15. 4. 2014.

Obrada signala u komunikacijama
1. domaća zadaća

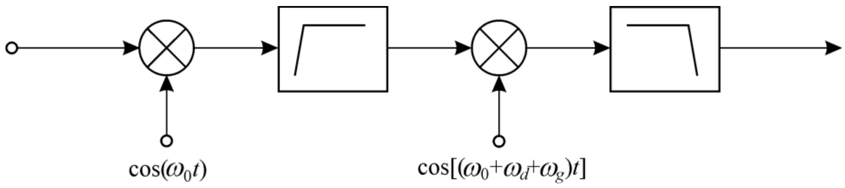
Zadatak 1 (5 bodova)
Odrediti impulsni odziv idealnog digitalnog negativno propusnog filtra s područjem propuštanja od -0.5π do -0.1π i kašnjenja 6 uzoraka.

Zadatak 2 (5 bodova)
Odrediti frekvencijsko područje i energiju signala

$$u(t) = \frac{5}{\pi}\operatorname{sinc}(5t)\sin(300\pi t)$$

gdje sinc označava nenormiranu sinc funkciju.

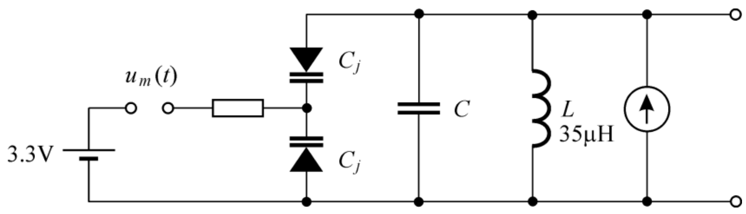
Zadatak 3 (5 bodova)
Modulacijski signal spektralno ograničen na frekvencijskom području $\omega_d \leq |\omega| \leq \omega_g$ dovodi se na ulaz sustava prikazanog slikom



Visokopropusni i niskopropusni filtar imaju jednake granične frekvencije iznosa ω_0. Uz pretpostavku $\omega_0 > \omega_g$, potrebno je na primjeru sinusnog modulacijskog signala čija se frekvencija nalazi u zadanom području odrediti izraz za signal na izlazu sklopa. Kako se zove ovaj sklop?

Zadatak 4 (5 bodova)
Na ulaz naponski upravljanog oscilatora prikazanog slikom dovodi se modulacijski signal dinamike ±50mV i granične frekvencije 10kHz. Na izlazu oscilatora dobiva se modulirani signal frekvencije nosioca 2MHz. Odrediti iznos kapaciteta *C*, te širinu frekvencijskog područja u kojem su smještene značajnije komponente moduliranog signala. Pretpostaviti da se kapacitet varikap diode ovisno o naponu na njezinim stezaljkama mijenja prema izrazu

$$C_j = \frac{120}{\sqrt{U[V]}}, \quad [\mathrm{pF}]$$



Zadatak 5 (5 bodova)
Definirati mjere izobličenja signala THD i SFDR, te razinu signala. Koliko je gušenje sustava ako je na njegovom ulazu izmjerena razina signala od 3dBm, a na izlazu na impedanciji od 50Ω je izmjerena razina od 100dBμV?

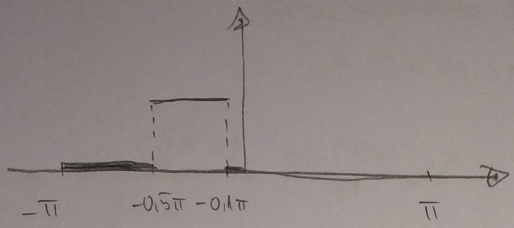
Zadatak 6 (5 bodova)
Nacrtati blokovsku shemu kompleksnog amplitudnog demodulatora USB signala. Izvesti izraz za signal na izlazu demodulatora, te izraz za njegov spektar. U izvodu pretpostaviti proizvoljni modulacijski signal $u_m(t)$, te proizvoljni fazni pomak nosioca u demodulatoru φ.

Zadatak 7 (5 bodova)
Napisati izraz za fazno modulirani signal. Izvesti izraz za spektar moduliranog signala uz pretpostavku da je modulacijski signal sinusnog valnog oblika.

