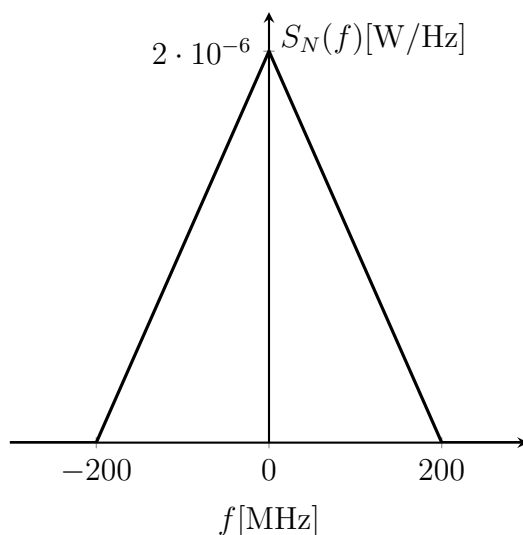


Obrada signala u komunikacijama – Završni ispit (2015./16.)

1.7.2016.

1. Odrediti koliko puta treba povećati indeks modulacije tako da kvaliteta prijenosa signala na frekvenciji nosioca 40 MHz bude, obzirom na odnos signal/šum, jednaka kvaliteti prijenosa na frekvenciji nosioca 160 MHz (u prijevodu: signalu se superponira šum čija je spektralna gustoća snage prikazana slikom 1).

Napomena: nakon otprilike pola sata otkriveno je da se radi o frekvencijskoj modulaciji (FM), što ne piše u tekstu zadatka.



Slika 1: Spektralna gustoća šuma iz zadatka 1.

RJEŠENJE. Zadano je:

$$f_{01} = 40 \text{ MHz}$$

$$f_{02} = 160 \text{ MHz}$$

Vrijedi:

$$M = M_{\text{AWGN}} \cdot \frac{N_M}{N_T}$$

(za detaljan izvod vidi Auditorne vježbe 13: Šum u prijenosnim sustavima)

U slučaju FM (formula na šalabahteru):

$$M_{\text{FM,AWGN}} = \frac{3}{2} \left(\frac{\Delta f}{f_M} \right)^2 = \frac{3}{2} (m_{\text{FM}})^2,$$

gdje je m_{FM} indeks modulacije. N_M i N_T su (*isto vidi auditorne*):

$$N_M = \frac{1}{B_N} \int_0^{f_M} S_N(f) df = S_N \left(\frac{f_M}{2} \right)$$

$$N_T = \frac{1}{B_T} \int_{f_0 - B_T/2}^{f_0 + B_T/2} S_N(f) df = S_N(f_0)$$

(S_N je pravac, pa je njegova srednja vrijednost na nekom intervalu jednaka vrijednosti funkcije na polovici toga intervala)

Želimo da kvalitete prijenosa M_1 i M_2 s obzirom na frekvencije signala nosioca f_1 i f_2 ostanu jednake:

$$M_1 = M_2$$

$$\frac{3}{2} (m_{\text{FM1}})^2 \cdot \frac{N_M}{N_{T1}} = \frac{3}{2} (m_{\text{FM2}})^2 \cdot \frac{N_M}{N_{T2}}$$

$$\frac{(m_{\text{FM1}})^2}{N_{T1}} = \frac{(m_{\text{FM2}})^2}{N_{T2}}$$

Dalje je lako:

$$\frac{m_{\text{FM2}}}{m_{\text{FM1}}} = \sqrt{\frac{S_N(f_{02})}{S_N(f_{01})}} = 2$$

2. Efektivna vrijednost šuma na izlazu 14-bitnog A/D pretvarača iznosi 1.4 LSB. Najveća frekvencija uzorkovanja pretvarača je 250 MHz. Tipična vrijednost srednje diferencijalne nelinearnosti iznosi 0.6 LSB, te efektivna vrijednost podrhtavanja trenutaka uzorkovanja 0.145 ps. Na upravljački ulaz pretvarača doveden je signal takta čija efektivna vrijednost podrhtavanja brida iznosi 0.3 ps. Odrediti odnos signal/šum ako je na ulaz pretvarača doveden sinusni signal frekvencije 50 MHz, najveće moguće amplitude.

