Osnove mehatronike
Riješeni zadaci za vježbu - prvi ciklus

Lukica

Sadržaj

1 Kinematika i dinamika

1.1 Zadatak 1.

Nakon isključenja motora, osovina koja se okretala brzinom $n_0 = 1500$ $^{o}/_{\min}$ počinje usporavati i zaustavlja se nakon $t_z = 2\ s$. Koliko iznosi ukupna inercija sustava ako je moment tereta prilikom zaustavljanja bio konstantan iznosa $M_t = 100\ Nm$.

Rješenje:

$$\omega_o = n_o \frac{2\pi}{60} = 50\pi\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\triangle\omega}{\triangle t} = 25\pi\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$$

$$M = I \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad I = \frac{M}{\alpha} = \frac{4}{\pi}\ kgm^2$$

1.2 Zadatak 2.

Trofazni asinkroni motor nazivnog momenta $M_n = 148Nm$ i momenta inercije $I_m = 0,1\ kgm^2$ pokreće se konstantnim momentom $1,3 \cdot Mn$. Koliki smije biti moment inercije radnog mehanizma reduciran na osovinu motora ako se motor mora zaletiti do brzine 1480 $^{o}/_{\min}$ u vremenu od 2 s? Moment tereta iznosi 0 Nm.

Rješenje:

$$\omega = n \frac{2\pi}{60} = 155\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\triangle\omega}{\triangle t} = 77,5\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$$

$$I = \frac{M}{\alpha} = \frac{1,3 \cdot M_n}{\alpha} = 2,48\ kgm^2$$

$$I'_{rm} = I - I_m = 2,38\ kgm^2$$

1.3 Zadatak 3.

Moment motora tijekom zaleta je konstantan i iznosi 100 Nm. Moment inercije motora i radnog mehanizma reduciranog na stranu motora iznosi $I = 2\ Nm$. Koliko iznosi vrijeme zaleta do nazivne brzine vrtnje $n_n = 1480$ $^{o}/_{\min}$ ako moment tereta iznosi:

a) $M_t = 0$

b) $M_t = 30\ Nm$

Rješenje:

a)

$$\omega = n\frac{2\pi}{60} = 155 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

$$M_t = 0 \quad \rightarrow \quad M_{uk} = M_m$$

$$\alpha = \frac{M_{uk}}{I} = 50 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$$

$$\alpha = \frac{\triangle\omega}{\triangle t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\omega}{\alpha} = 3,1 \ s$$

---

b)

$$\omega = n\frac{2\pi}{60} = 155 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

$$M_t = 30 \quad \rightarrow \quad M_{uk} = 70 \ Nm$$

$$\alpha = \frac{M_{uk}}{I} = 35 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$$

$$\alpha = \frac{\triangle\omega}{\triangle t} \quad \rightarrow \quad t = \frac{\omega}{\alpha} = 4,43 \ s$$

1.4 Zadatak 4.

Motor ubrzava konstantnom kutnom akceleracijom $\alpha = 10 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$ od brzine $n_0 = 0 \ {}^{\mathrm{o}}/_{\mathrm{min}}$ do nazivne brzine $n_n = 1480 \ {}^{\mathrm{o}}/_{\mathrm{min}}$. Koliko traje vrijeme zaleta motora? Koliko okretaja napravi motor tijekom zaleta?

Rješenje:

$$\omega_o = n_o\frac{2\pi}{60} = 0 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

$$\omega_n = n_n\frac{2\pi}{60} = 155 \ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$$

$$t = \frac{\omega_n}{\alpha} = 15,5 \ s$$

$$\omega = t \cdot \alpha = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}\varphi = t \cdot \alpha \mathrm{d}t$$

$$\varphi = \frac{t^2\alpha}{2} = 1201,25 \ rad$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = 190,2 \ kruga$$

1.5 Zadatak 5.

Na osovini motora nalazi se bubanj promjera $r = 0,2\ m$. Na bubanj je namotana špaga na koju je obješen teret. Koliko traje spuštanja tereta početne brzine $v_0 = 0\ {}^{m}/_{s}$ s visine $h = 10\ m$ ako je akceleracija tereta konstantna i iznosi $a = 0,1\ {}^{m}/_{s^2}$? Koliko okretaja napravi bubanj tijekom spuštanja tereta?

Rješenje:

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} \quad \rightarrow \quad a\frac{t^2}{2} = h$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 14,1\ s$$

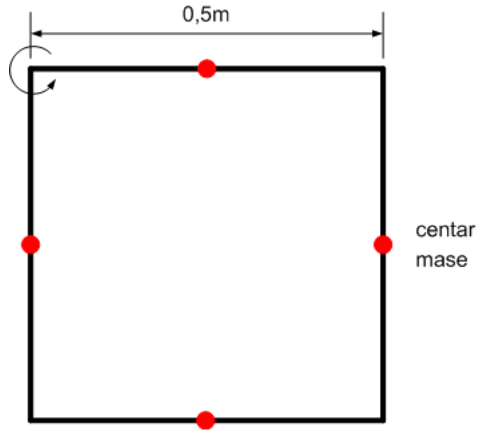
$$a = r \cdot \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 0,5\ {}^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}^2}$$

$$\varphi = \frac{t^2 \alpha}{2} = 50\ rad$$

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = 7,96\ kruga$$

1.6 Zadatak 6.

Četiri homogena štapa spojena su u kvadrat kao što je to prikazano sl.1. Masa svakog štapa iznosi $0,5\ kg$, a duljina $0,5\ m$. Potrebno je izračunati moment tromosti kvadrata prema osi prolazi vrhom kvadrata i okomita je na ravninu kvadrata. Koliki je moment ako os rotacije prolazi središtem stranice kvadrata i okomita je na ravninu kvadrata?



