

Rekapitulacija zadnjih predavanja

- Kinematika rotacijskog gibanja
 - rotacijske varijable
 - rotacija i kinetička energija
 - Steinerov poučak
- Translacijsko gibanje
 - translacijske varijable
 - usporedbe s rotacijskim varijablama
 - translacija i kinetička energija

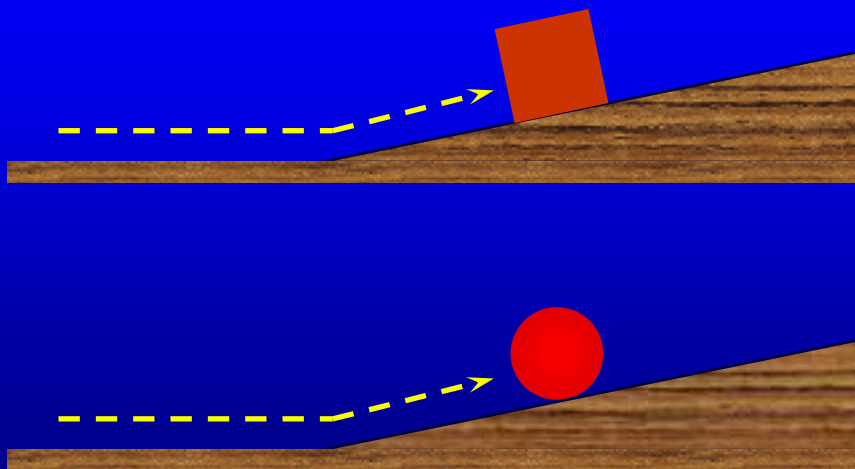
Rotacijsko gibanje – kinetička energija

- Kugla i kocka imaju iste mase i gibaju se istom brzinom po horizontalnoj podlozi. Kugla se kotrlja bez klizanja a kocka klizi bez trenja. Ako oba objekta naiđu na jednak nagib na podlozi, koja od njih će preći duži put na podlozi prije nego se zaustavi?

(a) kugla

(b) kocka

(c) jednaki put



Rješenje

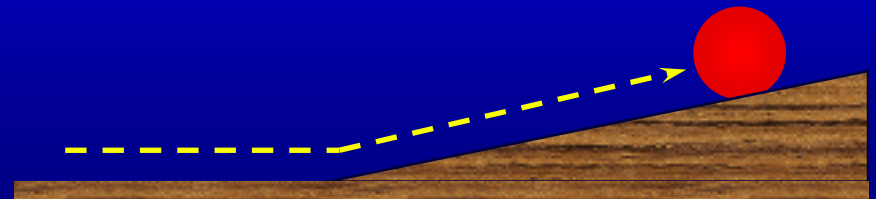
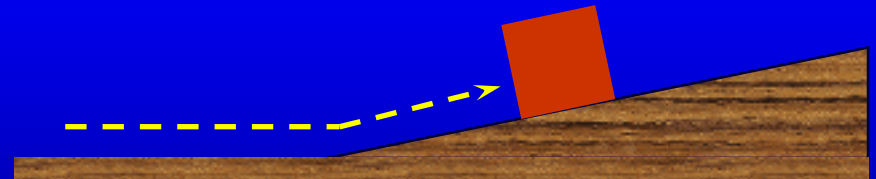
- I kugla i kocka će se zaustaviti kada se njihova početna kinetička energija pretvori u gravitacijsku potencijalnu energiju (mgH).
Pretpostavka: konzervativan sustav – nema gubitaka energije.

- Početna kinetička energija kocke

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

- Početna kinetička energija kugle

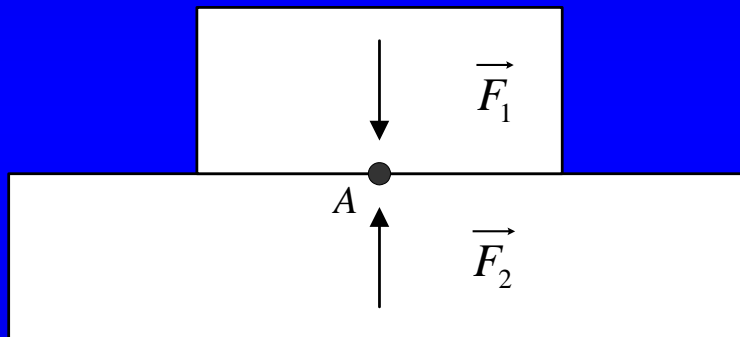
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{veća}$$



Rekapitulacija pojma *sila*

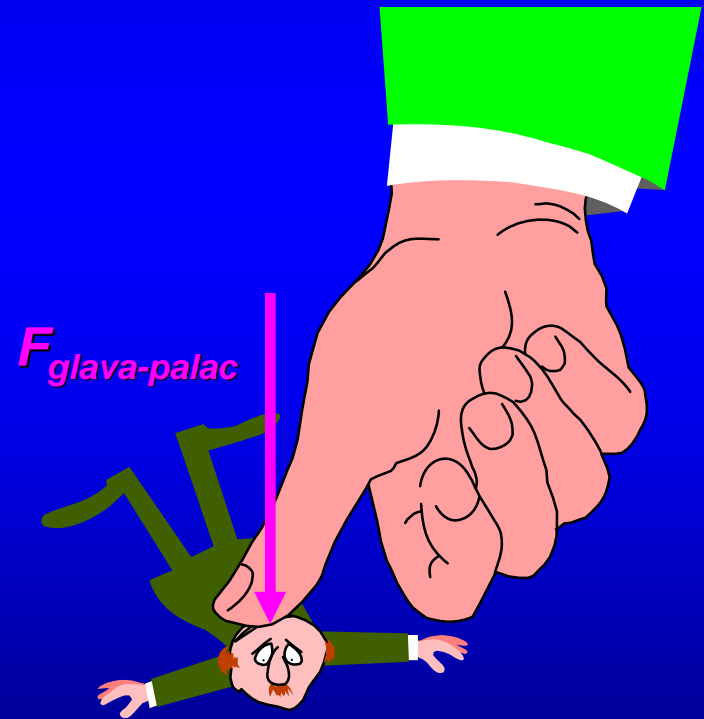
- Promatraju se dvije vrste sila:

→ **Kontaktne sile**: Međusobno se dodiruju. Bilo koji predmet na stolu djeluje na stol gravitacijskom silom, dok stol na njega djeluje silom istog iznosa, ali suprotnog smjera. (treći Newtonov zakon). Ove dvije sile su u međusobnom dodiru u točki A



Sl.1.

