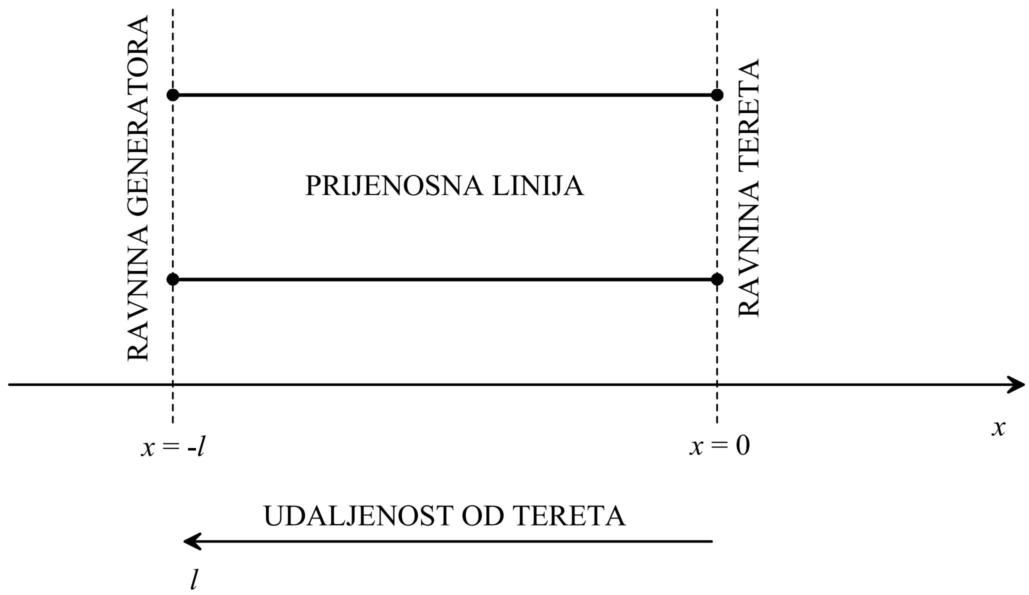
# PRIMIJENJENI ELEKTROMAGNETIZAM 2008./09.

# 1. MEĐUISPIT (13.10.2008.)

Zadaci i rješenja

Uvodna napomena

Radi jednostavnijeg programiranja numeričkih primjera u MATLAB-u odabran je referentni koordinatni sustav koji ima ishodište $(x = 0)$ na ravnini tereta (na isti način kao i na predavanjima), no pretpostavljeni smjer širenja incidentnog vala je u smjeru pozitivne $x$-osi (kao na slici dolje). Ravnina generatora pritom je na koordinati $x = -l < 0$, što se razlikuje od referentnog koordinatnog sustava odabranog na predavanjima kod kojeg je smjer širenja incidentnog vala u smjeru negativne $x$-osi a ravnina generatora je na koordinati $x = l > 0$.



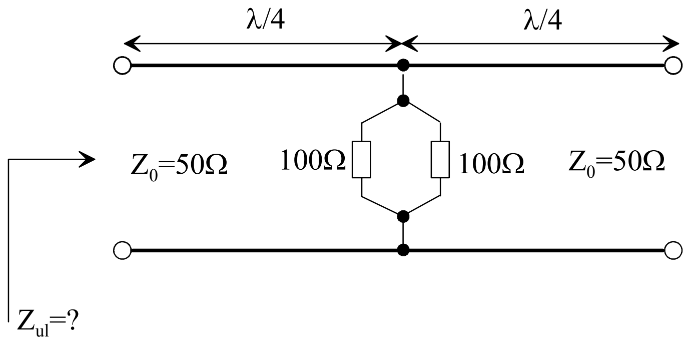

U ovom dokumentu je stoga propagacija incidentnog vala opisana članom $e^{-\mathrm{j}\beta x}$, a reflektiranog vala članom $e^{+\mathrm{j}\beta x}$, te su svi izvodi dani u tom smislu. Dodatno, izraz za impedanciju duž linije bez gubitaka dan je u ovisnosti o udaljenosti $l$ od ravnine tereta:

$$Z(l) = Z(x = -l) = Z_0 \frac{Z_T + \mathrm{j}Z_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + \mathrm{j}Z_T \tan(\beta l)}$$

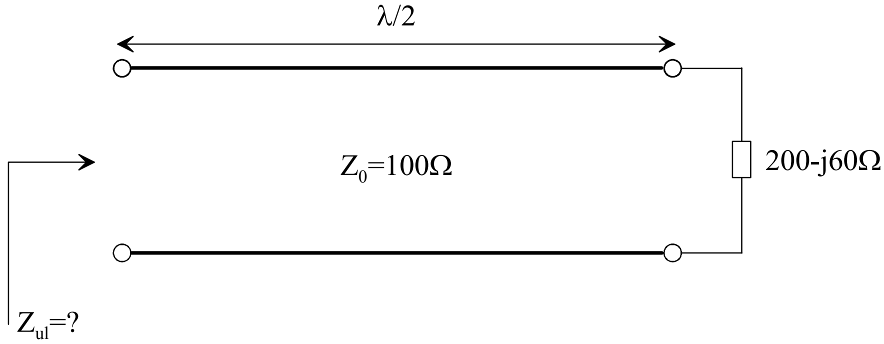
Na ovaj način odabrani koordinatni sustav nimalo ne utječe na fizikalnu predodžbu o zbivanjima na liniji, a također se često pojavljuje i u literaturi vezanoj uz elektromagnetizam. Treba dakle napomenuti kako je odabir referentnog koordinatnog sustava proizvoljan, no potrebno je dosljedno ga se pridržavati kako bi se postigli ispravni rezultati.

1. Odrediti ulaznu impedanciju sklopova načinjenih od linija bez gubitaka prikazanih na slikama. *(2 boda)*

**a)**

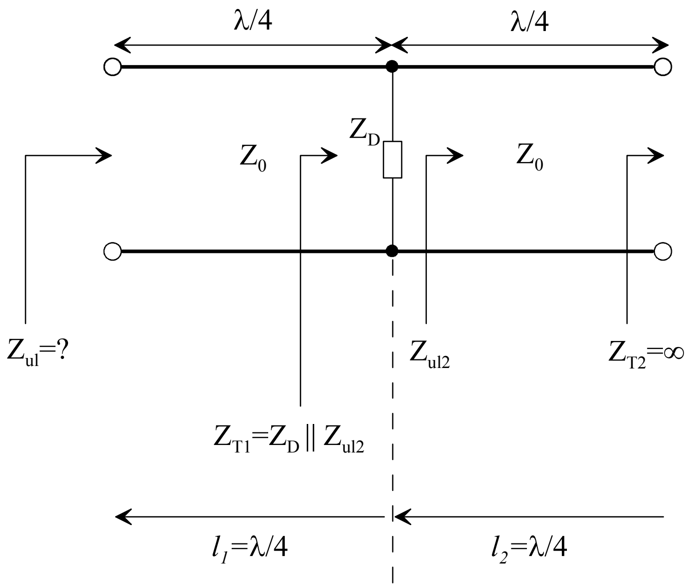



**b)**




<u>*Rješenje*</u>

**a)** Sustav na slici ustvari je otvorena prijenosna linija duljine $\lambda/2$, karakteristične impedancije 50Ω, sa diskontinuitetom na sredini u obliku paralelne impedancije.




