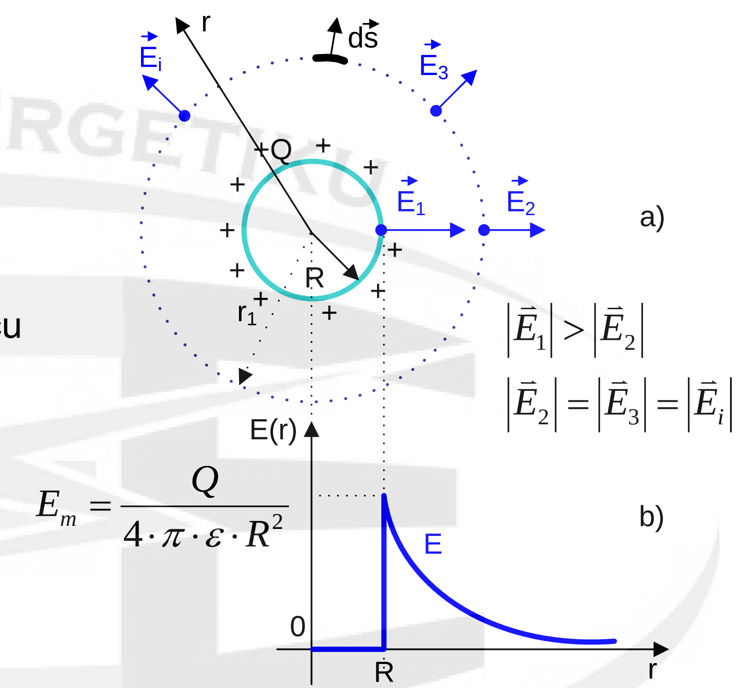
Primjer 2.3 Električno polje i potencijal pozitivno nabijene šuplje kugle

Električno polje E

- Razmatra se šuplja kugla kao model nakupina plošnih naboja s plošnom gustoćom σ
- zbog sferne simetrije vektori električnog polja $\vec{E}$ su radijalno usmjereni u odnosu na središte kugle
- **Prostor** $\boxed{r > R}$
- zbog sferne simetrije električno polje riješavamo pomoću Gaussovog teorema,te za polje izvan kugle $r > R$ slijedi poznata relacija,

$$\boxed{E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}}$$

- proizlazi da se električno polje izvan kugle ponaša kao kod točkastog naboja tj. kao da je sav naboj sa površine kugle koncentriran u središtu kugle



Sl.4.8 Električno polje nabijene šuplje kugle

Ploha kugle $\boxed{r = R}$

Na samoj površini kugle dobije se maksimalna vrijednost polja tj.

$$\boxed{E_{max} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R^2}}$$

Prostor unutar kugle $\boxed{r < R}$

- Ako bi uz pomoć Gaussovog zakona obuhvatili bilo koju plohu kugle uz uvjet da je $\boxed{r < R}$ bio bi obuhvačen naboj jednak nuli tj. $\boxed{\sum_i^n Q_i = 0}$

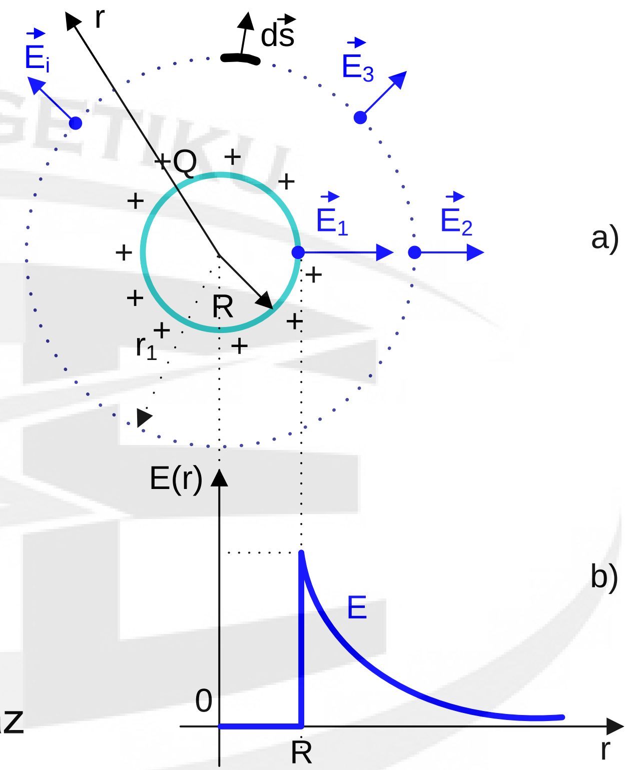
- slijedi da je električno polje unutar kugle jednako nuli tj. $\boxed{r < R} \longrightarrow \boxed{E = 0}$

2. Primjeri nehomogenog električnog polja (9)

(Primjer 2.3)

Potencijal φ

- Za promatranje potencijala naelektrizirane šuplje kugle najpovoljnije je izabrati referentni potencijal u beskonačnosti kao i kod točkastog naboja



- pri samom promatranju potencijala naelektrizirane šuplje kugle promatrati će se tri odvojena područja
  - prostor izvan kugle **r >R,**
  - ploha kugle **r=R** i
  - prostor unutar kugle **r <R**

Prostor r >R

- Za potencijal ***izvan kugle*** može se koristiti poznati izraz (tema 3, izraz (3.45))

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}} \qquad (4.9)$$

- izraz za potencijal da potencijal u promatranom prostoru ovisi upravo proporcijalno o količini naboja **Q** i obrnuto proporcijalno o udaljenosti **r**

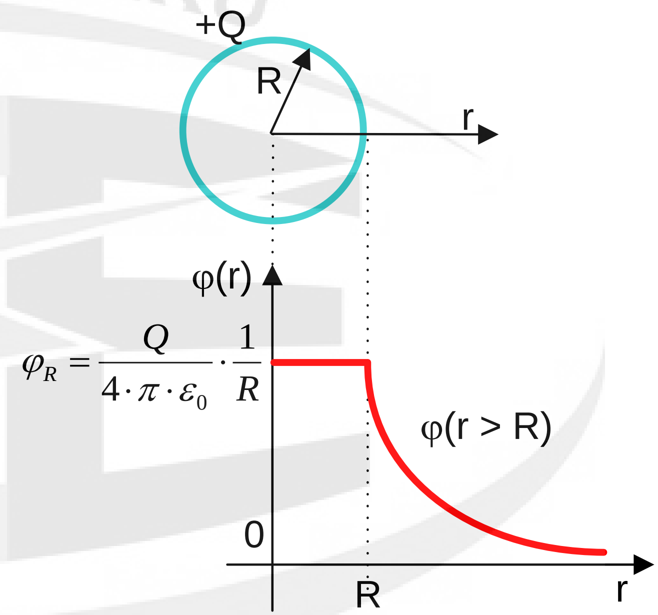
2. Primjeri nehomogenog električnog polja (10)

(Primjer 2.3)

Ploha kugle r=R

- potencijal φ_R na samoj plohi nabijene kugle polumjera R, jednak je potencijalu točkastog naboja koji je po iznosu jednak raspodjeljenom naboju po kuglinoj plohi, a smješten u središtu kugle

$$\boxed{\varphi_R = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R}} \quad (4.10)$$



Sl.4.9 Potencijal pozitivno nabijene šuplje kugle

Prostor r<R

- Potencijal unutar nabijene kugle φ_0 je posljedica ukupnog naboja Q koji je ravnomjerno raspodjeljen po plohi kugle,
- izračun potencijala φ_0 dobio bi se metodom superpozicije utjecaja svih kvazitočkastih naboja s površine kugle ΔQ_i na bilo koju točku unutar kugle (L8)
- kratkim matematičko-trigonometrijskim postupkom i fizikalnom primjenom superpozicije dobije se rezultat da je utjecaj plošnog naboja kugle u svakoj točki unutar kugle potencijalno konstantan i jednak potencijalu plohe kugle,
- prostor unutar kugle je ekvipotencijalan prostor s potencijalom φ_0 $\boxed{\varphi_0 = \varphi_R}$

$$\boxed{\varphi_0 = \varphi_R = \frac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R}} \quad (4.11)$$

KRAJ - Tema 4-oe1

Materijali za studente

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 5. - **KAPACITET, KONDENZATOR I *ENERGIJA ELEKTOSTATSKOG POLJA***

- pojam električnog kapaciteta i kondenzatori

- primjeri kapaciteta i kondenzatora

- energija diskretnog sustava naboja

- energija nabijenog pločastog kondenzatora

- energija nabijene kugle

Pojam električnog kapaciteta usamljenog tijela (1)

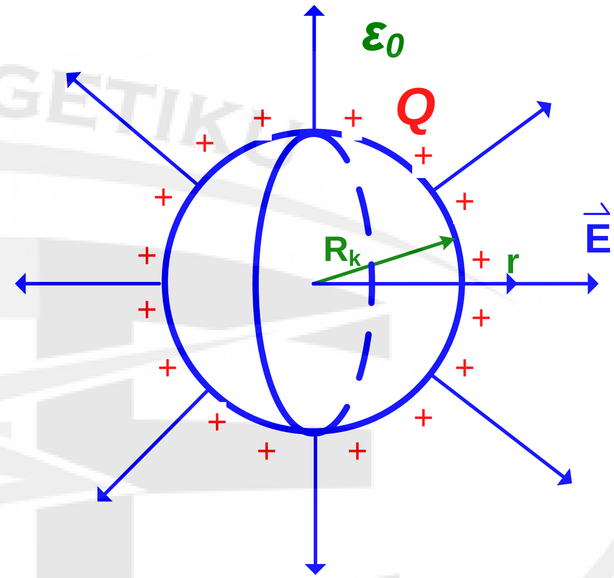
- Definicija: **Sposobnost vodiča da prihvaća naboje i da pri tome povećava potencijal nazivamo *ELEKTRIČKI KAPACITET.***