→ **Bezkontaktne (primjer)**:
Gravitacijska
Električna

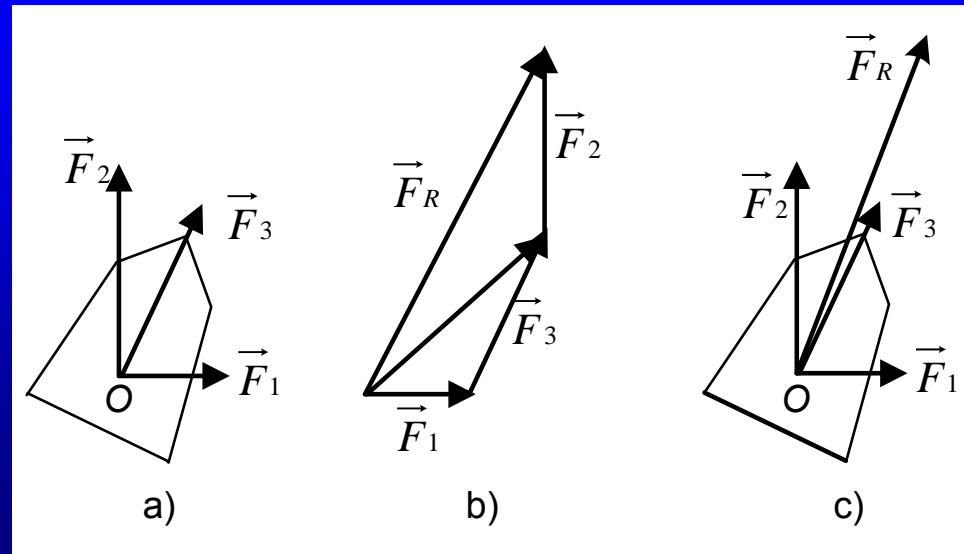


Sl.2.

Primjena Newtonovih zakona - sila

- Za određivanje rezultantne sile u slučaju djelovanja više sila koristi se pravilo trokuta i paralelograma sila, vidi sliku
- Uzajamno djelovanje više tijela je također primjer djelovanja sile
- Tada se analiza djelovanja sile na *jedno* tijelo postiže izdvajanjem tog tijela iz sustava međusobnog djelovanja više tijela, ucrtavajući na mjestima veze s ostalim tijelima) pripadne sile. Radi se o *načelu izolacije* tijela
- Ako se taj postupak proširi i na analizu djelovanja sile na dijelove jednog tijela, onda se isti takav postupak zove *načelo reza*.

Djelovanje sila na tijelo u ravnini:
plan položaja a), plan sila b) i
plan položaja s rezultantnom
silom c).

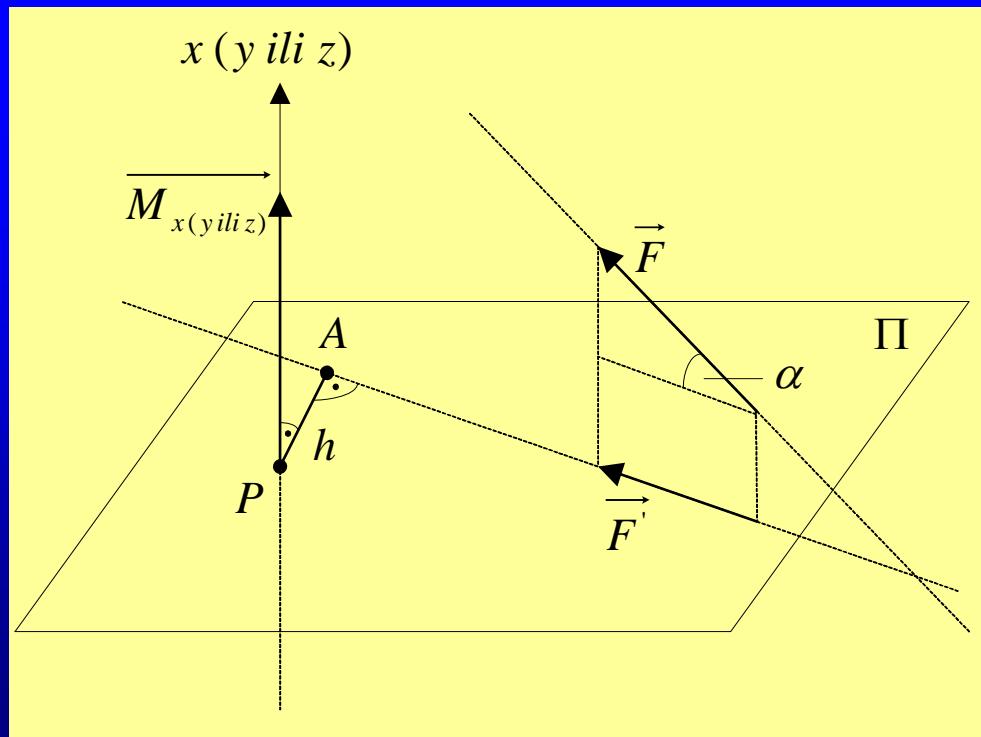
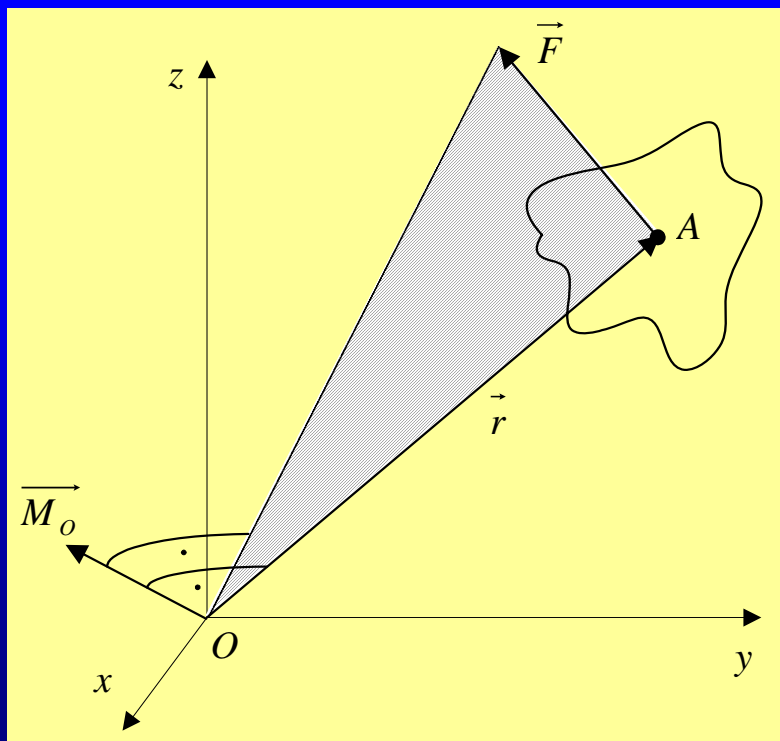


Moment sile i spreg sila sila

Moment (ili samo “moment”) M sile F oko točke O se definira kao vektorski produkt

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

gdje je r radij vektor koji spaja točku O s hvatištem sile F (točka A na slici)



Moment sile i spreg sila sila (2)

