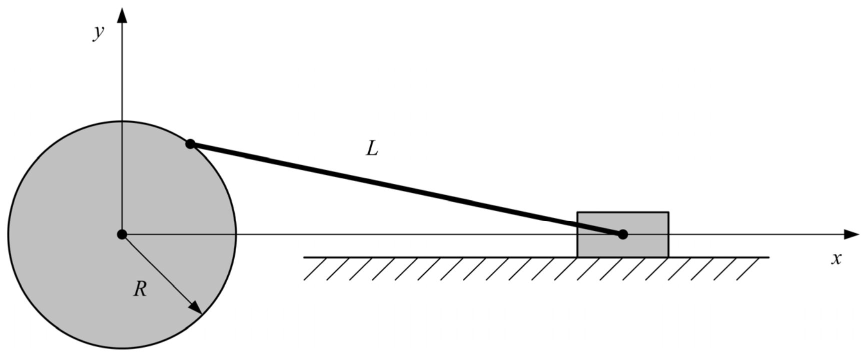
I. međuispit iz predmeta *Osnove Mehatronike*

Zadatak 1.

Disk polumjera $R = 2{,}5$ m spojen je s paketom pomoću štapa duljine $L = 10$ m.

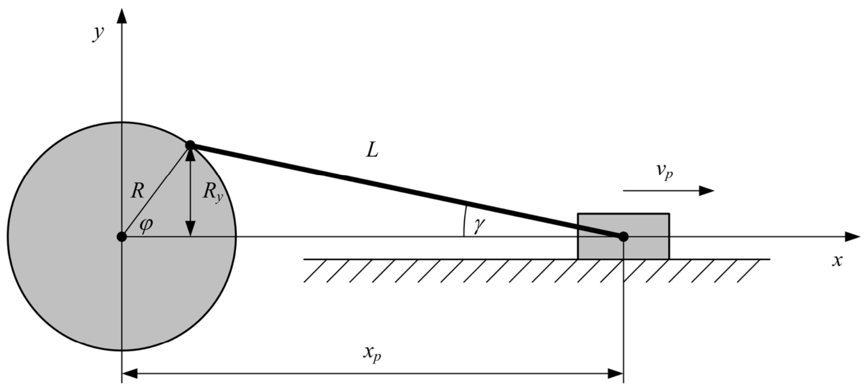
a) Ako disk ubrzava konstantnom akceleracijom $\alpha = 2$ rad/s^2 kolika je brzina paketa u trenutku $t = 4$ s?
b) Na kojoj se udaljenosti u trenutku t nalazi centar mase predmeta od centra mase diska?
c) Koliko okretaja napravi disk do trenutka t?

U početnom trenutku je udaljenost paketa od centra mase diska najveća.



Sl. 1. Primjer pretvorbe rotacijskog gibanja u translacijsko

Rješenje 1.



Ako se kut koji štap zatvara sa negativnim smjerom osi x označi sa γ, a kut za koji se okrene disk označi sa φ, R_y je moguće izraziti na slijedeći način:

$$R_y = L \cdot \sin\gamma = R \cdot \sin\varphi$$

Pomoću gornjeg izraza sinus kuta γ moguće je izraziti pomoću sinusa kuta φ:

$$\sin\gamma = \frac{R}{L} \cdot \sin\varphi \quad \rightarrow \quad \cos\gamma = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \cdot \sin^2\varphi}$$

Kut za koji se disk okrenuo u vremenu t iznosi:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot 16 = 16 \ \text{rad}$$