- u prostoru se nalazi šuplja kugla polumjera $r=R_k$ kao usamljeno tijelo i nabijena nabojem **Q**
- na njoj se nalazi pozitivni električni naboj,
- kugla se promatra u vakumu
- za potencijal φ izvan prikazane usamljene kugle vrijedi relacija

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r}} \qquad (5.1)$$

- za potencijal na površini usamljene kugle ($r=R_k$) slijedi izraz

$$\boxed{\varphi_k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{R_k}} \qquad (5.2)$$



Sl.5.1 Skica nabijene usamljene kugle i fizikalni prikaz kapaciteta

- *Za **ELEKTRIČNI KAPACITET*** kao veličinu kojom se definira veza između naboja na kugli Q_k i potencijala kugle φ_k slijedi

$$\boxed{C_k = \frac{Q_k}{\varphi_k} \quad \left[\frac{As}{V} = F_{(Farad)}\right]} \qquad (5.3)$$

$$\boxed{C_k = 4\pi\varepsilon_0 R \quad \left[F_{(Farad)}\right]} \qquad (5.4)$$

$$C_k = \frac{Q_k}{U_{k\infty}} = \frac{Q_k}{\varphi_k - \underbrace{\varphi_\infty}_{=0}} = \frac{Q_k}{\varphi_k}$$

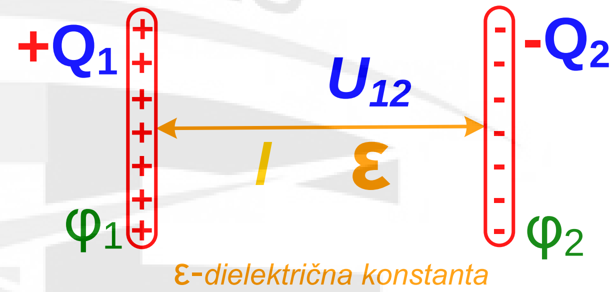
Kapacitet pločastog kondenzatora - (dva tijela) (1)

- ***Električni kondenzator*** je uređaj koji ima sposobnost prihvaćanja električnog naboja, a sastoji se od dva vodiča posebne konstrukcije razdvojena dielektrikom i koji imaju relativno veliki kapacitet uz male dimenzije(sl.5.2)

- električka svojstva sustava dvaju elektroda opisujemo parametrom KAPACITET

- pojam električnog kapaciteta prikazati će se upravo na primjeru pločastog kondenzatora i pri tome imamo dvije pločaste elektrode nabijene nabojem ***+Q1*** i ***-Q2*** a vrijedi i

$$\boxed{+Q_1 = -Q_2}$$



Sl.5.2 Električni kapacitet i pločasti kondenzator

- Kapacitet je odnos naboja i napona te slijedi matematički izraz za kapacitet kondenzatora

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} \qquad [F]} \qquad (5.6)$$

$$(1F = As/V)$$

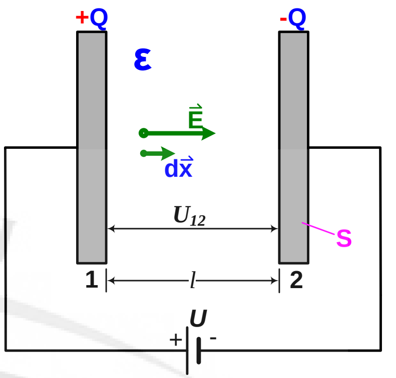
- ***Definicija 1Farad***: Kapacitet vodiča je *1 Farad* ako mu se potencijal poveća za *1V* uz povećanje naboja od *1As*

Izračun kapaciteta pločastog kondenzatora

- Na sl.5.3 prikazan je pločasti kondenzator sa osnovnim veličinama
- za vektor dielektričnog pomaka $\vec{D}$ i vektor konstantnog električnog polja $\vec{E}$ slijede relacije:

$$D = \sigma = \frac{Q}{S} \quad (5.7) \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \quad (5.8)$$

Električno polje ima smjer od "+" ka "-" elektrodi, a električni potencijal raste u drugom smjeru od "-" ka "+"



Sl.5.3 Detaljni prikaz pločastog kondenzatora

- prema poznatoj relaciji između napona i jakosti električnog polja E slijedi kratki izračun za napon između ploča kondenzatora

$$U_{12} = \int_x \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \int_{x_1}^{x_2} E \cdot dx \cdot \cos\alpha$$

$$U_{12} = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = \frac{Q}{\varepsilon \cdot S} \cdot l \quad (5.9)$$

- za *E=konst.* i ***cos** α=1* vrijedi dalje za napon U_{12}
- slijedi matematički izraz za kapacitet između nabijenih ploča kondenzatora

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_{12}} \quad [F]} \qquad \boxed{C = \varepsilon \cdot \frac{S}{l}} \quad (5.10) \qquad \boxed{\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}$$

- za kondenzator su važne *dvije osnovne veličine* koje opisuju njegovo funkcioniranje u pogonu

U_R - radni napon kondenzatora je maksimalni napon koji kondenzator može u pogonu trajno izdržati

U_{PR} - probojni napon kondenzatora je minimalni napon kod kojeg dolazi do proboja izolacijskih karakteristika kondenzatora

- za odnos navedenih veličina vrijedi relacija: $\boxed{U_R << U_{PR}}$ (5.11)

Serijski spoj kondenzatora (1)

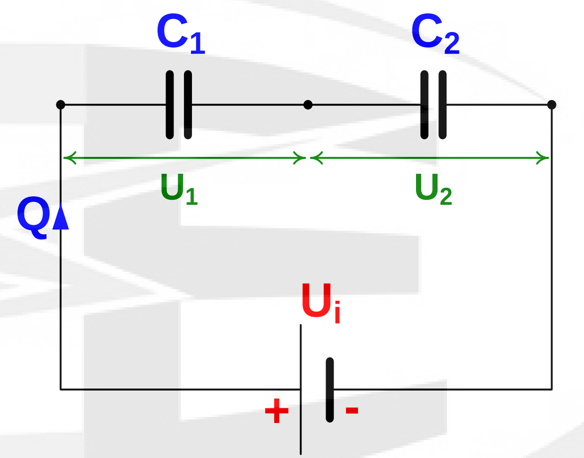
U električnim strujnim krugovima pojavljuju se kondenzatori spojeni serijski, paralelno ili u kombiniranom serijsko-paralelnom spoju

- ***u serijskom spoju*** kondenzatori se spajaju u seriju sa izvorom napona ***Ui*** (sl.5.4)
- struja je zajednička svim serijski vezanim elementima

- za serijski vezane kondenzatore vrijede za naboje i napone slijedeće relacije

$$\boxed{Q_1 = Q_2 = Q} \qquad (5.12)$$

$$\boxed{U = U_1 + U_2} \qquad (5.13)$$



Sl.5.4 Prikaz serijskog spoja dva kondenzatora

- prikaz osnovnih relacija za odnose napona, naboja i kapaciteta

$$\boxed{U = \frac{Q}{C} \quad U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2}} \qquad (5.14)$$

Serijski spoj kondenzatora (2)

- uz prikazane relacije početnih uvjeta dobiju se slijedeći izrazi:

$$\boxed{\frac{Q}{C} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}} \qquad (5.15)$$

- slijedi konačni izraz za ukupni kapacitet serijski vezanih kondenzatora

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}} \qquad (5.16)$$

ODNOS NAPONA I KAPACITETA

- Važno je definirati i odnose veličina kapaciteta i pripadajućih napona za serijski vezane kondenzatore

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad \text{i} \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \qquad U_1 : U_2 = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} \longrightarrow \boxed{U_1 : U_2 = C_2 : C_1} \qquad (5.19)$$

- *uz veći kapacitet → manji napon*
- *uz manji kapacitet → veći napon*

Paralelni spoj kondenzatora (1)

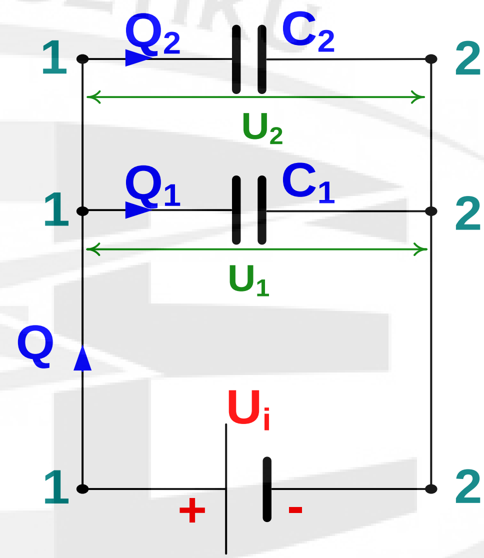
- U paralelnom spoju svi paralelno vezani kondenzatori spojeni su na zajedničke potencijalne točke 1 i 2 na sl.5.5, a naboji se dijele prema veličini pojedinih kondenzatora

- s obzirom da su oba kondenzatora priključena između istih potencijalnih točaka 1 i 2 (sl.5.5), vrijedi za napone slijedeća relacija

$$\boxed{U_1 = U_2 = U} \qquad (5.20)$$

- tok naboja iz izvora dijeli se na kondenzatore C_1 i C_2, te za odnose naboja vrijedi

$$\boxed{Q_1 + Q_2 = Q} \qquad (5.21)$$



Sl.5.5 Prikaz paralelnog spoja kondenzatora

- za tijek daljnjeg izračuna mogu se napisati izrazi koji opisuju odnose naboja, napona i kapaciteta

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= C_1 \cdot U_1 = C_1 \cdot U \\ Q_2 &= C_2 \cdot U_2 = C_2 \cdot U \end{aligned}} \qquad (5.22)$$

Paralelni spoj kondenzatora (2)

