

MEHANIKA

“Tehnička (Inženjerska) Mehanika”

Sadržaj današnjeg predavanja

- Definicija Mehanike i podjela
- Newtonovi zakoni
 - Osnovni zakoni mehanike
 - Sistem jedinica
 - Pretvorba između sustava jedinica
- 1-D Kinematika (pregled)
 - Srednje & trenutne vrijednosti brzina i ubrzanja
 - Problematika gibanja s konstantnim ubrzanjem

MEHANIKA

Isaac Newton (1643 - 1727) , napisao "*Principia Mathematica*"
1687. god. i predložio je 3 "zakona" gibanja



MEHANIKA

- **Mehanika** – grana prirodnih znanosti (grč, *mēchanē*, naprava, stroj)
- Proučava gibanje, zakone kretanja, te uzajamno mehaničko djelovanje materijalnih čestica
- Temelji se opažanju, iskustvima, pokusima i na teoriji
- Pojmom “mehanika” ovdje će se podrazumijevati u stvari *tehnička mehanika*, koja se kao zasebna disciplina mehanike koristi u praktičnom rješavanju inženjerskih problema.
- Ovdje će se uglavnom izučavati onaj dio mehanike koji se bavi proučavanjem krutih tijela (pored mehanike deformabilnih tijela i mehanike fluida). U skladu s tim, mehanika krutih tijela se dijeli na :
 - **statiku**
 - **dinamiku**

MEHANIKA

- **Statika** je dio mehanike koji *proučava kruta tijela, odnosno čestice u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja*, tj. *proučava uvjet ravnoteže tijela*. Za tijelo se kaže da miruje ako ima nepromjenjive koordinate s obzirom na izabrani referentni sustav. Često se statika naziva *geometrijom sila*.
- **Dinamika** (grč. *dynamis* = **sila**) *proučava uzroke gibanja, utjecaj sile i mase na gibanje*. Za razliku od kinematike, *dinamika daje fizikalnu bit gibanja*.
- **Kinematika** (grč. *kinema* = **gibanje**) *proučava gibanje, bez obzira na uzroke gibanja i na svojstva tijela koja se gibaju*, tj. *ne uzima u obzir njihovu masu i sile što djeluju na njih*. Ona gibanje tretira matematički, te određuje položaj, brzinu i akceleraciju tijela ovisno o vremenu.
- Pojmom “mehanika” ovdje će se podrazumijevati u stvari *tehnička mehanika*, koja se kao zasebna disciplina mehanike koristi u praktičnom rješavanju inženjerskih problema.

MEHANIKA – Newtonovi zakoni

No. 1. Zakon ustaljenosti (tromosti, inercije). *“Tijelo ostaje u stanju mirovanja ili ostaje u stanju jednolikog gibanja po pravcu, sve dok se pod djelovanjem vanjskih sila to stanje ne promijeni”*

No. 2. Opisuje ponašanje tijela kada na njega djeluje vanjska sila f . *“Ubrzanje tijela razmjerno je sili i ima smjer djelovanja sile, tj. sila je jednaka promjeni količine gibanja.”*

$$f = \frac{d}{dt}(Mv) = M \frac{dv}{dt} + v \frac{dM}{dt} = Ma + v \frac{dM}{dt}$$

Translacijsko
gibanje

Promjena količine gibanja moguća je ili promjenom brzine gibanja ili promjenom mase u gibanju (npr., centrifugalni mehanizmi, manipulatori, roboti)

$$m = \frac{d}{dt}(J\omega) = J \frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{dJ}{dt} = J\alpha + \omega \frac{dJ}{dt}$$

Rotacijsko
gibanje

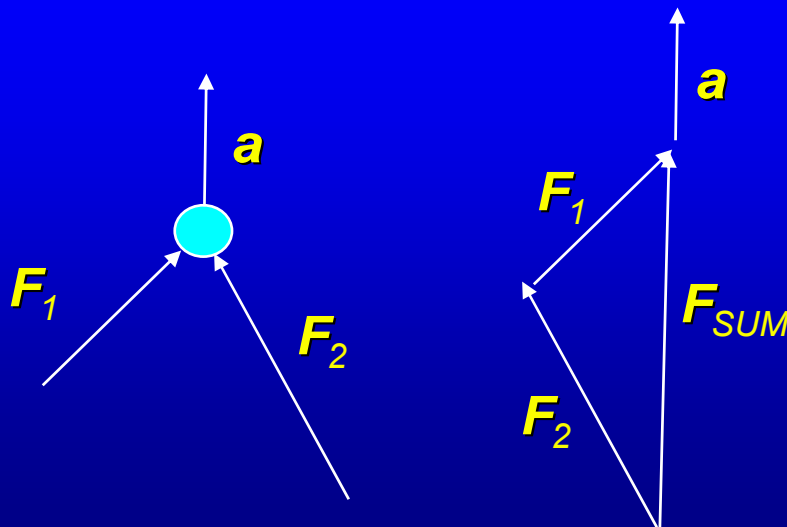
MEHANIKA – Newtonovi zakoni

Budući da je u većini slučajeva **masa** tijela koji se giba konstantna, vrijedi pojednostavljena formula za 2. Newtonov zakon

$$f = \frac{d}{dt}(Mv) = M \frac{dv}{dt} = Ma$$

$$m = \frac{d}{dt}(J\omega) = J \frac{d\omega}{dt} = J\alpha$$

Iznos ubrzanja pod djelovanjem sile je **proporcionalan sili** (definicija “**sile**”) a koeficijent proporcionalnosti je određen **masom** (definicija “**mase**”)

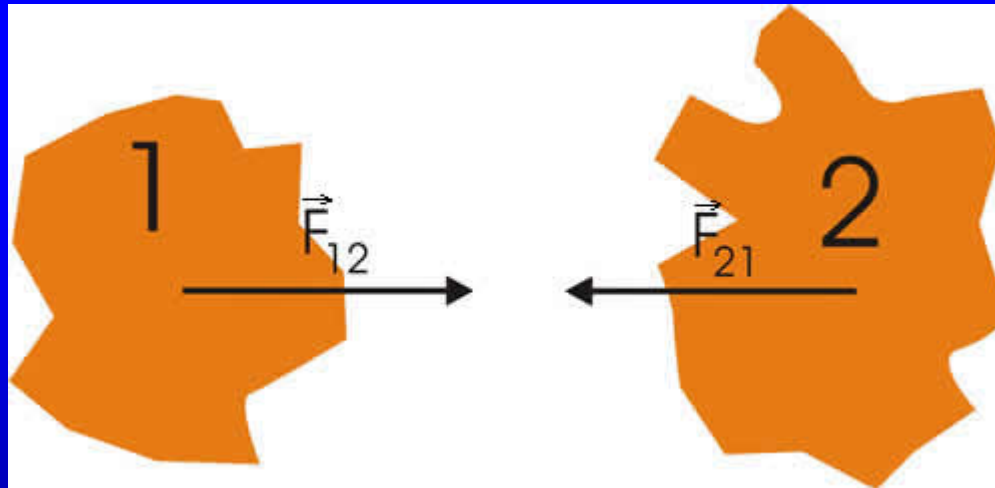


Primjer:

$$F_{SUM} = ma$$

MEHANIKA – Newtonovi zakoni

No. 3. Zakon *akcije* i *reakcije*. Svaka sila koja djeluje na neko tijelo izaziva suprotno usmjerenu silu jednakog iznosa. Ovaj zakon je ujedno i temelj *načela izolacije tijela*, koji će biti uveden i analiziran u jednom od narednih poglavlja