- Vektor \mathbf{M}_O okomit je na ravninu koja je određena točkom O i pravcem djelovanja sile, a to znači ravninu koju definiraju vektori \mathbf{r} i \mathbf{F} . Smjer momenta određuje se pomoću pravila desne ruke a iznos je jednak umnošku **iznosa sile F** , **udaljenosti r** i **sin** kuta kojeg zatvaraju vektori \mathbf{r} i \mathbf{F} .
- Moment sile oko osi x (y ili z) određuje se na slijedeći način
 - Postavi se ravnina Π okomito na os x (y ili z)
 - Sila \mathbf{F} se projicira na ravninu Π
 - Iz probodišta P osi x (y ili z) u ravnini Π spušta se okomica na pravac projekcije \mathbf{F}' , gdje je h dužina spuštene okomice, $h=PA$
- Ako je α kut između vektora \mathbf{F} i njegove projekcije, tada je **moment sile F** na os x (y ili z) dan izrazom

$$M_{x(y \text{ ili } z)} = h \cdot F' = h \cdot F \cdot \cos \alpha$$

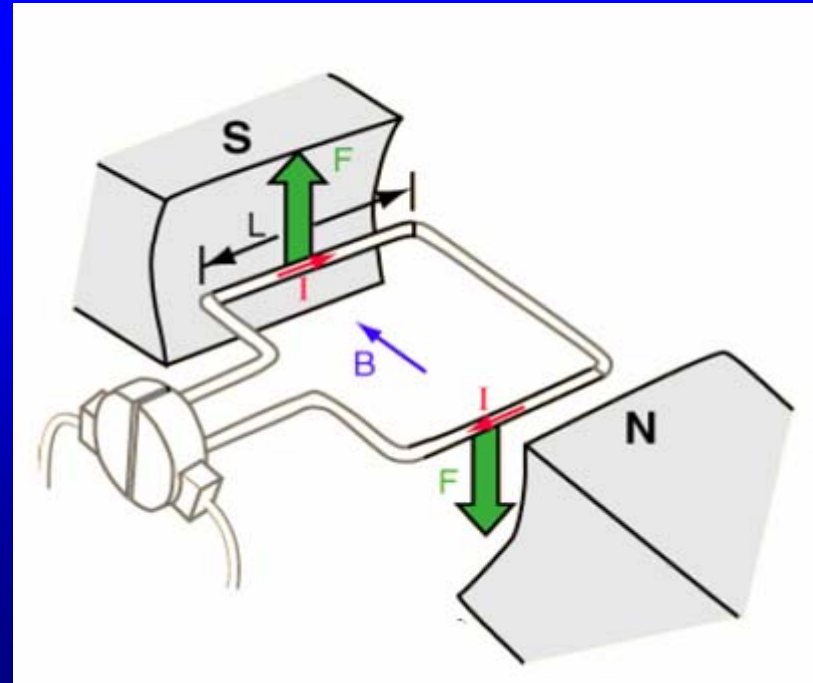
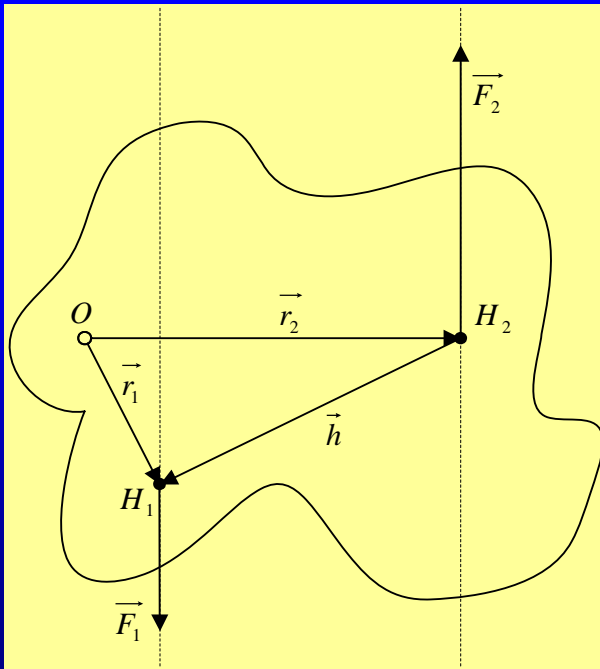
- Ako je sila \mathbf{F}' paralelna osi x (y ili z), ili ju siječe, moment sile oko osi je jednak nuli.

Moment sile i spreg sile (3)

Spreg (par) sile čine dvije, po iznosu jednake, paralelne i suprotno usmjerene sile, sl. lijevo. Moment sprega sile oko proizvoljno odabrane točke O iznosi

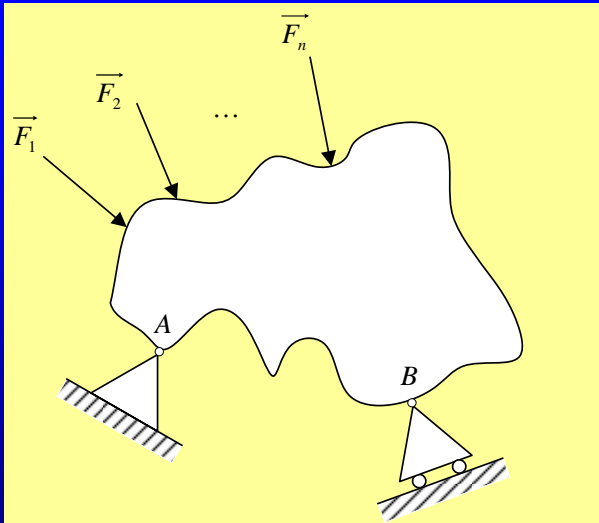
$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_1) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{h} \times \vec{F}_1$$

gdje je h vektor od hvatišta sile F_2 do hvatišta sile F_1

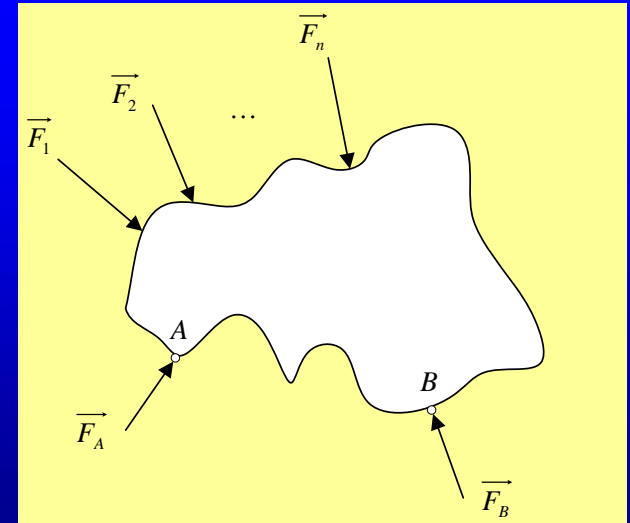


Vrste veza između tijela, oslobađanje veza, sile reakcije veza

- Na tijelo djeluje niz sila $F_1...F_n$ i opterećenje q , a tijelo se oslanja na mjesta označena točkama A i B , koje se nazivaju *osloncima*, slika lijevo
- Najčešće veze među tijelima su veze tipa *oslonac*, *štapna* i *užna* ili *lančasta* veza
- Tijelo vezano s osloncima (slika lijevo), može se osloboditi veza (oslonaca) dodavanjem *reakcija veza*, kao što je prikazano na slici desno
- Pri tome se sile $F_1...F_n$ nazivaju *aktivnim* silama, a sile F_A i F_B *reakcijske veze*.