RJEŠENJE. Zadano je:

$$t_{a,\text{RMS}} = 0.145 \text{ ps}$$

$$t_{c,\text{RMS}} = 0.3 \text{ ps}$$

$$\varepsilon = 0.6$$

$$U_{\text{nIN,LSB}} = 1.4$$

Ostali podaci koji su zadani su isključivo informativne prirode i nemaju utjecaja na traženi odnos signal/šum. Potrebno je izračunati $t_{j,\text{RMS}} = \sqrt{t_{c,\text{RMS}}^2 + t_{a,\text{RMS}}^2}$, i uvrstiti sve izraze u formulu na šalabahteru za SNR_{sin} .

3. Signal s izlaza međufrekvencijskog pojačala koje radi na frekvenciji 10.7 MHz uzorkuje se 14-bitnim pretvornikom čiji odnos signal/šum za signale do 25 MHz iznosi 80 dB. Digitalni podsustav prijmnika sadrži kompleksno miješalo, CIC decimator, i filter kanala. Frekvencija rada numerički upravljanog oscilatora iznosi $\frac{\pi}{2}$. Na izlazu filteranskog lanca frekvencija uzorkovanja iznosi 428 kHz. Prijemnik mora primati signale koji obuhvaćaju frekvencijsko područje širine 150 kHz.

Potrebno je:

- nacrtati blokovsku shemu prijmnika počevši od A/D pretvornika,
- odrediti red CIC decimatora tako da gušenje u područjima aliasa bude barem 100 dB,
- odrediti graničnu frekvenciju filtra kanala,
- odrediti odnos signal/šum na izlazu filteranskog lanca uz pretpostavku da je gušenje CIC decimatora u području propuštanja zanemarivo.

RJEŠENJE. Potrebno je odrediti frekvenciju uzorkovanja f_s A/D pretvornika. Zadane su frekvencije ulaznog signala $f_{ul} = 10.7$ MHz i lokalnog oscilatora $f_0 = \frac{\pi}{2}$.

Ako se radi uzorkovanje u osnovnom frekvencijskom području, tada mora vrijediti $\frac{f_{ul}}{f_s} = \frac{f_0}{2\pi}$, jer želimo da nakon uzorkovanja frekvencijom f_s , frekvencija ulaznog signala f_0 odgovara frekvenciji lokalnog oscilatora f_l u digitalnoj domeni kako bi se mogla izdvojiti kompleksna ovojnica signala. Iz toga slijedi da je $f_s = 4 \cdot f_{ul} = 42.8$ MHz. U usporedbi s frekvencijom na izlazu filteranskog lanca $f_{izl} = 428$ kHz, ova je 100 puta veća, što znači da će faktor decimacije R biti 100.

Ako je dopušteno raditi poduzorkovanje signala, tada mora vrijediti $\frac{f_{ul}}{f_s} = \frac{f_0 + 2k\pi}{2\pi}$ za bilo koji cijeli pozitivni broj k . Tada bi se frekvencije uzorkovanja f_s mogle uzeti kao $\frac{4}{4k+1} f_{ul}$. Npr. za $k = 1$ dobije se $f_s = 8.56$ MHz, $R = 20$; ili za $k = 6$: $f_s = 1.712$ MHz, $R = 4$. Ostali k -ovi ne daju cjelobrojne R . *Ne znamo postoji li neki razlog zašto se ne bi smjelo raditi poduzorkovanje – čini se da nije određeno nikakvim uvjetom u zadatku. Pro-tip od asistentice je da je trebalo raditi uzorkovanje u osnovnom području.*

Uzeto je uzorkovanje u osnovnom frekvencijskom području: $f_s = 42.8$ MHz, $R = 100$.

Najveći *aliasing* prilikom decimacije bit će na frekvenciji $\omega_a = \frac{2\pi}{R} - \omega_c = \frac{2\pi - \frac{150}{428}\pi}{R} = 0.01649\pi = 0.05182$ rad. Zadano je $20 \log |H(e^{j\omega_a})| = -100$. Iz amplitudne karakteristike određuje se red filtra N :

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{R^N} \left| \frac{\sin(\frac{\omega R}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|^N$$

$$N = \left\lceil \frac{\log |H(e^{j\omega_a})|}{\log \left(\frac{1}{R} \left| \frac{\sin(\frac{\omega_a R}{2})}{\sin(\frac{\omega_a}{2})} \right| \right)} \right\rceil = \lceil 7.19676 \rceil = 8$$

