PRIMIJENJENI ELEKTROMAGNETIZAM 2008./2009.

2. MEĐUISPIT, 24.11.2008. - RJEŠENJA

1. **Ravni harmonički elektromagnetski val širi se u izotropnom sredstvu relativne permitivnosti ε_r=9 i relativne permeabilnosti μ_r=9, te je dan izraz za vektor njegovog magnetskog polja u nekoj točki:**

$$\vec{\mathbf{H}} = 1 \cdot \cos(\omega t - k_z z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + 2 \cdot \cos(\omega t - k_z z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$

Odrediti vektor električnog polja navedenog vala u toj točki. ***(2 boda)***

Zadatak je moguće riješiti na dva načina – analitički putem Maxwellovih jednadžbi ili intuitivno, koristeći osnovne fenomene elektromagnetizma. Pokažimo najprije intuitivni postupak.
Zadan je vektor magnetskog polja ravnog harmoničkog vala koji se širi izotropnim sredstvom čija je intrinsična impedancija jednaka intrinsičnoj impedanciji slobodnog prostora

$$\eta = \sqrt{\frac{j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}{\sigma + j \cdot \omega \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{1}} = \eta_0 = 376{,}7\Omega$$

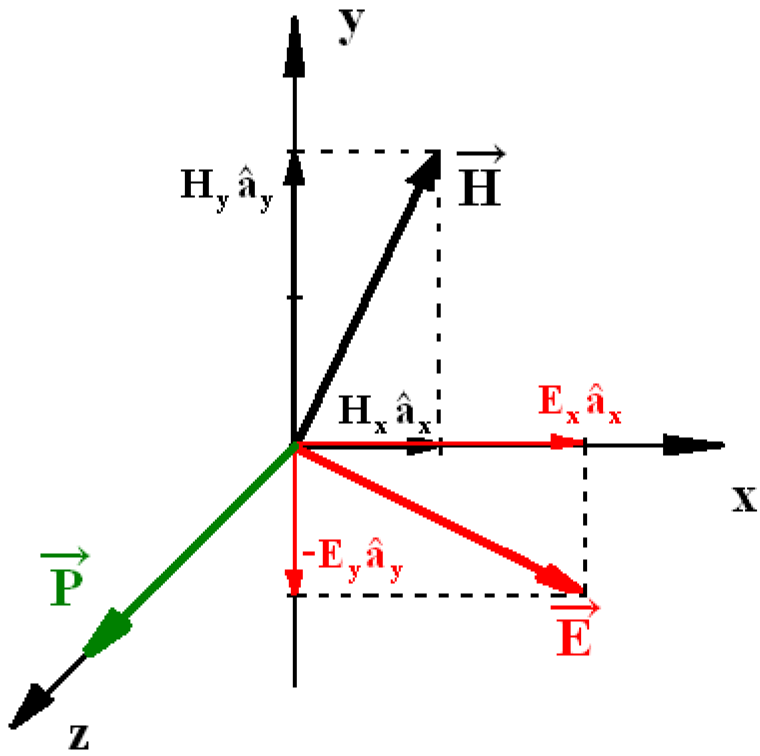
Potrebno je uočiti dvije bitne činjenice: prva je da postoje samo dvije komponente magnetskog polja (i to u x i y smjeru), a druga je da ravni val propagira u +z smjeru (to nam govori negativan predznak ispred člana koji opisuje propagaciju $k_z z$). Vodeći računa o tome da je x komponenta **H** polja po amplitudi dva puta manja od y komponente (na slici su to vektori označeni crnom bojom), u jednom vremenskom trenutku, u istoj točki prostora možemo zaključiti kako po orjentaciji i iznosu trebaju izgledati komponente električnog polja. Kako elektromagnetski val propagira u izotropnom sredstvu, vektori električnog i magnetskog polja moraju biti međusobno okomiti i također okomiti na smjer širenja energije (Poyntingov vektor, na slici je označen zelenom bojom)

