

Obrada signala u komunikacijama – Međuispit (2015./16.)

5.5.2016.

1. Zadan je signal $x[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$. Napisati izraz za pripadajući analitički signal te odrediti njegov spektar.

RJEŠENJE. 1. način. Izvede se Hilbertova transformacija Kroneckerove delta funkcije, računajući inverznu Fourierovu transformaciju spektra:

$$H_{\text{HT}}(e^{j\omega}) = -j \operatorname{sgn}(e^{j\omega}) \bullet \longrightarrow h_{\text{HT}}[n] = \frac{2}{\pi n} \sin^2 \left[n \frac{\pi}{2} \right].$$

(vidi izvod u skripti na 28. str.)

Uvrštavanjem zadanih pomaka i koeficijenata, dobije se:

$$\hat{x}[n] = \frac{2}{\pi n} \sin^2 \left[n \frac{\pi}{2} \right] - 2 \cdot \frac{2}{\pi(n-1)} \sin^2 \left[(n-1) \frac{\pi}{2} \right] + \frac{2}{\pi(n-2)} \sin^2 \left[(n-2) \frac{\pi}{2} \right]$$

Analitički signal je:

$$z[n] = x[n] + j\hat{x}[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2] + j \left(\frac{2}{\pi n} \sin^2 \left[n \frac{\pi}{2} \right] - 2 \cdot \frac{2}{\pi(n-1)} \sin^2 \left[(n-1) \frac{\pi}{2} \right] + \frac{2}{\pi(n-2)} \sin^2 \left[(n-2) \frac{\pi}{2} \right] \right)$$

Spektar analitičkog signala dobiva se preko spektra početnog signala $x[n]$.

$$\text{DTFT} \{x[n]\} = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}.$$

Analitički signal ima samo nenegativnu komponentu spektra, i to duplo veću od početnog za $\omega > 0$, a jednaku za $\omega = 0$. Spektar analitičkog signala jest, dakle: $\text{DTFT} \{z[n]\} = \text{DTFT} \{x[n]\} \cdot 2\mu(t)$ (gdje je $\mu(t)$ step funkcija uz $\mu(0) = \frac{1}{2}$).

2. način. Izračuna se spektar signala x :

$$\text{DTFT} \{x[n]\} = 1 - 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

Poznato je da je spektar analitičkog signala $z[n] = x[n] + j\hat{x}[n]$, a njegov spektar $\text{DTFT} \{z[n]\} = \text{DTFT} \{x[n]\} \cdot 2\mu(t)$ (gdje je $\mu(t)$ step funkcija uz $\mu(0) = \frac{1}{2}$). Sada je potrebno izračunati analitički signal $z[n] = x[n] + j\hat{x}[n]$ kao inverznu Fourierovu transformaciju (mentalna gimnastika):

$$z[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0^-}^{0^+} (1 - 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) e^{jn\omega} d\omega + \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi (1 - 2e^{-j\omega} + e^{-2j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

(prvi integral nema beskonačne skokove u nuli, pa ga u ovom slučaju nismo ni trebali uzeti u obzir)

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (e^{jn\omega} - 2e^{j(n-1)\omega} + e^{j(n-2)\omega}) d\omega = (\dots) = \frac{e^{jn\pi} - 1}{jn\pi} - 2 \cdot \frac{e^{j(n-1)\pi} - 1}{j(n-1)\pi} + \frac{e^{j(n-2)\pi} - 1}{j(n-2)\pi}$$

Za vrijednosti $n=0, 1$, i 2 treba računati limese. Prvi član može se srediti:

$$\frac{e^{jn\pi} - 1}{jn\pi} = j \frac{1 - e^{jn\pi}}{n\pi} = j \frac{1 - \cos[n\pi]}{n\pi} + \frac{\sin[n\pi]}{n\pi} = j \frac{2}{n\pi} \sin^2 \left[\frac{n\pi}{2} \right] + \delta[n]$$

Tako se mogu srediti i drugi i treći član. Konačan rezultat ispada jednako kao i kad se zadatak rješava na prvi način.