Zadatak 8 (5 bodova)
Nacrtati blokovsku shemu, te opisati rad analognog prijemnika s direktnom pretvorbom frekvencije koji koristi realno miješanje. Korištenjem kanonskog oblika pojasnopropusnog signala opisati probleme koji se javljaju kod ovog prijemnika, te načine kako se oni rješavaju.

Zadatak 1

impulsni odziv idealnog digitalnog negativno propusnog filtra s područjem propuštanja $-0{,}5\pi$ do $-0{,}1\pi$ i kašnjenja 6 uzoraka



kašnjenje $\Longrightarrow$ 6 uzoraka

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-0{,}5\pi}^{-0{,}1\pi} e^{j\omega n}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{jn}\cdot e^{j\omega n}\Big|_{\omega=-0{,}5\pi}^{-0{,}1\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi j n}\cdot\left[e^{-j0{,}1\pi n} - e^{-j0{,}5\pi n}\right] = \frac{1}{2\pi j n}\cdot e^{-j0{,}3\pi n}\cdot\left[e^{j0{,}2\pi n} - e^{-j0{,}2\pi n}\right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi j n}}\cdot e^{-j0{,}3n\pi}\cdot\cancel{2j}\cdot\sin(0{,}2\pi n) = \frac{1}{\pi n} e^{-j0{,}3\pi n}\cdot\sin(0{,}2\pi n)$$

zakasniti za 6 uzoraka:

$$x[n-6] = \frac{1}{\pi(n-6)}\cdot e^{-j0{,}3\pi(n-6)}\cdot\sin(0{,}2\pi(n-6))$$

Zadatak 2

Odredi frekv. područje i energiju signala

$$u(t) = \frac{5}{\pi}\, \mathrm{sinc}(5t)\, \sin(300\pi t)$$

↳ nenormirana sinc fca

$$\omega t = \pi \cdot x \Rightarrow x = \frac{\omega t}{\pi} \Rightarrow \frac{5}{\pi}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{5}{\pi}t\right) \sin(300\pi t)$$

↳ normirani sinc

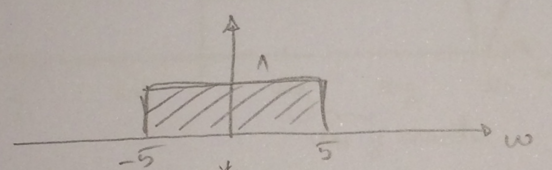
$$\mathrm{sinc} \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{5}{\cancel{\pi}}t \cdot \cancel{\pi}\right)}{\frac{5}{\cancel{\pi}}t \cdot \cancel{\pi}} = \frac{\sin(5t)}{5t} \checkmark$$

$$\frac{5}{\pi}\, \mathrm{sinc}\left(\frac{5}{\pi}t\right) \quad , \quad \mathrm{sinc}(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{a}\, \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi a}\right)$$

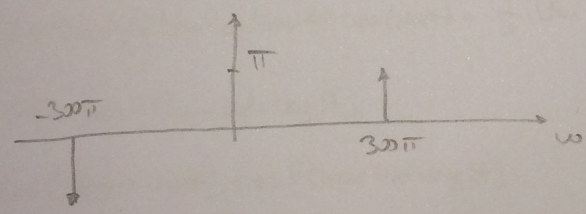
$$\circ\!\!-\!\!\bullet \frac{5}{\pi} \cdot \frac{\pi}{5} \cdot \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi \cdot \frac{\pi}{5}}\right) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

$$\sin(300\pi t) \quad , \quad \sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet -j\pi\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right)$$

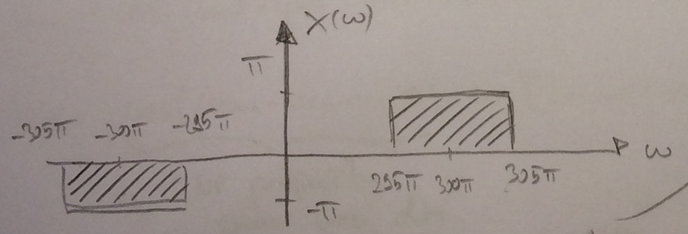
$$\circ\!\!-\!\!\bullet -j\pi\left(\delta(\omega - 300\pi) - \delta(\omega + 300\pi)\right)$$



