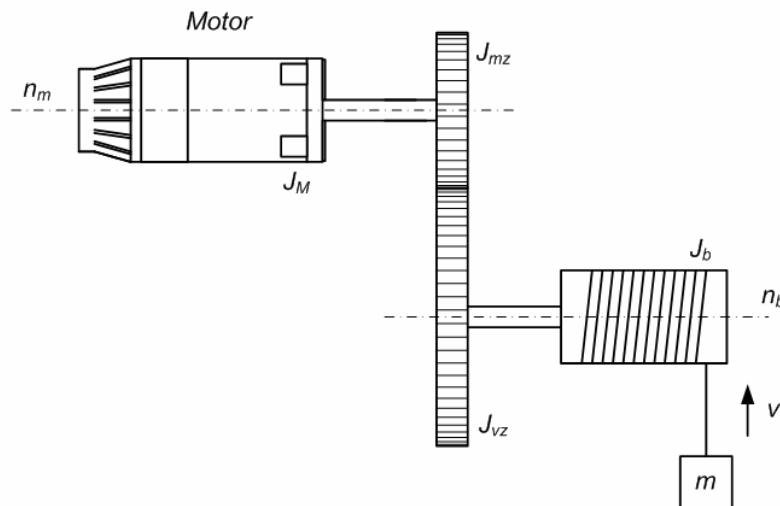


# Osnove Mehatronike

## Zadaci za vježbu – II. međuispit

### Zadatak 1.

Asinkroni motor nazivnog momenta  $M_n = 100 \text{ Nm}$  i momenta inercije  $I_m = 0,075 \text{ Nm}$  preko malog zupčanika momenta inercije  $I_{mz} = 0,0125 \text{ kgm}^2$  tjera drugu osovinu s većim zupčanicom ukupnog momenta inercije  $I_{b+vz} = I_b + I_{vz} = 0,1 \text{ kg m}^2$ . Na drugoj osovini nalazi se bubanj s užetom na kojega je obješen teret mase  $m = 500 \text{ kg}$ . Nakon završenog zaleta brzina obješenog tereta iznosi  $2 \text{ m/s}$  pri čemu se motor okreće brzinom od  $1450 \text{ o/min}$ . Omjer reduktora iznosi  $i = 5$ . Korisnost zupčanog prijenosa iznosi  $\eta_1 = 0,76$ , a korisnost prijenosa bubanj uže  $\eta_2 = 0,92$ . Odrediti moment tereta reduciran na osovinu motora i ukupan moment inercije sustava.



Slika 1. Dizanje tereta preko reduktora

#### Rješenje:

Za dizanje tereta brzinom  $v$  potrebna je snaga

$$P_t = F \cdot v = m \cdot g \cdot v.$$

Snaga potrebna za dizanje tereta na strani motora iznosi

$$M_t' \cdot \omega_m = \frac{P_t}{\eta_1 \cdot \eta_2} = \frac{m \cdot g \cdot v}{\eta_1 \cdot \eta_2}.$$

Moment tereta reduciran na osovinu motora iznosi

$$M_t' = \frac{P_t}{\eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \omega_m} = \frac{m \cdot g}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \frac{r_b \cdot \omega_b}{\omega_m} = \frac{m \cdot g \cdot r_b}{\eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \frac{\omega_b}{\omega_m} = \frac{30 \cdot m \cdot g}{\pi \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \frac{v}{n_m}.$$

Omjer  $\frac{v}{n_m}$  je konstantan tijekom zaleta i moguće ga je izračunati iz brzine vrtnje asinkronog

motora pri dizanju tereta brzinom  $v$

$$\frac{v}{n_m} = \frac{2}{1450}.$$

Iz toga slijedi da moment tereta reduciran na osovinu motora iznosi:

$$M'_t = \frac{30 \cdot 500 \cdot 9,81}{\pi \cdot 0,76 \cdot 0,92} \cdot \frac{2}{1450} = 92,4 \text{ Nm}$$

Ukupni zamašna masa na osovini motora je jednaka zbroju svih zamašnih masa reduciranih na osovinu motora tj.  $I = I_m + I_{mz} + I'_{b+vz} + I'_t$ .