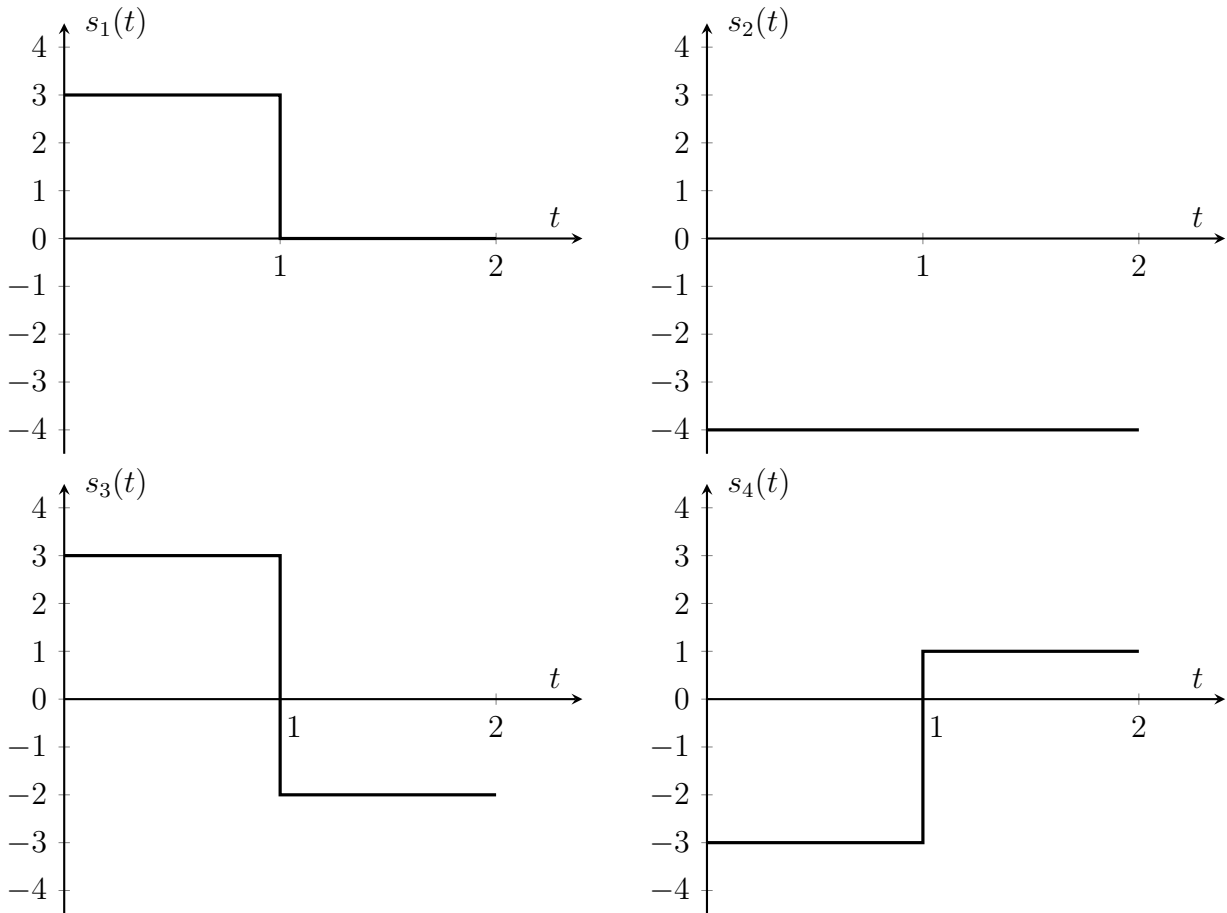
Granična frekvencija filtra kanala:

$$\omega_g = \frac{B/2}{f_{s,izl}} \cdot 2\pi = \frac{150/2}{428} \cdot 2\pi = 1.10103 \text{ rad.}$$

Odnos signal šum dobije se kao zbroj $\text{SNR}_{\text{AD}} + 10 \log\left(\frac{1}{2}\right) + \text{PG}_{\text{CIC}} + \text{PG}_{\text{FK}} = 80 - 3.01 + 10 \log(R) + 10 \log\left(\frac{428}{2 \cdot 150}\right) = 98.53 \text{ dB}$. -3.01 dB je tu zbog miješala.