Slika 1: prikaz spoja štapova

Rješenje:

Moment tromosti ćemo računati prema izrazu:

$$I = I_{CM} + m \cdot d^2$$

Gdje je I traženi moment oko neke osi, I_{CM} moment tromosti oko osi koji prolazi kroz centar mase, m masa tijela a d udaljenost osi oko koje tražimo moment tromosti. Kada odredimo moment tromosti I_i za svaku masu zasebno ukupni će momente tromosti biti jednak zbroju svih zasebnih momenata tromosti:

$$I_{uk} = \sum I_i$$

Moment tromosti štapa duljine l i mase m oko osi kroz centar mase iznosi:

$$I_{CM} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

Pa za svaki štap pojedino moment tromosti oko osi koja prolazi *vrhom kvadrata* iznosi:

$$I_1 = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot l^2}{3}$$

$$I_2 = I_{CM} + m\left(l^2 + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{4 \cdot m \cdot l^2}{3}$$

$$I_3 = I_{CM} + m\left(l^2 + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{4 \cdot m \cdot l^2}{3}$$

$$I_4 = I_{CM} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot l^2}{3}$$

$$I_{uk} = \sum I_i = \frac{10 \cdot m \cdot l^2}{3} 0,417 \ kgm^2$$

Pa za svaki štap pojedino moment tromosti oko osi koja prolazi *središtem stranice* iznosi:

$$I_1 = I_{CM} = \frac{m \cdot l^2}{12}$$

$$I_2 = I_{CM} + m\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{7 \cdot m \cdot l^2}{12}$$

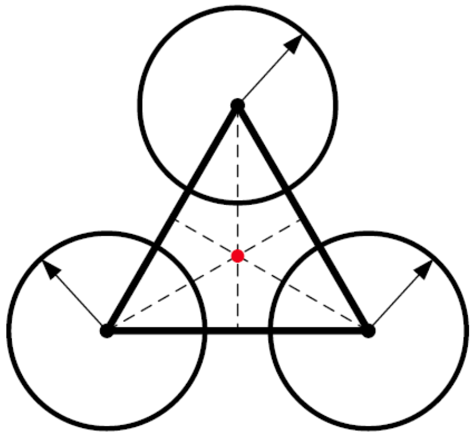
$$I_3 = I_{CM} + m\left(\frac{l^2}{4} + \frac{l^2}{4}\right) = \frac{7 \cdot m \cdot l^2}{12}$$

$$I_4 = I_{CM} + ml^2 = \frac{13m \cdot l^2}{12}$$

$$I_{uk} = \sum I_i = \frac{7 \cdot m \cdot l^2}{3} 0,292 \ kgm^2$$

1.7 Zadatak 7.

Središta diskova mase $m_d = 1\ kg$ i polumjera $r_d = 0,2\ m$ međusobno su spojena štapovima mase $m_š = 0,12\ kg$ i duljine $l_š = 1\ m$. Koliki je moment inercije sustava prema osi koja prolazi točkom A i okomita je ravninu istostraničnog trokuta koju čine štapovi. Kolika je kinetička energija sustava ako sustav rotira kutnom brzinom $\omega = 10\ ^{\mathrm{rad}}/_{\mathrm{s}}$?



Slika 2: prikaz spoja štapova i diskova

Rješenje:

Izraz za moment inercije štapa za os vrtnje oko centra mase već znamo:

$$I_{CMŠ} = \frac{m_š \cdot {l_š}^2}{12}$$

A moment inercije diska za os vrtnje oko centra mase iznosi:

$$I_{CMD} = \frac{m_d \cdot {l_d}^2}{2}$$

Tako moment inercije za jedan štap za os vrtnje oko točke A iznosi:

$$I_Š = I_{CMŠ} + m_š \left(\frac{l_š\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

Odnosno za jedan disk:

$$I_D = I_{CMD} + m_d \left(\frac{l_š\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

Pa ukupni moment inercije iznosi:

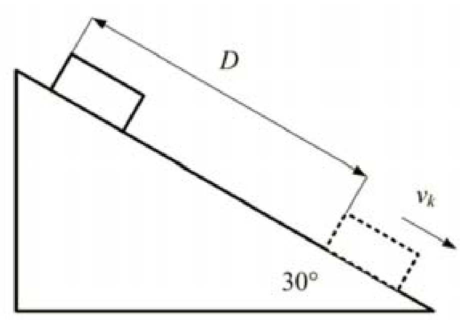
$$I = 3 \cdot I_D + 3 \cdot I_Š = 1,12\ kgm^2$$

A kinetička energija sustava tada iznosi:

$$E = \frac{I \cdot \omega^2}{2} = 56\ J$$

1.8 Zadatak 8.

Uteg mase $m = 10\ kg$ iz stanja mirovanja počinje klizati niz kosinu koja s horizontalom zatvara kut $\alpha = 30^o$. Faktor trenja između kosine i utega iznosi $\mu_k = 0,4$. Na dnu kosine, nakon što je klizao D, brzina utega iznosi $v_k = 12\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$. Koliko iznosi D? Ako se uzme uteg dvostruko veće mase koliko će iznositi vrijeme potrebno za zaustavljanje?



Slika 3: prikaz kosine

Rješenje:

Sile koje djeluju u ovome sustavu su gravitacijska sila F_g, sila trenja F_{tr} i sila reakcije podloge $F_{r.p.}$. Kako bi nam bilo lakše gravitacijsku silu ćemo rastavit na dvije komponente, komponentu paralelnu na kosinu:

$$F_{gp} = F_g \sin(\alpha)$$

i komponentu okomitu na kosinu:

$$F_{go} = F_g \cos(\alpha)$$

Okomita se komponenta poništava sa silom reakcije podloge pa ukupna sila postoji samo u ravnini paralelnom s kosinom i iznosi:

$$F = F_{gp} - F_{tr}$$

$$m \cdot a = F_g \cdot \sin(\alpha) - \mu \cdot F_{go}$$

$$ma = mg \sin(\alpha) - \mu mg \cos(\alpha)$$

$$a = g \sin(\alpha) - \mu g \cos(\alpha)$$

I odavde vidimo da gibanje ne ovisi o masi pa odmah možemo odgovoriti na drugo pitanje: vrijeme potrebno za zaustavljanje biti će isto.