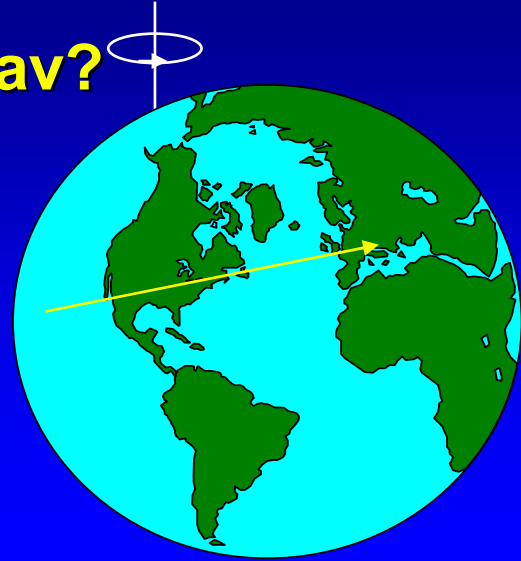


$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Newtonov 1. zakon – napomena !!!!

- “Tijelo ostaje u stanju mirovanja ili ostaje u stanju jednolikog gibanja po pravcu, sve dok se pod djelovanjem vanjskih sila to stanje ne promijeni” . To vrijedi ako se promatrani sustav nalazi u inercijalnom referentnom sustavu (*inertial reference frame*).
 - Nema sile, nema ubrzanja !!
- Što je inercijalni (referentni) sustav (IRS)?
 - IRS je referentni sustav koji ne ubrzava (niti rotira) u odnosu na apsolutni inercijalni sustav, sustav “fiksni zvijezda”.
 - Ako IRS postoji, onda je definiran proizvoljnim konstantnim vektorom brzine! (nema ubrzanja !)

Da li je Hrvatska dobar Inercijalni sustav?



- Da li Hrvatska ubrzava?
- Da!
 - Hrvatska je na planeti Zemlji.
 - Zemlja rotira s periodom T .

- Kolika je centripetalna akceleracija Hrvatske?

$$a_H = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 R$$

➤ $T = 1 \text{ day} = 8.64 \times 10^4 \text{ sec}$,

➤ $R \sim R_E = 6.4 \times 10^6 \text{ meters}$.

- Izračun: $a_H = .034 \text{ m/s}^2$
- Blizu 0, može se zanemariti !
- Hrvatska je prilično dobar inercijalni sustav.

Jedinice...

- **SI (Système International) Jedinice:**
- **Europske jedinice**
 - **mks:** **L** = metar (m), **M** = kilogram (kg), **T** = sekunda (s)
 - **cgs:** **L** = centimetar (cm), **M** = gram (g), **T** = sekunda (s)
- **Engleske jedinice:**
 - Inch (In), feet (ft) mile (mile), pound (p),...
- Uglavnom se koristi europski SI (internacionalni) sustav jedinica. Međutim, ponekad se može pojaviti i engleski sustav jedinica (dobro je znati koeficijente pretvorbe !)

Pretvorba (konverzija) između različitih sustava jedinica

- Neki često korišteni faktori pretvorbe:

- 1 inch (in) = 2.54 cm

- 1 m = 3.28 ft

- 1 mile (mi) = 5280 ft

- 1 mile (mi) = 1.61 km

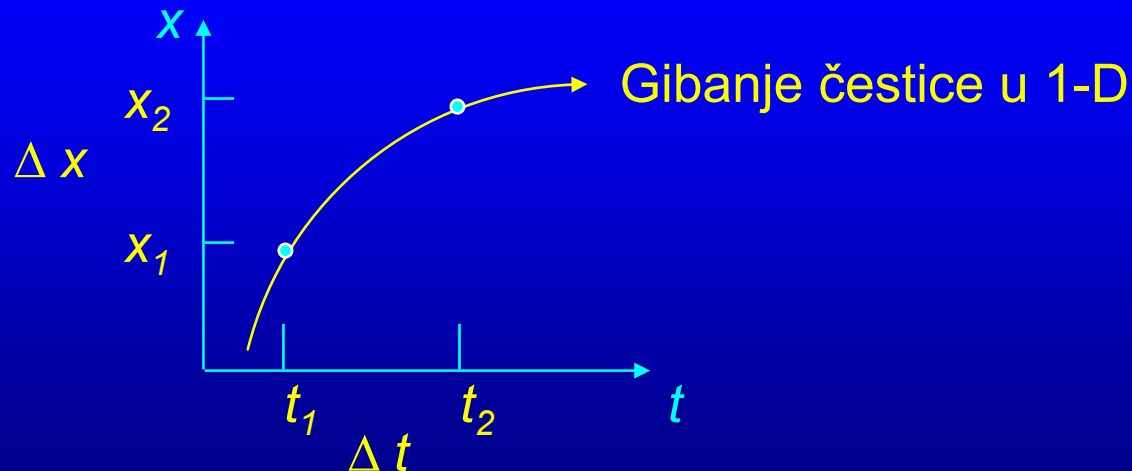
- Primjer: pretvorba *milje po satu* u *metar u sekundi*:

$$1 \frac{\text{mi}}{\text{h}} = 1 \frac{\text{mi}}{\text{h}} \times 5280 \frac{\text{ft}}{\text{mi}} \times \frac{1}{3.28} \frac{\text{m}}{\text{ft}} \times \frac{1}{3600} \frac{\text{h}}{\text{s}} = 0.447 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Gibanje u 1 D

- U 1-D, pozicija se često označava s $x(t)$.
- Načinjeni pomak u vremenu $\Delta t = t_2 - t_1$ iznosi

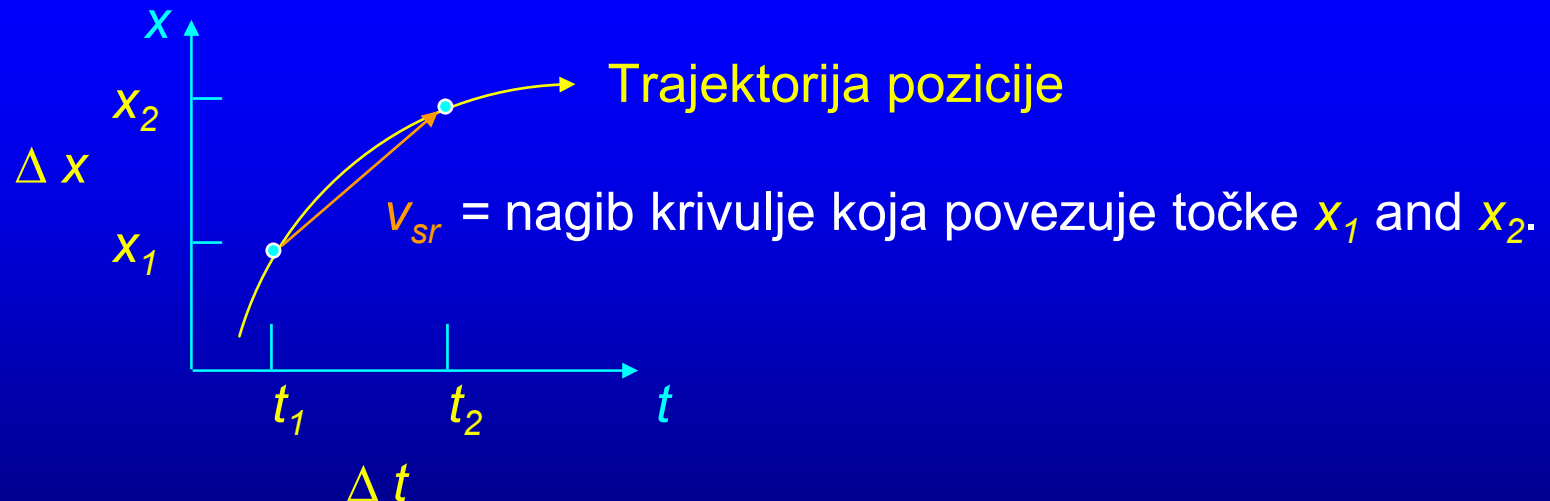
$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$$



1-D kinematika...