- uz korištenje početnog uvjeta (Q1+Q2 =Q) slijedi kratki izračun

$$Q = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = U \cdot \left(C_1 + C_2 \right) \qquad (5.23)$$

- sređivanjem izraza (5.23) konačno se dobiju izrazi za ukupni kapacitet paralelno vezanih kondenzatora

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = C_1 + C_2} \longrightarrow \boxed{C = \sum_{i=1}^{n} C_i} \qquad (5.24)$$

ODNOS NABOJA I KAPACITETA

- u paralelnoj vezi kondenzatora važno je istaknuti odnose naboja i veličine kapaciteta te slijedi

$$Q_1 = C_1 \cdot U_1 \qquad Q_2 = C_2 \cdot U_2$$

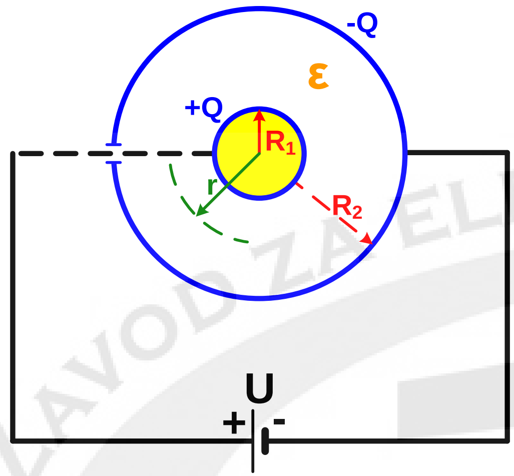
- te nakon sređivanja dobije se konačni izraz za odnos naboja i paralelno vezanih kapaciteta

$$\boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1}{C_2}} \qquad (5.25)$$

- *uz veći kapacitet → veliki naboj*
- *uz manji kapacitet → mali naboj*

- naboji paralelno spojenih kondenzatora odnose se upravo proporcionalno veličini kapaciteta kondenzatora

Kapacitet kuglastog kondenzatora



Sl.5.7 Prikaz kuglastog kondenzatora

Osnovne postavke kuglastog kondenzatora

- Imamo dvije koncentrične kugle promjera r_1 i r_2 priključene na izvor napona U_i
- naboji kugli su naboji jednaki po iznosu, ali suprotnih predznaka
- između kugli se nalazi dielektrik dielektrične konstante ε

proračun kapaciteta:

- prema poznatim relacijama za napon i jakost električnog polja

$$U = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$E = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

- može se za kuglasti kondenzator računati napon U_{12}

$$U_{12} = \int_r \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{Q}{\varepsilon \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot dr \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{1} = -\frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \int_{R_2}^{R_1} \underbrace{\frac{dr}{r^2}}_{-\frac{1}{r}\Big|_{R_2}^{R_1}}$$

$$\boxed{U_{12} = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

Kapacitet

- uz izraz $C = \frac{Q}{U}$ slijedi za kapacitet kuglastog kondenzatora

$$\boxed{C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}}$$

Kapacitet osamljene kugle

- Ako je vanjski promjer kuglastog kondenzatora mnogo veći od unutarnjeg promjera slijedi $R_2 >> R_1$,

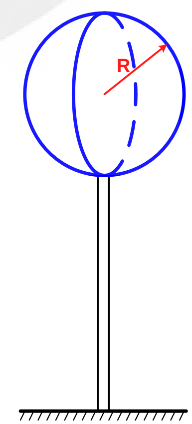
$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_2 - R_1}$$

$$C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{R_1}{1 - \frac{R_1}{R_2}}$$

- za odnos r_1 i r_2 i za veličinu r_1 vrijedi

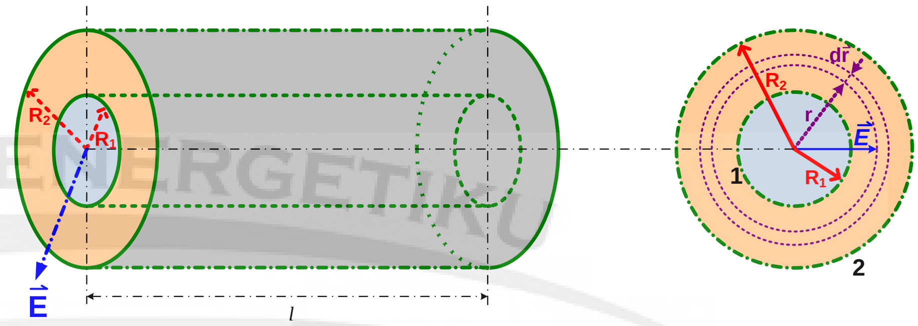
$$\frac{R_1}{R_2} \rightarrow 0 \quad , \quad R_1 = R$$

$$\boxed{C = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R}$$



Kapacitet cilindričnog kondenzatora

U razmatranom primjeru opisan je cilindrični kondenzator i proveden je postupak proračuna napona U_{12} i kapaciteta C navedenog kondenzatora (sl.5.9)



Sl.5.9 Skica cilindričnog kondenzatora

- za napon U_{12} između ploha 1 i 2 slijedi kratki izvod koristeći poznatu relaciju za odnos napona i jakosti električnog polja (izraz 4.5)

$$U_{12} = -\int_{2}^{1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = +\int_{1}^{2} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r}\cdot dr\cdot \underbrace{\cos\alpha}_{1} = \frac{\lambda}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r} \longrightarrow \lambda = \frac{Q}{l}$$

(5.29)

$$U_{12} = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\left(\ln R_2 - \ln R_1\right)$$

- slijedi konačni izraz za napon U_{12}

$$U_{12} = \frac{Q}{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}\cdot\ln\frac{R_2}{R_1}\quad [V]$$

- ako se za odnos napona i kapaciteta koristi izraz,

$$C = \frac{Q}{U}\qquad (5.6)$$

- te ako se navedeni izraz za kapacitet uvrsti u izraz (5.29) slijedi za kapacitet cilindričnog kondenzatora

$$C = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\quad [F]$$

(5.30)

- kapacitet cilin. kondenzatora po jedinici dužine

$$\frac{C}{l} = \frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\quad \left[{}^{F}\!/_{m}\right]$$

Kapacitet cilindričnog kondenzatora (3)

- nakon definiranja napona i kapaciteta cilindričnog kondenzatora utvrditi će se uz kratki izračun i jakost električnog polja **E**

- za definiranje veličine jakosti električnog polja koristiti će se izraz (2.26) i (2.27), kojim se opisuje električno polje nabijenog vodića i ako se pri tome koristi da je $x_A=r$ slijedi

$$\boxed{Q = \lambda \cdot l}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot x_A}}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \frac{1}{r}} \rightarrow Q = \lambda \cdot l \rightarrow \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{1}{r}} \quad (5.32)$$

- ako se sada koristi izraz $Q = C \cdot U$, te ako se to uvrsti u izraz za kapacitet cilindričnog kondenzatora (izraz 5.31), dobije se konačno i izraz za jakost električnog polja **E** cilindričnog kondenzatora,

- a kada se još uvrsti da je $r=R_1$ tada se dobije i maksimalna vrijednost veličine električnog polja E_{maks}

$$\boxed{E = \frac{U}{r \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}} \rightarrow \boxed{E_{\max} = \frac{U}{R_1 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}} \quad (5.33)$$

Energija elektrostatskog polja Općenito

Uvodni prikaz

- Energija elektrostatskog polja (ELS polja) u stvarnosti je energija međudjelovanja električnih naboja

- pri formiranju sustava ELS polja mora se uložiti neki rad,
- uloženi rad prelazi u akumuliranu energiju sustava ELS polja

- općenito za izvršeni rad za dovođenje nekog proizvoljnog naboja **Q** iz prostora izvan električnog polja u određenu točku ***x*** promatranog električnog polja vrijedi relacija:

$$\boxed{A = -Q \cdot \varphi_x} \qquad (5.45)$$

(predznak "-" je posljedica trošenja vanjskog rada na pomicanje naboja u električno polje)

- izraz za rad *A* prema izrazu *(5.45)* ujedno je i potencijalna energija tog naboja u točki *x*,

$$\boxed{W_{px} = Q \cdot \varphi_x} \qquad (5.46)$$

- *Slijedi opis energije diskretnog sustava naboja na primjeru dva naboja, a sa time će se razjasniti i osnovni principi za razmatranje energije skupine naboja u ELS polju*

Energija sustava dvaju električnih naboja (1)

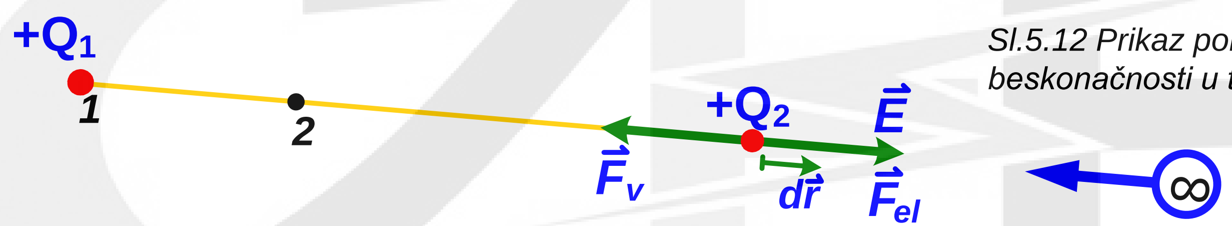
Početno stanje u promatranom električnom polju

- promatramo prostor u kojem se u točki *1* nalazi naboj Q_1, a drugi naboj Q_2 nalazi se izvan promatranog električnog polja u beskonačnosti

