Današnja tematika

- Kinematika rotacijskog gibanja
  - ➔ Analogija s 1D-kinematikom translacijskog gibanja
- Kinetička energija rotacijskog sustava
  - ➔ Moment inercije
- Teorem o paralelnim osima (Računanje momenta tromosti)

Kinematika Rotacijskog gibanja

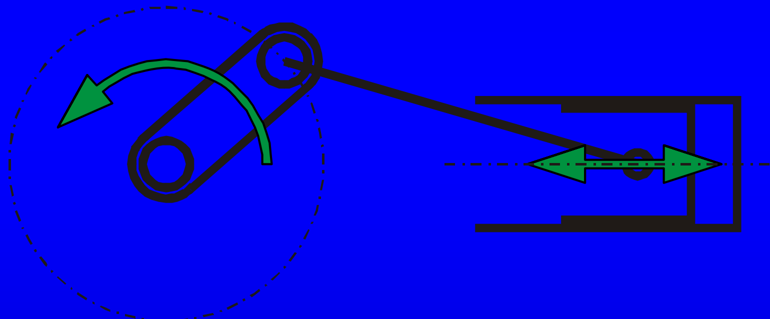
- Do sada nismo istraživali problematiku rotacijskog gibanja.
  - ➔ Radili smo translacijsko gibanje gdje su se čvrsta tijela (objekti) gibala translacijski – klizala
  - ➔ Vrlo često se, primjerice, kod translacijskih gibanja gdje se koriste koloture s užetom, masa kolotura zanemaruje (koloture rotiraju)
- Rotacijsko gibanje je važno i zbog toga ga moramo razumjeti (primjeri rotacijskih električnih strojeva s rotirajućim mehaničkim komponentama)!
- Većina jednadžbi koje smo koristili u translacijskom gibanju koristit će se u vrlo sličnom obliku u rotacijskom gibanju.

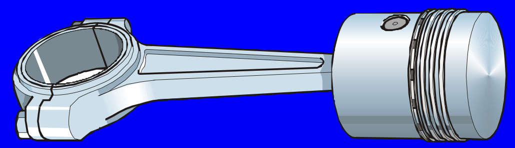
Translacijsko (linearno)-Rotacijsko- gibanje

Translacijsko gibanje			Rotacijsko (linearno) gibanje			
put	s	m	kut	φ	rad	
brzina	v	m/s	kutna brzina	ω	rad/s	
ubrzanje	a	m/s^2	kutno ubrzanje	α	rad/s^2	
masa	m	kg	mom. inercije	J (I)	$kg \circ m^2$	
sila	$F = m \circ a$	N	moment sile	$M = J \circ \alpha$	$N \circ m$	
količina gibanja	$m \circ v$	$kg \circ (m/s)$	zamah	$J \circ \omega$	$kg \circ (m^2/s)$	
rad	$F \circ s$	J	rad	$M \circ \varphi$	J	
kinetička energija	$\frac{m \cdot v^2}{2}$	J	kinetička energija	$\frac{J \cdot \omega^2}{2}$	J	
snaga	$F \circ v$	W	snaga	$M \circ \omega$	W	

Kinematika Rotacijskog gibanja

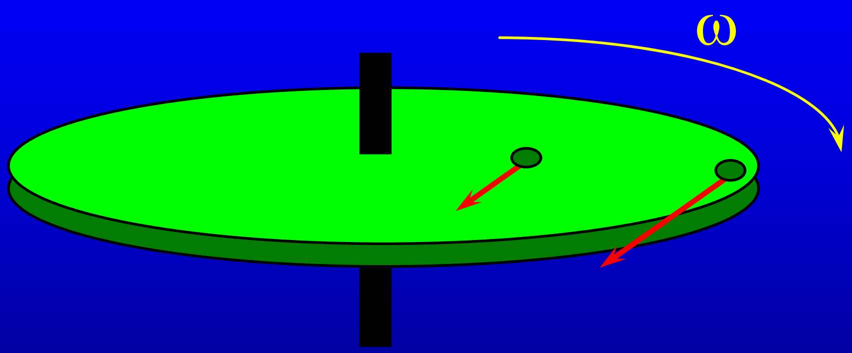
- Primjer pretvorbe translacijskog u rotacijsko gibanje