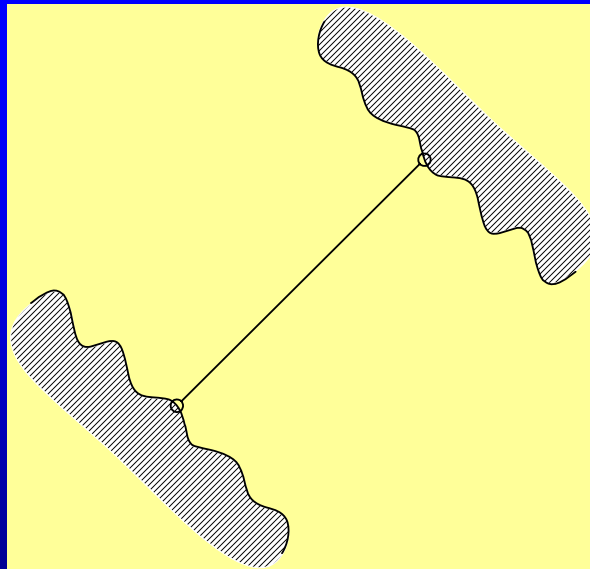
Prikaz djelovanja sila, opterećenja i oslonaca na tijelo



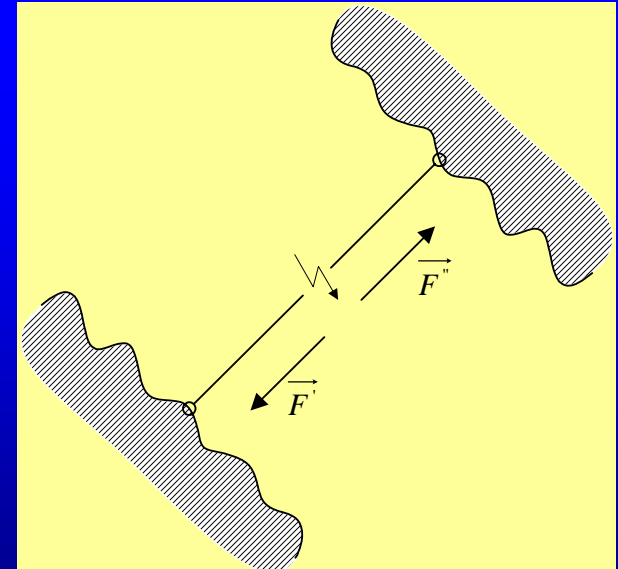
Oslobađanje veza oslonaca dodavanjem reakcija veza.

Vrste veza između tijela, oslobađanje veza, sile reakcije veza

- Kod štapne veze *ne postoji otpor u smjeru okomitom* na štap.
- Tamo gdje ne postoji otpor nema ni *reakcije veza*.
- Tijelo se može osloboditi veza (oslonaca) dodavanjem *reakcija veza*, kao što je prikazano na slici.
- Ako se štap prekine, sile će uvijek djelovati samo u smjeru štapa, za razliku od nosača gdje se prekid nosača nadomješta i *uzdužnim i poprečnim silama*



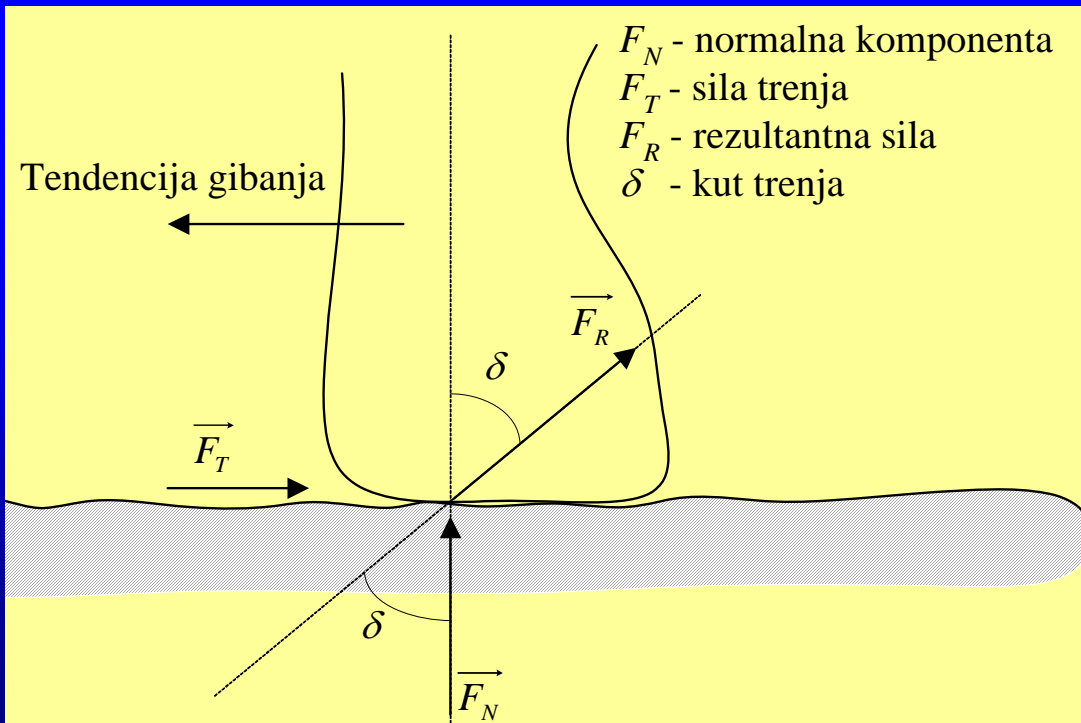
Štapna veza između dva tijela



Prikaz prekida štapne veze i djelovanja sile

Sila trenja i ravnoteža tijela- STATIKA

- Podloge mogu biti glatke i hrapave. Kod **glatkih podloga** nema otpora, stoga **nema nikakvih reakcijskih veza** (idealni slučaj), dok je **hrapava podloga** ona **s reakcijom veza**.
- Ukoliko neko tijelo ima tendenciju gibanja po hrapavoj podlozi u jednom smjeru, tada se javlja ukupna sila reakcije na podlogu F_R , koju čini **normalna sila** F_N i **sila trenja** F_T , (slika). Sila trenja F_T ima suprotan smjer od tendencije gibanja.



Sile F_T i F_N su usmjerene tako da koče gibanje

Sila trenja F_T je proporcionalna normalnoj komponenti sile F_N

$$F_T = \mu \cdot F_N$$

μ je *koeficijent trenja*

δ je *kut trenja*

Sila trenja i ravnoteža tijela - STATIKA

Da bi neko tijelo bilo u stanju statičke ravnoteže, **suma svih sila** koje djeluju na to tijelo mora biti jednaka nuli, što vrijedi i za **sumu svih momenata**. Dakle, nužan uvjet ravnoteže krutog tijela, prema prvom Newtonovom zakonu, glasi

$$\overrightarrow{F_R} = \vec{0} \ ;$$

$$\overrightarrow{M_R} = \vec{0}$$

$$\sum_i F_{ix} = 0, \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i F_{iz} = 0$$

$$\sum_i M_{ix} = 0, \sum_i M_{iy} = 0, \sum_i M_{iz} = 0$$

Ovih 6 jednadžbi se zovu jednadžbe ravnoteže i uvijek su linearno nezavisne.