- impedancija na otvorenom kraju: $Z_{T2}=\infty$

- odredimo paralelnu impedanciju diskontinuiteta:

$$Z_D = 100\Omega \,||\, 100\Omega = 50\Omega$$

Pri analizi navedenog sklopa potrebno je prvo odrediti nadomjesnu impedanciju tereta ($Z_{T1}$) kojim je zaključen lijevi odsječak linije. Ona odgovara paralelnom spoju impedancije diskontinuiteta ($Z_D$) i ulazne impedancije preostalog otvorenog $\lambda/4$ odsječka linije ($Z_{ul2}$), prema slici gore. Pritom je $l_2$ relativna udaljenost od otvorenog kraja do točke promatranja.

- pri određivanju ulazne impedancije $Z_{ul2}$ potrebno je dodatno transformirati oblik izraza za ulaznu impedanciju linije kako bi se izbjegao oblik ∞/∞:

$$Z_{ul2} = Z_0 \frac{Z_{T2} + \mathrm{j}Z_0 \tan\beta l_2}{Z_0 + \mathrm{j}Z_{T2} \tan\beta l_2} = Z_0 \frac{\cancel{Z_{T2}}(1 + \mathrm{j}\frac{Z_0}{Z_{T2}} \tan\beta l_2)}{\cancel{Z_{T2}}(\cancel{\frac{Z_0}{Z_{T2}}} + \mathrm{j}\tan\beta l_2)} = \left(\frac{Z_0}{Z_{T2}} \to 0\right) =$$

$$= Z_0 \frac{1 + \mathrm{j}\frac{Z_0}{Z_{T2}} \tan\beta l_2}{\mathrm{j}\tan\beta l_2} = \frac{Z_0}{\mathrm{j}\tan\beta l_2} + \frac{\cancel{\mathrm{j}}\frac{Z_0}{Z_{T2}}\cancel{\tan\beta l_2}}{\cancel{\mathrm{j}}\cancel{\tan\beta l_2}} =$$

$$= \frac{Z_0}{\mathrm{j}\tan\beta l_2} + \cancel{\frac{Z_0}{Z_{T2}}} = \left(\frac{Z_0}{Z_{T2}} \to 0\right) = -\mathrm{j}\cot\beta l_2$$

$\Rightarrow$ ($l_2 = \lambda/4$)

$$Z_{ul2} = -\mathrm{j}\cot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = -\mathrm{j}\cot\frac{\pi}{2} = 0$$

- vidljivo je da se impedancija otvorenog kraja nakon $\lambda/4$ duljine preslikala u impedanciju kratkog spoja

- određivanje nadomjesne impedancije tereta $Z_{T1}$:

$$Z_{T1} = Z_D \,||\, Z_{ul2} = \frac{50\cdot 0}{50+0} = 0\Omega$$

- naposljetku preslikamo kratki spoj na ulaz te na taj način odredimo ulaznu impedanciju sklopa ($l_1$ je relativna udaljenost od nadomjesnog tereta do početka lijevog odsječka linije):

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{Z_{T1} + \mathrm{j}Z_0 \tan\beta l_1}{Z_0 + \mathrm{j}Z_{T1} \tan\beta l_1} = (Z_{T1} = 0) = \cancel{Z_0}\frac{\mathrm{j}Z_0 \tan\beta l_1}{\cancel{Z_0}} = \mathrm{j}Z_0 \tan\beta l_1$$

$\Rightarrow$ ($l_1 = \lambda/4$)

$$Z_{ul} = \mathrm{j}Z_0 \tan\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = \mathrm{j}Z_0 \tan\frac{\pi}{2} = \infty$$

Ulazna impedancija sklopa jednaka je impedanciji otvorenog kraja, odnosno može se reći da se sklop na ulazu ponaša kao paralelni titrajni krug.

Komentar

Zadatak se može riješiti i intuitivno, poznavajući ponašanje impedancije na liniji bez gubitaka. Na taj način se otvoreni kraj na izlazu sklopa nakon $\lambda/4$ duljine preslika u kratki spoj koji kratko spaja paralelnu impedanciju na diskontinuitetu $Z_D$ te ju sustav "ne vidi", odnosno sustav "vidi" samo kratki spoj na svom kraju. Navedeni kratki spoj ponovo se nakon $\lambda/4$ duljine preslika u otvoreni kraj na ulazu, tj. ulazna impedancija mu je beskonačna ($Z_{ul} = \infty$).

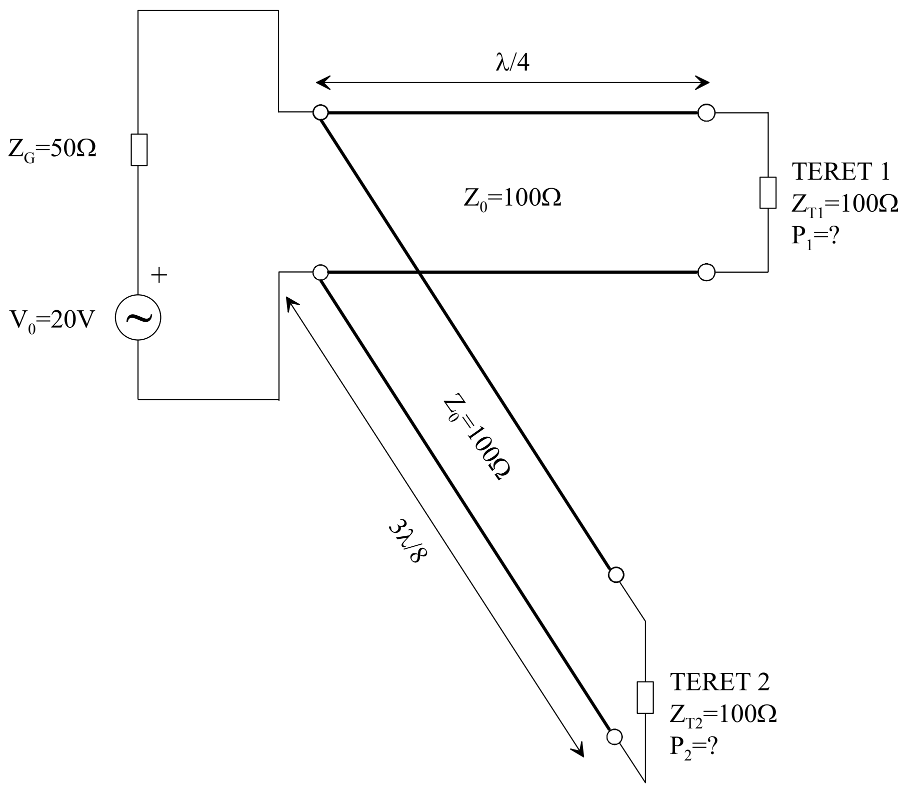
**b)** Impedancija na liniji bez gubitaka ponavlja se periodički svakih $\lambda/2$ duljine. Na taj način je ulazna impedancija jednaka impedanciji tereta, tj. $Z_{ul} = 200 - \mathrm{j}60\Omega$.