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Kako je vektor **H** polja već definiran, da bi dobili propagaciju u +z smjeru, zaključujemo da vektor električnog polja mora također ležati u xy ravnini i biti okomit na vektor **H** polja. Njegovu orjentaciju dobijemo znajući da moramo dobiti propagaciju u +z smjeru poštujući gore navedenu relaciju. Tako možemo zaključiti kako x komponenta električnog polja mora biti pozitivna, dok y komponenta mora biti negativna. Sada jedino još preostaje zaključiti kako se odnose amplitude dotičnih komponenti. <u>Iz uvjeta okomitosti</u> **E** i **H** polja, lako zaključujemo kako x komponenta **E** polja mora po apsolutnom iznosu biti dvostruko veća od y komponente (skicirano crvenom bojom na grafu). Znajući da je veza između električnog i magnetskog polja ravnog vala u izotropnom sredstvu intrinsična impedancija tog sredstva i poštujući gore donesene zaključke, možemo napisati konačan izraz za vektor električnog polja

$$\eta = \frac{E}{H} \Rightarrow E = \eta_0 \cdot H$$

$$\vec{\mathbf{E}} = 2 \cdot \eta_0 \cdot \cos(\omega t - k_z z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} - \eta_0 \cdot \cos(\omega t - k_z z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$



Pokažimo sada i analitički postupak uvrštavajući zadani izraz za **H** polje u rotorsku Maxwellovu jednadžbu.

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$$

Raspisujemo rotor slijeve strane jednadžbe. Uočimo kako je z komponenta i magnetskog i električnog polja jednaka nuli tj. radi se o TEM valu!

$$\nabla \times \vec{\mathbf{H}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y & \hat{\mathbf{a}}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{\mathbf{a}}_z \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ H_x & H_y \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial z} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_x & \hat{\mathbf{a}}_y \\ H_x & H_y \end{vmatrix} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \cdot \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial H_x}{\partial z} \cdot \hat{\mathbf{a}}_y$$

Pri tome su H_x i H_y komponente x i y komponente **H** polja.

$$H_x = 1 \cdot \cos(\omega t - k_z z)$$
$$H_y = 2 \cdot \cos(\omega t - k_z z)$$

Uočimo takđer kako H_x i H_y ne ovise o x ili y stoga je razvoj prve determinante jednak nuli. Deriviranjem zadanih komponenti po z i sređivanjem izraza dobivamo

$$-2 \cdot k_z \cdot \sin(\omega \cdot t - k_z \cdot z) \cdot \hat{\mathbf{a}}_x + k_z \cdot \sin(\omega \cdot t - k_z \cdot z) \cdot \hat{\mathbf{a}}_y = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(E_x \cdot \hat{\mathbf{a}}_x + E_y \cdot \hat{\mathbf{a}}_y\right)$$

Izjednačavanjem izraza uz iste jedinične vektore s lijeve i desne strane jednadžbe, dobivamo dvije separirane skalarne diferencijalne jednadžbe

$$-2\cdot k_z\cdot\sin(\omega\cdot t-k_z\cdot z)=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$k_z\cdot\sin(\omega\cdot t-k_z\cdot z)=\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

Očito je da ćemo rješavajući prvu jednadžu dobiti x komponentu E polja, a drugu y komponentu E polja.

$$dE_x=\frac{-2\cdot k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\sin(\omega\cdot t-k_z\cdot z)dt$$

Integrirajući po vremenu dobivamo

$$E_x=\int\frac{-2\cdot k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\sin(\omega\cdot t-k_z\cdot z)dt$$
$$E_x=\frac{2\cdot k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\omega}\cdot\cos(\omega\cdot t-k_z\cdot z)$$