$*$



$=$



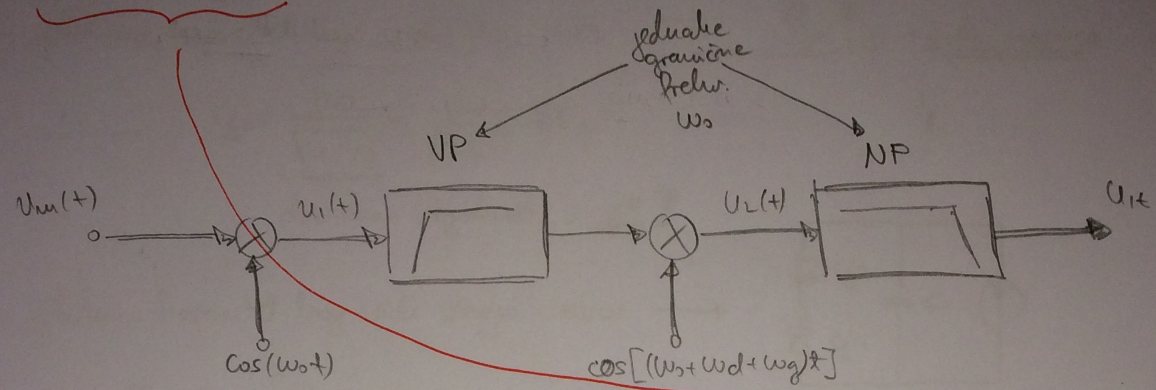
isto = 2x

energija $\Rightarrow$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{-305\pi}^{-295\pi} |X(\omega)|^2 d\omega + \int_{295\pi}^{305\pi} |X(\omega)|^2 d\omega \right) = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \cancel{2} \cdot 10\cancel{\pi} = \boxed{10}$$

površina jednog rect

Zadatak 3

$\omega_d \leq |\omega| \leq \omega_g$

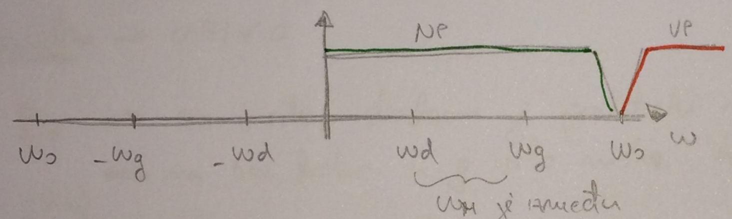


pretpostavka: $\omega_0 > \omega_g$

sinusni modulacijski signal (frekv. se nalazi u danom području) $\Rightarrow u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$

Izraz za signal na izlazu?

Kako se zove sklop? $\Rightarrow$ SCRAMBLER



VP propušta samo ovaj dio

$$u_1(t) = u_m(t)\cdot\cos(\omega_0 t) = U_m\cos(\omega_m t)\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\cdot U_m\left[\cos(\omega_m t - \omega_0 t) + \underbrace{\cos(\omega_m t + \omega_0 t)}_{\text{VP propušta samo ovaj dio}}\right]$$

$$u_2(t) = VP[u_1(t)]\cdot\cos[(\omega_0+\omega_d+\omega_g)t]$$

$$= \frac{1}{2}U_m\cos[(\omega_m+\omega_0)t]\cos[(\omega_0+\omega_d+\omega_g)t]$$

$$= \frac{1}{4}U_m\cdot\left\{\cos[\omega_m t + \cancel{\omega_0 t} - \cancel{\omega_0 t} - \omega_d t - \omega_g t] + \cos[\omega_m t + \omega_0 t + \omega_0 t + \omega_d t + \omega_g t]\right\}$$

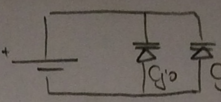
$$= \frac{1}{4}U_m\cdot\left\{\underbrace{\cos[(\omega_m-\omega_d-\omega_g)t]}_{\text{NP propušta samo ovaj dio}} + \cos[(\omega_m+2\omega_0+\omega_d+\omega_g)t]\right\}$$

$$u_{iz}(t) = NP[u_2(t)] = \frac{U_m}{4}\cos[(\omega_m-\omega_d-\omega_g)t]$$

zadatak 4 (auditorne)

