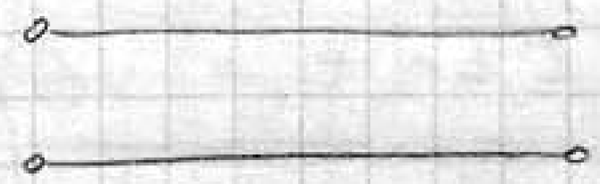
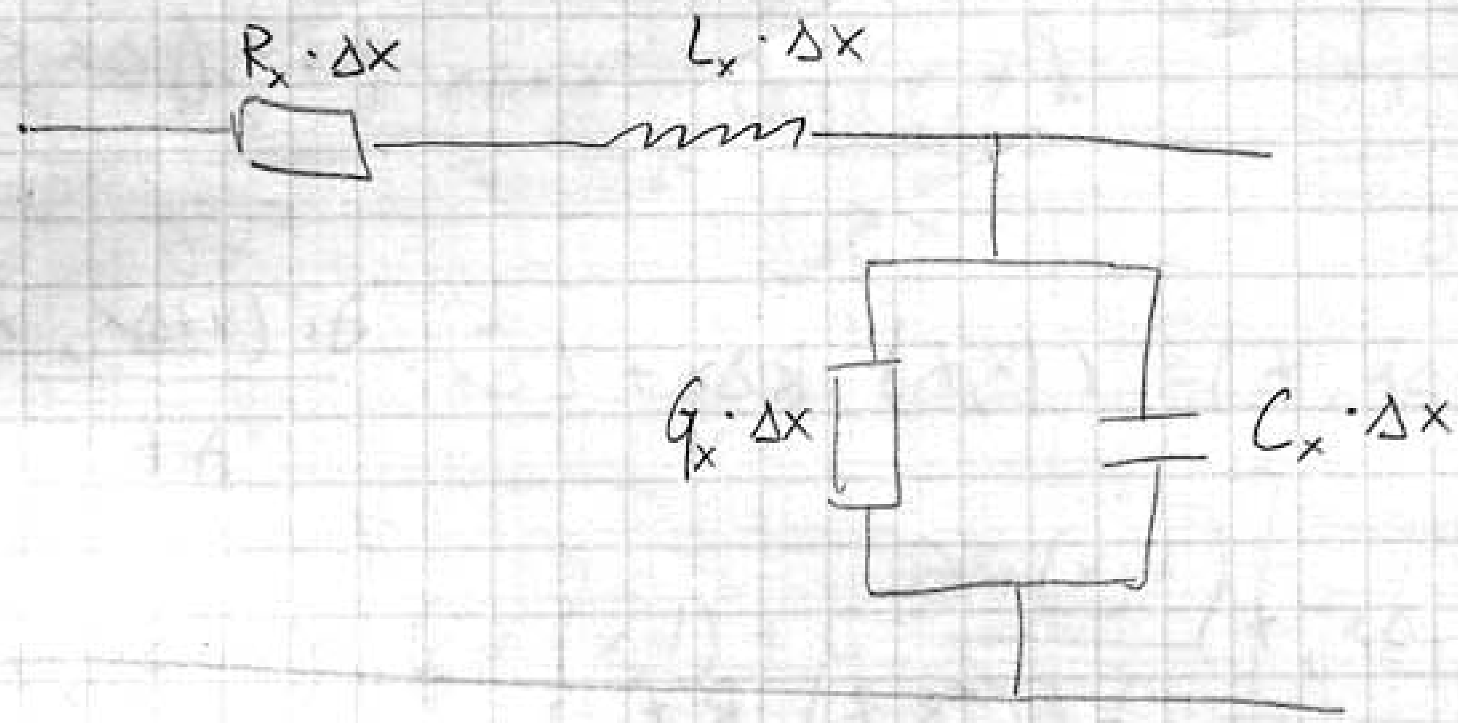
1. Nadomjesne sheme linije. Fizikalno objašnjenje pojedinih elemenata.



linija duljine l — l reda veličine λ

uzimamo komadić linije duljine $\Delta x << \lambda$



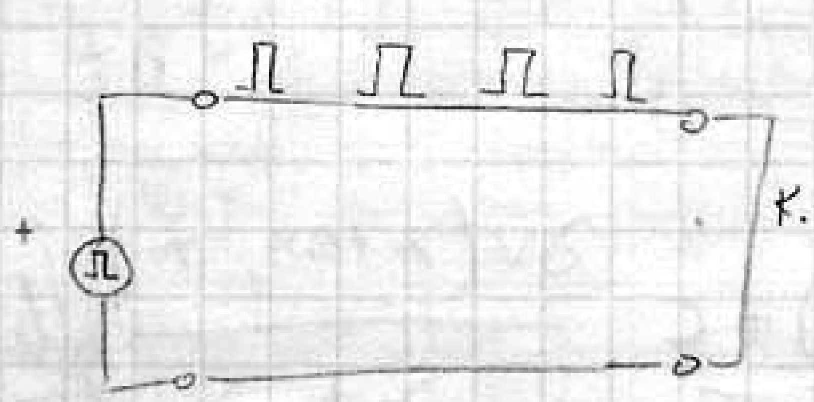
R_x - gubitci zbog otpora (serijskog)

G_x - gubitci zbog vodljivosti između dvaju vodiča

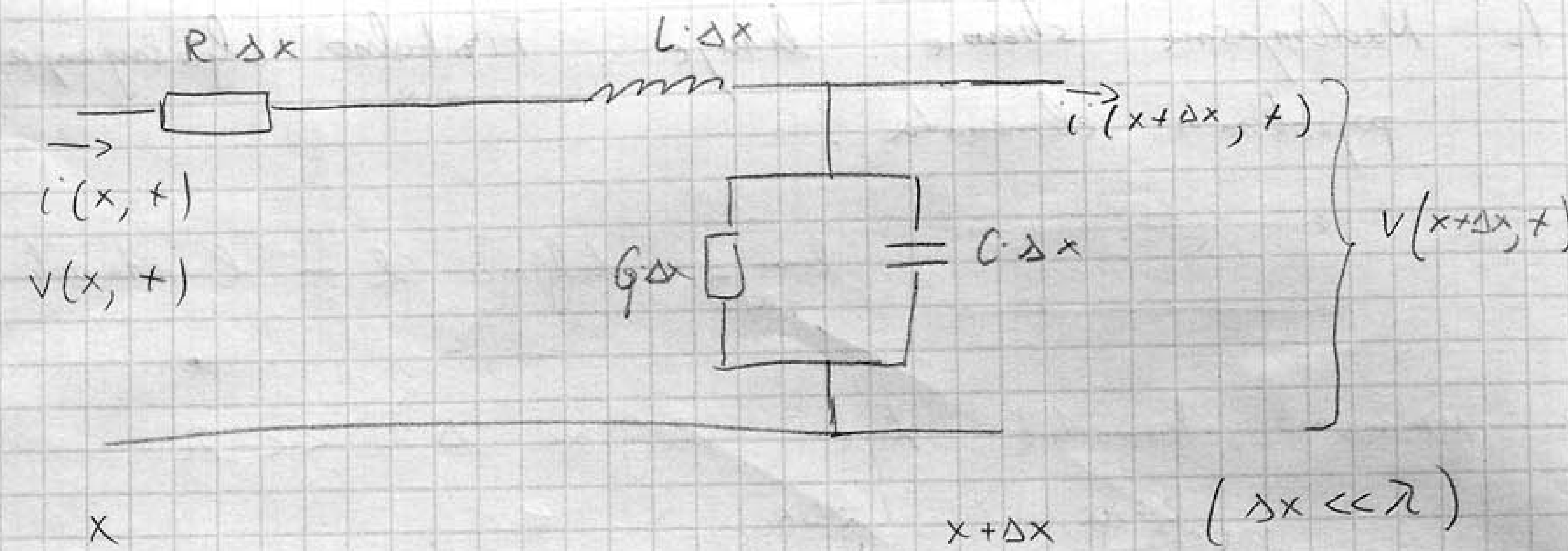
L_x - induktivni gubitci

C_x - kapacitivni gubitci

2. Objašnjenje refleksije. Jednadžbe struje i napona na odsječku linije. Valne jednadžbe



Neka je linija zaključena kratkim spojem. Signal (napon) putuje linijom od generatora prema kraju linije. Kada dođe na kraj signal će imati neku amplitudu, međutim kraj je kratko spojen => napon mora biti $\emptyset$. Ta dva zahtjeva su ispunjena ako pretpostavimo da postoji i val koji se širi u suprotnom smjeru od upadnog vala, odnosno da se upadni val reflektirao.



$$v(x,t) - v(x+\Delta x, t) = i(x,t)\cdot R\Delta x + L\Delta x \cdot \frac{\partial i(x+\Delta x, t)}{\partial t} \Bigg/ : \Delta x$$

$$\frac{v(x,t) - v(x+\Delta x, t)}{\Delta x} = i(x,t)\cdot R + L\frac{\partial i(x+\Delta x, t)}{\partial t} \Bigg/ \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$\boxed{-\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = i(x,t)\cdot R + L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t}}$$

$$i(x,t) - i(x+\Delta x, t) = G\cdot\Delta x\cdot v(x+\Delta x, t) + C\Delta x\frac{\partial v(x+\Delta x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{i(x,t) - i(x+\Delta x, t)}{\Delta x} = G\cdot v(x+\Delta x, t) + C\frac{\partial v(x+\Delta x, t)}{\partial t} \Bigg/ \lim_{\Delta x \to 0}$$

$$\boxed{-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = G\cdot v(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}}$$

aproksimacija: $\dfrac{\partial v(x+\Delta x)}{\partial t} = \dfrac{\partial v(x)}{\partial t}$

u prvu uvrstimo izraz za $\frac{\partial i(x,t)}{\partial x}$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -i(x,t)\cdot R - L\frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -R\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -R\left[G v(x,t) + C\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right] - L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -RGv(x,t) - RC\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x \partial t}$$

ako uzmemo da su gubici zanemarivi, $R=G=0$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -L\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x \partial t}$$

iz druge jedn. slijedi da je $-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{\partial v}{\partial t}$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}}$$

valne jedn. za liniju bez gubitaka.

Rješenja valnih jedn. su oblika

$$f_1\left(t + \frac{x}{v_p}\right) \quad i \quad f_2\left(t - \frac{x}{v_p}\right) \qquad v_p = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Jedan val se širi u $+x$ smjeru, a drugi u $-x$
(Jedan val je upadni, a drugi reflektirani)
U linijama bez gubitaka i upadni i reflektirani val se šire neprigušeni.

$$\frac{\partial f\left(t - \frac{x}{v_p}\right)}{\partial x} = f'\left(t - \frac{x}{v_p}\right)\left(-\frac{1}{v_p}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f\left(t - \frac{x}{v_p}\right)}{\partial x} = f''\left(t - \frac{x}{v_p}\right)\left(-\frac{1}{v_p}\right)^2$$

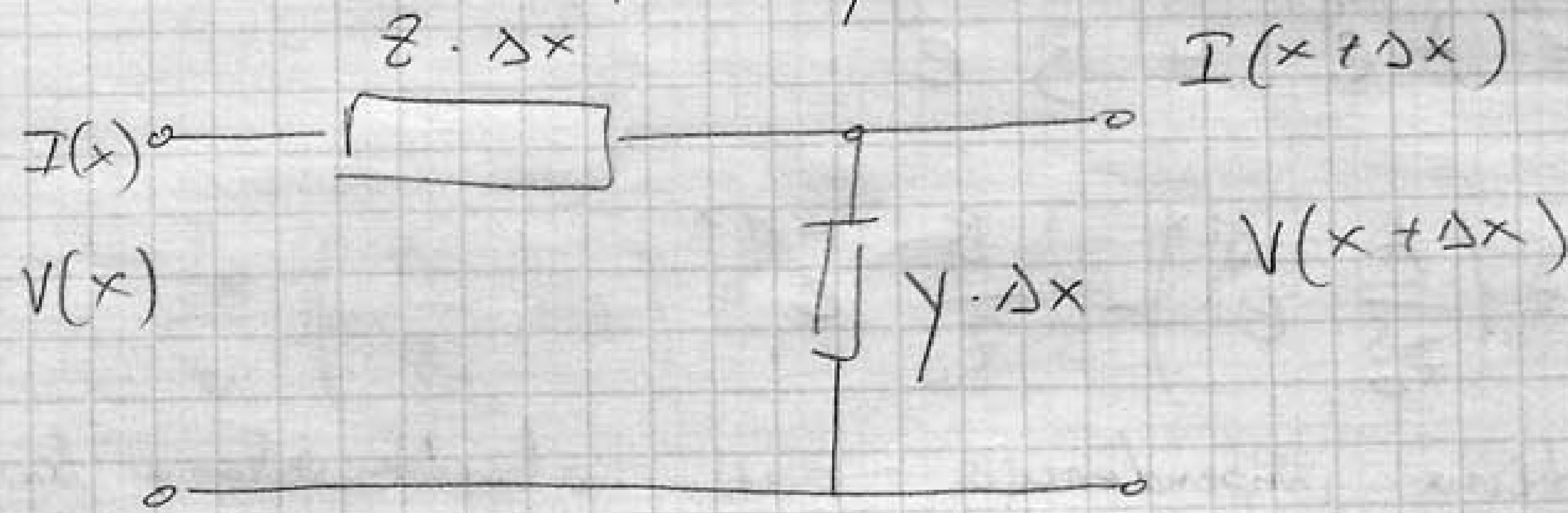
ako ovo uvrstimo u valnu jedn.

$$f''\,\frac{1}{v_p^2} = LC \cdot f''$$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

– fazna brzina
– brzina kojom se giba točka u fazi – prividna brzina vala, može biti veća od brzine svjetlosti jer nema fizikalno značenje.