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}v = a\mathrm{d}t$$

$$v = t \cdot g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) + v_0$$

Kako je $v_0 = 0$ taj član možemo zanemariti pa je izraz za vrijeme t:

$$t = \frac{v}{g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \rightarrow \quad \mathrm{d}x = v\mathrm{d}t = t \cdot g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))\mathrm{d}t$$

$$x = \frac{t^2}{2}g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) + x_0$$

Također i $x_0 = 0$ što čini izraz jednostavnijim a u njega i uvrštavamo izraz za vrijeme t i dobivamo:

$$x = \frac{v^2}{2g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)}$$

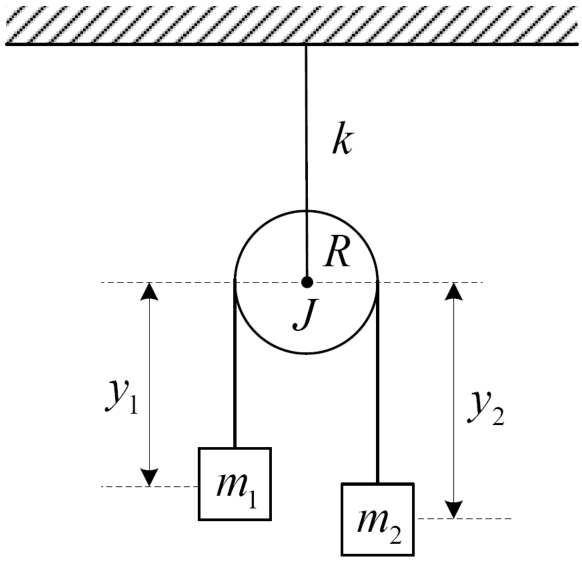
Odnosno za $v = v_k$ dobivamo prijeđeni put D:

$$D = \frac{{v_k}^2}{2g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)} = 47,786\ m$$

2 Lagrangeove jednadžbe

2.1 Zadatak 1.

Mase m_1 i m_2 vezane su nerastezljivom niti duljine l preko koloture momenta tromosti J i polumjera R (sl.4). Uz pretpostavku da nema klizanja između niti i koloture odrediti jednadžbu gibanja mase m_1 primjenom lagrangeove jednadžbe.



Slika 4: prikaz problema

Rješenje:

Obodna brzina koloture v odgovara brzinama masa ($\dot{y}_1 = -\dot{y}_2$), pa ćemo kutnu brzinu koloture ω zapisati preko obodne brzine odnosno preko brzine mase:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\dot{y}}{R}$$

Izrazimo ukupnu kinetičku energiju:

$$E_k = \frac{m_1 \cdot \dot{y_1}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \dot{y_2}^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}$$

$$E_k = \frac{m_1 \cdot \dot{y_1}^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \dot{y_1}^2}{2} + \frac{J \cdot \dot{y_1}^2}{2 \cdot R^2}$$

$$E_k = \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2}\right) \frac{\dot{y_1}^2}{2}$$

Referentno mjesto potencijalne energije ćemo uzet ravninu kroz središte koloture pa ukupna potencijalna energija iznosi:

$$E_p = -m_1 \cdot g \cdot y_1 - m_2 \cdot g \cdot y_2$$

Ukupna duljina niti iznosi $l = y_1 + y_2 + R \cdot \pi$ iz čega izražavamo y_2 i dobivamo izraz za potencijalnu energiju:

$$E_p = -m_1 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot R \cdot \pi - m_2 \cdot g \cdot l$$

$$E_p = (m_2 - m_1) g \cdot y_1 + m_2 \cdot g \cdot R \cdot \pi - m_2 \cdot g \cdot l$$

I ovdje radimo jednostavnu supstituciju tako da sve što je konstantno zamijenimo s nekom općom konstantom kako bi si olakšali rad, odnosno:

$$E_p = (m_2 - m_1) g \cdot y_1 + K$$

Lagarangian sustava iznosi:

$$L = E_k - E_p$$

$$L = \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right) \frac{\dot{y_1}^2}{2} + (m_1 - m_2) g \cdot y_1 - K$$

Dalje računamo:

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = (m_1 - m_2) g$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} = \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right) \dot{y}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) = \left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{y}_1$$

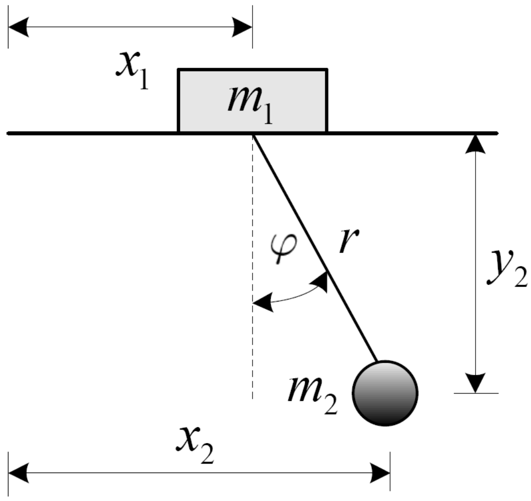
Sustav se sastoji samo od konzervativnih sila pa je jednadžba sustava:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0$$

$$\boxed{\left(m_1 + m_2 + \frac{J}{R^2} \right) \ddot{y}_1 - (m_1 - m_2) g = 0}$$

2.2 Zadatak 2.

Na sl.5 prikazan je mehanički sustav koji se sastoji od mase m_1 koja može slobodno kliziti po podlozi (bez trenja) i na nju vezana m_2. Potrebno je korištenjem Lagrangeove jednadžbe odrediti jednadžbe gibanja pojedinih masa. Pritom kao poopćene koordinate potrebno je uzeti pomak x_1 i kut φ.



Slika 5: prikaz problema

Rješenje:

Za početak je potrebno opisat gibanje kuglice u kartezijevom koordinatnom sustavu (x_2, y_2) preko tražene poopćene koordinate φ i konstantnog polumjera r:

$$x_2 = x_1 + r\sin(\varphi)$$

$$y_2 = r\cos(\varphi)$$

Pa su brzine po komponentama:

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} = \dot{y}_2 = -r\dot{\varphi}\sin(\varphi)$$

I sad možemo zapisati ukupnu kinetičku energiju sustava, koja se sastoji od kinetičkih energija masa m_1 i m_2:

$$E_k = \frac{m_1 \cdot \dot{x}_1{}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2\right)$$

$$E_k = \frac{m_1 \cdot \dot{x}_1{}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_1{}^2 + 2r\dot{\varphi}\cos(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi)\right)$$

$$E_k = \frac{m_1 \cdot \dot{x}_1{}^2}{2} + \frac{m_2}{2}\left(\dot{x}_1{}^2 + 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2 r^2\dot{\varphi}^2 + m_2 r\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

Promjenjivu potencijalnu energiju ima samo masa m_2 (kuglica) a kao referentnu vrijednost ćemo uzet ovjesište kuglice pa je ukupna potencijalna energija sustava:

$$E_p = -m_2 \cdot g \cdot y_2 = -m_2 g r \cos(\varphi)$$

Pa je Lagrangian sustava:

$$L = E_k - E_p$$

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{x}_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{\varphi}^2 + m_2 r \dot{x} \dot{\varphi} \cos(\varphi) + m_2 g r \cos(\varphi)$$