4. Koristeći Gram-Schmidtov postupak ortogonalizacije potrebno je odrediti funkcije baze za zadani skup signala na slici 2, te napisati odgovarajuće vektore signala. Nacrtati prostor stanja i konstelaciju.

Tokom prijenosa jednog simbola, na izlazu dekodera dobiven je vektor koji odgovara ishodištu prostora stanja. Uz pretpostavku da je prijenos napravljen preko AWGN kanala, odrediti koji je simbol poslan.



Slika 2: Skup signala iz zadatka 4.

RJEŠENJE. 1. korak. Određuje se $\phi_1(t)$ kao:

$$\phi_1(t) = \frac{s_1(t)}{\sqrt{E_1}},$$

gdje je E_1 , energija od $s_1(t)$ (uz trajanje signala T_b):

$$E_1 = \int_0^{T_b} |s_1(t)|^2 dt.$$

Dakle:

$$\phi_1(t) = 1_{[0,1]}$$

(oznaka $(\cdot)_{[t_1, t_2]}$ je skraćeni zapis od $(\cdot)[\mu(t - t_2) - \mu(t - t_1)]$)

Signal $s_1(t)$ ima prikaz preko $\phi_1(t)$ kao $s_1(t) = s_{1,1} \cdot \phi_1(t) = 3 \cdot \phi_1(t)$. Koeficijenti $s_{k,m}$ računaju se kao $s_{k,m} = \int_0^{T_b} s_k(t)\phi_m(t)dt$.

Ostali koraci. Dalje se postupak ponavlja na sljedeći način: pokušavamo izraziti signal $s_k(t)$ kao linearnu kombinaciju svih prethodnih M funkcija baze $\phi_i(t)$, a ako se pri tome pojavi ostatak, tada se skup funkcija baze proširuje dodatnom funkcijom koja je jednaka normiranom ostatku:

$$s_k(t) = \sum_{m=1}^M s_{k,m}\phi_m(t) + g_k(t)$$

Ako je $g_k(t)$ različito od nule, tada je potrebno skup baznih funkcija proširiti sa funkcijom $\frac{g_k(t)}{E_k}$, gdje je E_k energija signala $g_k(t)$, $E_k = \int_0^{T_b} |g_k(t)|^2 dt$.

Računa se $s_{2,1}$:

$$s_{2,1} = \int_0^{T_b} s_2(t)\phi_1(t)dt = -4$$

Signal $s_2(t)$ ima prikaz:

$$s_2(t) = s_{2,1} \cdot \phi_1(t) + g_2(t) = -4 \cdot 1_{[0,1]} + g_2(t)$$

Iz toga se izračunaju $g_2(t) = -4 \cdot -1_{[1,2]}$, $\phi_2(t) = (-1)_{[1,2]}$, i $s_{2,2} = 4$. Signal $s_2(t)$ može se prikazati preko funkcija baza kao:

$$s_2(t) = -4 \cdot \phi_1(t) + 4 \cdot \phi_2(t)$$

Računaju se $s_{3,1}$ i $s_{3,2}$:

$$s_{3,1} = 3, \quad s_{3,2} = 2$$

Signal $s_3(t)$ može se prikazati preko funkcija baza kao:

$$s_3(t) = s_{3,1} \cdot \phi_1(t) + s_{3,2} \cdot \phi_2(t) + g_3(t) = 3 \cdot 1_{[0,1]} + 2 \cdot (-1)_{[0,1]} + g_3(t)$$

Iz toga se izračuna $g_3(t) = 0$. Nema nove funkcije baze u ovom koraku.

Računaju se $s_{4,1}$ i $s_{4,2}$:

$$s_{4,1} = -3, \quad s_{4,2} = -1$$

Signal $s_4(t)$ može se prikazati preko funkcija baza kao:

$$s_4(t) = s_{4,1} \cdot \phi_1(t) + s_{4,2} \cdot \phi_2(t) + g_4(t) = -3 \cdot 1_{[0,1]} - 1 \cdot (-1)_{[0,1]} + g_4(t)$$

Iz toga izračuna $g_4(t) = 0$. Nema nove funkcije baze ni u ovom koraku.