2. Izračunati razlučivosti frekvencija u diskretnoj i kontinuiranoj domeni za komponente podjednake amplituda, ukoliko se pomoću DFT-a želi odrediti spektar analognog signala uzorkovanog frekvencijom 100 MHz, sa korakom frekvencije 0.2 MHz. Pretpostaviti Blackmanov otvor.

RJEŠENJE. (Auditorne, primjer 3.2)

Uvidom u tablicu na šalabahteru, vidimo širinu glavne latice za Blackmanov otvor pri 6dB – 2.35. Uvjet za postojanje dvaju maksimuma, odnosno razlučivanje dviju frekvencija, jest da se susjedne latice preklapaju u točki gdje je razina latice barem -6dB u odnosu na maksimum.

Razlučivost: $f_r = w_{\text{Blackman}, 6\text{dB}} = 2.35\Delta$.

Za kontinuiranu domenu, $\Delta = \frac{f_s}{N}$, gdje je $N = \frac{100\text{MHz}}{0.2\text{MHz}}$.

Za diskretnu domenu, $\Delta = \frac{2\pi}{N}$.

Razlučivost kazuje koliko spektralne komponente mogu biti udaljene da bi ih se moglo detektirati (ako su preblizu, zbog karakteristika prozora im se spektar stopi u jedan siljak).

3. Modulacijski signal spektralno ograničen na $|\omega| < \omega_g$ dovodi se na ulaz sklopa sa slike 1. Pretpostaviti $\omega_0 \gg \omega_g$ i da izlazni signal predstavlja DSB-TC-AM signal. Potrebno je:

- a) nacrtati spektar u_2 ,
- b) odrediti područje propuštanja i gušenja pojasno-propusnog filtra,
- c) odrediti amplitudu nosioca izlaznog signala,
- d) odrediti konstantu amplitudne modulacije izlaznog signala.

RJEŠENJE.

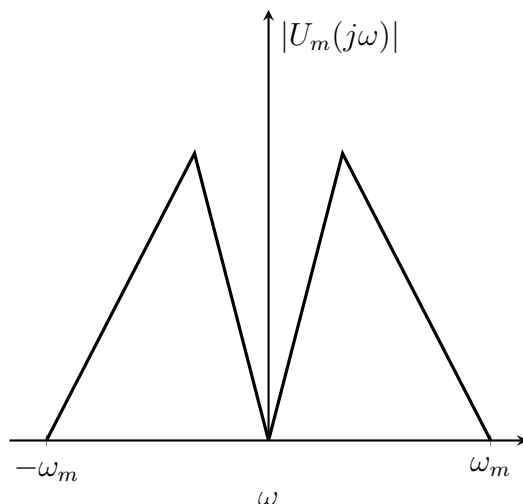
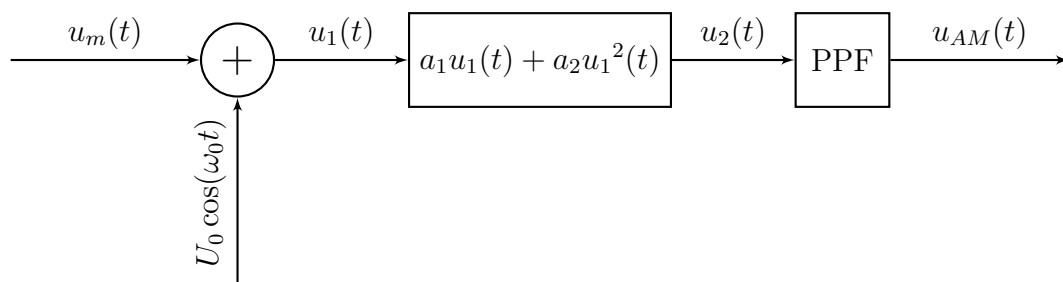
$$u_1(t) = u_m(t) + U_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$u_2(t) = a_1 u_m(t) + a_1 U_0 \cos(\omega_0 t) + a_2 (u_m(t) + U_0 \cos(\omega_0 t))^2$$

$$u_2(t) = a_1 u_m(t) + a_1 U_0 \cos(\omega_0 t) + a_2 (u_m^2(t) + 2u_m(t) U_0 \cos(\omega_0 t) + U_0^2 \cos^2(\omega_0 t))$$

$$u_2(t) = a_1 u_m(t) + a_1 U_0 \cos(\omega_0 t) + a_2 u_m^2(t) + 2a_2 u_m(t) U_0 \cos(\omega_0 t) + a_2 U_0^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t))$$

$$u_2(t) = a_1 U_0 \cos(\omega_0 t) + 2a_2 u_m(t) U_0 \cos(\omega_0 t) + \{a_1 u_m(t) + a_2 u_m^2(t) + a_2 U_0^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t))\}$$