Sl.5.11 Prikaz početnog stanja međusobnih položaja naboja Q_1 i Q_2

- pozitivni naboj $\boldsymbol{Q_2}$ dovodi se sve bliže naboju $\boldsymbol{Q_1}$ prema sl.5.12 a pri pomicanju naboja u ravnoteži su vanjska sila $\vec{F}_v$ i električna sila između naboja $\vec{F}_{el}$

$$\vec{F}_v = -\vec{F}_{el}$$

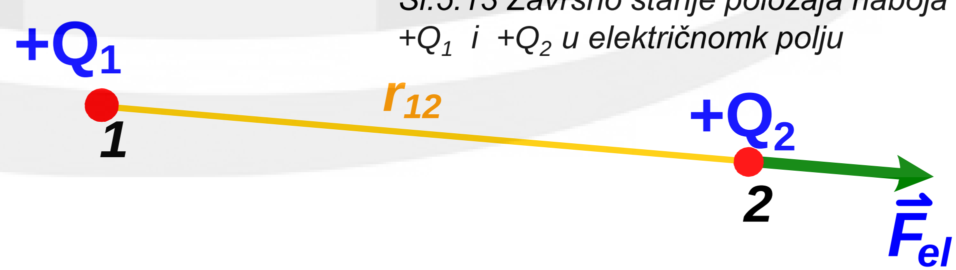


Sl.5.12 Prikaz pomicanja naboja $+Q_2$ iz beskonačnosti u točku 2 električnog polja

Novo stanje u električnom polju

- naboj $+Q_2$ se vanjskom silom $\vec{F}_v$ dovede u točku *2* električnog polja,
- u električnom polju imamo novo stanje prema sl.5.13
- naboji Q_1 i Q_2 sada se nalaze u električnom polju međusobno odvojeni razmakom r_{12}
- na naboj Q_2 djeluje električna sila $\vec{F}_{el}$ prema Coulombovom zakonu:

Sl.5.13 Završno stanje položaja naboja $+Q_1$ i $+Q_2$ u električnomk polju



$$\vec{F}_{el} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_{12}^2}$$

- *potrebno je još definirati koliki je rad A izvršila vanjska sila $\vec{F}_v$*

Energija sustava dvaju električnih naboja (2)

- Rad vanjske sile F_v (koji se troši na savladavanje električne sile među nabojima Q_1 i Q_2) jednak je zbroju *(integralu)* skalarnog produkta **sile i puta** *(diferencijala puta)* te slijedi:

$$A = \int_l \vec{F}_v \cdot d\vec{r} \;\Rightarrow\; \underset{\angle(\vec{F}_v, d\vec{r}) = konst.}{\text{uz radijalni put}} \;\Rightarrow = \int_{\infty}^{r_{12}} F(r)dr$$

$$A = -\int_{\infty}^{r_{12}} Q_2 \cdot \frac{Q_1}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}\cdot dr \;= -\frac{Q_1\cdot Q_2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\int_{\infty}^{r_{12}}\frac{dr}{r^2}$$

- izraz za za rad **A** predstavlja utrošeni rad za pomicanje naboja ***Q₂*** ,

- potrebno je još uzeti u obzir da rad **A** predstavlja trošenje vanjske energije na savladavanje električnog polja, rad **A** ima negativan predznak ("-") , te slijedi kratki izračun za rad ***A***,

$$\boxed{A = -\frac{Q_1\cdot Q_2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r_{12}} \quad [J]}$$

- *povezanost potencijala sa potencijalnom energijom naboja* W_p *i prikaz potencijala naboja* Q_1 *i* Q_2 *,*

- rad ***A*** je izvršen trošenjem vanjske energije na pomicanje naboja Q_2 u električno polje naboja Q_1 ;

- sa izvršenim radom *A* smo povećali potencijalnu energiju naboja Q_2 te vrijedi $\boxed{W_p = -A}$

- slijedi na kraju izraz za potencijalnu energiju

$$\boxed{W_p = \frac{Q_1\cdot Q_2}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon}\cdot\frac{1}{r_{12}} \quad [J]}$$

- kada se troši rad vanjske sile **F** dovođenjem naboja $+Q_2$ u električno polje pozitivnog naboja povećava se potencijalna energija i potencijal naboja Q_2 i

- kada se naboj $+Q_2$ udaljava od električnog polja pozitivnih naboja troši se rad električnog polja, ali se smanjuje potencijal φ_{12} naboja Q_2

Energija sustava dvaju električnih naboja (3)

- što se tiče potencijala naboja Q_1 i Q_2 mogu se promatrati dva slučaja:

1) naboj Q_2 doveden je u blizinu naboja Q_1 (sl.5.14) koji na mjestu (2) stvara potencijal
(φ_{12} - potencijal naboja Q_1 na mjestu naboja Q_2)

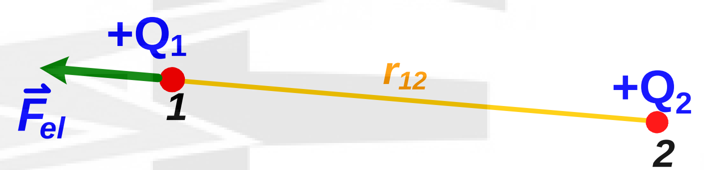
φ_{12}
uzrok (naboj Q_1) – mjesto djelovanja (lokacija naboja Q_2)

2) naboj Q_1 doveden je u blizinu naboja Q_2 (sl.5.14) koji na mjestu (1) stvara potencijal
(φ_{21} - potencijal naboja Q_2 na mjestu naboja Q_1)

φ_{21}
uzrok (naboj Q_2) – mjesto djelovanja (lokacija naboja Q_1)

- za potencijalnu energiju promatranog slučaja slijedi izraz za W_p

$$W_{12} = Q_2 \cdot \varphi_{12}$$
$$W_{21} = Q_1 \cdot \varphi_{21}$$



Sl.5.14 Sila na naboj Q_1 u električnom polju naboja Q_2

- s obzirom da je svejedno koji se naboj pozicionira a koji se dovodi, vrijedi:

$$W_{12} = W_{21} = W_p^{'} = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r_{12}}$$

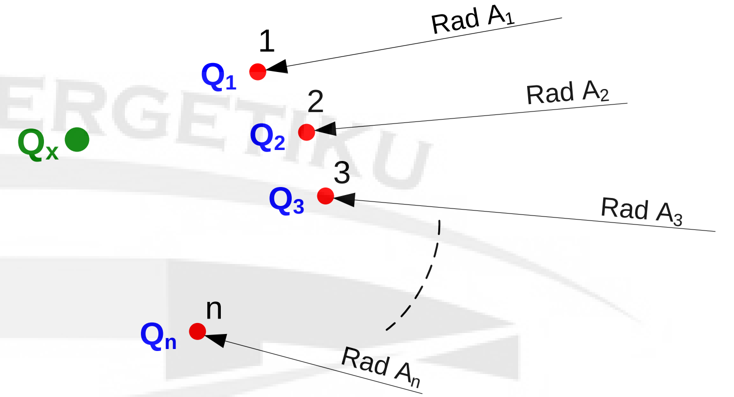
- konačno se može navesti izraz za potencijalnu energiju interakcije dvaju naboja

$$W_p = \frac{1}{2} \cdot \left(W_{12} + W_{21}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(Q_1 \cdot \varphi_{21} + Q_2 \cdot \varphi_{12}\right)$$

izraz za određivanje uzajamne energije bilo kojih dvaju naboja

Energija sustava skupine električnih naboja (1)

- energija diskretnog ***sustava skupine naboja***
  - pri formiranju skupine naboja jedan se naboj drži čvrsto, a dovode se redom drugi, treći, ... i n-ti naboj do svojih mjesta
  - potrebno je definirati **rad** odnosno energiju **uzajamnog** djelovanja naboja W_{uz} ,
  - u prvom koraku potrebno je opisati potencijal φ_i koji stvaraju svi naboji na mjestu (i), osim naboja Q_i uz uvjet **i≠j** prema izrazu



Sl.5.15 Električno polje skupine naboja

$$\boxed{\varphi_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \varphi_{ji}}$$

- u drugom koraku se definira uzajamna energija koja se računa po izrazu skupine točkastih naboja

$$W_{uz} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \cdot Q_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Q_i \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{Q_j}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} W_{p_{ij}}$$

jer se svaki par naboja u postupku zbraja dva puta

- i konačno vrijedi izraz za uzajamnu energiju naboja kada se uvrsti izraz za potencijalnu energiji dvaju naboja:

$$\boxed{W_{uz} = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{Q_i \cdot Q_j}{r_{ij}}}$$

Energija sustava skupine električnih naboja (2)

- općenite jednadžbe za ukupnu energiju različitih skupina naboja kako slijedi

- za energiju *prostorno* raspoređenog naboja vrijedi:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \rho \cdot \varphi \cdot dV \qquad (5.57)$$

ρ - prostorna gustoća naboja
φ - potencijal cjelokupnog naboja promatranog sustava na mjestu elementarnog volumena *dV*

- za energiju *plošno* raspoređenog naboja vrijedi:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \iint_S \sigma \cdot \varphi \cdot dS \qquad (5.58)$$

σ - plošna gustoća naboja
φ - potencijal cjelokupnog naboja promatranog sustava na mjestu elementarne plohe *dS*

- za energiju *linijski* raspoređenog naboja vrijedi:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_l \lambda \cdot \varphi \cdot dl \qquad (5.59)$$

λ - linijska gustoća naboja
φ - potencijal cjelokupnog naboja promatranog sustava na mjestu elementarne linije *dl*

- *Slijedi opis elektrostatske energije za dva karakteristična slučaja tj. za pločasti kondenzator i za nabijenu metalnu kuglu*

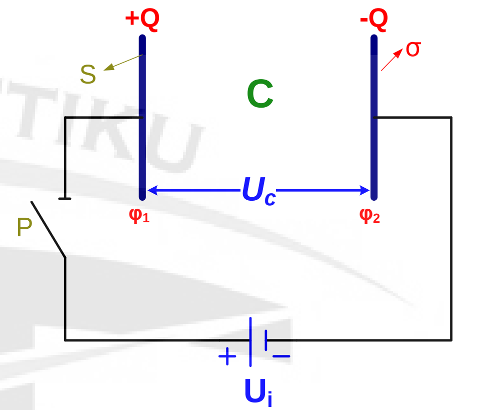
Primjer1.-Elektrostatska energija nabijenog pločastog kondezatora (1)