DC analiza → $u_m(t)=0$

→ gledamo kapacitet koji vidi U_B →

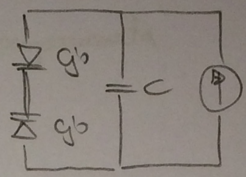


→ frekv. nosioca

$$C_{j0} = \frac{120}{\sqrt{u[V]}} = \frac{120}{\sqrt{3.3}} = 66\,pF$$

dobivamo vrijednost u pF!

→ gledamo kapacitet koji vidi strujni izvor →



$$C_0 = C + \frac{C_{j0}}{2}$$

* modulirani signal frekv. nosioca $f_0 = 2MHz$ → $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}}$ → $C_0 = \frac{1}{(2\pi f_0)^2\cdot L} = \underline{181\,pF}$

zadano $35\,\mu H$

$$C_0 = C + \frac{C_{j0}}{2} \Rightarrow C = C_0 - \frac{C_{j0}}{2} = \underline{148\,pF}$$

→ širina frekv. spektra u kojoj su smještene značajnije komponente mod. signala

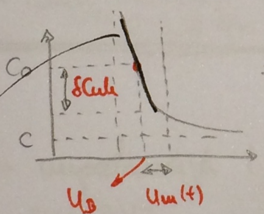
AC analiza → $u(t) \neq 0$

$f_M \ll f_0$ ⇒ na varikap diodama je praktički napon $U_B + u_m(t)$

⇒ na tim frekv. L je vrlo niska, a C vrlo visoke impedancije!

(10kHz << 2MHz)

$C_{uk} = C + \frac{C_j(t)}{2}$ ⇒



$$\Rightarrow C + \frac{C_{j0}+\delta C_j}{2} = \underbrace{C + \frac{C_{j0}}{2}}_{\text{izračunali već } C_0} + \frac{\delta C_j}{2}$$

δC_{uk}

$$\boxed{C_0 + \delta C_{uk} = C_{uk}}$$

trebamo napraviti linearizaciju ⇒ $\delta C_{uk} = k\cdot u_m(t)$

→ trenutna frekv. oscilacija $\omega_i = \frac{1}{\sqrt{LC_{uk}}} = \frac{1}{\sqrt{LC_0}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{\delta C_{uk}}{C_0}}}$

⇒ uz pretpostavku $\delta C_{uk} \ll C_0$

$$\Rightarrow \omega_i = \omega_0\left(1 - \frac{\delta C_{uk}}{2C_0}\right) = \omega_0 - \frac{\omega_0}{2C_0}\cdot k\cdot u_m(t) = \omega_0 + K_\omega u_m(t), \quad \boxed{K_\omega = -\frac{\omega_0}{2C_0}\cdot k}$$

$$\cancel{2\pi} K_f = K_\omega = -\frac{2\pi f_0}{2C_0}\cdot k \Rightarrow K_f = -\frac{f_0 k}{2C_0} = \underline{27,65\,\frac{kHz}{V}}$$

k → derivacija u točki $\frac{\delta C_j}{2}$

$$k = \frac{dC_{uk}}{du}\Big|_{u=U_B} = \frac{1}{2}\frac{dC_j}{du}\Big|_{u=U_B} = -\frac{30}{\sqrt{U_B^3}}$$

$B_{FM} = 2\Delta f + 2f_M$ (Carsonovo pravilo → estimacija)

$= 2\cdot K_f\cdot|u_m(t)|_{max} + 2f_M$

dinamika ±50mV → max 50mV

$= \underline{22,8\,kHz}$

Zadatak 5

THD → koeficijent ukupnog harmoničkog izobličenja

└→ Total Harmonic Distortion

$$THD = \frac{\text{snaga neželjenih harmonika}}{\text{snaga osnovnog harmonika}} = \underbrace{\frac{U_{2rms}^2 + U_{3rms}^2 + U_{4rms}^2 + \dots}{U_{1rms}^2}}_{*}$$