4. Oblik rj. valne jed. za sinusnu pobudu.
Fizikalna interpretacija.



$$V(x) - V(x+\Delta x) = I(x) \cdot Z \cdot \Delta x \quad / : \Delta x$$

$$-\frac{dV}{dx} = I \cdot Z$$

$$I(x) - I(x+\Delta x) = V(x+\Delta x) \cdot Y \Delta x \quad / : \Delta x$$

$$-\frac{dI}{dx} = Y \cdot V$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d^2V}{dx^2} &= ZYV \\ \frac{d^2I}{dx^2} &= ZYI \end{aligned}}$$

odnosno uz

$$\gamma = \sqrt{ZY}$$

- konst. širenja
- kompleksna veličina

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I$$

γ se može rastaviti na realni i imaginarni dio

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

α - konstanta gušenja $\quad$ β - fazna konstanta

Rješenja jedn. su

$$V = A e^{\gamma x} + B e^{-\gamma x}$$

$$I = \frac{A}{Z_0} e^{\gamma x} - \frac{B}{Z_0} e^{-\gamma x}$$

karakteristična impendancija - ovisi o karakteristikama linije

Z_0 - omjer napona i struje za val koji putuje u jednom smjeru

- jednaka ulaznoj impendanciji beskonačno duge linije

$$Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \left| \begin{matrix} \text{za liniju} \\ \text{bez gubitaka} \end{matrix} \right| = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

za $x = 0$ (teret) $V = V_R$ $I = I_R$

jedn. postaju

$V_R = A + B$ $B = V_R - A$

$I_R = \frac{A}{Z_0} - \frac{B}{Z_0}$

$$I_R = \frac{V_R}{Z_R} = \frac{A}{Z_0} - \frac{V_R}{Z_0} + \frac{A}{Z_0}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{V_R}{Z_R} + \frac{V_R}{Z_0}\right) = \frac{A}{Z_0}$$

$$\underline{A = \frac{V_R}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_R}\right)}$$

$$B = V_R - A = V_R - \frac{V_R}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_R}\right) = \underline{\frac{V_R}{2}\left(1 - \frac{Z_0}{Z_R}\right)}$$

$$V = \frac{V_R}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_R}\right)e^{\gamma x} + \frac{V_R}{2}\left(1 - \frac{Z_0}{Z_R}\right)e^{-\gamma x}$$

$$I = \frac{I_R}{2}\left(\frac{Z_R}{Z_0} + 1\right)e^{\gamma x} + \frac{I_R}{2}\left(1 - \frac{Z_R}{Z_0}\right)e^{-\gamma x}$$

2 vala - jedan val se širi prema teretu (upadni), a drugi od tereta (reflektirani)

Ako se linija zaključi teretom impendancije $Z_R = Z_0$ nestat će reflektiranog vala - prilagođenje

Ako promatramo sa odašiljačkog (generator) kraja onda je $x = l$ $V = V_s$ i $I = I_s$

$$V_s = V_R\, e^{\gamma l} \qquad I_s = I_R\, e^{\gamma l}$$

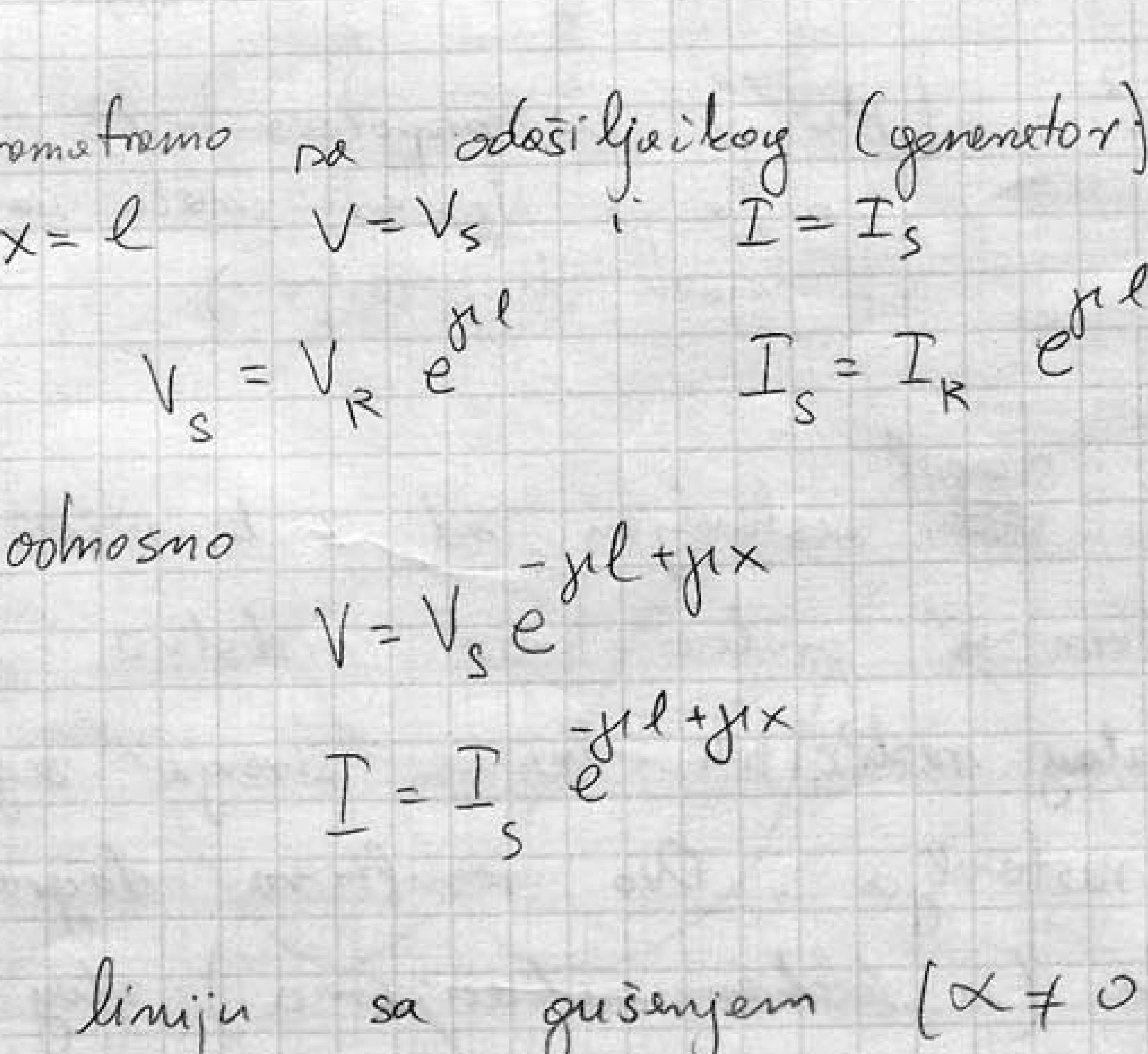
odnosno

$$V = V_s\, e^{-\gamma l + \gamma x}$$

$$I = I_s\, e^{-\gamma l + \gamma x}$$

za liniju sa gušenjem $(\alpha \neq 0)$

amplituda opada kako idemo prema teretu



5. Fizikalna interpretacija fazne, grupne brzine i disperzije.

Fazna brzina – brzina kojom se giba faza.

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$ – može biti veća od brzine svjetlosti jer nema "pravi" fizikalni smisao

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ (energija odnosno informacija se ne šire faznom brzinom)

Grupna brzina – brzina kojom se širi ~~brzina~~ promjena amplitude vala

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$$ U većini slučajeva grupna brzina je brzina kojom se širi energija/informacija

$$v_p \cdot v_g = c^2$$ (Ako je ω proporcionalno β onda je $v_g = v_p$ inače imamo pojavu disperzije)

Disperzija – kad signal ~~val~~ sastavljen od 2 ili više komponenti prolazi kroz sredstvo onda zbog različitih brzina širenja signal se rastavlja. Ovo rezultira degradacijom signala (u telekomunikacijama) zbog različ. (kašnjenja) u vremenu dolaska pojedinih komponenti.

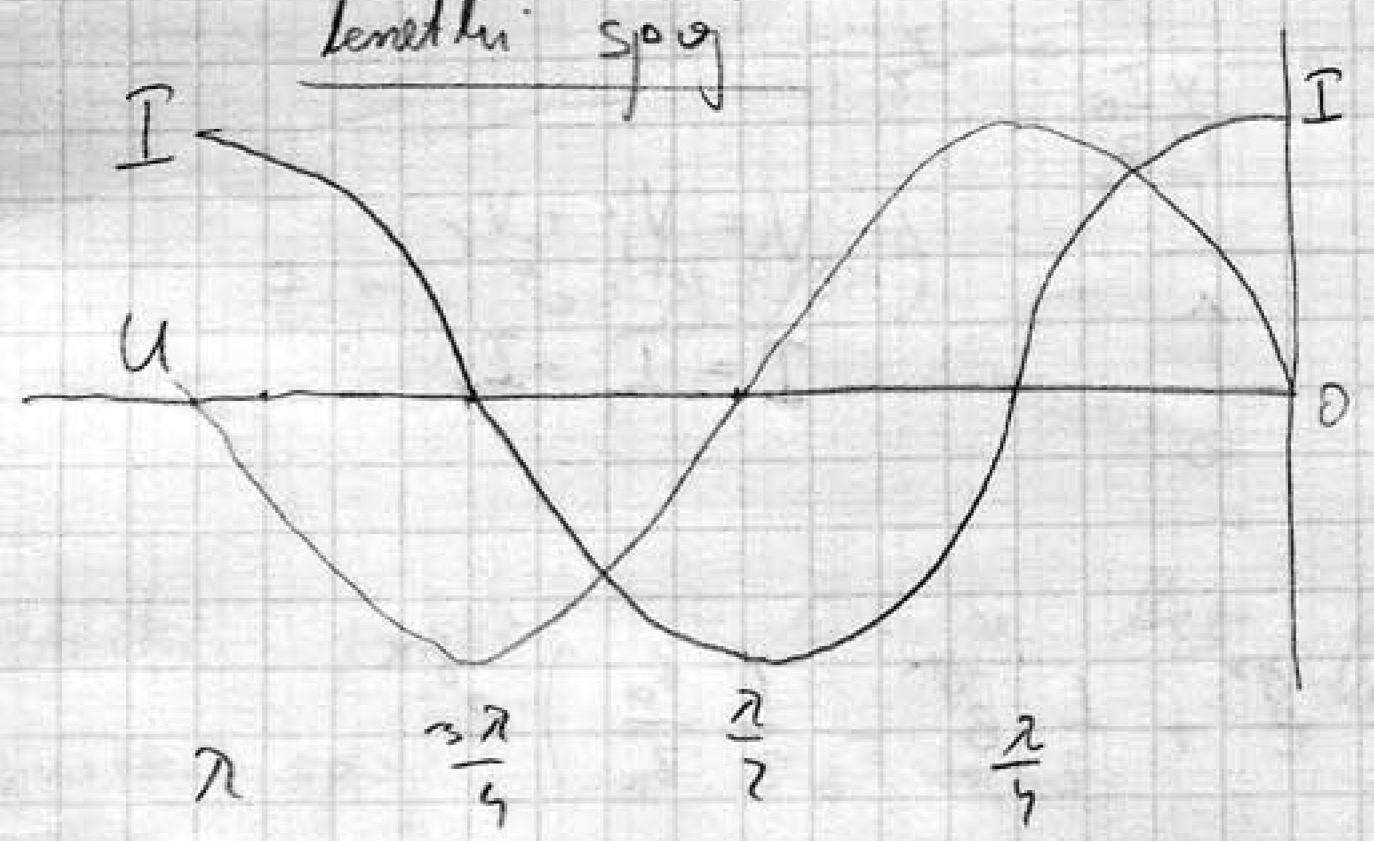
(Nastaje zbog toga što je ε ovisan o frekvenciji – većinom)

6. Stojni val.

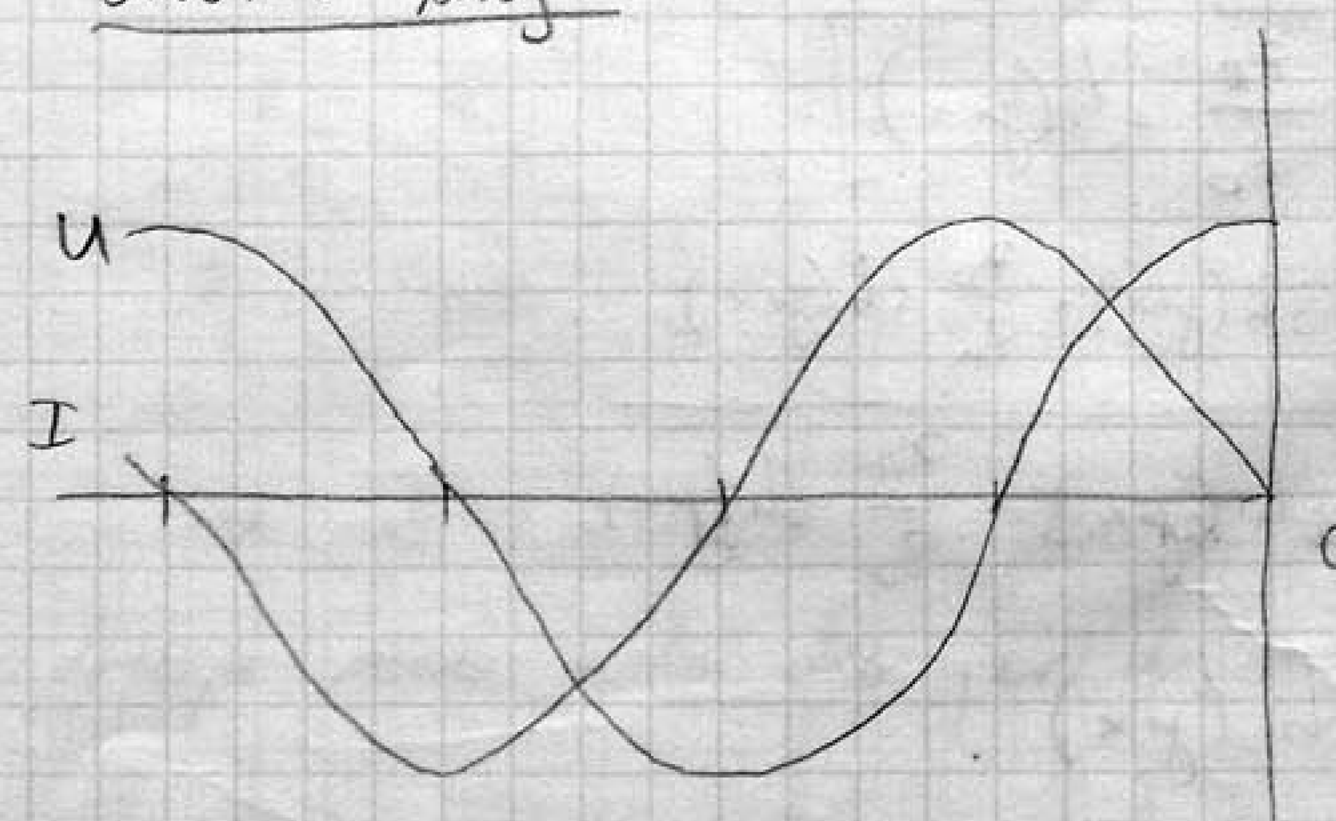
Valovi neprestano putuju od generatora prema teretu. Na teretu se dio vala reflektira i vraća prema generatoru. Ti valovi se zbrajaju sa nadolazećim. Rezultat je stojni val

primjeri:

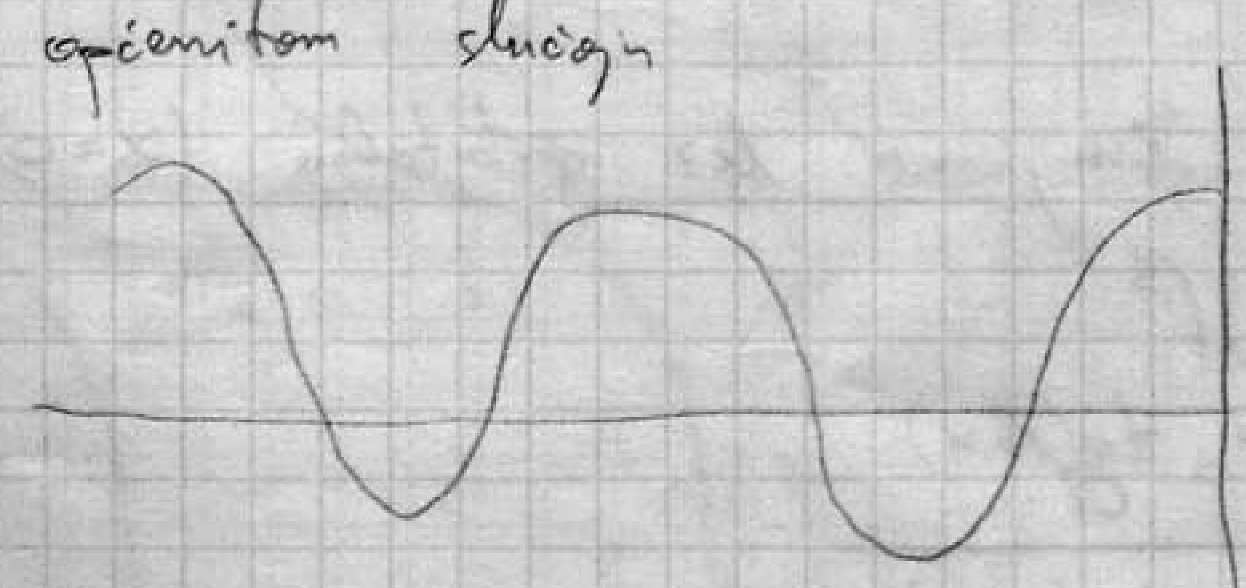
kratki spoj



otvoreni kraj



u općenitom slučaju

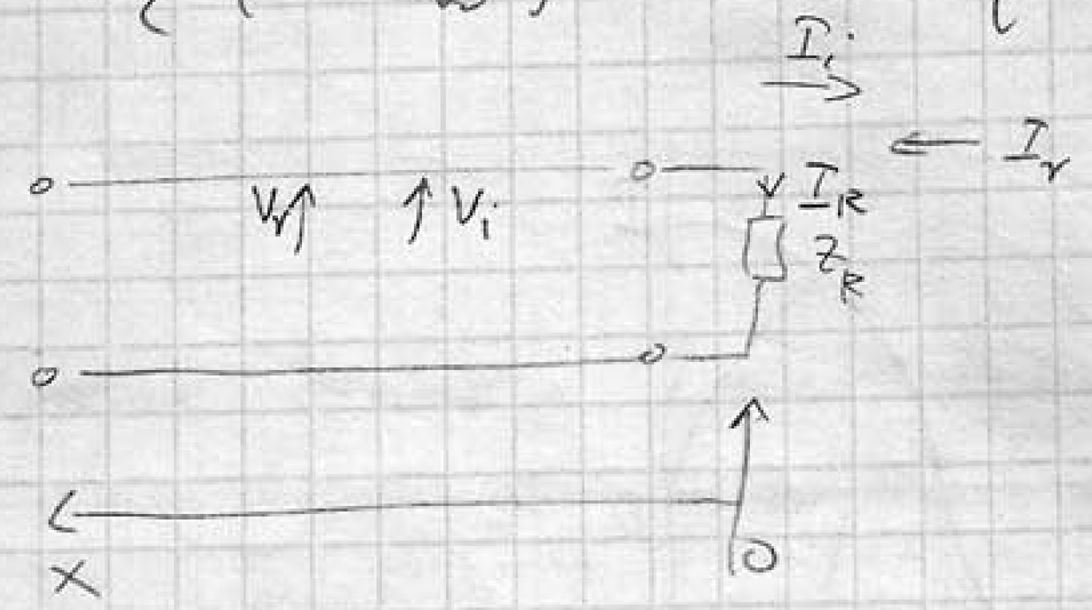


7. Ulazna impendancija linije sa i bez gubitaka.
(Impendancija na liniji sa i bez gubitaka.)

<u>analitički:</u>

$$V = \frac{V_R}{2}\left(1 + \frac{Z_0}{Z_R}\right)e^{\gamma x} + \frac{V_R}{2}\left(1 - \frac{Z_0}{Z_R}\right)e^{-\gamma x}$$

$$I = \frac{I_R}{2}\left(1 + \frac{Z_R}{Z_0}\right)e^{\gamma x} + \frac{I_R}{2}\left(1 - \frac{Z_R}{Z_0}\right)e^{-\gamma x}$$



$$V = V_i + V_r$$

$$I = I_i - I_r$$

$$V = V_R\left(\frac{1}{2}e^{\gamma x} + \frac{1}{2}\frac{Z_0}{Z_R}e^{\gamma x} + \frac{1}{2}e^{-\gamma x} - \frac{1}{2}\frac{Z_0}{Z_R}\right)e^{-\gamma x}$$

$$V = V_R\left[ch(\gamma x) + \frac{Z_0}{Z_R}\,sh(\gamma x)\right]$$

$$I = I_R\left[ch(\gamma x) + \frac{Z_R}{Z_0}\,sh(\gamma x)\right]$$

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_R}{I_R}\cdot\frac{ch(\gamma x) + \frac{Z_0}{Z_R}\,sh(\gamma x)}{ch(\gamma x) + \frac{Z_R}{Z_0}\,sh(\gamma x)}$$

$$Z = Z_0\cdot\frac{Z_R + Z_0\,th(\gamma x)}{Z_0 + Z_R\,th(\gamma x)}$$

ako radimo sa linijama bez gubitaka $(\alpha = 0)$
onda je $\gamma = j\beta$

$$Z = Z_0\cdot\frac{Z_R + jZ_0\,tg(\beta x)}{Z_0 + jZ_R\,tg(\beta x)}$$

kratki spoj $\quad Z_R = 0$

$$Z = Z_0 \cdot \frac{0 + j Z_0 \, tg(\beta x)}{Z_0} = j Z_0 \, tg(\beta x)$$

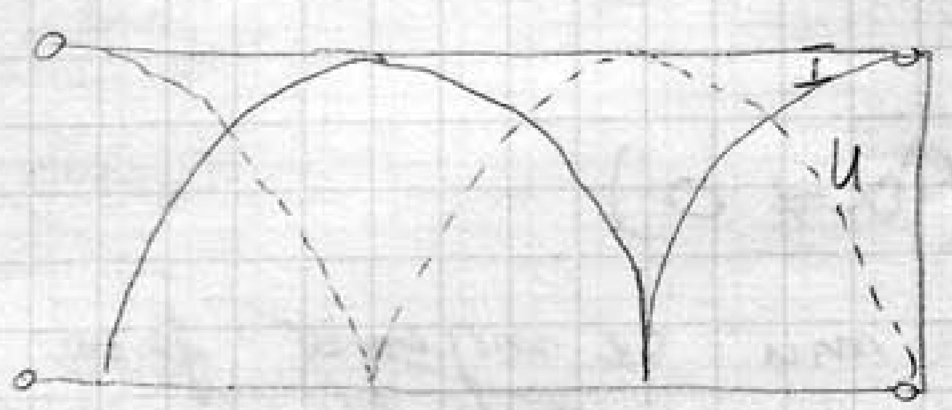
otvoreni kraj $\quad Z_R = \infty$

$$Z = Z_0 \cdot \frac{Z_R + j Z_0 \, tg(\beta x) \; / : Z_R}{Z_0 + j Z_R \, tg(\beta x) \; / : Z_R} = Z_0 \cdot \frac{1 + j \frac{Z_0}{Z_R} tg(\beta x)}{\frac{Z_0}{Z_R} + j \, tg(\beta x)}$$

$$Z = j Z_0 \, ctg(\beta x)$$

grafički prikaz - linija bez gubitaka

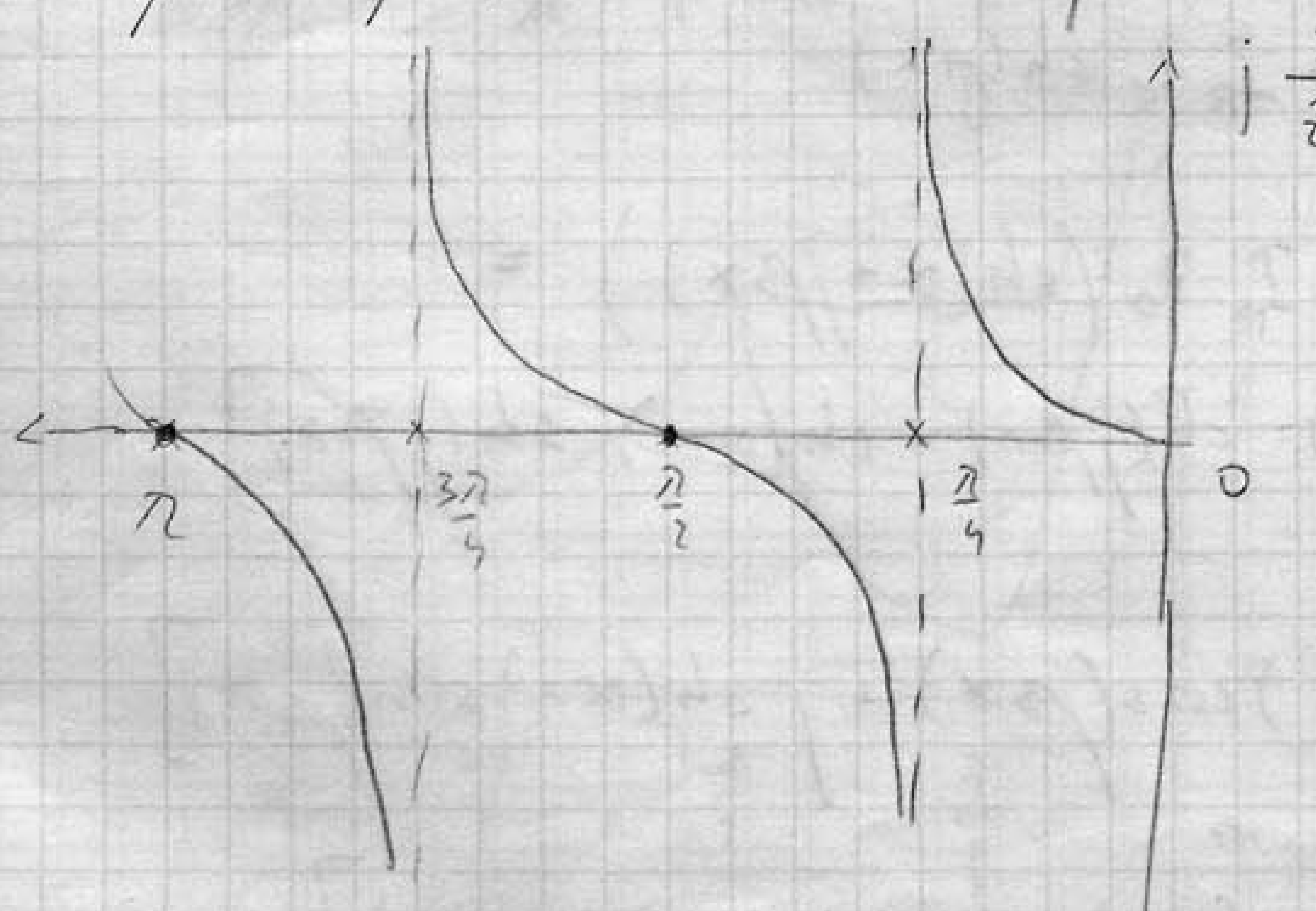
kratki spoj $\quad Z_R = 0$



- svako $\lambda/2$ situacija na liniji se ponavlja

$Z \quad \ldots \quad \infty \quad 0 \quad \infty \quad 0$

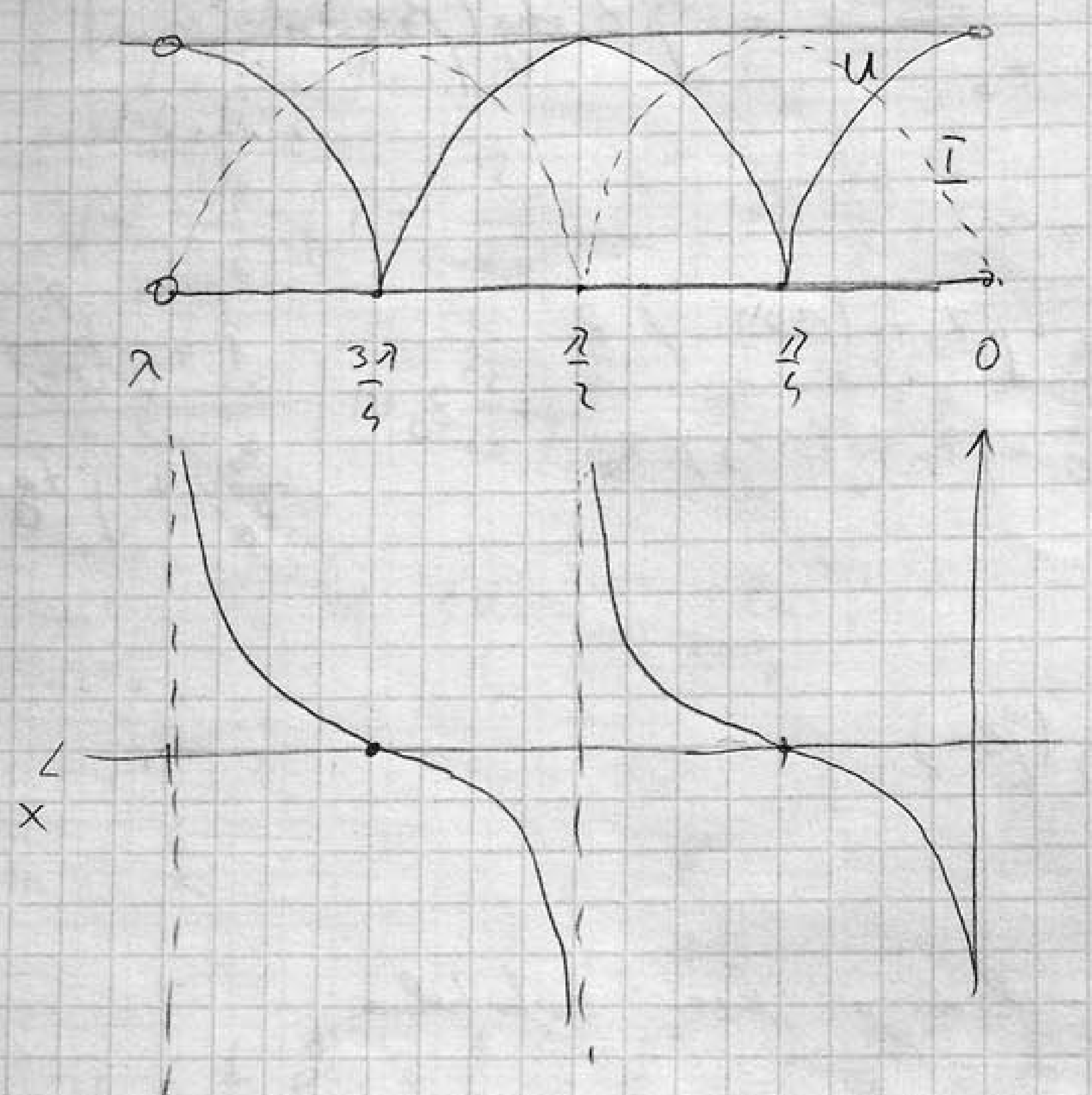
- impendancija nema realni dio jer da ima bilo bi gubitaka



induktivan karakter

kapacitivan karakter

otvoreni kraj $\quad Z_R = \infty$



Linija sa gubitcima $(\alpha \neq 0)$

- upadni val, osim što mu se mijenja faza, se također i prigušuje

kratko spojena linija

$$V = V_R \left[ch(\gamma x) + \frac{Z_0}{Z_R} sh(\gamma x) \right] \qquad V_R = I_R \cdot Z_R$$