Prve tri se zovu **jednadžbe sila**, a druge tri **jednadžbe momenata**

Automobil na kosini – Ravnoteža SILA uz prisutno trenje

- Uvjet ravnoteže:

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

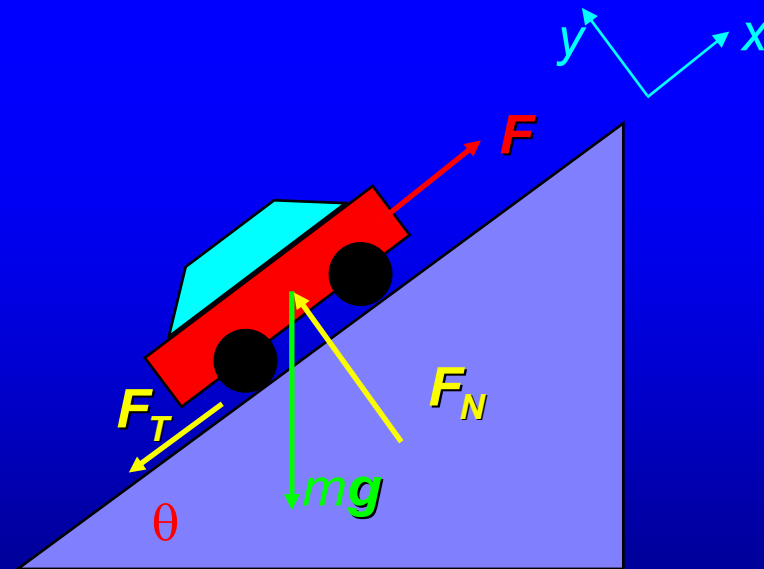
- Za x i y os vrijedi:

$$x: F - F_T = F - mg \sin \theta = 0$$

$$y: F_N - mg \cos \theta = 0$$

$$F_N = mg \cos \theta$$

$$F_T = mg \sin \theta$$



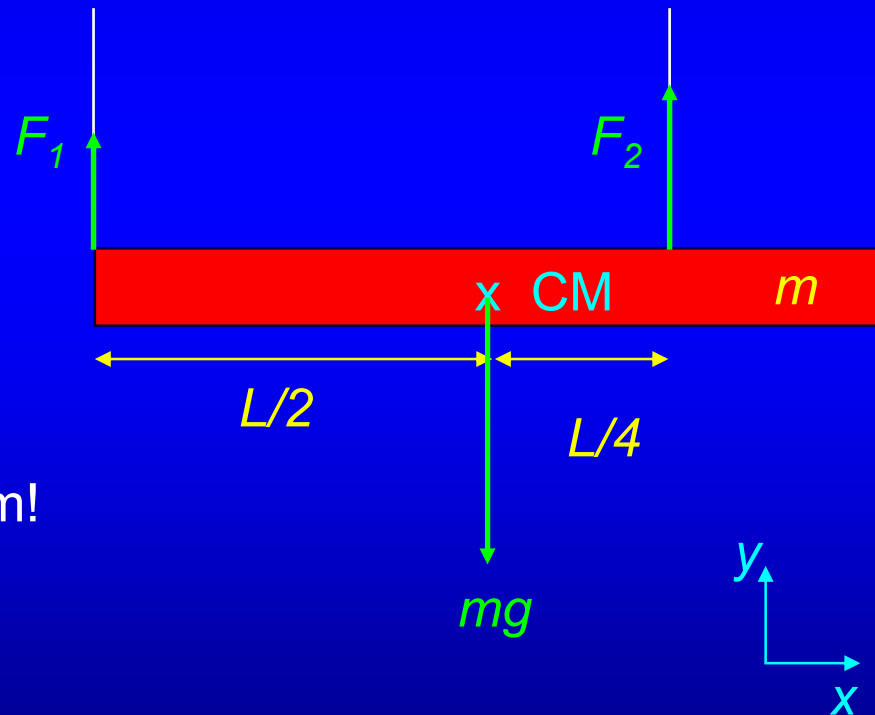
Statika – ravnoteža SILA i MOMENATA

- Greda mase m je obješena o dva užeta. Kolike su sile naprezanja u užadima:

- Prvi uvjet $\sum \mathbf{F} = 0$

$$F_1 + F_2 = mg \quad (1)$$

- Nije dovoljno da se riješi problem!
- Trebamo više informacija!!

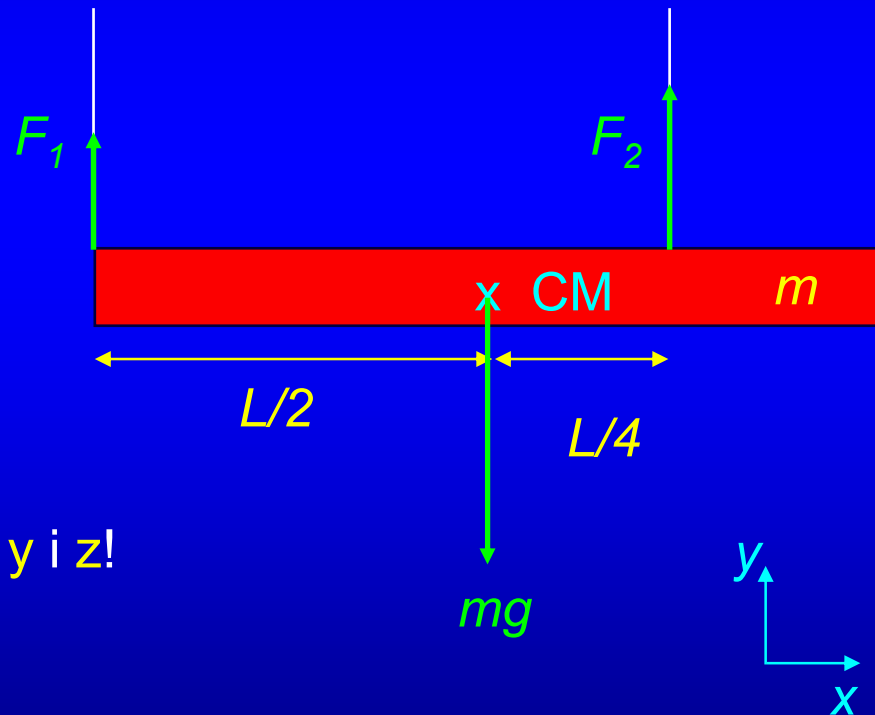


Statika – ravnoteža SILA i MOMENATA

- Mora se postaviti i jednačba momenata kao uvjet ravnoteže:
→ Sustav NE ROTIRA, nema istezanja u užetu (pretpostavka)!

$$\sum M = 0$$

- Suma momenta je nula, vrijedi za bilo koju os, x , y i z !