Formalnim pristupom dobiva se isti rezultat:

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{Z_T + \mathrm{j}Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + \mathrm{j}Z_T \tan \beta l} = \left( l = \frac{\lambda}{2} \right) = Z_0 \frac{Z_T + \mathrm{j}Z_0 \tan \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{2}}}{Z_0 + \mathrm{j}Z_T \tan \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\lambda}} \cdot \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{2}}} = Z_0 \frac{Z_T + \mathrm{j}Z_0 \tan \pi}{Z_0 + \mathrm{j}Z_T \tan \pi} =$$

$$= \left( \tan \pi = 0 \right) = \cancel{Z_0} \cdot \frac{Z_T}{\cancel{Z_0}} = Z_T = 200 - \mathrm{j}60\Omega$$

2. Odrediti snage koje se disipiraju na teretima 1 i 2 (prema slici), ako su sve linije bez gubitaka. *(2 boda)*



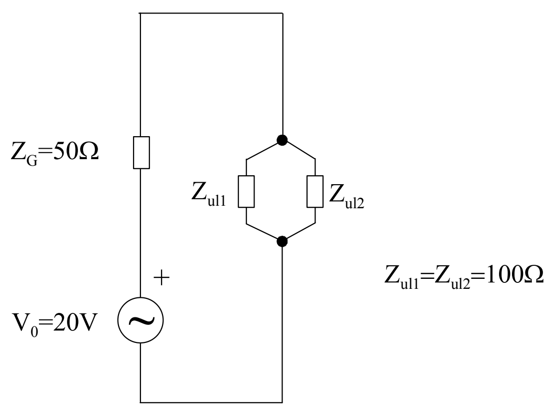
*Rješenje*

Sustav se sastoji od generatora unutarnje impedancije 50Ω, te dvije paralelno spojene prijenosne linije karakteristične impedancije 100Ω zaključene teretima od 100Ω. S obzirom da su tereti prilagođeni ($Z_{T1} = Z_{T2} = Z_0$), slijedi da je ulazna impedancija svake linije jednaka 100Ω, što se i formalno može potvrditi slijedećim izrazom:

$$Z_{ul} = Z_0 \frac{Z_T + \mathrm{j}Z_0 \tan \beta l}{Z_0 + \mathrm{j}Z_T \tan \beta l} = \left(Z_T = Z_0\right) = Z_0 \frac{\cancel{Z_0 + \mathrm{j}Z_0 \tan \beta l}}{\cancel{Z_0 + \mathrm{j}Z_0 \tan \beta l}} = Z_0$$

Nadalje, snaga predana svakom od tereta jednaka je snazi koja je predana njemu odgovarajućoj liniji, s obzirom da su linije po pretpostavci bez gubitaka.

- nadomjesna shema sklopa na ulazu u liniju:




- određivanje ulazne impedancije dviju linija:

$$Z_{ul} = Z_{ul1} \,||\, Z_{ul2} = 100\Omega \,||\, 100\Omega = 50\Omega$$

- određivanje snage predane linijama (uočiti da je ona jednaka maksimalnoj raspoloživoj snazi generatora):

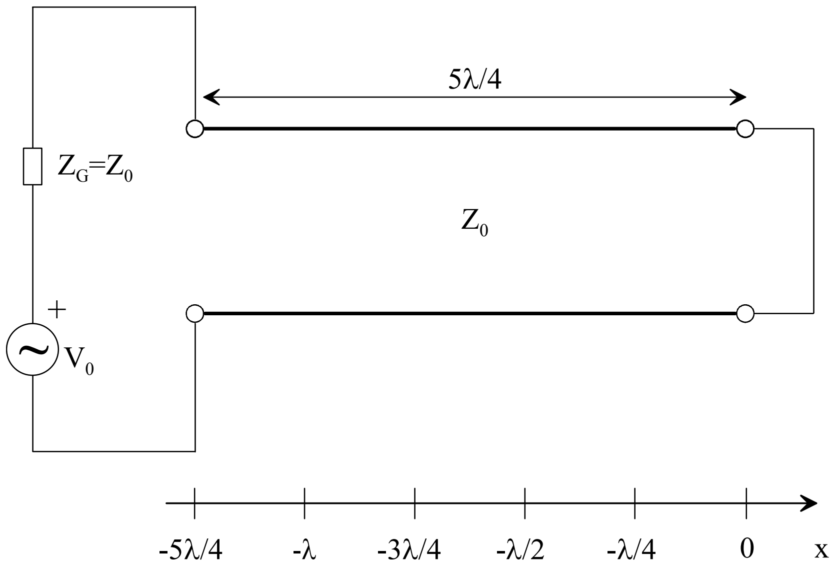
$$P_{ul} = \left(\frac{V_0}{Z_G + Z_{ul}}\right)^2 \cdot Z_{ul} = \left(\frac{20}{50+50}\right)^2 \cdot 50 = 2\mathrm{W}$$

- snagu nadalje treba rasporediti na dvije linije, pa vrijedi i:

$$P_{ul} = P_{ul1} + P_{ul2} = \frac{V_{ul1}^{\ 2}}{Z_{ul1}} + \frac{V_{ul2}^{\ 2}}{Z_{ul2}}$$

- budući da je $V_{ul1} = V_{ul2}$ (paralelni spoj linija) te $Z_{ul1} = Z_{ul2}$, slijedi da je snaga predana svakoj od linija $P_{ul1} = P_{ul2} = 1\mathrm{W}$, a time i $P_{T1} = P_{T2} = 1\mathrm{W}$, s obzirom da su obje linije bez gubitaka te se sva snaga sa ulaza prenese na terete

3. Skicirati raspodjelu amplituda struja i napona te raspodjelu realnog i imaginarnog dijela impedancije na liniji bez gubitaka prikazanoj na slici. Odrediti i označiti na grafu maksimume napona i struje. *(2 boda)*




<u>*Rješenje*</u>

Prilikom rješavanja ovog zadatka prvo su izvedeni analitički izrazi za raspodjelu amplituda napona i struje te impedancije na liniji bez gubitaka. Navedeni izrazi uvršteni su u program MATLAB uz proizvoljno odabrane konkretne vrijednosti $V_0$=2V i $Z_0$=50Ω, te su dobiveni odgovarajući grafovi.