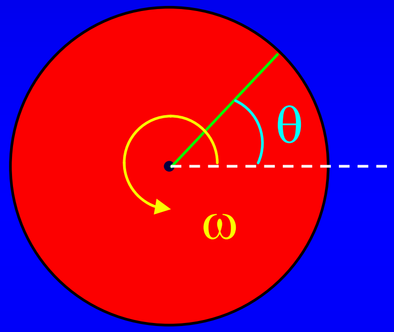
Kinematika Rotacijskog gibanja

- Kutna brzina ω svake točke krutog tijela koje rotira oko fiksne osi je ISTA.
- Translacijska (linearna) brzina v će biti različita zbog $v = \omega r$.
- Primjer rotirajućeg diska



Rotacijske varijable…..

- Promatra se rotacija oko fiksne osi:
  - ➔ Radi se o disku koji rotira oko osi koja prolazi kroz njegov centar:



- Na osnovi jednadžbe gibanja koje smo upoznali u translacijskom gibanju :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

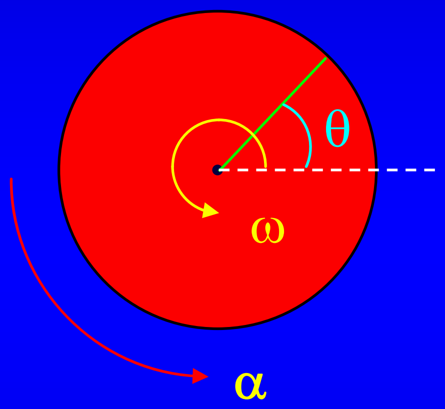
Analogno se može pisati i za rotacijsko gibanje

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Rotacijske varijable...

- Neka se ω mijenja s vremenom
- Definira se kutna akceleracija:

$$\boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}}$$



- Neka je α=konst.

← Uvrštavanjem u gornju jednadžbu i integriranjem dobije se brzina ω i kut θ kao funkcije vremena:

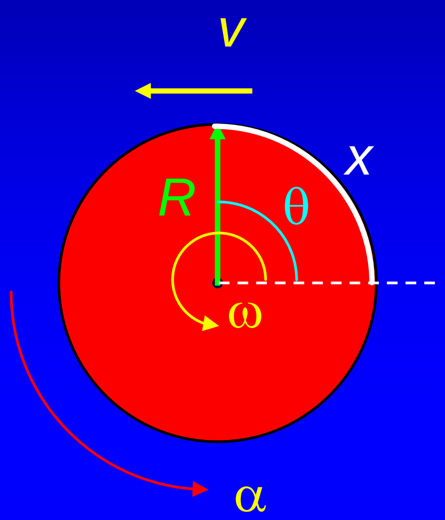
$$\alpha = konst.$$
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Rotacijske varijable – veza s translacijskim.

$$\alpha = konst.$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

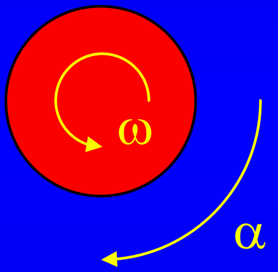
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$



- Polazeći od osnovnih rotacijskih jednadžbi jednostavno se mogu odrediti translacijske (linijske) varijable za svaku točku diska na udaljenosti R od centra rotacije:
  - ➔ $x = \theta R$
  - ➔ $v = \omega R$
  - ➔ $a = \alpha R$

Primjer:

- Zamašnjak se vrti kutnom brzinom ω_0 = 500 rad/s. U $t = 0$ počinje kočenje s konstantnom retardacijom $0.5\ rad/s^2$. Za koje će se vrijeme zamašnjak zaustaviti?
- Postavimo da je $\alpha = -0.5\ rad/s^2$.



- Vrijedi $\omega = \omega_0 + \alpha t$, traži se kada je $\omega = 0$:

$$t = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

- Vrijedi $$t = \frac{500\ rad/s}{0.5\ rad/s^2} = 1000\ s = 16.7\ \min$$

Napomena: Koriste se relacije analogne translacijskom gibanju !!