Statika – ravnoteža SILA i MOMENATA

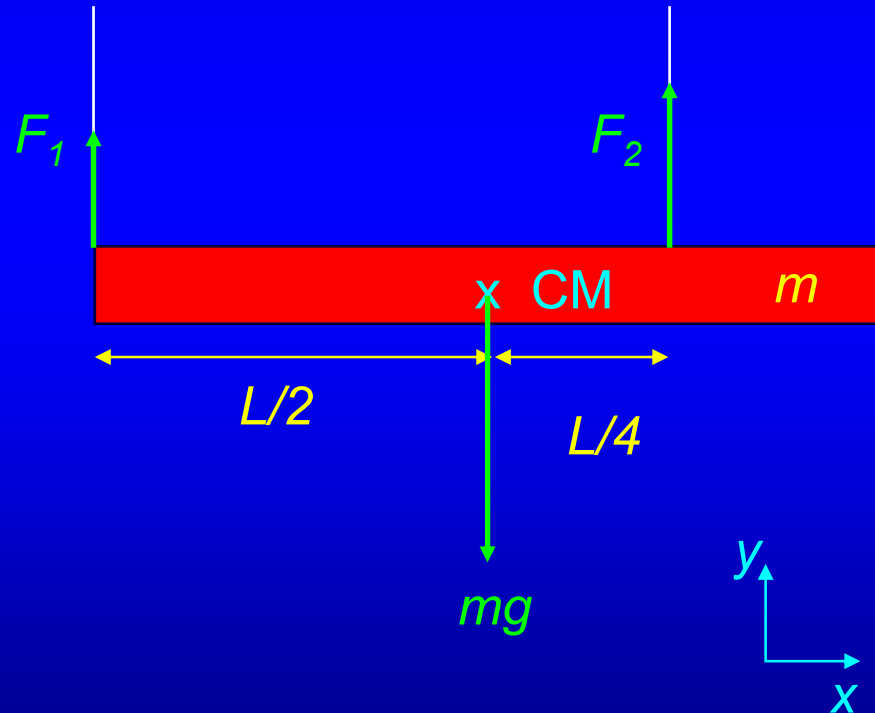
- Neka je izabrana rotacijska os z za koju treba postaviti jednačbu ravnoteže momenata

- Moment sile reakcije F_1 je

$$M_1 = -F_1 \frac{L}{2} \quad (2)$$

- Moment sile reakcije F_2 je :

$$M_2 = F_2 \frac{L}{4} \quad (3)$$



Sila gravitacije ne rezultira momentom oko CM

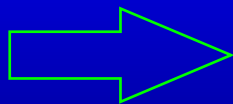
Statika – ravnoteža SILA i MOMENATA

- Suma momenata je nula 0:

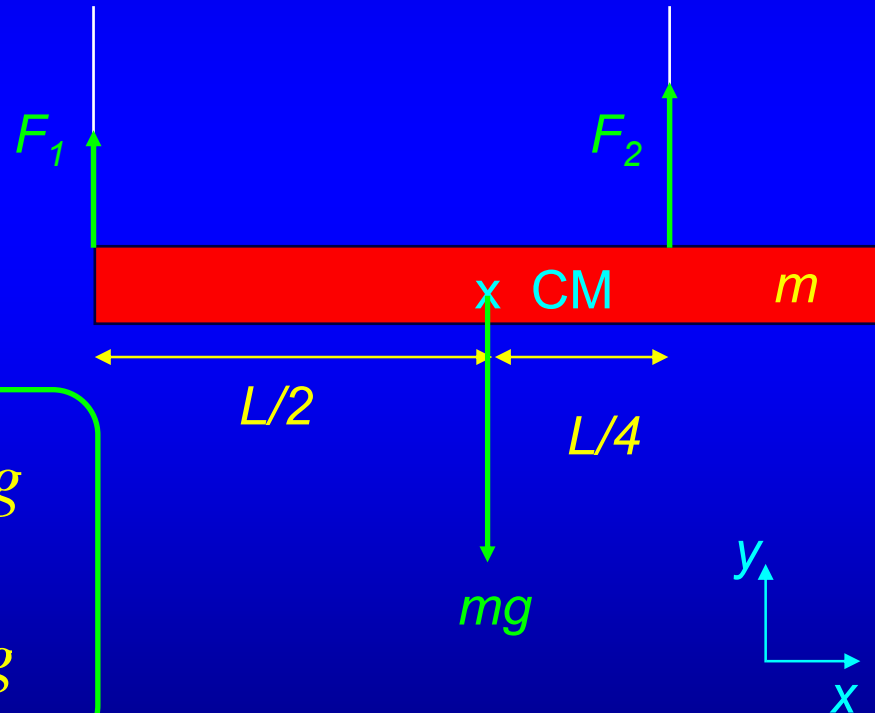
$$F_2 \frac{L}{4} - F_1 \frac{L}{2} = 0$$

$$F_2 = 2F_1 \quad (4)$$

Iz ravnoteže sila (1) i (4) se dobije se



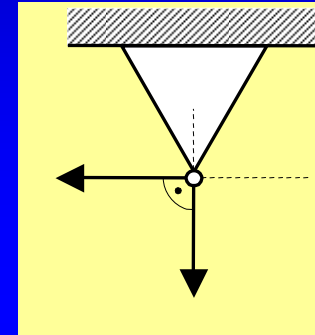
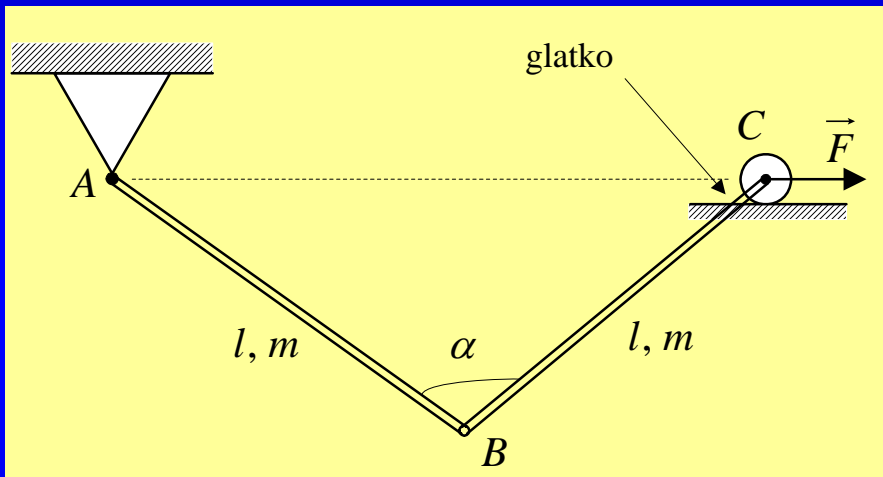
$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{3}mg \\ F_2 &= \frac{2}{3}mg \end{aligned}$$



