

(1.)

Definirati Fourierovu transformaciju vremenski kontinuiranog signala (CTFT) i inverznu Fourierovu transformaciju vremenski kontinuiranog signala (CTFT). Opisati vezu Laplaceove i Fourierove transformacije. Opisati vezu između impulsnog odziva kontinuiranog sustava, njegove prijenosne funkcije te frekvencijske karakteristike.

CTFT

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

ICTFT

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

LAPLACE

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Laplace i Fourier su jako slične transformacije  
Dvije zajedničke karakteristike su

- 1) Za Laplace-a je donja granica integriranja  $\phi$ , a ne  $-\infty$
- 2) Laplace-ova transformacija koristi transformacijsku varijablu  $s$  u kompleksnoj ravnini, dok je kod Fouriera ona potpuno imaginaran broj ograničen na  $|s=j\omega|$

Generalno Laplace-ova transformacija koristi se za polu beskonačne ili djelomično kontinuirane funkcije (step ili pravokutni puls)

$$H(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt}_{\text{FOURIER}}$$

$$H(s) = \underbrace{\int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt}_{\text{LAPLACE}}$$

- dvostrana Laplaceova transformacija

$|H(\omega)|$  - amplitudna frekvencijska karakteristika

$\angle H\omega$  - fazna karakteristika

2. Definirati Fourierovu transformaciju vremenski diskretnog signala (DTFT) i inverznu Fourierovu transformaciju vremenski diskretnog signala (IDTFT). Opisati vezu između Z-transformacije i Fourierove transformacije. Opisati vezu između impulsnog odziva diskretnog sustava, njegove prijenosne funkcije te frekvencijske karakteristike.

$$\text{DTFT} \\ X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$\text{IDTFT} \\ x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\mathcal{Z}[f[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] z^{-n}, \text{ ako napravimo supstituciju } z = e^{j\omega}$$

dobivamo DTFT kruzalnog signala

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f[n] e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n}, \quad |H(e^{j\omega})| - \text{amplitudna frekv. karakteristika} \\ \angle H(e^{j\omega}) - \text{fazna karakteristika}$$

DTFT je specifični slučaj Z-transformacije

(3.)

Definirati diskretnu Fourierovu transformaciju (DFT) i inverznu diskretnu Fourierovu transformaciju (IDFT). Kakve razlike se mogu pojaviti u rezultatu koji daje DTFT i DFT kao posljedica činjenice da diskretna Fourierova transformacija podrazumijeva kauzalan signal. Što je brza Fourierova transformacija (FFT)?

$$\text{DFT} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, \quad W_N^{kn} = e^{-j \frac{2\pi kn}{N}}$$

$$\text{IDFT} \quad \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}$$

DFT podrazumijeva da je ulazni signal diskretan i konačan te daje spektar koji je diskretan, periodičan, kauzalan te ima onoliko uzoraka, koliko ih je imao i signal

DTFT podrazumijeva da je ulazni signal diskretan i beskonačan te daje spektar koji je kontinuiran i periodičan

FFT je algoritam za ubrzano računanje DFT-a faktORIZIRAJUĆI

DFT matricu. DFT ima složenost  $O(N^2)$ , dok FFT ima složenost  $O(N \log N)$

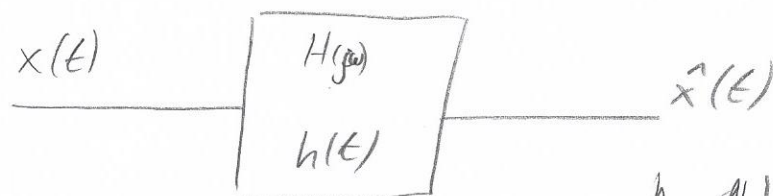
21

Definirati Hilbertovu transformaciju vremenski kontinuiranih signala. Izvesti izraz za impulsni odziv idealnog vremenski kontinuiranog Hilbertovog transformatora, te napisati izraz za njegovu frekvencijsku karakteristiku. Nacrtati amplitudnu i faznu karakteristiku idealnog Hilbertovog transformatora.

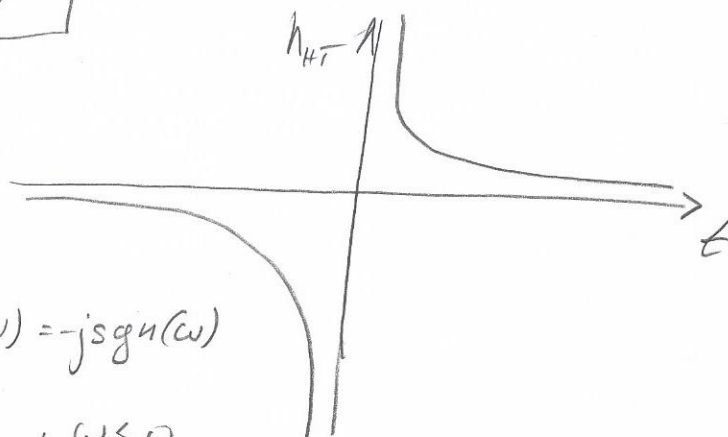
Hilbertova transformacija povezuje vremensku i vremensku dimenziju  
 $\xrightarrow{\infty}$  value principal integral - računamo ga pomoću limesa

$$H[x(t)] = \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} (v.p.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$H^{-1}[\hat{x}(t)] = x(t) = -\frac{1}{\pi} (v.p.) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$