- *definira se električna energija koja se akumulira u prijelaznoj pojavi punjenja kondenzatora nabojem* **Q:**

- uključuje se sklopk **P** i napon izvora puni kondenzator nabojem **Q** do naponske ravnoteže u strujnom krugu

$$U_i = U_c$$

- nakon punjenja kondenzatora sklopka P se izključi



U_i - napon izvora
U_c - napon kondezatora

Sl.5.16 Skica kondezatora prljučenog na napon izvora U_i

- potrebno definirati energiju koja se akumulira u kondenzatoru u promatranoj prijelaznoj pojavi punjenja kondenzatora nabojem **Q**

- energija plošno raspoređenog naboja može se općenito definirati prema izrazu :

$$W = \frac{1}{2} \cdot \iint_S \sigma \cdot \varphi \cdot dS$$

- ako je ***σ=Q/S*** a površina S je definirana tada slijedi

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q}{S} \cdot \varphi \cdot S = \frac{1}{2} Q \cdot \varphi$$

- za naboj na pločama u nabijenom kondenzatoru površine S vrijedi da je **+Q1= -Q2**,

- plošna gustoća naboja je konstantna **σ=konst**. a na pločama su potencijali φ_1 i φ_2 te slijede izrazi za energiju na pločama kondenzatora,

$$W_1 = \frac{1}{2} Q \cdot \varphi_1$$

$$W_2 = \frac{1}{2} Q \cdot \varphi_2$$

- ukupna energija je zbroj energija pojedinih ploča nabijenog kondenzatora te slijedi

$$W = W_1 + W_2$$

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Elektrostatska energija nabijenog pločastog kondezatora (2)

- kako je razlika potencijala između ploča kondenzatora jednaka naponu U_c slijedi konačni izraz za energiju nabijenog kondenzatora

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U_c \quad [VAs]$$

- ako se sada koristi i poznata relacija za odnos napona, naboja i kapaciteta:

$$C = Q/U$$

- mogu se dobiti još dva oblika izraza jednostavnim transformacijama

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{U} \cdot U^2 \rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \frac{Q^2}{C^2} \rightarrow W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}$$

- *izraz za energiju pločastog kondenzatora može se prikazati i uz pomoć veličine jakosti električnog polja i geometrijskih dimenzija kondenzatora*

- ako se koriste izrazi za kapacitet pločastog kondenzator i za jakosti električnog polja konderzatora tj.

$$E = U/l \qquad C = \varepsilon \cdot \frac{S}{l}$$

- slijedi uz kratki izračun i još jedan oblik izraza za energiju pločastog kondenzatora

$$W_c = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{S}{l} \cdot U^2 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{S}{l} \cdot \frac{l}{l} \cdot U^2 = \frac{\varepsilon}{2} \cdot S \cdot l \cdot \frac{U^2}{l^2}$$

$$W_c = \varepsilon \cdot \frac{E^2}{2} \cdot V$$

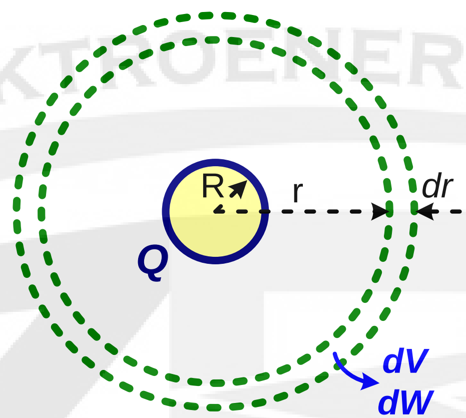
V *- volumen dielektrika*
E *- jakost električnog polja*

Primjer2.-Elektrostatska energija oko nabijene metalne kugle (1)

- tražimo izraz za proračun energije elektrostatskog polja u prostoru oko kugle polumjera *R* i naboja *Q*

- za diferencijal ***dW*** elektrostatske energije vrijedi izraz:

$$\boxed{dW = w(r)\cdot dV}$$



R - polumjer kugle
r - udaljenost prostora oko kugle

$dV = 4\cdot\pi\cdot r^2\cdot dr$ - diferencijal volumena

$w(r) = \dfrac{\varepsilon\cdot E^2}{2}$ - prostorna gustoća energije elektrostatskog polja

$E = \dfrac{Q}{4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot r^2}$

Sl.5.17 Skica nabijene metalne kugle

- ako se u prikazani izraz uvrste poznati izrazi za prostornu gustoću energije elektrostatskog polja ***w(r)*** i jakost električnog polja slijedi za ukupnu energiju ***W***:

$$w(r) = \frac{D^2}{2\cdot\varepsilon} = \frac{\varepsilon\cdot E^2}{2} = \frac{\cancel{\varepsilon}}{2}\cdot\frac{Q^2}{4^2\cdot\pi^2\cdot\cancel{\varepsilon^2}\cdot r^4} = \frac{Q^2}{32\cdot\pi^2\cdot\varepsilon\cdot r^4}$$

$$W = \int_R^\infty w(r)\cdot dV = \int_R^\infty \frac{Q^2}{\cancel{32}\cdot\pi^{\cancel{2}}\cdot\varepsilon_0\cdot r^{\cancel{4}}}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{r^2}\cdot dr = \int_R^\infty \frac{Q^2}{8\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot r^2}\cdot dr$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{8\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot R}}$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2\cdot C}}$$

KRAJ - Tema 5-oe1

Materijali za studente

TEHNIČKI FAKULTET
Sveučilište u Rijeci

TEMA 1-6
ELEKTROMAGNETSKA POLJA

Materijali za studente - (ak.god. 2011./2012.)

Tema 6. - *MATERIJA U ELEKTRIČNOM POLJU*

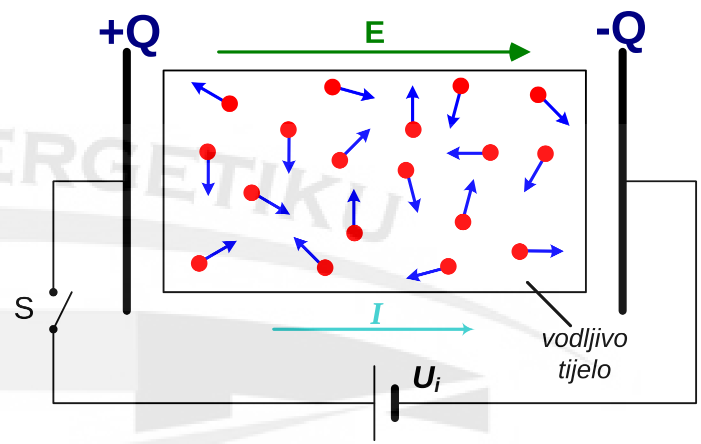
- vodiči, poluvodiči i dielektrici u električnom polju

- slobodni i vezani električni naboji

-višeslojna izolacija dielektrika

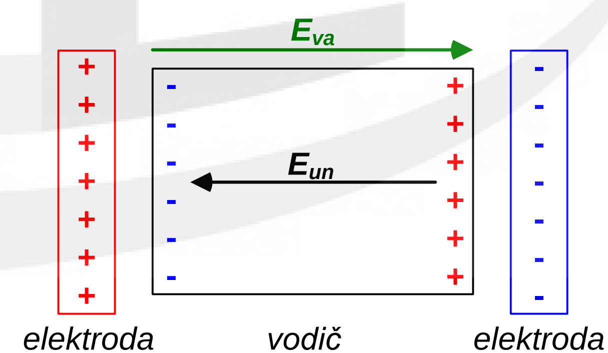
Vodiči u električnom polju (1)

- Između ploča kondenzatora koji je preko sklopke S uključen u strujni krug napona U_i ubačeno je vodljivo tijelo
- bez električnog polja je gibanje slobodnih elektrona unutar vodiča kaotično, te je ukupan električni efekt izvana jedan nuli



Sl.6.1 Prikaz slobodnih elektrona u vodiču trenutak prije uključivanja sklopke S

- nakon uključenja sklopke *S* nabiju se ploče kondenzatora nabojem $+Q$ i $-Q$ i nastaje električno polje $\vec{E}$
- slobodni elektroni se u vodljivom tijelu pomiču u suprotnom smjeru od polja $\vec{E}$
- usmjereno kretanje slobodnih elektrona u vodljivom tijelu pod djelovanjem polja naziva se ***provodna struja***
- jedan kraj provodnika postaje pozitivan, a drugi negativan
- javlja se **električno polje** influenciranih naboja unutar vodiča (E_{un})



Sl.6.2 Skica presjeka elektroda i vodiča nakon uključivanja sklopke S

Vodiči u električnom polju (2)

- na slobodne elektrone u vodiču sada djeluje dva polja u suprotnim smjerovima
  - **vanjsko električno polje E_{va}**
  - **unutarnje električno polje E_{un}**
- kada je zadovoljen uvjet

$$\boxed{E_{va} = E_{un}}$$

prestaje usmjereno kretanje slobodnih elektrona i nastupa elektrostatska ravnoteža u kondenzatoru

- za navedeni slučaj ***(E_{va} = E_{un})*** *rezultirajuće električno polje* ***E_r*** *unutar vodiča jednako je nuli*