Odnosno za y komponentu E polja dobivamo analognim postupkom

$$dE_y=\frac{k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\sin(\omega\cdot t-k_z\cdot z)dt$$
$$E_y=\int\frac{k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r}\cdot\sin(\omega\cdot t-k_z\cdot z)dt$$
$$E_x=\frac{-k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\omega}\cdot\cos(\omega\cdot t-k_z\cdot z)$$

Može se pokazati kako vrijedi

$$\frac{k_z}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\omega}=\frac{\omega\cdot\sqrt{\mu\cdot\varepsilon}}{\varepsilon_0\cdot\varepsilon_r\cdot\omega}=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}=\eta$$

Stoga možemo pisati konačan izraz za vektor **E** polja

$$\vec{\mathbf{E}}=2\cdot\eta_0\cdot\cos(\omega t-k_z z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}-\eta_0\cdot\cos(\omega t-k_z z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}$$

Možemo zaključiti da je dobiveni izraz za vektor električnog polja potpuno istovjetan onome dobivenim intuitivnim razmatranjem.

2. Izrazi za vektor gustoće magnetskog toka ($\vec{B}$) i vektor magnetskog polja ($\vec{H}$) elektromagnetskog vala koji se širi u nekom magnetskom materijalu dani su jednadžbama:

$$\vec{\mathbf{H}} = 0.1e^{-jk_z z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + e^{-jk_z z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} + e^{-jk_x x}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z},$$

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 e^{-jk_z z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \mu_0 e^{-jk_z z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} + 3\mu_0 e^{-jk_x x}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}.$$

Odrediti tenzor permeabilnosti danog materijala i iz oblika tenzora zaključiti da li se radi o izotropnom ili anizotropnom materijalu. *(2 boda)*

U ovome zadatku primjenjujemo konstitucijsku relaciju koja povezuje vektore gustoće magnetskog toka i jakosti magnetskog polja

$$\vec{\mathbf{B}} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{\mathbf{H}}$$

Iz ove matrične jednadžbe potrebno je izračunati matricu (tenzor) relativne permeabilnosti sredstva μ_r. Iz zadanih podataka zaključujemo kako su B i H dijagonalne matrice te možemo pisati

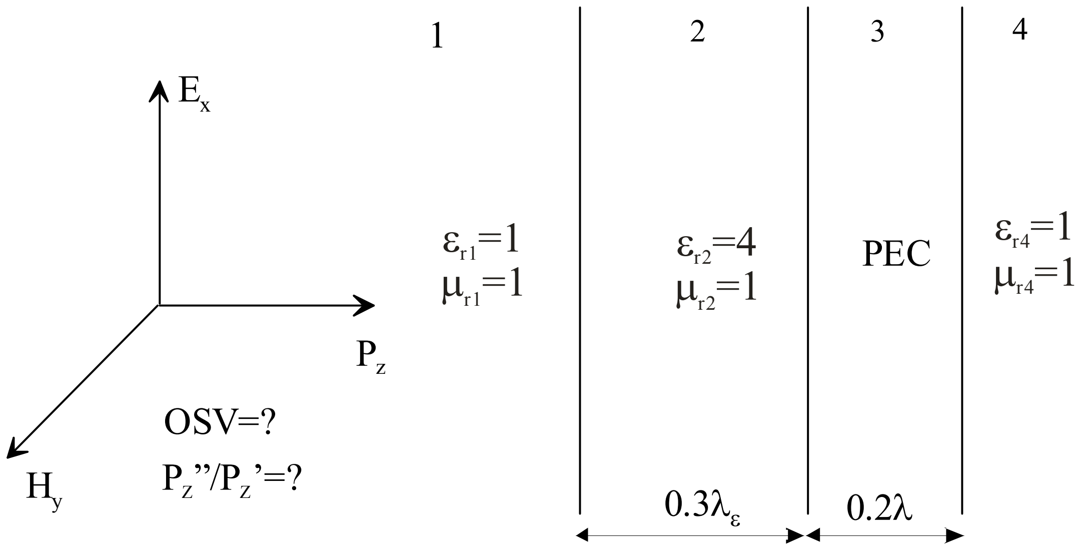
$$\begin{bmatrix} B_x & 0 & 0 \\ 0 & B_y & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{bmatrix} = \mu_0 \cdot \begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \\ 0 & 0 & H_z \end{bmatrix}$$

$$\mu_0 \cdot e^{-j \cdot k_z \cdot z} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \mu_0 \cdot e^{-j \cdot k_z \cdot z} \cdot \begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mu_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