Slika 1: Blok shema sklopa i spektar modulacijskog signala iz zadatka 3.

$$u_{2\text{PPF}}(t) = U_0 a_1 \left(1 + 2 \frac{a_2 u_m}{a_1} \right) \cos(\omega_0 t) = A (1 + m_{\text{AM}}) \cos(\omega_0 t)$$

$A = U_0 a_1$ – amplituda signala nosioca

$m_{\text{AM}} = 2 \frac{a_2 u_{m\text{max}}}{a_1}$ – konstanta amplitudne modulacije

4. (1. domaća zadaća – zadatak 4.)

RJEŠENJE. *rjesenje s materijali.fer2.net*

5. Definirati Hilbertovu transformaciju vremenski kontinuiranog signala. Izvesti izraz za impulsni odziv idealnog vremenski kontinuiranog Hilbertovog transformatora, napisati izraz za njegovu frekvencijsku karakteristiku. Nacrtati amplitudnu i faznu karakteristiku.

$$\text{RJEŠENJE. } \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} (v.p.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Uvrstavanjem Diracovog impulsa u navedenu formulu, integral umire na svim vrijednostima osim tamo gdje je Diracov impuls razlicit od nule, tj. za $\tau = 0$. Dirac vadi vrijednost te tocke van, pa ostaje $\frac{1}{\pi} \frac{1}{t} = \frac{1}{\pi t}$.

Frekvencijska karakteristika Hilbertatora $H_{HT}(j\omega) = -j \text{sgn}(\omega)$.

6. Navesti podjelu i uzroke izobličenja. Definirati THD i SFDR. Koliko je gušenje sustava ako je na ulazu 3 dBm, a na izlazu 100 dB_{pV}? Na izlaz je spojen otpornik od 50 ohma.

RJEŠENJE. Izobličenja mogu biti linearna i nelinearna. Uzroci su linearni i nelinearni elementi. THD (total harmonic distortion) - omjer efektivne vrijednosti svih nezelenih

komponenti i zeljene komponente (najcesce izrazen u dB).

SFDR (spurious-free dynamic range) - omjer snage zeljenog signala i najveće snage neželjenog signala.

Na ulazu u sustav mozemo vidjeti snagu signala, koja je izrazena u dBm-ovima, odnosno $3 = 10 \log_{10}(\frac{P}{1mW})$. Slijedi $10^{\frac{3}{10}} = \frac{P}{1mW} \rightarrow P_{ul} = 2mW$. Na izlazu je poznat napon signala te otpornik. Snagu na izlazu racunamo po formuli $P = \frac{U^2}{R}$. Treba iz zadanog podatka odrediti amplitudu napona: $100 = 20 \log_{10}(\frac{U}{1V}) \rightarrow U = 10^5 V$. $P = 0.0150 = 0.2mW$. Gubenje sustava iznosi $10 \log_{10}(\frac{0.2mW}{2mW}) = -10dB$.

7. Nacrtati blok shemu demodulatora kutno moduliranog signala koji koristi analitički signal lokalnog oscilatora. Izvesti relacije koje pokazuju princip rada ovog sklopa. U kojem slučaju je postupak neosjetljiv na razliku faza u odašiljaču i prijamniku?

RJEŠENJE. *Predavanje 8. Analogni modulacijski postupci; prikaznica 60-62*

8. Nacrati blok shemu sklopa za dobivanje kompleksne ovojnice iz moduliranog signala. Navesti dobre i loše strane ovakvog pristupa generiranju moduliranih signala. Kako se iz dobivene ovojnice dobiva signal kojim je moduliran nosilac u slučaju frekvencijske modulacije?

RJEŠENJE. *Predavanje 9. Izvedbe analognih prijemnika - prikaznica 21*