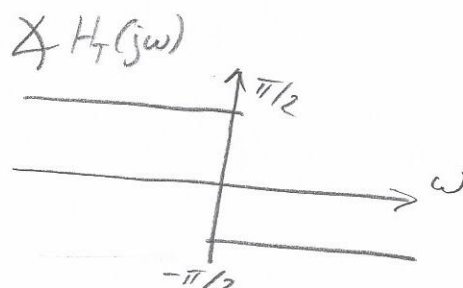
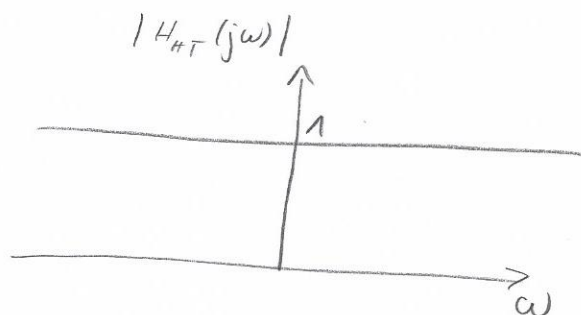
$$h_{HT}(t) = \frac{1}{\pi t}$$



$$\mathcal{F}[h_{HT}(t)] = H_{HT}(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

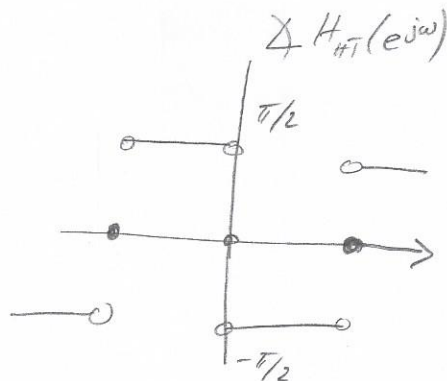
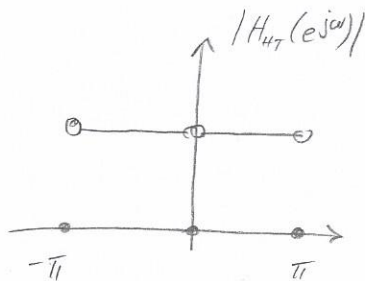
$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -1, & \omega < 0 \\ 0, & \omega = 0 \\ 1, & \omega > 0 \end{cases}$$

$\hat{X}(j\omega) = -j \operatorname{sgn}(\omega) X(j\omega) \rightarrow HT$  je sustav koji ne dira amplitudu, a sve faze zahvata za  $90^\circ$  ( $\frac{\pi}{2}$ ).



5.

Izvesti izraz za impulsni odziv idealnog diskretnog Hilbertovog transformatora. Skicirati odziv.



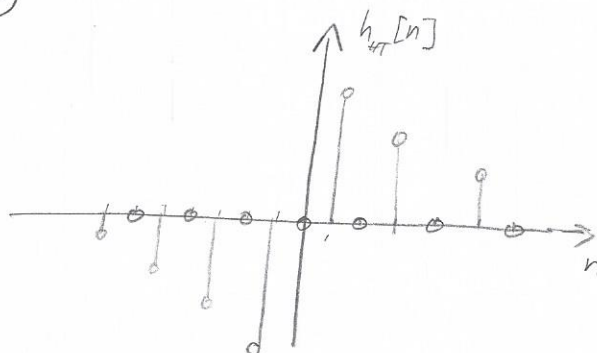
$$h_{HT}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_{HT}(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{IDTFT}$$

$$\rightarrow H_{HT}(e^{j\omega}) = -j \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$\begin{aligned} h_{HT}[n] &= -\frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(\omega) e^{j\omega n} d\omega = -\frac{j}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 \operatorname{sgn}(\omega) e^{j\omega n} d\omega + \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\omega) e^{j\omega n} d\omega \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \sin(\omega n) d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega n) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega n) d\omega = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{-1}{n} (\cos(\omega n)) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)] \quad \text{signum je na tom intervalu 1} \\ &\quad \sin^2(x) = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] \quad \rightarrow 2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$$h_{HT}[n] = \frac{2}{\pi n} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad \begin{cases} \rightarrow \text{parni } n = 0 \\ \rightarrow \text{neparni } n = \frac{2}{\pi n} \end{cases}$$





6

- Defini ti analitički signal. Dokazati da njegov spektar ne sadrži komponente na frekvencijama  $\omega < 0$ . Objasniti razliku između analitičkog signala i njemu konjugiranog signala.

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t) \rightarrow \text{hilbertov transformat}$$

Analitički signal je signal čiji spektar ne sadrži komponente na frekvencijama  $\omega < 0$

$$z(j\omega) = X(j\omega) + j\hat{X}(j\omega) \rightarrow -j \operatorname{sgn}(\omega) X(j\omega)$$

$$z(j\omega) = X(j\omega) + j[-j \operatorname{sgn}(\omega) X(j\omega)] = X(j\omega) + \operatorname{sgn}(\omega) X(j\omega)$$

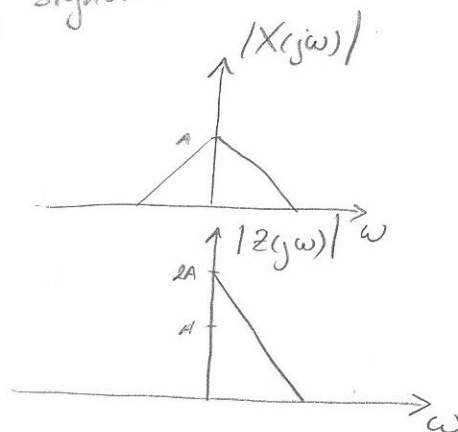
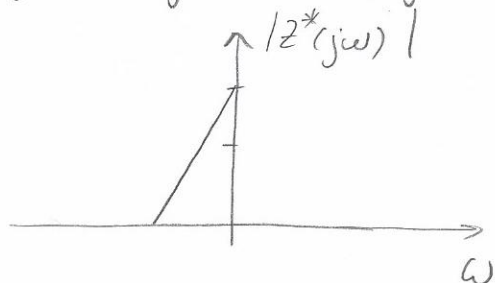
$$X(j\omega) = \underbrace{X_N(j\omega)}_{\omega < 0} + \underbrace{X(j0)}_{\omega = 0} + \underbrace{X_P(j\omega)}_{\omega > 0}$$

$$z(j\omega) = \underbrace{X_N(j\omega) + X(j0) + X_P(j\omega)}_{\text{zbog signuma na } \omega < 0} \ominus \underbrace{X_N(j\omega) + 0 \cdot X(j0) + X_P(j\omega)}_{\text{signum u } 0 = 0}$$

$$z(j\omega) = X(j0) + 2X_P(j\omega)$$

$$z^*(j\omega) = x(t) - j\hat{x}(t)$$

$$z^*(j\omega) = X(j0) + 2X_N(j\omega)$$



(7.)