Sažetak

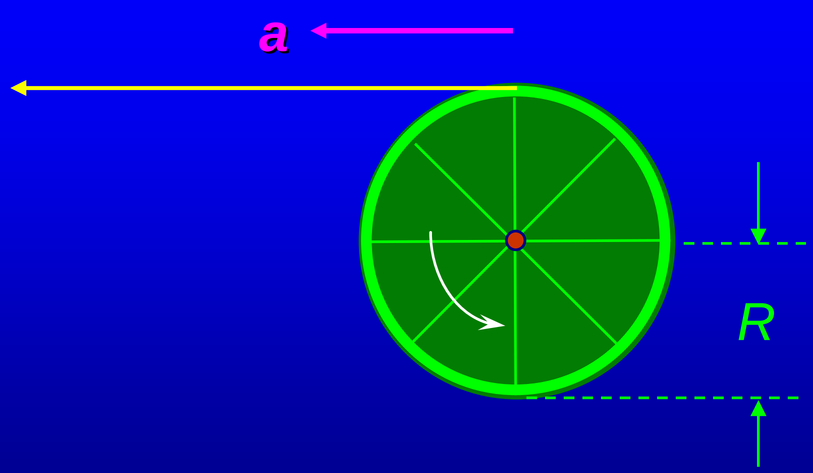
Rotacijske varijable	Translacijske (lin.) varijable
$\alpha = \text{konst.}$	$a = \text{konst.}$
$\omega = \omega_0 + \alpha t$	$v = v_0 + at$
$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

Za točke na udaljenosti R od osi rotacije vrijedi:

$x = R\theta$ $v = \omega R$ $a = \alpha R$

Primjer: Kotač s užetom

- Kotač polumjera $R = 0.4\ m$ rotira slobodno oko osovine. Na njega je namotano uže. Počevši od $t = 0$, uže se počne izvlačiti konstantnim ubrzanjem $a = 4\ m/s^2$. Koliko okreta napravi kotač nakon *10* sekunda?



Rješenje: Kotač s užetom

- Uz $a = \alpha R$ slijedi α:

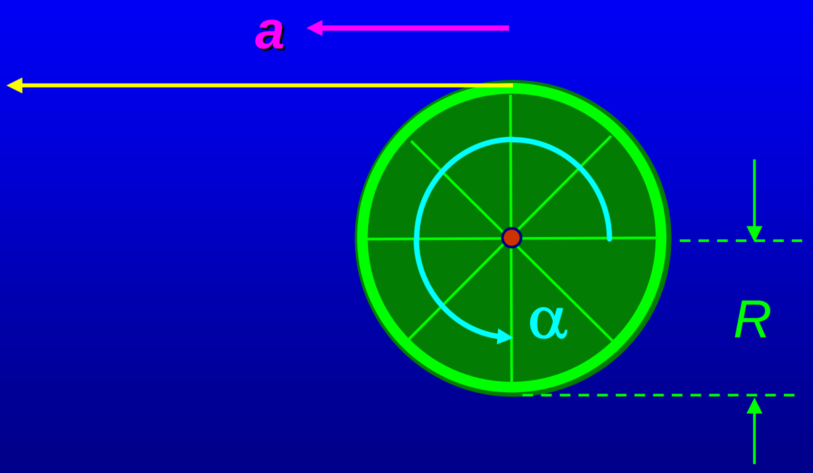
  $\alpha = a / R = 4\ m/s^2 / 0.4\ m = 10\ rad/s^2$

- Uz poznato kutno ubrzanje jednostavno se računa pređeni put (kut)

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + 0(10) + \frac{1}{2}(10)(10)^2 = 500\ rad$$

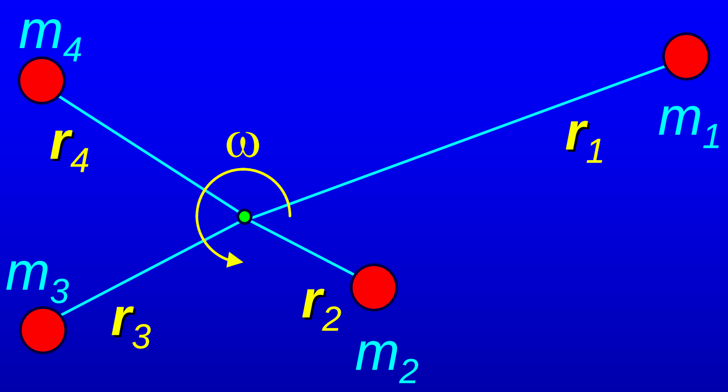
$$= 500\ rad\ x\ \frac{1}{2\pi}\frac{rot}{rad}$$

$$\approx 80\ rev$$



Rotacija i kinetička energija

- Pretpostavimo jednostavan rotirajući sustav kao na slici.
- Pretpostavimo također da su mase spojene krutim vezama (štapovima) bez vlastite mase
- Kinetička energija rotirajućeg sustava bit će jednaka sumi kinetičkih energija svake pojedinačno