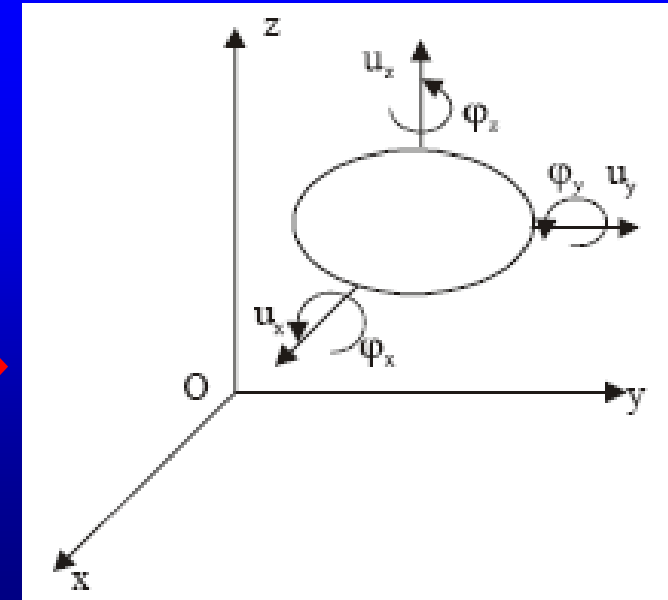
Sila trenja i ravnoteža tijela – STATIKA

Primjer

- Za sustav štapova prema slici, potrebno je definirati kut α za slučaj mirovanja (zadano je masa m i duljina štapa l , te vučna sila F)



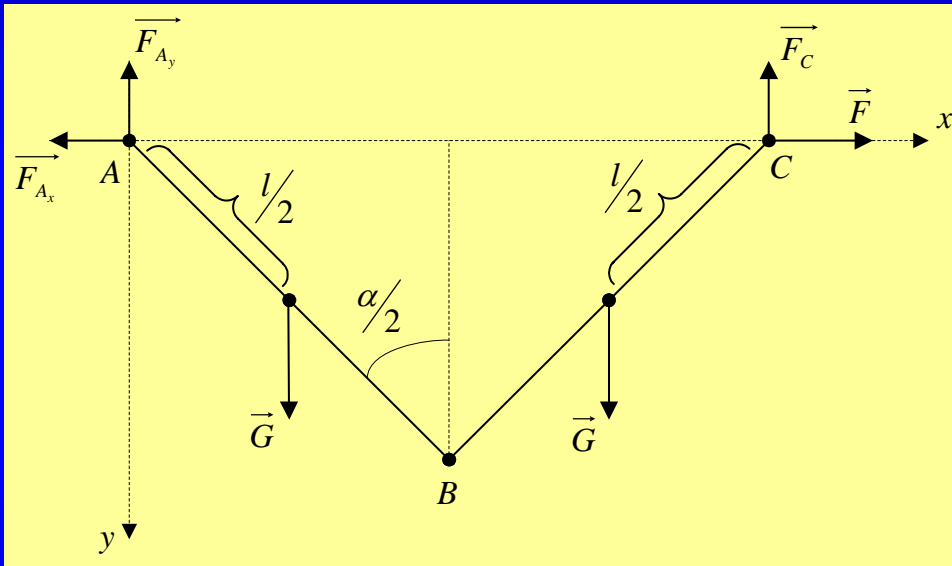
- Čvrsti oslonac A blokira dva stupnja slobode.
- Kruto tijelo u prostoru posjeduje šest stupnjeva slobode gibanja; tri stupnja slobode translacijskih gibanja paralelnih s osima koordinatnog sustava i tri stupnja slobode rotacijskih gibanja oko tih osi.



Sila trenja i ravnoteža tijela – STATIKA

Primjer

- Oslonac **A** može se zamijeniti s dvije sile reakcije i sustav prikazati u koordinatnom sustavu. Dobije se plan položaja (sila)



Pitanje: Da je točka C hrapava podloga, što bi trebalo napraviti u planu položaja?

- Sile **F** i **G** su aktivne sile, dok su sile F_{Ax} , F_{Ay} i F_C reakcije veza.
- U točki **C** je samo reakcija veze F_C jer je podloga glatka (to znači da nema otpora pa nema ni reakcije veze u smjeru gibanja oslonca

Sila trenja i ravnoteža tijela – STATIKA

Primjer

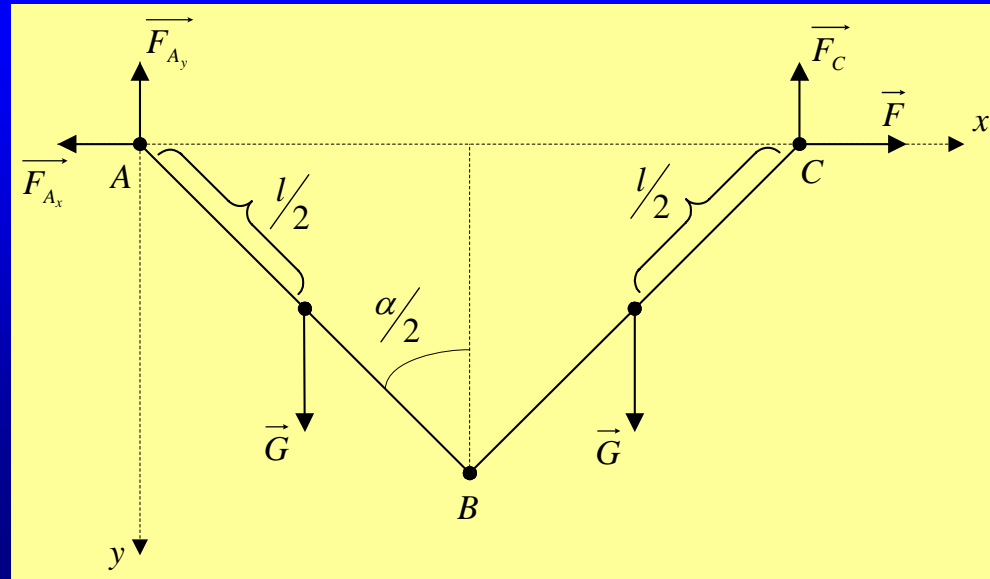
Postavljanjem jednadžbi ravnoteže dobije se

$$\sum F_x = 0 \quad -F_{Ax} + F = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad G + G - F_{Ay} - F_C = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \quad G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + G \cdot \frac{3 \cdot l}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - F_C \cdot 2 \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (3)$$

