

Prijenos električne energije

– auditorne vježbe –

Prijenos eklektične energije

© 1997-2002 - ZVNE.

predavanja: prof. dr. sc. Zdravko Hebel, doc. dr. sc. Ivica Pavić
vježbe: Marko Delimar

Ovaj “radni matreijal” predstavlja kratki zapis dijela gradiva i zadataka koji se obrađuju u sklopu auditornih vježbi predmeta *Prijenos električne energije*. Dio gradiva obuhvaćen je samo zadacima, a dio zadatacima i malim teoretskim uvodom.

Preporučena literatura:

Marija Ožegović, Karlo Ožegović: *Električne energetske mreže I*, FESB Split, 1996.

Srete Nikolovski: *Elektroenergetske mreže I - Zbirka riješenih zadataka*, ETF Osijek, 1998.

Popis oznaka i kratica

α	koeficijent prigušenja vala (propust)	P	potencijalni koeficijent [Vm/As]
β	koeficijent refleksije vala (odbijanje)	Q	jalova snaga [VAr]
β_θ	temp. koeficijent istezanja [1/K]	R	otpor [Ω]
γ	specifična težina [N/m ³] [daN/(m·mm ²)]	r	polumjer [mm]
γ	konstanta prodiranja [1/m]	r'	reducirani polumjer [mm]
φ	kut napona [°] [rad]	S	prividna snaga [VA]
φ	relativan provjes []	t	vrijeme
σ	naprezanje [N/m ²] [daN/mm ²]	U	linijski napon [V]
λ	otpust []	V	fazni napon [V]
ρ	specifični otpor tla [Ω m]	X	reaktancija ($2\pi fL$) [Ω]
η	stupanj korisnosti	Y	admitancija ($G+jB$) [S]
θ	valna konstanta voda (γ)	Z	impedancija ($R+jX$) [Ω]
ϑ	temperatura [K][°C]	Z_c	zrcalna impedancija [Ω]
A	presjek užeta [mm ²]	Z_v	valni otpor [Ω]
a	raspon [m]	0	oznaka nultog sustava (kod sustava simetričnih komponenti)
B	susceptancija ($2\pi fC$) [S]	1	oznaka direktnog sustava (kod sustava simetričnih komponenti)
C	kapacitet [F]	2	oznaka inverznog sustava (kod sustava simetričnih komponenti)
d	promjer [mm]	1	oznaka početka voda
D	udaljenost [m]	2	oznaka kraja voda
E	Youngov modul elastičnosti [N/m ²]	\mathbf{A}	matrica prijenosnih parametara
f	provjes [m]	\mathbf{A}	operator transformacije 012 sustava u ABC (RST, 048)
G	vodljivost [S]	a	operator zakreta za 120° u kompleksnoj ravnini, $a = 1 \angle 120^\circ$
G	masa po duljini vodiča [kg/m] [kg/km]	z^*	konjugirano kompleksni broj
g	težina po duljini vodiča [N/m]		
h	visina [m]		
I	struja [A]		
l	duljina [m]		
L	induktivitet [H]		
P	djelatna snaga [W]		

Simetrične komponente

Danas gotovo svi elektroenergetski sustavi rade trofazno. U normalnom pogonu mreža se sastoji od jednakih elemenata u svim fazama, a opterećenja se također u većini praktičnih slučajeva mogu smatrati simetričnima. Zbog toga prilike na vodovima u normalnom pogonu najčešće određujemo tzv. jednofaznim proračunima, pri čemu pretpostavljamo jednakost struja, napona i impedancija u svim fazama. Sve veličine za jednu fazu jednake su i na dvije preostale faze, zakrenute za 120° , odnosno 240° .

Prilikom kvarova u mreži i značajnijih nesimetričnih opterećenja često dolazi do nesimetričnih stanja u mreži. U nesimetričnom sustavu nije moguće odrediti prilike u mreži promatranjem stanja u samo jednoj fazi. Odrediti prilike u nesimetričnom sustavu pomoću trofazne sheme računski je vrlo zahtjevno.

Rastavljanjem trofaznog nesimetričnog sustava na tri simetrična trofazna sustava, koja se mogu prikazati sa tri jednofazne sheme, može se znatno pojednostavniti određivanje prilika u nesimetričnom sustavu.

C. L. Fortescue: "Method of Symmetrical Coordinates Applied to The Solution of Polyphase Networks," Transactions of AIEE, vol.37, 1918.

Rastav sustava od n fazora na n sustava simetričnih fazora

Za trofazne sustave - rastav na tri simetrična sustava:

Direktni sustav

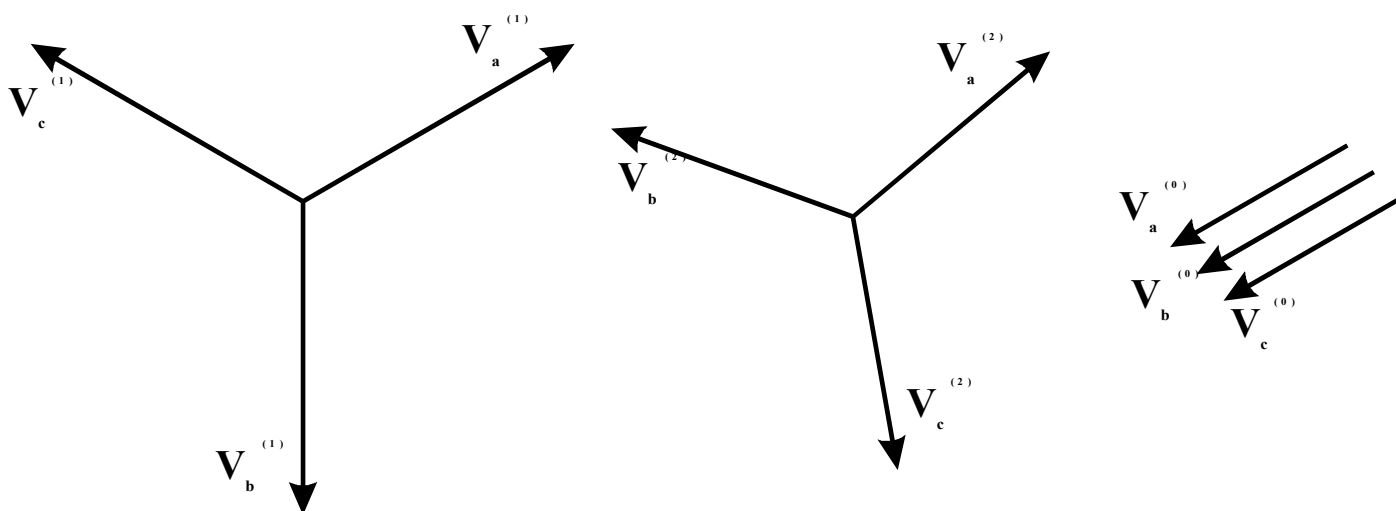
tri fazora, jednaka po iznosu, pomaknuta za 120° ,

Inverzni sustav

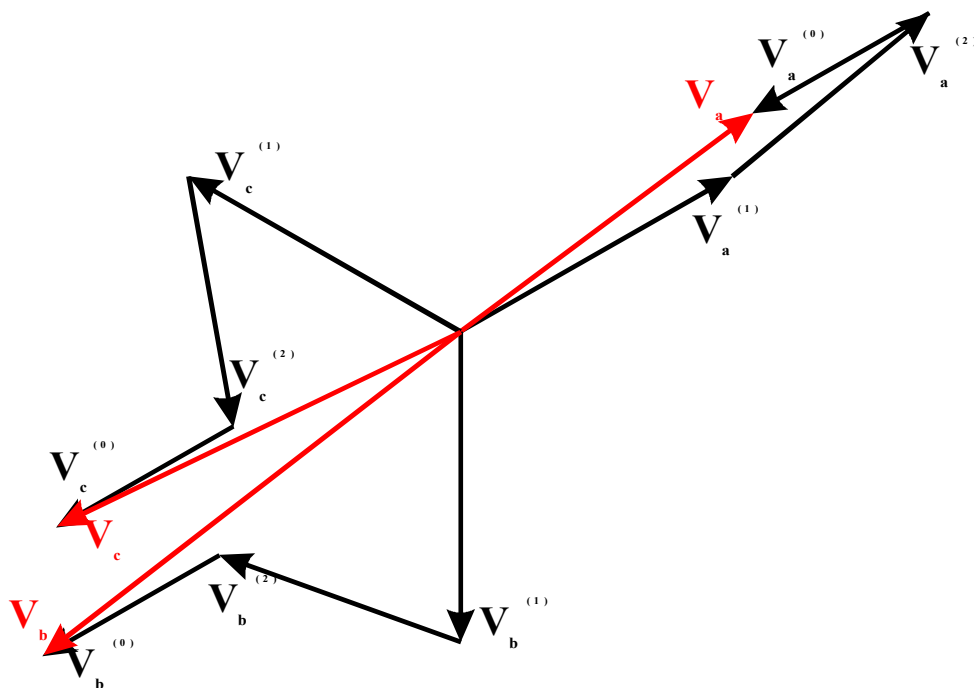
tri fazora, jednaka po iznosu, pomaknuta za -120° ,

Nulti sustav

tri fazora, jednaka po iznosu i kutu



Slika 1: Direktni, inverzni i nulti sustav



Slika 2: Rastav nesimetričnog trofaznog sustava na tri simetrična

Uvijek vrijedi:

$$\begin{aligned} V_a &= V_a^{(0)} + V_a^{(1)} + V_a^{(2)} \\ V_b &= V_b^{(0)} + V_b^{(1)} + V_b^{(2)} \\ V_c &= V_c^{(0)} + V_c^{(1)} + V_c^{(2)} \end{aligned} \quad (1)$$

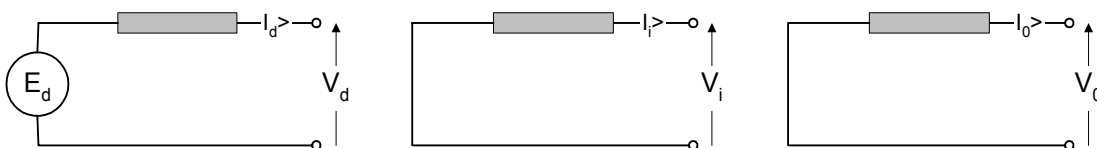
Ako uvedemo $a = 1 \angle 120^\circ$ tada jednadžbu (1) možemo zapisati i u obliku:

$$\begin{aligned} V_a &= V_a^{(0)} + V_a^{(1)} + V_a^{(2)} \\ V_b &= V_a^{(0)} + a^2 V_a^{(1)} + a V_a^{(2)} \\ V_c &= V_a^{(0)} + a V_a^{(1)} + a^2 V_a^{(2)} \end{aligned} \quad (2)$$

iz čega slijede jednadžbe transformacije:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a^{(0)} \\ V_a^{(1)} \\ V_a^{(2)} \end{bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} V_a^{(0)} \\ V_a^{(1)} \\ V_a^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} V_a^{(0)} \\ V_a^{(1)} \\ V_a^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = [\mathbf{A}]^{-1} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} \quad (4)$$



Slika 3: Nadomjesne sheme direktnog, inverznog i nultog sustava

Primjeri

Simetričan slučaj

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} v \\ a^2 v \\ a v \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zamijenjen redoslijed faza

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} v \\ a v \\ a^2 v \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}$$

Jednakost u svim fazama

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} v \\ v \\ v \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Samo jedna faza

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} v/3 \\ v/3 \\ v/3 \end{bmatrix}$$

Jedna faza nula, dvije faze po kutu suprotne

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ -v \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j v / \sqrt{3} \\ j v / \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Dodatni primjeri za diskusiju

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} 2v \\ -v \\ -v \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} 0 \\ v \\ v \end{bmatrix}$$

$$V_{abc} = \begin{bmatrix} 3v \\ -3v \\ -3v \end{bmatrix} \quad V_{012} = \begin{bmatrix} -v \\ 2v \\ 2v \end{bmatrix}$$

Kada je $V_a + V_b + V_c = 0$ onda je uvijek $V_0 = 0$.