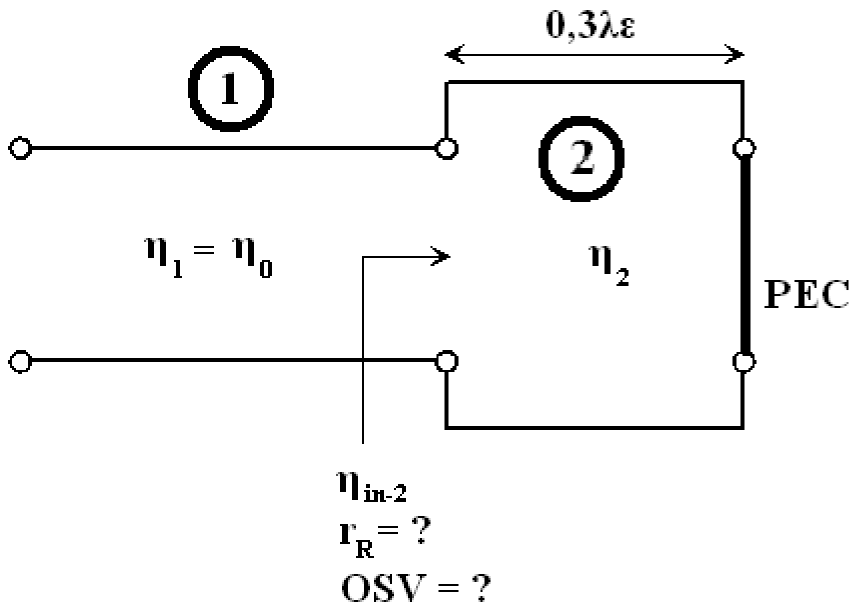
S obzirom da vrijedi da su elementi tenzora na glavnoj dijagonali međusobno različiti, zaključujemo da materijal nema ista svojstva u sva tri prostorna smjera, odnosno, isti je **anizotropan**.

3. Ravni harmonički val frekvencije 10 GHz i vršne vrijednosti električnog polja $E_x = 1\text{V/m}$ upada okomito iz zraka (sredstvo 1) na višeslojnu strukturu prikazanu na slici. Sredstvo 2 je dielektrik bez gubitaka s ε_{r2}=4 i njegova debljina je 0.3 valne duljine u dielektriku. Sredstvo 3 je idealni metal (PEC) čija debljine je 0.2 valne duljine u zraku, dok je sredstvo 4 zrak. Odrediti odnos stojnih valova i omjer reflektirane i upadne snage u sredstvu 1 (zraku). ***(2 boda)***



Ovaj zadatak se može riješiti i analitički, ali se do rješenja može ponovno doći intuitivnim postupkom: Imamo komad dielektrika bez gubitaka određene debljine ispred savršeno vodljive metalne ploče. Potrebno je uočiti da taj dielektrik ne igra nikakvu ulogu što se tiče proračunavanja parametara koji se traže u zadatku! Naime, unutar dielektrika se elektromagnetskom valu promijene samo valna duljina i fazna brzina što utječe samo na promjenu FAZE koeficijenta refleksije od metalne ploče, a za izračune nam je bitan samo modul koeficijenta refleksije!
Dakle, zadatak se zapravo svodi na pronalaženje koeficijenta refleksije i OSV od metalne ploče koji su poznati iz teorije iznose $|r_R| = 1$, OSV = ∞. Omjer upadne i reflektirane snage bit će jednak 1 pošto niti PEC niti dielektrik nemaju gubitke.