Po ću analize u vremenskoj domeni, na primjeru sinusnog signala objasniti pojavu preslušavanja između komponenata spektra kod diskretne Fourierove transformacije. Napisati uvjet pod kojim do preslušavanje ne dolazi.

DFT daje spektar koji predstavlja periodičko proširenje polaznog odsječka

• ANALIZA U VREMENSKOJ DOMENI

$$x_1[n] = \cos\left(2\pi \frac{2}{N} n - \frac{\pi}{3}\right) \quad \rightarrow 2 \text{ puna perioda}$$

- sadrži komponentu koja u  $N$  uzoraka sadrži  $k$  perioda

- daje čistu sinusoidu  $\Rightarrow$  uzak spektar

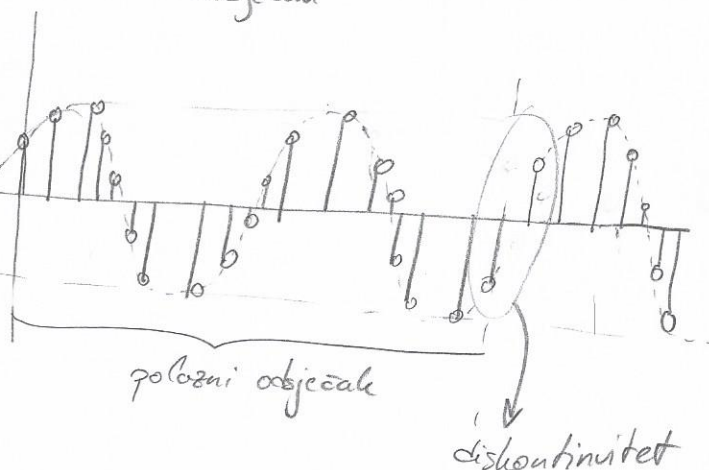
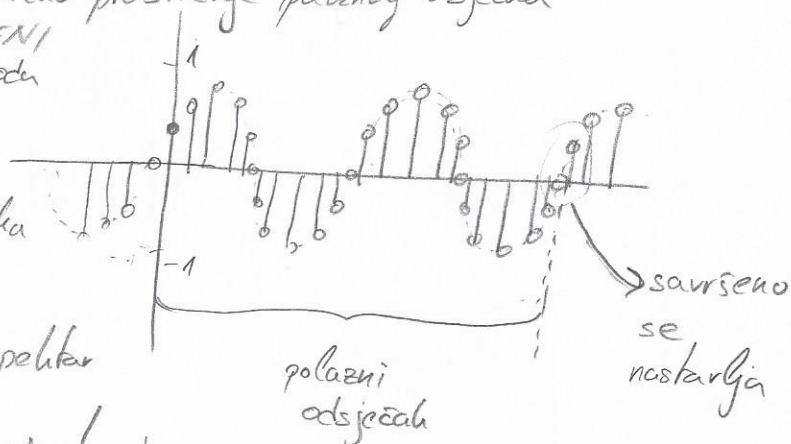
UVJET da ne dođe do preslušavanja!

$$x_2[n] = \cos\left(2\pi \frac{2.6}{N} n - \frac{\pi}{3}\right)$$

- sadrži komponentu koja u  $N$  uzoraka NE sadrži  $k$  perioda

- sadrži diskontinuitete kao posljedicu nadovezivanja djelomičnih perioda

$\Rightarrow$  širok spektar



(8.)

Pomoću analize u frekvencijskoj domeni, na primjeru sinusnog signala objasniti pojavu preslušavanja između komponenata spektra kod diskretne Fourierove transformacije. Napisati uvjet pod kojim do preslušavanje ne dolazi.

$x[n]$  dobivamo množenjem s pravougaunim prozorom  $w[n]$  zbog DFT-a

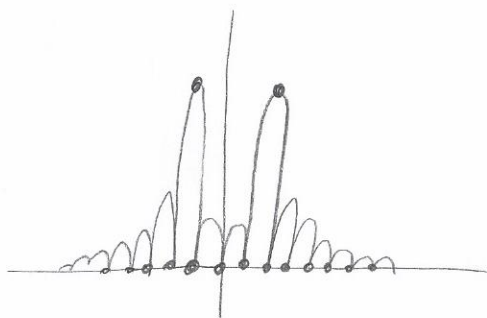
$$x[n] = x_0[n] \cdot w[n], \quad w[n] = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}, \quad x_0[n] = \cos(\omega_0 n + \varphi), \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$X(e^{j\omega}) = X_0(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega})$$

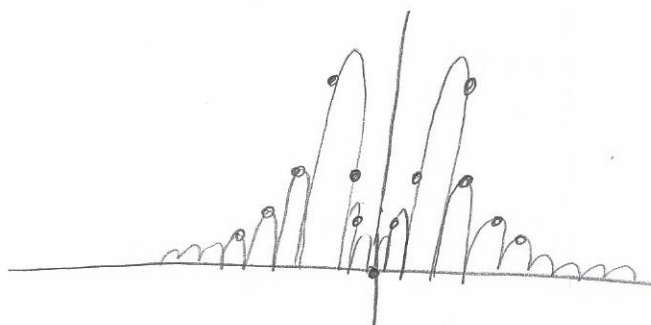
$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

$$X_0(e^{j\omega}) = \pi e^{j\omega \frac{p}{\omega_0}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left[ \delta(\omega - \omega_0 - 2l\pi) + \delta(\omega + \omega_0 + 2l\pi) \right]$$

$$\omega_0 = 2\pi \frac{3}{N}$$



$$\omega_0 = 2\pi \frac{4.5}{N}$$



$N$  sadrži cijeli broj perioda  
- uzorci DFT-a poklapaju se  
s nultočama kontinuiranog spektra