- Brzina v se definira kao “promjena pozicije”
- Srednja vrijednost brzine v_{sr} u vremenu $\Delta t = t_2 - t_1$ je:

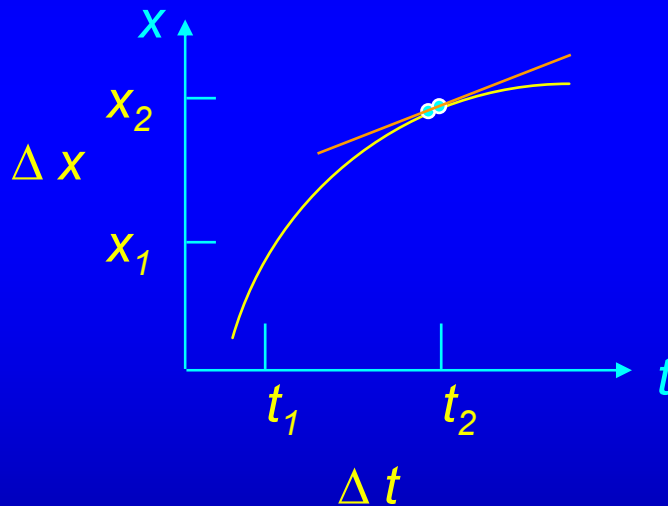
$$v_{sr} \equiv \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



1-D kinematika...

- Postavimo da $t_1 \rightarrow t_2$
- **Trenutna** vrijednost brzine v je definirana kao:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$



Dakle $v(t_2)$ = nagib tangente povučene u točki t_2 .

1-D kinematika...

- Ubrzanje **a** je “iznos promjene brzine u određenom vremenu”
- Srednja vrijednost ubrzanja **a_{sr}** u vremenu $\Delta t = t_2 - t_1$ iznosi:

$$a_{sr} \equiv \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- Trenutna vrijednost ubrzanja **a** dobije se iz trajektorije brzine kao:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

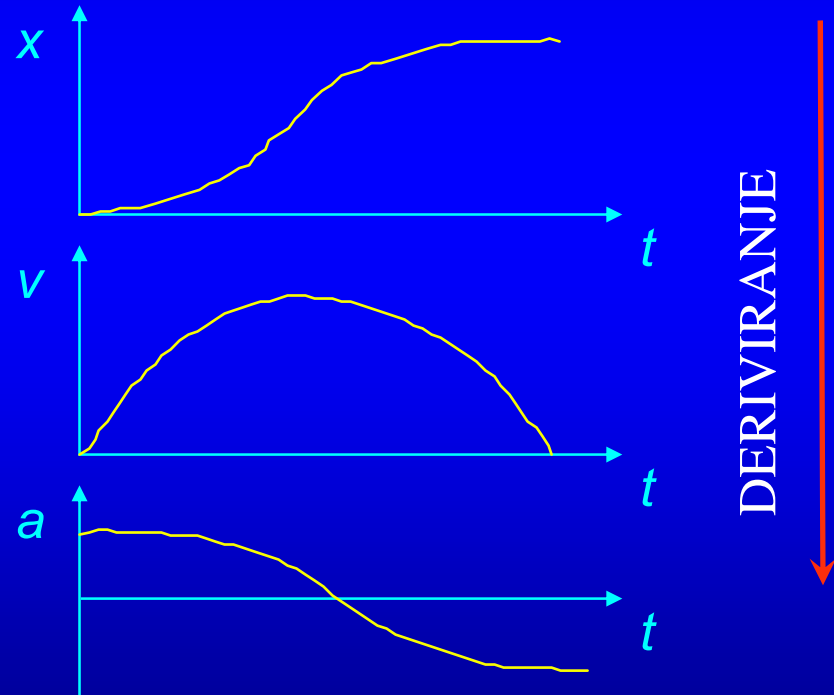
Koristi se izraz $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$



Rekapitulacija !!!

- Ako je pozicija x definirana kao funkcija vremena, onda se **uzastopnim deriviranjem** može odrediti brzina v i ubrzanje a kao funkcije vremena!

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\v &= \frac{dx}{dt} \\a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\end{aligned}$$

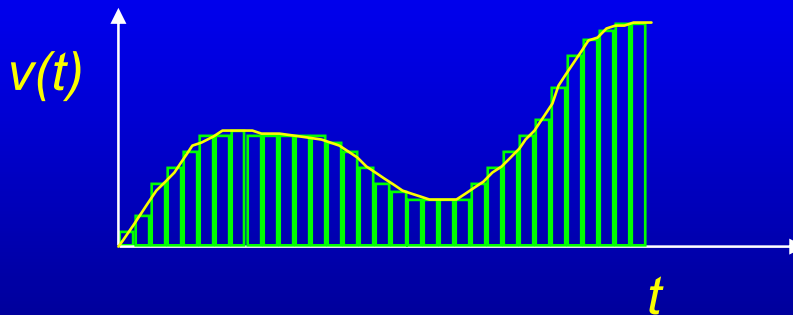


Još 1-D kinematike

- Polazi se od izraza $v = dx / dt$
- Ako je poznata trajektorija brzine $v(t)$, onda se (grafičkim) integriranjem izraza $dx = v dt$, dobije:

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

- Grafičko integriranje se postiže zbrajanjem malih pravokutnika ispod trajektorije brzine, kao što se vidi na slici



$$\Delta + \Delta + \dots + \Delta$$

= pomak, pozicija

1-D gibanje s konstantnim ubrzanjem

- Podsjetnik

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + \text{const}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

- Ako je $a = \text{konst}$, jednostavnim postupkom integriranja dobije se

$$v = \int a dt = a \int dt = at + v_0$$

- Integriranjem dobivenog izraza za brzinu, dobije se pozicija (pomak)

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$x = \int v dt = \int (at + v_0) dt = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0$$