**A) Napon na liniji**

- ukupni napon na liniji jednak je sumi incidentnog i reflektiranog vala napona:

$$V(x) = V_{inc}(x) + V_{ref}(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{+j\beta x} = V^+ e^{-j\beta x} + \Gamma_T V^+ e^{+j\beta x} = V^+(e^{-j\beta x} + \Gamma_T e^{+j\beta x})$$

- pritom je, s obzirom na kratki spoj na kraju linije:

$$\Gamma_T = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = (Z_T = 0) = -1$$

⇒

$$V(x) = V^+(e^{-j\beta x} - e^{+j\beta x}) = V^+(\cos(\beta x) - j\sin(\beta x) - \cos(\beta x) - j\sin(\beta x)) = -j2V^+\sin(\beta x)$$

Nadalje, potrebno je povezati incidentni napon $V^+$ i napon generatora $V_0$. Pritom izjednačavamo izraze za ulazni napon i rezultantni napon na ulazu u liniju ($x = -5\lambda/4$), tj. primjenjujemo rubni uvjet na strani generatora:

$$V_{ul} = \frac{V_0}{Z_G + Z_{ul}} \cdot Z_{ul} = V(x = -\frac{5\lambda}{4})$$

$\Rightarrow$

$$V(x=-\frac{5\lambda}{4})=-\mathrm{j}2V^{+}\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\left(-\frac{5\lambda}{4}\right)\right)=-\mathrm{j}2V^{+}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)=\mathrm{j}2V^{+}$$

- s druge strane, s obzirom da je $Z_{ul}$=∞ (kratki spoj se preslikao u otv. kraj), slijedi da je:

$$V_{ul}=\frac{V_0}{Z_G+Z_{ul}}\cdot Z_{ul}=\frac{V_0}{\cancel{Z_{ul}}(\frac{Z_G}{Z_{ul}}+1)}\cdot\cancel{Z_{ul}}=\left(\frac{Z_G}{Z_{ul}}\to 0\right)=V_0=\mathrm{j}2V^{+}$$

tj.

$$V^{+}=\frac{V_0}{\mathrm{j}2}=-\mathrm{j}\frac{V_0}{2}$$

- naposljetku dobivamo konačni izraz za napon na kratko spojenoj liniji:

$$V(x)=-\mathrm{j}2V^{+}\sin(\beta x)=-\mathrm{j}2\cdot(-\mathrm{j}\frac{V_0}{2})\cdot\sin(\beta x)=-V_0\sin(\beta x)$$

- raspodjela amplituda napona na liniji odgovara apsolutnoj vrijednosti napona:

$$\left|V(x)\right|=2V^{+}\left|\sin(\beta x)\right|=V_0\left|\sin(\beta x)\right|$$

**B) Struja na liniji**

- na sličan način dobivamo analitički izraz za struju na liniji:

$$I(x)=I^{+}e^{-\mathrm{j}\beta x}+I^{-}e^{+\mathrm{j}\beta x}=(I^{-}=-\frac{V^{-}}{Z_0})=\frac{V^{+}}{Z_0}e^{-\mathrm{j}\beta x}-\frac{V^{-}}{Z_0}e^{+\mathrm{j}\beta x}=\frac{V^{+}}{Z_0}(e^{-\mathrm{j}\beta x}-\Gamma_T e^{+\mathrm{j}\beta x})=(...)=$$
$$=\frac{2V^{+}}{Z_0}\cos(\beta x)=(V^{+}=-\mathrm{j}\frac{V_0}{2})=-\mathrm{j}\frac{V_0}{Z_0}\cos(\beta x)$$

- apsolutna vrijednost struje (raspodjela amplituda) je tada:

$$\left|I(x)\right|=\frac{2V^{+}}{Z_0}\left|\cos(\beta x)\right|=\frac{V_0}{Z_0}\left|\cos(\beta x)\right|$$

**C) Impedancija na liniji**

- primijenimo izraz za impedanciju na liniji (na udaljenosti $l$ od tereta):

$$Z(x=-l)=Z_0\,\frac{Z_T+\mathrm{j}Z_0\tan(\beta l)}{Z_0+\mathrm{j}Z_T\tan(\beta l)}$$

- na liniji zaključenoj kratkim spojem ($Z_T$=0) vrijedi:

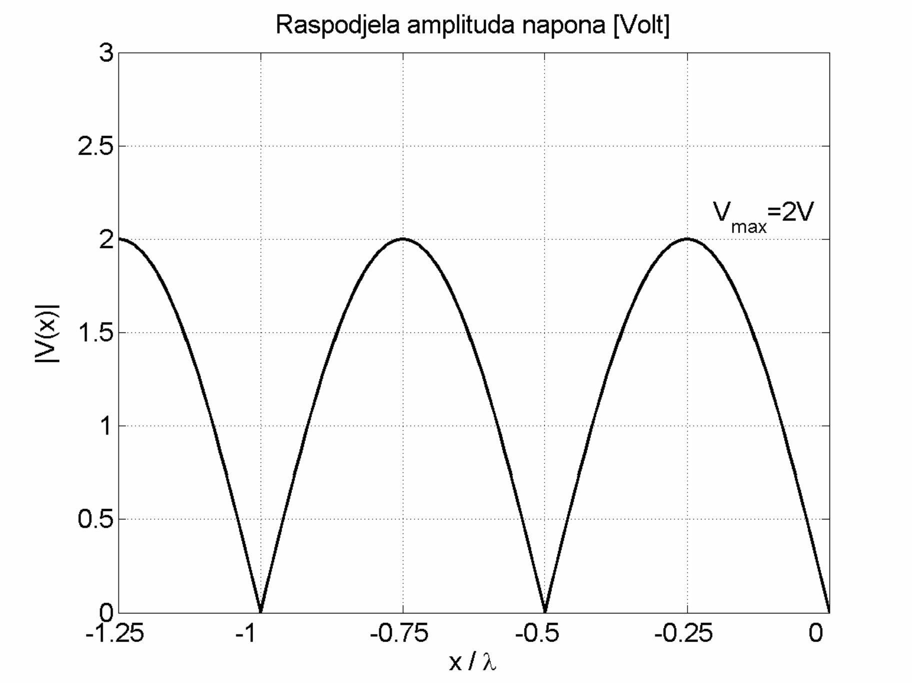
$$Z(x=-l)=\cancel{Z_0}\,\frac{0+\mathrm{j}Z_0\tan\beta l}{\cancel{Z_0}+0}=\mathrm{j}Z_0\tan(\beta l)=-\mathrm{j}Z_0\tan(\beta x)$$