Pokažimo sada i formalno analitički postupak.
Prikažemo li sustav po analogiji s prijenosnim linijama, možemo crtati slijedeću nadomjesnu shemu:



Intrinsična impedancija sredstva 2 (dielektrika) je

$$\eta_2 = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\eta_0}{2} = 188{,}4\Omega$$

Dio studenata koji su odabrali formalni postupak su griješili u slijedećem koraku: Naime, pošto se tražio koeficijent refleksije i OSV na granici sredstava 1 i 2, često bi se umjesto **ulazne impedancije** u sredstvo 2 uvrštavala proračunata intrinsična impedancija, potpuno zanemarujući utjecaj metalne ploče kao „tereta" sredstva 2! Ulazna impedancija u sredstvo 2 se **ne smije** poistovijetiti s intrinsičnom impedancijom sredstva 2. Da bi se to moglo napraviti, morao bi biti ispunjen barem jedan od tri uvjeta:

a) Sredstvo 2 **nije** beskonačno duačko (duljina je zadana i iznosi 0,3 valne duljine što nije niti približno beskonačno dugačko sredstvo!)
b) Sredstvo 2 **nema** toliko velike gubitke da ne bi bilo reflektiranog vala (štoviše, sredstvo 2 nema apsolutno nikakve gubitke!)
c) Sredstvo 2 intrinsične impedancije 188,4 Ω **nije** zaključeno teretom impedancije 188,4 Ω (tj. nije prilagođeno; naprotiv, zaključeno je METALNOM PLOČOM čija je impedancija 0 Ω tj. maksimalno je **neprilagođeno**!)

Dakle, moramo po poznatoj formuli iz teorije linija proračunati ulaznu impedanciju u dielektrik pri čemu se kao teret uzima impedancija kratkog spoja (metalne ploče)

$$\eta_{in-2} = \eta_2 \cdot \frac{0 + j \cdot \eta_2 \cdot tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot 0{,}3\lambda_2\right)}{\eta_2 + j \cdot 0 \cdot tg\left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot 0{,}3\lambda_2\right)} = j \cdot \eta_2 \cdot tg(0{,}6\pi) = -j \cdot 579{,}68\Omega$$

Tek se sada smije ući u poznatu formulu za koeficijent refleksije te odrediti njegov iznos

$$r_R = \frac{\eta_{in-2} - \eta_1}{\eta_{in-2} + \eta_1} = \frac{-j \cdot 579{,}68 - 376{,}7}{-j \cdot 579{,}68 + 376{,}7} = 1\angle -66{,}03°$$

Dio studenata koji su shvatili da se u formulu za koeficijent refleksije ne smije uvrštavati intrinsična impedancija već ulazna impedancija, u formulu su uvrštavali apsolutnu vrijednost ulazne impedancije, dakle, realni, umjesto kompleksnog (čisto imaginarnog) broja! Poznato je da ulazna impedancija bilo koje kratko spojene linije bez gubitaka ima imaginarni dio, dok je realni dio jednak nuli!

Preostaje izračunati ostale parametre tražene u zadatku

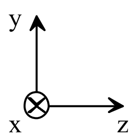
$$OSV = \frac{1+|r_R|}{1-|r_R|} = \frac{1+1}{1-1} = \infty$$