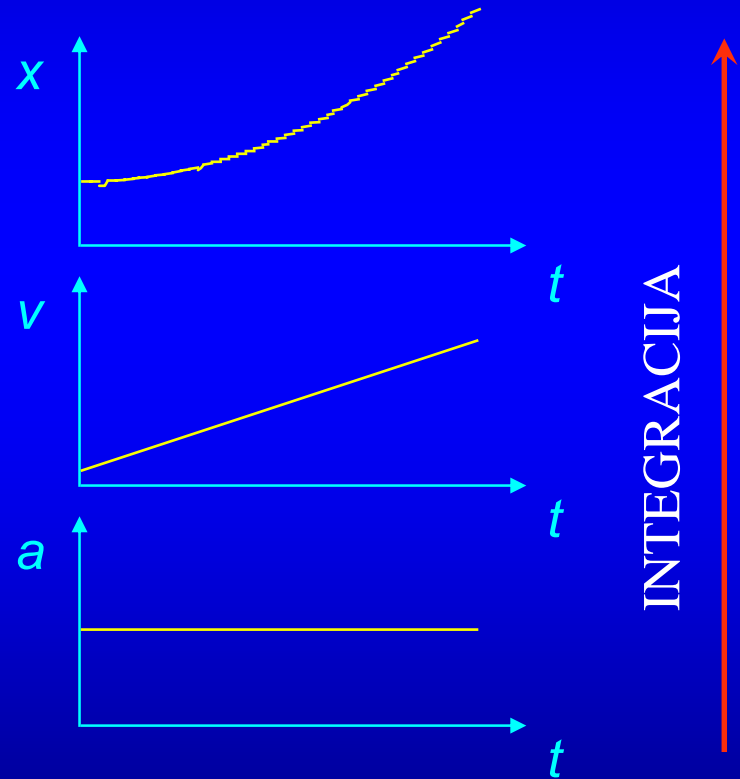
Rekapitulacija

- Uz konstantno ubrzanje dobije se:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = v_0 + a t$$

$$a = \text{const}$$



Test

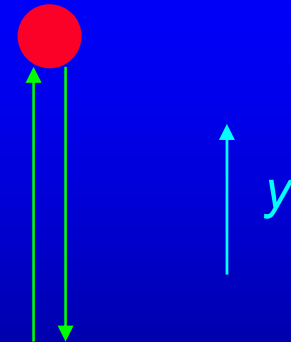
Gibanje (u vis) u 1D

- Ako se baci kugla u vis, koja tvrdnja vrijedi za brzinu v i ubrzanje a u najvišoj točki?

(a) $v = 0$, $a = 0$.

(b) $v \neq 0$, , $a = 0$.

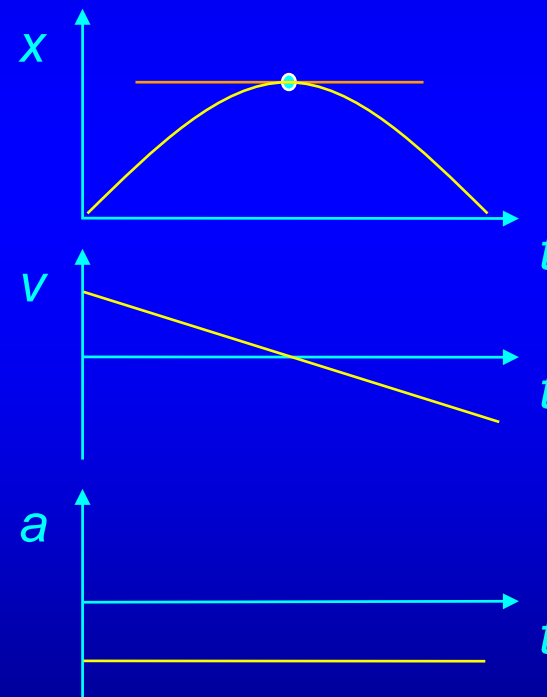
(c) $v = 0$, , $a \neq 0$.



Rješenje

Gibanje (u vis) u 1D

- Ako gibanje u vis definiramo pozitivnom brzinom v onda je ubrzanje a negativno. Pri maksimalno dosegnutoj visini, trenutna brzina je 0 .
- Budući da se brzina mijenja kontinuirano, mora postojati neko ubrzanje.
 - U stvari ubrzanje je uzrokovano gravitacijom ($g = 9.81 \text{ m/s}^2$).
- Odgovor je (c) $v = 0$, $a \neq 0$.



Korisni izrazi: 1-D gibanje s konstantnim ubrzanjem

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a \quad (1) \qquad v = v_0 + at \quad (2) \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$

- Iz (2) vrijedi : $t = \frac{v - v_0}{a} \quad (4)$

- Iz (4) u (3) slijedi: $x = x_0 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2}a \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \quad (5)$

- Sređivanjem (5) :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Rekapitulacija:

- Za gibanje s konstantnim ubrzanjem u 1-D vrijedi:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\v &= v_0 + a t \\a &= \text{const}\end{aligned}\tag{1}$$

- Iz (1) slijedi odnos između brzine i prijeđenog puta uz konstantno ubrzanje:

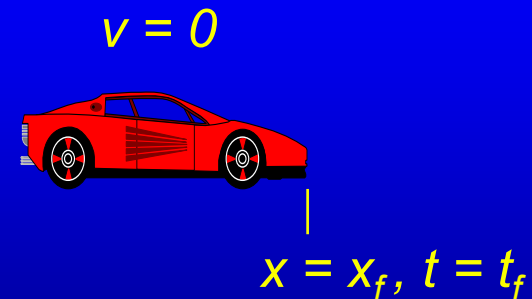
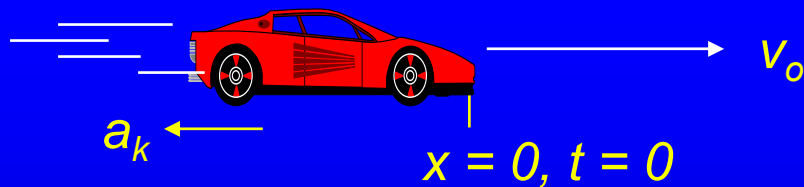
$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

Natuknice za rješavanje zadataka:

- Čitaj pažljivo!
 - Prije nego počneš rješavati problem koncentriraj se na tvrdnje u zadatku. Moraš biti siguran da shvaćaš informacije koje ti se daju, što se od tebe zahtijeva, i značenje svih tvrdnji koje se navode u zadatku.
- Postavi “matematiku” za svoj zadatak
 - Uvedi simbole (oznake) za veličine koje koristiš u zadatku
 - Ne uvodi bročane vrijednosti sve do samoga kraja zadatka
- Pažljivo kontroliraj jedinice, one će ti ukazati na eventualnu pogrešku !
 - Uvijek provjeri mjernu jedinicu za rješenje, ne gubi je iz vida u cijelom postupku računanja.
- Vodi računa o ograničenjima u postupku računanja !
 - Ako koristiš općenite formule, postavljeni zadatak ima neke specifičnosti i predstavlja samo inačicu poopćene formule (npr početni uvjet=0, ubrzanje konstantno,...).

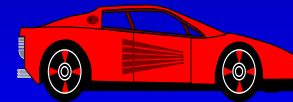
Problem 1...

- Automobil vozi s početnom brzinom v_0 . U $t = 0$, vozač aktivira kočnice, usporavajući automobil konstantnim usporanjem (negativno ubrzanje) a_k . Za koje vrijeme t_f će automobil stati i koliko će iznositi zaustavni put x_f ?



Rješenje Problema 1...

- Poznato je: $v = v_0 + at$



- Vrijedi $a = -a_k$
- Također vrijedi da nakon vremena $t = t_f$ brzina iznosi $v = 0$, pa vrijedi :

$0 = v_0 - a_k t_f$, pa se dobije

$$t_f = v_0 / a_k$$

Rješenje Problema 1...

