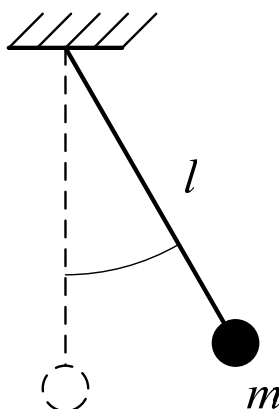


OSNOVE MEHATRONIKE

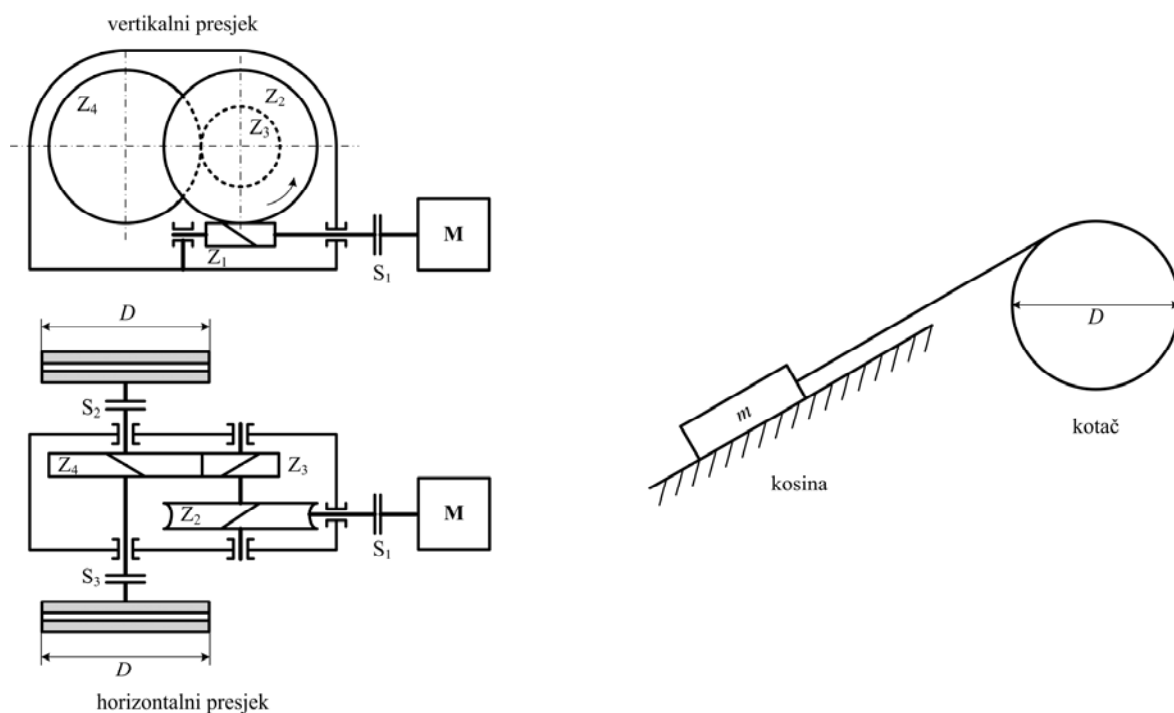
II. međuispit 06.05.2008.

1. Odrediti Lagrangian matematičkog njihala i postaviti Lagrangeove jednadžbe. Masa kuglice iznosi $m = 1$ kg, a duljina niti $l = 2$ m.