Odradimo prvo jednadžbu sustava po poopćenoj koordinati x_1:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = (m_1 + m_2)\dot{x}_1 + r m_2 \dot{\varphi} \cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + r m_2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r m_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

$$\boxed{(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + r m_2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi) - r m_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) \quad = \quad 0}$$

A zatim po φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_2 r \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi) - m_2 g r \sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 r^2 \dot{\varphi} + m_2 r \dot{x} \cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2 r^2 \ddot{\varphi} + m_2 r \ddot{x} \cos(\varphi) - m_2 r \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi)$$

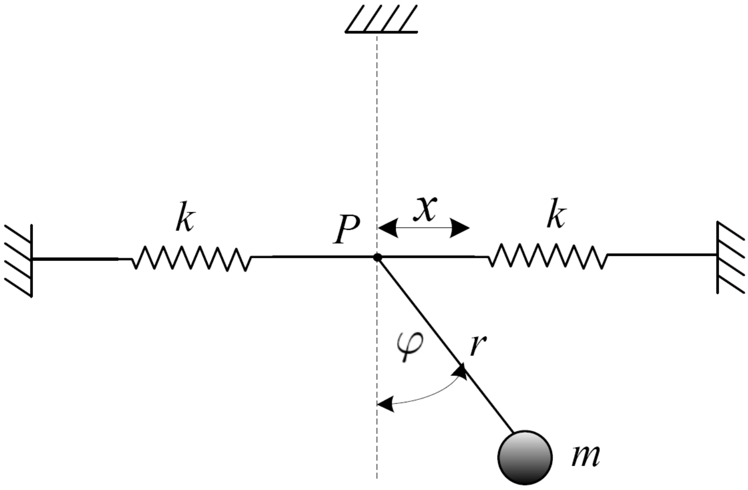
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$m_2 r^2 \ddot{\varphi} + m_2 r \ddot{x} \cos(\varphi) - m_2 r \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi) + m_2 r \dot{x} \dot{\varphi} \sin(\varphi) + m_2 g r \sin(\varphi) = 0$$

$$\boxed{r \ddot{\varphi} + \ddot{x} \cos(\varphi) + g \sin(\varphi) = 0}$$

2.3 Zadatak 3.

Primjenom Lagrangeove jednadžbe odrediti jednadžbe gibanja mase m i vrha njihala (točka P) x prikazanog na sl.6. Pritom je gibanje vrha njihala moguće samo u smjeru x osi. Pretpostaviti idealne karakteristike opruge. Za poopćene koordinate uzeti kut φ i pomak vrha njihala (točke P) x.



Slika 6: prikaz problema

Rješenje:

Da bi uspješno riješili zadatak potrebno je poznavati izraz za skladištenje energije opruge (i pri tome da je opruga C-element pa je uskladištena energija potencijalna energija):

$$E = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

te je, naravno, potrebno opisat gibanje mase m (kuglice) iz odabranih koordinata (x_1, y_1) u željene poopćene koordinate:

$$x_1 = x + r\sin(\varphi)$$

$$y_1 = r\cos(\varphi)$$

Pa su brzine po komponentama:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \dot{x}_1 = \dot{x} + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial t} = \dot{y}_1 = -r\dot{\varphi}\sin(\varphi)$$

Promjena kinetičke energije postoji samo u kuglici pa pišemo:

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{x_1}^2 + \dot{y_1}^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2r\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\cos^2(\varphi) + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\varphi)\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$$

Referentnu ravninu potencijalne energije za kuglicu odabiremo u ravnini opruga. Za opruge odabiremo hvatište niti kuglice u kojoj su obje opruge duljine l_o. Odnosno središte je točka P pa je ukupna potencijalna energija sustava:

$$E_p = \frac{k \cdot x^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} - m \cdot g \cdot r \cdot \cos(\varphi)$$

$$E_p = k \cdot x^2 - mgr\cos(\varphi)$$

Lagrangian sustava iznosi:

$$L = E_k - E_p$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\varphi}\cos(\varphi) + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - kx^2 + mgr\cos(\varphi)$$

Prvo ćemo riješit jednadžbu sustava za poopćenu koordinatu x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + mr\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + mr\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - mr\dot{\varphi}^2\sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\boxed{m\ddot{x} + mr\ddot{\varphi}\cos(\varphi) - mr\dot{\varphi}^2\sin(\varphi) + 2kx = 0}$$

A zatim po φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mr\dot{x}\dot{\varphi}\sin(\varphi) - mgr\sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + mr\dot{x}\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mr^2\ddot{\varphi} + mr\ddot{x}\cos(\varphi) - mr\dot{x}\dot{\varphi}\sin(\varphi)$$

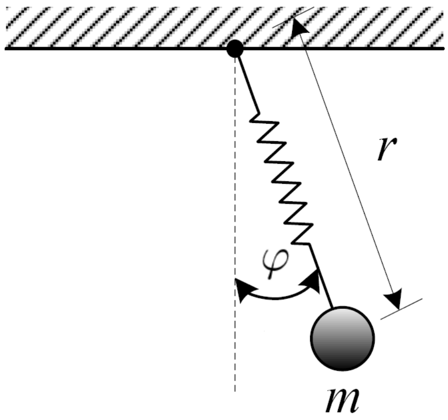
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$mr^2\ddot{\varphi} + mr\ddot{x}\cos(\varphi) - mr\dot{x}\dot{\varphi}\sin(\varphi) + mr\dot{x}\dot{\varphi}\sin(\varphi) + mgr\sin(\varphi) = 0$$

$$\boxed{r\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos(\varphi) + g\sin(\varphi) = 0}$$

2.4 Zadatak 4.

Odrediti jednadžbe gibanja mehaničkoga sustava prikazanog na sl.7 uz poopćene koordinate φ i r.