Više o simetričnim komponentama i primjerima u M. & K. Ožegović: *Električne energetske mreže I*, poglavlje 2.2: “Sustavi komponentata”.

Mehanički proračun vodiča

- Izračunaj provjese zaleđenog vodiča Al/Fe 360/60 prema točnoj i približnoj formuli za raspone 300 i 1000 metara. Izračunaj postotnu pogrešku približnog proračuna. Izračunaj relativne provjese. Parametri voda: $A = 417.54 \text{ mm}^2$, $d = 26.60 \text{ mm}$, $G_0 = 1471 \text{ kg/km}$, $n = 6$, $\sigma_d = 100 \text{ N/mm}^2$.

Odabrano je $\sigma_{\max} = 80 \text{ N/mm}^2$. Pri tome je zadovoljeno $\sigma_{\max} \leq \sigma_d$.

$$G_l = 0.18\sqrt{d} \text{ (kg/m, ako je } d \text{ u milimetrima)} = 0.928 \text{ kg/m}$$

$$G_z = G_0 + G_l = 1.471 + 0.928 = 2.399 \text{ kg/m}$$

$$\gamma_0 = \frac{G_0}{A} \cdot g \text{ (pri čemu je } g = 9.81 \text{ m/s}^2 \approx 10 \text{ m/s}^2) = 35.23 \times 10^{-3} \text{ N/(m mm}^2\text{)}$$

$$\gamma_z = \frac{G_z}{A} \cdot g = 57.46 \times 10^{-3} \text{ N/(m mm}^2\text{)}$$

	300 m	1000 m
$f_{\text{par}} = \frac{a^2 \cdot \gamma_z}{8 \cdot \sigma_{\max}}$	8.0809 m	89.788 m
$f_{\text{lan}} = \frac{\sigma_{\max}}{\gamma_z} \left[\text{ch} \left(\frac{a \cdot \gamma_z}{2 \cdot \sigma_{\max}} \right) - 1 \right]$	8.0887 m	90.757 m
$\Delta f = \frac{f_{\text{par}} - f_{\text{lan}}}{f_{\text{lan}}}$	-9.669×10^{-4}	-1.068×10^{-2}
$\varphi = \frac{f}{a}$	2.696×10^{-2}	9.076×10^{-2}

- Kolike su duljine zaleđenog vodiča Al/Fe 360/57 ovješnog u rasponima 300 i 1000 metara. Računaj po točnoj i približnoj formuli i prikaži postotnu pogrešku uslijed približnog računa. Odredi i relativan otpust.

	300 m	1000 m
$l_{\text{par}} = a \cdot \left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma_z^2}{24 \cdot \sigma_{\max}^2} \right)$	300.5804 m	1021.498 m
$l_{\text{lan}} = \frac{2 \cdot \sigma_{\max}}{\gamma_z} \cdot \text{sh} \left(\frac{a \cdot \gamma_z}{2 \cdot \sigma_{\max}} \right)$	300.5808 m	1021.637 m
$\Delta l = \frac{l_{\text{par}} - l_{\text{lan}}}{l_{\text{lan}}}$	-1.121×10^{-6}	-1.361×10^{-4}
$\lambda = \frac{l - a}{a}$	1.936×10^{-3}	2.164×10^{-2}

3. Odredi kritični raspon vodiča Al/Fe 360/57.
Koeficijent toplinskog istezanja $\beta_{\vartheta} = 2.3 \times 10^{-5} \text{ } 1/^{\circ}\text{C}$.

Iz jednadžbe stanja

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E} + \beta_{\vartheta} \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) = \frac{a^2}{24} \cdot \left(\frac{\gamma_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{\gamma_2^2}{\sigma_2^2} \right)$$

uz

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_{\max} = 100 \text{ N/mm}^2$$

$$\vartheta_1 = -20^{\circ}\text{C}$$

$$\vartheta_2 = -5^{\circ}\text{C}$$

$$\gamma_1 = \gamma_0$$

$$\gamma_2 = \gamma_z$$

$$a = a_{kr}$$

dobivamo da je

$$a_{kr} = \sigma_{\max} \cdot \sqrt{\frac{360 \cdot \beta_{\vartheta}}{\gamma_z^2 - \gamma_0^2}} = 200 \text{ m}$$

4. Naprezanje na zatezanje vodiča između dva stupa na udaljenosti od 80 metara iznosi $6 \times 10^7 \text{ N/m}^2$. Nakon rekonstrukcije vod je pogrešno postavljen pa je raspon smanjen za 0.4 metra. Koliko iznosi provjes prije i poslije rekonstrukcije (pri istim uvjetima)? Zadano je $E = 8.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\gamma = 3.5 \times 10^4 \text{ N/m}^3$.

Prije rekonstrukcije:

$$f_1 = \frac{\sigma_1}{\gamma} \left[\text{ch} \left(\frac{a_1 \cdot \gamma}{2\sigma_1} \right) \right] = 0.467 \text{ m}$$

Nakon rekonstrukcije treba prvo izračunati novo naprezanje u vodiču.

Općenito vrijedi:

$$l_2 - l_1 = (\vartheta_2 - \vartheta_1) \cdot \beta_{\vartheta} \cdot l_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E} \cdot l_1$$

ako duljinu raspišemo kao:

$$l = 2 \frac{\sigma}{\gamma} \text{sh} \left(\frac{a \cdot \gamma}{2 \cdot \sigma} \right)$$

kako nema razlike u temperaturi vrijedi dobivamo:

$$\sigma_2 \cdot \text{sh} \left(\frac{a_2 \cdot \gamma}{2 \cdot \sigma_2} \right) = \sigma_1 \cdot \text{sh} \left(\frac{a_1 \cdot \gamma}{2 \cdot \sigma_1} \right) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E} \right)$$

iz čega treba numerički potražiti rješenje

$$\sigma_2 = 8504667.53567 \text{ N/m}^2 \approx 8.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Duljina se može približno izraziti i kao:

$$l = a \cdot \left(1 + \frac{a^2 \cdot \gamma^2}{24 \cdot \sigma^2} \right)$$

čime se dobiva “jednostavniji” izraz:

$$a_2 \cdot \left(1 + \frac{a_2^2 \cdot \gamma^2}{24 \cdot \sigma_2^2} \right) = a_1 \cdot \left(1 + \frac{a_1^2 \cdot \gamma^2}{24 \cdot \sigma_1^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{E} \right)$$

i rješenje:

$$\sigma_2 = 8499034.25801 \text{ N/m}^2 \approx 8.5 \times 10^6 \text{ N/m}^2$$

Nakon rekonstrukcije:

$$f_2 = \frac{\sigma_2}{\gamma} \left[\text{ch} \left(\frac{a_2 \cdot \gamma}{2 \cdot \sigma_2} \right) - 1 \right] = 3.26856 \text{ m} \approx 3.27 \text{ m}$$

5. U kojem će stanju nastupiti najveće naprezanje i najveći provjes pri rasponu od 150 m, za užu 26/7, nazivnog presjeka 70/12 mm², stvarnog presjeka 69.9/11.4 mm², promjera 11.7 mm i specifične težine 3.5 × 10⁴ N/m³. Dopušteno naprezanje je 1.1 × 10⁸ N/m², temperaturni koeficijent rastezanja 1.89 × 10⁻⁵ 1/K, modul elastičnosti 7.7 × 10¹⁰ N/m².

Prvo treba izračunati kritični raspon. Pretpostavljamo da je maksimalno naprezanje jednako dopuštenom naprežanju.

$$a_{kr} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{360 \cdot \beta_0}{\gamma_z^2 - \gamma_0^2}}$$

Specifična težina užeta uz dodatni teret (led) iznosi

$$\gamma_z = \gamma_0 + 0.18 \frac{\sqrt{d}}{A} = 1.107 \times 10^5 \text{ N/m}^3$$

pa je kritični raspon 86.4 m.

Pravi raspon je veći od kritičnog pa najveće naprezanje nastaje pri -5°C uz dodatni zimski teret.

Kritična temperatura

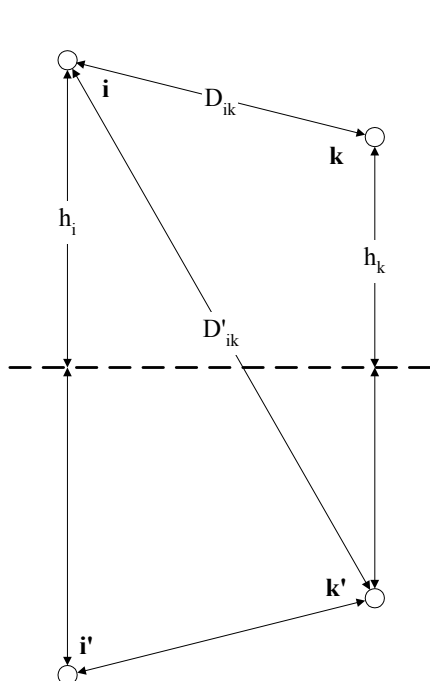
$$t_{kr} = \frac{\sigma}{\beta_0 \cdot E} \left(1 - \frac{\gamma_0}{\gamma_z} \right) + t_z = 46.69 \text{ °C}$$

Kritična temperatura veća je od 40 °C pa najveći provjes nastupa pri -5°C uz dodatni zimski teret.

$$f_z = \frac{\sigma}{\gamma_z} \left[\text{ch} \left(\frac{a \cdot \gamma_z}{2 \cdot \sigma} \right) - 1 \right] = 2.8 \text{ m}$$

Proračun konstanti voda

Zbog struja nulte komponente koje se kod trofaznih vodova zatvaraju kroz zemlju i dozemnu užad, prilikom proračuna konstanti voda treba uzeti u obzir i utjecaj zemlje. Utjecaj zemlje može se uzeti u obzir pomoću Carsonovih eksperimentalnih formula koje pretpostavljaju da povratna nulta struja teče kroz zemlju zamišljenim vodičem paralelnim s vodičima voda koji prolazi ispod površine zemlje na udaljenosti D_e od voda i ima reducirani geometrijski radius 1 metar.