Zamašnu masu bubnja i velikog zupčanika na strani motora  $J'_{b+vz}$  moguće je odrediti izjednačavanjem izraza za kinetičku energiju na strani tereta i strani motora uzimajući u obzir korisnost zupčanog prijenosa:

$$\frac{I_{b+vz} \cdot \omega_b^2}{2} = \eta_1 \frac{I'_{b+vz} \cdot \omega_m^2}{2} \rightarrow I'_{b+vz} = \frac{I_{b+vz}}{\eta_1} \cdot \left( \frac{\omega_b}{\omega_m} \right)^2 = \frac{0,1}{0,76} \cdot \left( \frac{1}{5} \right)^2 = 0,00526 \text{ kg m}^2$$

Zamašnu masu tereta mase  $m$  moguće je odrediti izjednačavanjem izraza za kinetičku energiju na strani tereta i strani motora uzimajući u obzir korisnost zupčanog prijenosa i korisnost prijenosa bubanj uže:

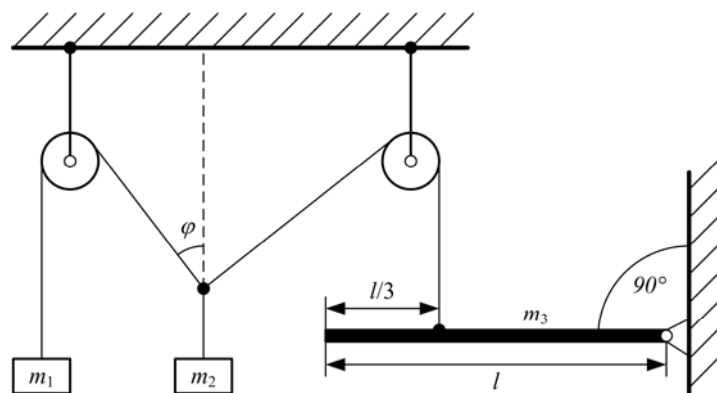
$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \eta_1 \eta_2 \frac{I'_t \cdot \omega_m^2}{2} \rightarrow I'_t = \frac{m}{2 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2} \cdot \left( \frac{v}{\omega_m} \right)^2 = \frac{500}{2 \cdot 0,76 \cdot 0,92} \cdot \left( \frac{2}{1450} \right)^2 = 0,00068 \text{ kg m}^2$$

Dakle ukupna zamašna masa reducirana na osovinu motora iznosi:

$$I = I_m + I_{mz} + I'_{b+vz} + I'_t = 0,075 + 0,0125 + 0,00526 + 0,00068 = 0,09344 \text{ kg m}^2$$

## Zadatak 2.

Na jednom kraju niti prebačene preko dvaju nepomičnih kolotura nalazi se uteg mase  $m_1 = 4$  kg dok je drugi kraj pričvršćen za štap na udaljenosti  $l/3$  od slobodnog kraja štapa. Štap ima masu  $m_3 = 4$  kg i dužinu  $l = 10$  m. Kolika treba biti masa utega  $m_2$  da bi sustav bio u ravnoteži. Kut  $\varphi$  iznosi  $30^\circ$ .

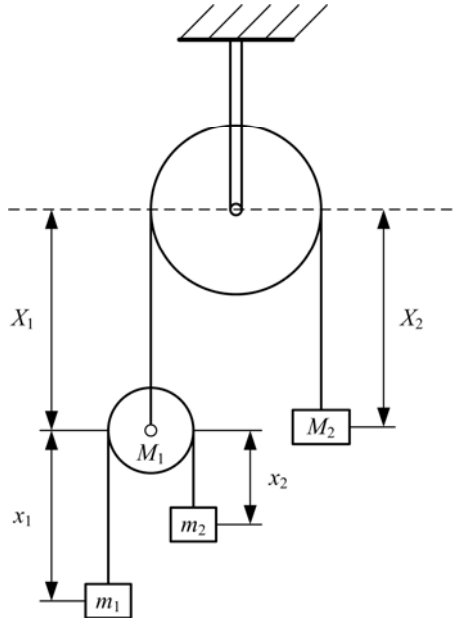


Slika 2. Sustav kolotura i štapa

**Rješenje:**  $m_2 = 2\sqrt{3} + \sqrt{5} \text{ kg}$

**Zadatak 3.**

Uteg mase  $M_2$  ovješten je o kraj niti prebačene preko nepomične koloture. Na drugom kraju niti nalazi se kolotura mase  $M_1$  preko koje je prebačena nit na čijim krajevima se nalaze utezi mase  $m_1$  i  $m_2$ . Odrediti Lagrangian sustava prikazanog na slici 2.