Udaljenost paketa od centra diska iznosi:

$$x_p = R \cdot \cos\varphi + L \cdot \cos\gamma = R \cdot \cos\varphi + \sqrt{L^2 - R^2 \cdot \sin^2\varphi}$$

$$x_p = 2{,}5 \cdot \cos(16) + \sqrt{10^2 - 2{,}5^2 \cdot \sin^2(16)}$$

$$\boxed{x_p = 7{,}58 \ \text{m}}$$

Brzina paketa dobije se derivacijom izraza za udaljenost paketa od centra diska:

$$v_p = \frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} = -R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2\right)\cdot\alpha\cdot t + \frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cdot R^2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2\right)\cdot\alpha\cdot t}{\sqrt{L^2 - R^2\cdot\sin^2\left(\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2\right)}}$$

$$v_p = -2{,}5\cdot\sin(16)\cdot 2\cdot 4 - \frac{2{,}5^2\cdot\sin(16)\cdot\cos(16)\cdot 2\cdot 4}{\sqrt{10^2 - 2{,}5^2\cdot\sin^2(16)}}$$

$$\boxed{v_p = 4{,}376\ \text{m/s}}$$

Kut za koji se disk okrene unutar vremena $t = 4$ s iznosi:

$$\varphi = \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2 = 0{,}5\cdot 2\cdot 16 = 16\ \text{rad}$$

odnosno:

$$N = \frac{\varphi}{2\cdot\pi} = \frac{16}{2\cdot\pi}$$

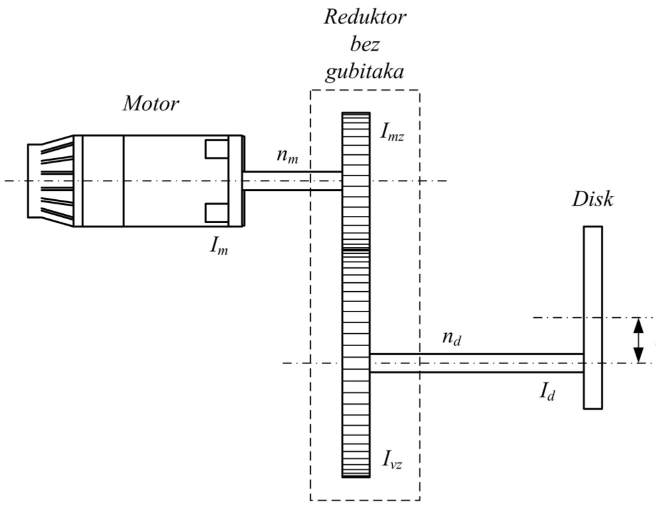
$$\boxed{N = 2{,}546\ \text{okretaja}}$$

Zadatak 2.

Motor momenta inercije $I_m = 0{,}5$ kgm^2 preko malog zupčanika momenta inercije $I_{mz} = 0{,}0125$ kgm^2 okreće drugu osovinu s većim zupčanikom momenta inercije $I_{vz} = 0{,}1$ kg m^2. Na drugoj osovini nalazi se disk mase m =500 kg i promjera $D = 1$ m koji rotira oko osi koja je okomita na površinu diska, a od njegovog centra mase udaljena je $d = 0{,}2$ m. Prijenosni omjer reduktora bez gubitaka iznosi 20.

a) Ako se motoru pri brzini n_0 = 1480 o/min isključi napajanje motora koliko traje zaustavljanje? Moment trenja tijekom kočenja reduciran na stranu motora je konstantan i iznosi $M_t' = 10$ Nm.

b) Koliko je iznosila kinetčka energija diska prije početka kočenja?



Sl. 2. Spoj motora s diskom preko reduktora

Rješenje 2.