Slika 7: prikaz problema

Rješenje:

Opisujemo gibanje kuglice:

$$x = r\sin(\varphi)$$

$$y = r\cos(\varphi)$$

Pa su brzine po komponentama:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \dot{x} = \dot{r}\sin(\varphi) + r\dot{\varphi}\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} = \dot{r}\cos(\varphi) - r\dot{\varphi}\sin(\varphi)$$

Ukupna je kinetička energija sustava:

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right)$$

Referentni položaj potencijalne energije odabiremo u točku na duljini l_0 od hvatišta, ukoliko je l_0 duljina opruge u slobodnom stanju. Ukupna potencijalna energija sustava je:

$$E_p = \frac{k\cdot(r-l_o)^2}{2} - m\cdot g\cdot y$$

$$E_p = \frac{k\cdot r^2}{2} - k\cdot l_o\cdot r + \frac{k\cdot {l_o}^2}{2} - m\cdot g\cdot r\cdot\cos(\varphi)$$

Lagrangian sustava iznosi:

$$L = E_k - E_p$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{kr^2}{2} + kl_o r - \frac{k{l_o}^2}{2} + mgr\cos(\varphi)$$

Rješavamo jednadžbu sustava za poopćenu koordinatu φ:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgr\sin(\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\boxed{mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr\sin(\varphi) = 0}$$

a zatim i za poopćenu koordinatu r:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - kr + kl_o + mg\cos(\varphi)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + kr - kl_o - mg\cos(\varphi) = 0$$

$$\boxed{m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 - mg\cos(\varphi) + k(r - l_o) = 0}$$

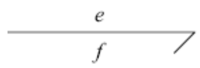
3 Vezni grafovi

Dakle, u svakom sustavu postoje dvije veličine s kojima u potpunosti možemo opisati snagu i energiju. Nazivamo ih napor e i tok f a u pojedinom sustavu odgovaraju veličinama danim prema tablici 1:

sustav	napor - e	tok - f
električni	napon - u	struja - i
translacijski	sila - F	brzina - v
rotacijski	moment - M	kutna brzina - ω

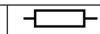
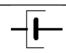
Tablica 1: napor i tok pojedenih sustava

A smjer snage i energije opisujemo (crtamo) uz pomoć strjelica. A upravo nam tome i služe vezni grafovi.



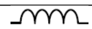
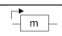
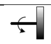
Također, u svakom sustavu postoji više vrsta elemenata:

R-elementi su elementi na kojima se gubi energija, odnosno energija se "troši". Popis elemenata je dan na tablici 2:

element	oznaka	zakon ponašanja	slika
otpornik	$R : R$	$u = R \cdot i$	
prigušnica	$R : d$	$F = d \cdot v$	

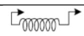
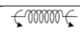
Tablica 2: popis R-elemenata

L-elementi su elementi u kojima se energija skladišti i pri tome govorimo o skladištu kinetičke energije. Popis elemenata je dan tablicom 3:

element	oznaka	zakon ponašanja	slika
zavojnica	$L : L$	$u = L\frac{di}{dt}$	
masa	$L : m$	$F = m\frac{dv}{dt}$	
inercija	$L : I$	$M = I\frac{d\omega}{dt}$	

Tablica 3: popis L-elemenata

C-elementi su također elementi u kojima se energija skladišti ali ovdje govorimo o skladištu potencijalne energije. Popis elemenata je dan tablicom 4:

element	oznaka	zakon ponašanja	slika
kondenzator	$C : C$	$u = \frac{1}{c}\int idt$	
translacijska opruga	$C : \frac{1}{k}$	$F = k\int vdt$	
rotacijska opruga	$C : \frac{1}{k}$	$M = k\int \omega dt$	

Tablica 4: popis C-elemenata

Izvori su elementi koji "daju" energiju, odnosno sustav "dobiva" energiju iz njih a postoje dvije vrste izvora.

- Izvor napora S_e je takav da na mjestu gdje je spojen u sustav određuje iznos *napora* kojeg daje u sustav dok je iznos toka kojeg daje određen sustavom
- Izvor toka S_f je takav da na mjestu gdje je spojen u sustav određuje iznos *toka* kojeg daje u sustav dok je iznos napora kojeg daje određen sustavom

Transformatori su elementi koji služe za transformaciju jednih vrijednosti toka i napora u neke druge vrijednosti bez gubitaka energije. Označavamo ih sa TF a opisujemo ih jednadžbama:

$$e_1 = n \cdot e_2 \qquad f_1 = \frac{1}{n} \cdot f_2$$

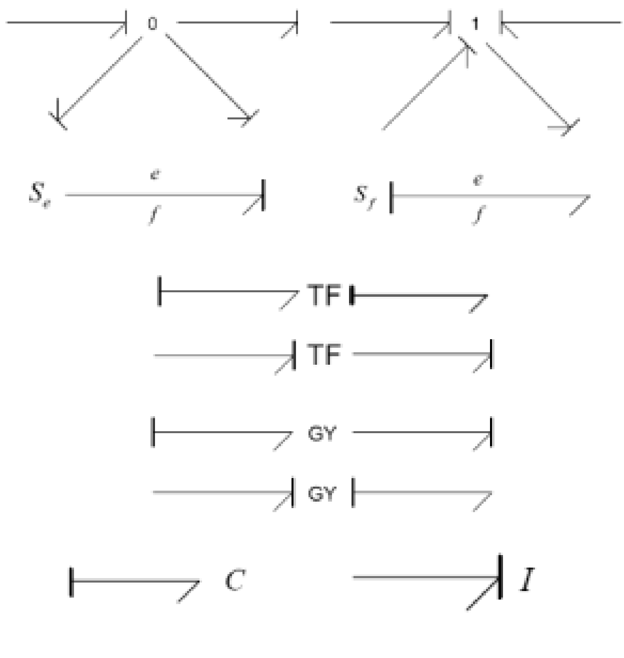
Giratori su elementi koji služe za transformaciju toka u napor, odnosno napora u tok bez gubitka energije. Označavamo ih GY a jednadžbe kojima ih opisujemo su:

$$e_1 = r \cdot f_2 \qquad f_1 = r \cdot e_2$$

Spojevi su elementi koji služe za povezivanje drugih elemenata a postoje dvije vrste spojeva:

- **0-spoj** služi za povezivanje više elemenata istog *napora.*
- **1-spoj** služi za povezivanje više elemenata istog *toka.*

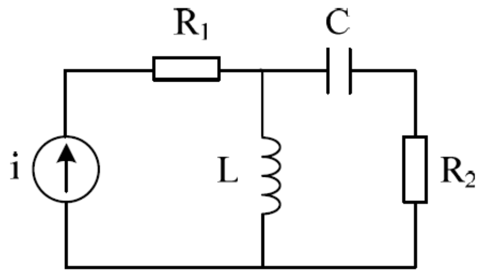
Te na kraju, kauzalnost. Na svakom je veznom grafu potrebno crtom označit kauzalnost odnosno mjesta na kojem su definirani iznosi *tokova.* Pravila po kojima se dodjeljuje mjesto (crta) kauzalnosti prikazani su na sl.8



Slika 8: pravila dodjeljivanja kauzalnosti

3.1 Zadatak 1.

Za električnu mrežu prikazanu na sl.9 potrebno je skicirati pripadajući vezni graf, te na njemu naznačiti crte kauzalnosti.