Vektorski prikazi signala preko funkcija baza su:

$$s_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, s_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \end{bmatrix}, s_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, s_4 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ako je primljen signal čiji je prikaz preko funkcija baza jednak $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, najbliži odgovarajući simbol prema Euklidskoj udaljenosti je $s_1(t)$.

5. (*Auditorne vježbe – zadatak 57.*)

Nacrtati blokovsku shemu programski definiranog prijemnika s poduzorkovanjem. U kojem dijelu lanca za obradu se dobiva kompleksna ovojnica? Opisati i objasniti oblik signala lokalnog oscilatora u sklopu za dobivanje kompleksne ovojnice u slučaju kad se željeni kanal nalazi u sredini frekvencijskog područja.

RJEŠENJE. Shema je prikazana na stranici 234. Kompleksna ovojnica dobiva se unutar digitalnog podsustava. Kompleksna ovojnica dobiva se transpozicijom signala za $\pi/2$; stoga je oblik lokalnog oscilatora $e^{j\frac{\pi}{2}n} = \cos\left[\frac{\pi}{2}n\right] + j \sin\left[\frac{\pi}{2}n\right]$, odnosno $\{1, 0, -1, 0, \dots\}$ u realnoj i $\{0, 1, 0, -1, \dots\}$ u imaginarnoj grani, što je trivijalno za implementaciju.

6. (*Auditorne vježbe – zadatak 71.*)

Napisati izraz koji opisuje prijenosnu funkciju CIC filtra N-tog reda te nacrtati realizaciju CIC interpolatora koji koristi ovakav filter. Opisati problem koji ograničava frekvenciju takta ovog sklopa, te nacrtati realizaciju koja rješava ovaj problem.

RJEŠENJE. Sheme su prikazane na stranici 275. Prijenosna funkcija CIC filtra N-tog reda je:

$$H(z) = \left(\frac{1}{R} \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}} \right)^N,$$

gdje je R faktor decimacije. Signal se propagira kroz N zbrajala u integratorskoj sekciji, zbog čega se povećanjem reda N smanjuje maksimalna frekvencija takta na kojem decimator može raditi. Preslagivanjem registara unutar integratorske sekcije rješava se taj problem, ali tada prijenosna funkcija poprima sljedeći oblik:

$$H(z) = z^{-N} \left(\frac{1}{R} \frac{1 - z^{-R}}{1 - z^{-1}} \right)^N,$$

odnosno, dodan je faktor z^{-N} koji unosi fazni pomak.

7. (*Auditorne vježbe – zadatak 88.*)

Opisati princip koherentne binarne FSK modulacije. Dati izraze za signale koji odgovaraju simbolima te funkcije baze koje daje Gram-Schmidt ortogonalizacija primijenjena na te signale. Dati prikaz prostora signala.

RJEŠENJE. Signali, prostor stanja i granice odluke prikazani su na stranicama 352 i 353. Kod FSK modulacije, simboli se kodiraju sinusoidnim signalima s različitim (diskretnim) frekvencijama. Postoje dva signala trajanja T_b i energije E_b , to su:

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t), \quad s_2(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t),$$

te dvije funkcije baze:

$$\phi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_1 t), \quad \phi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{T_b}} \cos(2\pi f_2 t).$$

8. (*Auditorne vježbe – zadatak 95.*)

Čemu služi zaštitni interval kod OFDM modulacijskog postupka? Opisati zaštitni interval s nulama i zaštitni interval s cikličkim prefiksom? Kako se kod simbola koji sadrže ovakve zaštitne intervale određuje početak simbola? Koja je prednost cikličkog prefiksa pred zaštitnim intervalom s nulama?

RJEŠENJE. Dodavanje zaštitnog intervala kod OFDM-a služi da bi se izbjeglo preslušavanje između simbola koje je posljedica nelinearne fazne karakteristike sustava. Jedna mogućnost zaštitnog intervala je nadopunjavanje nulama – tako se lako može odrediti početak simbola tamo gdje mu prethode nule, a druga je dodavanje cikličkog prefiksa, tj. dijela s kraja signala na početak. Prednost cikličkog prefiksa je što, u slučaju da se FFT prozorom ne pogodi točan početak simbola, pojavljuje samo pomak u fazi, iz kojeg se može utvrditi pravi položaj simbola.