Branko Mikac

# POUZDANOST TELEKOMUNIKACIJSKIH MREŽA

## OSNOVNI POJMOVI

Promatrajući složeni sustav odnosno mrežu, kakva je na primjer telekomunikacijska, postavlja se pitanje koji se parametri kvalitete za takav profesionalni proizvod mogu definirati. Ne ulazeći u precizne definicije pojedinih parametara, kvaliteta sustava može se definirati sljedećim parametrima odnosno zahtjevima:

*Funkcionalnost* - ovaj trivijalni zahtjev pretpostavlja da sustav treba u ispravnom stanju *obavljati sve specificirane funkcije* definirane u početnoj specifikaciji.

*Pouzdanost* $R(t)$ je vjerojatnost da sustav ispravno radi u periodu vremena $t$ pod definiranim uvjetima okolina. Ovaj parametar kvalitete izražava zahtjev da sustav *radi ispravno bez prekida.*

*Raspoloživost* $A(t)$ je vjerojatnost da sustav ispravno radi u trenutku $t$. Ovaj parametar kvalitete izražava zahtjev da *prekidi rada sustava budu što kraći*.

*Sigurnost* $S(t)$ je vjerojatnost da sustav radi ispravno ili uopće ne radi u periodu vremena $t$ pod definiranim uvjetima okolina. Ovaj parametar kvalitete izražava zahtjev da sustav *radi ispravno ili prekida rad i dolazi u sigurno stanje mirovanja.*

*Pogodnost za održavanje* - izražava stupanj pogodnosti sustava za održavanjem.

*Testabilnost* - izražava lakoću kojom se pojedina svojstva sustava mogu testirati.

*Dijagnostičnost* - izražava *sposobnost otkrivanja i lokalizacije kvarova* u sustavu.

*Otpornost na neispravnosti* - izražava stupanj otpornosti sustava da može nastaviti *korektno obavljati specificirane funkcije i nakon pojave sklopovskih i programskih neispravnosti*.

*Vitalnost* - izražava sposobnost sustava da preživi u prisustvu prisustvu kvarova.

*Cijena* sustava.

### Efikasnost sustava

Efikasnost sustava je vjerojatnost izvršenja zadatka u određenom vremenskom razdoblju $D(t,\tau)$ uz neku cijenu koštanja $C(t,\tau)$.

$$E(t,\tau) = \frac{D(t,\tau)}{C(t,\tau)} = \frac{A(t,\tau)\cdot R(t,\tau)}{C(t,\tau)}$$

gdje su: $A(t,\tau)$ - raspoloživost sustava, $R(t,\tau)$ - pouzdanost sustava i $C(t,\tau)$ cijena sustava.

### Odnos pouzdanosti i cijene

U životnom vijeku telekomunikacijskog sustava, koji obuhvaća faze razvoja, proizvodnje i eksploatacije, mogu se uočiti specifične funkcijske ovisnosti između pouzdanosti sustava i troškova za njeno postizanje.

*Troškovi razvoja $C_r$*

Troškovi razvoja rastu sa zahtjevanom pouzdanošću. Da bi se povećala pouzdanost budućeg proizvoda, u fazi razvoja treba uložiti dodatne napore odnosno sredstva u

- izbor odgovarajućih komponeneta,
- smanjenje složenosti,
- smanjenje stresova u budućem sustavu i
- pojednostavnjenju održavanja.

*Proizvodni troškovi $C_p$*

Veća pouzdanost, koja se u proizvodnji postiže boljom inspekcijom, kontrolom odnosno primjenom pouzdanijih komponeneta, povećava proizvodne troškove. Ako povećanje pouzdanosti proizlazi iz pojednostavljenja odnosno smanjenja složenosti sustava, onda proizvodni troškovi za veću pouzdanost opadaju. Međutim, bitno prevladava ovisnost u kojoj proizvodni troškovi rastu s povećanjem pouzdanosti.