⇒ $10\log_{10} * \rightarrow$ THD [dB]

SFDR → dinamički raspon signala bez neželjenih komponenata

└→ Spurious Free Dynamic Range

$$SFDR = 10\log_{10}\frac{U_{s,rms}^2}{U_{1rms}^2} \text{ [dBc]} \rightarrow \text{decibels below carrier}$$

RAZINA SIGNALA →

→ ako je poznata **snaga** u nekoj točki prijenosnog sustava:

$$P_S = 10\log_{10}\frac{|S|}{1W} \text{ [dBW]}$$

$$P_S = 10\log_{10}\frac{|S|}{1mW} \text{ [dBm]}$$

→ ako je poznata **impedancija** i **napon** u nekoj točki prijenosnog sustava:

$$P_U = 10\log_{10}\left(\frac{U_{rms}}{0{,}2236\,V_{rms}}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{U_{rms}}{0{,}2236\,V_{rms}} \text{ [dBm]}$$

npr. ref. snaga 1mW
impedancija 50Ω

ref. napon

$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow U = 0{,}2236\,V_{rms}$

→ ako je poznata **impedancija** i **struja** u nekoj točki prijenosnog sustava:

$$P_I = 20\log_{10}\frac{I_{rms}}{4{,}472\cdot10^{-3}A_{rms}} \text{ [dBm]}$$

npr. ref snaga 1mW
impedancija 50Ω

ref. struja

$P = I^2R \Rightarrow I = 4{,}472\,A_{rms}$

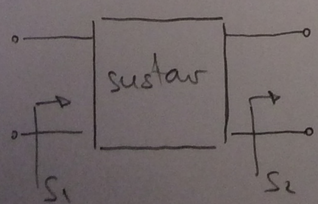
Zad: gušenje sustava? → $\boxed{A = 10\log_{10}\left|\frac{S_1}{S_2}\right|}$

ako je na ulazu izmjerena razina signala 3dBm, a na izlazu (impedancija 50Ω) je izmjerena razina od 100 dBμV

ref snaga 1mW

$U_{ref} = 0{,}2236\,V_{rms}$

$$S_1 = 10\log_{10}\frac{S_1'}{1mW} = 3dBm$$



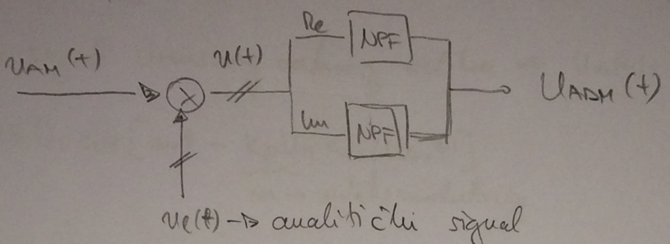
$$S_2 = 20\log_{10}\frac{U_{rms}}{1\mu V_{rms}} = 100\,dB\mu V \Rightarrow U_{rms} = 0{,}1V \Rightarrow S_2^* = 20\log_{10}\frac{0{,}1\,V}{0{,}2236\,V_{rms}} = -6{,}99dBm$$

$$A = 10\log_{10}\left|\frac{S_1}{S_2}\right| = S_1 - S_2^* = 10$$

Zadatak 6

→ shema: kompleksni amplitudni demodulator USB signala
→ Izvedi izraz za signal na izlazu demodulatora, te izraz za njegov spektar
* pretpostavi proizvoljni modulacijski signal $u_m(t)$, te proizvoljni fazni pomak nosioca u demodulatoru φ

shema:



$$\underbrace{u_{AM}(t) = u_p(t)\cos(\omega_0 t) \quad , \quad u_c(t) = e^{j(\omega_0 t + \varphi)}}_{\text{množenje}}$$

$$u(t) = u_{AM}(t)\cdot u_c(t) = u_p(t)\cos(\omega_0 t)\cdot e^{j(\omega_0 t+\varphi)}$$

$$= u_p(t)\cos(\omega_0 t)\cdot(\cos(\omega_0 t+\varphi) + j\sin(\omega_0 t+\varphi))$$

$$= u_p(t)\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t+\varphi) + j u_p(t)\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t+\varphi)$$

trigonometrijske relacije ⟹ $\cos x\cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$