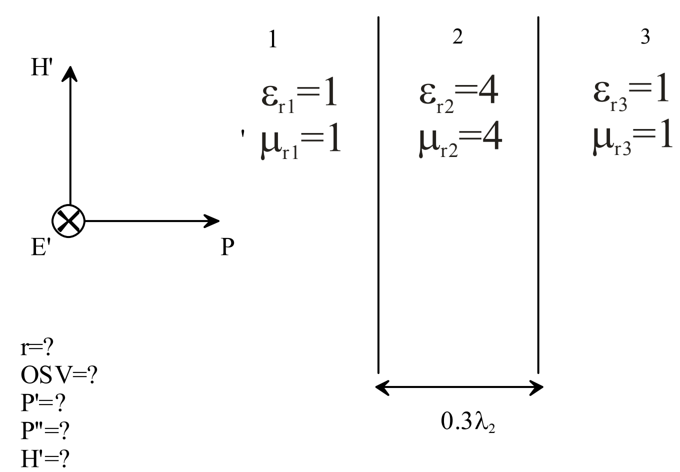
$$P_{inc} = \frac{|E_{inc}|^2}{2\cdot\eta_1} = \frac{1}{2\cdot 376{,}7} = 1{,}327 mW/m^2$$

$$P_{ref} = P_{inc}\cdot|r_R|^2 = 1{,}327\cdot 1 = 1{,}327 mW/m^2$$

$$\frac{P_{inc}}{P_{ref}} = 1$$

4. Ravni linearno polarizirani harmonički val frekvencije 1GHz i vršne vrijednosti upadnog električnog polja $E_x' = 1\mathrm{V/m}$ upada okomito iz zraka na ploču od nekog materijala bez gubitaka čija su svojstva dana s konstitucijskim parametrima ε_r=4 i μ_r=4. Debljina sloja 2 je 0.3 valne duljine u sredstvu 2. Odrediti koeficijent refleksije na granici sredstava 1 i 2, odnos stojnih valova, gustoću upadne i reflektirane snage, kao i vršnu vrijednost upadnog magnetskog polja u zraku (sredstvo 1).
(6 bodova)





Ovaj se zadatak, kao i prethodni, može riješiti bez gotovo ikakvog analitičkog postupka tj. samo zaključivanjem: Promatrajući omjer između konstitucijskih parametara dielektrika (sredstvo 2) te, pošto je isti bez gubitaka, odmah zaključujemo kako mu je intrinsična impedancija jednaka impedanciji slobodnog prostora (sredstva 1 i 3). Dakle, postojanje dielektrika je potpuno „nevidljivo“ incidentnom elektromagnetskom valu i on propagira kroz sustav kao što bi propagirao kroz kontinuirani slobodni prostor. Dakle, na granici između sredstava 1 i 2 vrijedi:

$$r_R = 0$$
$$OSV = 1$$
$$P_{ref} = 0$$

Ostale parametre proračunamo prema relacijama iz prethodnog zadatka

$$P_{inc} = \frac{|E_{inc}|^2}{2\cdot\eta_1} = \frac{1}{2\cdot 376{,}7} = 1{,}327 mW/m^2$$
$$H_{inc} = \frac{E_{inc}}{\eta_1} = \frac{1}{376{,}7} = 2{,}655 mA/m$$

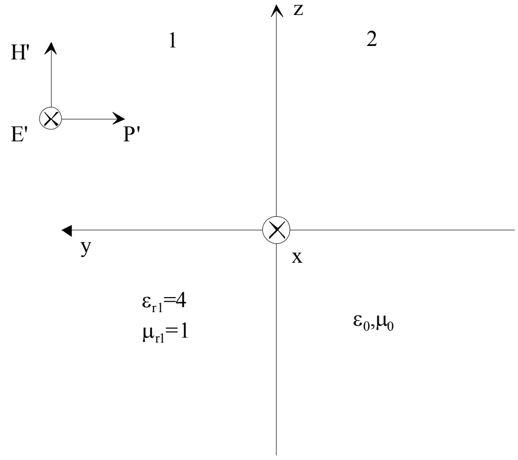
5. Ravni linearno polarizirani harmonički val širi se u sredstvu relativne električne permitivnosti ε_{r1}=4 i relativne magnetske permeabilnosti μ_{r1}=1, te upada okomito na granicu sa zrakom (ε_{r2}=1, μ_{r2}=1). Upadno električno polje definirano je na granici i dano izrazom:

$$\vec{\mathbf{E}}' = \hat{\mathbf{a}}_x \cdot (2\cdot 10^{-3}) e^{+jky} e^{j\omega t} \left[\mathrm{V/m}\right]$$