Rotacija i kinetička energija

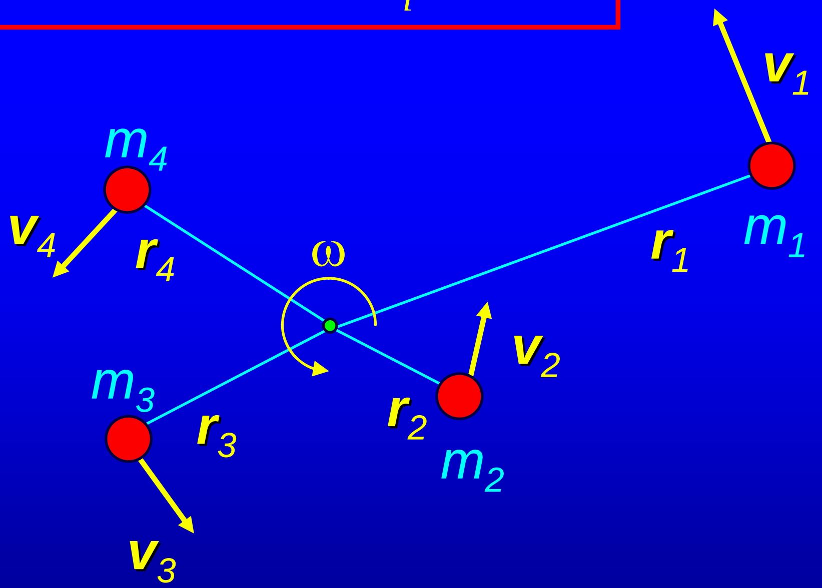
- Vrijedi: $\boxed{W_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2}$ pa uz $v_i = \omega r_i$ dobije se

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_k = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i r_i^2}$$

Slijedi:

$$\boxed{W_k = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$



NOVI POJAM: *Moment inercije*

oko rotirajuće osi

I (*J*) ima jedinicu *kg m*^{2}.

Moment inercije (tromosti)

- Iz prethodne analize slijedi $W_k = \frac{1}{2} \mathrm{I} \omega^2$ uz $\mathrm{I} = \sum_i m_i r_i^2$

- Moment inercije *I* (*J*) ovisi o raspodijeljenosti (distribuciji) masa u rotirajućem sustavu. Što su raspodijeljene mase dalje od centra rotacije, moment tromosti je veći (s kvadratom udaljenosti !!!).

- Za definirani objekt koji rotira, moment tromosti će ovisiti od odabrane rotacijske osi.

- Može se uočiti velika sličnost *mase* kod translacijskog gibanja i *momenta tromosti* (inercije) od rotacijskog gibanja!

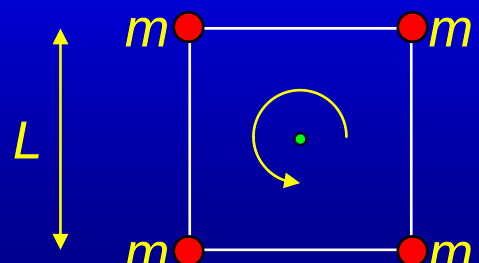
Izračun momenta tromosti (1)

- Do sada je pokazano da za N diskretnih elementarnih masa raspodijeljenih oko osi rotacije, moment inercije iznosi:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

gdje je r_i razmak elementarne mase m_i od centra rotacije.