Slika 3. Sustav kolotura

**Rješenje:**

Duljine niti su konstantne pa vrijedi:

$$X_1 + X_2 = a \rightarrow \dot{X}_1 = -\dot{X}_2$$

$$x_1 + x_2 = b \rightarrow \dot{x}_1 = -\dot{x}_2$$

Uteg mase  $M_2$  giba se brzinom  $\dot{X}_2 = -\dot{X}_1$ .

Kolotura mase  $M_1$  giba se brzinom  $\dot{X}_1$ .

Uteg mase  $m_1$  giba se brzinom  $\dot{x}_1 + \dot{X}_1$ .

Uteg mase  $m_2$  giba se brzinom  $\dot{X}_1 + \dot{x}_2 = \dot{X}_1 - \dot{x}_1$ .

Kinetička energija sustava iznosi:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2$$

Potencijalna energija sustava u odnosu na horizontalnu ravninu koja prolazi središtem nepomične koloture iznosi:

$$E_P = -M_2 \cdot g \cdot X_2 - M_1 \cdot g \cdot X_1 - m_1 \cdot g \cdot (X_1 + x_1) - m_2 \cdot (X_1 + x_2)$$

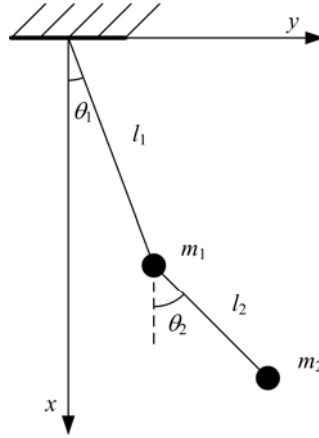
$$E_P = -M_2 \cdot g \cdot (a - X_1) - M_1 \cdot g \cdot X_1 - m_1 \cdot g \cdot (X_1 + x_1) - m_2 \cdot (X_1 + b - x_1)$$

Lagrangian sustava prikazanog na slici:

$$L = E_K - E_P = \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{X}_1 + \dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{X}_1 - \dot{x}_1)^2 + M_2 \cdot g \cdot (a - X_1) + M_1 \cdot g \cdot X_1 + m_1 \cdot g \cdot (X_1 + x_1) + m_2 \cdot (X_1 + b - x_1)$$

**Zadatak 4.**

Postaviti Lagrangeove jednačbe za dvostruko matematičko njihalo prikazano na slici 4.



Slika 4. Dvostruko matematičko njihalo

**Rješenje:**

Pozicija kuglice 1 određena je koordinatama  $x_1$  i  $y_1$ :

$$x_1 = l_1 \cdot \cos \theta_1, \quad y_1 = l_1 \cdot \sin \theta_1$$

Pozicija kuglice 2 određena je koordinatama  $x_2$  i  $y_2$ :

$$x_2 = l_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \cos \theta_2, \quad y_2 = l_1 \cdot \sin \theta_1 + l_2 \cdot \sin \theta_2$$

Brzina kuglice 1 u smjeru x i y osi iznosi:

$$\dot{x}_1 = -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1, \quad \dot{y}_1 = l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1$$

Brzina kuglice 2 u smjeru x i y osi iznosi:

$$\dot{x}_2 = -l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \sin \theta_1 - l_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \sin \theta_2, \quad \dot{y}_2 = l_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \cos \theta_1 + l_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos \theta_2$$

Kinetička energija dvostrukog matematičkog njihala iznosi:

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

Potencijalna energija dvostrukog matematičkog njihala iznosi:

$$E_P = m_1 \cdot g \cdot (l_1 + l_2 - l_1 \cdot \cos \theta_1) + m_2 \cdot g \cdot (l_1 + l_2 - l_1 \cdot \cos \theta_1 - l_2 \cdot \cos \theta_2)$$