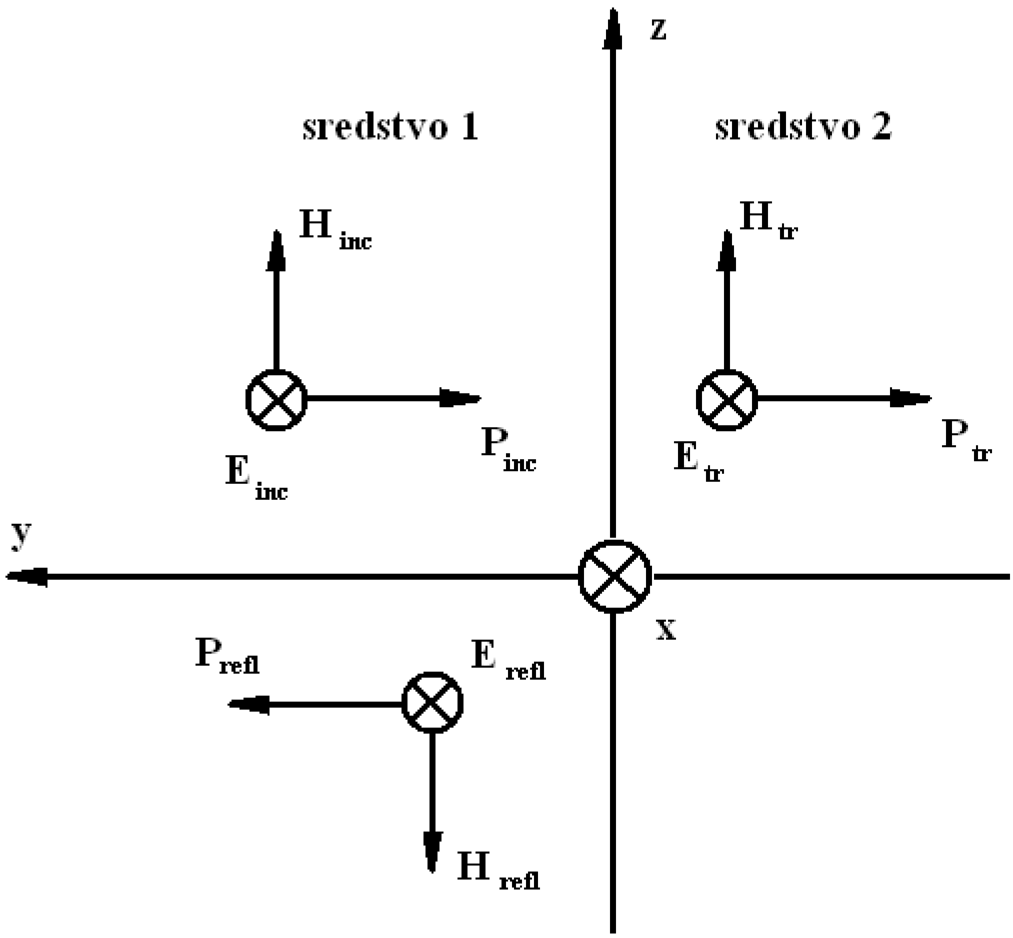
(Napomena: Član ispred eksponencijalne funkcije opisuje vršnu vrijednost.)
Odrediti:

a) Upadno magnetsko polje
b) Koeficijent refleksije na granici sa zrakom
c) Reflektirano i preneseno električno i magnetsko polje
d) Gustoće snaga upadnog, reflektiranog i prenesenog vala

Nadalje, skicirati vektore električnog i magnetskog polja reflektiranog i prenesenog vala.
(6 bodova)