-  $N$  ne sadrži cijeli broj perioda  
- uzorci DFT-a se **NE** poklapaju s  
nultočama kontinuiranog spektra  
- jedna komponenta daje je doprinos svim  
uzorcima DFT

(9)

Izvesti izraz za maksimalnu pogrešku procjene amplitude iz uzoraka diskretne Fourierove transformacije pod pretpostavkom da spektar nije interpoliran, te da je korišten pravokutni otvor.

$$\Delta f = \frac{2\pi}{N} \text{ - razmak između uzoraka}$$

$$\omega_a = \frac{\Delta f}{2} = \frac{\pi}{N} \text{ - frekvencija na kojoj dolazi do najveće pogreške}$$

faza nas za ovo ne zanima

$$W(e^{j\omega}) = e^{-j\omega \frac{N}{2}} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \Rightarrow \text{spektar pravokutnog otvora}$$

$$W_{\max} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \stackrel{L'H}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{N}{2} \cos(\frac{\omega N}{2})}{\frac{1}{2} \cos(\frac{\omega}{2})} = N$$

$\rightarrow$  amplituda na frekv  $\omega_a$

$$W_a = W(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \omega_a = \frac{\pi}{N}} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\sin(\frac{\pi}{2N})} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2N})}$$

$$\frac{W_a}{W_{\max}} = \frac{1}{N \sin(\frac{\pi}{2N})} \rightarrow W_a/W_{\max} \text{ raste s } N, \text{ ali ima graničnu vrijednost}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \sin(\frac{\pi}{2N}) = 0 \cdot \infty = \frac{1}{N} \sin(\frac{\pi}{2N}) \stackrel{L'H}{=} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{N^2} \cos(\frac{\pi}{2N})}{-\frac{1}{N^2}} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left( \frac{W_a}{W_{\max}} \right)_{\min} = \frac{2}{\pi}$$

$\rightarrow$  kada  $\omega \neq 0$



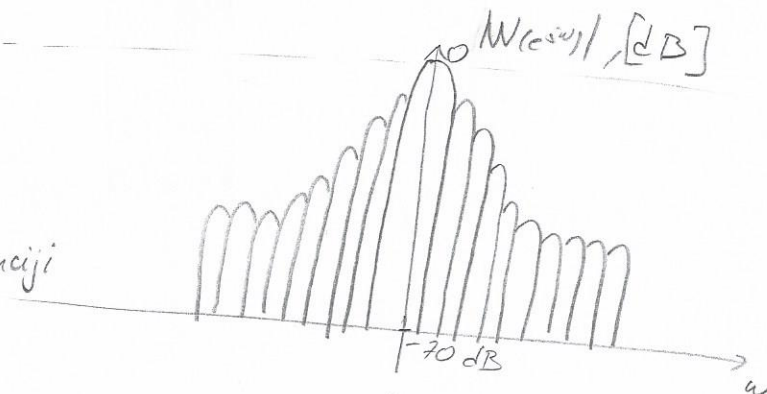
10.

Razvrstati sljedeće otvore u skupine sa sličnim svojstvima: pravokutni, Hannov i Blackmanov, Hammingov i Dolph-Chebyshevlev. Po kojim se svojstvima ove skupine razlikuju? Po čemu je specifičan Dolph-Chebyshevlev otvor?

Pravokutni otvor

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

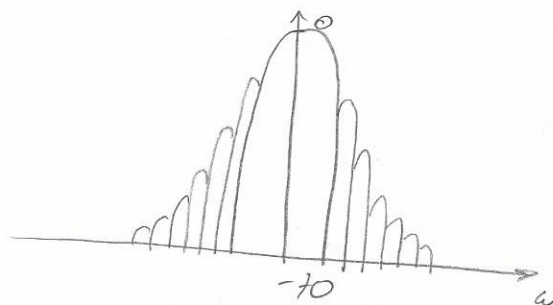
- najslabije lokaliziran u frekvenciji  
⇒ veliko preklapavanje
- najveća razlučivost



zajedno

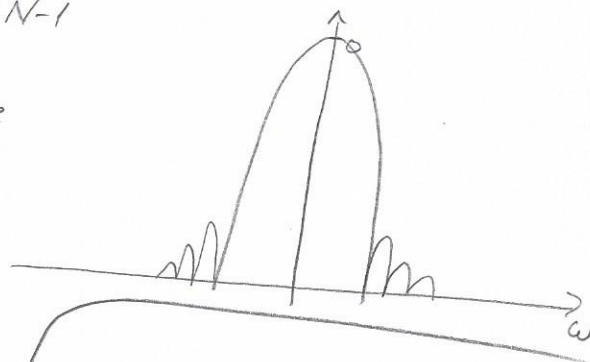
Hannov otvor

$$w[n] = \begin{cases} 0,5(1 - \cos(\frac{2\pi n}{N-1})), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



Blackman

$$w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos(\frac{2\pi n}{N}) - 0,08 \cos(\frac{4\pi n}{N}), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