*Postproizvodni troškovi proizvođača $C_g$*

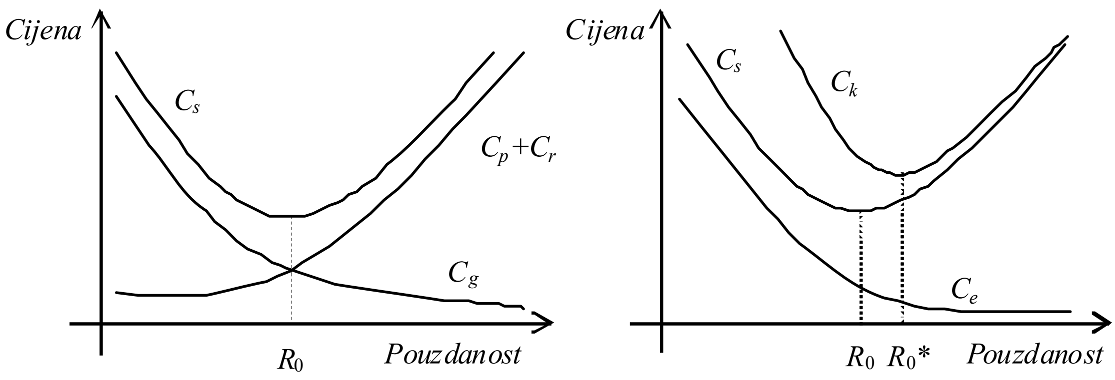
Troškovi proizvođača, koji nastaju zbog nadomještavanja neispravnih jedinica i održavanja u garantnom roku, općenito opadaju s porastom pouzdanosti sustava.

Optimizacija pouzdanosti za proizvođača telekomunikacijskih sustava znači postići optimalnu pouzdanost $R_O$ uz minimalnu cijenu sustava $C_S$ koja je zbroj troškova razvoja $C_r$, proizvodnje $C_p$ i održavanja $C_g$ (sl. 1). Prodajna cijena sustava $C_S$ za proizvođača odgovara nabavnoj cijeni za kupca.

*Troškovi kupca $C_k$*

Troškovi kupca, npr. operatora, obuhvaćaju nabavnu cijenu sustava, troškove održavanja sustava izvan garantnog roka, te troškove gubitaka zbog kvara.

Ukupni troškovi kupca $C_k$ dobiju se ako se nabavnoj cijeni $C_S$ dodaju troškovi održavanja u vijeku eksploatacije sustava $C_e$. Optimalna pouzdanost $R_o^*$ za kupca sustava je, dakle, viša nego za njegovog proizvođača.




*Slika 1 - Optimalne pouzdanosti za proizvođača i kupca telekomunikacijskog sustava*

Troškovi korisnika

Troškovi korisnika nastaju zbog plaćanja usluga te troškovi zbog gubitaka uslijed prekida komunikacije i opadaju s porastom pouzdanosti.

**Mogućnosti povećanja pouzdanosti sustava**

Konstrukcijske mjere

1. Smanjenje složenosti

2. Projektiranje za najgori slučaj

3. Selekcija komponenata

4. Poboljšanje radnih uvjeta

5. Zaštitne mjere

Proizvodne mjere

1. Kontrola kvalitete

2. Umjetno starenje

Mjere vezane uz vođenje i održavanje

1. Redundancija

2. Preventivno održavanje

3. Povratne informacije

## Načini određivanja pouzdanosti

Pouzdanost se određuje na dva načina

1. "a priori"

Pouzdanost sustava se predviđa "unaprijed" tj. u fazi razvoja i projektiranja - prediktivna metoda. Na temelju poznavanja strukture budućeg sustava, te pouzdanosti pojedinih tipova komponenata procjenjuje se pouzdanost cijelog sustava za dane uvjete okoline.

2. "a posteriori"

Pouzdanost sustava se određuje na temelju podataka iz eksploatacije sustava. Na osnovi dotadašnjeg rada sustava ekstrapolira se buduće ponašanje sustava ili se izvrši preinaka na sustavima iste serije koji još nisu proizvedeni.

Procjena pouzdanosti sustava *a priori* na temelju podataka o pouzdanosti komponenata što se tek trebaju ugraditi, predstavlja jedan od osnovnih postupaka za ocjenu prihvatljivosti rješenja.