Lagrangian dvostrukog matematičkog njihala:

$$L = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot [l_1^2 \cdot \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \cdot \dot{\theta}_2^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)]$$

$$- m_1 \cdot g \cdot (l_1 + l_2 - l_1 \cdot \cos \theta_1) - m_2 \cdot g \cdot (l_1 + l_2 - l_1 \cdot \cos \theta_1 - l_2 \cdot \cos \theta_2)$$

Sustav je opisan dvjema Lagrangeovim jednačbama:

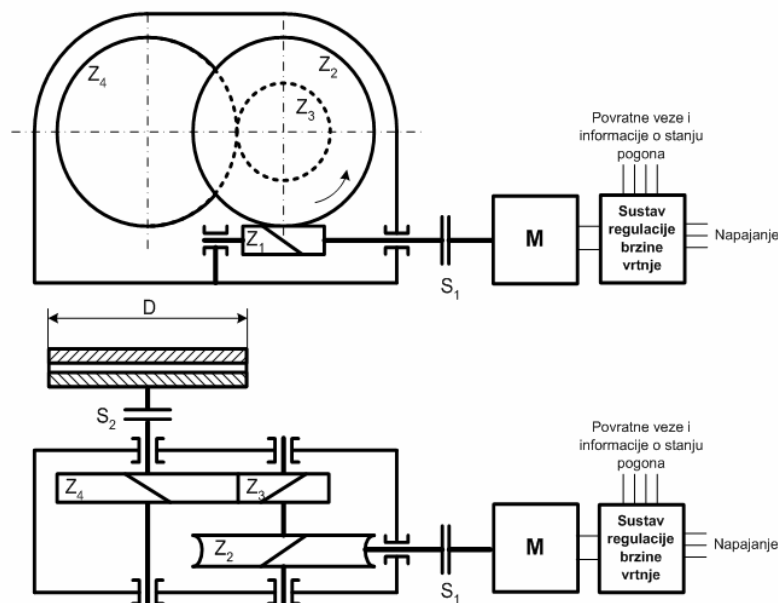
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0$$

### Zadatak 5.

Za pogon translacijskog gibanja kod velike lučke dizalice koristi se dvostupanjski pužni prijenos. Dvostupanjski pužni prijenosnik  $z_1z_2$ , kojemu drugi stupanj čini cilindrični zupčasti par s kosim zubima  $z_3z_4$ , spojen je osovinom promjera  $d_l = 33$  mm, preko spojke  $S_1$ , na istosmjerni nezavisno uzbuđeni motor nazivnog momenta  $M_n = 70$  Nm i nazivne brzine  $n_n = 1440$  o/min. Prijenosnik je izlaznom osovinom, preko spojke  $S_2$ , spojen na pogonski kotač promjera  $D = 80$  cm. Koeficijenti korisnog djelovanja spojke  $S_1$  iznosi  $\eta_{S1} = 0,97$ , spojke  $S_2$  je  $\eta_{S2} = 0,97$ , valjnih (kotrljajućih) ležaja  $\eta_L = 0,99$ , pužnog prijenosa  $z_1z_2$  je  $\eta_P = 0,885$  i zupčastog prijenosa  $z_3z_4$  je  $\eta_z = 0.98$ . Odredite:

- Koliko mora iznositi prijenosni omjer pužnog pogona  $i_{12}$  da bi se nazivno opterećena dizalica gibala brzinom  $0,75$  m/s? Prijenosni omjer cilindričnog zupčastog para iznosi  $i_{34} = 2$ .
- Koliki iznosi moment na izlaznoj spojci  $S_2$  uz uvjete kao pod a)? Koliki maksimalni teret može prevesti dizalica?