Svojstva Hann i Black

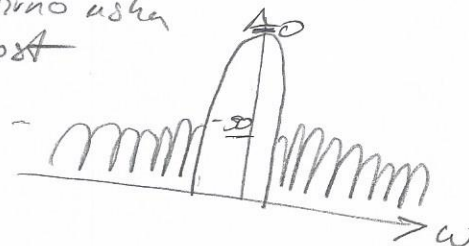
- široka glavna latica
- manje istraživanje
- bolja lokalizacija u frekvenciji
- pad amplitude bočnih latica 18 dB/oktavi
- najmanja razlučivost
- najmanje preklapavanje

Ham i D-C svojstva:

- glavna latica je relativno uska
- ujednačena valovitost

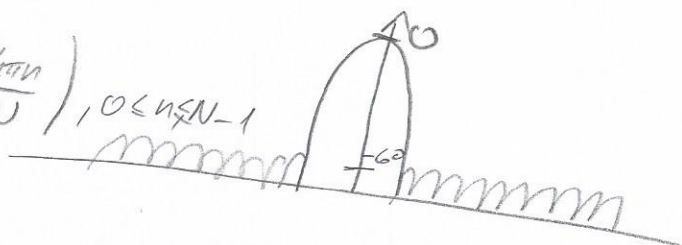
Hammingov otvor

$$w[n] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos(\frac{2\pi n}{N-1}), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



Dolph-Chebyshevlev otvor

$$w[n] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos(\frac{2\pi n}{N}) - 0,08 \cos(\frac{4\pi n}{N}), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$



(11)

Opisati model diskretne Fourierove transformacije temeljen na slogu prilagođenih filtara. Definirati dobitak uslijed pojačanja (processing gain) za slučaj korištenja pravokutnog otvora. O čemu dobitak ovisi i kako ga možemo procijeniti.

DFT možemo interpretirati kao skup od  $N$  prilagođenih filtara

$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}$ ,  $k=0, \dots, N-1$  centralna frekvencija filtara

$$X_k[n] = W[n] \cos\left(\frac{2\pi k}{N} n\right) + j W[n] \sin\left(\frac{2\pi k}{N} n\right) = W[n] e^{j \frac{2\pi k}{N} n}$$

↳ filtri su prilagođeni na broj uzoraka signala ( $N$ )

$$X[n] = S[n] + Q[n], \quad S[n] = A e^{j(\omega_p n + \varphi)}, \quad Q[n] \text{ mijeli sum snage } \sigma_g^2$$

Zanima nas izlaz iz  $p$ -tog filtra jer želimo detektirati komponentu na frekvenciji  $\omega_p$

N.1.

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| A e^{j(\omega_p n + \varphi)} \right|^2 = \frac{A^2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \cos(\omega_p n + \varphi) + j \sin(\omega_p n + \varphi) \right|^2 = A^2$$

omjer snage signala i sume na ulazu

$$SNR_{\text{ulaz-p}} = \frac{A^2}{\sigma_g^2}$$

IZLAZ FILTARA

$$X_w[n] = W[n] \cdot S[n] + W[n] \cdot Q[n] = S_w[n] + Q_w[n]$$

$$\text{DFT} \{X_w[n]\} = \text{DFT} \{S_w[n]\} + \text{DFT} \{Q_w[n]\}$$

$X_k = 0$ ,  $k \neq p$  - amplituda signala je 0 na svim izlazima, osim na  $p$ -tom

$$X_p = A \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \text{ - amplituda signala na izlazu } p\text{-tog filtra}$$

$$\left( A \sum_{n=0}^{N-1} w[n] \right)^2 \text{ - snaga signala na izlazu } p\text{-tog filtra}$$

DFT suma

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{N-1} w[n] g[n] e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}$$

znajna suma na izlazu p-tog filtra

$$\begin{aligned} E\{|Q[p]|^2\} &= E\{Q[p] \cdot Q^*[p]\} = E\left\{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n] g[n] e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}\right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} w[m] g^*[m] e^{j \frac{2\pi m k}{N}}\right)\right\} \\ &= E\left\{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w[n] \cdot w[m] \cdot g[n] \cdot g^*[m] \cdot e^{-j \frac{2\pi n k}{N}} \cdot e^{j \frac{2\pi m k}{N}}\right\} \end{aligned}$$

$g[n]$  i  $g^*[n]$  su slučajne varijable

$$E\{|Q[p]|^2\} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} w[n] w[m] g[n] g^*[m] e^{-j \frac{2\pi n k}{N}} e^{j \frac{2\pi m k}{N}}$$

$$E\{g[n] \cdot g^*[m]\} = \sigma_g^2 \Rightarrow E\{|Q[p]|^2\} = \sigma_g^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]$$

$$SNR_{izlaz-p} = \frac{\left(A \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{\sigma_g^2 \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}$$

processing gain

$$PG = \frac{SNR_{izlaz-p}}{SNR_{ulaz-p}} = \frac{\left(A \sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{\cancel{\sigma_g^2} \sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} w[n]\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} w^2[n]}$$

$\frac{A^2}{\sigma_g^2}$

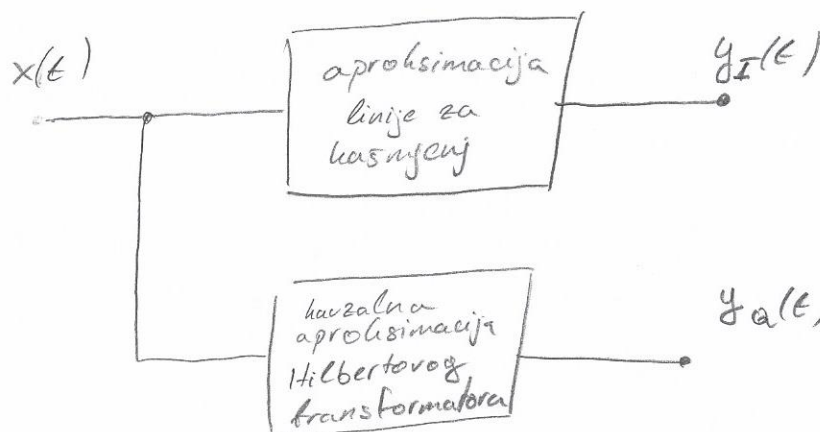
za pravougaoni otvor - svi uzorci su 1

$$PG = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} 1\right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} 1^2} = \frac{N^2}{N} = N$$

Dobitak ovisi isključivo o obliku otvora kojeg koristimo

(12)

Nacrtati blokovsku shemu kauzalnog analognog Hilbertovog filtra. Izvesti izraz za frekvencijsku karakteristiku realne i frekvencijsku karakteristiku imaginarne grane.



$$z(t) = y_I(t) + jy_Q(t)$$

aproksimacija analitičkog signala

IZVESTI ?