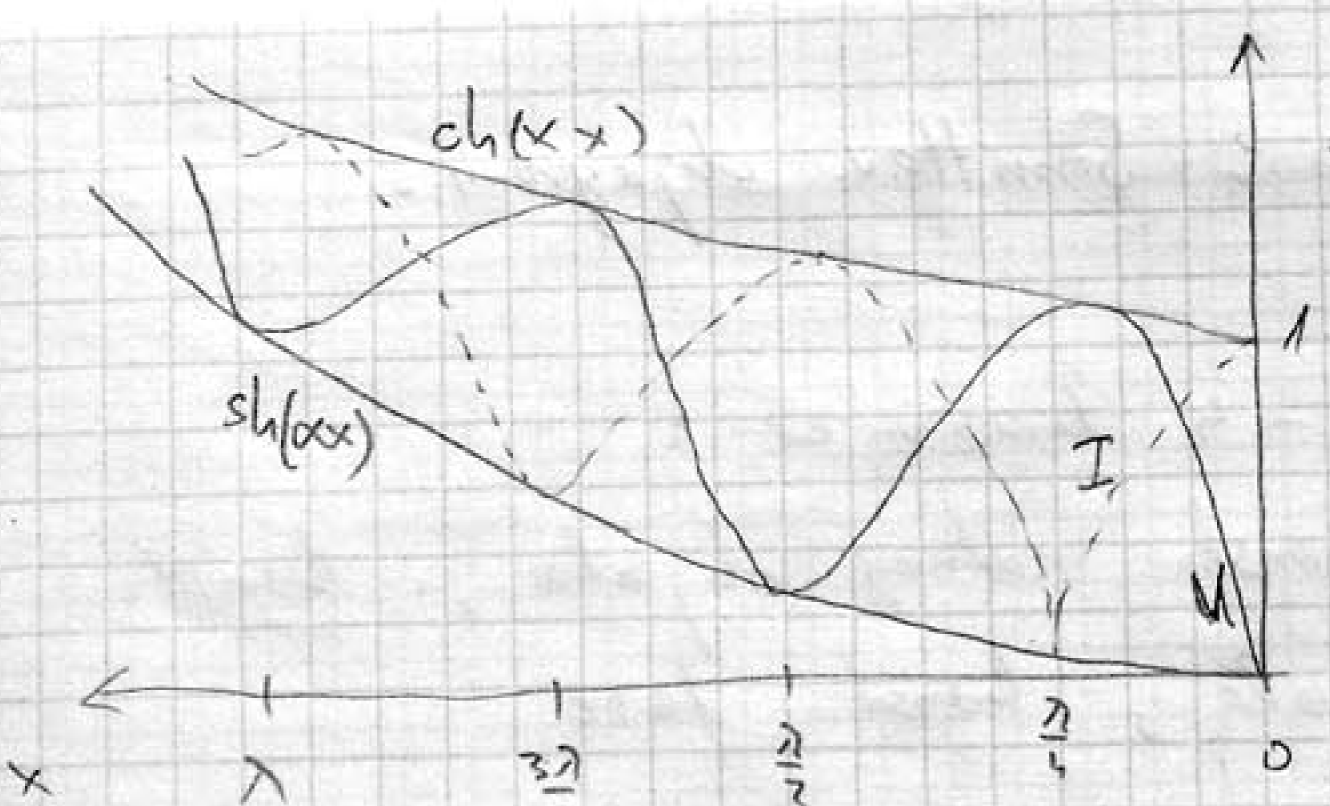
$$V = I_R \overset{=0}{Z_R} ch(\gamma x) + I_R Z_0 \, sh(\gamma x)$$

$$V = I_R Z_0 \, sh(\gamma x) = I_R Z_0 \left(sh(\alpha + j\beta x) \right) =$$

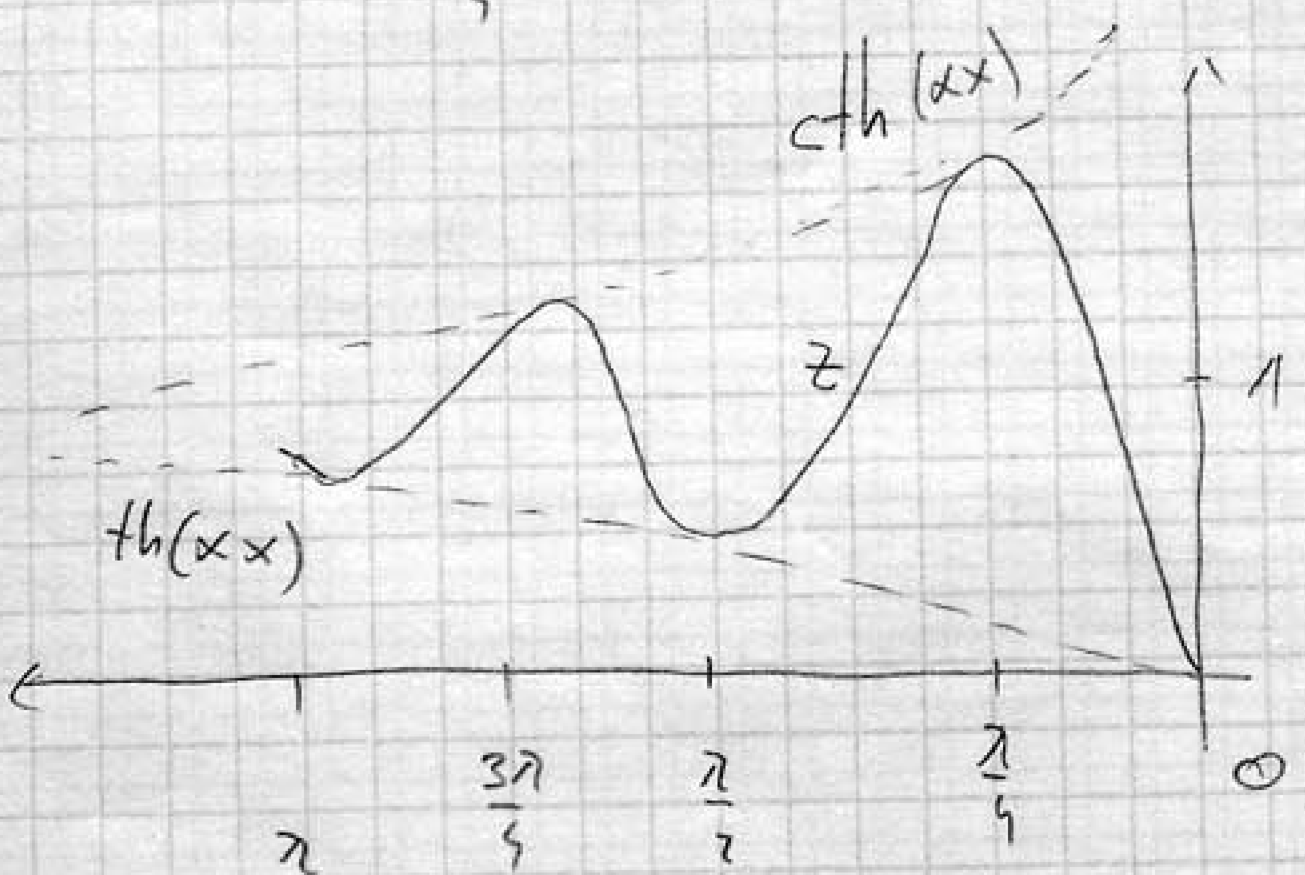
$$= I_R Z_0 \left[sh(\alpha x) \cdot ch(j\beta x) + ch(\alpha x) \cdot sh(j\beta x) \right]$$

$$V = I_R Z_0 \left[sh(\alpha x) \cos(\beta x) + j \, ch(\alpha x) \sin(\beta x) \right]$$

$$I = I_R \left[sh(\alpha x) \cos(\beta x) + j \, sh(\alpha x) \sin(\beta x) \right]$$

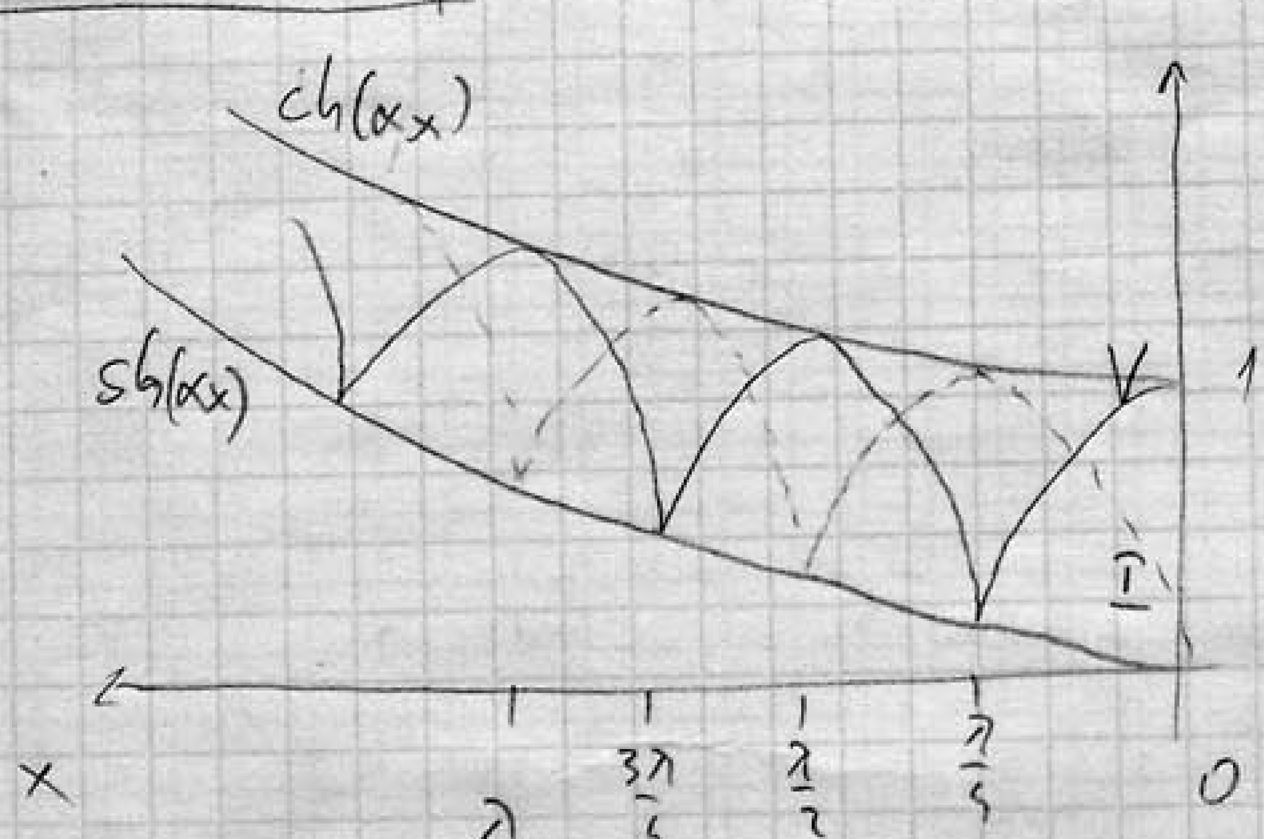


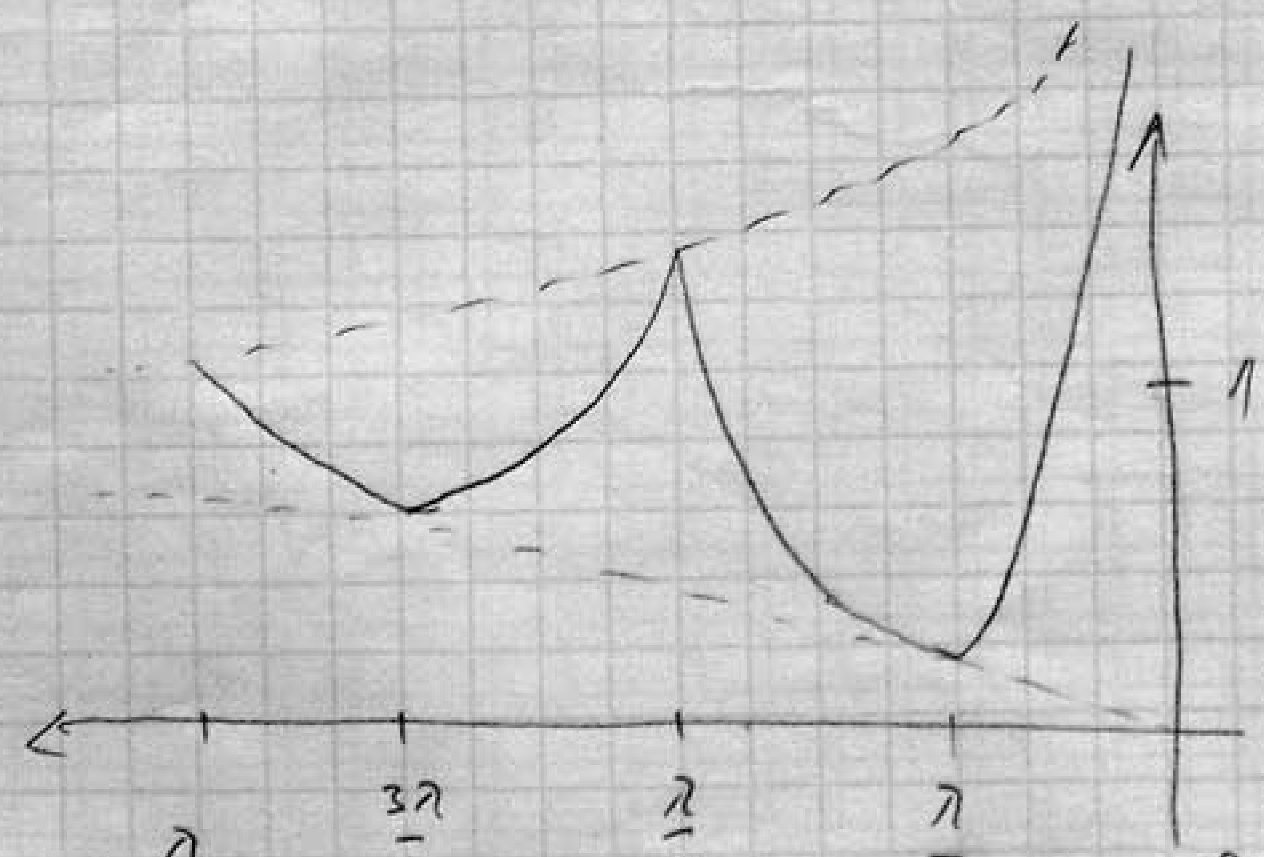
raspodjela napona i struje na liniji (s gubitcima)



graf impendancija za kratko spojenu liniju sa gubitcima

otvoren kraj:





8. Koeficijent refleksije. Smithov dijagram.
Prilagođenje.
Smithov dijagram - 4 krivulje:
konst. gušenja, konst. realnog dijela, konst. imaginarnog dijela, konst. faze

8. Pojam elektromagnetskog polja.

$$\vec{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi \varepsilon r^2} \hat{r}$$ - Coulonova sila - djeluje između naboja

$$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0 \qquad \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \ F/m$$

Električno polje se definira kao sila na jedinični pozitivni naboj koji je stavljen u polje, pretpostavljajući da taj naboj ne poremećuje polje.

$$\boxed{\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q}}$$

Električno polje je u biti svojstvo prostora oko nabijenog tijela (to tijelo je uzrok tome).