Induktivitet:

$$L_{ii-z} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\ln \frac{2h_i}{r} + 2Q + \ln \frac{r}{r'} \right) \text{ H/m} \quad (1)$$

$$L_{ik-z} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\ln \frac{D'_{ik}}{D_{ik}} + 2Q \right) \text{ H/m} \quad (2)$$

Otpor:

$$R_{ii-z} = R + 2\mu f P \quad \Omega/\text{m} \quad (3)$$

$$R_{ik-z} = 2\mu f P \quad \Omega/\text{m} \quad (4)$$

P, Q – Carsonove konstante

Iz (1) i (2) može se napisati:

$$L_{ii-z} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\ln \frac{2h_i}{r} + \ln \frac{D_e^2}{2h_i} + \ln \frac{r}{r'} \right) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_e^2}{r'} \text{ H/m} \quad (5)$$

$$L_{ik-z} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \left(\ln \frac{D'_{ik}}{D_{ik}} + \ln \frac{D_e^2}{D'_{ik}} \right) = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \ln \frac{D_e^2}{D_{ik}} \text{ H/m} \quad (6)$$

Iz (3) i (4):

$$R_{ii-z} = R + 4.9348 \times 10^{-5} \approx R + 5 \times 10^{-5} \quad \Omega/\text{m} \quad (7)$$

$$R_{ik-z} = 4.9348 \times 10^{-5} \approx 5 \times 10^{-5} \quad \Omega/\text{m} \quad (8)$$

$$D_e^2 = 93 \sqrt{\rho} \quad (9)$$

ρ - specifični otpor tla (zemlja 100 Ωm , šljunak 1000 Ωm)

Iz (5) do (9) slijede:

$$Z_{ii-z} = R + 5 \times 10^{-5} + j \cdot 2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{r'} \quad \Omega/\text{m} \quad (10)$$

$$Z_{ik-z} = 5 \times 10^{-5} + j \cdot 2\pi f \cdot 2 \cdot 10^{-7} \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{D_{ik}} \quad \Omega/\text{m} \quad (11)$$

koje nakon sređivanja poprimaju oblik:

$$Z_{ii-z} = R + 0.05 + j0.0628 \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{r'} \quad \Omega/\text{km} \quad (12)$$

$$Z_{ik-z} = 0.05 + j0.0628 \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{D_{ik}} \quad \Omega/\text{km} \quad (13)$$

Pomoću izraza (12) i (13) “punimo” matricu vodiča. U (14) dan je primjer za vod sa tri fazna vodiča i dva zaštitna užeta:

$$[Z^{vod}] = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ap} & Z_{aq} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bp} & Z_{bq} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cp} & Z_{cq} \\ Z_{pa} & Z_{pb} & Z_{pc} & Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qa} & Z_{qb} & Z_{qc} & Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Izdvajanje užeta

Matrične strujno/naponske jednadžbe imaju oblik:

$$\frac{d}{dx}[V] = [Z_1][I] \quad (15)$$

odnosno:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad (16)$$

Matrica $[Z^{vod}]$ ima onoliko redaka i stupaca koliko vodiča (žica) ima na stupu. Za proračune nam trebaju samo fazni vodiči pa matricu $[Z^{vod}]$ treba transformirati (reducirati) u matricu ekvivalentnih faznih vodiča $[Z^e]$. U daljnjem je tekstu dan primjer za vod sa tri fazna vodiča i dva zaštitna užeta:

Matricu vodiča (14) možemo podijeliti na četiri dijela:

$$[Z^{vod}] = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} & Z_{ap} & Z_{aq} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} & Z_{bp} & Z_{bq} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} & Z_{cp} & Z_{cq} \\ Z_{pa} & Z_{pb} & Z_{pc} & Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qa} & Z_{qb} & Z_{qc} & Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \\ Z_{pa} & Z_{pb} & Z_{pc} \\ Z_{qa} & Z_{qb} & Z_{qc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{ap} & Z_{aq} \\ Z_{bp} & Z_{bq} \\ Z_{cp} & Z_{cq} \\ Z_{pp} & Z_{pq} \\ Z_{qp} & Z_{qq} \end{bmatrix} \quad (17)$$

što je uobičajeno pisati u obliku:

$$[Z^{vod}] = \begin{bmatrix} Z_I & Z_{II} \\ Z_{III} & Z_{IV} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Želimo dobiti takvu matricu ekvivalentnih faznih vodiča $[Z^e]$ da vrijedi:

$$\frac{d}{dx}[V^{abc}] = [Z^e][I^{abc}] \quad (19)$$

Pri tome polazimo od slijedeće pretpostavke:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_p = 0 \\ V_q = 0 \end{bmatrix} = [Z^{vod}] \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ I_p \\ I_q \end{bmatrix} \quad (20)$$

Matričnu jednadžbu (20) možemo razdvojiti na (21) i (22):

$$\frac{d}{dx}[V^{abc}] = [Z_I][I^{abc}] + [Z_{II}][I^{pq}] \quad (21)$$

$$\frac{d}{dx}[0] = [Z_{III}][I^{abc}] + [Z_{IV}][I^{pq}] \quad (22)$$

Iz (22) slijedi da je

$$[I^{pq}] = -[Z_{IV}]^{-1}[Z_{III}][I^{abc}] \quad (23)$$

Kada (23) možemo vratiti u (21) dobivamo:

$$\frac{d}{dx}[V^{abc}] = [Z_I][I^{abc}] - [Z_{II}][Z_{IV}]^{-1}[Z_{III}][I^{abc}] \quad (24)$$

Nakon sređivanja (24) dobivamo

$$\frac{d}{dx} [V^{abc}] = [[Z_I] - [Z_{II}] [Z_{IV}]^{-1} [Z_{III}]] [I^{abc}] \quad (25)$$

Iz (25) slijedi izraz za ekvivalentnu matricu faznih vodiča:

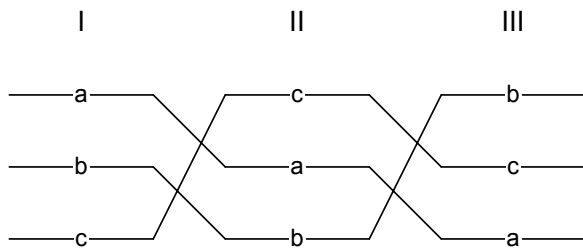
$$[Z^e] = [Z_I] - [Z_{II}] [Z_{IV}]^{-1} [Z_{III}] \quad (26)$$

Napomena:

Kod vodiča u snopu imali bismo još više elemenata u $[Z^{vod}]$, ali obično se u tom slučaju umjesto vodiča u snopu uzima “ekvivalentni” vodič.

Preplet voda

$$\text{Uvedimo oznaku } Z_m = \frac{1}{3} (Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ac}) \quad (27)$$



Iz slike je vidljivo da je:

$$\begin{aligned} Z_{ab}^I &= Z_{ac}^{II} = Z_{bc}^{III} \\ Z_{ac}^I &= Z_{bc}^{II} = Z_{ab}^{III} \\ Z_{bc}^I &= Z_{ab}^{II} = Z_{ac}^{III} \end{aligned} \quad (28)$$

Također vrijedi da je:

$$\begin{aligned} Z_{ab} &= \frac{1}{3} (Z_{ab}^I + Z_{ab}^{II} + Z_{ab}^{III}) \\ Z_{bc} &= \frac{1}{3} (Z_{bc}^I + Z_{bc}^{II} + Z_{bc}^{III}) \\ Z_{ac} &= \frac{1}{3} (Z_{ac}^I + Z_{ac}^{II} + Z_{ac}^{III}) \end{aligned} \quad (29)$$

Iz (28) i (29) slijedi:

$$Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ac} = Z_m \quad (30)$$

Računanje pogonske impedancije

Pretpostavimo da su svi vodovi i sva opterećenja simetrična. Tada možemo pretpostaviti da kroz zemlju i dozemnu užad ne teku struje te jednačba (20) poprima oblik:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_I & Z_{II} \\ Z_{III} & Z_{IV} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Iz (31) slijedi

$$\frac{d}{dx} [V^{abc}] = [Z_I] [I^{abc}] \quad (32)$$

Napomena:

Usporedimo jednačbe (32) i (19). Jednačba (32) vrijedi samo u slučaju simetričnog pogona. Jednačba (19) općenita je jednačba nadomjesnih vodiča. Matrica $[Z_I]$ iz (32) i matrica $[Z^e]$ iz (19) nisu jednake. Za simetričan pogonski slučaj ove matrice daju iste rezultate.

Vod je simetriran pa su sve vlastite (33) i međusobne (27) impedancije jednake:

$$Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc} = Z_s \quad (33)$$

Napišimo još jednom jednačbu (32):

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_a \\ a^2 V_a \\ a V_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ a^2 I_a \\ a I_a \end{bmatrix} \quad (34)$$

Iz (34) je vidljivo da je

$$\frac{d}{dx} V_a = Z_s I_a + a^2 Z_m I_a + a Z_m I_a = (Z_s - Z_m) I_a \quad (35)$$

Pa je pogonska impedancija iz (35) jednaka

$$Z_1 = Z_s - Z_m \quad (36)$$

Vratimo se sada korak nazad i napišimo jednačbu (19) za prepleten vod:

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_a \\ a^2 V_a \\ a V_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s^e & Z_m^e & Z_m^e \\ Z_m^e & Z_s^e & Z_m^e \\ Z_m^e & Z_m^e & Z_s^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ a^2 I_a \\ a I_a \end{bmatrix} \quad (37)$$

Iz (37) je vidljivo da je

$$\frac{d}{dx}V_a = Z_s^e I_a + a^2 Z_m^e I_a + a Z_m^e I_a = (Z_s^e - Z_m^e) I_a \quad (38)$$

pa je pogonska impedancija iz (38) jednaka

$$Z_1 = Z_s^e - Z_m^e \quad (39)$$

Napomena:

Pogonska impedancija $Z_1 = Z_s - Z_m = Z_s^e - Z_m^e$, ali $Z_s \neq Z_s^e$ i $Z_m \neq Z_m^e$.