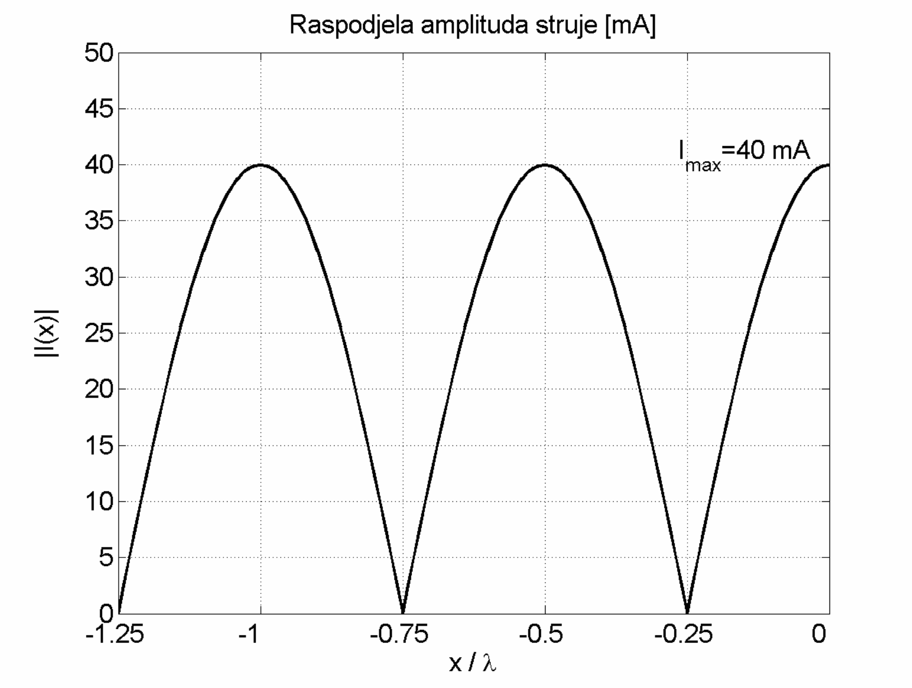
Uočiti da je impedancija čisto imaginarna, što je u skladu s fizikalnom predodžbom da na liniji bez gubitaka zaključenoj nekim reaktivnim teretom nema disipacije energije.

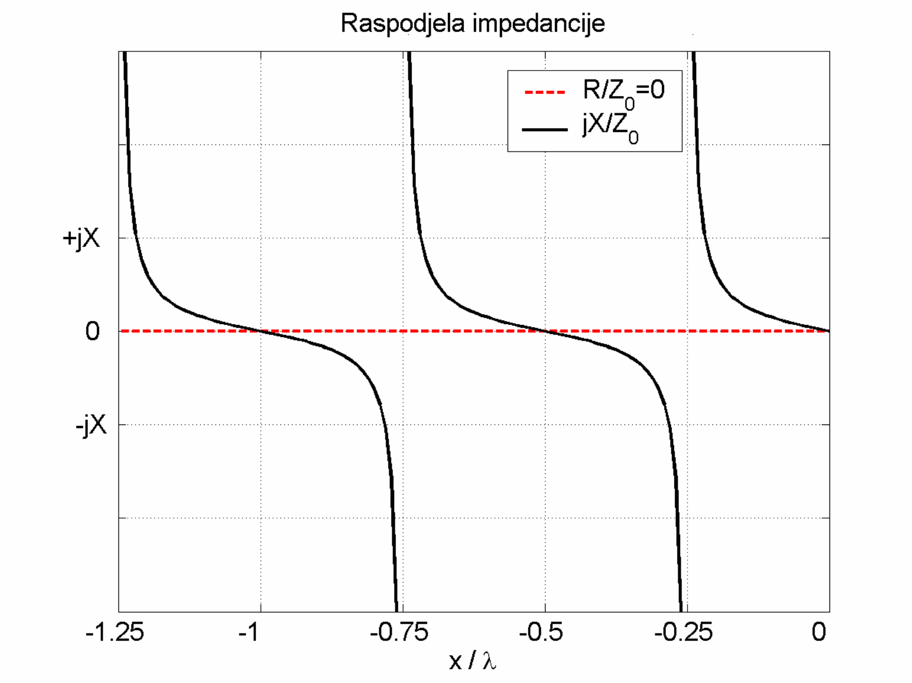
Slijedi dakle:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)=\frac{R}{Z_0}=0$$
$$\mathrm{Im}\left(\frac{Z}{Z_0}\right)=\frac{X}{Z_0}=\tan(\beta l)=-\tan(\beta x)$$

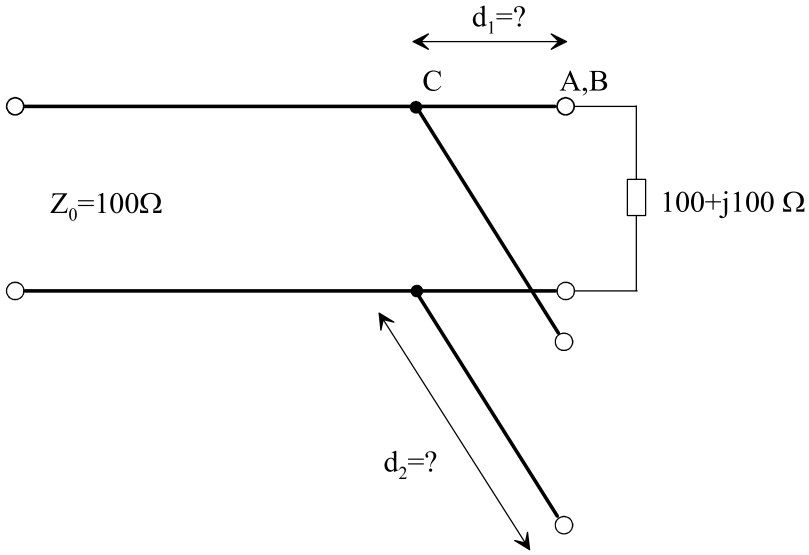
U nastavku slijede grafovi razdiobe amplituda napona i struje, te impedancije na liniji (uvršteno je $V_0$=2V i $Z_0$=50Ω; $\beta x\in\left[-\frac{5\pi}{2},0\right]$).




Raspodjela amplituda struje [mA]
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
|I(x)|
$I_{max}$=40 mA
-1.25
-1
-0.75
-0.5
-0.25
0
x / λ


Raspodjela impedancije
R/$Z_0$=0
jX/$Z_0$
+jX
0
-jX
-1.25
-1
-0.75
-0.5
-0.25
0
x / λ

4. Pomoću Smithovog dijagrama odrediti duljine odsječaka $d_1$ i $d_2$, kojima se u sklopu s jednim stubom prilagođava teret na generator. *(6 bodova)*




Ideja prilagođenja je postići da se sva raspoloživa snaga generatora preda teretu, odnosno da se snaga ne vraća (reflektira) u generator. Paralelnim dodavanjem stuba u točku gdje je realni dio normirane impedancije (i admitancije) jednak 1, moguće je kompenzirati višak reaktivne energije te postići da se, gledano sa ulaza u liniju, ostatak linije od pozicije stuba do tereta ponaša kao paralelni titrajni krug u kojem se sva energija disipira na realnoj impedanciji tereta.

- računanje normirane impedancije:

$$\frac{Z_T}{Z_0} = \frac{100 + \mathrm{j}100}{100} = 1 + \mathrm{j}$$

- s normiranom impedancijom ulazimo u Smithov dijagram (točka A).

- u Smithovom dijagramu prelazimo na račun s admitancijama (točka B; dijametralno suprotna točki A na kružnici konstantnog gušenja):

$$\frac{Y_B}{Y_0} = \frac{1}{\frac{Z_T}{Z_0}} = 0.5 - \mathrm{j}0.5$$

- iz Smithovog dijagrama očitamo relativni položaj točke B (tj. fazu u odnosu na referentnu “nulu”– točku admitancije otvorenog kraja):

$W_B = 0.412\lambda$

- krećemo se po kružnici konstantnog gušenja prema generatoru (smjer kazaljke na satu) i tražimo presjek kružnice konstantnog gušenja i jedinične kružnice – to je točka u kojem je realni dio normirane admitancije jednak 1

$\Rightarrow$ točka C (ravnina stuba)

- iz Smithovog dijagrama očitamo normiranu admitanciju i relativni položaj točke C:

$$\frac{Y_C}{Y_0} = 1 + \mathrm{j}$$
$$W_C = 0.162\lambda$$

- računamo električku udaljenost od ravnine stuba do ravnine tereta (tj. od točke C do točke B):

$$d_1 = W_C - W_B = (0.162\lambda + 0.5\lambda) - 0.412\lambda = 0.25\lambda$$

- pritom smo relativnom položaju točke C dodali jedan period Smithovog dijagrama ($0.5\lambda$) zbog prelaska preko referentne "nule", budući da nas zanima električka udaljenost točaka C i B

- uvjet prilagođenja s jednim stubom:

$$\frac{Y_C}{Y_0} + \frac{Y_{ST}}{Y_0} = 1$$

- slijedi da je u točki C potrebno postići admitanciju staba od:

$$\frac{Y_{ST}}{Y_0} = -\mathrm{j}$$

odnosno

$$W_{ST} = 0.375\lambda$$

- električka duljina stuba $d_2$ jednaka je njegovoj udaljenosti od linije do točke otvorenog kraja (budući da je riječ o otvorenom stubu):

$$d_2 = W_{ST} - W_{OK} = 0.375\lambda - 0\lambda = 0.375\lambda$$

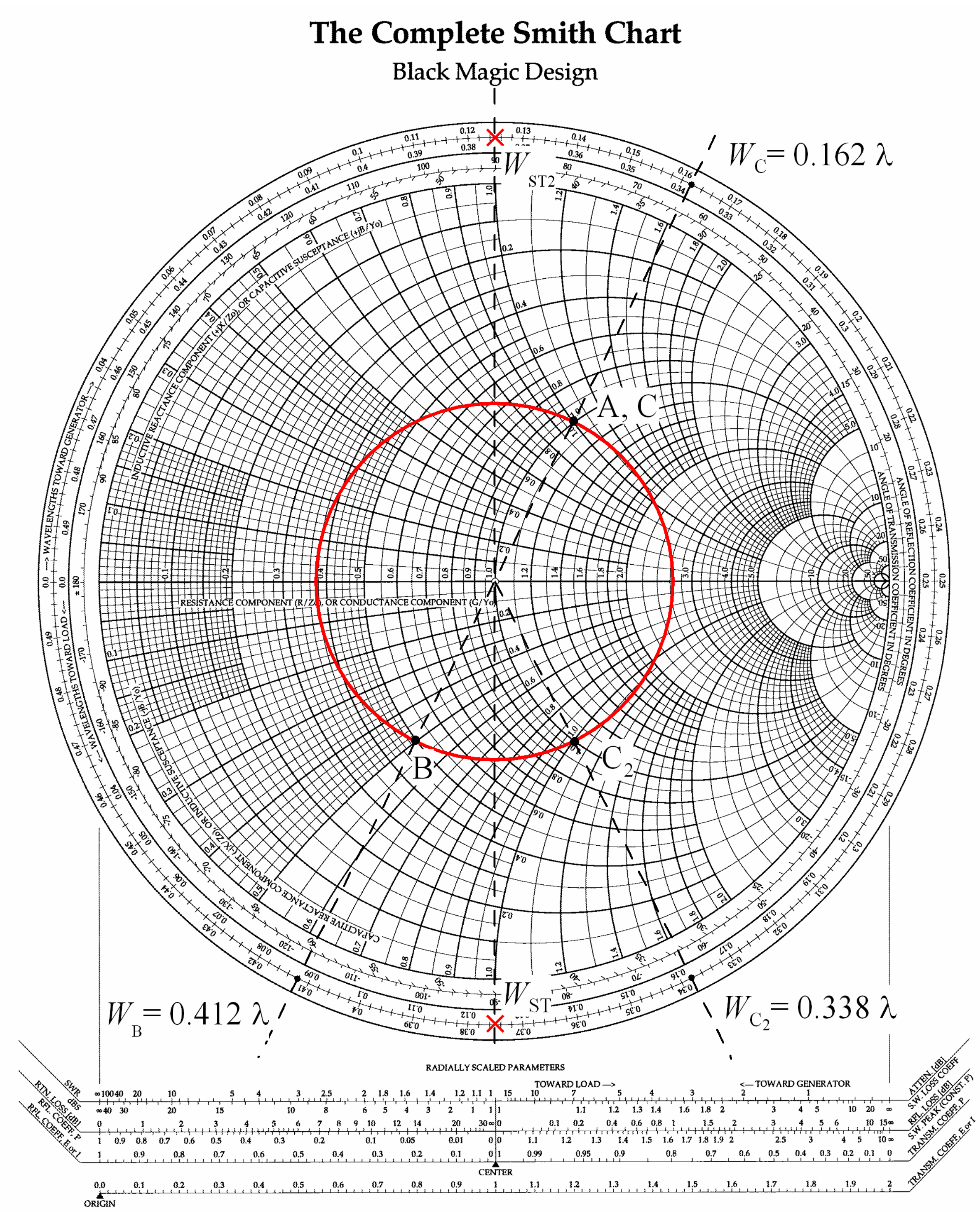
<u>Napomena</u>

Prilikom kretanja po kružnici konstantnog gušenja u Smithovom dijagramu moguće je pronaći i drugu točku presjeka kružnice konstantnog gušenja i jedinične kružnice ($C_2$). U stvarnosti ćemo se češće odlučiti za prvo rješenje jer nam iz praktičnih razloga više odgovara položaj stuba što bliže teretu. Ipak, i alternativno rješenje također je formalno točno. Ovdje su ukratko navedeni alternativni rezultati:

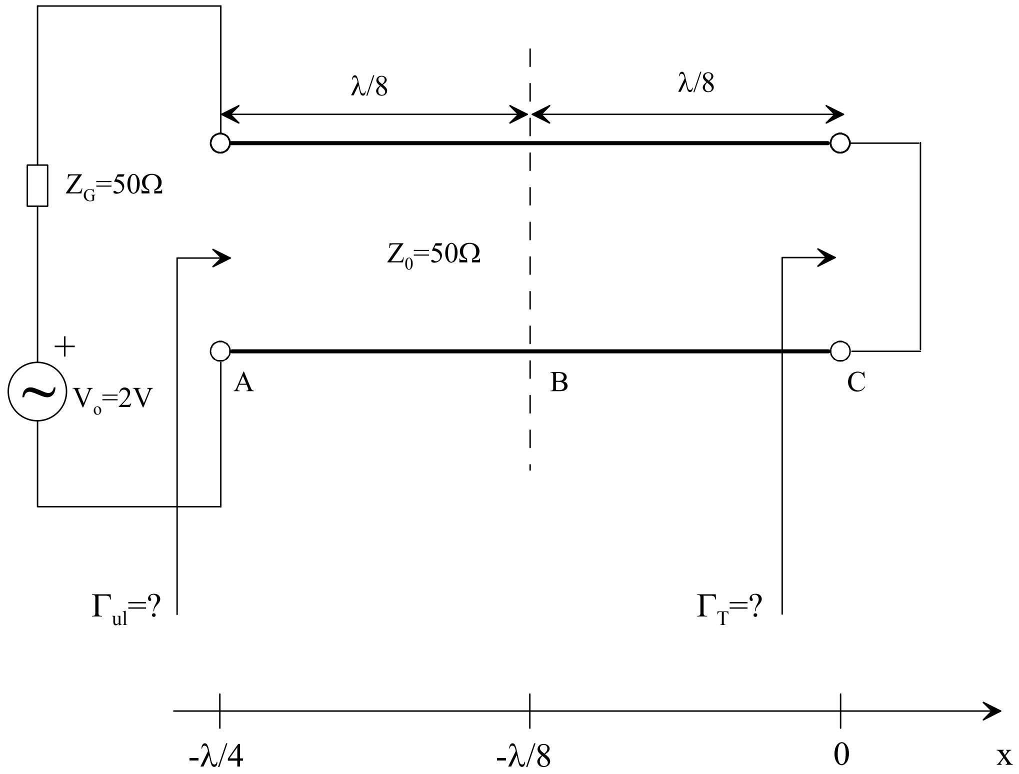
$$\frac{Y_{C_2}}{Y_0} = 1 - \mathrm{j} \qquad \Rightarrow d_1' = W_{C_2} - W_B = 0.426\lambda$$
$$W_{C_2} = 0.338\lambda$$

$$\frac{Y_{ST2}}{Y_0} = +\mathrm{j} \qquad \Rightarrow d_2' = W_{ST2} - W_{OK} = 0.125\lambda$$
$$W_{ST2} = 0.125\lambda$$

- grafički postupak rješavanja:



5. Skicirati fazore incidentnog i reflektiranog vala napona u točkama A, B i C na liniji bez gubitaka prikazanoj na slici. Nadalje, skicirati razdiobu ukupnog napona na liniji te odrediti koeficijente refleksije na ulazu i izlazu (teretu). *(6 bodova)*




**A) Određivanje koeficijenata refleksije $\Gamma_T$ i $\Gamma_{ul}$**

- ukupni napon na liniji jednak je sumi incidentnog i reflektiranog vala napona:

$$V(x) = V_{inc}(x) + V_{ref}(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{+j\beta x}$$

- s obzirom da je linija zaključena kratkim spojem, slijedi da je $Z_T$=0

$$\Rightarrow \quad \Gamma_T = \frac{V_{ref}(x=0)}{V_{inc}(x=0)} = \frac{V^-}{V^+} = \frac{Z_T - Z_0}{Z_T + Z_0} = (Z_T = 0) = -1$$

- koeficijent refleksije na ulazu u liniju ($x=-l$ ):

$$\Gamma_{ul} = \frac{V_{ref}(x=-l)}{V_{inc}(x=-l)} = \frac{V^- e^{j\beta l}}{V^+ e^{-j\beta l}} = \Gamma_T e^{j2\beta l}$$

$\Rightarrow$ ($\Gamma_T = -1$, $x=-l=-\lambda/4$)

$$\Gamma_{ul} = \Gamma_T e^{j2\beta l} = -1e^{j2\frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{4}} = -1e^{j\pi} = (-1)\cdot(-1) = 1$$

- vidljivo je da se nakon $\lambda/4$ duljine kratki spoj preslikao u otvoreni kraj

**B) Određivanje razdiobe napona na odsječku linije**

- napon na liniji jednak je sumi incidentnog i reflektiranog vala napona:

$$V(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{+j\beta x} = V^+ e^{-j\beta x} + \Gamma_T V^+ e^{+j\beta x} = V^+ (e^{-j\beta x} + \Gamma_T e^{+j\beta x})$$

- pritom je, s obzirom na kratki spoj na kraju linije, $\Gamma_T = -1$

$\Rightarrow$

$$V(x) = V^+ (e^{-j\beta x} - e^{+j\beta x}) = (...) = -j2V^+ \sin(\beta x)$$

Nadalje, potrebno je povezati incidentni napon $V^+$ i napon generatora $V_0$. Pritom primjenjujemo rubni uvjet na strani generatora, tj. izjednačavamo izraze za ulazni napon i rezultantni napon na ulazu u liniju ($x = -\lambda/4$):

$$V_{ul} = \frac{V_0}{Z_G + Z_{ul}} \cdot Z_{ul} = V(x = -\frac{\lambda}{4})$$

$\Rightarrow$

$$V(x = -\frac{\lambda}{4}) = -j2V^+ \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(-\frac{\lambda}{4}\right)\right) = -j2V^+ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = j2V^+$$

- s obzirom da je $Z_{ul}$=∞ (kratki spoj se preslikao u otv. kraj), slijedi da je:

$$V_{ul} = \frac{V_0}{Z_G + Z_{ul}} \cdot Z_{ul} = \frac{V_0}{\cancel{Z_{ul}}(\frac{Z_G}{Z_{ul}} + 1)} \cdot \cancel{Z_{ul}} = \left(\frac{Z_G}{Z_{ul}} \to 0\right) = V_0 = j2V^+$$

tj.