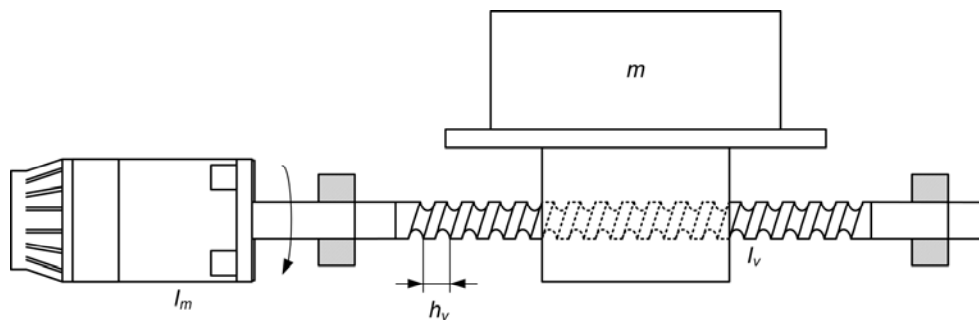


Slika 5. Dvostupanjski pužni prijenos translacijskog gibanja dizalice

### Zadatak 6.

Motor nazivnog momenta  $M_n = 100$  Nm i momenta inercije  $I_m = 0,2$  kg m<sup>2</sup> okreće posmični pogon (prigon) s navojnim vretenom momenta inercije  $I_v = 1$  kg m<sup>2</sup> i usponom vretena  $h_v = 1$  cm. Navojno vreteno pomiče teret mase  $m = 500$  kg. Korisnost pretvorbe rotacijskog gibanja u linearno iznosi  $\eta = 0,86$ .

- Kolikom brzinom se kreće teret pri nazivnoj brzini motora  $n_n = 1480$  o/min?
- Koliko iznosi ukupan moment inercije sustava pri toj brzini?
- Koliku silu može svladavati teret pri nazivnom opterećenju motora?

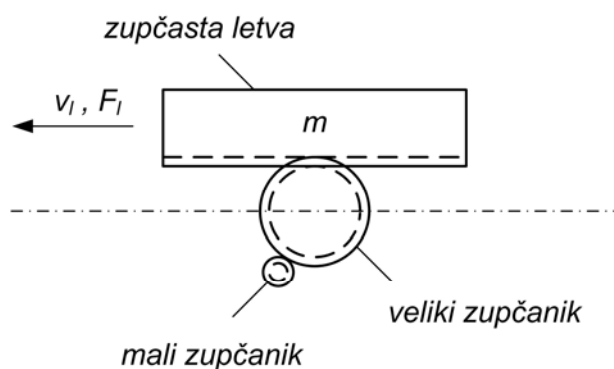


Slika 6. Posmični pogon s navojnim vretenom

### Zadatak 7.

Na osovini motora spojen je čeoní zupčaník s jedním parom zupčaníka prijenosnog omjera  $i = 10$ . Veći zupčaník radijusa  $r_{vz} = 0,2 \text{ m}$  pokreće zupčastu letvu  $I_l = 1 \text{ kg m}^2$ . Korisnost čeonog zupčaníka iznosi  $\eta_z = 0,96$ , a korisnost prijenosa snage između velikog zupčaníka i zupčaste letve iznosi  $\eta_l = 0,88$ .

- Kolikom brzinom se treba okretati osovina motora da bi se letva kretala brzinom  $v_l = 2 \text{ m/s}$ ?
- Koliku silu može svladavati teret pri brzini motora  $n = 1480 \text{ o/min}$  i momentu  $M_m = 100 \text{ Nm}$ ?
- Koliko iznosi moment inercije tereta reduciran na stranu motora?



Slika 7. Zupčasta letva

### Zadatak 8.

Motor je spojen s teretom ( $I_t = 2 \text{ kg m}^2$ ) preko harmonijskog prijenosnika tako da je kružno kućište nepomično, osovina motora pogoni deformator, a teret je spojen na elastično ozubljeni prsten. Elastično ozubljeni prsten sadrži  $z_{EO} = 200$  zuba, kružno ozubljeni prsten sadrži  $z_{KO} = 202$  zuba. Korisnost harmonijskog prijenosnika iznosi  $\eta_{hp} = 0,9$ .

- Kolikom brzinom se vrti teret ako se motor okreće s brzinom od  $n_m = 1480 \text{ o/min}$ ?
- Koliko iznosi moment inercije tereta reduciran na stranu motora?