Računanje impedancija nadomjesnih sustava

Polazimo od jednadžbe (19):

$$\frac{d}{dx}[V^{abc}] = [Z^e][I^{abc}]$$

Znamo da vrijede transformacije:

$$[V^{abc}] = [\mathbf{A}][V^{012}] \quad (40)$$

$$[I^{abc}] = [\mathbf{A}][I^{012}] \quad (41)$$

Ako (40) i (41) uvrstimo u (19):

$$\frac{d}{dx}[\mathbf{A}][V^{012}] = [Z^e][\mathbf{A}][I^{012}] \quad (42)$$

Jednadžbu (42) s lijeva pomnožimo s $[\mathbf{A}]^{-1}$ i dobivamo:

$$\frac{d}{dx}[V^{012}] = [\mathbf{A}]^{-1}[Z^e][\mathbf{A}][I^{012}] \quad (43)$$

odnosno

$$\frac{d}{dx}[V^{012}] = [Z^{012}][I^{012}] \quad (44)$$

pri čemu je $[Z^{012}]$ matrica impedancije za simetrične komponente:

$$[Z^{012}] = [\mathbf{A}]^{-1}[Z^e][\mathbf{A}] \quad (45)$$

Matrica impedancije za simetrične komponente za simetričan slučaj:

$$[Z^{012}] = \begin{bmatrix} Z_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (46)$$

U simetričnom je slučaju matricu (46) moguće dobiti i direktnim računanjem:

$$[Z^{012}] = \begin{bmatrix} Z_s + 2Z_m & 0 & 0 \\ 0 & Z_s - Z_m & 0 \\ 0 & 0 & Z_s - Z_m \end{bmatrix} \quad (47)$$

Općenita matrica impedancije za simetrične komponente:

$$[Z^{012}] = \begin{bmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} \\ Z_{10} & Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{20} & Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Iznos izvandijagonalnih članova matrice $[Z^{012}]$ ovisi o izvedbi voda i o tome da li je vod simetriran ili ne.

Faktor nesimetrije definiran je izrazom:

$$N = \left| \frac{Z_{01}}{Z_{00}} \right| \quad (49)$$

Napomena:

Ako je vod prepleten, kod računanja matrice impedancije za simetrične komponente simetriranje se može napraviti na matrici $[Z^{vod}]$ (tzv. simetriranje prije blok - transformacije) ili kasnije na matrici $[Z^e]$ (tzv. simetriranje nakon blok - transformacije).

Kapacitet

Matrica P je matrica potencijalnih koeficijenata. Ona je realna kvadratna i simetrična, a članovi joj ovise samo o geometriji voda u ravnini presjeka.

$$[V] = [P][Q]$$

$$[Q] = [P]^{-1}[V]$$

$$[Q] = [K][V]$$

$$[K] = [P]^{-1}$$

Članovi P – matrice:

$$P_{ii} = 18 \times 10^9 \ln \frac{2h_i}{r} \text{ Vm/As}$$

$$P_{ik} = 18 \times 10^9 \ln \frac{D_{ik}'}{D_{ik}} \text{ Vm/As}$$

Matrica K je matrica kapacitivnih koeficijenata. Množenjem matrice K s ω dobit ćemo matricu kapacitivnih susceptancija B:

$$[B] = \omega \cdot [K]$$

6. Izračunaj parametre 220 kV voda Al/Č 360/60 +2×Fe50 za simetrične komponente za slučajeve:

a) vod je neprepleten,

b) vod je prepleten.

Specifični otpor tla iznosi $\rho = 1000 \Omega\text{m}$.

Podaci voda:

Broj	Vodič	Otpor (Ω/km)	Promjer (mm)	x (m)	y (m)
1	a	0.08	26	-6.6	12.5
2	b	0.08	26	0	12.5
3	c	0.08	26	6.6	12.5
4	p	3.00	9	-4.6	18.8
5	q	3.00	9	4.6	18.8

Matrica $[Z^{vod}]$:

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 0.08 + 0.05 + j \cdot 0.0628 \ln \left(\frac{93\sqrt{1000}}{0.010124} \right) = 0.13 + j0.790 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{44} = Z_{55} = 3.0 + 0.05 + j \cdot 0.0628 \ln \left(\frac{93\sqrt{1000}}{0.0035046} \right) = 3.05 + j0.857 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_{23} = Z_{32} = 0.05 + j \cdot 0.0628 \ln \left(\frac{93\sqrt{1000}}{6.6} \right) = 0.05 + j0.383 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{13} = Z_{31} = 0.05 + j \cdot 0.0628 \ln \left(\frac{93\sqrt{1000}}{13.2} \right) = 0.05 + j0.3395 \Omega/\text{km}$$

...

Matrica $[P]$:

$$P_{11} = P_{22} = P_{33} = 18 \times 10^6 \ln \left(\frac{2 \cdot 12.5}{0.013} \right) = 1.3611 \times 10^8 \text{ (Vm/As)}$$

$$P_{44} = P_{55} = 18 \times 10^6 \ln \left(\frac{2 \cdot 18.8}{0.0045} \right) = 1.62552 \times 10^8 \text{ (Vm/As)}$$

$$P_{12} = 18 \times 10^6 \ln \left(\frac{25.8565}{6.6} \right) = 2.4579 \times 10^7 \text{ (Vm/As)}$$

$$P_{13} = 18 \times 10^6 \ln \left(\frac{28.2708}{13.2} \right) = 1.3709 \times 10^7 \text{ (Vm/As)}$$

...

a. Nепrepleten vod

Matrica impedancije vodiča (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.13+0.790j & 0.05+0.383j & 0.05+0.34j & 0.05+0.383j & 0.05+0.341j \\ 0.05+0.383j & 0.13+0.790j & 0.05+0.383j & 0.05+0.373j & 0.05+0.373j \\ 0.05+0.340j & 0.05+0.383j & 0.13+0.790j & 0.05+0.341j & 0.05+0.383j \\ 0.05+0.383j & 0.05+0.373j & 0.05+0.341j & 3.05+0.857j & 0.05+0.362j \\ 0.05+0.341j & 0.05+0.373j & 0.05+0.383j & 0.05+0.362j & 3.05+0.857j \end{bmatrix}$$

Matrica impedancije nadomjesnih faznih vodiča (Ω/km)

$$\begin{pmatrix} 0.194+0.741j & 0.116+0.333j & 0.114+0.291j \\ 0.116+0.333j & 0.198+0.739j & 0.116+0.333j \\ 0.114+0.291j & 0.116+0.333j & 0.194+0.741j \end{pmatrix}$$

Matrica impedancije faznih vodiča za simetrične komponente (Ω/km)

$$\begin{pmatrix} 0.426+1.379j & 0.011-0.008j & -0.013-0.005j \\ -0.013-0.005j & 0.080+0.421j & -0.025+0.015j \\ 0.011-0.008j & 0.025+0.014j & 0.080+0.421j \end{pmatrix}$$

Matrica potencijalnih koeficijenata vodiča (Vm/As) $\times 10^7$

$$\begin{bmatrix} 13.611 & 2.458 & 1.371 & 2.803 & 1.711 \\ 2.458 & 13.611 & 2.458 & 2.520 & 2.520 \\ 1.371 & 2.458 & 13.611 & 1.711 & 2.803 \\ 2.803 & 2.520 & 1.711 & 16.255 & 2.586 \\ 1.711 & 2.520 & 2.803 & 2.586 & 16.255 \end{bmatrix}$$

Matrica potencijalnih koeficijenata nadomjesnih faznih vodiča (Vm/As) $\times 10^7$

$$\begin{pmatrix} 13.027 & 1.854 & 0.874 \\ 1.854 & 12.937 & 1.854 \\ 0.874 & 1.854 & 13.027 \end{pmatrix}$$

Matrica kapacitivnih susceptancija nadomjesnih faznih vodiča ($\mu\text{S}/\text{km}$)

$$\begin{pmatrix} 2.467 & -0.337 & -0.118 \\ -0.337 & 2.525 & -0.337 \\ -0.118 & -0.337 & 2.467 \end{pmatrix}$$

Matrica kapacitivnih susceptancija za simetrične komponente ($\mu\text{S}/\text{km}$)

$$\begin{pmatrix} 1.959 & 0.027+0.047j & 0.027-0.047j \\ 0.027-0.047j & 2.75 & -0.083-0.143j \\ 0.027+0.047j & -0.083+0.143j & 2.75 \end{pmatrix}$$

b. Prepleten vod

Matrica impedancije vodiča (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.13 + 0.790j & 0.05 + 0.369j & 0.05 + 0.369j & 0.05 + 0.376j & 0.05 + 0.362j \\ 0.05 + 0.369j & 0.13 + 0.790j & 0.05 + 0.369j & 0.05 + 0.376j & 0.05 + 0.362j \\ 0.05 + 0.369j & 0.05 + 0.369j & 0.13 + 0.790j & 0.05 + 0.376j & 0.05 + 0.362j \\ 0.05 + 0.376j & 0.05 + 0.376j & 0.05 + 0.376j & 3.05 + 0.857j & 0.05 + 0.362j \\ 0.05 + 0.362j & 0.05 + 0.362j & 0.05 + 0.362j & 0.05 + 0.362j & 3.05 + 0.857j \end{bmatrix}$$

Matrica impedancije nadomjesnih faznih vodiča (Ω/km)

$$\begin{pmatrix} 0.197 + 0.740j & 0.117 + 0.319j & 0.117 + 0.319j \\ 0.117 + 0.319j & 0.197 + 0.740j & 0.117 + 0.319j \\ 0.117 + 0.319j & 0.117 + 0.319j & 0.197 + 0.740j \end{pmatrix}$$

Matrica impedancije faznih vodiča za simetrične komponente (Ω/km)

$$\begin{pmatrix} 0.430 + 1.377j & 0 & 0 \\ 0 & 0.080 + 0.421j & 0 \\ 0 & 0 & 0.080 + 0.421j \end{pmatrix}$$

Matrica potencijalnih koeficijenata vodiča ($\text{Vm/As}) \times 10^7$

$$\begin{bmatrix} 13.611 & 2.096 & 2.096 & 2.345 & 2.345 \\ 2.096 & 13.611 & 2.096 & 2.345 & 2.345 \\ 2.096 & 2.096 & 13.611 & 2.345 & 2.345 \\ 2.345 & 2.345 & 2.345 & 16.255 & 2.586 \\ 2.345 & 2.345 & 2.345 & 2.586 & 16.255 \end{bmatrix}$$

Matrica potencijalnih koeficijenata nadomjesnih faznih vodiča ($\text{Vm/As}) \times 10^7$

$$\begin{pmatrix} 13.028 & 1.512 & 1.512 \\ 1.512 & 13.028 & 1.512 \\ 1.512 & 1.512 & 13.028 \end{pmatrix}$$

Matrica kapacitivnih susceptancija nadomjesnih faznih vodiča ($\mu\text{S}/\text{km}$)

$$\begin{pmatrix} 2.471 & -0.257 & -0.257 \\ -0.257 & 2.471 & -0.257 \\ -0.257 & -0.257 & 2.471 \end{pmatrix}$$

Matrica kapacitivnih susceptancija za simetrične komponente ($\mu\text{S}/\text{km}$)

$$\begin{pmatrix} 1.957 & 0 & 0 \\ 0 & 2.728 & 0 \\ 0 & 0 & 2.728 \end{pmatrix}$$