Ocjena pouzdanosti sustava a posteriori, na temelju podataka iz njegove eksploatacije, može poslužiti kao pokazatelj za poboljšanja sustava odnosno za ocjenu korektnosti prediktivne metode a priori.

Postupci određivanja pouzdanosti su sljedeći:

a) analitički - na temelju strukture i poznavanja procesa nastajanja kvarova određuje se pouzdanost pojedinih elemenata i cijelog sustava (a priori).

b) eksperimentalni - na temelju eksperimenata u laboratoriju odnosno u eksploataciji sustava određuju se pouzdanosti komponeneta odnosno sustava.

c) simulacijski - na temelju statističkih podataka koji se ne mogu pretočiti u analitički model, vrši se simulacija rada i ispada sustava na računalu, i dobivaju podaci koji se tretiraju kao da su proizašli iz stvarnog rada sustava. Ovakav je postupak određivanja pouzdanosti uvijek pogodan ako su funkcije gustoće vjerojatnosti odnosno funkcije intenziteta kvarova nestandardne.

## KVANTITATIVNO ODREĐIVANJE POUZDANOSTI

Neizvjestan događaj pojave kvara može se opisati slučajnom varijablom $T$ što označava *vrijeme života* odnosno vrijeme ispravnog rada. Slučajnu varijablu $T$, općenito, karakteriziraju sljedeće funkcije odnosno parametri:

- funkcija razdiobe $F_T(t)$,
- funkcija gustoće vjerojatnosti $f_T(t)$ i
- srednje vrijeme (očekivanje) $T_1(MTTF)$.

U analizi pojave kvara navedene funkcije imaju sljedeće značenje:

Funkcija razdiobe slučajne varijable $F_T(t)$ ili skraćeno $F(t)$ predstavlja vjerojatnost da će vrijeme života $T$ biti manje od $t$ ili, drukčije rečeno, da će se u intervalu $t$ dogoditi kvar:

$$F(t) = \mathrm{p}\{T \le t\}$$

*Pouzdanost je vjerojatnost da će sustav raditi ispravno u periodu vremena t pod definiranim uvjetima okoline.*

Funkcija pouzdanosti $R(t)$ predstavlja zapravo komplementarnu vjerojatnost funkciji razdiobe slučajne varijable $F(t)$:

$$R(t) = \mathrm{p}\{T > t\} = 1 - F(t)$$

Vrijednost funkcije pouzdanosti $R(t)$ kreće se, dakle, u području od 0 do 1,

$$0 \le R(t) \le 1$$

pri čemu pretpostavljamo da je $R(0) = 1$, tj. da je na početku perioda promatranja sustav uvijek ispravan, odnosno $R(\infty) = 0$, što izražava činjenicu da svaki sustav ima konačno vrijeme života.

Funkcija pouzdanosti ima negativno eksponencijalni oblik.

Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $f_T(t)$ ili skraćeno $f(t)$ definira se kao

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathrm{p}\{t < T \le t + \Delta t\}$$

a može se dobiti iz funkcije razdiobe:

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$$

odnosno funkcija razdiobe se može dobiti kao:

$$F(t) = \int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$$

Karakteristična funkcija koja opisuje pojavu kvarova jeste funkcija *intenziteta kvarova* $\lambda(t)$ (u literaturi poznata i kao *funkcija hazarda* $h(t)$ odnosno $Z(t)$). Za male vrijednosti intervala $\Delta t$, $\lambda(t)\Delta t$ je vjerojatnost da je sustav preživio u intervalu $t$ i da će doći do kvara u intervalu $\Delta t$.

$$\begin{aligned}\lambda(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{p}\left\{\text{kvar u intervalu } (t, t+\Delta t \,/\, \text{radi u intervali } t\right\}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\,\mathrm{p}\left\{t < \mathrm{T} \le t+\Delta t \,/\, T > t\right\}\end{aligned}$$