- za točkasti naboj: $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{r}$

Jedinica za elek. polje je V/m odnosno N/C

Električno polje možemo opisati pomoću zamišljenih linija - električnih silnica koje po definiciji izlaze iz pozitivnog naboja a ulaze u negativni. (Dogovorno se uzima da veći broj silnica (veća gustoća) znači i jače polje)

Za elektrostatsko polje možemo definirati potencijal - kao rad potreban da bi pomakli jedinični naboj protiv sile iz točke nultog potencijala (∞) do neke određene točke.

$$V_b = -\int_a^b \vec{E}\, d\vec{l} + V_a \qquad (\text{odnosno } V_a = 0)$$

$$\boxed{E = -\nabla V} \qquad (E = -\text{grad}\, V)$$

$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ $\vec{D}$ - vektor električnog pomaka

- opisuje kako $\vec{E}$ utječe na razmještanje električnih naboja u danom sredstvu

ε - permitivnost (dielektrična konstanta)

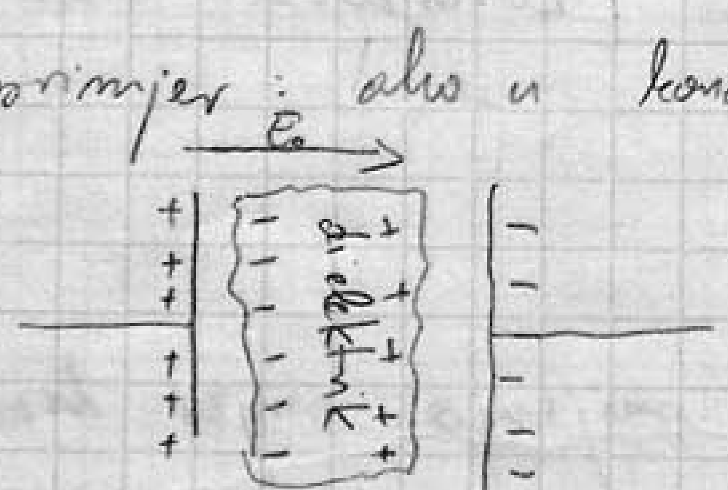
$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ ε_r relativna permitivnost (rel. diel. konst.)

ε - skalar ako je sredstvo izotropno, u općenitom slučaju tenzor

ε_0 - permitivnost u vakuumu

U izolatoru izloženom djelovanju elektr. polja elektroni i atomske jezgre (zapravo molekule) se orijentiraju duž pravca djelovanja polja. Ove pojave se zbrajaju i daju makroskopski efekt - polarizaciju. Imamo nakupinu negativnog naboja odmaknutu za određeni iznos od nakupine pozitivnih naboja.

primjer: ako u kond. umetnemo dielektrik



- rezultirajuće polje je vektorski zbroj induciranog i originalnog (vanjskog) elek. polja

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{ind}$$

odnosno ono je slabije od vanjskog polja ($\vec{E}_0$)

možemo pisati $\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_r} \vec{E}_0$

$\varepsilon_r > 1$ (jednak 1 za vakuum) - sredstvo mora biti homogeno i izotropno

Tok električnog polja - ϕ

- ako postavimo površinu S u električno polje $\vec{E}$ kroz nju će prolaziti određeni broj silnica u ovisnosti o položaju površine. Govorimo o toku elekt. polja kroz površinu odnosno o električnom toku.

$$\phi = \int_S \vec{E}\, d\vec{S}$$

Magnetsko polje za razliku od električnog nema „izvora" i „ponora" silnica - one se zatvaraju same u sebe - odnosno izvor i ponor su jedno.

Za prikaz mag. polja rabimo vektor $\vec{B}$ - gustoća magn. toka - magnetska indukcija. Magnetsko polje je nastalo zbog prisutnosti magnetskog materijala ili zbog protjecanja struje.

Magnetsko polje djeluje na naboj u gibanju silom

$$\vec{F} = Q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Odnosno ukupna elektromagnetska sila (Lorentzova sila)

$$F = Q \cdot \vec{E} + Q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

Magnetska sila ne vrši rad - ona mijenja smjer brzine ali ne i njen iznos

Magnetsko polje H [u $\frac{A}{m}$)

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad \text{u T (teslama)}$$

μ - permeabilnost $\mu = \mu_r \mu_0$ - μ_r relativna permeabilnost

- μ_0 perm. vakuuma

10.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \ \frac{H}{m}$

μ - stupanj magnetizacije materijala koji linearno odgovara postavljenom magnetskom polju

10. Fizikalna interpretacija divergencije i ~~rotacije~~ rotora vektorskog polja.

11. Jednadžba kontinuiteta. Posmačna struja.

Kretanje elektr. naboja stvara električnu struju. Kretanje naboja kroz prostor stvara konvekcijsku struju a kretanje kroz vodič kondukcijsku struju.

$$\vec{J}_c = \varrho \cdot \vec{v} \qquad I = \frac{J_c}{S}$$

J_c - gustoća struje
S - površina

Kako je srednja brzina naboja u elektr. polju proporcion. tom elektr. polju možemo pisati

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

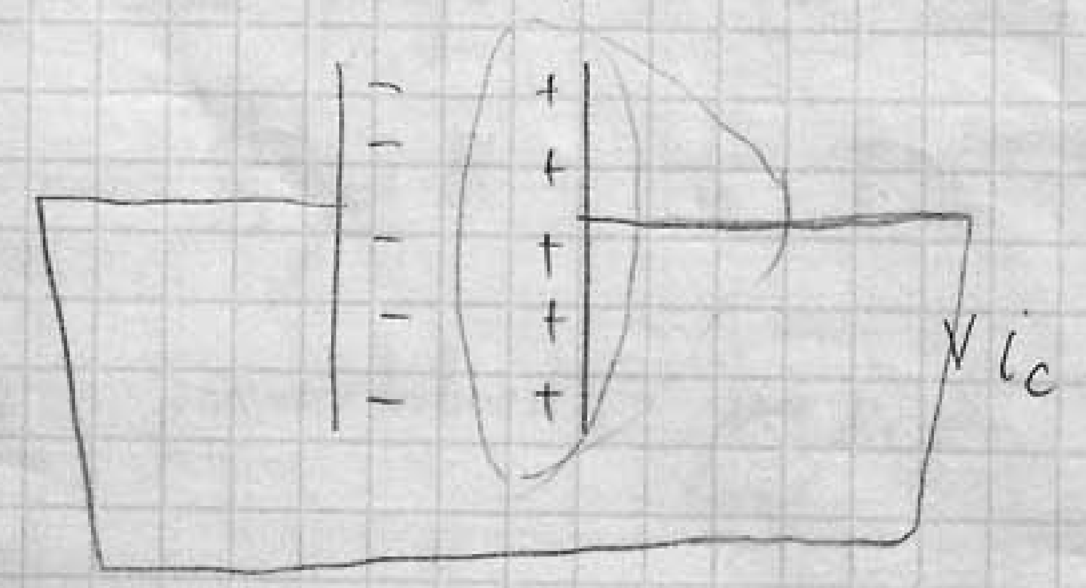
σ - vodljivost [S - simens]

Kirchhoff - zakon kontinuiteta kondukcijske struje
U električnom krugu struja teče do točke u jednakoj veličini u kojoj otječe iz te točke (Koliko uđe toliko izađe.).

Problem: kondenzatori. Između ploča kondenzatora naboji nemogu prolaziti pa imamo diskontinuitet kondukcijske struje.

Maxwell - ako se vremenska promjena električnog polja tretira kao posmačna struja, struja će uvijek biti kontinuirana.

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



$i_c = -\dfrac{dq}{dt}$ - princip očuvanja elektriciteta

$D\,dS = q$ - Gaussov zakon za električno polje
(Električni tok obuhvaćen nekom površinom je naboj)

$i_c + \oint_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot dS = 0$ odnosno uz $i_c = \oint_S \vec{J}_c\, d\vec{S}$

$$\boxed{\oint_S \left(\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dS = 0}$$ zakon kontinuiteta struje

$\vec{J} = \vec{J}_c + \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ - ukupna gustoća struje

Prema zakonu kontinuiteta mora biti $\nabla \vec{J} = 0$

$$\boxed{\nabla \vec{J}_c + \frac{\partial (\nabla \vec{D})}{\partial t} = 0}$$

12. Maxwellove jednadžbe.

1. Gaussov zakon za električno polje

$$\boxed{\begin{gathered}\oint_S \vec{D}\, d\vec{S} = Q \\ \nabla \cdot \vec{D} = \rho\end{gathered}}$$

Tok vektora električnog polja kroz bilo koju zatvorenu površinu jednak je ukupnom naboju (podijeljenom sa ε).

$$\oint_S \vec{E}\, d\vec{S} \underset{\text{Gaussov teorem}}{=} \int_V \nabla \vec{E}\, dV = \int_V \frac{\rho\, dV}{\varepsilon}$$

Gaussov teorem

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

2. Gaussov zakon za magnetsko polje

$$\boxed{\begin{gathered}\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0\end{gathered}}$$

Tok magnetskog polja je uvijek nula (tj. koliko silnica uđe toliko ih i mora izaći iz površine). Ovo je posljedica nepostojanja „magnetskih naboja".

$$\oint_S \vec{B}\, d\vec{S} = \int_V \nabla \vec{B}\, dV = 0$$

Gaussov teorem

3. Ampere - Maxwellov zakon

$$\boxed{\begin{gathered}\oint \vec{B}\, d\vec{l} = \mu \int \vec{J}\, d\vec{S} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}\, d\vec{S} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}\end{gathered}}$$

$$\oint \vec{B}\, d\vec{l} \underset{\text{Stokesov teorem}}{=} \int_S \nabla \times \vec{B}\, d\vec{S} = \mu \int \vec{J}\, d\vec{S} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}\, d\vec{S} \quad \dots$$

- struja koja prolazi kroz vodič stvara oko njega magnetsko polje $\vec{B}$
- izraz $\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E}\, d\vec{S}$ odgovara struji pomaka

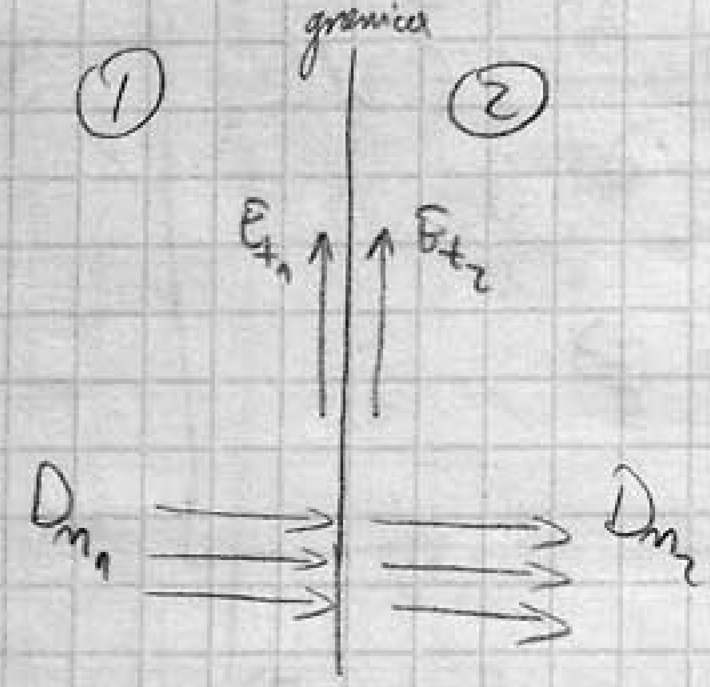
4. Faradayev zakon elektromagnetske indukcije

$$\boxed{\begin{gathered}\oint \vec{E}\, d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}\, d\vec{S} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}\end{gathered}}$$

- vremenske promjene mag. polja stvara električno polje.
- objašnjava rad generatora i motora

$$\oint \vec{E}\, d\vec{l} \underset{\text{Stokes}}{=} \int \nabla \times \vec{E}\, d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}\, d\vec{S}$$

14. Rubni uvjeti na granici dva dielektrika, te na granici dielektrika i vodiča.



$$\oint \vec{E} d\vec{l} = (E_{t_2} - E_{t_1}) \Delta z = 0$$

$$\boxed{E_{t_2} = E_{t_1}}$$

– tangencijalne komponente su jednake

– iz Gaussove zakona odredujemo normalne komponente.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = (D_{n_2} - D_{n_1}) \Delta S = \rho \cdot \Delta S$$

$$\boxed{D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s} = 0$$ ← pretpostavljamo

$$\boxed{D_{n_2} = D_{n_1}}$$ odnosno $$\boxed{\frac{E_{n_1}}{E_{n_2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