7. Zadana je glava stupa prema slici. Odredi pogonsku impedanciju voda.

Vodič: $1 \times 3 \times 2$ 240/40 Al/Če

$$A_{Al} = 240 \text{ mm}^2$$

$$A_{Če} = 40 \text{ mm}^2$$

$$d_V = 21.7 \text{ mm}$$

$$r' = d_S = 9.11 \text{ mm}$$

$$R_1 = 0.1219 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$D = 380 \text{ mm}$$

Zaštitno užje: 95 Če

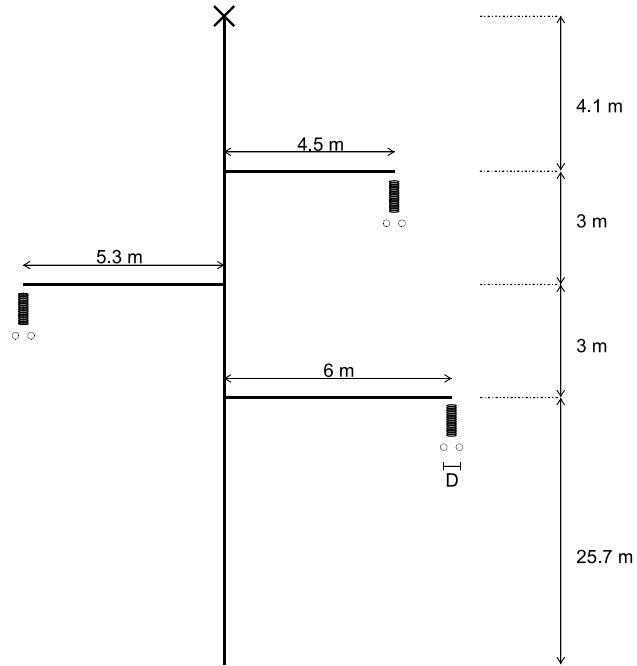
$$r'_Z = 4.74 \text{ mm} \quad (d_Z = 12.5 \text{ mm})$$

$$R_Z = 1.422 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$\rho_Z = 380 \text{ } \Omega\text{m}$$

$$f = 3\% \quad (d = 300\text{-}400 \text{ m})$$

$$f = 2\% \quad (d < 300 \text{ m})$$



$$h_1 = L_{iz} + f + h_s$$

$$y_1 = h_s + 0.3f = h_1 - L_{iz} - 0.7f$$

$$\text{za vodič: } L_{iz} + 0.7f = 9.9 \text{ m}$$

$$\text{za zaštitno užje: } 0.7f_Z = 8.5 \text{ m}$$

$$y_1 = 15.8 \text{ m}$$

$$y_2 = 18.8 \text{ m}$$

$$y_3 = 21.8 \text{ m}$$

$$y_4 = 27.3 \text{ m}$$

$$D_S = \sqrt[3]{d_S \cdot D} = 58.84 \text{ mm}$$

$$D_{12} = 11.69 \text{ m} \quad D_{13} = 6.18 \text{ m} \quad D_{14} = 12.97 \text{ m}$$

$$D_{23} = 10.25 \text{ m} \quad D_{24} = 10.02 \text{ m} \quad D_{34} = 7.106 \text{ m}$$

$$Z_{11} = \frac{R_1}{2} + 0.05 + j0.0628 \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{D_S}$$

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = 0.11095 + j0.649 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{44} = R_z + 0.05 + j0.0628 \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{r'_Z}$$

$$Z_{44} = 1.472 + j0.8073 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{12} = 0.05 + j0.0628 \ln \frac{93\sqrt{\rho}}{D_{12}}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = 0.05 + j0.3168 \text{ } \Omega/\text{km}$$

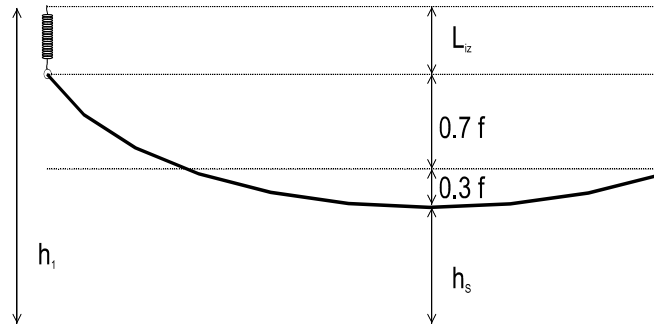
$$Z_{13} = Z_{31} = 0.05 + j0.3568 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{14} = Z_{41} = 0.05 + j0.3102 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{23} = Z_{32} = 0.05 + j0.325 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{24} = Z_{42} = 0.05 + j0.32064 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_{34} = Z_{43} = 0.05 + j0.348 \text{ } \Omega/\text{km}$$



Direktno računanje pogonske impedancije

a. I način - po formuli (36)

$$Z_1 = Z_s - Z_m$$

$$[Z^{vod}] = \begin{bmatrix} 0.111 + j0.649 & 0.05 + j0.317 & 0.05 + j0.357 & 0.05 + j0.310 \\ & 0.111 + j0.649 & 0.05 + j0.325 & 0.05 + j0.326 \\ & & 0.111 + j0.649 & 0.05 + j0.348 \\ & & & 1.472 + j0.807 \end{bmatrix}$$

$$Z_s = 0.111 + j0.649 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_m = \frac{1}{3}(Z_{12} + Z_{23} + Z_{13}) = \frac{1}{3}(0.05 + j0.317 + 0.05 + j0.357 + 0.05 + j0.325)$$

$$Z_m = 0.05 + j0.333 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$Z_1 = Z_s - Z_m = 0.111 + j0.649 - 0.05 - j0.3339 = 0.0610 + j0.3160 \text{ } \Omega/\text{km}$$

b. II način - po formuli (39)

$$Z_1 = Z_s^e - Z_m^e$$

$$[Z^e] = [Z^I] - [Z^{II}][Z^{IV}]^{-1}[Z^{III}]$$

$$[Z^e] = \begin{bmatrix} 0.1510 + j0.6060 & 0.0924 + j0.2722 & 0.0956 + j0.3096 \\ & 0.1559 + j0.6023 & 0.0983 + j0.2756 \\ & & 0.1630 + j0.5969 \end{bmatrix}$$

$$Z_s^e = \frac{1}{3}(Z_{11}^e + Z_{22}^e + Z_{33}^e)$$

$$Z_s^e = \frac{1}{3}(0.1510 + j0.606 + 0.1559 + j0.6023 + 0.1630 + j0.5969) = 0.1566 + j0.6017$$

$$Z_m^e = \frac{1}{3}(Z_{12}^e + Z_{23}^e + Z_{13}^e)$$

$$Z_m^e = \frac{1}{3}(0.0924 + j0.2722 + 0.0956 + j0.3096 + 0.0983 + j0.2756) = 0.0954 + j0.2858$$

$$Z_1 = Z_s^e - Z_m^e = 0.1566 + j0.6017 - 0.0954 - j0.2858 = 0.0612 + j0.3159 \text{ } \Omega/\text{km}$$

Možemo izračunati i impedanciju nultog sustava:

$$Z_0 = Z_s^e + 2Z_m^e =$$

$$Z_0 = \frac{1}{3}(Z_{11}^e + Z_{22}^e + Z_{33}^e) + \frac{2}{3}(Z_{12}^e + Z_{23}^e + Z_{13}^e)$$

$$Z_0 = Z_s^e + 2Z_m^e = 0.1566 + j0.6017 + 2 \cdot (0.0954 + j0.2858) = 0.3475 + j1.1733$$

Računanje impedancija nadomjesnih sustava

a. Neprepleten vod

$$[Z^{vod}] = \begin{bmatrix} 0.11095 + j0.649 & 0.05 + j0.3168 & 0.05 + j0.3568 & 0.05 + j0.3102 \\ & 0.11095 + j0.649 & 0.05 + j0.325 & 0.05 + j0.3264 \\ & & 0.11095 + j0.649 & 0.05 + j0.348 \\ & & & 1.472 + j0.8073 \end{bmatrix}$$

$$[Z^e] = [Z^I] - [Z^{II}][Z^{IV}]^{-1}[Z^{III}]$$

$$[Z^e] = \begin{bmatrix} 0.1510 + j0.6060 & 0.0924 + j0.2722 & 0.0956 + j0.3096 \\ & 0.1559 + j0.6023 & 0.0983 + j0.2756 \\ & & 0.1630 + j0.5969 \end{bmatrix}$$

$$[Z^{012}] = [A]^{-1}[Z^e][A]$$

$$[Z^{012}] = \begin{bmatrix} 0.3475 + j1.1733 & -0.0135 + j0.0102 & 0.0050 + j0.0042 \\ 0.0050 + j0.0042 & 0.0612 + j0.3159 & 0.0233 - j0.0079 \\ -0.0135 + j0.0102 & -0.0231 - j0.0082 & 0.0612 + j0.3159 \end{bmatrix}$$

b. Prepleten vod

$$[Z^{vod}] = \begin{bmatrix} 0.111 + j0.649 & 0.050 + j0.333 & 0.050 + j0.333 & 0.050 + j0.328 \\ & 0.111 + j0.649 & 0.050 + j0.333 & 0.050 + j0.328 \\ & & 0.111 + j0.649 & 0.050 + j0.328 \\ & & & 1.472 + j0.807 \end{bmatrix}$$

$$[Z^e] = [Z^I] - [Z^{II}][Z^{IV}]^{-1}[Z^{III}]$$

$$[Z^e] = \begin{bmatrix} 0.1565 + j0.6018 & 0.0955 + j0.2858 & 0.0955 + j0.2858 \\ & 0.1565 + j0.6018 & 0.0955 + j0.2858 \\ & & 0.1565 + j0.6018 \end{bmatrix}$$

$$[Z^{012}] = [A]^{-1}[Z^e][A]$$

$$[Z^{012}] = \begin{bmatrix} 0.3475 + j1.1733 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0610 + j0.3160 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0610 + j0.3160 \end{bmatrix}$$