Primjer: Izračunajte moment tromosti "točkastih" masa (m) razmještenih na vrhovima kvadrata stranice L, oko okomite osi kroz centar kvadrata



Izračun momenta tromosti (2)

- Računanje razmaka masa od centra rotacije

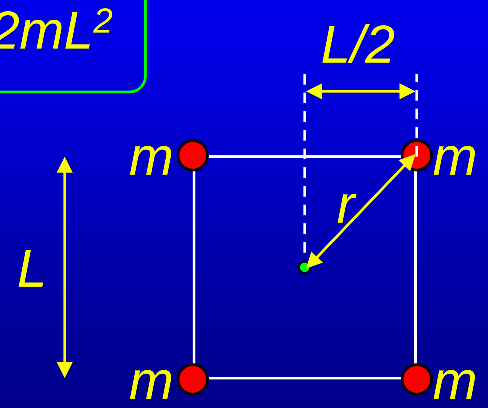
$$r^2 = 2\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{L^2}{2}$$

Korištenjem Pytagorinog teorema

slijedi

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} + m\frac{L^2}{2} = 4m\frac{L^2}{2}$$

$$\boxed{I = 2mL^2}$$

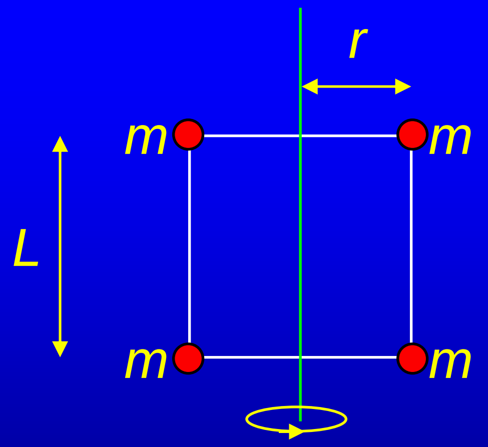


Izračun momenta tromosti (3)

- Na sličan način kao i u prošlom primjeru, ovdje je os rotacije promijenjena:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} + m\frac{L^2}{4} = 4m\frac{L^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = mL^2}$$

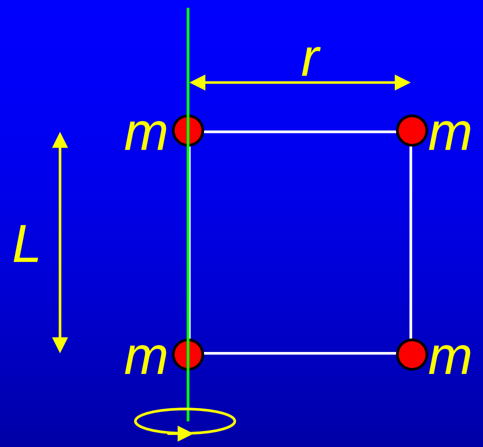


Izračun momenta tromosti (4)

- Ovdje je os rotacije stranica kvadrata

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 = mL^2 + mL^2 + m0^2 + m0^2$$

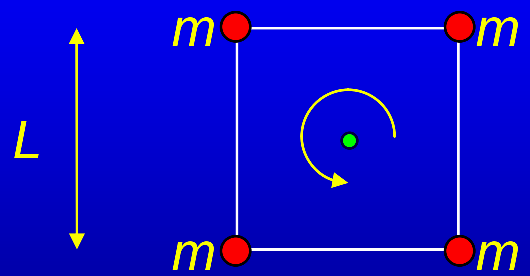
$$\Rightarrow \boxed{I = 2mL^2}$$



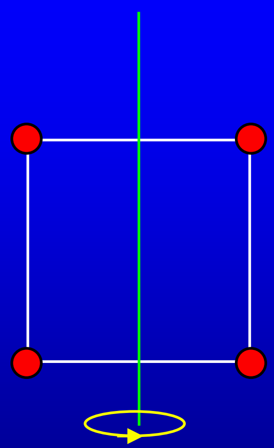
Izračun momenta tromosti (zaključak)

- Pogledajmo kako za ISTI objekt moment tromosti ovisi o osi rotacije!!

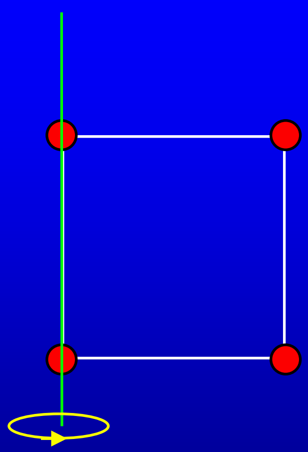
$I = 2mL^2$



$I = mL^2$



$I = 2mL^2$



Izračun momenta tromosti (SAMO ZA VAS !!!)