Vjerojatnost u gornjem izrazu može se odrediti iz općeg izraza

$$\mathrm{p}(a\cap b) = \mathrm{p}(a)\,\mathrm{p}(a/b)$$

odnosno

$$\mathrm{p}(a/b) = \frac{\mathrm{p}(a\cap b)}{\mathrm{p}(b)}$$

Dakle

$$\begin{aligned}\mathrm{p}\left\{t < \mathrm{T} \le t+\Delta t \,/\, T > t\right\} &= \frac{\mathrm{p}\left\{\left(t < \mathrm{T} \le t+\Delta t\right)\cap\left(T > t\right)\right\}}{\mathrm{p}\left\{T > t\right\}} =\\ &= \frac{\mathrm{p}\left\{t < \mathrm{T} \le t+\Delta t\right\}}{\mathrm{p}\left\{T > t\right\}} \approx \frac{f(t)\Delta t}{R(t)}\end{aligned}$$

odnosno

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\frac{f(t)\Delta t}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

Funkcija intenziteta kvarova odredi se na sljedeći način:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

Da bi se odredila funkcija $\lambda(t) = \mathrm{f}\left[R(t)\right]$ i $R(t) = \mathrm{f}^{-1}\left[\lambda(t)\right]$ koristi se izraz

$$-\frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{\mathrm{d}\,F(t)}{\mathrm{d}\,t}\frac{1}{R(t)} = \frac{\mathrm{d}\,R(t)}{\mathrm{d}\,t}\frac{1}{R(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\ln R(t).$$

Dakle

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\ln R(t).$$

odnosno iz

$$\ln R(t) = -\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}\,t$$

dobije se

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}t}$$

*Srednje vrijeme do (prvog) kvara* $T_1$ (*MTTF - mean time to failure*) predstavlja srednju vrijednost ili očekivanje slučajne varijable:

$$T_1 = \int_0^\infty t\,\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty t \frac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.$$

Parcijalnom se integracijom dobije

$$T_1 = \int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t$$

odnosno $T_1$ jednako je površini ispod krivulje pouzdanosti.

U tablici 1 prikazani su odnosi između osnovnih funkcija koje karakteriziraju slučajnu varijablu $T$

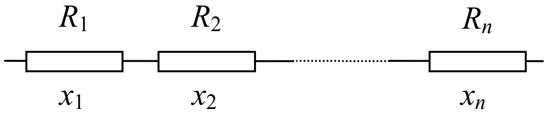
*Tablica 1 - Odnosi između osnovnih funkcija koje opisuju pouzdanost*

| | $F(t)$ | $f(t)$ | $R(t)$ | $\lambda(t)$ |
|---|---|---|---|---|
| $F(t) =$ | $-$ | $\int_0^t f(t)\,\mathrm{d}t$ | $1 - R(t)$ | $1 - \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}t}$ |
| $f(t) =$ | $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)$ | $-$ | $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t)$ | $\lambda(t)\,\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}t}$ |
| $R(t) =$ | $1 - F(t)$ | $\int_t^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ | $-$ | $\mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda(t)\,\mathrm{d}t}$ |
| $\lambda(t) =$ | $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)$ | $\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t)\,\mathrm{d}t}$ | $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln R(t)$ | $-$ |

# STRUKTURE POUZDANOSTI

## Serijska ili neredundantna struktura

Serijskom se strukturom pouzdanosti može opisati pouzdanost neredundantnog sustava. Kvar bilo kojeg elementa sustava znači kvar sustava u cjelini, odnosno, sustav će raditi samo onda ako je svaki element sustava ispravan.




*Slika 2 - Serijska (neredundantna) struktura pouzdanosti*

Da bi došli do izraza za pouzdanost serijske strukture (neredundantnog sustava), pridružimo svakom elementu sustava binarnu (Booleovu) varijablu sa sljedećim značenjem:

$x_i$ - označava ispravan rad elementa *i,*

$\underline{x}_i$ - označava neispravan rad elementa *i.*

Neka su nadalje:

$X_{s,n}$ - ispravan rad serijske strukture od $n$ elemenata

$P_{s,n}$ - vjerojatnost ispravnog rada serijske strukture od $n$ elemenata

Iz definicije serijske strukture proizlazi da je

$$X_{s,n} = x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$$

odnosno

$$P_{s,n} = \mathrm{p}\{X_{s,n}\} = R_{s,n} = \mathrm{p}\{x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n\}$$

Ako pretpostavimo da su kvarovi elemenata sustava međusobno nezavisni, onda vrijedi:

$$R_{s,n}(t) = \mathrm{p}(x_1) \cdot \mathrm{p}(x_2) \cdots \mathrm{p}(x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{p}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

gdje je $R_i(t)$ pouzdanost elementa $i$.