8. Zadan je vod prema slici 1234567. $\rho_Z = 500 \Omega\text{m}$. Odredi matricu $[Z^{012}]$.

broj	vodič	$R_1 (\Omega/\text{km})$	$d_V(\text{mm})$	$x (\text{m})$	$y (\text{m})$
1	a	0.0802	26.2	4.5	27.4
2	b	0.0802	26.2	6.5	21.4
3	c	0.0802	26.2	5.0	15.4
4	a	0.0802	26.2	-4.5	27.4
5	b	0.0802	26.2	-6.5	21.4
6	c	0.0802	26.2	-5.0	15.4
7	p	0.7426	13.86	0	36.4

$$Z_{12} = R_1 + 0.05 + j0.0628 \cdot \ln \left(\frac{93\sqrt{\rho}}{D_{11}} \right)$$

$$Z_{12} = 0.05 + j0.0628 \cdot \ln \left(\frac{93\sqrt{\rho}}{D_{12}} \right)$$

$$D_{11} = D_{22} = D_{33} = D_{44} = D_{55} = D_{66} = r' = 0.7788 \times 11.3 = 8.8 \text{ mm}$$

$$D_{77} = 0.7788 \times r_Z = 0.7788 \times 6.93 = 5.4 \text{ mm}$$

$$Z_{11} = Z_{22} = Z_{33} = Z_{44} = Z_{55} = Z_{66} = 0.13 + j0.76 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{77} = 0.79 + j0.81 \Omega/\text{km}$$

$$D_{12} = D_{21} = D_{45} = D_{54} = 6.32 \text{ m}$$

$$D_{13} = D_{31} = D_{46} = D_{64} = 12.01 \text{ m}$$

$$D_{14} = D_{41} = 9 \text{ m}$$

$$D_{15} = D_{51} = D_{24} = D_{42} = 12.53 \text{ m}$$

$$D_{16} = D_{61} = D_{34} = D_{43} = 15.31 \text{ m}$$

$$D_{23} = D_{32} = D_{56} = D_{65} = 6.18 \text{ m}$$

$$D_{25} = D_{52} = 13 \text{ m}$$

$$D_{26} = D_{62} = D_{35} = D_{53} = 12.97 \text{ m}$$

$$D_{36} = D_{63} = 10 \text{ m}$$

$$D_{17} = D_{71} = D_{47} = D_{74} = 10.06 \text{ m}$$

$$D_{27} = D_{72} = D_{57} = D_{75} = 16.35 \text{ m}$$

$$D_{37} = D_{73} = D_{67} = D_{76} = 21.59 \text{ m}$$

$$Z_{12} = Z_{21} = Z_{45} = Z_{54} = 0.05 + j0.36 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{13} = Z_{31} = Z_{46} = Z_{64} = 0.05 + j0.32 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{14} = Z_{41} = 0.05 + j0.34 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{15} = Z_{51} = Z_{24} = Z_{42} = 0.05 + j0.32 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{16} = Z_{61} = Z_{34} = Z_{43} = 0.05 + j0.31 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{23} = Z_{32} = Z_{56} = Z_{65} = 0.05 + j0.36 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{25} = Z_{52} = 0.05 + j0.32 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{26} = Z_{62} = Z_{35} = Z_{53} = 0.05 + j0.32 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{36} = Z_{63} = 0.05 + j0.33 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{17} = Z_{71} = Z_{47} = Z_{74} = 0.05 + j0.33 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{27} = Z_{72} = Z_{57} = Z_{75} = 0.05 + j0.30 \Omega/\text{km}$$

$$Z_{37} = Z_{73} = Z_{67} = Z_{76} = 0.05 + j0.29 \Omega/\text{km}$$

$$\begin{bmatrix} [S] & 0 \\ 0 & [S] \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} [S]^{-1} & 0 \\ 0 & [S]^{-1} \end{bmatrix} \Rightarrow [Z^{012012}] = \begin{bmatrix} [S]^{-1} & 0 \\ 0 & [S]^{-1} \end{bmatrix} \cdot [Z^{abcabc}] \cdot \begin{bmatrix} [S] & 0 \\ 0 & [S] \end{bmatrix}$$

Neprepleten vod

Matrica impedancije vodiča (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.13 + 0.76j & 0.05 + 0.36j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.34j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.31j & 0.05 + 0.33j \\ 0.05 + 0.36j & 0.13 + 0.76j & 0.05 + 0.36j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.3j \\ 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.36j & 0.13 + 0.76j & 0.05 + 0.31j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.33j & 0.05 + 0.29j \\ 0.05 + 0.34j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.31j & 0.13 + 0.76j & 0.05 + 0.36j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.33j \\ 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.36j & 0.13 + 0.76j & 0.05 + 0.36j & 0.05 + 0.3j \\ 0.05 + 0.31j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.33j & 0.05 + 0.32j & 0.05 + 0.36j & 0.13 + 0.76j & 0.05 + 0.29j \\ 0.05 + 0.33j & 0.05 + 0.3j & 0.05 + 0.29j & 0.05 + 0.33j & 0.05 + 0.3j & 0.05 + 0.29j & 0.79 + 0.81j \end{bmatrix}$$

Matrica impedancije nadomjesnih faznih vodiča (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.175+0.672j & 0.090+0.280j & 0.088+0.242j & 0.095+0.252j & 0.090+0.240j & 0.088+0.232j \\ 0.090+0.280j & 0.165+0.686j & 0.083+0.288j & 0.090+0.240j & 0.085+0.246j & 0.083+0.248j \\ 0.088+0.242j & 0.083+0.288j & 0.162+0.690j & 0.088+0.232j & 0.083+0.248j & 0.082+0.260j \\ 0.095+0.252j & 0.090+0.240j & 0.088+0.232j & 0.175+0.672j & 0.090+0.280j & 0.088+0.242j \\ 0.090+0.240j & 0.085+0.246j & 0.083+0.248j & 0.090+0.280j & 0.165+0.686j & 0.083+0.288j \\ 0.088+0.232j & 0.083+0.248j & 0.082+0.260j & 0.088+0.242j & 0.083+0.288j & 0.162+0.690j \end{bmatrix}$$

Matrica impedancije faznih vodiča za simetrične komponente (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.341+1.223j & 0.015-0.016j & -0.004-0.013j & 0.261+0.733j & 0.004-0.006j & 0.007-0.003j \\ -0.004-0.013j & 0.08+0.413j & -0.023+0.013j & 0.007-0.003j & 0.0+0.013j & -0.008+0.008j \\ 0.015-0.016j & 0.023+0.013j & 0.08+0.413j & 0.004-0.006j & 0.009+0.008j & 0.0+0.013j \\ 0.261+0.733j & 0.004-0.006j & 0.007-0.003j & 0.341+1.223j & 0.015-0.016j & -0.004-0.013j \\ 0.007-0.003j & 0.0+0.013j & -0.008+0.008j & -0.004-0.013j & 0.08+0.413j & -0.023+0.013j \\ 0.004-0.006j & 0.009+0.008j & 0.0+0.013j & 0.015-0.016j & 0.023+0.013j & 0.08+0.413j \end{bmatrix}$$

Prepleten vod

Matrica impedancije vodiča (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.13+0.76j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3067j \\ 0.05+0.3313j & 0.13+0.76j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3067j \\ 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.13+0.76j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3067j \\ 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.13+0.76j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3067j \\ 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.13+0.76j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3067j \\ 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.05+0.3313j & 0.13+0.76j & 0.05+0.3067j \\ 0.05+0.3067j & 0.05+0.3067j & 0.05+0.3067j & 0.05+0.3067j & 0.05+0.3067j & 0.05+0.3067j & 0.79+0.81j \end{bmatrix}$$

Matrica impedancije nadomjesnih faznih vodiča (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.167+0.683j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j \\ 0.087+0.254j & 0.167+0.683j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j \\ 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.167+0.683j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j \\ 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.167+0.683j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j \\ 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.167+0.683j & 0.087+0.254j \\ 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.087+0.254j & 0.167+0.683j \end{bmatrix}$$

Matrica impedancije faznih vodiča za simetrične komponente (Ω/km)

$$\begin{bmatrix} 0.341+1.192j & 0 & 0 & 0.261+0.763j & 0 & 0 \\ 0 & 0.08+0.429j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.08+0.429j & 0 & 0 & 0 \\ 0.261+0.763j & 0 & 0 & 0.341+1.192j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08+0.429j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08+0.429j \end{bmatrix}$$

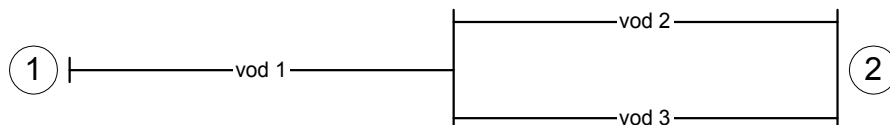
Prijenosne jednačbe i četveropoli u teoriji prijenosa

9. Zadan je prijenosni sustav s dva četveropola u nizu (kaskadi). Prvi četveropol zadan je impedancijom $Z_1 = 18.68 \angle 74.48^\circ \Omega$, a drugi simetričnim π -modelom čija poprečna admitancija iznosi $Y_2 = 0,27 \times 10^{-3} \angle 90^\circ S$, a uzdužna impedancija $Z_2 = 42.755 \angle 79.216^\circ \Omega$. Odredi ekvivalentne parametre tog prijenosnog sustava.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & Z_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + Z_2 \frac{Y_2}{2} & Z_2 \\ \frac{Y_2}{2} (2 + \frac{Z_2 Y_2}{2}) & 1 + Z_2 \frac{Y_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_2 Y_2}{2} + \frac{Z_1 Y_2}{2} (2 + \frac{Z_2 Y_2}{2}) & Z_2 + Z_1 (1 + \frac{Z_2 Y_2}{2}) \\ \frac{Y_2}{2} (2 + \frac{Z_2 Y_2}{2}) & 1 + \frac{Z_2 Y_2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.989483 + j2.42306 \cdot 10^{-3} & 12.9503 + j59.9021 \\ -1.45796 \cdot 10^{-7} + j2.69235 \cdot 10^{-4} & 0.99433 + j1.07997 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

10. Zadan je prijenosni sustav od tri voda prema slici. Parametri vodova su za sva tri voda jednaki, Z – uzdužna impedancija, Y – poprečna admitancija. Odredi nadomjesne A – parametre prijenosnog sustava



$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 + Z \frac{Y}{2} & Z \\ \frac{Y}{2} (2 + Z \frac{Y}{2}) & 1 + Z \frac{Y}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z}{2} Y & \frac{Z}{2} \\ Y (2 + \frac{Y}{2} Z) & 1 + \frac{Z}{2} Y \end{bmatrix} \text{ (jer je } Z \parallel Z = Z/2, \text{ i } Y/2 \parallel Y/2 = Y)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} 1 + 3YZ + \frac{3}{4} Y^2 Z^2 & \frac{3}{2} Z + \frac{3}{4} YZ^2 \\ 3Y + \frac{9}{4} Y^2 Z + \frac{3}{8} Y^3 Z^2 & 1 + \frac{3}{2} YZ + \frac{3}{8} Y^2 Z^2 \end{bmatrix}$$

11. Zadan je trofazni vod: $l = 150 \text{ km}$, $Z_1 = 0.084 + j0.42 \Omega/\text{km}$, $Y_1 = j2.9 \mu S/\text{km}$. Vod je na kraju opterećen snagom $S_2 = 100 \text{ MW}$ kod linijskog napona $U_2 = 220 \text{ kV}$. Odredi napon i struju na početku voda. Odredi gubitke snage duž voda.