– iz Amperova zakona odredujemo tangencijalne komponent magnetskog polja

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \cancel{\mu}\int \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) d\vec{S} = i \ (=0 \text{ za dielektrik})$$

$$\boxed{H_{t_1} = H_{t_2}}$$

diskontinuitet tang. komponente jakosti mag. polja jednak je gustoći površinske struje

– iz Gaussovog zakona:

$$\boxed{B_{n_1} = B_{n_2}}$$

u slučaju idealnog vodiča $E_t = 0$ odnosno

$$E_{t_1} = E_{t_2} = 0$$

- također u beskonačno tankom površinskom sloju teče struja $\vec{J}_s = H_{t_1} - H_{t_2}$

$$\vec{J} = \vec{J}_c + \vec{J}_p = \sigma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + j\omega\varepsilon \vec{E}$$

$$\frac{J_c}{J_p} = \frac{\sigma \cancel{\vec{E}}}{j\omega\varepsilon \cancel{\vec{E}}} = \frac{\sigma}{j\omega\varepsilon}$$

($J_c >> J_p$ - dobar vodič, $J_c << J_p$ izolator)

15. Vektorske valne jednadžbe. Interpretacija rješenja. Planarni val.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad i \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- iz ovih rotorskih jedn. možemo dobiti dvije eksplicitne jedn. od kojih jedna sadrži električno, a druga magnetsko polje - valne jedn.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad uz \qquad B = \mu H \qquad D = \varepsilon E$$

smanjivamo broj nepoznanica

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad / \nabla \times$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \left(\nabla \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla (\nabla \vec{E}) - \nabla^2 E = -\mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\nabla \vec{E} = 0 \qquad (\rho = 0)$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}}$$

σ - vodljivost - za slučaj idealnog dielektrika

$\sigma = 0$ - nema gubitaka

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \vec{H} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned}}$$

analogija sa linijama $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

za polja sa sinusnom promjenom vrijedi

vrijedi da je $\partial \vec{E} / \partial t = j\omega \vec{E}$ i $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E}$

$$\nabla^2 \vec{E} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = j\mu\omega(\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{H}$$

$$\gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)$$

$\gamma = \alpha + j\beta$

konstanta širenja (prijenosa, propagacije)

α - gušenje

β - fazna konstanta

za idealni dielektrik $\alpha = 0$

$\gamma = j\beta$

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E} &= \gamma^2 \vec{E} \\ \nabla^2 \vec{H} &= \gamma^2 \vec{H} \end{aligned}}$$

Ako promatramo planarni val (tj ravni val) imamo $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ (- val se širi u $\pm y$ smjeru) (nema promjene intenziteta u ravnini okomitoj na smjer širenja

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

- rješenje ovih jedn. su (ponovno) funkcije oblika $f_1\left(t+\frac{y}{v_c}\right)$ i $f_2\left(t-\frac{y}{v_c}\right)$

$$E_x = E_R' \cdot e^{\gamma y} + E_R'' e^{-\gamma y}$$

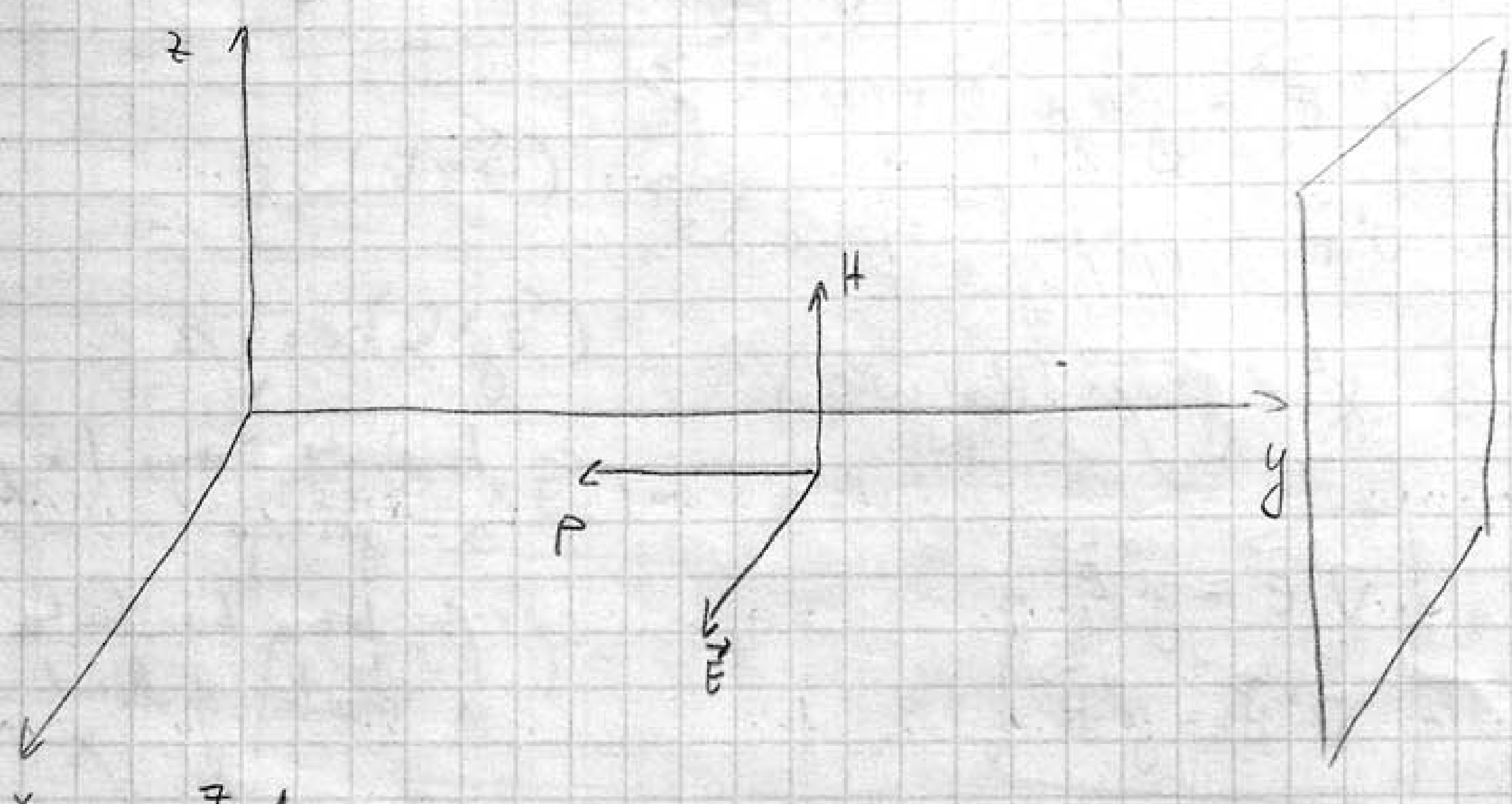
$$H_z = H_R' e^{\gamma y} + H_R'' e^{-\gamma y}$$

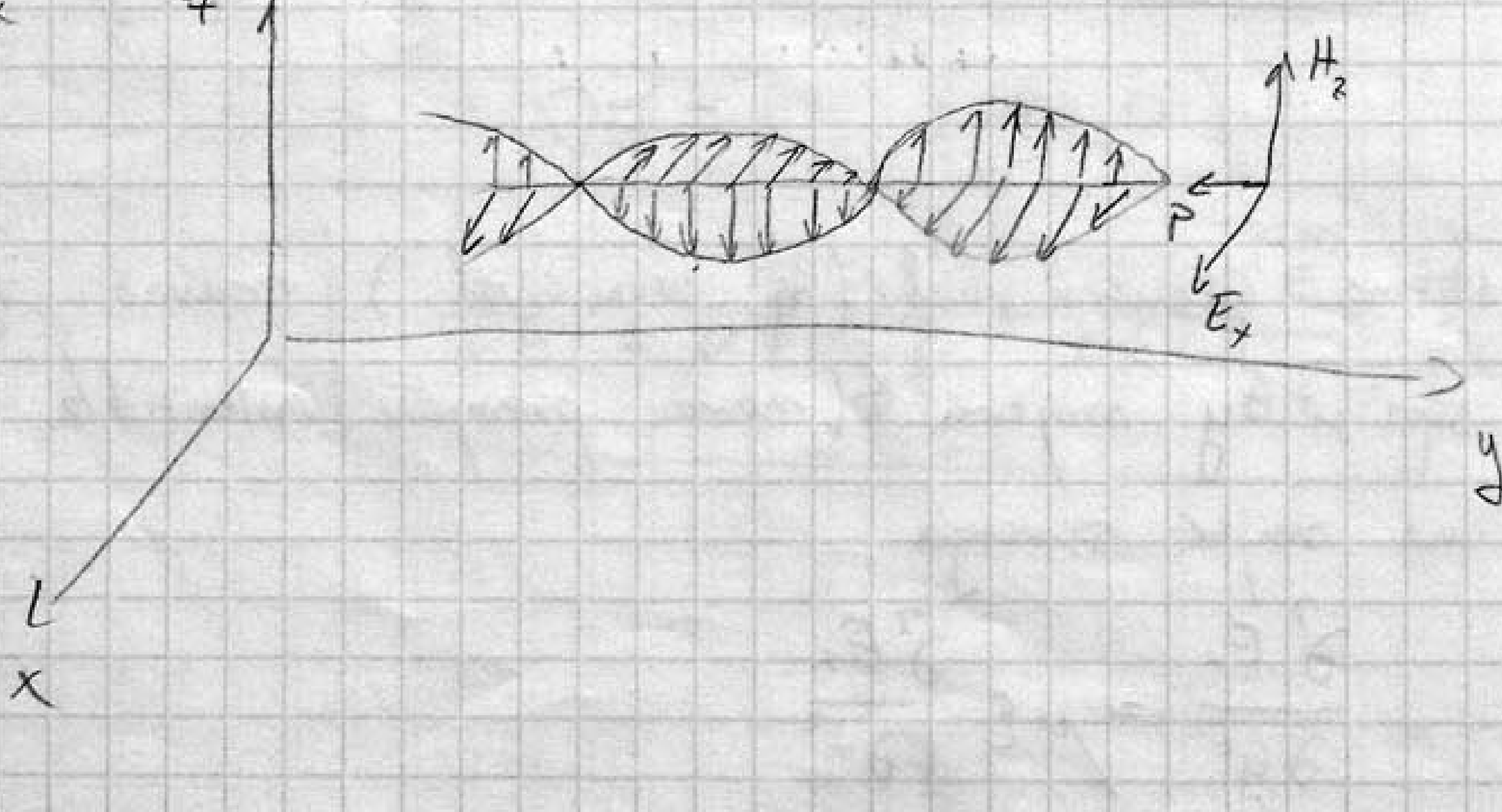
$$H_R' = \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_R'$$

$$H_R'' = -\frac{\gamma}{j\omega\mu} E_R''$$

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma}$$

- ako nemamo gubitaka elektr. i magnetsko polje su u fazi:





16. Protok energije. Poytingov vektor.

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- Poytingov vektor - može se interpretirati kao protok gustoće energije po jedinici površine (intenzitet)
- predstavlja smjer širenja EM polja

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H}(\nabla \times \vec{E}) - \vec{E}(\nabla \times \vec{H})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla(\vec{E} \times \vec{H}) = -\mu \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{E}\left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$\boxed{-\nabla(\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) + \sigma E^2}$$

divergencija je čisti izlazni tok vektora pa je $-\nabla(\vec{E} \times \vec{H})$ čisti ulazni tok energije po jedinici površine. Dio te energije pridonosi povećanju uskladištene energije u polju ($\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu H^2)\right]$ - vremenska promjena uskladištene energije), a jedan dio predstavljaju gubitci zbog nesavršenosti medija ($\sigma \neq 0$)

Odnosno čisti ulazni tok energije jednak je promjeni gustoće energije uskladištene u polju plus gubitci

17. Pojam impendancije. Intrinsična impendancija.

Odnos električnog i magnetskog polja se definira kao karakteristična impendancija sredstva.

$$\eta = \frac{E_x}{H_z}$$

$$\eta = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{\gamma}{\sigma + j\omega\varepsilon} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

za slučaj dielektrika bez gubitaka $\alpha = 0$, $\sigma = 0$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$ – mag. i elek. polje u fazi

za slučaj dobrog vodiča $\sigma \gg \omega\varepsilon$

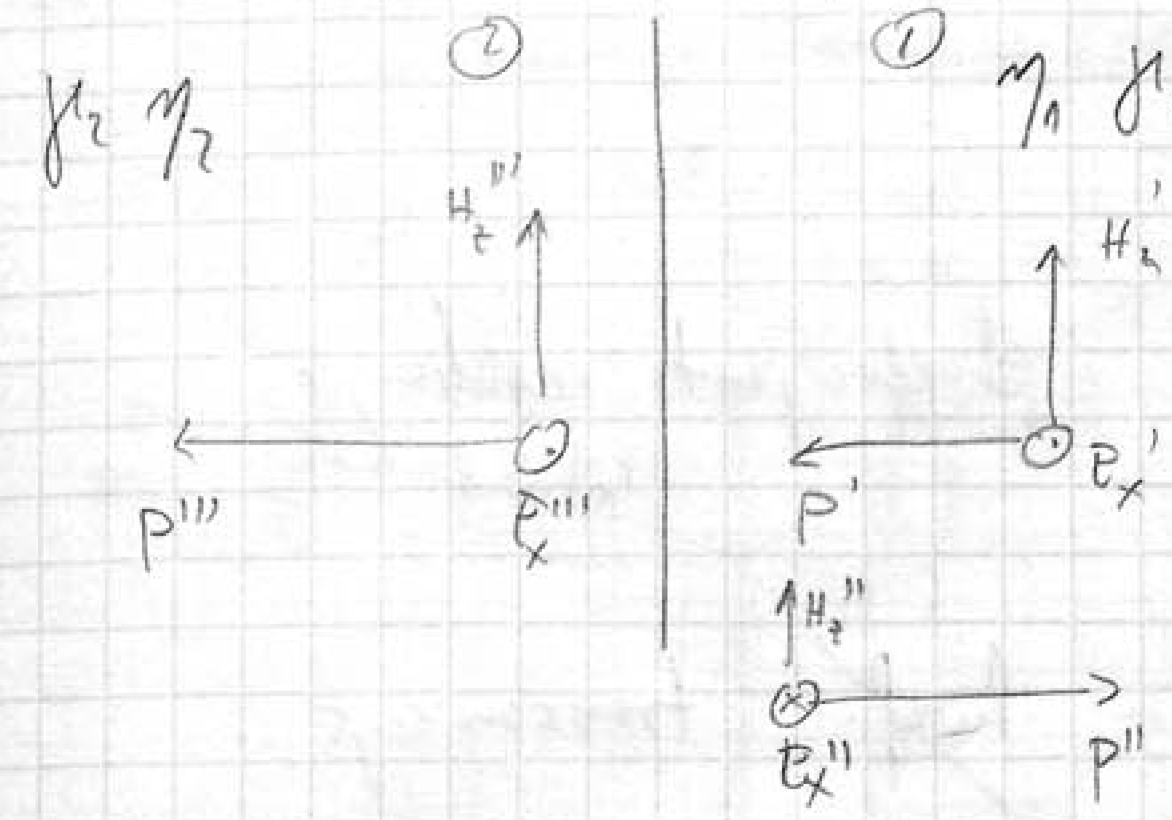
$$\gamma = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} + j\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \angle 45^\circ$$ – karakteristična impendancija vodiča je vrlo mala