Sl. 1. Matematičko njihalo

2. Dvostupanjski pužni prijenosnik z_1z_2 , kojemu drugi stupanj čini cilindrični zupčasti par s kosim zubima z_3z_4 , spojen je osovnom, preko spojke S_1 , na istosmjerni nezavisno uzbuđeni motor nazivnog momenta $M_n = 70$ Nm i nazivne brzine $n_n = 1450$ o/min. Prijenosnik je izlaznom osovnom, preko spojke S_2 i S_3 , spojen na diskove promjera $D = 40$ cm. Koeficijenti korisnog djelovanja spojke S_1 iznosi $\eta_{S1} = 0,98$, spojke S_2 je $\eta_{S2} = 0,98$, spojke S_3 je $\eta_{S3} = 0,98$, valjnih (kotrljajućih) ležaja $\eta_L = 0,99$, pužnog prijenosa z_1z_2 je $\eta_P = 0,89$ i zupčastog prijenosa z_3z_4 je $\eta_Z = 0,97$. Diskovi povlače teret mase m uz kosinu nagiba 30° . Statički faktor trenja između kosine i tereta iznosi $\mu = 0,5$. Odredite:
 - a) Koliko mora iznositi prijenosni omjer pužnog pogona i_{12} da bi se pri nazivnoj brzini motora teret gibao brzinom od $0,5$ m/s? Prijenosni omjer cilindričnog zupčastog para iznosi $i_{34} = 2$.
 - b) Koliku masu može svaki od diskova povlačiti uz kosinu pri nazivnom momentu i pri nazivnoj brzini motora?

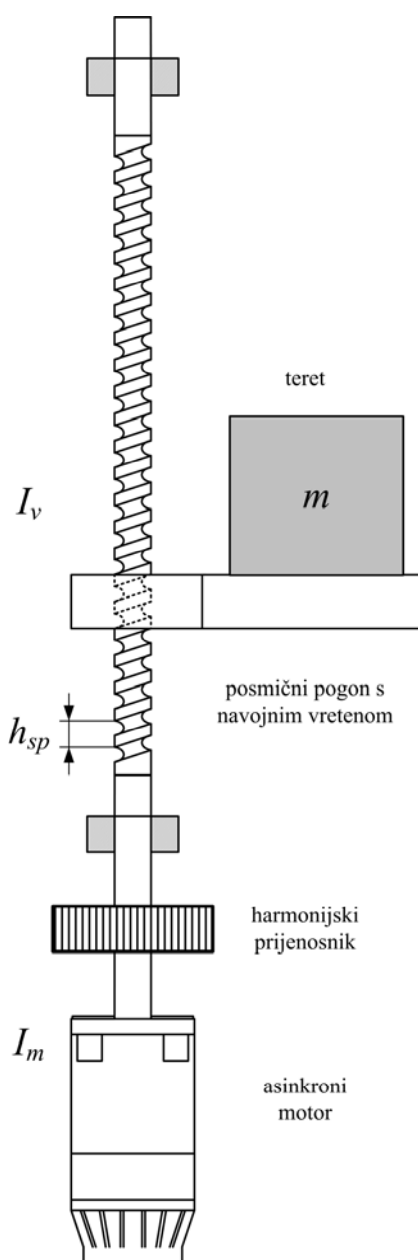


Sl. 2. Dvostupanjski pužni prijenosnik

3. Asinkroni motor nazivnog momenta $M_n = 100 \text{ Nm}$ i momenta inercije $I_m = 0,2 \text{ kg m}^2$ pokreće preko harmonijskog prijenosnika korisnosti $\eta_{hp} = 0,92$ posmični pogon s navojnim vretenom momenta inercije $I_v = 1 \text{ kg m}^2$ i uspona $h_{sp} = 3 \text{ cm}$. Osovina motora pogoni deformator harmonijskog prijenosnika, posmični pogon s navojnim vretenom je spojen na elastično ozubljeni prsten harmonijskog prijenosnika, a kružno kućište harmonijskog prijenosnika je nepomično. Elastično ozubljeni prsten sadrži $z_{EO} = 300$ zuba, a kružno ozubljeni prsten sadrži $z_{KO} = 306$ zuba. Korisnost posmičnog pogona s navojnim vretenom iznosi $\eta_{pp} = 0,86$. Posmičnim pogonom s navojnim vretenom podiže se teret mase $m = 50 \text{ t}$.