U ovome zadatku je potrebno biti oprezan prilikom određivanja smjera reflektiranog i prenesenog električnog i magnetskog polja. Pošto elektromagnetski val upada **iz gušćeg** sredstva tj. sredstva niže intrinsične impedancije (dielektrika) **u rjeđe** tj. sredstvo više intrinsične impedancije (zrak), koeficijent refleksije <u>električnog polja</u> mora biti **pozitivan broj**! Dakle, smjerovi incidentnog i reflektiranog električnog polja moraju biti jednaki! Pošto energija incidentnog vala putuje u –y smjeru (to nam govori pozitivan eksponent prve eksponencijalne funkcije u zadanom izrazu za incidentno polje $+jk_y y$), evidentno je kako će energija reflektiranog vala putovati u +y smjeru. Poštujući smjer električnog polja kojega smo odredili analizom maloprije, zaključujemo da vektor reflektiranog magnetskog polja mora gledati u –z smjeru! Time smo definirali sva tri vektora reflektiranog vala. Vektore vala prenesenog iz dielektrika u zrak dobivamo primjenjujući rubne uvjete na granici dva sredstva. Od tuda slijedi da je njihovs orjentacija potpuno istovjetna orjentaciji vektora incidentnog vala. Poštujući donesene zaključke, možemo skicirati tražene vektore:



Sada nam jedino još preostaje odrediti iznose amplituda polja.

a) Najprije moramo proračunati intrinsičnu impedanciju sredstva 1

$$\eta_1 = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \eta_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\eta_0}{2} = 188,4\Omega$$

Jakost upadnog magnetskog polja je tada dana s

$$H_{inc} = \frac{E_{inc}}{\eta_1} = \frac{2 \cdot 10^{-3}}{188,4} = 10,62\mu A/m$$

b) Koeficijent refleksije računamo iz poznatih intrinsičnih impedancija sredstava 1 i 2

$$r_R = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{376{,}7 - 188{,}4}{376{,}7 + 188{,}4} = 0{,}333$$

Vidimo da smo dobili pozitivan koeficijent refleksije električnog polja, što je u skladu s prethodnim razmatranjima.

c) Amplituda reflektiranog električnog polja je

$$E_{refl} = E_{inc} \cdot r_R = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}333 = 0{,}667 mV / m$$

Amplituda reflektiranog magnetskog polja je

$$H_{refl} = \frac{E_{refl}}{\eta_1} = \frac{0{,}667 \cdot 10^{-3}}{188{,}4} = 3{,}541 \mu A / m$$

Amplituda prenesenog električnog polja je

$$E_{tr} = E_{inc} + E_{refl} = 2{,}667 mV / m$$

Amplituda prenesenog magnetskog polja je

$$H_{tr} = \frac{E_{tr}}{\eta_2} = \frac{E_{tr}}{\eta_0} = \frac{2{,}667 \cdot 10^{-3}}{376{,}7} = 7{,}078 \mu A / m$$

d) Gustoća snage upadnog vala (uočite da upadni val postoji samo u sredstvu 1)

$$P_{inc} = \frac{|E_{inc}|^2}{2 \cdot \eta_1} = \frac{|2 \cdot 10^{-3}|^2}{2 \cdot 188{,}4} = 10{,}619 nW / m^2$$

Gustoća snage reflektiranog vala (uočite da reflektirani val postoji samo u sredstvu 1)

$$P_{refl} = \frac{|E_{refl}|^2}{2 \cdot \eta_1} = \frac{|0{,}667 \cdot 10^{-3}|^2}{2 \cdot 188{,}4} = 11{,}810 nW / m^2$$

Gustoća snage prenesenog vala (uočite da preneseni val postoji samo u sredstvu 2)

$$P_{tr} = \frac{|E_{tr}|^2}{2 \cdot \eta_2} = \frac{|2{,}667 \cdot 10^{-3}|^2}{2 \cdot 376{,}7} = 9{,}441 nW / m^2$$