$$V^+ = \frac{V_0}{j2} = -j\frac{V_0}{2}$$

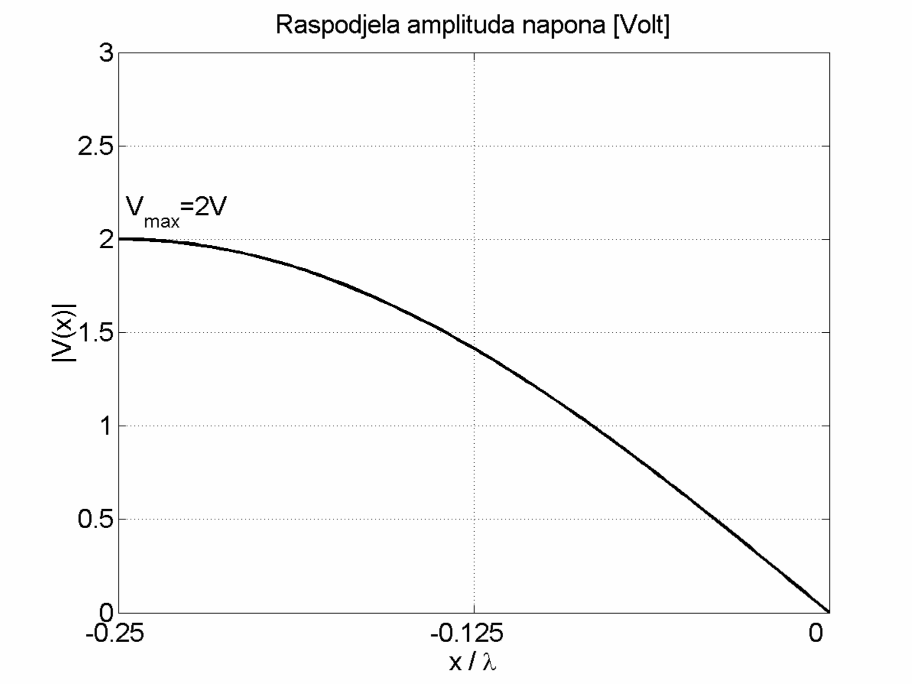
- naposljetku dobivamo konačni izraz za napon na kratko spojenoj liniji:

$$V(x) = -2jV^+ \sin(\beta x) = -2j \cdot (-j\frac{V_0}{2}) \cdot \sin(\beta x) = -V_0 \sin(\beta x)$$

- raspodjela amplituda napona na liniji odgovara apsolutnoj vrijednosti napona:

$$|V(x)| = 2V^+ |\sin(\beta x)| = V_0 |\sin(\beta x)|$$

- grafički prikaz:




**C) Određivanje fazora incidentnog i reflektiranog vala napona u kompleksnoj ravnini**

Potrebno je u kompleksnoj ravnini skicirati fazore incidentnog i reflektiranog vala napona na $\lambda/4$ odsječku kratko spojene linije, u 3 zadane točke. Zbog toga je, osim amplitude incidentnog i reflektiranog vala potrebno poznavati i njihovu relativnu fazu koja se mijenja duž linije.

- vrijedi:

$$V(x) = V_{inc}(x) + V_{ref}(x) = V^+ e^{-j\beta x} + V^- e^{+j\beta x} = V^+ e^{-j\beta x} + \Gamma_T V^+ e^{+j\beta x}$$

- s obzirom da je zbog kratkog spoja $\Gamma_T = -1$ možemo pisati:

$$V_{inc}(x) = V^+ e^{-j\beta x}$$
$$V_{ref}(x) = V^- e^{+j\beta x} = \Gamma_T V^+ e^{+j\beta x} = -V^+ e^{+j\beta x}$$

- promotrimo fazore napona u zadanim točkama A, B i C:

**<u>Točka A</u>**

- zadano: $x$=0

$$V_{inc}(0) = V^+ e^{-j\beta 0} = V^+ \angle 0°$$
$$V_{ref}(0) = (-1 = e^{j\pi}) = V^+ e^{j\pi} e^{+j\beta 0} = V^+ e^{j\pi} = V^+ \angle 180°$$

**Točka B**

- zadano: $x = -\lambda/8$

$$V_{inc}(-\lambda/8) = V^+ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\left(-\frac{\lambda}{8}\right)} = V^+ e^{j\frac{\pi}{4}} = V^+\angle 45°$$

$$V_{ref}(-\lambda/8) = V^+ e^{j\pi} e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{8}\right)} = V^+ e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{4}} = V^+ e^{j\frac{3\pi}{4}} = V^+\angle 135°$$

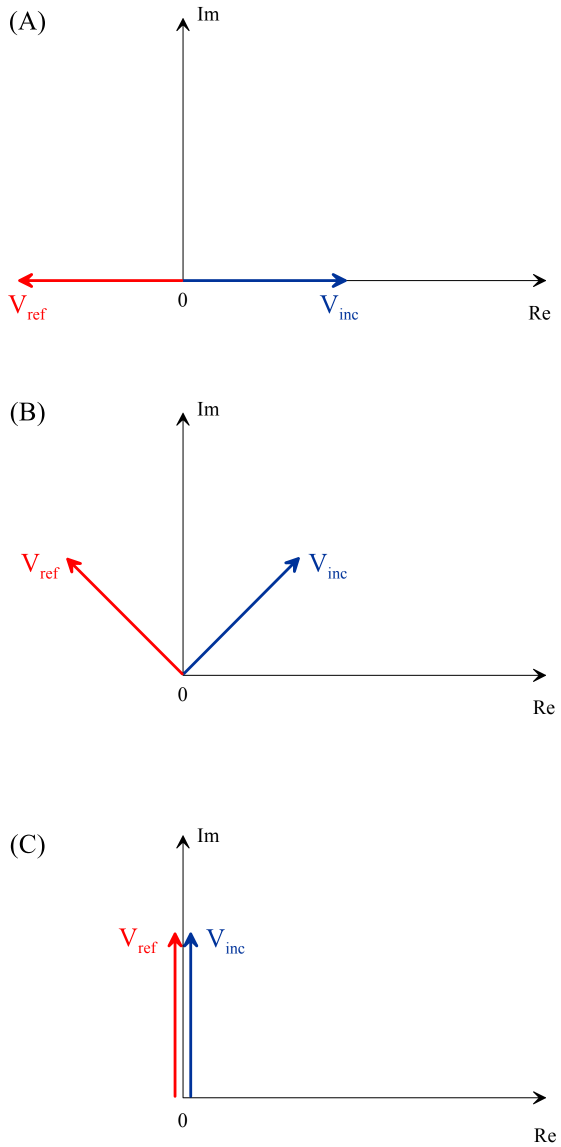
**Točka C**

- zadano: $x = -\lambda/4$

$$V_{inc}(-\lambda/4) = V^+ e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\left(-\frac{\lambda}{4}\right)} = V^+ e^{j\frac{\pi}{2}} = V^+\angle 90°$$

$$V_{ref}(-\lambda/4) = V^+ e^{j\pi} e^{+j\frac{2\pi}{\lambda}\left(-\frac{\lambda}{4}\right)} = V^+ e^{j\pi} e^{-j\frac{\pi}{2}} = V^+ e^{j\frac{\pi}{2}} = V^+\angle 90°$$

Naposljetku grafički prikažemo fazore napona u kompleksnoj ravnini:



Komentar

Ukoliko bismo fazu incidentnog i reflektiranog vala napona izražavali u odnosu na fazu napona generatora $V_0$, sva tri grafa bilo bi potrebno u kompleksnoj ravnini zaokrenuti za dodatnih –90°, jer vrijedi (kao što je izvedeno u B-dijelu zadatka):

$$V^+ = \frac{V_0}{2\mathrm{j}} = -\mathrm{j}\frac{V_0}{2} = \frac{V_0}{2} e^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \frac{V_0}{2} \angle -90°$$

Oba rješenja su točna, s obzirom da je ideja prikazati relativne odnose između faza incidentnog i reflektiranog vala duž promatranog odsječka linije.