Impendancija Z je odnos rezultirajućeg električnog polja prema rezultirajućem magnetskom polju u bilo kojoj točki. – analogno ulaznoj imp. na linijama

$$Z = \frac{E_R}{H_R} = \eta_1 \frac{\eta_2 + \eta_1 \, th(\gamma_1 y)}{\eta_1 + \eta_2 \, th(\gamma_2 y)}$$

18. Okomiti upad planarnog vala na sredstvo bez gubitaka



možemo koristiti analogiju sa dvije linije (druga je beskonačno duga)

$$E_x = E_R' e^{\gamma_1 y} + E_R'' e^{-\gamma_1 y}$$

$$H_z = \frac{E_R'}{\eta_1} e^{\gamma_1 y} - \frac{E_R''}{\eta_1} e^{-\gamma_1 y}$$

$E_R = E_R' + E_R''$ - rezultantno polje na granici (vektori i možemo ih zbrojiti)

$H_R = H_R' + H_R''$

$$\eta_2 = \frac{E_R}{H_R} = \frac{E_R'''}{H'''}$$

$$E_R' = \frac{E_R}{2}\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) \qquad E_R'' = \frac{E_R}{2}\left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)$$

$$E_x = \frac{E_R}{2}\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) e^{\gamma_1 y} + \frac{E_R}{2}\left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) e^{-\gamma_1 y}$$

$$H_z = \frac{E_R}{2\eta_1}\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) e^{\gamma_1 y} - \frac{E_R}{2\eta_1}\left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right) e^{-\gamma_1 y}$$

odnosno u hiperbolnom obliku

$$E_x = E_R\left(ch(\gamma_1 y) + \frac{\eta_1}{\eta_2} sh(\gamma_1 y)\right)$$

$$H_z = \frac{E_R}{\eta_1}\left(ch(\gamma_1 y) + \frac{\eta_1}{\eta_2} sh(\gamma_1 y)\right)$$

$$E''' = E' + E''$$

$$P''' = P' - P''$$

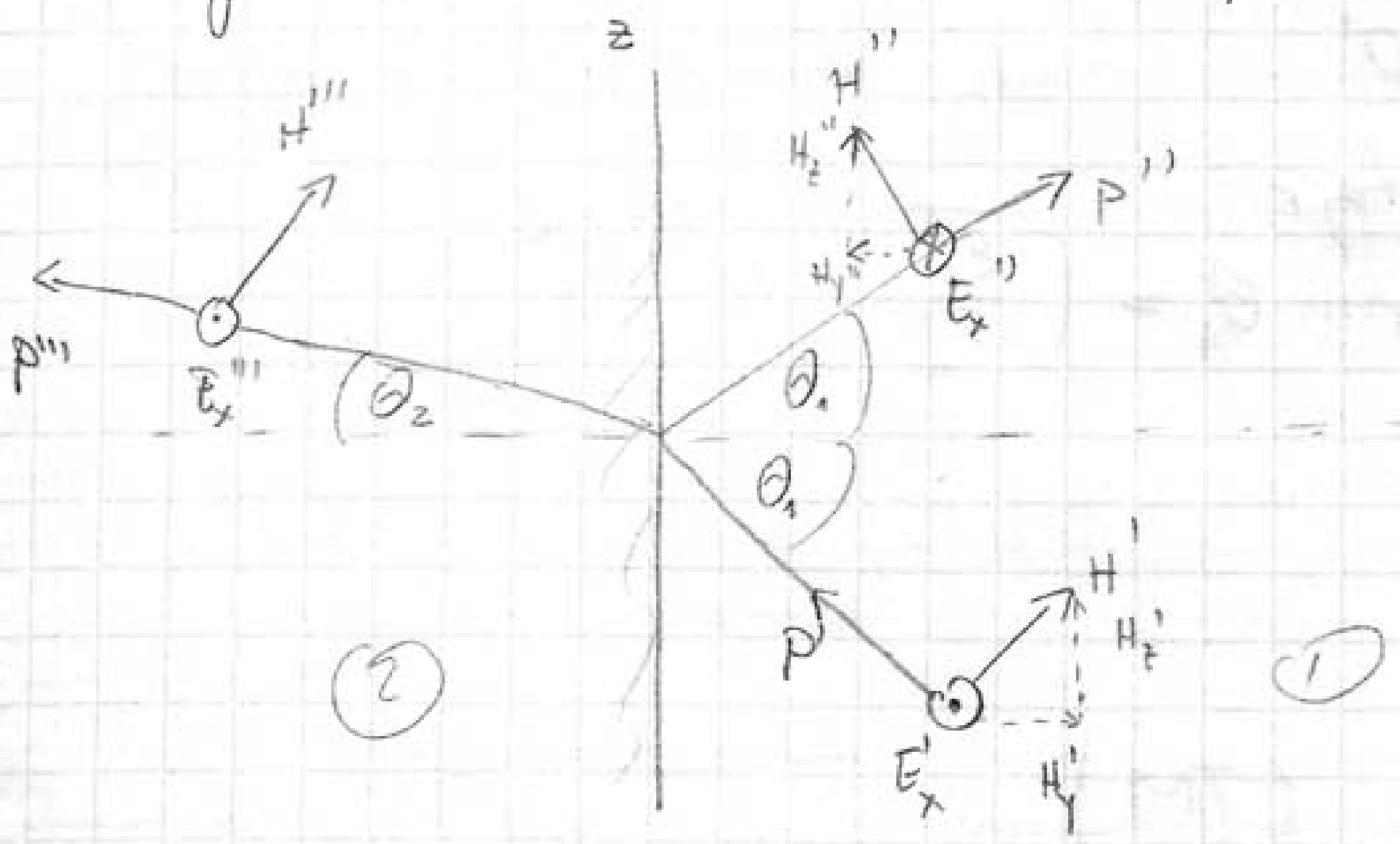
$$r_R = \frac{E''}{E'} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$ koeficijent refleksije $|r_R| \leq 1$

$$r_T = \frac{E'''}{E'} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$ koef. transmisije

$r_T = 1 + r_R$
(može biti veći od 1)

$$Z = \frac{E_x}{H_z} = \eta_1 \frac{\eta_2 + \eta_1 \, th(\gamma_1 y)}{\eta_1 + \eta_2 \, th(\gamma_1 y)}$$

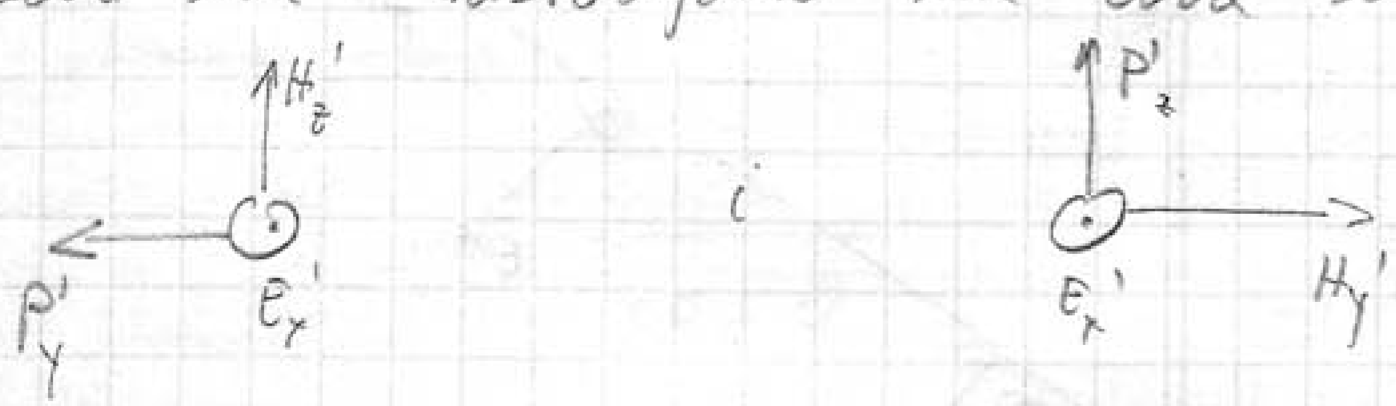
19. Kosi upad planarnog vala na medij bez gubitaka. TE i TM polarizacija.



okomita (TE) polarizacija

y - električno polje je okomito na ravninu incidencije

- upadni val rastavljamo na dva vala



$$H_z = H \cos \Theta_1$$

$$H_y = H \sin \Theta_1$$

- bitna nam je komponenta koja prenosi energiju, a ne ona koja titra uz granicu

- koeficijente refleksije i transmisije definiramo za komponentu koja prenosi energiju (okomitu)

$$Z_{\eta_1} = \frac{E'}{H_z'} = \frac{E'}{H' \cos \Theta_1} = \eta_1 \cdot \frac{1}{\cos \Theta_1}$$

$$r_R = \frac{Z_{\eta_2} - Z_{\eta_1}}{Z_{\eta_2} + Z_{\eta_1}}$$

$$r_T = \frac{2 Z_{\eta_2}}{Z_{\eta_2} + Z_{\eta_1}}$$

izjednačavanjem tangencijalnih komponenti i još bla, bla bla

$$\boxed{\text{Snellov zakon} \quad \frac{\sin \Theta_2}{\sin \Theta_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}}$$

U slučaju upada vala iz gušćeg u rjeđe sredstvo može se dogoditi totalna refleksija tj. da $\theta_2 = 90^\circ$.

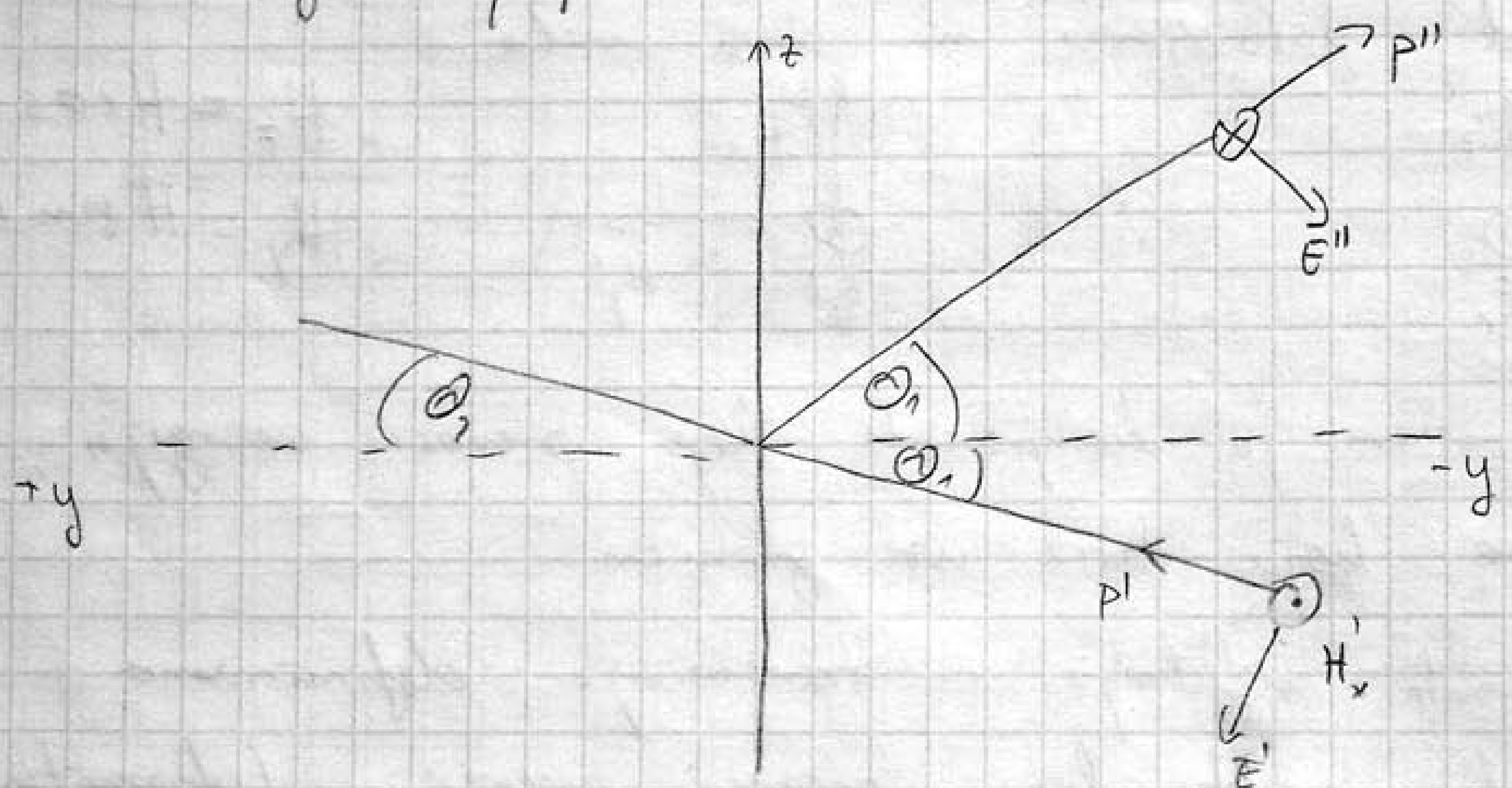
Snellov zakon postaje

$$\sin\theta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

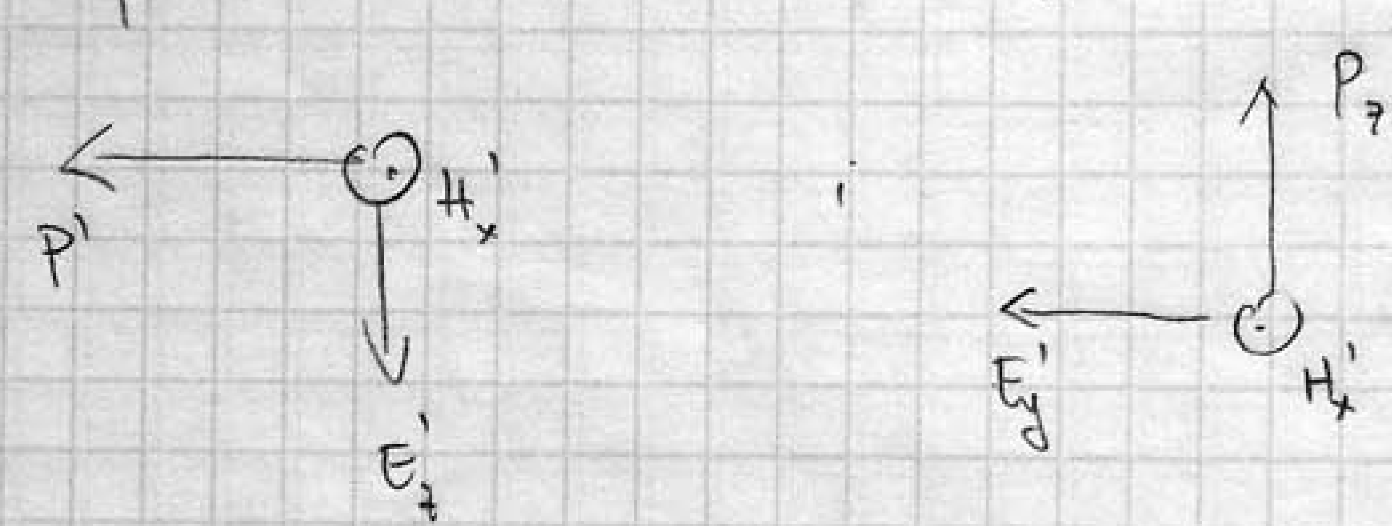
θ_1 – kritični kut

paralelna polarizacija (TM)