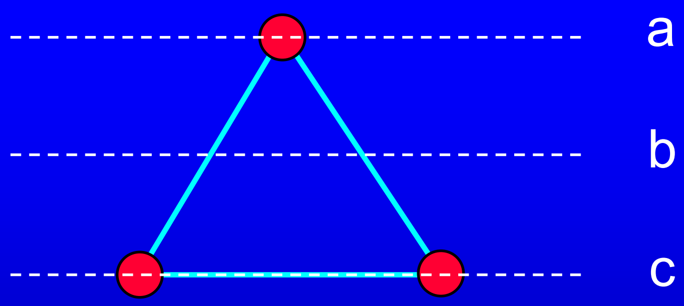
- Za prikazani kruti oblik načinjen od istih kuglica (masa) kao u dosadašnjim zadacima, usporedite momente tromosti I_a, I_b, and I_c oko osi rotacija *a*, *b*, i *c*.

  ➔ Koji od odgovora je točan?

(a) $I_a > I_b > I_c$

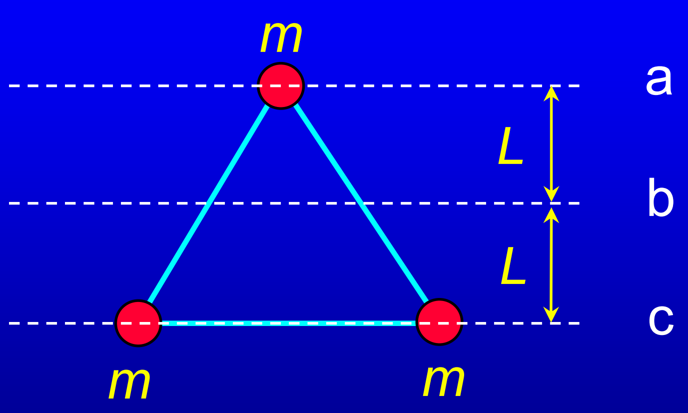
(b) $I_a > I_c > I_b$

(c) $I_b > I_a > I_c$



Izračun momenta tromosti (Rješenje)

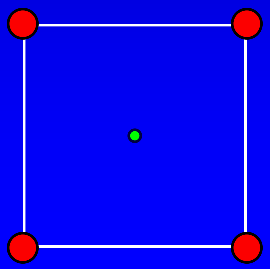
Ovdje se krije RJEŠENJE!!!



Izračun momenta tromosti (SAMO ZA VAS !!!)

- Za diskretno raspodijeljene mase u rotirajućem sustavu (objektu) vrijedi:

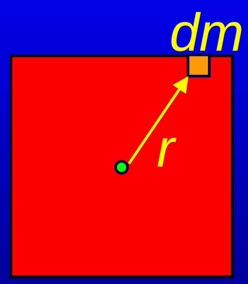
$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$



- Za tijelo s kontinuiranom raspodjelom mase po volumenu, mora se zbrojiti doprinos momenta tromosti mr^2 svake infinitezimalno male mase dm.

➔ Moment tromosti se onda računa pomoću integrala:

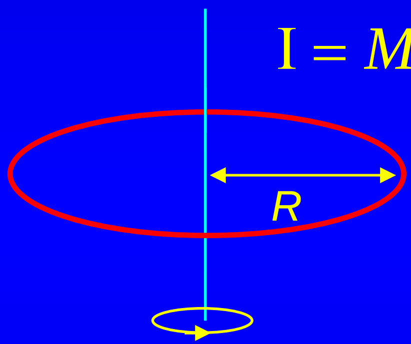
$$I = \int r^2 dm$$



Izračun momenta tromosti (rezultati)

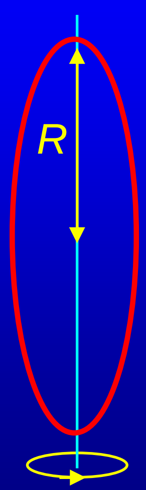
Cilindar

- Primjer računanja momenta tromosti I za kruta tijela:



$$I = MR^2$$

Tanki cilindar mase M i polumjera R, oko osi koja prolazi kroz njegov centar, okomito na ravninu cilindra.