(12.)

Dokazati da je FIR filter s antisimetričnim impulsnim odzivom pogodan za realizaciju Hilbertovih transformatora.

Tip 3 i Tip 4  $\rightarrow$  asimetričan impulсни odziv

$\downarrow$   
neparni  $N$        $\downarrow$   
parni  $N$

TIP 3

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n}$$

$$h[n] = -h[N-n]$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n] (z^{-n} - z^{-(N-n)}) + 0 z^{-N/2} \\ &= z^{-\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] (z^{\frac{N}{2}-n} - z^{-\frac{(N-n)}{2}}) \end{aligned}$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{\omega N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] (e^{-j\omega(\frac{N-n}{2})} - e^{-j\omega(\frac{N-n}{2})}) = e^{-j\frac{\omega N}{2}} \left( e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} h[n] \sin(\omega(\frac{N-n}{2})) \right) \cdot (-2)$$

$$2j \sin\left[\left(\frac{N-n}{2}\right)\omega\right], j = -e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$\rightarrow$  skok u fazi  
- može biti Hilbertov transformator

TIP 4

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h[n] z^{-n}$$

$$h[n] = -h[N-n]$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} h[n] [z^{-n} - z^{-(N-n)}] = z^{-\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h[n] [z^{\frac{N}{2}-n} - z^{-\frac{N-n}{2}}]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\frac{N}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h[n] (e^{-j\omega(\frac{N-n}{2})} - e^{j\omega(\frac{N-n}{2})}) = e^{-j\omega\frac{N}{2}} \left( e^{-j\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} h[n] (-2) \sin(\omega(\frac{N-n}{2})) \right)$$

$$2j \sin\left(\omega\left(\frac{N-n}{2}\right)\right)$$

$\rightarrow$  skok u fazi

$\rightarrow$  razlika od Tipa 3



(14)

Nacrtati raspored polova i nula FIR Hilbertovog transformatora parnog i neparnog reda te pokazati i obrazložiti koji od ovih transformatora može aproksimirati konstantnu amplitudu u širem frekvencijskom području.

$$\text{faza } \phi(\omega) = -\omega \frac{N}{2} - \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\omega) \Rightarrow \tau = -\frac{d\phi}{d\omega} = -\frac{N}{2}$$

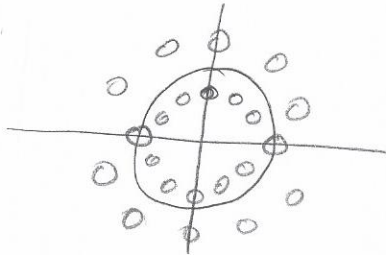
Tražimo slož u fazi  $\omega = \pi$ ?

$$\Delta \phi = \phi(\pi) - \phi(-\pi)$$

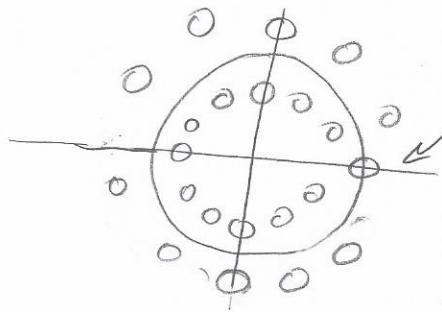
$$\phi(-\pi) = \frac{N\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$\phi(\pi) = -\frac{N\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \phi(-\pi) = \frac{N\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\ \phi(\pi) = -\frac{N\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Delta \phi = -N\pi - \pi = -\pi(N+1) \Rightarrow \begin{array}{l} N \text{ paran } \Delta \phi = -\pi \\ N \text{ neparan } \Delta \phi = 0 \end{array}$$



paran  $N$



neparan  $N$

samo jedna  
nultočka na kružnici

→ za neparne  $N$   
frekvencijsko područje  
može se proširiti do  $\pi$ !

(15)

Opisati postupak projektiranja IIR Hilbertovih transformatora.

IIR filtri - moguće napraviti idealnu amplitudu, a faza se aproksimira  
 Idealna amplitudna karakteristika dobiva se svepropusnim filtrom

$$H_{HT}(z) = (-1)^N \frac{\prod_{k=1}^N (d_k - z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \rightarrow \begin{array}{l} \text{polovi su } d_k \\ \text{nultočke su } 1/d_k \end{array}$$

željena fazna karakteristika

$$\varphi_d(\omega) = -N\omega - \frac{\pi}{2}$$

stvarna fazna karakteristika

$$\varphi(\omega, d) = \arg[H(e^{j\omega}, d)], \quad d = [d_1, \dots, d_N]^T$$

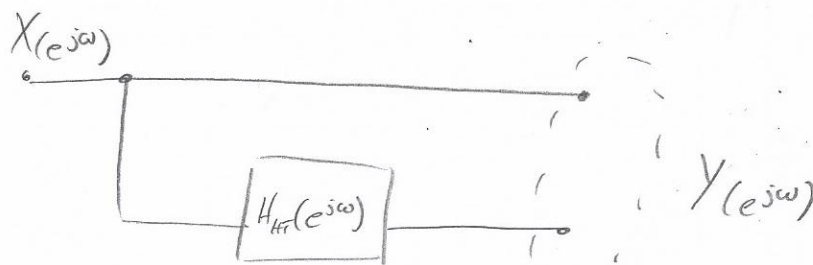
odstupanje od željene karakteristike

$$\epsilon_p = \int_{\omega_1}^{\omega_2} w(\omega) \cdot |\varphi(\omega, d) - \varphi_d(\omega)|^p d\omega$$

minimizacija odstupanja  $d_{HT} = \arg \min_d \epsilon_p$

16

Napisati izraz i nacrtati prijenosnu funkciju idealnog pozitivno propusnog i idealnog negativno propusnog filtra. Kakva je veza između prijenosnih funkcija ovih filtara.