- Za određivanje dužine kočenja koristi se izraz:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (1)$$

- U našem slučaju vrijedi $v = v_f = 0$, $x_0 = 0$ i $x = x_f$ (2)
- Uvrštenjem (2) u (1) i uz $a = -a_k$, dobije se

$$-v_0^2 = 2(-a_k)x_f \quad (3)$$

- Iz (3) slijedi:

$$x_f = \frac{v_0^2}{2a_k}$$

Rješenje Problema 1. - Numerički primjer

- Izračunato je $t_f = \frac{v_0}{a_k}, \quad x_f = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a_k}$
 - Pretpostavimo $v_0 = 65 \text{ mi/h} = 29 \text{ m/s} = 104,4 \text{ km/h}$
 - Pretpostavimo $a_k = g = 9.81 \text{ m/s}^2$
- Rezultat je $t_f = 3 \text{ s}$ and $x_f = 43 \text{ m}$

Pojam sile i mase

- Za svako tijelo vrijedi, $F_{sum} = \Sigma F = ma$.
 - Dijelom definirano u prethodnom izlaganju
 - Ubrzanje a tijela na koju djeluju sile je proporcionalno **rezultantnoj sili** svih sila koje djeluju na to tijelo.
 - Konstanta proporcionalnosti se zove “**masa**” i označava s m .
 - **Masa** tijela je svojstvo tog tijela, i neovisna je o bilo kakvim vanjskim utjecajima.
 - **Sila** je upravo jedan od vanjskih utjecaja. Kada npr. gravitacijska sila djeluje na masu, dobije se nova varijabla, **težina**.
 - **Ubrzanje** je rezultat interakcije ova dva pojma (sile i mase)
- Sila ima jedinicu $[M] \times [L / T^2] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (Newton)

Primjer gravitacijske sile:

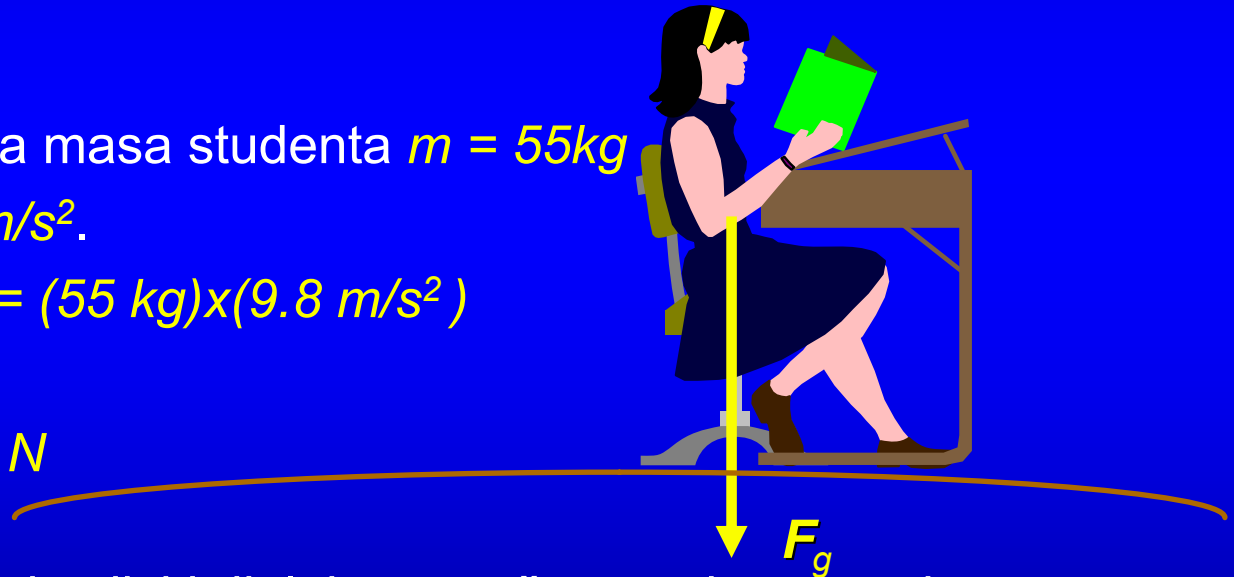
- Koliko iznosi sila Zemlje kojom djeluje na tipičnog studenta Elektrotehnike?

➤ Prosječna masa studenta $m = 55\text{kg}$

➤ $g = 9.8\text{ m/s}^2$.

➤ $F_g = mg = (55\text{ kg}) \times (9.8\text{ m/s}^2)$

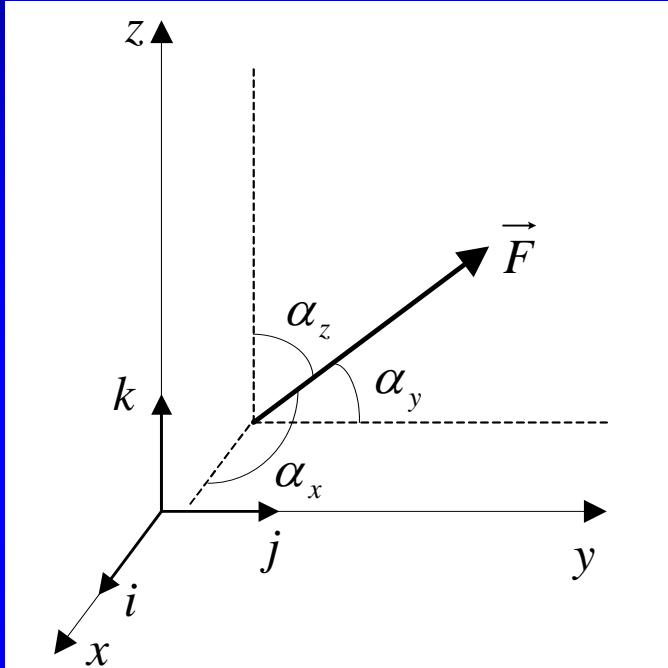
➤ $F_g = 539\text{ N}$



- Sila koja gravitacijski djeluje na našeg studenta naziva se *težina*

Pojam sile i mase

- Komponente sile $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ u trodimenzionalnom sustavu :



$$F_x = ma_x$$

$$F_y = ma_y$$

$$F_z = ma_z$$

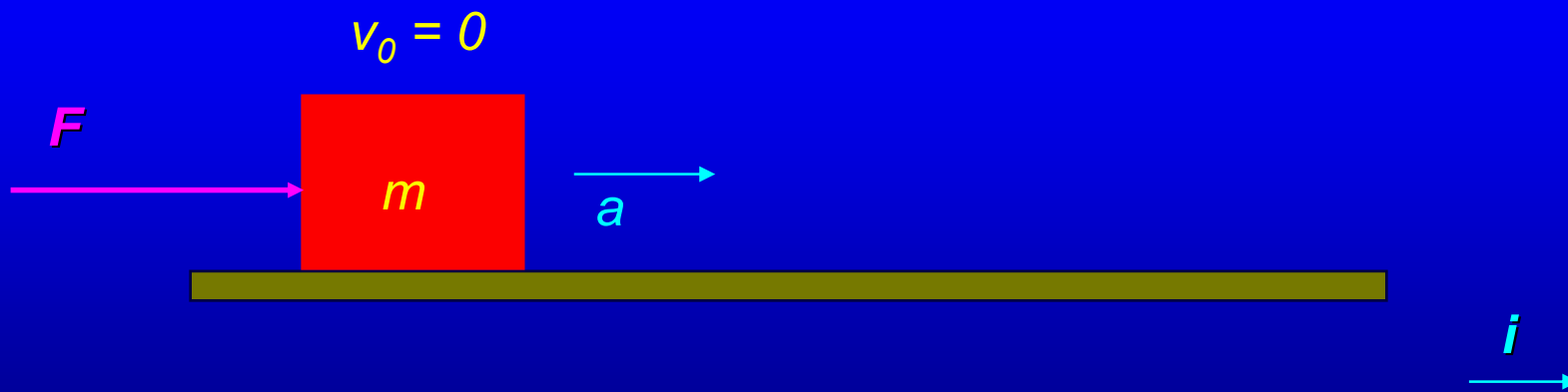
- Ako je poznato m i F_x , može se izračunati a_x i primijeniti u 1 D kinematičkim problemima: (položaj i brzina pri $a=\text{konst}$)