- Ako osovina motora rotira brzinom $n = 2970 \text{ o/min}$, za koliko vremena će teret preći visinu od $l = 75 \text{ cm}$?
- Koliko će iznositi ukupni moment inercije sustava reduciran na stranu motora ako se teret giba brzinom $v = 0,02 \text{ m/s}$?
- Koliki maksimalni teret motor može podizati brzinom od $0,02 \text{ m/s}$ pri nazivnom momentu M_m ?

Napomena: moment inercije harmonijskog prijenosnika se zanemaruje.



Sl. 3. Prijenos snage i gibanja pomoću harmonijskog prijenosnika i posmičnog pogona s navojnim vretenom

Rješenje 1:

Za poopćenu koordinatu uzima se kut koje njihalo zatvara s vertikalom. Pri tome kinetička energija iznosi

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (l \cdot \dot{\varphi})^2.$$

Potencijalna energija njihala iznosi

$$E_p = m \cdot g \cdot (l - l \cdot \cos \varphi) = m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Lagrangian iznosi:

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 - m \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \varphi).$$

Lagrangeova jednačba ima oblik

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

gdje je:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot l^2 \cdot \dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi.$$

Nakon što se uvrste derivirani izrazi Lagrangeova jednačba poprima oblik

$$m \cdot l^2 \cdot \ddot{\varphi} + m \cdot g \cdot l \cdot \sin \varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi = 0.$$

Rješenje 2:

a)

Brzina vrtnje diska iznosi

$$\omega_d = \frac{v_t}{R} = \frac{0,5}{0,2} = 2,5 \text{ rad/s.}$$

Prijenosni omjer dvostupanjskog pužnog prijenosnika kojemu drugi stupanj čini cilindrični zupčasti par iznosi

$$i = i_{12} \cdot i_{34} = \frac{\omega_m}{\omega_d} = \frac{1450 \cdot \pi}{30 \cdot 2,5} = 60,74.$$

Iz toga slijedi prijenosni omjer pužnog pogona

$$i_{12} = \frac{i}{i_{34}} = \frac{60,74}{2} = 30,37.$$

b)

Snaga na osovini motora iznosi

$$P_m = M_n \cdot \omega_m = 70 \cdot \frac{1450 \cdot \pi}{30} = 10629 \text{ W.}$$

Snaga koja se predaje diskovima iznosi

$$P_t = \eta_{uk} \cdot P_m = \eta_{s1} \cdot \eta_P \cdot \eta_Z \cdot \eta_L \cdot \eta_{s2} \cdot P_m = 0,98 \cdot 0,89 \cdot 0,97 \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot 10629 = 8724,52 \text{ W.}$$

Brzina tereta iznosi

$$v_t = \omega_d \cdot R = \frac{\omega_m}{i} \cdot R = \frac{1450 \cdot \pi}{30 \cdot 60,74} \cdot 0,2 = 0,5 \text{ m/s.}$$

Sila potrebna za povlačenje tereta iznosi

$$F_t = m \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha).$$

Snaga potrebna za povlačenje tereta iznosi

$$P_t = F_t \cdot v_t = m \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot v_t.$$

Ukupna masu tereta koju diskovi mogu povlačiti iznosi:

$$m = \frac{P_t}{g \cdot (\sin \alpha + \mu \cdot \cos \alpha) \cdot v_t} = \frac{8724,52}{9,81 \cdot (\sin 30^\circ + 0,5 \cdot \cos 30^\circ) \cdot 0,5} = 1906,4 \text{ kg}$$

Rješenje 3:

a)

Prijenosni omjer harmonijskog prijenosnika iznosi

$$i = \frac{\omega_m}{\omega_v} = -\frac{z_{EO}}{z_{KO} - z_{EO}} = -\frac{300}{306 - 300} = -50.$$

Prilikom jednog okreta elastično ozubljenog prstena teret se podigne za h_v . Motor se pri tome okrene 50 puta.