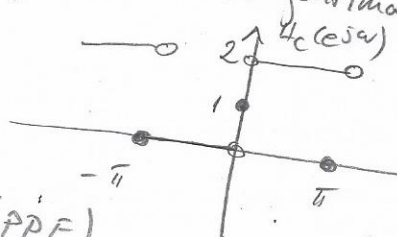


$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) + j H_{HT}(e^{j\omega}) X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \left[ 1 + H_{HT}(e^{j\omega}) \right]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H_C(e^{j\omega})$$

↳ filter s kompleksnim koeficijentima

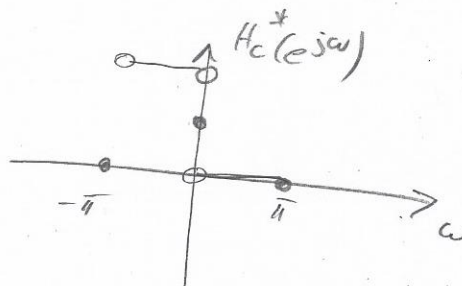
$$H_C(e^{j\omega}) = \begin{cases} 2, & 0 < \omega < \pi \\ 1, & \omega = 0 \\ 0, & -\pi < \omega < 0 \end{cases}$$



↳ Pozitivno propustan filter (PPF)

$$H_C^*(e^{j\omega}) = j \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 2, & -\pi < \omega < 0 \\ 1, & \omega = 0 \\ 0, & 0 < \omega < \pi \end{cases}$$

↳ Negativno propustan filter (NPF)



$$NPF = PPF^*$$

17

Opisati princip dobivanja Hilbertovog transformata u frekvencijskoj domeni. Opisati prednosti i nedostatke takvog postupka.

- 1) Napraviti FFT
- 2) postaviti u 0 uzorke na  $\omega < 0$
- 3) Napraviti IFFT

Problem

- 1) originalna sekvenca signala je periodički proširena
- 2) ova implementacija konvolucije zahvaća i drugi period

18

Nacrtati realizaciju filtra s kompleksnim koeficijentima pomoću filtra s realnim koeficijentima. Napisati izraz iz kojeg se vidi kako se dobiva realna odnosno imaginarna komponenta izlaznog signala.

(19.)

Izvesti izraz za spektar signala koji je dobiven množenjem kosinusnog signala sa signalom čiji je spektar  $U_p(j\omega)$ .

$$u(t) = u_p(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \quad \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) \cos(\omega_0 t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) (e^{-jt(\omega - \omega_0)} + e^{-jt(\omega + \omega_0)}) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) e^{-jt(\omega - \omega_0)} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_p(t) e^{-jt(\omega + \omega_0)} dt = \\ &= \frac{1}{2} U_p(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} U_p(j(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

(20.)

Objasniti pojmove: komunikacija, komunikacijski sustav, kanal. Kakvi tipovi veza postoje? Kakvi mogu biti sustavi za prijenos obzirom na način slanja informacija?

KOMUNIKACIJA - prijenos informacija između dvije točke

KOMUNIKACIJSKI SUSTAV - skup sredstava koja su potrebna da bi se jedna ili više poruka prenijele s jednog mjesta na drugo putem elektromagnetskih procesa

KANAL - sustav za prijenos informacija

⇒ veza : dvosmjerna  
jednosmjerna

reverzibilna (malo jedan, malo drugi smjer)

⇒ način slanja poruka:

radiodifuzija (broadcasting)

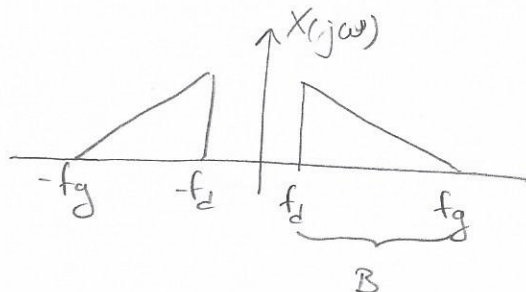
od točke do točke (point to point)



(21)

Navesti i opisati podjelu tehnika prijenosa obzirom na frekvencijsko područje koje zauzima signal poruke.