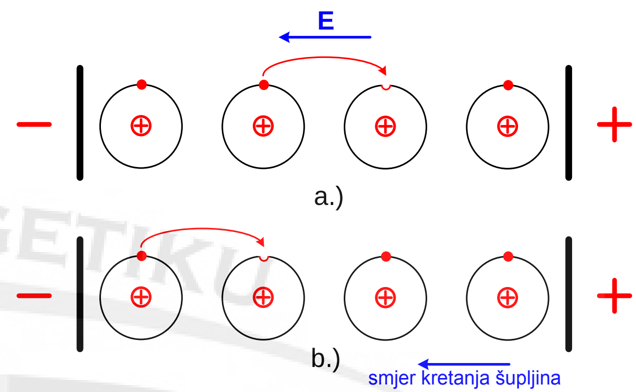
$$\boxed{E_r = E_{va} - E_{un} = 0}$$

- potencijali svih točaka vodljivog tijela u elektrostatskom polju su konstantni tj.

$$\boxed{\varphi = konst.}$$

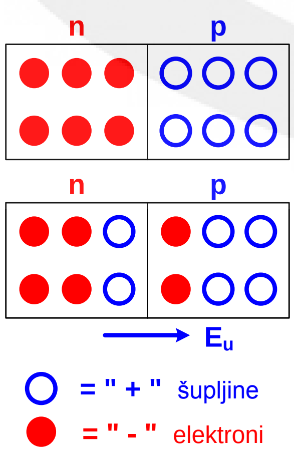
Poluvodiči u električnom polju (1)

- U poluvodičima, kao posebno karakterističnim materijalima postoje slobodni elektroni i šupljine kao nosioci električnih naboja
- bez električnog polja slobodni elektroni i šupljine kreću se kaotično
- djelovanjem električnog polja slobodni elektroni i šupljine stupaju u usmjereno kretanje prekidajući kaotično kretanje,
- nastaju struje elektronske vodljivosti (kretanje elektrona) i struja šupljina (kretanje šupljina) pod djelovanjem električnog polja,



Sl.6.3 Kretanje elektrona i šupljina u poluvodičima

- broj slobodnih elektrona u atomu poluvodiča znatno je manji nego kod vodiča te su struje kretanja elektrona i šupljina znatno manje od struja slobodnih elektrona u vodičima
- u poluvodičima tipa **n** prevladavaju slobodni elektroni i pod djelovanjem električnog polja teče struja elektrona,
- u poluvodičima tipa **p** prevladavaju šupljine te pod djelovanjem električnog polja teče struja šupljina,



Sl.6.4 n-p spoj poluvodiča

- prilikom korištenja spoje se dva tipa poluvodiča **n** i **p** ,
- slobodni elektroni difundiraju preko granice u *p* -oblast, a šupljine iz *p* -oblasti u *n* -oblast,
- u *n* -oblasti se pored elektrona kao glavnih nosilaca naboja javljaju i sporedni nosioci šupljine a u *p* -oblasti se pored šupljina kao glavnih nosilaca naboja javljaju i sporedni nosioci elektroni,
- na granici poluvodiča se stvara električko polje koje sprječava daljnji prelazak osnovnih nosioca naboja preko granice.

Prikaz osnovnih grupa dielektrika (1)

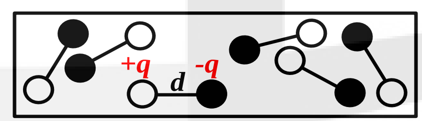
Tri su glavne grupe **_dielektrika_**:

- kristalni dielektrici
- dielektrici s polariziranim molekulama
- dielektrici s neutralnim molekulama

- KRISTALNI DIELEKTRICI - su dielektrici u kojima je kristalna rešetka formirana od raznoimenih iona s popunjenim vanjskim elektronskim ljuskama (kvarc,...)
- u kristalnim dielektricima nastaje **ionska polarizacija**
  - u čvorovima kristalne rešetke smješteni su raznoimeni ioni
  - pod djelovanjem električnog polja pozitivni ioni se pomiču u smjeru električnih silnica, a negativni ioni u suprotnom smjeru
  - dolazi do pomicanja ionskih rešetki i do mehaničkih deformacija kristalnih rešetki dielektrika

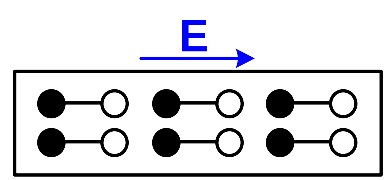
DIELEKTRICI S POLARIZIRANIM MOLEKULAMA

- U ovim dielektricima se centri pozitivnih i negativnih naboja molekula ne podudaraju



Skica dielektrika s električnim dipolima

- stvaraju se dipoli koji se sastoje od dva suprotna naboja jednaka po iznosu i razmaknuta za neku duljinu ***d***
- molekule su polarizirane a zbog kaotične orijentacije dipola u normalnom stanju dielektrik je električki neutralan
- dipol je karakteriziran i momentom dipola $p = q \cdot d$ *p-moment dipola q-naboj dipola d-razmak dipola*
- uslijed djelovanja električkog polja polarizirane molekule se usmjeravaju u smjeru elektr. polja

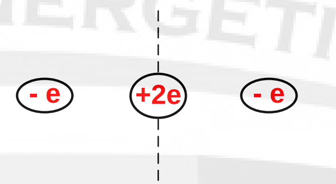


Skica dielektrika u električnom polju

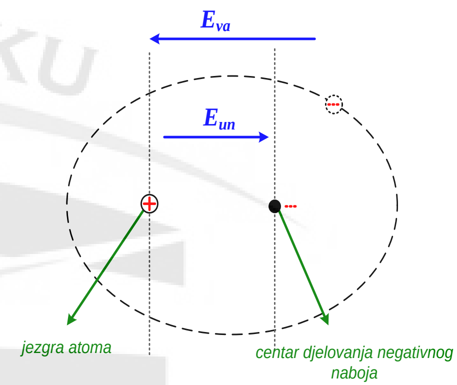
Prikaz osnovnih grupa dielektrika (2)

DIELEKTRICI S NEUTRALNIM MOLEKULAMA

- U ovim dielektricima se u normalnom stanju podudaraju centri djelovanja pozitivnih naboja (jezgra atoma) i centri djelovanja negativnih naboja (elektroni)
- kada se nalaze u električkom polju pojavljuje se elektronska polarizacija
- naboja više ne podudaraju. pod djelovanjem vanjskog električnog polja $\vec{E}_{va}$ dolazi do pomicanja vanjskih elektrona i zbog toga se centri djelovanja pozitivnih i negativnih
- umjesto neutralnih molekula javljaju se *polarizirane molekule* koje nazivamo i elastičnim dipolima
- elastični dipoli se vraćaju u neutralno stanje molekule kada nestane djelovanje vanjskog električkog polja



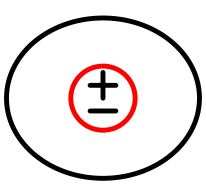
Centri djelovanja "+" i "-" naboja



Centri djelovanja "+" i "-" naboja polariziranog atoma

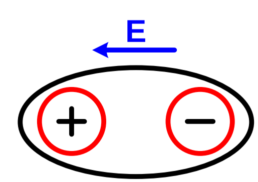
Električna polarizacija dielektrika

- Pri dovođenju dielektrika u električno polje javljaju se razni oblici polarizacije čestica ili dipola u samom dielektriku
- kod neutralnog atoma su centri ravnoteže zajedno a kod polariziranog atoma su centri ravnoteže pozitivnog i negativnog naboja razmaknuti



neutralni atom

a.) atom dielektrika u neutralnom stanju



polarizirani atom

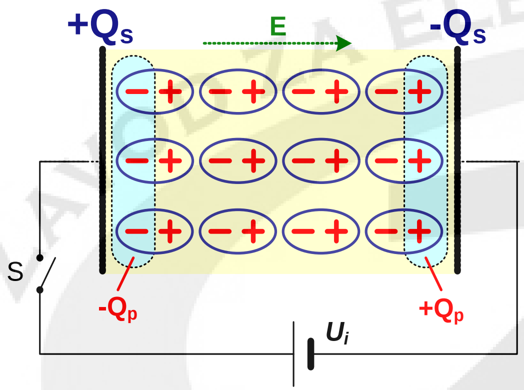
b.) atom dielektrika pod utjecajem električnog polja

Prikaz neutralnog i polariziranog atoma

Slobodni i vezani električni naboji

Dielektrično tijelo u električnom polju i prikaz slobodnih i vezanih električnih naboja

- Kada se dielektrik kao materijalno tijelo nalazi u električnom polju, kao posljedica polarizacije čestica javljaju se različiti električni naboji na suprotnim stranama dielektrika (sl.6.9)

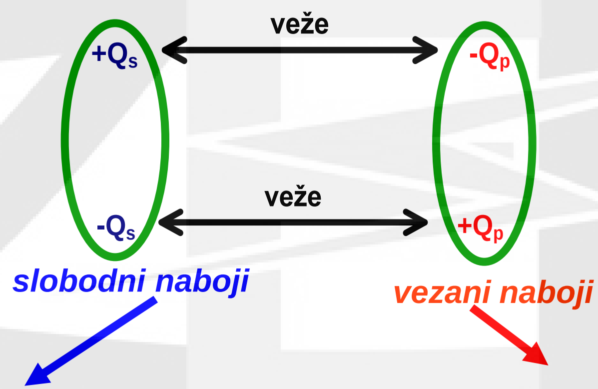


Sl.6.9 Dielektrik kao materijalno tijelo u električnom polju

- izolator se električki polarizira a *stupanj polarizacije* izolatora karakterizira se sa gustoćom naboja na plohi polariziranog izolatora σ_p