Moment inercije diska iznosi:

$$I_d = \frac{1}{2}\cdot m\cdot r^2 + m\cdot D^2 = \frac{1}{2}\cdot 500\cdot 0{,}5^2 + 500\cdot 0{,}2^2 = 82{,}5\ \text{kg m}^2$$

Moment inercije velikog zupčanika i diska iznosi:

$$I_{vz+d} = 82{,}5 + 0{,}1 = 82{,}6\ \text{kg m}^2$$

Moment diska i velikog zupčanika na strani motora moguće je odrediti izjednačavanjem izraza za kinetičku energiju na strani diska i strani motora:

$$\frac{I_{vz+d}{}' \cdot \omega_m{}^2}{2} = \frac{I_{vz+d}\cdot \omega_d{}^2}{2}$$

$$I_{vz+d}{}' \cdot \omega_m{}^2 = I_{vz+d}\cdot \omega_d{}^2$$

$$I_{vz+d}{}' = I_{vz+d}\cdot \frac{\omega_d{}^2}{\omega_m{}^2} = I_{vz+d}\cdot \left(\frac{n_d}{n_m}\right)^2 = 82{,}6\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^2 = 0{,}2065\ \text{kg m}^2$$

Ukupni moment inercije iznosi:

$$I_{uk} = I_m + I_{mz} + I_{vz+d}{}' = 0{,}5 + 0{,}0125 + 0{,}2065 = 0{,}719\ \text{kg m}^2$$

Vrijeme zaustavljanja moguće je odrediti pomoću izraza:

$$M_m - M_t{}' = I_{uk}\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t}$$

Kako je moment motora jednak nuli izraz poprima oblik:

$$-M_t{}' = I_{uk}\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}t = -\frac{I_{uk}}{M_t{}'}\cdot \mathrm{d}\omega_m \Big/ \int$$

$$\int_0^{t_z}\mathrm{d}t = -\frac{I_{uk}}{M_t{}'}\cdot\int_{\omega_0}^{0}\mathrm{d}\omega_\mathrm{m}$$

$$t_z = -\frac{I_{uk}}{M_t{}'}\cdot(0-\omega_0) = \frac{I_{uk}}{M_t{}'}\cdot\frac{\pi}{30}\cdot n_0$$

$$\boxed{t_z = \frac{0{,}719}{10}\cdot\frac{\pi}{30}\cdot 1480 = 11{,}143\ \ \text{s}}$$

Kinetička energija diska prije kočenja iznosi:

$$\boxed{E_k = \frac{I_d\cdot\omega_d{}^2}{2} = \frac{I_d\cdot\left(\frac{\omega_0}{i}\right)^2}{2} = \frac{82{,}5\cdot\left(\frac{n_0\cdot\pi}{30\cdot 20}\right)^2}{2} = 2477{,}1\ \ \text{J}}$$

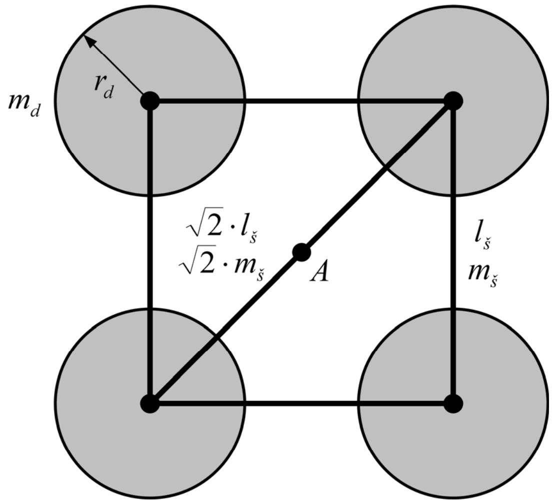
Zadatak 3.

Središta diskova mase m_d = 1 kg i polumjera r_d = 0,2 m međusobno su spojena homogenim štapovima mase $m_š$ = 0,5 kg i duljine $l_š$ = 0,6 m. Štapovi su spojeni tako da čine kvadrat. Štap koji je postavljen na mjesto dijagonale kvadrata ima $\sqrt{2}$ puta veću masu i duljinu od štapova koji čine stranice kvadrata.

a) Koliki je moment inercije sustava prema osi koja prolazi točkom A i okomita je na ravninu kvadrata kojega čine štapovi?

b) Kolika je kinetička energija sustava ako sustav rotira kutnom brzinom ω = 10 rad/s oko osi koja prolazi točkom A i okomita je na ravninu kvadrata kojega čine štapovi?

c) Koliko najviše smije iznositi moment inercije motora ako motor mora ubrzati sustav prikazan na sl. 3. do brzine od 10 rad/s u vremenu od 2 s? Os rotacije motora prolazi točkom A i okomita je na ravninu kvadrata kojega čine štapovi. Moment motora prilikom zaleta je konstantan i iznosi M_m = 10 Nm.