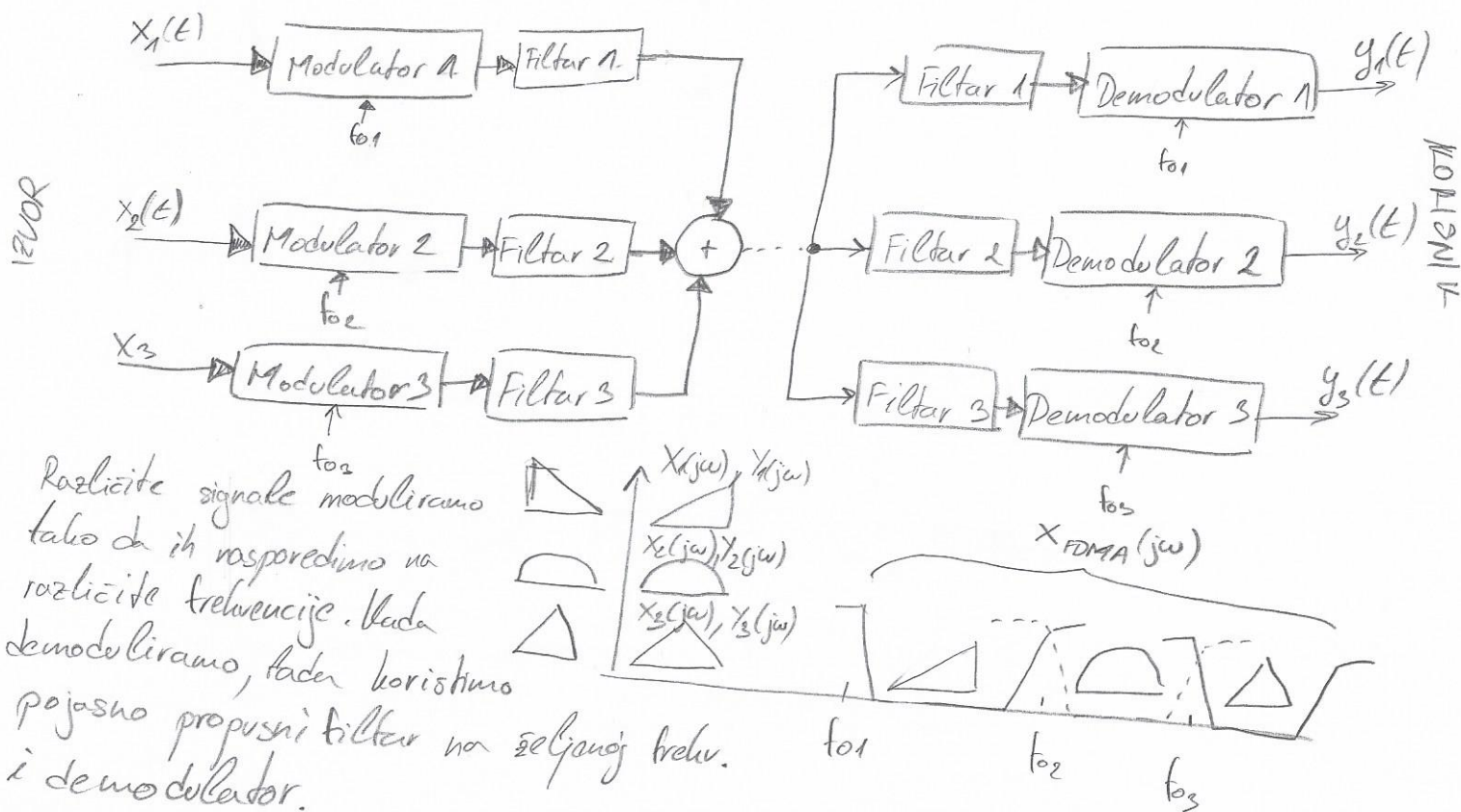
- 1) Uskopojasni signali (narrowband signals)
- 2) Širokopojasni signali (wideband signals)
- 3) Signali s vrlo širokim frekv. pojasom (ultra wideband signals)



$$B = f_g - f_d \rightarrow \text{širina frekvencijskog područja}$$

(22)

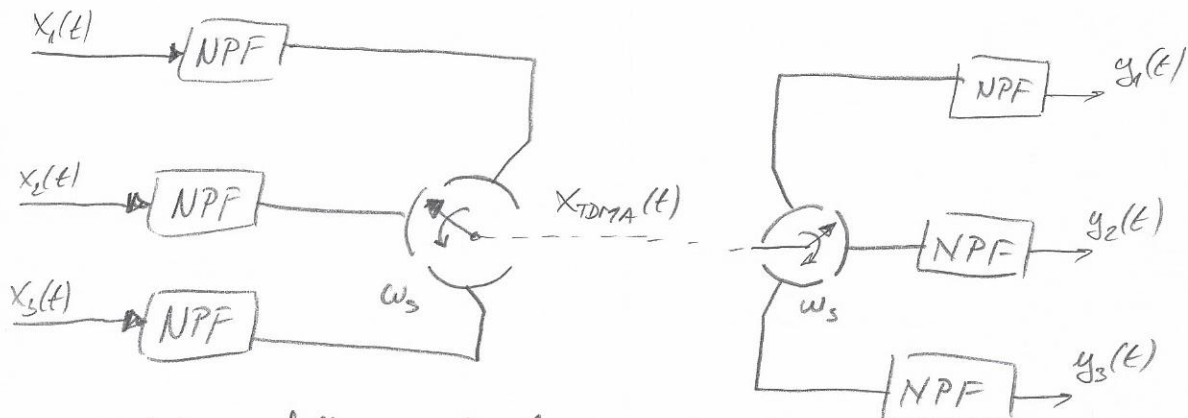
Nacrtati i objasniti princip frekvencijskog multipleksa. Koje frekvencijsko područje tokom prijenosa zauzimaju pojedini signali. Kako se izvodi rekonstrukcija signala?



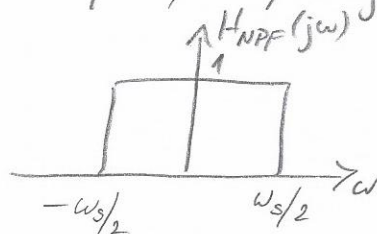
23.

Nacrtati i objasniti princip vremenskog multipleksa. Koje frekvencijsko područje tokom prijenosa zauzimaju pojedini signali. Kako se izvodi rekonstrukcija signala?

### VREMENSKI MULTIPLEKS



Antialiasing filtri u odesiljaču, interpolacijski filtri u prijemniku



24.

Nacrtati i objasniti princip kodnog multipleksa. Koje frekvencijsko područje tokom prijenosa zauzimaju pojedini signali. Kako se izvodi rekonstrukcija signala?

### KODNI MULTIPLEKS