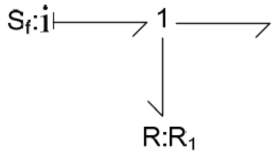


Slika 9: električna mreža

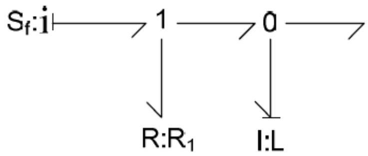
Rješenje:

Dana električna mreža sadrži jedan izvor i to je strujni izvor, odnosno izvor toka pa prvo crtamo njega zajedno sa crtom kauzalnosti:

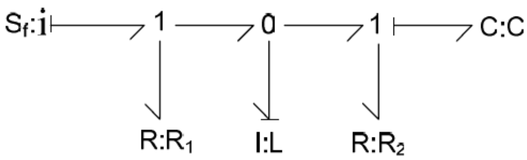
S njim je serijski spojen otpornik R_1 te paralelni spoj a to znači da kroz njih teče ista struja pa ih na vezanom grafu crtamo preko 1-spoja jer je tok isti:



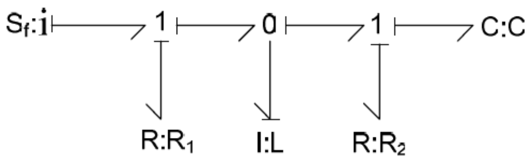
Sada slijedi paralelni spoj, a znamo da je u paralelnom spoju napon na svakoj grani jednak. Odnosno u veznom grafu ćemo koristiti 0-spoj jer povezujemo elemente istog napora. U jednoj je grani samo zavojnica L pa ćemo ju nacrtati sa pripadajućom crtom kauzalnosti, a drugu ćemo granu nacrtati kasnije:



U drugoj grani paralelnog spoja je serijski RC spoj. U serijskom spoju teče ista struja pa ćemo R_2 i C povezati 1-spojem:

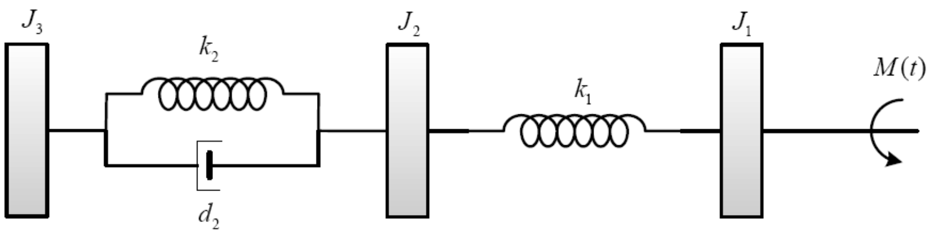


Na kraju nam ostaje ucrtati sve crte kauzalnosti tako da poštujemo sva pravila:



3.2 Zadatak 2.

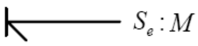
Za mehanički sustav prikazan na sl.10 potrebno je skicirati pripadajući vezni graf, te na njemu naznačiti crte kauzalnosti.



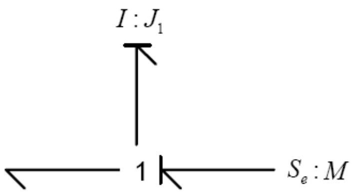
Slika 10: mehanički sustav

Rješenje:

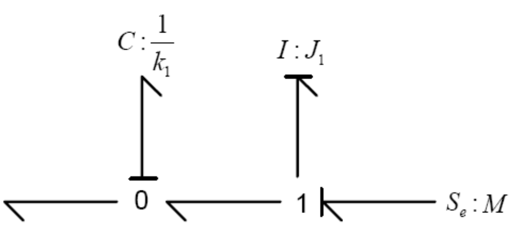
Na zadanom elektromehaničkom sustavu vidimo da je izvor zapravo moment $M(t)$ s lijeve strane, a kako moment odgovara naporu crtamo ga kao izvor napora sa pripadajućom crtom kauzalnosti:



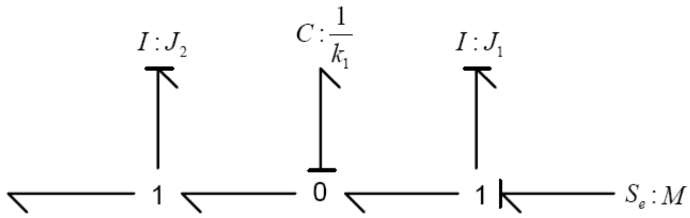
Izvor je preko osovine spojen na moment inercije J_1 i oni se vrte istom brzinom, odnosno zajednički im je tok pa ga povezujemo preko 1-spoja:



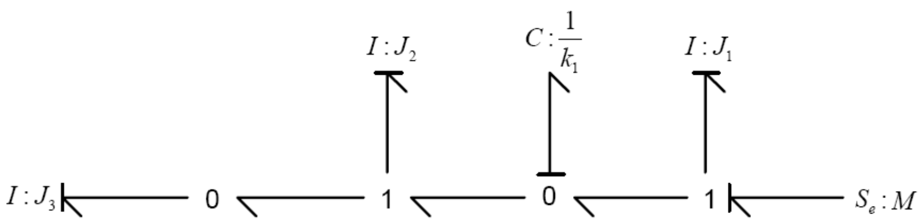
Moment inercije J_1 je spojen na drugi moment inercije J_2 preko rotacijske opruge k_1. Rotacijska opruga ima svojstvo da prenosi iznos momenta s jedne ne drugu stranu ali pri tome utječe na iznos kutne brzine ω. Dakle, tim je elementima zajednički napor pa ih povezujemo 0-spojem:



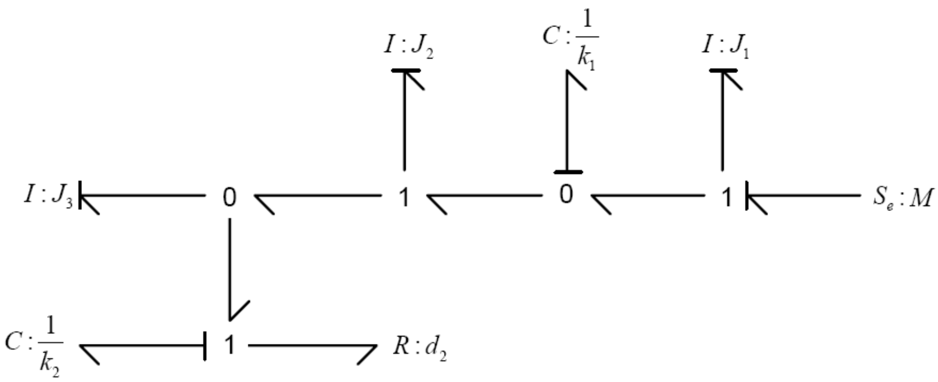
Moment inercije J_2 će, kao i J_1, utjecat na moment ali pri tome ostaviti jednaku brzinu vrtnje. Ista brzina - isti tok - povezujemo preko 1-spoja:



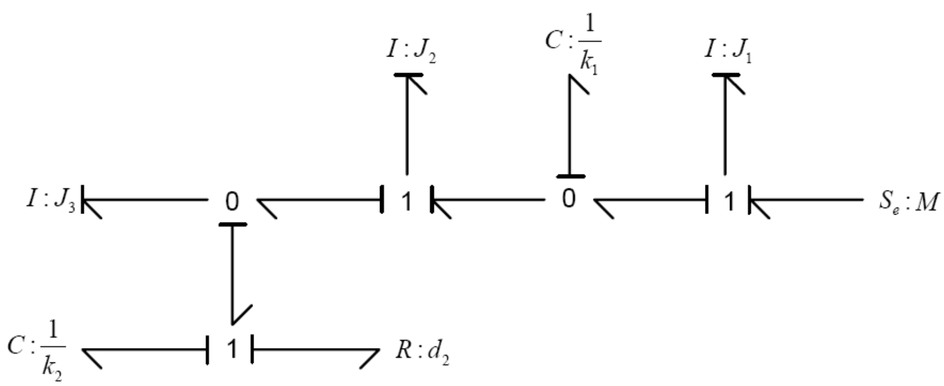
Zbog svojstva rotacijske opruge, paralelni spoje opruge i prigušnice će prenijeti isti moment na moment inercije J_3. Isti moment, odnosno napor povezujemo 0-spojem:



Sada je potrebno ucrtati paralelni spoj opruge i prigušnice. Taj paralelni spoj prenosi moment s jedne na drugu stranu i pri tome utječe na brzinu vrtnje na način da se razlika brzina vrtnji kompenzira upravo na tome paralelnom spoju. A prigušnica i opruga pri tome rotiraju istom tom brzinom razlike jedne i druge strane, što znači da im je zajednička brzina vrtnje - tok pa ih povezujemo preko 1-spoja:

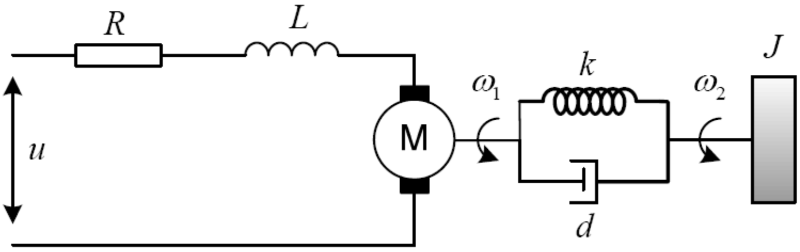


I na kraju ostaje samo nacrtati preostale crte kauzalnosti:



3.3 Zadatak 3.

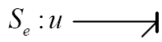
Za elektromehanički sustav prikazan na sl.11 potrebno je nacrtati pripadajući vezni graf, te na njemu naznačiti crte kauzalnosti.



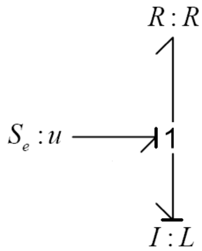
Slika 11: elektromehanički sustav

Rješenje:

Kao i do sad, prvo moramo uočit izvor a u ovom slučaju radi se naponskom izvoru, odnosno izvoru napora:



Taj je izvor serijski spojen sa otpornikom R, zavojnicom L te motorom sa četkicama. Po tome možemo zaključiti da se zapravo radi o istosmjernom motoru sa nezavisnom uzbudom a prikazani električni krug je armaturni krug motora. Kako se radi o serijskom spoju znači da kroz njih teče ista struja, odnosno zajednički im je tok pa ih povezujemo preko 1-spoja:

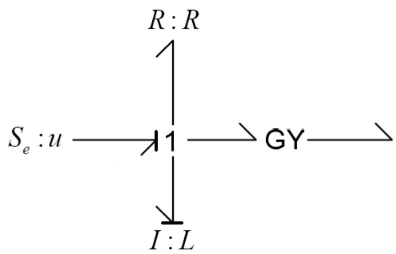


Jednadžbe istosmjernog motora su:

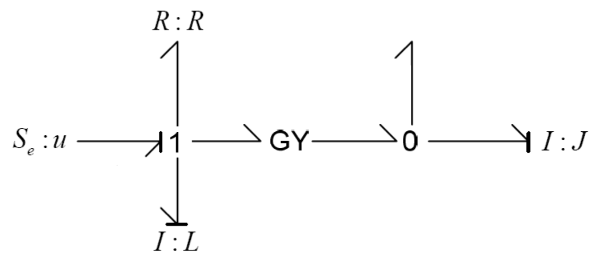
$$M = k \cdot i$$

$$\omega = k \cdot e$$

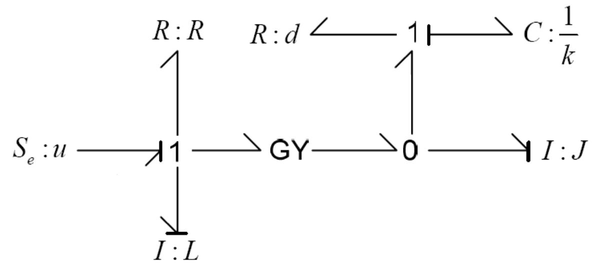
Što znači da motor pretvara elektromotornu silu e (napor) u brzinu vrtnje ω (tok) a struju i (tok) u moment motora M (napor). Dakle, radi se o giratoru:



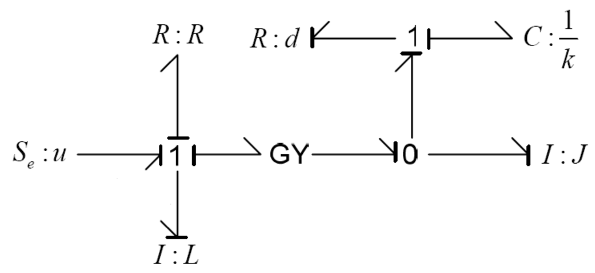
Moment motora M je spojen na moment inercije J preko paralelnog spoja opruge i prigušnice, odnosno svima im je zajednički iznos momenta odnosno zajednički napor pa ih povezujemo 0-spojem:



Kao što smo već rekli, paralelni spoj utječe na brzinu vrtnje tako da razliku jedne i druge strane kompenzira na sebi. I pri tome se i opruga i prigušnica vrte upravo tom, kompenziranom, brzinom pa im je zajednički tok što povezujemo 1-spojem:

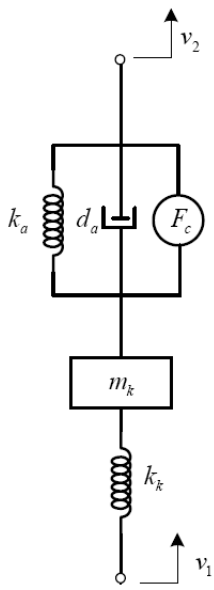


Na kraju, ostaje nam ucrtati do kraja sve crte kauzalnosti:



3.4 Zadatak 4.

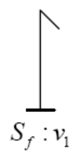
Na sl.12 dan je pojednostavljeni prikaz sustava suspenzije jednog automobilskog kotača. Potrebno je nacrtati pripadajući vezni graf, te na njemu naznačiti crte kauzalnosti.



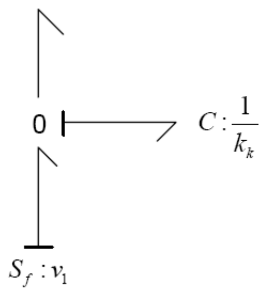
Slika 12: sustav suspenzije kotača

Rješenje:

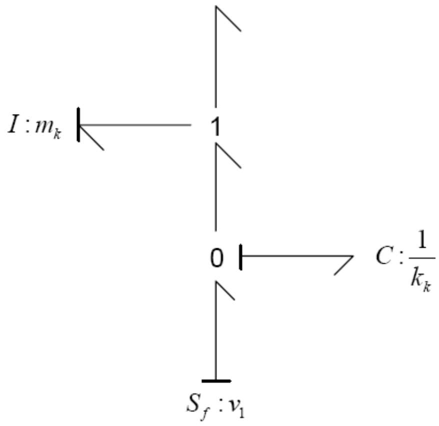
Na sustavu suspenzije vidimo da je brzina v_1 ulazna brzina koju treba smanjiti na brzinu v_2. Dakle, pri udaru automobilskog kotača na neku prepreku u sustav se unosi energija preko brzine v_1 pa nam to predstavlja izvor toka:



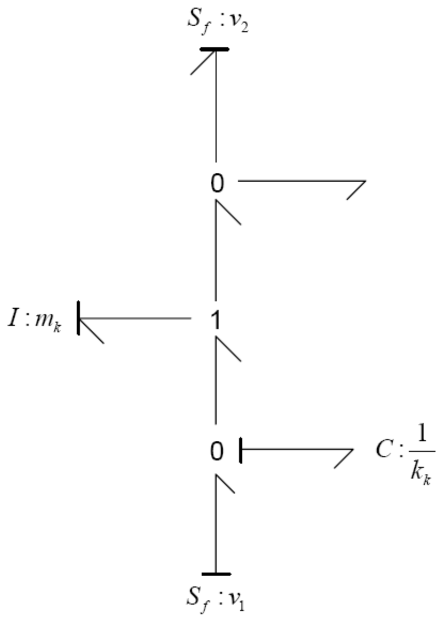
Sa izvora se prvo spaja na translacijsku oprugu k_k koja će na sebe preuzeti dio brzine ali će s obje strane opruge djelovati ista sila. Odnosno na masu m_k se prenosi isti napor pa ih povezujemo 0-spojem:



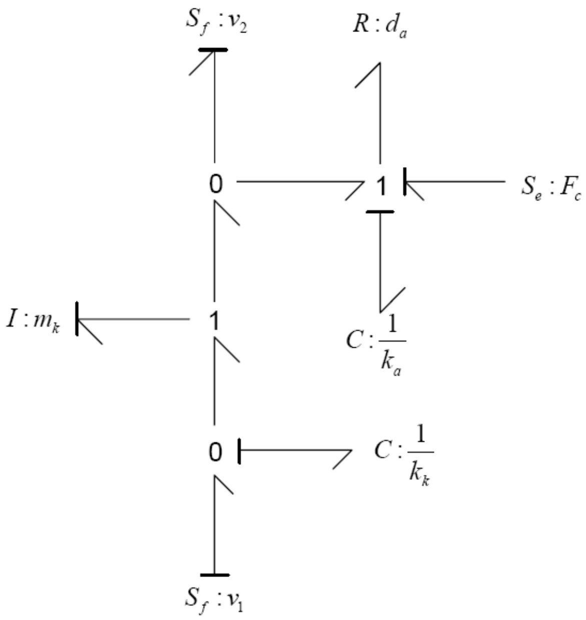
Masa m_k je skladište kinetičke energije i pri tome će prenijeti istu brzinu a utjecati na iznos sile koju prenosi. Ista brzina - isti tok povezujemo 1-spojem:



Paralelni spoj će prenijeti isti iznos sile ali će promijeniti brzinu u v_2 i ta brzina će predstavljati izvor toka vanjskom, daljnjem sustavu. Ista sila - isti napor povezujemo 0-spojem:



Paralelni spoj se giba istom brzinom razlike ali u svakoj je grani drugačija sila. Istu brzinu, odnosno tok povezujemo 1-spojem. U granama se nalaze opruga k_a (skladište potencijalne energije - C-element), prigušnica d_a (R-element) te izvor sile F_c (izvor napora)



Konačno, ucrtamo do kraja sve crte kauzalnosti i zadatak je gotov: