



Diplomski studij

Informacijska i
komunikacijska tehnologija

Telekomunikacije i
informatika

Ak.g. 2012./2013.

Mladen Sokele
Vedran Podobnik

Predviđanje i marketing telekomunikacijskih usluga

Radna inačica zbirke zadataka v.0.17

MT Sokele, V. Podobnik - Predviđanje i marketing telekomunikacijskih usluga (radna inačica zbirke zadataka v.0.17)

Autori zadataka: **dr.sc. Mladen Sokele**
dr.sc. Vedran Podobnik

Autori rješenja: **Marina Ivić, mag.oec.**
Vida Grković, mag.ing.

Recenzent: **Darian Škarica, dipl.ing.**

Predgovor

Radna inačica zbirke zadataka "Predviđanje i marketing telekomunikacijskih usluga" namijenjena je studentima diplomskog studija informacijske i komunikacijske tehnologije, profila Telekomunikacije i informatika, na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Ova zbirka bavit će se telekomunikacijskim tržištem, a posebice marketingom telekomunikacijskih usluga i predviđanjem u telekomunikacijama, pri čemu će se obraditi temeljni koncepti i odabrani praktični primjeri.

Ljubazno molimo studente da sve potrebne ispravke i sugestije jave autorima na email predmeta: pmtu@fer.hr

Autori



Diplomski studij

Informacijska i
komunikacijska tehnologija

Telekomunikacije i
informatika

Ak.g. 2012./2013.

Mladen Sokele
Vedran Podobnik

Predviđanje i marketing telekomunikacijskih usluga

Radna inačica zbirke zadataka v.0.17

M. Sokele, V. Podobnik: Predviđanje i marketing telekomunikacijskih usluga (radna inačica zbirke zadataka v.0.17)

Autori zadataka: **dr.sc. Mladen Sokele**
dr.sc. Vedran Podobnik

Autori rješenja: **Marina Ivić, mag.oec.**
Vida Grković, mag.ing.

Recenzent: **Darian Škarica, dipl.ing.**

Predgovor

Radna inačica zbirke zadataka "Predviđanje i marketing telekomunikacijskih usluga" namijenjena je studentima diplomskog studija informacijske i komunikacijske tehnologije, profila Telekomunikacije i informatika, na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu. Ova zbirka bavit će se telekomunikacijskim tržištem, a posebice marketingom telekomunikacijskih usluga i predviđanjem u telekomunikacijama, pri čemu će se obraditi temeljni koncepti i odabrani praktični primjeri.

Ljubazno molimo studente da sve potrebne ispravke i sugestije jave autorima na email predmeta: pmtu@fer.hr

Autori

Sadržaj

Uvod - O predmetu	1
1 Uvod o predviđanju u telekomunikacijama	1
2 Modeli rasta.....	6
3 Modeli rasta za nove telekomunikacijske usluge.....	11
4 Bassov model	19
5 Generalizacija modela rasta	25
6 Procjena pouzdanosti predviđanja	29
7 Marketing telekomunikacijskih usluga.....	34

Uvod - O predmetu

Opis predmeta

Telekomunikacijsko tržište i usluge. Predviđanje životnog ciklusa telekomunikacijskih usluga kao temelj za poslovno planiranje i prednost na tržištu. Kvalitativne i kvantitativne metode predviđanja, primjena u telekomunikacijama. Analitički pristup predviđanju: nova usluga, postojeća usluga u promijenjenim tržišnim uvjetima, međudjelovanje usluga. Marketing usluga, kvalitativna analiza te računalno modeliranje u upravljanju marketingom. Ponašanje korisnika i izgradnja statističkih modela. Osnovne postavke strateškog upravljanja telekomunikacijskim tržištem.

Vrsta predmeta

Telekomunikacije i informatika
(predmeti specijalizacije profila, 3. semestar, 2. godina)

Ishodi učenja

Nakon uspješno savladanog predmeta, studenti će moći:

1. Analizirati telekomunikacijsko tržište.
2. Predvidjeti životni ciklus telekomunikacijskih usluga.
3. Upotrijebiti kvalitativne i kvantitativne metode predviđanja.
4. Analizirati nove telekomunikacijske usluge, postojeće usluge u promijenjenim tržišnim uvjetima te međudjelovanje usluga.
5. Primijeniti računalno modeliranje u upravljanju marketingom.
6. Procijeniti ponašanje korisnika.
7. Kreirati statističke modele koji opisuju korisničko ponašanje.
8. Definirati osnovne postavke strateškog upravljanja telekomunikacijskim tržištem.

Opće kompetencije

Student će steći znanja o telekomunikacijskom tržištu i uslugama te postupcima predviđanja njihovog životnog ciklusa, kao i pristupu marketingu u telekomunikacijskom okružju. Dodatno, studenti će steći znanja i vještine potrebne za razvoj i primjenu modela koji se koriste za predviđanje usluga. Nadalje, studenti će steći kompetencije za sudjelovanje u višedisciplinarnim projektima u području razvoja tržišta, gdje će surađivati sa stručnjacima iz područja telekomunikacijskih tehnologija i marketinga.

Literatura

- J.S. Armstrong (ed.) (2001). Principles of Forecasting: A Handbook for Researchers and Practitioners, Springer
- K. Stordahl, N.K. Elnegaard (eds.) (2004). Teleelektronikk - Telecommunications Forecasting (tematski brojevi 4-2004 i 3/4-2008), Telenor
- L. Moutinho, G.D. Hucheson (eds.) (2011). The SAGE Dictionary of Quantitative Management Research, SAGE Publications
- P. Kotler, K.L. Keller (2007). Upravljanje marketingom, Pearson Education / Mate, Zagreb
- J. Aaker, A. Smith (2010). The Dragonfly Effect: Quick, Effective, and Powerful Ways To Use Social Media to Drive Social Change, Jossey-Bass

1 Uvod o predviđanju u telekomunikacijama

Z 0101	Zadatak 1.1	Navedite osnovnu podjelu metoda predviđanja s kratkim opisima svake pojedine metode.
R 0101	<u>Rješenje</u>	
		Osnovna podjela metoda predviđanja:
		<ul style="list-style-type: none">• KVALITATIVNE METODE:<ul style="list-style-type: none">- METODA PROCJENE- DELPHI METODA- METODA SCENARIJA• KVANTITATIVNE METODE<ul style="list-style-type: none">- VREMENSKI NIZOVI<ul style="list-style-type: none">▪ MODELI RASTA▪ ELIMINACIJA SEZONSKIH VARIJABLI- KAUZALNE METODE
		<p>KVALITATIVNE METODE se isključivo oslanjaju na intuiciju eksperta, a ne na statističku analizu raspoloživih podataka. METODA PROCJENE → rezultat predviđanja može biti numerički, bez da je posljedica nekog statističkog modela. DELPHI METODA → metoda procjene s razrađenim postupkom usklađivanja nezavisnih očekivanja budućeg stanja u cilju konzenzusa. METODA SCENARIJA → temelji se na skupu uvjeta prema kojima se predviđa odvijanje događaja. Mijenjajući postupke, za isti slučaj stvara se više različitih ishoda. Scenarij s najvjerojatnijim ishodom odabire se prema prosudbi stručnjaka.</p> <p>KVANTITATIVNE METODE polaze od analitičkih metoda promatrane pojave. Njihova primjena u predviđanju temelji se na pretpostavci da će navedeni model vrijediti i u budućnosti. VREMENSKI NIZOVI → predviđaju temelje ekstrapolacije raspoloživih podataka iz prošlosti. MODEL RASTA → modeliranje prodora nove telekomunikacijske usluge. Primjeri: LOGISTIČKI MODEL i BASSOV MODEL. ELIMINACIJA SEZONSKIH VARIJACIJA → Primjer: EKSPONENCIJALNO IZGLAĐIVANJE i BOX-JENKINSONOVA METODA. KAUZALNE METODE → uočavaju odnose varijabli koje se treba predvidjeti i nezavisnih varijabli koje se mogu interpretirati. Obuhvaćaju regresijske modele i tehnike provjera prikladnosti modela te ocjene pouzdanosti rezultata predviđanja.</p>
Z 0102	Zadatak 1.2	Opišite dogovor o dekadskom zapisu godina prilikom modeliranja vremenskih nizova. Odgovor ilustrirajte na primjerima.
R 0102	<u>Rješenje</u>	
		<ol style="list-style-type: none">1. $N(2008)$ – broj korisnika koncem 2008. godine (31.12.2008.), EOY 2008 (End of Year)2. $N(2008+1/12)$ – broj korisnika koncem siječnja 2009. godine

		<ol style="list-style-type: none">3. $N(2008.2)$ – broj korisnika koncem 0.2·365 = 73. kalendarskog dana 2009. godine (14.03.2009.)4. $N(2008.25)$ – broj korisnika koncem prvog kvartala 2009. godine, Q1 20095. $N(2008.5)$ – broj korisnika koncem drugog kvartala 2009. godine, Q2 20096. $N(2008.75)$ – broj korisnika koncem trećeg kvartala 2009. godine, Q3 20097. $N(2009)$ – broj korisnika koncem 2009. godine, Q4 2009, EOY 2009															
Z 0103	Zadatak 1.3	Opišite, ilustrirajte i komentirajte životni vijek telekomunikacijske usluge.															
R 0103	<u>Rješenje</u>																
		<table><tr><th>FAZA SLC-a</th><th>Korisnici</th><th>Konkurencija</th></tr><tr><td>Uvođenje (T₁)</td><td>Inovatori</td><td>Zanemariva</td></tr><tr><td>Rast (T₂)</td><td>Visokog standard</td><td>Primjetna</td></tr><tr><td>Zrelost (T₃)</td><td>Masovno tržište</td><td>Značajna</td></tr><tr><td>Opadanje (T₄)</td><td>Oni koji oklijevaju</td><td>Smanjuje se</td></tr></table>	FAZA SLC-a	Korisnici	Konkurencija	Uvođenje (T ₁)	Inovatori	Zanemariva	Rast (T ₂)	Visokog standard	Primjetna	Zrelost (T ₃)	Masovno tržište	Značajna	Opadanje (T ₄)	Oni koji oklijevaju	Smanjuje se
FAZA SLC-a	Korisnici	Konkurencija															
Uvođenje (T ₁)	Inovatori	Zanemariva															
Rast (T ₂)	Visokog standard	Primjetna															
Zrelost (T ₃)	Masovno tržište	Značajna															
Opadanje (T ₄)	Oni koji oklijevaju	Smanjuje se															
		<p>The graph shows the number of users $N(t)$ over time (Vrijeme). The curve starts at the origin and rises through the introduction phase T_1 and growth phase T_2, reaching a peak at M_2. It then declines through the maturity phase T_3 and saturation phase T_4, ending at M_4. The horizontal axis is marked with T_1, T_2, T_3, T_4 and the vertical axis with $N(t)$ and 0. The curve is labeled M_1 at the start of T_2, M_2 at the peak, M_3 at the start of T_4, and M_4 at the end.</p>															
		<p>T_1 - Usluga je nova i jedina na tržištu, tako da je njen tržišni kapacitet M_1 identičan ukupnom tržišnom kapacitetu. Rast broja korisnika usluge se može modelirati jednostavnim S-modelima (Logistički, Bass, Richards).</p> <p>T_2 - Nastupaju nove tržišne prilike za uslugu (ekonomske ili tehnološke). Njen tržišni kapacitet se povećava na M_2.</p> <p>T_3 - Usluga je suočena s konkurencijom uz nepromijenjeni kapacitet tržišta.</p> <p>T_4 - Napad konkurentnih usluga (to mogu biti identične usluge ali drugih, povoljnijih, davatelja usluga ili slične, ali tehnološki suvremenije usluge) dovodi do istiskivanja postojeće usluge s tržišta.</p>															
Z 0104	Zadatak 1.4	Napišite jednakost kojom se opisuje rast broja korisnika; navedite i ukratko															

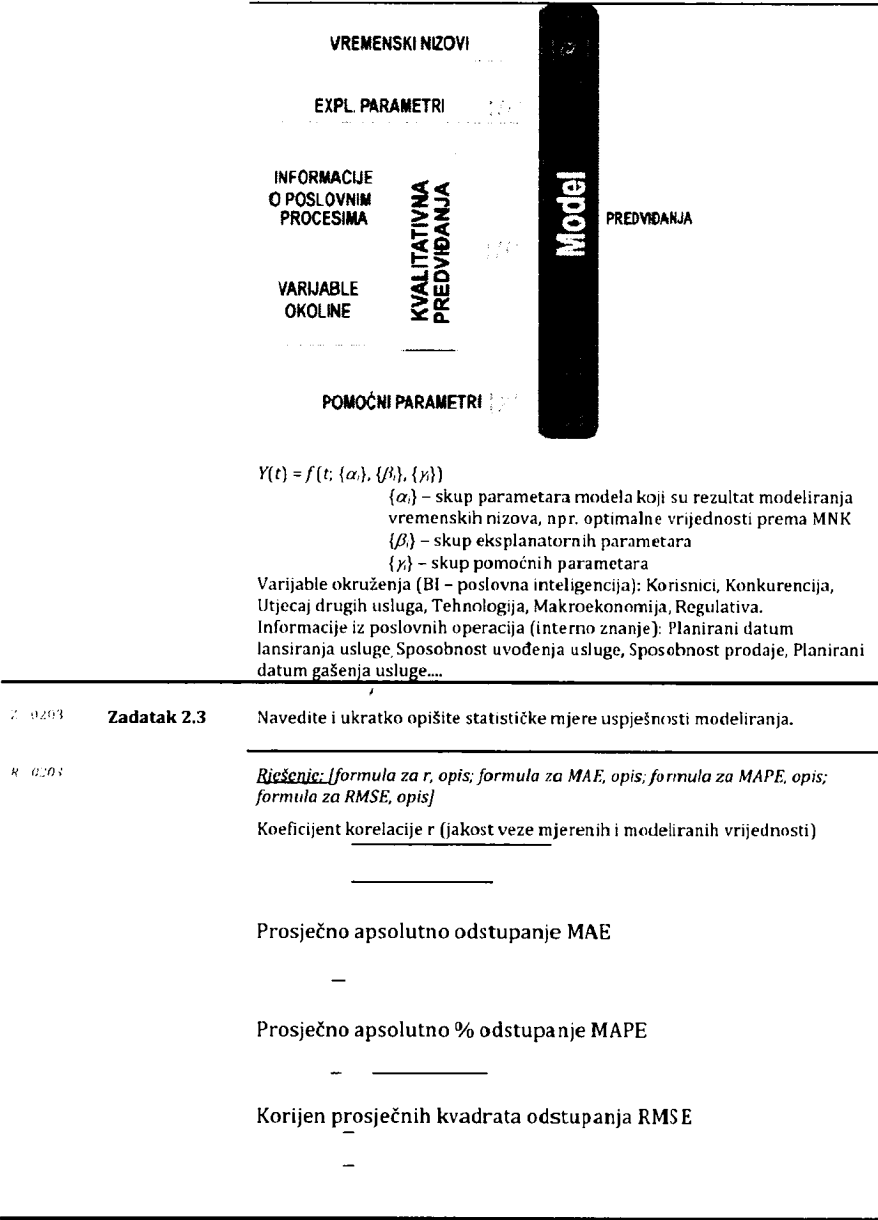
opišite indikatore rasta i odljeva korisnika.	
R 0104	<div><div><div>Rješenje</div><div><p>Broj korisnika u vremenskom trenutku t:</p>$N(t) = N(t-\Delta t) + \text{BrutoNovihKorisnika}(t) - \text{OdljevKorisnika}(t) =$$= N(t-\Delta t) + \text{NetoNovihKorisnika}(t)$<p>BrutoNovihKorisnika($t$) = broj novih korisnika u vremenskom intervalu $[t-\Delta t, t]$; Gross additions OdljevKorisnika(t) = odljev korisnika u vremenskom intervalu $[t-\Delta t, t]$ NetoNovihKorisnika(t) = stvarno povećanje broja korisnika u intervalu $[t-\Delta t, t]$; Net additions</p></div></div></div>
INDIKATORI RASTA/ODLJEVA KORISNIKA	
<p>Stopa rasta (<i>growth rate</i>):</p> $GR_{\Delta t} = \frac{N(t) - N(t - \Delta t)}{N(t - \Delta t)} \cdot 100\%$ <p>Model rasta s konstantnom stopom rasta:</p> $N(t) = N(t_1) \cdot (1 + GR_{\Delta t})^{\frac{t-t_1}{\Delta t}}$ <p>Usporedba stopa rasta za različite vremenske intervale:</p> $GR_{\Delta t} = (1 + GR_{\Delta t})^{\frac{\Delta t}{\Delta t}} - 1$ <p>CAGR (<i>compound annual growth rate</i>) prosječna godišnja stopa rasta:</p> $CAGR = \left(\frac{year_2 - year_1}{\sqrt{\frac{N(year_2)}{N(year_1)}}} - 1 \right) \cdot 100\%$ <p>CAGR sa smanjenim utjecajem krajnjih točaka (<i>preporuka World Bank Group for World Development Indicators</i>)</p> <ul style="list-style-type: none">Parametri a i b se odrede regresijskom metodom kroz sve poznate točke $t_i, N(t_i)$CAGR = $a \cdot 100\%$	
Z 0105	<div><div><div>Zadatak 1.5</div><div><p>Koncem 2010. godine bilo je 100 000 korisnika usluge. Svake sljedeće godine, bruto novih korisnika je <i>10%</i> korisnika iz prethodne godine, a odljev korisnika je <i>7%</i> korisnika iz prethodne godine (tj. <i>CR</i> = <i>7%</i>). Koliko je korisnika koncem 2013. godine, te kolika je u toj godini stopa rasta?</p></div></div></div>
R 0105	<div><div><div>Rješenje</div><div><p>EOY 2010→ N (2010)= Q₃ 2010= 100 000=10⁵ Δt= 3 god t₀= 2010 t₁= 2013 BRUTONOVIIH (t+1)=10%·N(t) ODLJEV (t+1)=7%·N(t) →CR= 7% N(2013)=?</p><p>2011. B=0.1·100 000= 10 000 O=0.07·100 000= 7 000 N(2011)= N(2010)+B(2011)-O(2011)= 100 000+ 10 000- 7 000= 103 000</p></div></div></div>

<p>2012. B=0.1·103 000= 10 300 O=0.07·103 000= 7 210 N(2012)= 103 000+ 10 300- 7 210= 106 090</p> <p>2013. B= 0.1·106 090= 10 609 O= 0.07·106 090= 7 426.3 N(2013)= 106 090+ 10 609- 7 426.3= 109 272.7</p>	
<p>STOPA RASTA GR_{Δt}</p> $GR_{\Delta t} = \frac{N(t) - N(t - \Delta t)}{N(t - \Delta t)} \cdot 100\%$ $GR_3 = \frac{N(2013) - N(2010)}{N(2010)} \cdot 100\%$ $GR_3 = \frac{109\,272.7 - 100\,000}{100\,000} \cdot 100\%$ $GR_3 = 9.27\%$ $GR_1 = \frac{N(2013) - N(2012)}{N(2012)} \cdot 100\%$ $GR_1 = \frac{109\,272.7 - 106\,090}{106\,090} \cdot 100\%$ $GR_1 = 3\%$	
Z 0106	<div><div><div>Zadatak 1.6</div><div><p>Kvartalna stopa rasta je <i>3%</i>. Kolika je godišnja stopa rasta?</p></div></div></div>
R 0106	<div><div><div>Rješenje</div><div><p>GR_y = (1+GR_q)⁴-1 = (1+0.03)⁴-1 = 0.125509· 100% = 12.55%</p></div></div></div>
Z 0107	<div><div><div>Zadatak 1.7</div><div><p>Godišnja stopa rasta je <i>16%</i>. Kolika je polugodišnja i kvartalna stopa rasta?</p></div></div></div>
R 0107	<div><div><div>Rješenje</div><div><p>$GR_q = (1 + GR_y)^{\frac{1}{4}} - 1 = (1 + 0.16)^{\frac{1}{4}} - 1 = 3.78\%$ $GR_{2q} = (1 + GR_y)^{\frac{2}{4}} - 1 = (1 + 0.16)^{\frac{2}{4}} - 1 = 7.70\%$</p></div></div></div>
Z 0108	<div><div><div>Zadatak 1.8</div><div><p>Kvartalna stopa odljeva korisnika (<i>ChurnRate</i>) je <i>4%</i>. Kolika je godišnja i mjesečna stopa odljeva korisnika?</p></div></div></div>
R 0108	<div><div><div>Rješenje</div><div><p>$CR_{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = CR_{\Delta \tau}$</p></div></div></div>

		<div> 1 godina= 4 kvartala 1 kvartal= 3 mjeseca 1 mjesec= 1/3 kvartala = $\frac{4\%}{3}$ = 1.33%→ CR_q≈ 1.33% $CR_Y = CR_{4Q} = CR_Q \cdot \frac{4Q}{Q} = 4CR_Q$ $CR_Y = 4 \cdot 4\% \approx 16\%$ </div>
Z = 0.100	Zadatak 1.9	<div> Za sljedeći raspon podataka o broju korisnika, izračunajte CAGR: $N(2001) = 500, N(2002) = 3750, N(2005) = 8000$. </div>
K = 0.000		<div> <p><i>Rješenje:</i></p> $CAGR = \left(\frac{year_2 - year_1}{\sqrt[N(year_2)]{N(year_1)}} - 1 \right) \cdot 100\%$ $CAGR = \left(\frac{2005 - 2001}{\sqrt[8000]{500}} - 1 \right) \cdot 100\%$ $CAGR = (\sqrt[4]{16} - 1) \cdot 100\%$ $CAGR = 100\%$ </div>

2 Modeli rasta

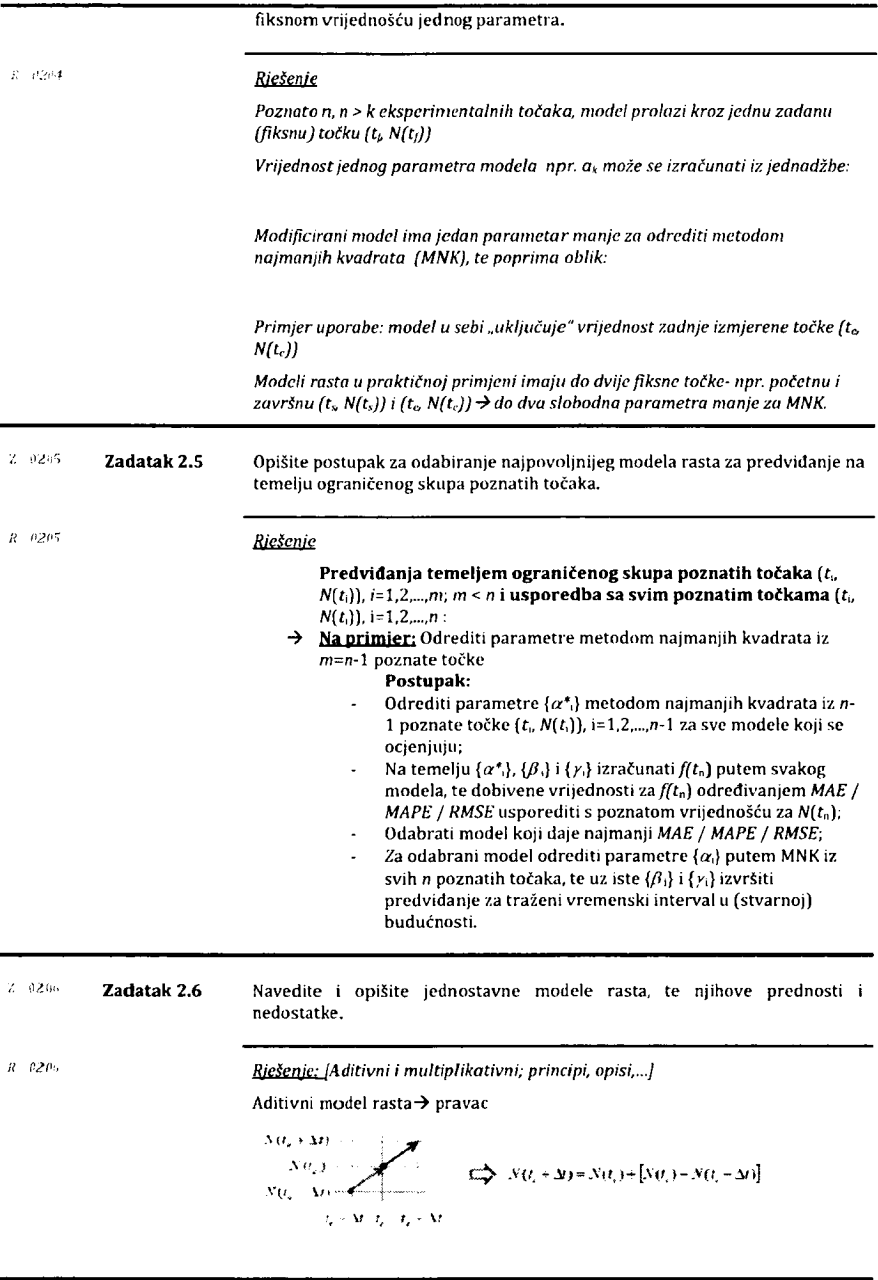
Z = 0.201	Zadatak 2.1	<div> Opišite postupke određivanja optimalnih parametara modela rasta. </div>
K = 0.201		<div> <p><i>Rješenje:</i><i>[n = k; sustav jednađžbi; n > k; svi oblici metode najmanjih kvadrata]</i></p> <p>n=k → poznato toćno k eksperimentalnih toćaka sustav jednađžbi $N(t_i) \cdot f(t_i; a_1, ..., a_k) = 0 \quad i = 1...k$ koriste se numerićke metode ili solver aplikacije</p> <p>n>k → poznato n eksperimentalnih toćaka MNK: vrijednost parametara modela određuje se tako da je \sum kvadrata razlika mjerenih i Izraćunatih vrijednosti (modeliranih) MIN. Za min \sum tj. Određivanje optimalnih parametara moćže i solver.</p> <ol style="list-style-type: none"> MNK $\min_{(a_1...a_k)} \sum_{i=1}^n [f(t_i; a_1, ..., a_k) - N(t_i)]^2$ MNK $(\exists W_i) \min_{(a_1...a_k)} \sum_{i=1}^n W_i [f(t_i; a_1, ..., a_k) - N(t_i)]^2$ MNK $(\exists \text{ fiksna toćka}) \min_{(a_1...a_{k-1})} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq f}}^n [f(t_i; a_1, ..., a_{k-1}; t_f; N(t_f)) - N(t_i)]^2$ MNK $(\text{fiksni } a_k) \min_{(a_1...a_{k-1})} \sum_{i=1}^n [f(t_i; a_1, ..., a_k) - N(t_i)]^2$ MNK $(\text{model}^{-1}) \min_{(a_1...a_k)} \sum_{i=1}^n [f^{-1}(N(t_i), a_1 ... a_k - t_i)]^2$ <p>MNK (total) Statistićko izglađivanje pogreške sađržane u nezavisnoj t i zavisnoj varijabli $N(t)$</p> </div>
Z = 0.202	Zadatak 2.2	<div> Opišite koncept modela rasta prilagođenog za predviđanje. </div>
K = 0.202		<div> <p><i>Rješenje:</i><i>[blok-dijagram; vremenski nizovi, eksplanatorni i pomoćni parametri]</i></p> </div>



Z-0204

Zadatak 2.4

Ilustrirajte i komentirajte uporabu modela s fiksnom točkom i modela s



Z-0206

Zadatak 2.6

Navedite i opišite jednostavne modele rasta, te njihove prednosti i nedostatke.

R-0206

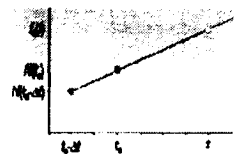
Rješenje: [Aditivni i multiplikativni; principi, opisi,...]

Aditivni model rasta→ pravac

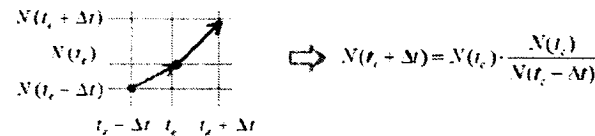


$N(t_0 + \Delta t) = N(t_0) + [N(t_2) - N(t_0 - \Delta t)]$

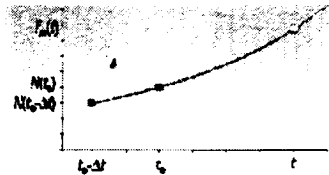
Opći oblik (za bilo koji t):



Multiplikativni model rasta → eksponencijalna funkcija



Opći oblik (za bilo koji t):



Z. 0207 **Zadatak 2.7** Napišite opći oblik aditivnog i multiplikativnog modela na temelju vrijednosti dvije poznate točke $(t_1, N(t_1))$ i $(t_2, N(t_2))$.

R. 0207 **Rješenje:**

Aditivni model:

Multiplikativni model:

$$f_m(t) = N(t_2) \cdot \left[\frac{N(t_1)}{N(t_2)} \right]^{\frac{t-t_2}{\Delta t}}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

Z. 0208 **Zadatak 2.8** Zadane su dvije eksperimentalne točke za broj korisnika $N(2007) = 100\,000$ i $N(2010) = 200\,000$. Izračunajte broj korisnika početkom 2016. godine pomoću aditivnog i multiplikativnog modela.

R. 0208

Rješenje: [početak 2016 = EOY 2015; $N_a(2015) = 366\,666$; $N_m(2015) = 634\,960$]

$N(2007) = 100\,000$

$N(2010) = 200\,000$

EOY = 2015

Početak = 2016

Aditivni model: $f_a(t) = N(t_2) + [N(t_2) - N(t_1)] \frac{t-t_2}{\Delta t}$

Multiplikativni model: $f_m(t) = N(t_2) \cdot \left[\frac{N(t_1)}{N(t_2)} \right]^{\frac{t-t_2}{\Delta t}}$

$$f_a(2015) = N(2010) + [N(2010) - N(2007)] \frac{2015-2010}{3}$$

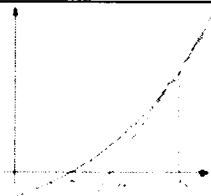
$$N_a(2015) = 200\,000 + [200\,000 - 100\,000] \frac{5}{3}$$

$$N_a(2015) = 366\,666$$

$$f_m(t = 2015) = N(2010) \cdot \left[\frac{N(2007)}{N(2010)} \right]^{\frac{2015-2010}{3}}$$

$$f_m(t = 2015) = 200\,000 \cdot \left[\frac{100\,000}{200\,000} \right]^{\frac{5}{3}}$$

$$N_m(t = 2015) = 634\,960$$



Za logistički model formira se funkcija $F(x)$ kojoj se traži nulište po varijabli $x = M$:

$$F(t; M; a, b) = \frac{M}{1 + e^{-a(t-b)}} - N(t) = 0$$

Zadatok 3.6: Za zadane 3 ekvidistantne točke $(t_1, N(t_1))$, $(t_2, N(t_2))$ i $(t_3, N(t_3))$ koji su nužni i dovoljni uvjeti kako bi iste moglo modelirati logističkim modelom.

Rješenje:

Poseban slučaj - tri ekvidistantne točke: $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$:

$$M = \frac{N(t_1)N^2(t_2) - 2N(t_1)N(t_2)N(t_3) + N^2(t_2)N(t_3)}{N^2(t_2) - N(t_1)N(t_3)}$$

$$a = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{N(t_3)}{N(t_1)} \cdot \frac{N(t_2) - N(t_1)}{N(t_3) - N(t_2)} \right)$$

$$b = t_1 + \frac{1}{a} \ln \left[\frac{N(t_3)}{N(t_1)} \cdot \frac{(N(t_2) - N(t_1))^2}{(N^2(t_2) - N(t_1)N(t_3))} \right]$$

- Nužan uvjet na ulazne točke slijede iz izraza za a i b :

a) $N(t_1) < N(t_2) < N(t_3)$ ili $N(t_1) > N(t_2) > N(t_3)$

-monotoni rast/pad

b) $\frac{N(t_2)}{N(t_1)} > \frac{N(t_3)}{N(t_2)}$

Uvjet na gradijent rasta ili pada

Npr. za točke koje slijede eksponencijalni rast $N(t) = a \cdot \beta^t$ ovaj uvjet nije zadovoljen!

Zadatok 3.7: Opišite na primjeru uporabu težinske MNK s geometrijskim nizom težina, te svrhu uporabe.

Rješenje:

Za 4 ili više poznatih točaka $N(t_i)$; $i = 1, 2, \dots, n$; metoda najmanjih kvadrata (OLS ili MNK s težinama):

- Regresijski model \Leftrightarrow statističko izgladivanje
 • Metoda najmanjih kvadrata - naći M , a i b tako da je suma S minimalna:

$$S = \sum_{i=1}^n W_i [L(t_i; M, a, b) - N(t_i)]^2$$

- nelinearan problem rješiv jedino numeričkim metodama
 • rješivo npr. Solver-om u Excel-u
 • težine - veće uz zadnje poznate točke:

$$w_i = \frac{1}{q^{n-1}}, q > 1$$

Zadatok 3.8: Poznavajući točke penetracije $(t_1, N(t_1)/M)$, $(t_2, 50\%)$, napišite izraz za penetraciju u vremenskom trenutku $t_3 = (t_2 + (t_2 - t_1))$ uz pomoć logističkog modela.

Rješenje:

$$\frac{M}{2} = \frac{M}{1 + e^{-a(t_2-b)}} \rightarrow 2 = 1 + e^{-a(t_2-b)} \rightarrow -a(t_2 - b) = 0 \rightarrow t_2 = b$$

$$N(t_1) = \frac{M}{1 + e^{-a(t_1-t_2)}} \rightarrow \frac{M}{N(t_1)} - 1 = e^{-a(t_1-t_2)} \rightarrow e^{-a(t_1-t_2)} = \frac{1}{\frac{M}{N(t_1)} - 1} = \frac{N(t_1)}{M - N(t_1)}$$

$$N(t_4) = \frac{M}{1 + e^{-a(t_1-t_2)}} = \frac{M}{1 + e^{-a(2t_1-t_2-t_2)}} = \frac{M}{1 + e^{-a(t_2-t_1)}} = \frac{M}{1 + \frac{M - N(t_1)}{N(t_1)}}$$

$$N(t_4) = M - N(t_1)$$

Zadatok 3.9: Koncem 2005. penetracija ($n(t) = N(t)/M$) je bila 30%, a sredinom 2008. je iznosila 50%. Kolika će penetracija biti početkom 2011. godine?

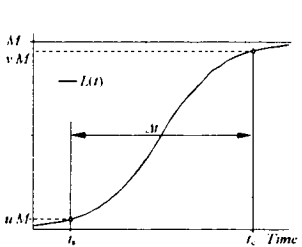
Rješenje:[$n(2010) = n(2005) + (n(2007.5) - n(2005)) = 70\%$]

EOY 2005= N (2005)= 30%
 Q2 2008= N (2007.5)= 50%
 EOY 2010= N(2010)= ?
 $n(2010) = n(2007.5) + \{n(2007.5) - n(2005)\}$
 $n(2010)= 50\% + (50\% - 30\%)$
 $n(2010)= 70\%$

Zadatok 3.10: Poznavajući vrijednosti fiksnih (zadanih) točaka $(t_s, N(t_s))$ i $(t_v, N(t_v))$ iz osnovne formule za logistički model izvedite formule za parametre a i b .

Rješenje:

Logistički model kroz dvije fiksne točke:



→ "Ugrađena" vrijednosti dvije poznate točke $(t_s, u \cdot M)$ i $(t_v, v \cdot M)$:

$$a = \frac{1}{\Delta t} \left[\ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right) - \ln \left(\frac{1}{v} - 1 \right) \right]$$

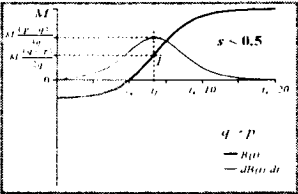
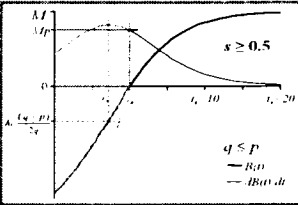
$$b = t_s + \Delta t \cdot \frac{\ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right)}{\ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right) - \ln \left(\frac{1}{v} - 1 \right)}$$

		logistički model izvedite formulu za trenutak maksimalne prodaje.
R031 1		<u>Rješenje</u> $b = t_s + \frac{\Delta t}{2}$
Z031 7	Zadatak 3.15	Zadano je $M = 500\,000$, $a = 0.4$ i točka $N(2013) = 416\,000$. Koristeći logistički model, odredite trenutak maksimalne prodaje.
R031 3		<u>Rješenje:[b = 2009]</u> $M = 500000$ $a = 0.4$ $N(2013) = 416000$ $b = ?$ $u = \frac{N(t_s)}{M} = \frac{416000}{500000} = 0,832$ $a = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right) \rightarrow 0,4 = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{0,832} - 1 \right) \rightarrow \Delta t = -7,99934$ $b = t_s + \frac{\Delta t}{2} \rightarrow b = 2013 - \frac{7,99934}{2} \rightarrow b = 2009$
Z031 6	Zadatak 3.16	Poznavajući M, trenutak maksimalne prodaje i jednu točku (t_1 , $N(t_1)$), iz osnovne formule za logistički model izvedite formulu za broj korisnika u trenutku t_s .
R031 6		<u>Rješenje</u> $LL\{t; M; t_s; \Delta t; u\} = \frac{M}{1 + \left(\frac{1}{u} - 1\right)^{\frac{1-2(t-t_s)/\Delta t}{1-2(t_s-t_s)/\Delta t}}}$
Z031 7	Zadatak 3.17	Zadani su: $M = 300\,000$, $N(2008) = 100\,000$. Ukoliko je maksimalna prodaja zabilježena početkom trećeg kvartala 2010., izračunajte broj korisnika početkom 2013. uporabom logističkog modela.
R031 7		<u>Rješenje:[N = 228 140]</u> $M = 300000$ $N(2008) = 100000$ $B = 2Q\,2010 = 2009,5$ $N(2013) = ?$ $t_s = 2008$ $t_{max} \rightarrow b = t_s + \frac{\Delta t}{2} \rightarrow 2009,5 = 2008 + \frac{\Delta t}{2} \rightarrow \Delta t = 3$

		$a = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right) = \frac{2}{3} \ln \left(\frac{1}{\frac{1}{3}} - 1 \right) = 0,462$ $u = \frac{N(t_s)}{M} = \frac{100000}{300000} = \frac{1}{3}$ $L\{t = 2012; M = 300000; t_s = 2008; \Delta t = 3; 1/3\}$ $= \frac{M}{1 + \left(\frac{1}{u} - 1\right)^{1-2(t-t_s)/\Delta t}} = \frac{300000}{1 + (3 - 1)^{1-2(2012-2008)/3}}$ $= 228140$
Z031 8	Zadatak 3.18	Za rast broja korisnika od 5% do 95% penetracije potrebno je 11 godina. Koliko je potrebno za rast od 10% do 90% penetracije po logističkom modelu?
R031 8		<u>Rješenje:[*teži zadatak*, za elegantna rješenja dodatni bodovi: K' = 8,21 godina]</u> <ul style="list-style-type: none">$\Delta t = 11\,god$$u_1 = 0,05$$v_1 = 0,95$$u_2 = 0,1$$v_2 = 0,9$$\Delta t' = ?$Pravac je isti $a_1 = a_2$ $a = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right) = \frac{2}{11} \ln \left(\frac{1}{0,05} - 1 \right) = 0,535$ $0,535 = \frac{2}{\Delta t'}, \ln \left(\frac{1}{u_2} - 1 \right) \rightarrow \Delta t' = 8,21\,god$

4 Bassov model

Z = 0401	Zadatak 4.1	Napišite formule za Bassov model u diferencijalnom i analitičkom obliku, te opišite parametre modela.
K = 0401		<p><u>Rješenje</u></p> <p>Diferencijalni oblik:</p> $\frac{dB(t)}{dt} = qB(t)\left(1 - \frac{B(t)}{M}\right) + p(M - B(t))$ <p style="text-align: center;"><i>Efekt imitatora efekt inovatora</i></p> <p style="text-align: center;"><i>(logistički model)</i></p> <p>Analitički oblik:</p> $B(t, M, p, q, t_s) = B(t) = M \cdot \frac{1 - e^{-(p+q)(t-t_s)}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)(t-t_s)}}$ <p><i>M</i> - asimptota (ukupni kapacitet tržišta)</p> <p><i>p</i> - koeficijent inovacije, $p > 0$</p> <p><i>q</i> - koeficijent imitacije, $q \geq 0$</p> <p><i>t_s</i> - vrijeme kada je usluga lansirana na tržište, $B(t_s)=0$</p>
Z = 0402	Zadatak 4.2	Opišite Bassov model, njegova svojstva, sličnost/različitost s logističkim modelom, te navedite nedostatke.
K = 0402		<p><u>Rješenje</u></p> <p>→ Ima 4 slobodna parametra</p> <p>→ Krivulja je identična logističkoj ali je pomaknuta dolje po ordinati</p> <p>→ ispravlja 1 od 2 nedostataka- omogućuje modeliranje početka životnog vijeka ciklusa usluga</p> <p>→ Nedostatak koji ostaje jest fiksni položaj točke infleksije $I = \left(b, \frac{M}{2}\right)$</p> <p>→ svojstveni su mu parametri p&q</p> <p>→ asimptote: $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = -\frac{p}{q}M$ $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = M$</p> <p>→ postoje dva moguća slučaja prema odnosu vrijednosti za p&q:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $S < 0,5$ točka infleksije nakon lansiranja usluge- dominira imitator 2) $S \geq 0,5$ točka infleksije prije lansiranja usluge- dominira inovator <p style="text-align: center;">$p = (p + q) \cdot s$; $q = (p + q) \cdot (1 - s)$; $p + q = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(1 + \frac{v}{s(1-v)}\right)$</p>

Z = 0403	Zadatak 4.3	Za Bassov model izvedite izraz za donju asimptotu, te opišite dinamiku stope rasta GR.
K = 0403		<p><u>Rješenje</u></p> $\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = -\frac{p}{q}M$ <p>Stopa rasta GR je uvijek pozitivna, a ima maksimum za $t = t_*$ kada $GR \rightarrow +\infty$ jer je $B(t_*) = 0$.</p> $GR_{\Delta t} = \frac{B(t) - B(t - \Delta t)}{B(t - \Delta t)}$
Z = 0404	Zadatak 4.4	Opišite i diskutirajte slučajeve kad je $q > p$ i $p > q$ s aspekta efekta inovatora/imitatora, te trenutka maksimuma prodaje.
K = 0404		<p><u>Rješenje</u></p> <p>Dva su moguća slučaja- prema odnosu vrijednosti za <i>q</i> i <i>p</i>:</p> <p>1.) Točka infleksije nakon lansiranja usluge- dominiraju korisnici imitatori</p>  <p style="text-align: right;">$s < 0,5$</p> <p style="text-align: right;">$q > p$</p> <p style="text-align: right;">— $B(t)$</p> <p style="text-align: right;">— $dB(t)/dt$</p> <p>2.) Točka infleksije prije lansiranja usluge- dominiraju korisnici inovatori</p>  <p style="text-align: right;">$s \geq 0,5$</p> <p style="text-align: right;">$q \leq p$</p> <p style="text-align: right;">— $B(t)$</p> <p style="text-align: right;">— $dB(t)/dt$</p>
Z = 0405	Zadatak 4.5	Opišite postupke određivanja parametara Bassovog modela.
K = 0405		<u>Rješenje:</u> [n = 4 točke: ... ; n > 4 točke: oblici metode najmanjih kvadrata]
Z = 0406	Zadatak 4.6	Zadani su $t_s = 2010$, $p = 0.2$ i $q = 0.1$. Odredite kada će penetracija usluge ($n(t)=B(t)/M$) biti 50%. U kojem je trenutku maksimalna prodaja – i zašto?

	Koliko je te godine porasla penetracija u apsolutnom iznosu ($n_{t+1} - n_t$)?
$K = 0,40\%$	<p><u>Rješenje:</u> [$t_{sat} = 2013,054$; $t = 2010$ jer je $q < p$, $n_{t+1} - n_t = 18,9\%$]</p> <p>$t_s = 2010$</p> <p>$p = 0,2$</p> <p>$q = 0,1$</p> <p>$(n(t) = B(t)/M) = 50\%$</p> <p>$q < p$</p> <p>$t_1 = t_s = 2010$</p> $B(t; M, p, q, t_s) = B(t) = M \cdot \frac{1 - e^{-(p+q)(t-t_s)}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)(t-t_s)}}$ $0,5 = \frac{1 - e^{-(p+q)(t-t_s)}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)(t-t_s)}} = \frac{1 - e^{-0,3(t-2010)}}{1 + 2e^{-0,3(t-2010)}}$ $0,5(1 + 0,5e^{-0,3(t-t_s)}) = 1 - e^{-0,3(t-t_s)}$ $0,5 = 1,25e^{-0,3(t-2010)}$ $0,4 = e^{-0,3(t-2010)}$ $\ln 0,4 = -0,3(t - 2010)$ $\Delta t = 3,05$ $t = 2013,05 \text{ god}$ $n(2011) - n(2010) = \frac{B(2011)}{M} - \frac{B(2010)}{M} = \frac{1 - e^{-0,3 \cdot 1}}{1 + \frac{q}{p}e^{-0,3}} - \frac{1 - e^0}{1 + \frac{p}{q}e^0}$ $= \frac{1 - e^{-0,3}}{1 + 0,5e^{-0,3}} = 18,91\%$

$K = 0,40\%$	Zadatak 4.7	Opišite postupak reparametrizacije Bassovog modela s ciljem uvođenja eksplanatornih parametara.
$K = 0,40\%$	<p><u>Rješenje</u></p> <p>Cilj: Reparametrizirati Bassov model zamjenom parametara p i q parametrima koji imaju eksplanatorne karakteristike</p> <p><u>Parametar oblika s: Omjer između negativne asimptote i udaljenosti između negativne i pozitivne asymptote</u></p> $p = (p + q) \cdot s ; \quad q = (p + q) \cdot (1 - s)$ <p>→ $p > 0$; $q \geq 0$; Vrijednosti parametara s su u intervalu $[0,1]$</p> <p><u>Vrijeme do saturacije usluge Δt_s:</u></p> <p>- Sličnost s logističkim modelom kroz 2 točke</p> <p>- Informacija o vremenu kad nastupa saturacijska razina $B(t, +\Delta t) = \varphi \cdot M$ slijedi iz polaznog izraza za Bassov model</p> $\Delta t = \frac{1}{p + q} \ln \left(1 + \frac{v}{s(1 - v)} \right) \qquad p + q = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(1 + \frac{v}{s(1 - v)} \right)$	

		<p>Poveznica $\Delta t \Leftrightarrow p + q$</p> <p>-Uvrštenjem supstitucija za p i q dobiva se Bassov model s eksplanatornim parametrima</p> $B(t; M, s, v, \Delta t, t_s) = M \frac{1 - \left(1 + \frac{v}{s(1-v)}\right)^{-\frac{t-t_s}{\Delta t}}}{1 + \left(\frac{1}{s} - 1\right) \cdot \left(1 + \frac{v}{s(1-v)}\right)^{-\frac{t-t_s}{\Delta t}}}$
$K = 0,40\%$	Zadatak 4.8	Opišite, ilustrirajte i diskutirajte slučajeve Bassovog modela s eksplanatornim parametrima kada je parametar oblika s teži 0, jednak 0.5 i teži 1.
$K = 0,40\%$		<p><u>Rješenje</u></p> <p>$s \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ Logistički model:</p> $B(t; M, s \rightarrow 0, v, \Delta t, t_s) \rightarrow \frac{M}{1 + \frac{1}{s} \left(\frac{v}{s(1-v)}\right)^{-\frac{t-t_s}{\Delta t}}} = sM \approx L(t; M, a, b)$ <p>$s = 0.5 \Leftrightarrow$ "Prepolovljeni" logistički model:</p> $B(t; M, s = 0.5, v, \Delta t, t_s) = M \frac{1 - \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{-\frac{t-t_s}{\Delta t}}}{1 + \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{-\frac{t-t_s}{\Delta t}}} = \frac{2M}{1 + \left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{-\frac{t-t_s}{\Delta t}}} = M + L(t, 2M, a, b) - M = L(t, 2M, a, b) + M$ <p>$a = \frac{1}{\Delta t} \ln \left(\frac{1+v}{1-v}\right)$; $b = t_s$</p> <p>$s \rightarrow 1 \Leftrightarrow$ Eksponencijalno-saturacijski model:</p> $B(t; M, s = 1, \Delta t, t_s) = M \left(1 - (1-v)^{\frac{t-t_s}{\Delta t}}\right)$
$K = 0,40\%$	Zadatak 4.9	Za uslugu koja je lansirana početkom 2009. godine određeni su parametri: $p = 0.25$, $q = 0.15$, a koncem 2010. je zabilježeno 150 000 korisnika. Izračunajte tržišni kapacitet prema Bassovom modelu.
$K = 0,40\%$		<p><u>Rješenje:</u> [$M = 345\,832$]</p> <p>$t_s = N(2008) = 0 \rightarrow 2008$</p> <p>$p = 0,25$</p> <p>$q = 0,15$</p> <p>$t = N(2010) = 150\,000$</p> <p>$B(t) = ?$</p> $B(t; M, p, q, t_s) = B(t) = M \frac{1 - e^{-(p+q)(t-t_s)}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)(t-t_s)}}$

$$150000 = M \frac{1 - e^{-0,4 \cdot 2}}{1 + 0,6e^{-0,4 \cdot 2}} = M \frac{1 - e^{-0,8}}{1 + 0,6e^{-0,8}} = 345\,831,9$$

Zadatok 4.10

Za uslugu koja je lansirana koncem 2005. godine pretpostavlja se da je koeficijent imitacije dvostruko veći od koeficijenta inovacije, a poznato je da je koncem 2010. zabilježeno 250 000 korisnika. Ukoliko je procijenjen tržišni kapacitet 500 000 korisnika, odredite p i q prema Bassovom modelu.

Rješenje: [p = 0.09242, q = 0.18484]

t₁=2004,5
t=2009,5
N=250 000
M=500 000
q=2p

$$250\,000 = 500\,000 \frac{1 - e^{-(1+2p)(2009,5-2004,5)}}{1 + \frac{2p}{p}e^{-(p+2p)(2009,5-2004,5)}}$$

$$1 = 2 \frac{1 - e^{-15p}}{1 + 2e^{-15p}}$$

$$1 + 2e^{-15p} = 2 - 2e^{-15p}$$

$$4e^{-15p} = 1$$

$$\ln e^{-15p} = \ln \frac{1}{4}$$

$$p = 0,09242$$

$$q = 0,184839$$

Zadatok 4.11

Napišite formulu za Richardsov model, te opišite njegove parametre i svojstva.

Rješenje

Richarsov model ispravlja nedostatak logističkog modela gdje je fiksna položaj točke infleksije l (b , $M/2$). U literaturi se naziva i 4-parametarski logistički model:

$$R(t; M, a, b, c) = \frac{M}{[1 + e^{-a(t-b)}]^c}$$

Parametri:
M - asimptota (ukupni kapacitet tržišta)
a - parametar rasta
b - vremenski pomak
c - parametar oblika koji određuje poziciju točke infleksije
R(t) ima infleksiju za $t = t_i$:

$$t_i = b + \frac{\ln c}{a} \Leftrightarrow R'(t_i) = 0$$

Vertikalna pozicija točke infleksije (t_i , $R(t_i)$):

$$e^{-1} < \frac{R(t_i)}{M} = \left(\frac{c}{1+c}\right)^c < 1$$

→Minimalna vrijednost za $R(t_i)/M$ postiže se za $c \rightarrow \infty$ i ne može biti manja od $e^{-1} \approx 0,368$ (minimalna vertikalna pozicija točke infleksije).
→Za $c = 1$ Richardsov model postaje logistički model, $R(t_i)/M = 0,5$
→Maksimalna vrijednost je bez ograničenja, tj. $R(t)/M \rightarrow 1$ za $c \rightarrow 0$

Zadatok 4.12

Za rast prema Richardsovom modelu poznate su vrijednosti parametara: $a = 1$, $b = 2008$ i $c = 2$. Ukoliko je početkom 2010. zabilježeno 120 000 korisnika, izračunajte tržišni kapacitet.

Rješenje: [M = 224 531]

a=1
b=2008
c=2
t=2009
N(t)=120 000
M=?

$$R(t; M, a, b, c) = \frac{M}{[1 + e^{-a(t-b)}]^c}$$

$$120000 = \frac{M}{[1 + e^{-1(2009-2008)}]^2} \rightarrow 120000 = \frac{M}{1,871094} \rightarrow M = 224531,3$$

Zadatok 4.13

Za rast prema Richardsovom modelu poznate su vrijednosti parametara: $a = 0,8$, $b = 2006$ i tržišni kapacitet $M = 1\,500\,000$. Ukoliko je sredinom 2010. zabilježeno 1 200 000 korisnika, izračunajte vrijednost parametra c .

Rješenje: [c = 3.78]

a=0,8
b=2006
M=1 500 000
t=2009,5
c=?
N(t)=1 200 000

$$1\,200\,00 = \frac{1500000}{1,06081^c} \rightarrow 1,06081^c = 1,25 \rightarrow c = \log_{1,06081} 1,25 = 3,78$$

5 Generalizacija modela rasta

Z-0501	Zadatak 5.1	Napišite izraz za logistički model u diferencijalnom obliku, te opišite njegova svojstva.
R-0501		<p><u>Rješenje</u></p> <p>[označiti koji dio modela u diferencijalnom obliku predstavlja eksponencijalni rast, a koji predstavlja utjecaj asimptote M; koja je vrijednost za dL(t)/dt kad je L(t) =0; čemu se približava vrijednost dL(t)/dt kad se L(t) približava M,...]</p> <p>Logistički model: $L(t; M,a,b)$ Diferencijalni oblik:</p> $\frac{dL(t)}{dt} = aL(t) \cdot \left(1 - \frac{L(t)}{M}\right)$ <p style="text-align: center;">negativni feedback Eksponencijalni rast</p> <p>$if \ L(t) = 0 \ \ then: \ \frac{dL(t)}{dt} \rightarrow 1$</p> <p>$if \ L(t) = M \ \ then: \ \frac{dL(t)}{dt} \rightarrow 0$</p> <p>Općenito: $\frac{d(N(t))}{dt} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t}$</p> <p>Rekurzivn modeli slijede iz modela u diferencijalnom obliku</p> $\frac{dN(t)}{dt} = g(t) \cdot [M - N(t)] \rightarrow N(t + \Delta t)$ $= N(t) + \Delta t \cdot g(t) \cdot [M - N(t)]$ <p style="text-align: center;">IFF $\Delta t \rightarrow 0$</p> $L(t + \Delta t) = L(t) + \Delta t \left[a, \frac{L(t)}{M} \right] (M - N(t))$ <p style="text-align: center;"><i>nedostatak rekurzivnog logističkog modela jest stalno računanje korak po korak!</i></p>
Z-0502	Zadatak 5.2	Napišite izraz za Bassov model u diferencijalnom obliku, te opišite njegova svojstva.
R-0502		<p><u>Rješenje:</u> [diskutirati utjecaj člana $[M - N(t)]$; čemu se približava vrijednost za $dN(t)/dt$ kad se $N(t)$ približava M,...]</p> <p>Diferencijalni oblik:</p> $\frac{dB(t)}{dt} = qB(t) \left(1 - \frac{B(t)}{M}\right) + p(M - B(t))$ <p style="text-align: center;">Efekt imitatora efekt inovatora</p> <p>$if \ B(t) \rightarrow 0 \ \ then \ \frac{dB(t)}{dt} = p \cdot M$</p> <p>$if \ B(t) \rightarrow M \ \ then \ \frac{dB(t)}{dt} = 0$</p>

Z-0503	Zadatak 5.3	Napišite izraz za općeniti oblik modela rasta u diferencijalnom obliku, te opišite njegova svojstva.
R-0503		<p><u>Rješenje:</u> [diskutirati utjecaj člana $[M - N(t)]$; čemu se približava vrijednost za $dN(t)/dt$ kad se $N(t)$ približava M,...]</p> <p>Općenito: $\frac{dN(t)}{dt} = g(t) \cdot [M - N(t)]$ ovaj član je tzv. Dumping faktor-ubija neke drastične promjene</p> <p>$if \ N(t) \rightarrow M \ \ then \ \frac{dN(t)}{dt} = 0$</p>
Z-0504	Zadatak 5.4	Napišite izraz za logistički model / Bassov model / općeniti polinomni model u rekurzivnom obliku, te opišite njegova svojstva.
R-0504		<p><u>Rješenje:</u> [L(t+Δt) = ...; kad L(t+Δt)→M tada L(t+Δt)≈ L(t),...]</p> <p>Logistički model:</p> $L(t + \Delta t) = L(t) + a \cdot \Delta t \frac{L(t)}{M} [M - N(t)]$ $L(t + \Delta t) = L(t) + \Delta t \left[a, \frac{L(t)}{M} \right] [M - L(t)]$ <p>$if \ L(t + \Delta t) \rightarrow M \ \ then \ L(t + \Delta t) \approx L(t)$</p> $L(t) = \frac{M}{a_1 \Delta t}$ <p>Bassov model:</p> $B(t + \Delta t) = B(t) + \Delta t \left[p + q \frac{B(t)}{M} \right] [M - B(t)]$ $B(t + \Delta t) = B(t) + \Delta t \left[a_0 + a_1 \frac{B(t)}{M} \right] [M - B(t)]$ <p>$if \ B(t + \Delta t) \rightarrow M \ \ then \ B(t + \Delta t) = B(t)$</p> $B(t) = \frac{M}{(a_0 + a_1) \Delta t}$ <p>Općeniti model:</p> $N(t + \Delta t) = N(t) + \Delta t \left[a_0 + a_1 \frac{N(t)}{M} + a_2 \frac{N(t)}{M} + a_3 \frac{N(t)}{M} + \dots \right] [M - N(t)]$
Z-0505	Zadatak 5.5	Koncem 2009. godine za promatranu uslugu zabilježeno je 150 000 korisnika, a ukupni tržišni kapacitet je 250 000. Ukoliko je parametar rasta $a = 0.4$, izračunajte uporabom logističkog modela u rekurzivnom obliku broj korisnika početkom 2015. godine.
R-0505		<p><u>Rješenje:</u> [N = 234 064]</p> <p>t=2009 L(2009)=150 000 M=250 000 a=0,4</p>

N(2014)?	
$L(t + \Delta t) = L(t) + a \cdot \Delta t \frac{L(t)}{M} [M - N(t)]$	
$L(2009 + 1) = 150\,000 + 0,4 \cdot 1 \frac{150\,000}{250\,000} [250\,000 - 150\,000]$	
$L(2010) = 174\,000$	
$L(2010 + 1)$	
$= 174\,000 + 0,4$	
$\cdot 1 \frac{174\,000}{250\,000} [250\,000 - 174\,000]$	
$L(2011) = 195\,158,4$	
$L(2011 + 1)$	
$= 195\,158,4 + 0,4$	
$\cdot 1 \frac{195\,158,4}{250\,000} [250\,000 - 195\,158,4]$	
$L(2012) = 212\,282,9$	
$L(2012 + 1)$	
$= 212\,282,9 + 0,4$	
$\cdot 1 \frac{212\,282,9}{250\,000} [250\,000 - 212\,282,9]$	
$L(2013) = 225\,093,6$	
$L(2013 + 1)$	
$= 225\,093,6 + 0,4$	
$\cdot 1 \frac{225\,093,6}{250\,000} [250\,000 - 225\,093,6]$	
$L(2014) = 234\,063,6$	

Z = 0,500	Zadatak 55.6	Koncem 2009. godine za promatranu uslugu zabilježeno je 150 000 korisnika, a ukupni tržišni kapacitet je 250 000. Ukoliko je koeficijent inovacije $p = 0,1$, a koeficijent imitacije $q = 0,2$ izračunajte uporabom Bassovog modela u rekurzivnom obliku broj korisnika početkom 2015. godine.
-----------	---------------------	--

B = 0,500	<u>Rješenje:</u> [N = 226 254]
B(2009)=150000	
M=250000	
p=0,1	
q=0,2	
t=2009→Δt=2014-2009=5	
N(2014)=?	
$B(t + \Delta t) = B(t) + \Delta t \left[p + q \frac{B(t)}{M} \right] [M - B(t)]$	
$B(2009 + 1)$	
$= 150\,000$	
$+ 1 \left[0,1 + 0,2 \frac{150\,000}{250\,000} \right] [250\,000$	
$- 150\,000]$	

B(2010) = 172 000	
$B(2010 + 1)$	
$= 172\,000$	
$+ 1 \left[0,1 + 0,2 \frac{172\,000}{250\,000} \right] [250\,000$	
$- 172\,000]$	
$B(2011) = 190\,532,8$	
$B(2011 + 1)$	
$= 190\,532,8$	
$+ 1 \left[0,1 + 0,2 \frac{190\,532,8}{250\,000} \right] [250\,000$	
$- 190\,532,8]$	
$B(2012) = 205\,543,9$	
$B(2012 + 1)$	
$= 205\,543,9$	
$+ 1 \left[0,1 + 0,2 \frac{205\,543,9}{250\,000} \right] [250\,000$	
$- 205\,543,9]$	
$B(2013) = 217\,299,6$	
$B(2013 + 1)$	
$= 217\,299,6$	
$+ 1 \left[0,1 + 0,2 \frac{217\,299,6}{250\,000} \right] [250\,000$	
$- 217\,299,6]$	
$B(2014) = 226\,254,3$	

Z = 0,500	Zadatak 5.7	S pomoću <i>logističkog modela</i> / <i>Bassovog modela</i> u rekurzivnom obliku, odredite za koju vrijednost $L(t)/B(t)$ nastupa infleksija.
-----------	--------------------	---

B = 0,500	<u>Rješenje:</u>
Logistički model:	
$Y = \frac{L(t + \Delta t) - L(t)}{\Delta t} = \left[a_1 \frac{L(t)}{M} \right] \cdot [M - L(t)] = a_1 L(t) - a_1 \frac{L^2(t)}{M}$	
$\frac{\partial Y}{\partial L(t)} = a_1 - a_1 \frac{2L(t)}{M} = 0 \rightarrow L(t) = \frac{M}{2}$	
Bassov model:	
$Y = \frac{B(t + \Delta t) - B(t)}{\Delta t} = a_0 M + (a_1 - a_0) B(t) - a_1 \frac{B^2(t)}{M} \rightarrow$	
$\frac{\partial Y}{\partial B(t)} = a_0 M + a_1 a_0 - a_1 \frac{2B(t)}{M} = 0 \rightarrow B(t) = \frac{M}{2} \left\{ M \frac{a_0}{a_1} - \frac{a_0}{a_1} + 1 \right\}$	

6 Procjena pouzdanosti predviđanja

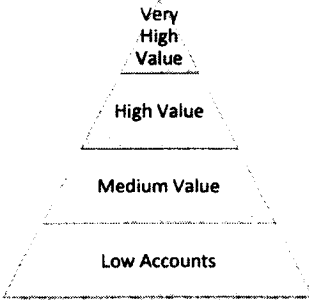
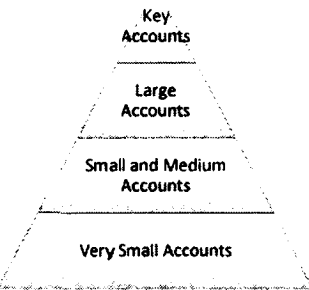
Z = 0601	Zadatak 6.1	Navedite što sve utječe na nesigurnost predviđanja.
R = 0601		<p>Rješenje: [Nacrtati koncept modela rasta prilagođenog za predviđanje; diskutirajte utjecaj pogrešaka na: vremenske nizove, parametre modela {α_i} dobivene putem MNK, eksplanatorne parametre {β_i}; koje su najčešće pogreške]</p> <p>Ulazni podaci u modelu:</p> <p>Y(t) = f (t; {α_i}, {β_i}, {γ_i})</p> <p>{α_i} – skup parametara modela koji su rezultat modeliranja vremenskih nizova, npr. optimalne vrijednosti prema MNK</p> <p>{β_i} – skup eksplanatornih parametara</p> <p>{γ_i} – skup pomoćnih parametara</p> <div> </div> <p>Nesigurnost predviđanja</p> <p>⇨ Posljedica pogrešaka u:</p> <ul style="list-style-type: none"> Izmjerenim podacima vremenskih nizova (t_i, N(t_i)) i na taj način određenim {α_i} Procijenjenim eksplanatornim parametrima {β_i} <p>⇨ Utjecaj neprepoznatih (sezonskih) varijacija u izmjerenim vremenskim nizovima.</p>
Z = 0602	Zadatak 6.2	Objasnite postupak određivanja intervala pouzdanosti s pomoću simulacije.
R = 0602		<p>Rješenje: [I. izvršiti predviđanje na temelju simuliranih pogrešaka na izmjerenoj / procijenjenoj vrijednosti; II. statistička obrada rezultata predviđanja,...]</p> <p>Procjena pouzdanosti predviđanja:</p> <p>Procjena pouzdanosti – simulacija očekivanih pogrešaka na:</p> <ul style="list-style-type: none"> Izmjerenim vrijednostima za N(t_i) Procijenjenim vrijednostima za eksplanatorne parametre {β_i}

		<p>Dva koraka:</p> <p>1. Izvršiti predviđanje na temelju simuliranih pogrešaka na izmjerenoj / procijenjenoj vrijednosti: $(1 - e) \cdot x \leq X \leq (1 + e) \cdot x$</p> <p>x – izmjerena ili procijenjena vrijednost</p> <p>X – slučajna varijabla čije vrijednosti u p% slučajeva leže unutar definiranog intervala</p> <p>e – maksimalno očekivano (dozvoljeno) postotno odstupanje od vrijednosti x.</p> <p>2. Statistička obrada rezultata predviđanja ⇨ procjena intervala predviđanja (prediction interval) Npr. 95% interval predviđanja je interval u kojemu se nalazi 95% individualnih rezultata predviđanja.</p> <p>Primjeri:</p> <ul style="list-style-type: none"> Agencija koja je provela marketinško istraživanje, procijenila je tržišni kapacitet razmatrane telekom usluge na M = 2.5 milijuna korisnika. Statistička obrada rezultata s p=95% vjerojatnošću potvrđuje da je tržišni kapacitet u granicama M ± 10%M. Zbog različitog broja radnih dana u mjesecu, podatke o dinamici ukapćanja većine telekom usluga po mjesecima N(t), t [mjeseci] treba se uzeti s (dozvoljenim) odstupanjem od ± 5% (p=100%).
Z = 0603	Zadatak 6.3	Navedite i opišite najčešće korištene razdiobe slučajne varijable X za potrebe procjene pouzdanosti predviđanja.
R = 0603		<p>Rješenje</p> <p>1) Jednolička razdioba: $X \sim U(a,b)$; $E[X] = (a+b)/2$, $V[X] = (b-a)^2/12$</p> <p>$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{for } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{for } x > a \text{ or } x < b \end{cases}$</p> <div> </div> <p>2) Normalna razdioba: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$; $E[X] = \mu$, $V[X] = \sigma^2$</p> <div> </div>

		<div> 3) Lognormalna razdioba: -asimetrična, vrlo česta u telekomunikacijama (npr. promet) </div> <div> 4) Trokutasta razdioba: – često se koristi u simulacijama kao aproksimacija lognormalne </div>
Z-0604	Zadatak 6.4	<p>Rast broja korisnika neke usluge definiran je logističkim modelom $L(t; M, a, b)$. Temeljem analize tržišta najveća prodaja očekuje se koncem 2012. godine, a ukupni kapacitet tržišta procijenjen je na 2,5 milijuna korisnika $\pm 10\%$. Koncem 2008. zabilježeno je 100 000 korisnika. Predvidite raspon broja korisnika usluge koncem 2011. (t.j. interval predviđanja s pouzdanošću $p = 100\%$).</p>
R-0604		<p><u>Rješenje</u></p> $2\,750\,000 \geq M \geq 2\,250\,000$ $N(2012) = \frac{M}{2} \quad (b = 2012)$ $N(2008) = 100\,000$ $N(2011) = ?$ $L(t; M, a, b) = \frac{M}{1 + e^{-a(t-b)}}$ $\Delta t = ? \rightarrow b = t_s + \Delta t \rightarrow \Delta t = 8\,god$ $u = ?$ $u_1 = \frac{N(2008)}{M_{L1}} = \frac{100\,000}{2\,250\,000} = 0,044444$ $u_1 = \frac{N(2008)}{M_{L2}} = \frac{100\,000}{2\,750\,000} = 0,036364$ $a = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right)$ $a_1 = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u_1} - 1 \right) = \frac{2}{8} \ln \left(\frac{1}{0,044444} - 1 \right) = 0,767013$ $a_2 = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u_2} - 1 \right) = \frac{2}{8} \ln \left(\frac{1}{0,036364} - 1 \right) = 0,819286$ $L_1(2011; M_{L1}, a_1, 2012) = \frac{2\,250\,000}{1 + e^{0,767013}} = 713\,532,5$ $L_2(2011; M_{L2}, a_2, 2012) = \frac{2\,750\,000}{1 + e^{0,819286}} = 841\,266,8$
Z-0605	Zadatak 6.5	<p>Rast broja korisnika neke usluge definiran je logističkim modelom $L(t; M, a, b)$. Temeljem analize tržišta najveća prodaja očekuje se koncem 2012. godine ± 1 godina, a ukupni kapacitet tržišta procijenjen je na 2,5 milijuna korisnika. Koncem 2008. zabilježeno je 100 000 korisnika. Predvidite raspon broja korisnika usluge koncem 2011. (t.j. interval predviđanja s pouzdanošću $p = 100\%$).</p>
R-0605		<p><u>Rješenje</u></p> $L[t; M, a, b]$

		<div> $M = 2\,500\,000$ $N(2008) = 100\,000$ $infleksija \begin{cases} I_L\{2011, 1\,250\,000\} \\ I_0\{2012, 1\,250\,000\} \\ I_M\{2013, 1\,250\,000\} \end{cases}$ $N(2011) = ?$ $b = t_s + \frac{\Delta t}{2} \rightarrow za\ h_L = 2011 \rightarrow \Delta t = 6$ $za\ h_0 = 2012 \rightarrow \Delta t = 8$ $za\ h_M = 2013 \rightarrow \Delta t = 10$ $u = \frac{N(t_s)}{M} = \frac{100\,000}{2\,500\,000} = 0,04$ $a = \frac{2}{\Delta t} \ln \left(\frac{1}{u} - 1 \right)$ $za\ \Delta t_L = 6 \rightarrow a_L = 1,059351$ $za\ \Delta t_0 = 8 \rightarrow a_0 = 0,794513$ $za\ \Delta t_M = 10 \rightarrow a_M = 0,635611$ $I\{2011; M, a_l, b_l\} = ?$ $L_L(2011) = \frac{M}{1 + e^{-a_L(t-b)}} = \frac{M}{2} = \frac{2\,500\,000}{1 + e^{-1,059351 \cdot 6}} = 1\,250\,000$ $L_0(2011) = \frac{M}{1 + e^{-a_0(t-b)}} = \frac{2\,500\,000}{1 + e^{-0,794513 \cdot 8}} = 778\,001,2$ $L_M(2011) = \frac{M}{1 + e^{-a_M(t-b)}} = \frac{M}{2} = \frac{2\,500\,000}{1 + e^{-0,635611 \cdot 10}} = 547\,620,3$ $[547\,620,3 < N(2011) < 1\,250\,000]$ </div>																					
Z-0606	Zadatak 6.6	<p>Rezultati simulacije predviđanja broja korisnika N dani su u tablici. Odredite interval predviđanja s pouzdanošću $p = 90\%$.</p> <table> <tr> <th>Razred od:</th><th>Razred do:</th><th>f(x)</th></tr> <tr> <td>500 000</td><td>600 000</td><td>1%</td></tr> <tr> <td>600 000</td><td>700 000</td><td>3%</td></tr> <tr> <td>700 000</td><td>800 000</td><td>12%</td></tr> <tr> <td>800 000</td><td>900 000</td><td>60%</td></tr> <tr> <td>900 000</td><td>1 000 000</td><td>18%</td></tr> <tr> <td>1 000 000</td><td>1 100 000</td><td>5%</td></tr> </table>	Razred od:	Razred do:	f(x)	500 000	600 000	1%	600 000	700 000	3%	700 000	800 000	12%	800 000	900 000	60%	900 000	1 000 000	18%	1 000 000	1 100 000	5%
Razred od:	Razred do:	f(x)																					
500 000	600 000	1%																					
600 000	700 000	3%																					
700 000	800 000	12%																					
800 000	900 000	60%																					
900 000	1 000 000	18%																					
1 000 000	1 100 000	5%																					
R-0606		<p><u>Rješenje:</u> $[700\,000 < N < 1\,000\,000]$</p> <p>Prva dva razreda i zadnji ne pripadaju u pouzdanost 90% (1%+3%+5%=10%); 100%-10%=90%</p>																					
Z-0607	Zadatak 6.7	<p>Za primjer iz prethodnog zadatka, približno odredite interval predviđanja s pouzdanošću $p = 95\%$. Objasnite i diskutirajte širinu intervala ovisno o zahtijevanoj pouzdanosti p.</p>																					

		<div>BROJ KORISNIKA POKRETNIH TM-a: 6 362 106</div> <div>BROJ KORISNIKA NEPOKRETNIH TM-a:</div> <div>BROJ KORISNIKA INTERNETA: 2 675 249</div> <div>BROJ NEPOKRETNIH ŠIROKOPOJASNIH PRIKLJUČAKA: 1 132 212</div> <div>BROJ PRETPLATNIKA KABELSKE TELEVIZIJE: 151 315</div>
Z 0705	Zadatak 7.5	Navedite i ukratko opišite tržišne segmente za temeljne telekomunikacijske usluge.
R 0705		<div><i>Rješenje</i></div> <div>Rezidencijalno tržište:</div> <div><div>a) Zemljopisne varijable: regija, gradovi po veličini, područje, klima</div><div>b) Demografske: godine starosti, životni vijek obitelji, spol, prihod, zanimanje, obrazovanje, vjera, rasa, generacija, nacionalnost, društveni sloj</div><div>c) Psihografske: životni stil (uzorni, avanturisti, hipiji), osobnost (društveni, autoritarni, ambiciozni....)</div><div>d) Ponašanje: prilike, koristi, status korisnika, stupanj korištenja, stav prema proizvodu, spremnost na kupnju</div></div> <div>Poslovno tržište:</div> <div><div>a) Demografske: industrija, veličina tvrtke, lokacija (koja zemljopisna područja treba opsluživati)</div><div>b) Pristup nabavi: organizacija nabavne funkcije (visokocentralizirana? Decentralizirana?), struktura moći (inženjerski ili financijski dominantne?), priroda postojećih odnosa, opća nabavna politika, kriteriji pri nabavi (kvaliteta, usluga, cijena)</div><div>c) Operativne varijable poslovanja: tehnologija, status potrošača/nepotrošača (veliki, srednji, mali ...), sposobnost potrošača (više ili manje usluga)</div><div>d) Situacijski čimbenici: hitnost, specifične potrebe, veličina narudžbe</div><div>e) Osobne karakteristike: sličnost između kupaca i prodavača (vrijednosni sustav), stajališta prema riziku, privrženost (lojalnost)</div></div> <div>Sezonsko tržište:</div> <div><div>a) Broj vikendica, vezova u marinama, kreveta u hotelima...</div></div>
Z 0706	Zadatak 7.6	Opišite postupak određivanja kapaciteta tržišta za određenu telekomunikacijsku uslugu.
R 0706		<div><i>Rješenje</i></div> <div>Procijeniti postotak stanovništva koji bi mogao koristiti uslugu uzimajući u obzir segmentacijske varijable i njihove vrijednosti.</div>
Z 0707	Zadatak 7.7	Navedite segmentacijske varijable za rezidencijalno tržište.
R 0707		<div><i>Rješenje</i></div> <div>Zemljopisne, psihografske, demografske i ponašanje.</div>

Z 0708	Zadatak 7.8	Navedite segmentacijske varijable za poslovno tržište.
R 0708		<div><i>Rješenje</i></div> <div><div>a) DEMOGRAFSKE: industrija, veličina firme, lokacija firme</div><div>b) PRISTUP NABAVI: organizacija nabavne funkcije, struktura moći, priroda postojećih odnosa, opća nabavna politika, kriteriji pri nabavi</div><div>c) OPERATIVNE VARIJABLE POSLOVANJA: tehnologija, status i sposobnost (proizvodnja/potrošnja)</div><div>d) SITUACIJSKI ČIMBENICI: hitnost, veličina narudžbe, spec. potrebe</div><div>e) OSOBNE KARAKTERISTIKE: sličnost (proizvodnja/potrošnja) stajališta spram tržišta, privrženost</div></div>
Z 0709	Zadatak 7.9	Navedite tržišne segmente telekomunikacijskog tržišta prema vrijednosnoj segmentaciji.
R 0709		<div><i>Rješenje</i></div> <div>POSLOVNI KORISNICI:</div> <div></div> <div>PRIVATNI KORISNICI:</div> <div></div>