Brzinu dizanja tereta moguće je izraziti pomoću brzine vrtnje elastično ozubljenog prstena

$$v = \frac{n_{EO}}{60} \cdot h_v,$$

odnosno preko brzine vrtnje asinkronog motora

$$v = \frac{n_m}{60 \cdot |i|} \cdot h_v = \frac{2970}{60 \cdot 50} \cdot 0,03 = 0,0297 \text{ m/s}$$

Vrijeme potrebno za prelazak puta l iznosi

$$t = \frac{l}{v} = \frac{l \cdot i \cdot 60}{n_m \cdot h_v} = \frac{0,75}{0,0297} = 25,25 \text{ s.}$$

b)

Kinetička energija tereta iznosi

$$E_{kt} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2,$$

a kinetička energija posmičnog pogona

$$E_{kpv} = \frac{1}{2} \cdot I_v \cdot \omega_v^2$$

Odnos između brzine vrtnje asinkronog motora i brzine tereta određen je izrazom

$$n_m = \frac{v \cdot 60 \cdot |i|}{h_v} = \frac{0,0297 \cdot 60 \cdot 50}{0,03} = 2000 \text{ okr/min.}$$

$$\omega_m = \frac{n_m \cdot \pi}{30} = 209,44 \text{ rad/s}$$

Moment inercije tereta na strani motora moguće je odrediti izjednačavanjem izraza za kinetičku energiju na strani tereta i strani motora uzimajući u obzir korisnost harmonijskog prijenosnika i posmičnog pogona s navojnim vretenom:

$$\eta_{hp} \cdot \eta_{pp} \cdot \frac{1}{2} \cdot I'_t \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \rightarrow$$

$$I'_t = \frac{m}{\eta_{hp} \cdot \eta_{pp}} \cdot \frac{v^2}{\omega_m^2} = \frac{50000}{0,92 \cdot 0,86} \cdot \frac{0,02^2}{209,44^2} = 5,76 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2.$$

Moment inercije posmičnog pogona na strani motora moguće je odrediti izjednačavanjem izraza za kinetičku energiju na strani posmičnog pogona i strani motora uzimajući u obzir korisnost posmičnog pogona s navojnim vretenom:

$$\eta_{pp} \cdot \frac{1}{2} \cdot I'_v \cdot \omega_m^2 = \frac{1}{2} \cdot I_v \cdot \omega_v^2 \rightarrow I'_v = \frac{I_v}{\eta_{pp}} \cdot \frac{\omega_v^2}{\omega_m^2} = \frac{1}{0,92} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 = 4,35 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2.$$

Ukupni moment inercije reduciran na stranu motora iznosi

$$I_{uk} = I_m + I'_v + I'_t = 0,2 + 5,76 \cdot 10^{-4} + 4,35 \cdot 10^{-4} = 0,20101 \text{ kgm}^2.$$

c)

Snaga na osovini motora iznosi

$$P_m = M_m \cdot \omega_m = 100 \cdot 209,44 = 20944 \text{ Nm}$$

Brzina vrtnje motora iznosi

$$\omega_m = \frac{v \cdot 2 \cdot \pi \cdot |i|}{h_v} = \frac{0,02 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 50}{0,03} = 209,44 \text{ rad/s}$$

Snaga tereta iznosi

$$P_t = \eta_{hp} \cdot \eta_{pp} \cdot P_m = 0,86 \cdot 0,92 \cdot 20944 = 16570,9 \text{ W}$$

$$P_t = m \cdot g \cdot v$$

Maksimalni teret koji motor može dizati pri nazivnom momentu iznosi:

$$m = \frac{P_t}{g \cdot v} = \frac{16570,9}{9,81 \cdot 0,02} = 84459,2 \text{ kg}.$$