$\cos x \sin y = \frac{1}{2}(-\sin(x-y)+\sin(x+y))$

$$= \frac{1}{2}u_p(t)\cdot\left\{\cos(-\varphi)+\cos(2\omega_0 t+\varphi) - j\sin(-\varphi) + j\sin(2\omega_0 t+\varphi)\right\}$$

grupiranje po položaju u spektru ⟹ $u(t) = \frac{1}{2}u_p(t)\cdot\cos(\varphi) + j\frac{1}{2}u_p(t)\sin(\varphi)$ ⟶ ŽELIMO

$+\frac{1}{2}u_p(t)\cos(2\omega_0 t+\varphi) + j\frac{1}{2}u_p(t)\sin(2\omega_0 t+\varphi)$ → NE ŽELIMO

⟹ neželjena komp. se uklanja filtrom

$U_1(j\omega) = U(j\omega)\cdot H(j\omega) \Rightarrow U_{1re}(j\omega) + jU_{1im}(j\omega) = [U_{re}(j\omega) + jU_{im}(j\omega)]\cdot H(j\omega)$ (posebno filtriramo Re i Im dio)

⟹ $u_1(t) = \frac{1}{2}u_p(t)\cos(\varphi) + j\frac{1}{2}u_p(t)\sin(\varphi)$

⟹ trenutna amplituda ⟹ $|u_{ADM}(t)| = \underline{\underline{\frac{1}{2}|u_p(t)| = u_{ADM}(t)}}$ ⟹ ne ovisi o razlici faza između nosilaca u odašiljaču i prijemniku

Zadatak 7

→ fazno modulirani signal
→ izraz za spektar mod. signala uz pretpostavku da je mod. signal sinusnog valnog oblika

fazno modulirani signal → $u_{PM}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + k_p u_m(t)]$

→ modulacijski signal sinusnog valnog oblika ⇒ $u_m(t) = U_m \cos(\omega_m t)$

$$u_{PM}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \underbrace{k_p U_M}_{m \to \text{indeks modulacije}} \cos(\omega_m t)]$$

izvod:
(spektar)

$\hookrightarrow u_{KM}(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + m \cos(\omega_m t)]$, * $\overbrace{\cos[\alpha + m \cdot \cos\beta]}^{\text{ovaj slučaj}}$ ili moguće $\cos[\alpha + m \sin\beta]$

$\hookrightarrow = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cos(\alpha + n\beta + n\frac{\pi}{2})$

$$\Rightarrow u_{KM}(t) = U_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cos(\omega_0 t + n \cdot \omega_m t + n\frac{\pi}{2})$$

$$= U_0 \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(m) \cos((\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2})$$

$$u_{KM}(t) = U_0 \cdot \left\{ \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(m) \cos[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}]}_{\text{prva suma}} + \underbrace{J_0(m) \cos(\omega_0 t)}_{n=\emptyset} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} J_n(m) \cos[(\omega_0 + n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}]}_{\text{druga suma}} \right\}$$

$\hookrightarrow$ zapišemo drugačije ⇒ $\sum_{n=1}^{\infty} J_{-n}(m) \cos[(\omega_0 - n\omega_m)t - n\frac{\pi}{2}]$, pravilo ⇒ $\underline{J_{-n}(m) = (-1)^n J_n(m)}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos[(\omega_0 - n\omega_m)t - n\frac{\pi}{2}] \cos(n\pi)$$

* $(-1)^n = \cos(n\pi)$

* $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)]$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \frac{1}{2} \left\{ \cos[(\omega_0 - n\omega_m)t - \underbrace{n\frac{3\pi}{2}}_{-n\frac{3\pi}{2} = n\frac{\pi}{2}}] + \cos[(\omega_0 - n\omega_m)t + n\frac{\pi}{2}] \right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cos[(\omega_0 - n\omega_m)t - n\frac{\pi}{2}]$$