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{S} \quad [\frac{As}{m^2}]$$

stupanj polarizacije dielektrika



- $+Q_s$ i $-Q_s$ - slobodni naboji kondenzatora koji se mogu gibati pod utjecajem električnog polja i njihov tok osigurava izvor napoona U_i
- $-Q_p$ i $+Q_p$ - vezani naboji koji predstavljaju tok pomačnih struja i ne mogu se gibati nego tek malo elastično pomaknuti i vraćaju se u prvobitni položaj kada nestane električ. polje
- u dielektriku se vezani električni naboji kreću u granicama svojih molekula,
- vezani električni naboji se samo pomaknu u granicama svojih molekula pa se ti pomaci zovu **POMAČNE STRUJE** (za razliku od provodnih struja u vodičima)
  - ispitivanja pokazuju da je polariziranost σ_p proporcionalna jakosti električkog polja E

$$\sigma_p = \alpha \cdot E$$

Električna polarizacija dielektrika

Dielektrična čvrstoća

- Polarizirani dielektrik stvara svoje unutarnje električno polje koje drži ravnotežu vanjskom električnom polju
- u promatranom procesu polarizacije na pozitivne i negativne čestice molekula djeluju sile vanjskog električnog polja koje teže da odvoje čestice jednu od druge
- dolazimo do pojma **proboj dielektrika** i to je stanje u dielektriku kada je električno polje dovoljno jako da se elektroni odvoje od molekula i tada poteče struja elektronske vodljivosti
- ako dođe do stanja proboja, dielektrik ne vrši više svoju funkciju i zato pouzdanost raznih uređaja ovisi o stanju električke izolacije samih uređaja
- **dielektrička čvrstoća** - predstavlja minimalni intenzitet električnog polja pri kojem već dolazi do proboja strukture dielektrika
- ako se sa E_{KR} definira minimalni iznos električnog polja kod kojega dolazi do proboja izolacije tada uvjet da ne dođe do proboja dielektrika možemo izraziti relacijom:

$$\boxed{E_{va} < E_{KR} \quad [V/m]} \qquad (6.9)$$

E_{va} - vanjsko električno polje

Promijene dielektrika između ploča kondenzatora -općenito

- u nastavku je razmatrano kako promjenljivi uvjeti na elektrodama kondenzatora utječu na vektore $\vec{E}$ i $\vec{D}$, te naboj Q_p u prostoru između ploča kondenzatora

S obzirom na uvjete pogona na elektrodama kondenzatora razmotrit će se dva slučaja:

Prvi slučaj U=konst.

- kondenzator je trajno priključen na napon izvora U_i=*konst*, a između ploča kondenzatora se ubacuje umjesto zraka novi dielektrik - $\varepsilon=\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$
- u ovom slučaju imamo ***neizolirani sustav naboja*** na pločama kondenzatora

Drugi slučaj Q= konst.

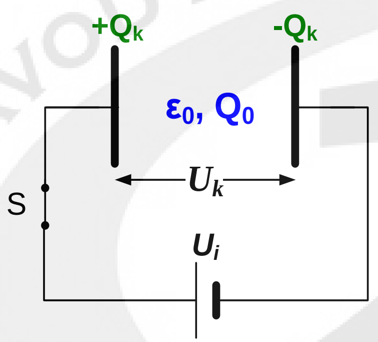
- ploče kondenzatora su nabijene i odvojene od izvora te je naboj na pločama kondenzatora konstantan *Q=konst*, a između ploča kondenzatora se ubacuje novi dielektrik - $\varepsilon=\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$
- fizikalno u ovom drugom primjeru imamo ***izolirani sustav naboja*** na pločama kondenzatora

Promijene dielektrika između ploča kondenzatora I.slučaj (1)

Neizolirani sustav naboja U=konst.

- Promotraju se prilike u kondenzatoru koji je priključen na izvor napona → $\boxed{U_i = konst.}$

- na pločama kondenzatora akumuliran je naboj slobodnih elektrona $+Q_k$ i $-Q_k$ za koje vrijedi → $\boxed{Q_k \neq konst.}$



Q_0 - naboj polarizacije vakuuma
Q_k - naboj slobodnih elektrona kondenzatora
$\sigma_0 = \frac{Q_0}{S}$ - stupanj polarizacije vakuuma

Sl.6.11 Kondenzator priključen na napon izvora U_i=konst.

- između ploča kondenzatora nalazi se u početnom trenutku kao dielektrik vakuum (ε_0),

- u novom stanju između ploča kondenzatora se ubaci novi dielektrik $(\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r)$ te se može pisati

početni uvjet: $\varepsilon = \varepsilon_0$, $Q_k = Q_0$

novo stanje: $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$, $Q_k = Q_0 + Q'_p$

$\boxed{U_k = U_i = U_0}$

- sve dok je U=konst. ne mijenja se niti električko polje bez obzira da li umjesto vakuuma stavimo neki izolator te vrijedi

$$\boxed{U_k = konst.} \rightarrow \boxed{E_k = \frac{U_k}{l} = konst.} \rightarrow \boxed{E_k = E_0} \qquad (6.10)$$

Skraćeni prikazi promatranih pojava promijene dielektrika (1)

I.Slučaj U=konst. – NEIZOLIRANI SUSTAV

$$U_i = konst.$$

$$Q_k \neq konst.$$

početni uvjet: $\varepsilon_r = 1 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0 \;,\; Q_k = Q_0$

novo stanje: $\varepsilon_r \neq 1 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \;,\; Q_k = Q_0 + Q'_p$

$$U_k = U_i = U_0$$

$$\boxed{U_k = konst.} \rightarrow \boxed{E_k = \frac{U_k}{l} = konst.} \rightarrow \boxed{E_k = E_0} \qquad (6.10)$$

- na pločama kondenzatora pojaviti će se dodatni naboj Q'_p sa kojim se kompenziraju polarizirani naboji dielektrika $\pm Q_p$ te vrijedi

$$\boxed{Q_k = Q_0 + Q'_p} \qquad (6.11)$$

- potrebno opisati što se događa sa vektorom gustoće elekt. pomaka D, nabojem Q_k i kapacitetom C_k
- uz uvjet da je $E_k = E_0$ prema izrazu za vektor D vrijedi:

$$D_k = \varepsilon \cdot E_k = \varepsilon \cdot E_0 = \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{D_0}{\varepsilon_0}}_{\varepsilon_r} = \varepsilon_r \cdot D_0 \qquad \boxed{D_k = \varepsilon_r \cdot D_0} \qquad (6.12)$$

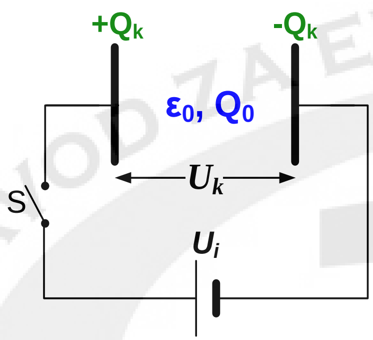
$$\left.\begin{aligned} Q_k &= D_k \cdot S \\ Q_0 &= D_0 \cdot S \end{aligned}\right\} \quad Q_k = D_k \cdot S = \varepsilon_r \cdot \underbrace{D_0 \cdot S}_{Q_0} \qquad \boxed{Q_k = \varepsilon_r \cdot Q_0} \qquad (6.13)$$

$$C_k = \frac{Q_k}{U} = \underbrace{\frac{Q_0 \cdot \varepsilon_r}{U_0}}_{C_0} \qquad \boxed{C_k = \varepsilon_r \cdot C_0} \qquad (6.14)$$

Promijene dielektrika između ploča kondenzatora II.slučaj (1)

Izolirani sustav naboja Q_k=konst.

- Promatramo sada prilike u kondenzatoru prema slici za slučaj da je *sklopka S* u strujnom krugu *isključena* nakon što smo *ploče kondenzatora nabili nabojem* Q_k a za prilike u kondenzatoru vrijedi:



$$\boxed{Q_k = konst.} \qquad \boxed{U_k \neq konst.} \qquad (6.15)$$

Q_k- naboj na pločama kondenzatora

- u početku se između ploča kondenzatora nalazi vakuum (ε_0) a naboj polarizacije je Q_0
- u novom stanju između ploča kondenzatora ubaci se novi dielektrik $(\varepsilon=\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0)$:

početni uvjet: $\varepsilon_r = 1 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$

novo stanje: $\varepsilon_r \neq 1 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

$$\boxed{Q_k = Q_0} \qquad (6.16)$$

- površina ploča kondenzatora S se nije mijenjala,
- naboj na pločama kondenzatora ostao je nepromijenjen, -
- za vektor dielektričnog pomaka $\vec{D}$ vrijedi:

$$D_k = \frac{Q_k}{S} = \frac{Q_0}{S} = D_0$$

$$\boxed{D_k = D_0} \qquad (6.17)$$

Skraćeni prikazi promatranih pojava promijene dielektrika (2)

II.slučaj Q_k=konst. – IZOLIRANI SUSTAV

$$\boxed{Q_k = konst.} \qquad \boxed{U_k \neq konst.} \tag{6.15}$$

početni uvjet: $\varepsilon_r = 1 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_0$

novo stanje: $\varepsilon_r \neq 1 \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

$$\boxed{Q_k = Q_0} \tag{6.16}$$

$$D_k = \frac{Q_k}{S} = \frac{Q_0}{S} = D_0 \qquad \boxed{D_k = D_0} \tag{6.17}$$

$$E_k = \frac{D_k}{\varepsilon} = \frac{D_0}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0 \cdot E_0}{\varepsilon} \quad \mathbf{1/\varepsilon_r} \qquad \boxed{E_k = \frac{E_0}{\varepsilon_r}} \tag{6.18}$$

$$U_k = E_k \cdot l = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \cdot l = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{U_0}{\cancel{l}} \cdot \cancel{l} \qquad \boxed{U_k = \frac{U_0}{\varepsilon_r}} \tag{6.19}$$

$$C_k = \frac{Q_k}{U_k} = \frac{Q_0}{U_0 / \varepsilon_r} = \varepsilon_r \cdot \frac{Q_0}{U_0} \qquad \boxed{C_k = \varepsilon_r \cdot C_0} \tag{6.20}$$

Višeslojna izolacija pločastog kondenzatora

- Prostori elektrostatskih polja mogu biti ispunjeni i sa više vrsta izolacija

- promatrati ćemo slučajeve pločastih kondenzatora sa dva različita dielektrika u **serijskom** spoju i **paralelnom** spoju