– magnetno polje okomito na ravninu incidencije



– upadni val isto rastavljamo na dva vala



$$E_z = E\cos\theta_1$$

$$E_y = E\sin\theta_1$$

$$Z_{\eta_1} = \frac{E_z'}{H_x'} = \frac{E'}{H_x'}\cdot\cos\theta_1 = \eta_1\cos\theta_1 < \eta_1$$

$$r_R = \frac{Z_{\eta_2} - Z_{\eta_1}}{Z_{\eta_2} + Z_{\eta_1}} \qquad r_T = \frac{2Z_{\eta_2}}{Z_{\eta_2} + Z_{\eta_1}}$$

za paralelnu polarizaciju moguće je da imamo potpuni prijenos (nema refleksije) za određeni kut upada - Brewsterov kut

$$\operatorname{tg} \Theta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

20. Pravokutni valovod, modovi, fizikalna interpretacija širenja vala.

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{\cos \Theta}$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\sin \Theta}$$

$$\lambda_p = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}} \qquad \lambda_0 = 2b \quad (2 \cdot \text{najveća stranica})$$

$$v_p = \frac{v_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}}$$ — fazna brzina

$$v_g = v_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$$ — grupna —//—

$$Z_0 = \frac{E_z}{H_x} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}}$$ za TE modove

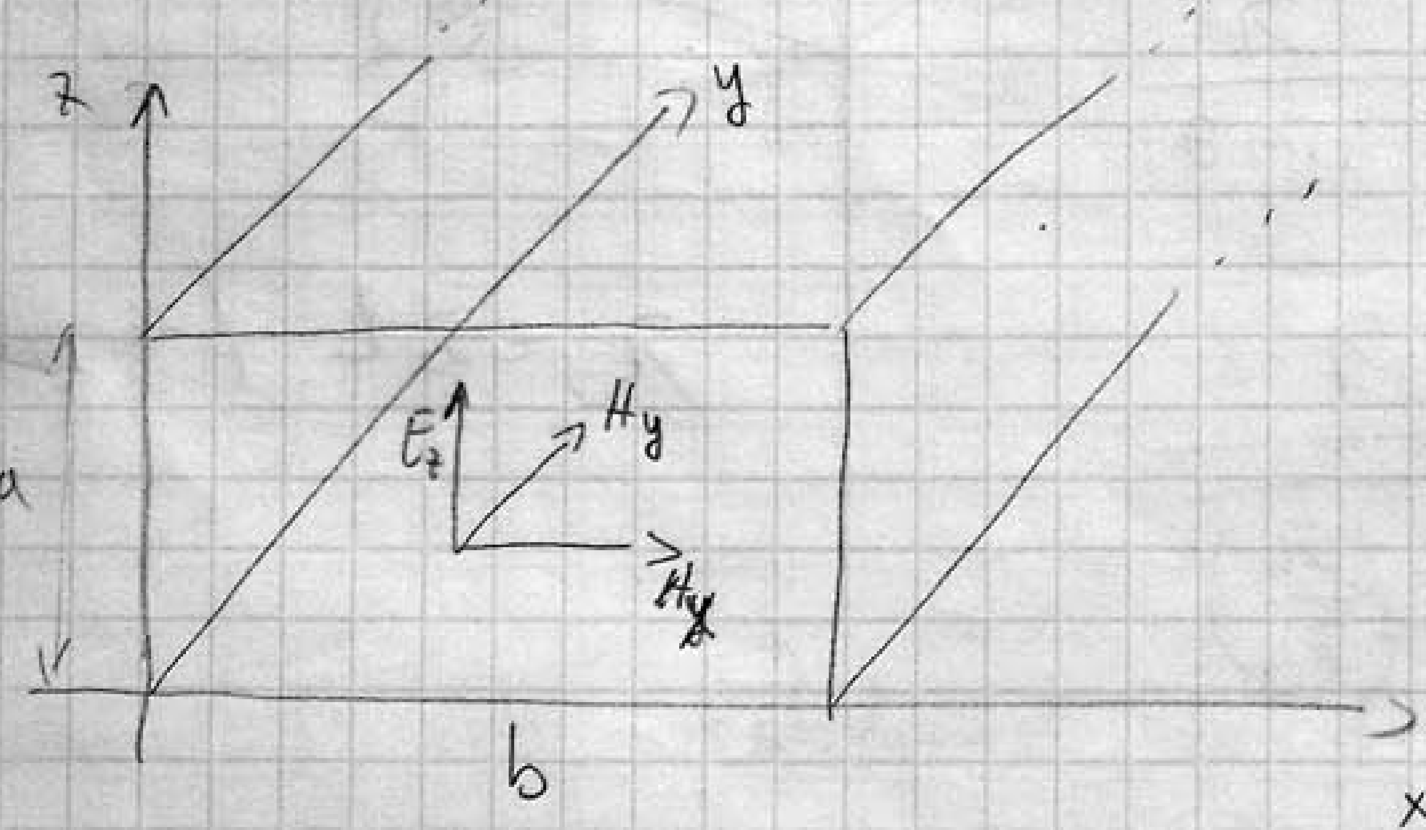
$$Z_0 = \eta \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2} \quad \text{za TM modove}$$

za $TE_{0,1}$

$$E_z = j\beta_y \frac{\pi}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^2 \frac{\eta}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}} H_0 \sin\frac{\pi}{a}y$$

$$H_x = j\beta_y \frac{\pi}{a}\left(\frac{\lambda_0}{2\pi}\right)^2 H_0 \sin\frac{\pi}{a}y$$

$$H_y = H_0 \cos\frac{\pi}{a}y$$



kod TE moda postoji komponenta magn. polja koja je u smjeru širenja vala

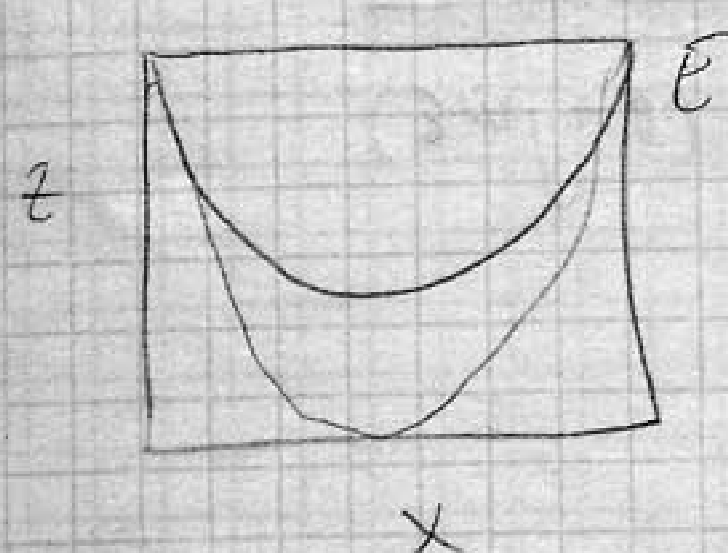
$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$$

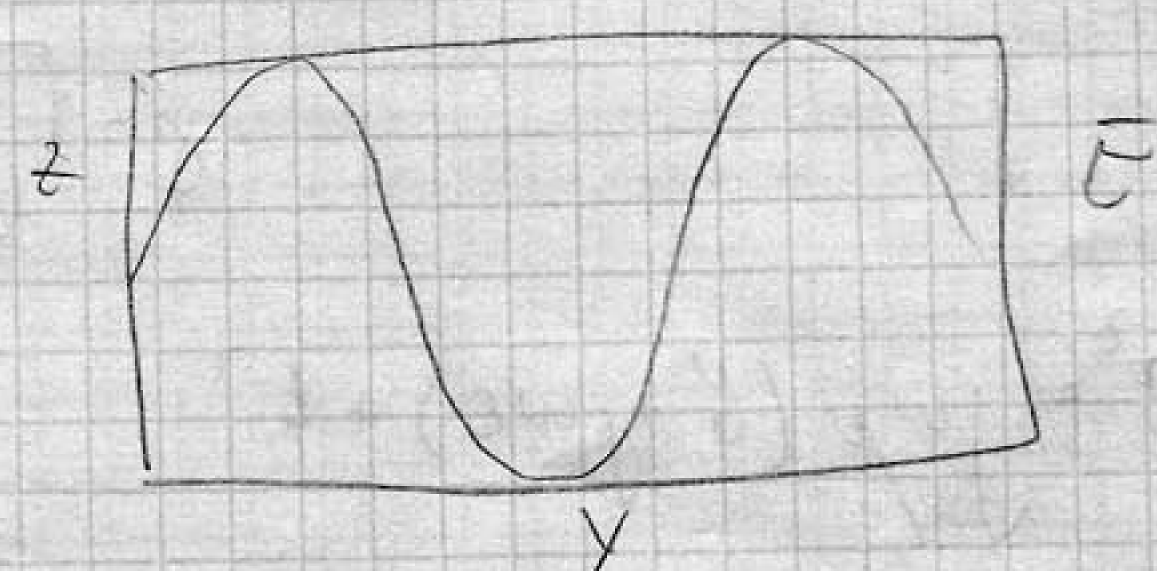
$$\Gamma = \alpha + j\beta$$

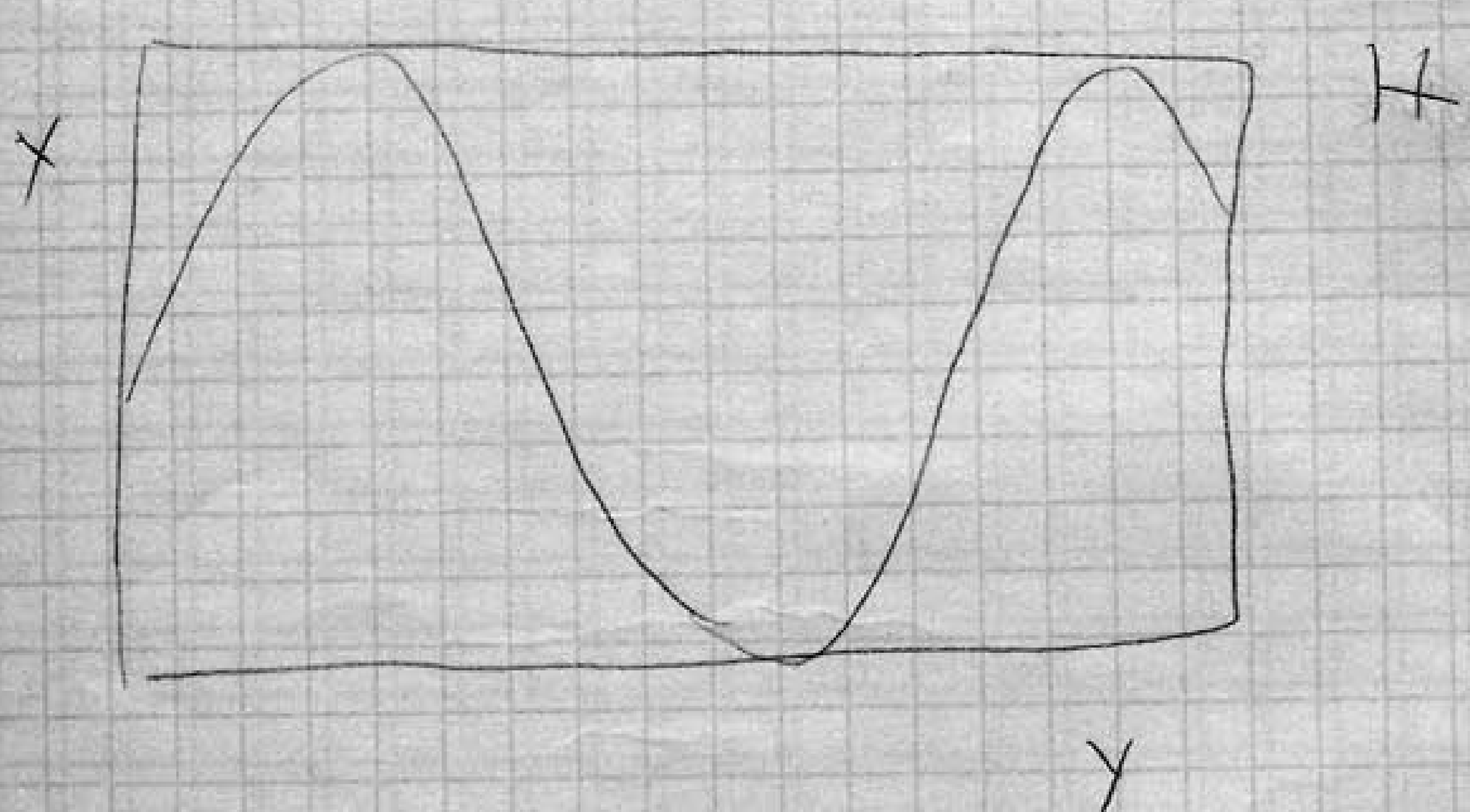
$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 - 1}$$

$\alpha \neq 0$ kad se val guši

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2 - 1}$$







$TE_{0,1}$

$$\lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

m – broj poluvalova u vertikali

n – broj poluvalova u horizontalnom smjeru

$$\Gamma = \gamma^2 + k^2 \qquad k^2 = k_x^2 - k_y^2$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$\Gamma^2 = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) + k^2$$

za slučaj da je dielektrik bez gubitaka $\sigma = 0$

imamo

$$\Gamma = \sqrt{k^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$$