Sl. 3. Sustav zamašnih masa

Rješenje 3.

Moment inercije diska koji rotira oko osi koja prolazi njegovim centrom mase iznosi:

$$I_d = \frac{m_d \cdot r_d^2}{2} = \frac{1\cdot 0{,}2^2}{2} = 0{,}02\ \text{kg m}^2$$

Moment inercije štapa koji rotira oko osi koja prolazi njegovim centrom mase iznosi:

$$I_{šs} = \frac{m_š \cdot l_š^2}{12} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}6^2}{12} = 0{,}015\ \text{kg m}^2 \qquad \text{(štapovi koji čine kvadrat)}$$

$$I_{šd} = \frac{\sqrt{2}\cdot m_š \cdot \left(\sqrt{2}\cdot l_š\right)^2}{12} = \frac{0{,}18}{12} = 0{,}0424\ \text{kg m}^2 \qquad \text{(štap koji je postavljen u dijagonalu)}$$

Primjenom Steinerovog poučka dobivaju se momenti inercije diskova i štapova prema osi koja prolazi točkom A i okomta je na kvadrat kojeg čine štapovi. Centar mase diskova udaljen je od osi rotacije $\frac{l_š}{\sqrt{2}}$, a centar mase štapova koji čine kvadrat $\frac{a}{2}$:

$$I_d' = \frac{m_d \cdot r_d^2}{2} + m_d \cdot \frac{l_š^2}{2} = \frac{m_d \cdot \left(r_d^2 + l_š^2\right)}{2} = \frac{1\cdot\left(0{,}2^2 + 0{,}6^2\right)}{2} = 0{,}2\ \text{kg m}^2$$

$$I_{šs}' = \frac{m_š \cdot l_š^2}{12} + m_š \cdot \frac{l_š^2}{4} = \frac{m_š \cdot l_š^2}{3} = \frac{0{,}5\cdot 0{,}6^2}{3} = 0{,}06\ \text{kg m}^2$$

Ukupni moment inercije sustava iznosi:

$$\boxed{I_{uk} = 4 \cdot I_d' + 4 \cdot I_{šs}' + I_{šd} = 4 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}06 + 0{,}0424 = 1{,}0824 \ \ \text{kg m}^2}$$

Kinetička energija sustava iznosi:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} \cdot I_{uk} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0824 \cdot 100 = 54{,}12 \ \ \text{J}}$$

Iz momentne jednadžbe uz uvjet $M_t = 0$ moguće je odrediti moment inercije motora i sustava:

$$M_m = I_{m+uk} \cdot \frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t}$$

$$M_m \cdot \mathrm{d}t = I_{m+uk} \cdot \mathrm{d}\omega_m$$

$$\mathrm{d}t = \frac{I_{m+uk}}{M_m} \cdot \mathrm{d}\omega_m \Big/ \int$$

$$\int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{d}t = \frac{I_{m+uk}}{M_m} \cdot \int_0^{\omega} \mathrm{d}\omega_m$$

$$t = \frac{I_{m+uk}}{M_m} \cdot \omega$$

$$I_{m+uk} = \frac{t \cdot M_m}{\omega} = \frac{2 \cdot 10}{10} = 2 \ \text{kg m}^2$$

Moment inercije motora smije najviše iznositi:

$$\boxed{I_m = I_{m+uk} - I_{uk} = 2 - 1{,}0824 = 0{,}9176 \ \ \text{kg m}^2}$$