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

Primjer za 2. Newtonov zakon: djelovanje *sile* F na *masu* m na podlozi bez trenja

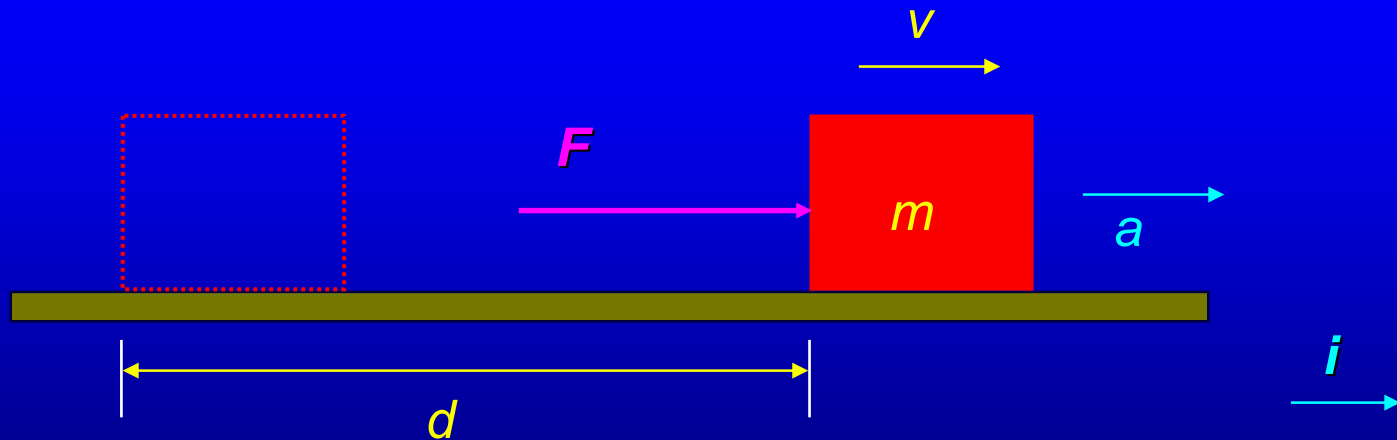
- Sila F djeluje na masu ($m = 100 \text{ kg}$) koja se nalazi na horizontalnoj podlozi. Iznos sile je 50 N smjera prikazanog na slici. Ako gibanje počinje iz mirovanja, kolika će biti brzina gibanja v nakon pređenog puta $d = 10 \text{ m}$?



Primjer za 2. Newtonov zakon: djelovanje **sile F** na **masu m** na podlozi bez trenja

- Sila F djeluje na masu ($m = 100 \text{ kg}$) koja se nalazi na horizontalnoj podlozi. Iznos sile je 50 N smjera prikazanog na slici. Ako gibanje počinje iz mirovanja, kolika će biti brzina gibanja v nakon pređenog puta $d = 10 \text{ m}$?

Položaj mase m Nakon pređenog puta d



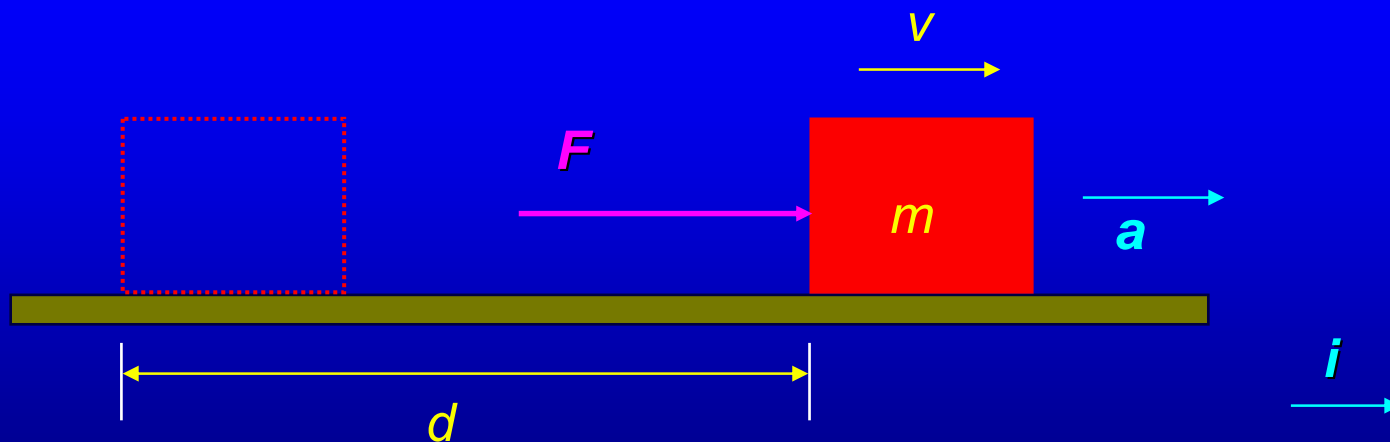
Rješenje primjera 2. Newtonov zakon: djelovanje **sile F** na **masu m** na podlozi bez trenja

- Polazna tvrdnja **$F = ma$** .

➤ **$a = F / m$** .

➤ Uz poznati nam izraz $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ slijedi

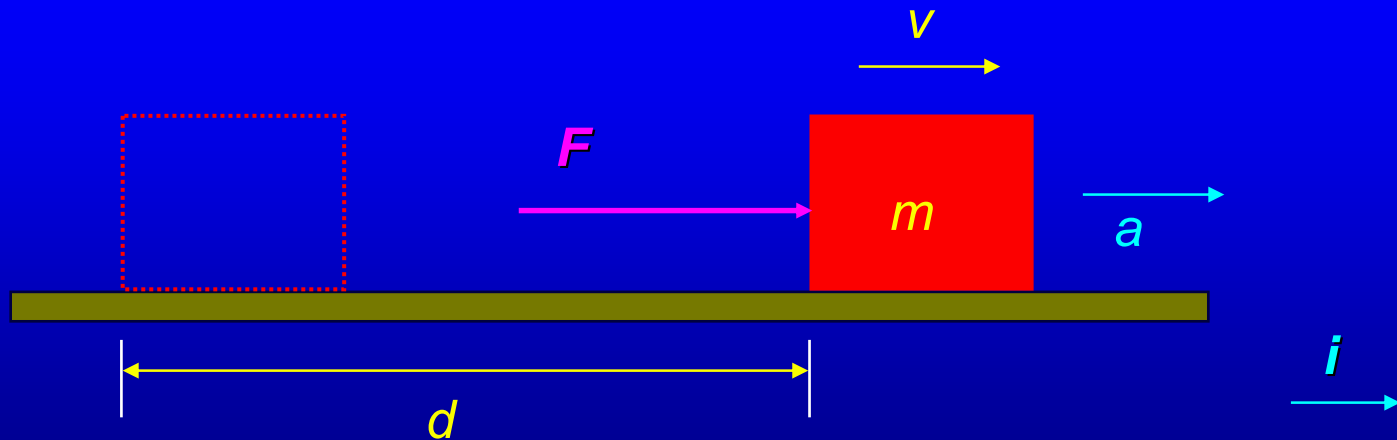
➤ $v^2 = 2Fd / m$ $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$