- u **serijskom** spoju vrijedi da je naboj ***Q_k=konst.*** i površina ***S_k=konst.*** te se nakon proračuna dobiju slijedeće vrijednosti

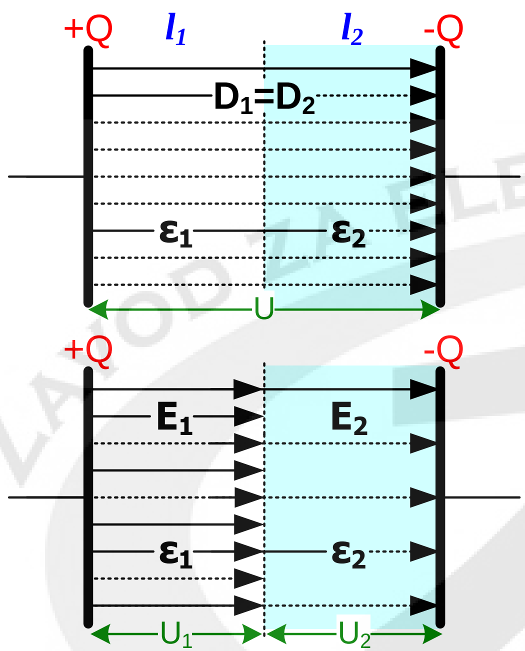
$$D=\frac{Q}{S} \rightarrow \boxed{D_1=D_2} \rightarrow D=\varepsilon\cdot E \rightarrow \boxed{\frac{E_1}{E_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

- u **paralelnom** spoju vrijedi da je napon ***U_k=konst.*** i razmak između ploča kondenzatora ***l=konst.***, te se nakon proračuna dobiju slijedeće vrijednosti

$$E=\frac{U}{l} \rightarrow \boxed{E_1=E_2} \rightarrow E=\frac{D}{\varepsilon} \rightarrow \boxed{\frac{D_1}{D_2}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

- u nastavku je detaljno prikazana fizikalna slika promatranih pojava i dan je odgovarajući matematički opis

Serijski spoj dielektrika



Sl.6.13 Prikaz serijskog spoja pločastog kondenzatora

- Ploče kondenzatora nabijene su iz izvora nabojem $+Q_k$ i $-Q_k$ a između ploča su spojena u seriju dva dielektrika
- kako za oba dielektrika vrijedi da je $Q_1=Q_2$ i $S_1=S_2$ slijedi

$$D_1=\frac{Q_1}{S_1} \qquad D_2=\frac{Q_2}{S_2} \qquad \boxed{D_1=D_2}$$

- tok ima u svakom poprečnom presjeku istu vrijednost tj. *normalna komponenta vektora $\vec{D}$ se ne mijenja*
- za odnos vektora $\vec{D}$ i $\vec{E}$ vrijedi $(\vec{D}=\varepsilon\cdot\vec{E})$ te slijedi

$$\varepsilon_1\cdot E_1=\varepsilon_2\cdot E_2 \qquad \boxed{\frac{E_1}{E_2}=\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

- silnice jakosti električnog polja mijenjaju intenzitet te vrijedi da uz veću dielektričnost ε ide manji intenzitet polja i obrnuto

$$\boxed{E\uparrow \qquad \varepsilon\downarrow}$$

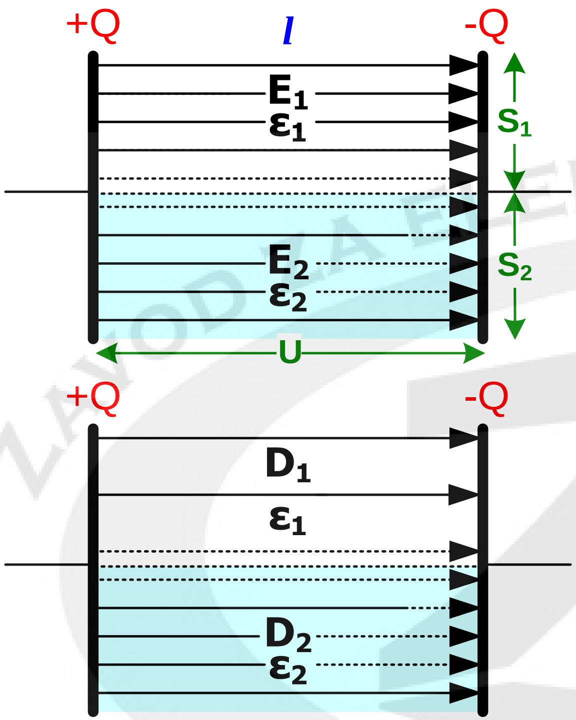
- izračun električnog polja E_1 i E_2

$$U=U_1+U_2=E_1\cdot l_1+E_2\cdot l_2 \longrightarrow \boxed{E_1=\frac{U}{l_1+\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\cdot l_2}} \qquad \boxed{E_2=\frac{U}{l_2+\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot l_1}}$$

- za kondenzatore vrijedi:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{l_1}{\varepsilon_1\cdot S_1}+\frac{l_2}{\varepsilon_2\cdot S_2} \quad \text{uz } S_1=S_2 \qquad \frac{1}{C}=\frac{\varepsilon_2\cdot l_1+\varepsilon_1\cdot l_2}{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2\cdot S} \longrightarrow \boxed{C=S\cdot\frac{\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2}{\varepsilon_2\cdot l_1+\varepsilon_1\cdot l_2}}$$

Paralelni spoj dielektrika



Sl.6.14 Prikaz paralelnog spoja pločastog kondenzatora

- ploče kondenzatora nabijene su nabojem **$+Q_k$** i **$-Q_k$** iz izvora istosmjernog napona
- između ploča kondenzatora spojena su u paralelu dva dielektrika ε_1 i ε_2
- kako za oba dielektrika vrijedi da je $U_1=U_2$ i $l_1=l_2$ te slijedi za jakost električnog polja:

$$E_1 = \frac{U_1}{l_1} \qquad E_2 = \frac{U_2}{l_2} \qquad \boxed{E_1 = E_2} \qquad (6.27)$$

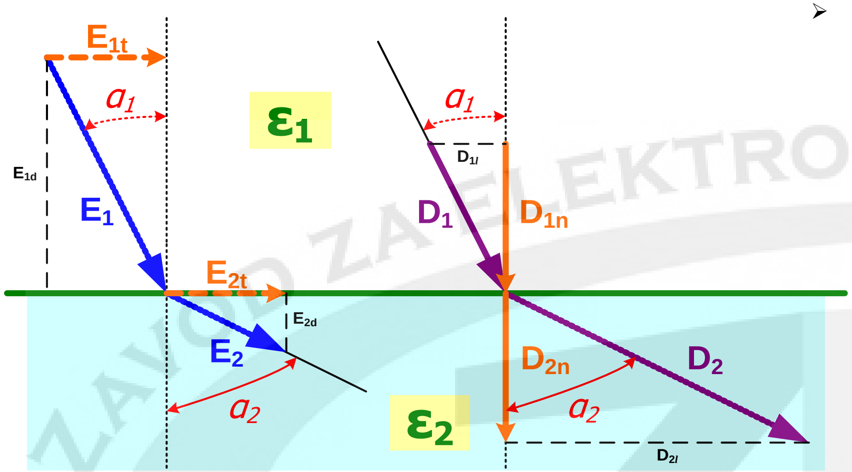
- tok vektora $\vec{E}$ ima u svakom uzdužnom presjeku istu vrijednost tj. *tangencijalna komponenta vektora $\vec{E}$ se ne mijenja*
- kako za odnos vektora $\vec{D}$ i $\vec{E}$ vrijedi ($\vec{D}=\varepsilon\cdot\vec{E}$) te uz izraz (6.27) slijedi:

$$D_1 = \varepsilon_1 \cdot E_1 \qquad D_2 = \varepsilon_2 \cdot E_2 \qquad \boxed{D_1 : D_2 = \varepsilon_1 : \varepsilon_2} \qquad (6.28)$$

- i na kraju za kondenzatore vrijedi:

$$C = C_1 + C_2 = \varepsilon_1 \cdot \frac{S_1}{d_1} + \varepsilon_2 \cdot \frac{S_2}{d_2} \rightarrow \boxed{C = \frac{1}{d}\cdot\left(\varepsilon_1 \cdot S_1 + \varepsilon_2 \cdot S_2\right)} \qquad (6.29)$$

Uvjeti prijelaza električnog polja na granici dva dielektrika



Sl.6.15 Prijelaz $\vec{E}$ i $\vec{D}$ linija kroz različite dielektrike

- na slici je prikazan primjer loma $\vec{E}$-silnica i $\vec{D}$-silnica na prijelazu iz dielektrika ε_1 i ε_2 te slijedi
  - silnice vektora električnog polja $\vec{E}$ i vektora gustoće dielektričnog pomaka $\vec{D}$ mijenjaju svoj smjer pri prolazu iz jednog dielektrika u drugi

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$$

kut α je kut koji zatvaraju silnice vektora $\vec{E}$ i $\vec{D}$ sa normalom na graničnu plohu

D - linije

- ne mijenja se normalna komponenta
- mijenja se tangencijalna komponenta

E - linije

- mijenja se normalna komponenta
- ne mijenja se tangencijalna komponenta

Matematička interpretacija

- za $\vec{E}$ i $\vec{D}$ silnice u jednom i drugom dielektriku
- koristeći izraz $D = \varepsilon \cdot E$

$$D_1 \cdot \cos\alpha_1 = D_2 \cdot \cos\alpha_2$$

$$E_1 \cdot \sin\alpha_1 = E_2 \cdot \sin\alpha_2$$

Slijedi izraz za ***zakon loma***

$$\frac{tg\ \alpha_1}{tg\ \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

KRAJ - Tema 6-oe1

Materijali za studente