- a) približna π – shema c) točna π – shema e) prijenosne jednačbe
b) približna T – shema d) točna T – shema

$$V_2 = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127.017 \text{ kV}, I_2 = \frac{10^5}{220\sqrt{3}} = 262.432 \text{ A}$$

$$Z = Z_1 \cdot l = 12.6 + j63 \Omega, Y = Y_1 \cdot l = 4.35 \cdot 10^{-4} S$$

$$\theta = \gamma \cdot l = \sqrt{Z_1 \cdot Y_1} \cdot l = \sqrt{Z \cdot Y} = 0.016 + j0.166$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = 382.442 - j37.869 \Omega$$

$$\text{a) } \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Z \frac{Y}{2} & Z \\ \frac{Y}{2} (2 + Z \frac{Y}{2}) & 1 + Z \frac{Y}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986298 + j2.7405 \cdot 10^{-3} & 12.6 + j63 \\ -5.96039 \cdot 10^{-3} + j4.3202 \cdot 10^{-4} & 0.986298 + j2.7405 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128583 + j16881 \\ 258.760 + j55.593 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = V_1 \sqrt{3} = 222.713 + j29.239 \text{ kV}$$

$$S_1 = 3V_1 I_1^* = 102.632 - j8.340 \text{ MVA}$$

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 2.632 - j8.340 \text{ MVA}$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + Y \frac{Z}{2} & \frac{Z}{2} (2 + Y \frac{Z}{2}) \\ Y & 1 + Y \frac{Z}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.986298 + j2.7405 \cdot 10^{-3} & 12.4273 + j62.5856 \\ j4.35 \cdot 10^{-4} & 0.986298 + j2.7405 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128538 + j16773 \\ 258.836 + j55.972 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = V_1 \sqrt{3} = 222.634 + j29.051 \text{ kV}$$

$$S_1 = 3V_1 I_1^* = 102.627 - j8.559 \text{ MVA}$$

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 2.627 - j8.559 \text{ MVA}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left(Z \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \right) \left(\frac{Y \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) & Z \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \\ \left(\frac{Y \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) \left[2 + \left(Z \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \right) \left(\frac{Y \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) \right] & 1 + \left(Z \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \right) \left(\frac{Y \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128557 + j16807 \\ 258.794 + j55.716 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = V_1 \sqrt{3} = 222.667 + j29.111 \text{ kV}$$

$$S_1 = 3V_1 I_1^* = 102.618 - j8.439 \text{ MVA}$$

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 2.618 - j8.439 \text{ MVA}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \left(Y \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \right) \left(\frac{Z \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) & \left(\frac{Z \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) \left[2 + \left(Y \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \right) \left(\frac{Z \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) \right] \\ Y \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} & 1 + \left(Y \frac{\text{sh } \Theta}{\Theta} \right) \left(\frac{Z \text{ th } \frac{\Theta}{2}}{2 - \frac{\Theta}{2}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 128557 + j16807 \\ 258.794 + j55.716 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = V_2 \text{ch } \Theta + Z_c I_2 \text{sh } \Theta$$

$$\text{e) } I_1 = I_2 \text{ch } \Theta + \frac{V_2}{Z_c} \text{sh } \Theta$$

	a)	b)	c) d) e)
U_1 [kV]	222.713 + j29.239	222.634 + j29.051	222.667 + j29.111
I_1 [A]	258.760 + j55.593	258.836 + j55.972	258.794 + j55.716
S_1 [MVA]	102.632 - j8.34	102.627 - j8.559	102.618 - j8.439
ΔS [MVA]	2.632 - j8.34	2.627 - j8.559	2.618 - j8.439

12. Zadan je trofazni vod: $l = 150 \text{ km}$, $Z_1 = 0.084 + j0.42 \text{ } \Omega/\text{km}$, $Y_1 = j2.9 \text{ } \mu\text{S}/\text{km}$. Vod je na kraju opterećen snagom $S_2 = 200 \text{ MW}$ kod linijskog napona $U_2 = 220 \text{ kV}$. Odredi napon i struju na početku voda. Odredi gubitke snage duž voda.

Vidi zadatak 11.

	a)	b)	c) d) e)
$U_1 \text{ [kV]}$	228.44 + j57.876	228.283 + j57.499	228.342 + j57.622
$I_1 \text{ [A]}$	517.596 + j56.312	517.672 + j56.691	517.637 + j56.432
$S_1 \text{ [MVA]}$	210.442 + j29.605	210.332 + j29.14	210.358 + j29.344

13. Zadan je vod duljine 600 km : $R_1 = 0.231 \text{ } \Omega/\text{km}$, $X_1 = 0.4 \text{ } \Omega/\text{km}$, $B_1 = 3 \text{ } \mu\text{S}/\text{km}$, $G_1 = 0$. Odredi prilike na početku voda. Zadano je: $V_2 = 63.5 \text{ kV}$, $P_2 = 40 \text{ MW}$, $\cos \varphi_2 = 0.8$.

$$P_2 = 3|V_2||I_2|\cos\varphi_2 \Rightarrow |I_2| = \frac{P_2}{3|V_2|\cos\varphi_2} = 262.467 \text{ A}$$

$$I_2 = |I_2|\angle(\arccos 0.8) = 262.467\angle(-36.87^\circ) \text{ A} = 209.974 - j157.480 \text{ A}$$

$$\Theta = \sqrt{Z_1 Y_1} \cdot l = \sqrt{(R_1 + jX_1) \cdot jB_1} = 0.182843 + j0.682225$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \sqrt{\frac{R_1 + jX_1}{jB_1}} = 379.014 - j101.579 \text{ } \Omega$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch } \Theta & Z_c \text{sh } \Theta \\ \frac{1}{Z_c} \text{sh } \Theta & \text{ch } \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.789182 + j0.115930 & 119.210 + j228.486 \\ -7.16548 \cdot 10^{-5} + j1.67227 \cdot 10^{-3} & 0.789182 + j0.115930 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 111126 + j36564 \\ 179.414 + j6.250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116987\angle(18.213^\circ) \\ 179.523\angle(1.995^\circ) \end{bmatrix}$$

$$U_1 = 202.628 \angle 18.213^\circ \text{ kV} \quad I_1 = 179.523 \angle 1.995^\circ \text{ A}$$

14. Zadan je 220 kV trofazni vod sa parametrima: $R_1 = 74 \text{ } \mu\Omega/\text{m}$, $L_1 = 1.212 \text{ } \mu\text{H}/\text{m}$, $G_1 = 0$, $C_1 = 9.577 \times 10^{-12} \text{ F}/\text{m}$. Duljina voda je 500 km . Odredi gubitke snage duž voda. $U_2 = 220 \text{ kV}$, $S_2 = 90 + j30 \text{ MVA}$, $f = 60 \text{ Hz}$.

$$Z_1 = R_1 + j \cdot 2\pi f \cdot L_1 = 0.074 + j0.456913 \text{ } \Omega/\text{km} \quad Y_1 = j \cdot 2\pi f \cdot C_1 = j3.61044 \text{ } \mu\text{S}/\text{km}$$

$$\Theta = \sqrt{Z_1 Y_1} \cdot l = 0.0518352 + j0.644284 \quad Z_c = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = 356.900 - j28.714 \text{ } \Omega$$

$$V_2 = \frac{U_2}{\sqrt{3}} = 127.017 \text{ kV} \quad I_2 = \left(\frac{S_2}{3V_2} \right)^* = 236.189 - j78.730 \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch } \Theta & Z_c \text{sh } \Theta \\ \frac{1}{Z_c} \text{sh } \Theta & \text{ch } \Theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.800604 + j0.0311475 & 32.0675 + j213.461 \\ -1.92793 \cdot 10^{-5} + j1.68361 \cdot 10^{-3} & 0.800604 + j0.0311475 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 126070 + j51849 \\ 189.097 + j158.172 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = 3V_1 I_1^* = 96.1216 - j30.4091 \text{ MVA}$$

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 6.1216 - j30.4091 \text{ MVA}$$

15. Nacrtaj vektorski dijagram za vod kojem su svi parametri (R , L , G , C) različiti od nule. Vektorski dijagram nacrtaj prema π i T modelu voda za:
- kapacitivno opterećenje (na kraju voda)
 - induktivno opterećenje.
16. Preko jednostrukog voda nazivnog napona 110 kV napaja se potrošač snage $S_2 = 15 + j10$ MVA. Podaci voda: $l = 80$ km, $R = 26.4 \Omega$, $X = 33.9 \Omega$, $B = 219 \cdot 10^{-6}$ S. Odredi snagu na početku voda i napon na kraju ako je zadano $U_1 = 116$ kV.

Matrica prijenosnih parametara (π – model):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 + Z \frac{Y}{2} & Z \\ \frac{Y}{2} (2 + Z \frac{Y}{2}) & 1 + Z \frac{Y}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.996288 + j2.8908 \cdot 10^{-3} & 26.4 + j33.9 \\ -3.16543 \cdot 10^{-7} + j2.18594 \cdot 10^{-4} & 0.996288 + j2.8908 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.996288 + j2.8908 \cdot 10^{-3} & -26.4 - j33.9 \\ 3.16543 \cdot 10^{-7} - j2.18594 \cdot 10^{-4} & 0.996288 + j2.8908 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Vrijedi jednačica: $S_1 = S_2 + |U_2|^2 \frac{Y^*}{2} + \frac{|U_1 - U_2|^2}{Z^*} + |U_1|^2 \frac{Y^*}{2}$ (*)

Kako je U_2 nepoznat, provodimo iterativni postupak s pretpostavljenom ulaznom vrijednošću: $U_2 = U_n = 110$ kV. Koraci:

1° Prema (*) je: $S_1 = 15.5148 + j7.8627$ MVA

$$I_1 = \left(\frac{S_1}{U_1 \sqrt{3}} \right)^* = 77.2196 - j39.1337 \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63358.8 - j1391.0 \\ 77.0673 - j53.4050 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = V_2 \sqrt{3} = 109.741 - j2.409 \text{ kV}$$

2° $S_1 = 15.6433 + j8.0332$ MVA

$$I_1 = \left(\frac{S_1}{U_1 \sqrt{3}} \right)^* = 77.859 - j39.983 \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63313.1 - j1390.3 \\ 77.7068 - j54.2490 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = V_2 \sqrt{3} = 109.662 - j2.408 \text{ kV}$$

3° $S_1 = 15.6574 + j8.0533$ MVA

$$I_1 = \left(\frac{S_1}{U_1 \sqrt{3}} \right)^* = 77.9295 - j40.0826 \text{ A}$$

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63307.9 - j1390.0 \\ 77.7773 - j54.3484 \end{bmatrix}$$

$$U_2 = V_2 \sqrt{3} = 109.652 - j2.408 \text{ kV}$$

Ovo je rješenje dovoljno točno pa prekidamo iterativni postupak.

Rješenje: $S_1 = 15.65 + j8.05$ MVA $U_2 = 109.652 - j2.408$ kV

17. Odredi gubitke snage u nadzemnom trofaznomvodu napona 35 kV i duljine 20 km koji je opterećen snagom 10 MVA pri $\cos\varphi_2 = 0.8$ (ind.). Odredi $\cos\varphi_1$ i stupanj korisnosti η . Zadani su podaci: $R = 6.6 \, \Omega$ i $X = 7.7 \, \Omega$

$$Z = R + jX = 6.6 + j7.7 \, \Omega$$

$$I_2 = \left(\frac{S_2}{U_2 \sqrt{3}} \right)^* = 131.966 - j98.974 \, \text{A}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21843.0 + j362.9 \\ 131.966 - j98.974 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = V_1 \sqrt{3} = 37.8286 + j0.6286 \, \text{kV}$$

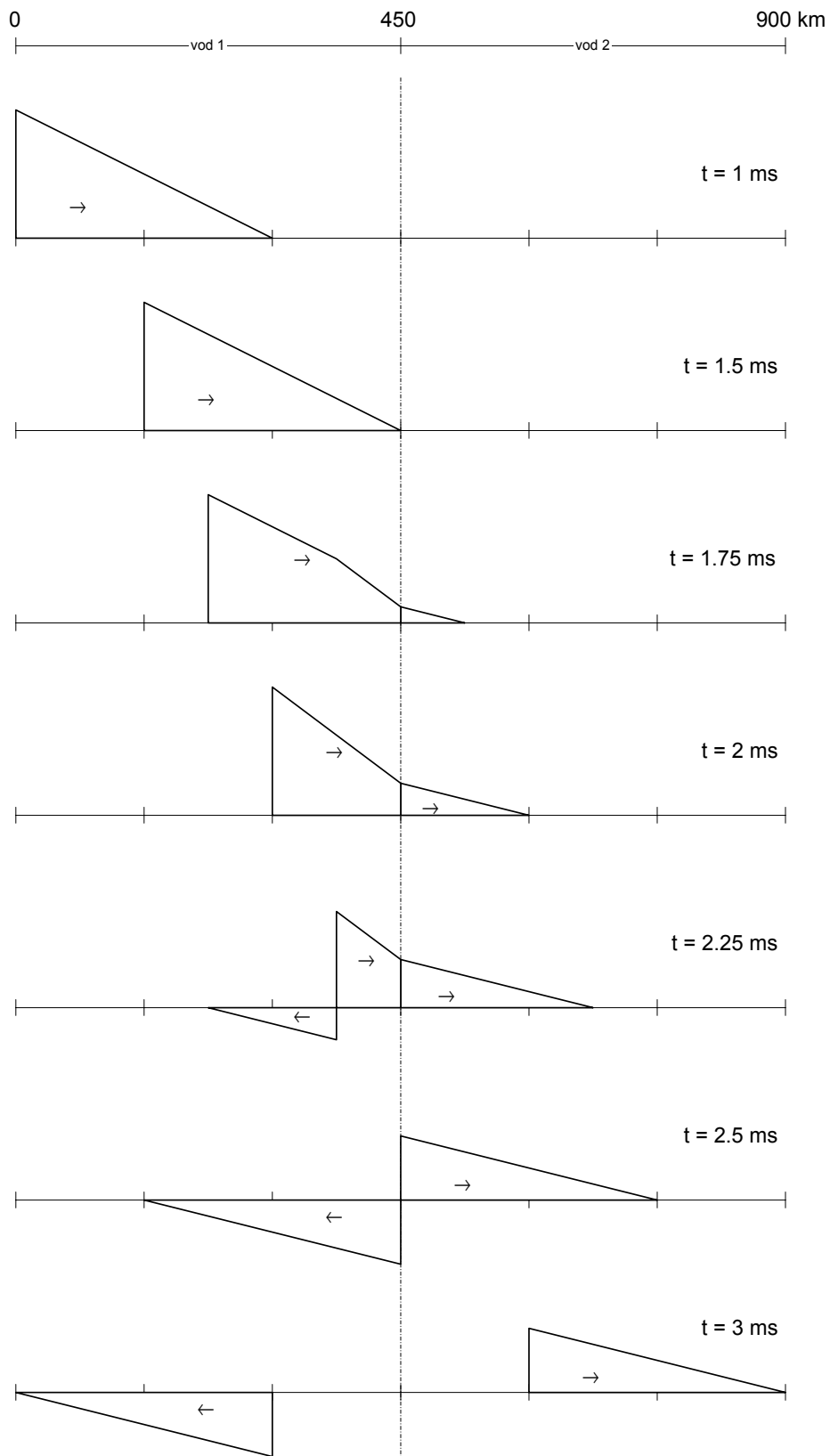
$$S_1 = 3V_1 I_1^* = 8.539 + j6.629 \, \text{MVA}$$

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 538.78 + j628.57 \, \text{kVA}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{P_1}{|S_1|} = 0.790$$

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = 0.937$$

Prijelazne pojave na vodu



Val na idealnom vodu uz $\alpha=0.5$

Putni valovi



propust $\alpha = \frac{2R}{R + Z_v} \rightarrow$ (faktor prigušenja)

odbijanje $\beta = \frac{R - Z_v}{R + Z_v} \rightarrow$ (faktor refleksije)

$\alpha - \beta = 1$

vod na kraju otvoren	$R = \infty$	$\alpha = 2$	$\beta = 1$
vod na kraju kratko spojen	$R = 0$	$\alpha = 0$	$\beta = -1$
vod zaključen otporom	$R = R$		
vod zaključen valnom impedancijom	$R = Z_v$	$\alpha = 1$	$\beta = 0$

18. Za vod bez izobličenja duljine 400 km sa zadanim parametrima $R_1 = 0.08 \text{ } \Omega/\text{km}$, $L_1 = 1.21 \text{ mH/km}$, $C_1 = 9.1783 \text{ nF/km}$ zaključen je otporom $R = 300 \text{ } \Omega$. Odredi napon na kraju voda ako je od trenutka uključenja istosmjernog izvora $U = 100 \text{ kV}$ proteklo:
- 1 ms,
 - 2 ms.

Brzina rasprostiranja vala:

$$c = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} = 300\,072 \text{ km/s}$$

Valna impedancija:

$$Z_v = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = 363.088 \text{ } \Omega$$

Faktor prigušenja:

$$\alpha = \frac{2R}{R + Z_v} = 0.9049$$

Faktor refleksije:

$$\beta = \alpha - 1 = -0.09514$$

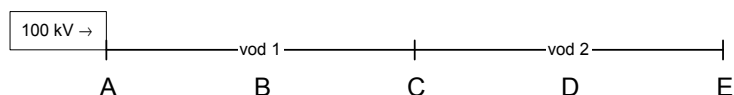
Vrijeme potrebno da val prijeđe cijeli vod: $t_v = \frac{l}{c} = 1.333 \text{ ms}$

a) Za $t = 1 \text{ ms}$ val još ne dopiše do kraja voda pa je:

$$U_2 = 0$$

b) Nakon vremena t_v , a prije vremena $3t_v$, napon na kraju voda je: $U_2 = \alpha U_1 \cdot e^{-\frac{R_1}{L_1} t_v} = 82.85 \text{ kV}$

19. Na početak voda 1 (točka A) narinut je napon 100 kV. Vod 2 je u praznom hodu.
 Vod 1: $R = 0.09 \text{ } \Omega/\text{km}$ $L = 13.2 \times 10^{-4} \text{ H/km}$ $C = 8.42 \times 10^{-9} \text{ F/km}$ $l = 300 \text{ km}$
 Vod 2: $R = 0.08 \text{ } \Omega/\text{km}$ $L = 12.1 \times 10^{-4} \text{ H/km}$ $C = 9.18 \times 10^{-9} \text{ F/km}$ $l = 300 \text{ km}$
 Kod povratnog vala na početku voda 1 (točka A) pretpostavi kratki spoj.
 Odredi napone u točkama B i D kada je od trenutka priključenja izvora 100 kV prošlo:
- 1 ms
 - 2 ms
 - 3 ms



Valna impedancija prvog voda:

$$Z_{v1} = \sqrt{\frac{L_{11}}{C_{11}}} = 395.941 \, \Omega$$

Valna impedancija drugog voda:

$$Z_{v2} = \sqrt{\frac{L_{12}}{C_{12}}} = 363.054 \, \Omega$$

Brzine rasprostiranja:

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{L_{11}C_{11}}} = 299\,956.61 \, \text{km/s}$$

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{L_{12}C_{12}}} = 300\,044.71 \, \text{km/s}$$

Vrijeme za prolazak jednog voda:

$$t_{v1} \approx t_{v2} \approx t_v = \frac{l}{c} = 1 \, \text{ms}$$

a) Napon točke B je prigušeni napon točke A:

$$U_{B1} = U_A \cdot e^{-\frac{R_{11} t_v}{L_{11}^2}} = 96.6484 \, \text{kV}$$

Napon točke D je 0, jer val do nje još nije stigao: $U_{D1} = 0$

b) U $t = 1 \, \text{ms}$ dolazi u točki C do prolaska, odn. refleksije vala. Pritom je: $\alpha_c = \frac{2Z_{v2}}{Z_{v1} + Z_{v2}} = 0.956670$

Prolaz: $U_{Cp} = \alpha_c U_A \cdot e^{-\frac{R_{11} t_v}{L_{11}^2}} = 89.3616 \, \text{kV}$

Refleksija: $U_{Cr} = U_{Cp} \left(1 - \frac{1}{\alpha_c}\right) = -4.0474 \, \text{kV}$

Doprinos reflektiranog vala naponu u točki B:

$$U_{B2} = U_{Cr} \cdot e^{-\frac{R_{11} t_v}{L_{11}^2}} = -3.91176 \, \text{kV}$$

Napon točke B je: $U_B = U_{B1} + U_{B2} = 92.7366 \, \text{kV}$

Napon točke D nastaje uslijed prolaznog vala:

$$U_D = U_{D2} = U_{Cp} \cdot e^{-\frac{R_{12} t_v}{L_{12}^2}} = 86.4558 \, \text{kV}$$

c) U $t = 2 \, \text{ms}$ dolazi u točki A do refleksije, uz $\alpha = 0$, tj. $\beta = -1$:

$$U_{Ar} = U_{Cr} \cdot (-1) \cdot e^{-\frac{R_{11} t_v}{L_{11}^2}} = 3.78066 \, \text{kV}$$

Doprinos te refleksije naponu točke B:

$$U_{B3} = U_{Ar} \cdot e^{-\frac{R_{11} t_v}{L_{11}^2}} = 3.65394 \, \text{kV}$$

Ukupni napon u točki B: $U_B = U_{B1} + U_{B2} + U_{B3} = 96.3905 \, \text{kV}$

U točki E dolazi do refleksije, uz $\alpha = 2$, tj. $\beta = 1$:

$$U_{Er} = U_{Cp} \cdot 1 \cdot e^{-\frac{R_{12} t_v}{L_{12}^2}} = 83.6445 \, \text{kV}$$

Doprinos te refleksije naponu točke D:

$$U_{D3} = U_{Er} \cdot e^{-\frac{R_{12} t_v}{L_{12}^2}} = 80.9246 \, \text{kV}$$

Ukupni napon u točki D: $U_D = U_{D2} + U_{D3} = 167.380 \, \text{kV}$