Primjer za 2. Djelovanje sile F na masu m na podlozi bez trenja – Rješenje s podacima

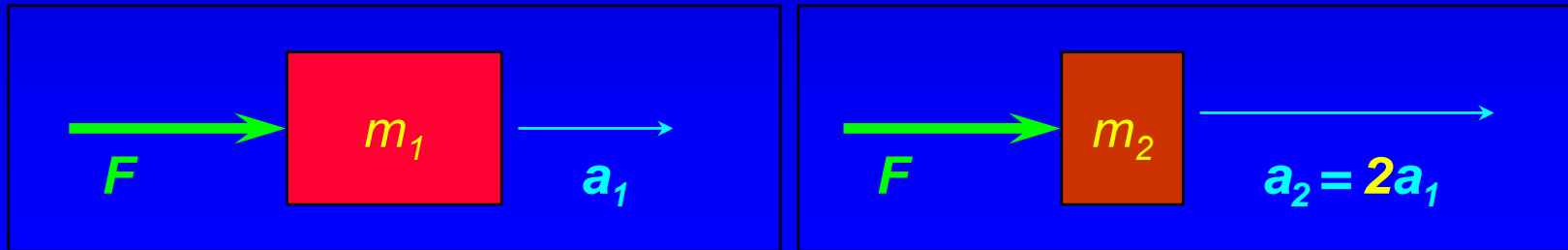
$$v = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}$$

- Poznato: $F = 50 \text{ N}$, $d = 10 \text{ m}$, $m = 100 \text{ kg}$:
 - Izračunato $v = 3.2 \text{ m/s}$.

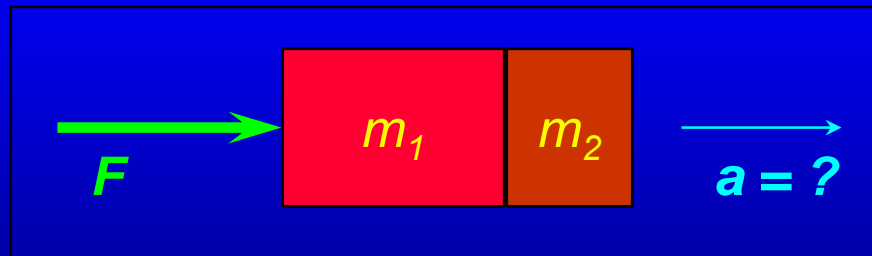


Primjer 3: Sila i ubrzanje

- Sila F djeluje na masu m_1 i rezultira s ubrzanjem mase a_1 .
Ista sila djeluje na drugu masu m_2 ubrzavajući je s $a_2 = 2a_1$.



- Ako su m_1 and m_2 spojene zajedno i ista sila F djeluje na njih,
Koliko iznosi rezultatno ubrzanje?

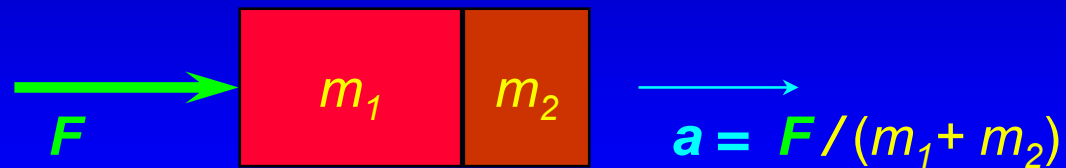


(a) $\frac{2}{3} a_1$

(b) $\frac{3}{2} a_1$

(c) $\frac{3}{4} a_1$

Rješenje primjera 3: Sila i ubrzanje



- Budući je $a_2 = 2a_1$ uz istu silu F , $m_2 = (1/2)m_1$!

➤ $m_1 + m_2 = 3m_1/2$

- Ubrzanje je $a = (2/3)F / m_1$ ➡ uz $F/m_1 = a_1$

➡ $a = 2/3 a_1$

(a) $2/3 a_1$

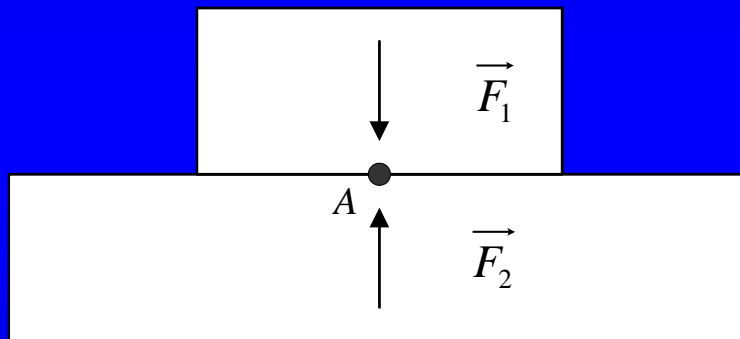
(b) $3/2 a_1$

(c) $3/4 a_1$

Vrste sila

- Promatraju se dvije vrste sila:

➤ **Kontaktne sile:** Međusobno se dodiruju. Bilo koji predmet na stolu djeluje na stol gravitacijskom silom, dok stol na njega djeluje silom istog iznosa, ali suprotnog smjera. (treći Newtonov zakon). Ove dvije sile su u međusobnom dodiru u točki A

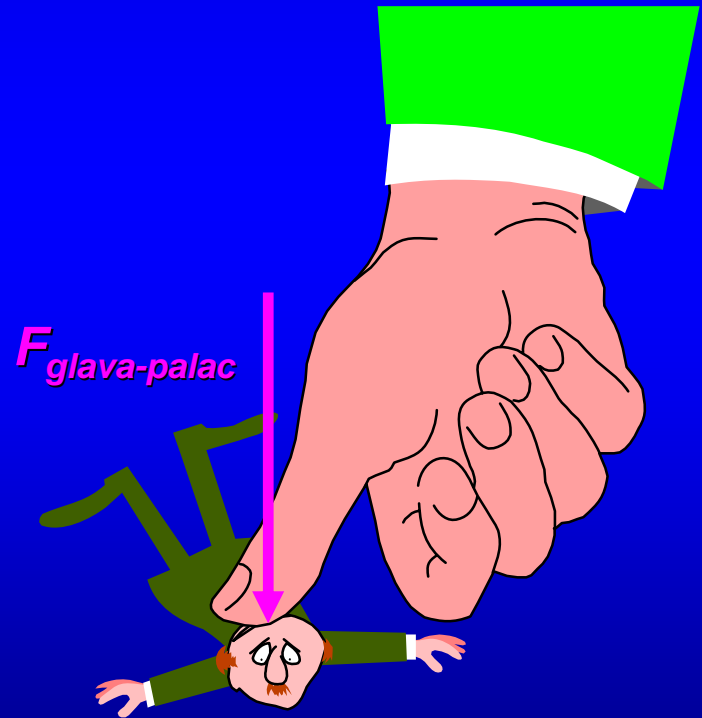


Sl.1.