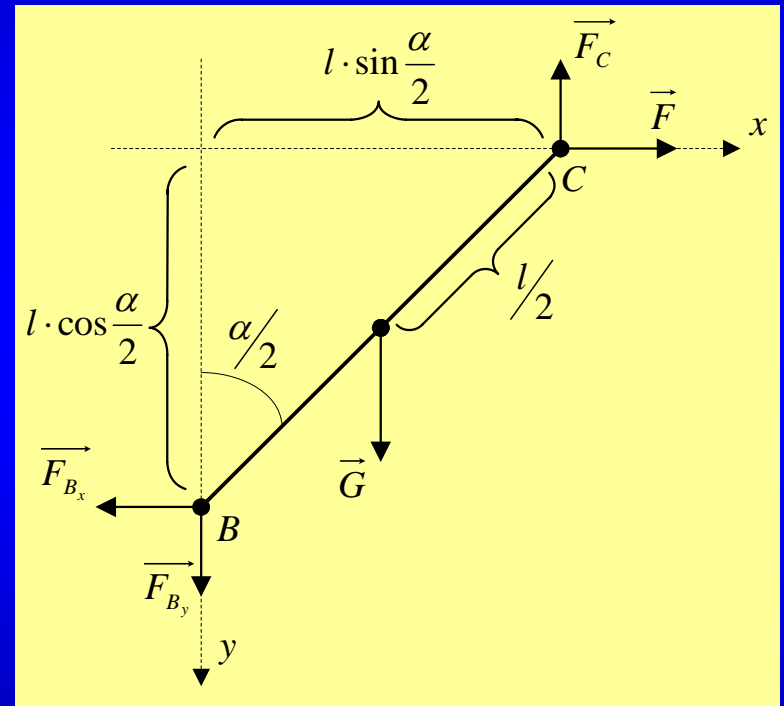
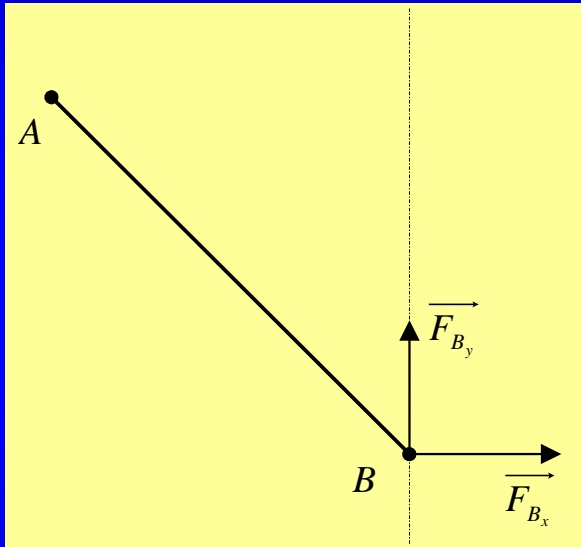
Sustav jednadžbi ima 3
jednadžbe, a 4 nepoznanice (F_{Ax} ,
 F_{Ay} , F_C , α).



Sila trenja i ravnoteža tijela – STATIKA

Primjer

Primjenjuje se princip reza tako da se uzme desni dio sustava i postave se jednačbe ravnoteže. Pri tome se za uvjet ravnoteže momenta uzme točka B.



Primjenjuje se **princip reza** tako da se uzme **desni dio sustava** i postave se jednačbe ravnoteže. Pri tome se za uvjet ravnoteže momenata uzme točka **B**. Sile reakcije F_{Bx} i F_{By} se u toj točki na lijevoj i desnoj strani **poništavaju!**

Sila trenja i ravnoteža tijela – STATIKA

Primjer

$$\sum F_x = 0 \quad F - F_{B_x} = 0 \quad (4)$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{B_y} + G - F_C = 0 \quad (5) \quad (6)$$

$$\sum M_B = 0 \quad F_C \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - F \cdot l \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

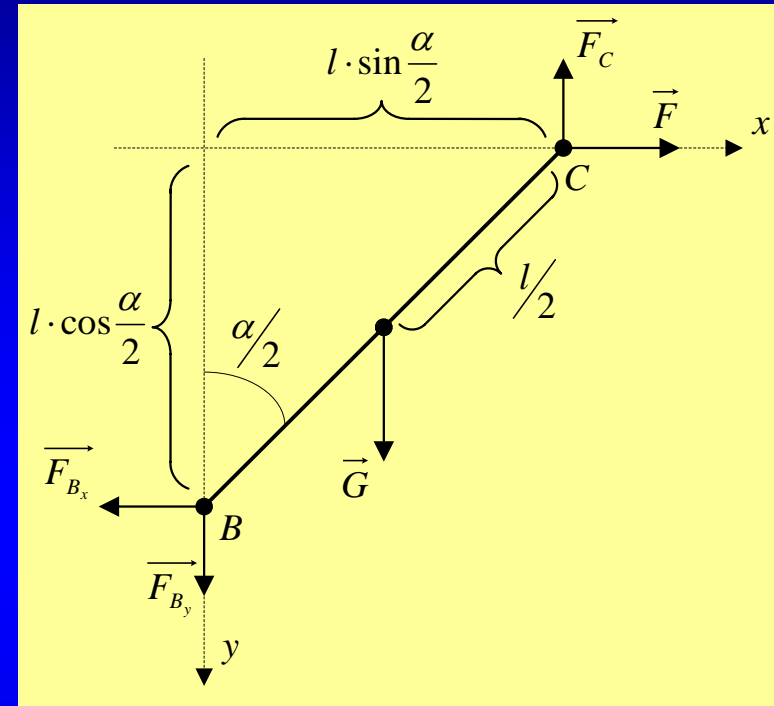
Iz izraza (3) se izračuna F_C

$$F_C \cdot 2 \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = G \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \cdot l$$

$$F_C = G \quad (7)$$

Uvrštavanjem izraza (7) u (6) dobije se

$$F_C \cdot l \cdot \sin \frac{\alpha}{2} - F \cdot l \cdot \cos \frac{\alpha}{2} - G \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 0$$

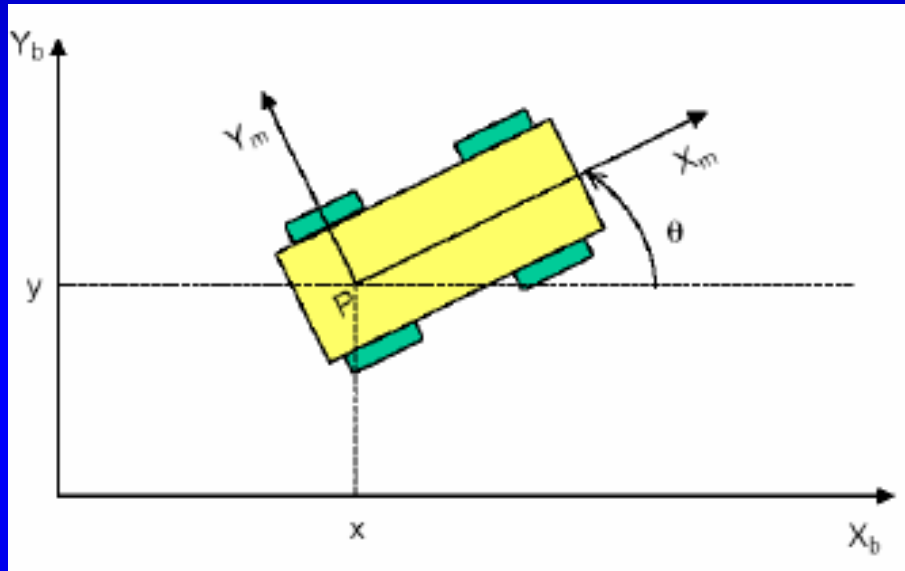


Sređivanjem se dobije

$$\alpha = 2 \cdot \arctg \left[\frac{2 \cdot F}{G} \right]$$

Stupnjevi slobode gibanja –PITANJE!

Koliko stupnjeva slobode ima mobilni robot na slici?



- a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

Točno navesti o kojim se stupnjevima slobode radi !!

LITERATURA

1. D. Horvat, *Fizika I, Mehanika i toplina*, Hinus, Zagreb, 2004.
2. O. Muftić, *Mehanika i statika*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.