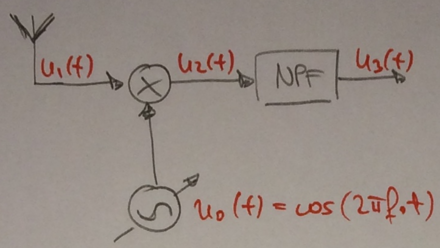
$$\Rightarrow \underline{u_{KM}(t) = U_0 J_0(m) \cos(\omega_0 t) + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \left\{ \cos[(\omega_0 - n\omega_m)t + \frac{n\pi}{2}] + \cos[(\omega_0 + n\omega_m)t + \frac{n\pi}{2}] \right\}}$$

$$U_{KM}(\omega) = U_0 J_0(m)\pi (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + U_0 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m) \cdot \pi \cdot \Big(\delta(\omega - \omega_0 + n\omega_m + \frac{n\pi}{2}) + \delta(\omega + \omega_0 - n\omega_m + \frac{n\pi}{2})$$
$$+ \delta(\omega - \omega_0 - n\omega_m + \frac{n\pi}{2}) + \delta(\omega + \omega_0 + n\omega_m + \frac{n\pi}{2}) \Big)$$

Zadatak 8

analogni prijemnik s direktnom pretvorbom frekv. koji koristi realno miješanje

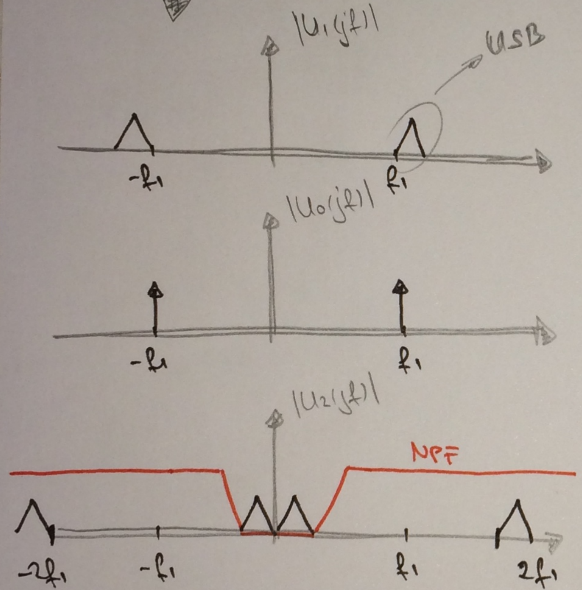
blokovska <u>shema</u>:



→ princip rada:

IDEJA: uzeti međufrekvenciju $f_{MF} = 0$ ⇒ u tom slučaju koristimo NPF kako bi izdvojili željenu informaciju

⇒ jednostavna realizacija



⇒ $f_1 = X$ MHz

⇒ ako smo odabrali f_0 tako da odgovara vlastitoj frekvenciji, množenjem tih dviju frekvencija dobijemo komponente na

$-2f,\ 0,\ 2f$

↓ (ispod 0)

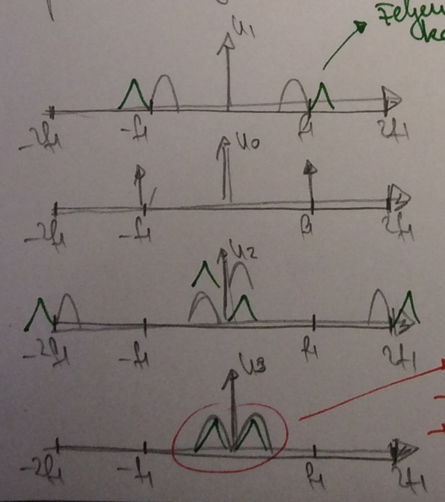
ovo želimo

→ PROBLEM: radi ali ne uvijek jer mi nikada na prijemniku nemamo tako čisti signal

→ zrcalne frekvencije ⇒ ovom metodom se ne mogu ukloniti

⇒ probleme rješavamo ako koristimo $\underbrace{\text{KOMPLEKSNO miješanje}}$

↳ U_0 je analitički pa imamo samo lijevi ili samo desni dio spektra pa se kanali ne zbrajaju ✓



→ problem
→ ne možemo ukloniti
→ nekad neželjeni kanal ima i stotinu puta veću amplitudu od željenog !!