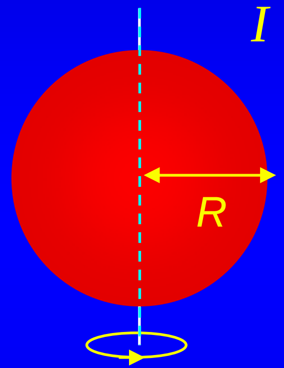
$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

Za ovaj slučaj je os rotacije promjer cilindra.

Kugla i disk

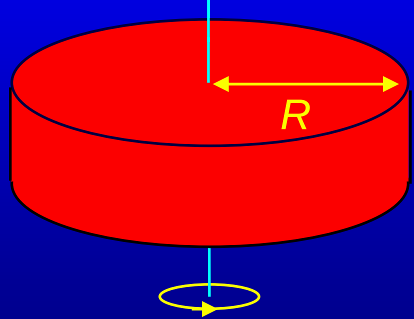
- Primjer računanja momenta tromosti ***I*** za kruta tijela :

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$



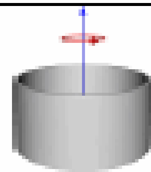
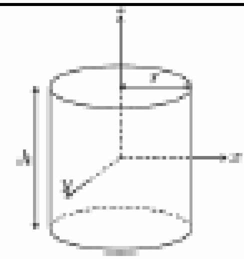
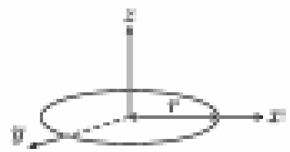
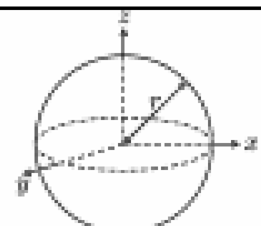
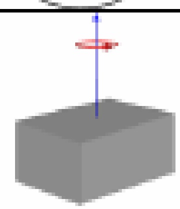
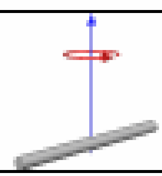
Kugla mase *M* polumjera *R*, oko osi rotacije
Koja prolazi kroz središte kugle.

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



Disk ili puni cilindar mase *M* polumjera
R, oko osi koja prolazi kroz centar baze cilindra

Momenti inercije

	$I = mr^2$
	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2)$
	$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ $I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2$
	$I = \frac{2}{5}mr^2$
	$I_h = \frac{1}{12}m(w^2 + d^2)$ $I_w = \frac{1}{12}m(h^2 + d^2)$
	$I_{center} = \frac{1}{12}mL^2$

Teorem o paralelnim osima rotacije

- Pretpostavimo da je moment tromosti krutog tijela mase M oko osi rotacije koja prolazi kroz centar mase, I_{CM}, POZNAT.
- U tom se slučaju moment tromosti tog istog tijela oko osi rotacije koja je paralelna s osi kroz centar mase I_x i udaljena od njega za iznos D može izračunati pomoću formule:

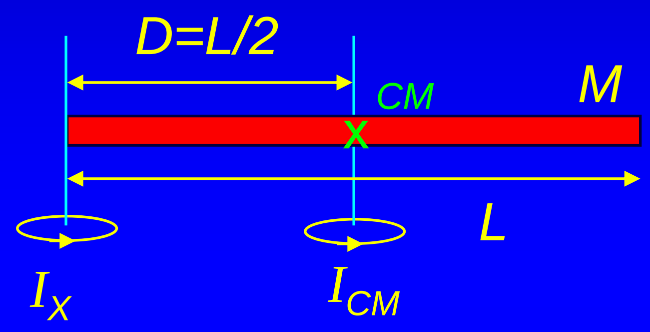
$$\boxed{I_x = I_{CM} + MD^2}$$

- Dakle, ako se zna I_{CM} , može se jednostavno izračunati moment tromosti oko paralelne osi.

Teorem o paralelnim osima rotacije (primjer)

- Prikazan je kruti štap mase *M* i dužine *D*. Izračunaj moment inercije tog štapa oko njegovog kraja.

$$I_x = I_{CM} + MD^2$$



Znamo moment inercije oko centra mase $I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$

Slijedi $$I_X = \frac{1}{12} ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

which agrees with the result on a previous slide.

KRAJ