➤ **Bezkontaktne (primjer):**

Gravitacijska

Električna



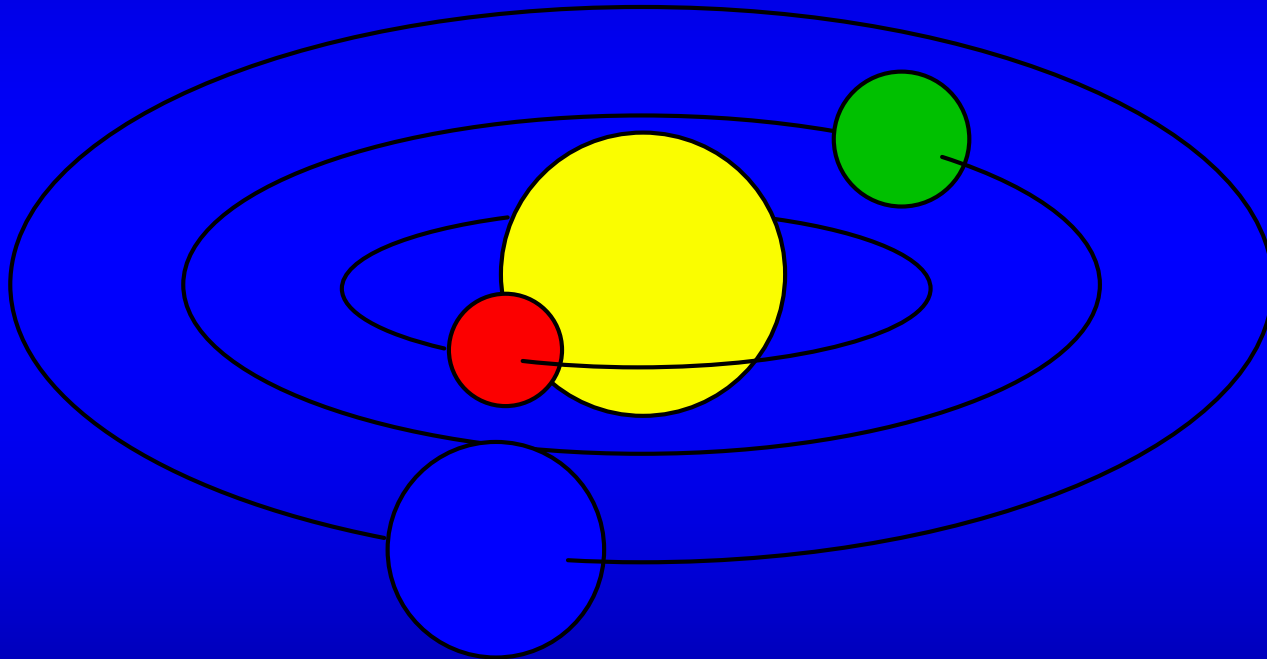
Sl.2.

Primjer kontaktnih sila

- Normalna sila na neki objekt u kontaktu s površinom
- Sila u užetu s ovješnim teretom
- Sila opruge
- Sudar dva objekta u gibanju (npr. Bilijarske kugle)

Djelovanje sile (bez kontakta)

- Gravitacijska sila:

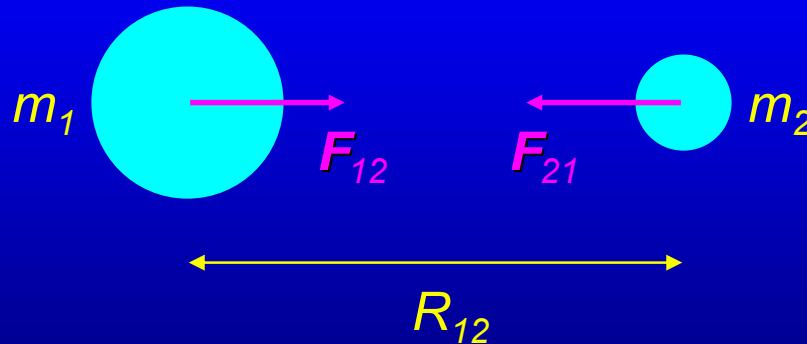


Gravitacijska sila

- Iznos gravitacijske sile \mathbf{F}_{12} kojom objekt mase m_1 utječe na drugi objekt mase m_2 na razmaku R_{12} iznosi:

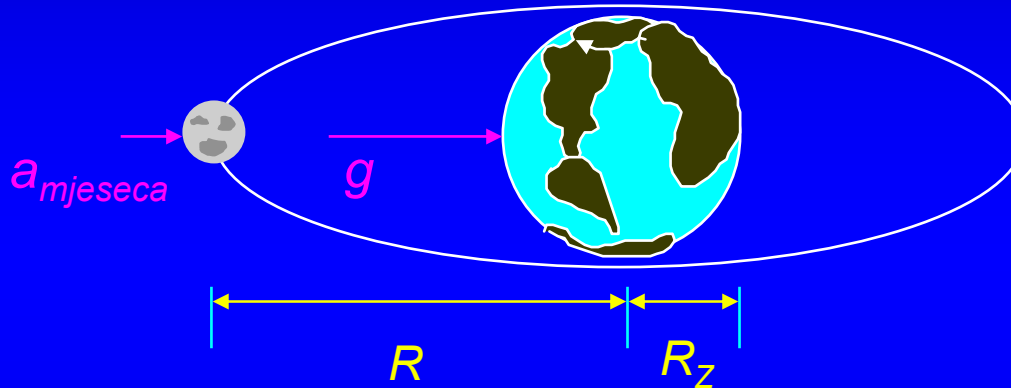
$$|F_{12}| = k \frac{m_1 m_2}{R_{12}^2}$$

- Sila \mathbf{F}_{12} je *privlačna*, i leži na spojištu njihovih centara masa



Primjer gravitacijske sile (Zemlja-Mjesec)

- Prema Newton-u je $a_{mjeseca} / g = 0.000278$
- Vrijedi $R_Z^2 / R^2 = 0.000273$



- Newtonov prijedlog za zakon gravitacije

$$|F_{MZ}| = kMm / R^2$$

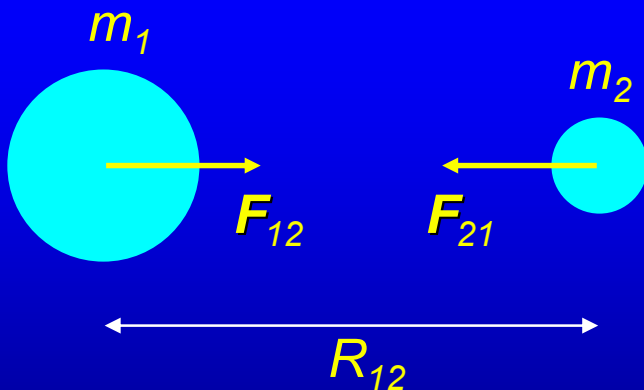
Gdje je F_{MZ} sila između Zemlje i Mjeseca a k je konstanta
 $k = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Newtonov 3. zakon primjenjen na gravitacijsku silu

- Vrijedi općenito: $\mathbf{F}_{A,B} = -\mathbf{F}_{B,A}$.

➤ Pri svakoj “akciji” javlja se “reakcija”.

- Prema do sada iznesenom vrijedi



$$|\mathbf{F}_{12}| = k \frac{m_1 m_2}{R_{12}^2} = |\mathbf{F}_{21}|$$

KRAJ