Dakle, pouzdanost serijske strukture pouzdanosti jednaka je umnošku pouzdanosti pojedinih elemenata. Ukupna pouzdanost serijske strukture uvijek je manja (ili teorijski jednaka) pouzdanosti najnepouzdanijeg elementa odnosno elementa koji ima najmanju pouzdanost.

$$R_{s,n}(t) \le \min_i R_i(t)$$

Da bi odgovorili na pitanje koliki je ukupni intenzitet kvarova serijske strukture od $n$ elemenata $\lambda_{s,n}(t)$, ako su funkcije intenziteta kvarova pojedinih elemenata strukture $\lambda_i(t)$, treba uzeti izraz za pouzdanost pojedinog elementa:

$$R_i(t) = e^{-\int_0^t \lambda_{s,n}(u)\,\mathrm{d}u}$$

Ukupna pouzdanost serijske strukture izrazi se pomoću nadomjesnog intenziteta kvarova odnosno intenziteta kvarova pojedinih elemenata:

$$R_{s,n}(t) = e^{-\int_0^t \lambda_{s,n}(u)\,\mathrm{d}u} = \prod_{i=1}^{n} R_i(t) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\int_0^t \lambda_i(u)\,\mathrm{d}u} = e^{-\sum_{i=1}^{n}\int_0^t \lambda_i(u)\,\mathrm{d}u} = e^{-\int_0^t \left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(u)\,\mathrm{d}u\right]}$$

Dakle, proizlazi da je nadomjesni intenzitet kvarova

$$\lambda_{s,n}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)$$

Ukoliko je funkcija intenziteta kvarova pojedinih elemenata konstanta, tj.

$$\lambda_i(t) = \lambda_{i0}(t) = konst.$$

onda je i ukupni intenzitet kvarova konstanta:

$$\lambda_{s,n}(t) = \lambda_{s,n} = konst.$$

Iz dosadašnjeg razmatranja može se zaključiti da se pouzdanost serijske strukture može povećavati na dva načina:

- odabrati elemente sa što većom pouzdanošću, pri čemu najlošiji elemenat mora imati pouzdanost veću od željene pouzdanosti i (ili)

- nastojati upotrijebiti što manji broj elemenata.

Pouzdanost serijske strukture za zavisne kvarova jednaka je

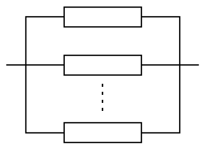
$$\begin{aligned} P_{s,n}^{z} &= \mathrm{p}\{X_{s,n}^{z}\} = R_{s,n}^{z}(t) = \mathrm{p}\{x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n\} = \\ &= \mathrm{p}\{x_1\}\mathrm{p}\{x_2 / x_1\}\mathrm{p}\{x_3 / x_1 \wedge x_2\}\cdots \mathrm{p}\{x_n / x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_{n-1}\}. \end{aligned}$$

## Paralelna ili redundantna struktura

Paralelna struktura pouzdanosti primjenjuje se za određivanje pouzdanosti redundantnih sustava. Ovisno o odnosu dijelova redundantnog sustava tokom rada, definiraju se različiti tipovi paralelnih struktura odnosno redundancija.

### *Vruća rezerva*

Struktura vruće rezerve primjenjuje se u slučaju ako su i aktivna i rezervne (redundantne) jedinice sustava podjednako opterećene u pogledu trošenja. Ova je pretpostavka realna u slučajevima kada rezerva radi paralelno s aktivnom jedinicom punim pogonom, spremna preuzeti puno opterećenje u slučaju kvara aktivne jedinice. Može se reći da redundantni sustav s vrućom rezervom radi ispravno ako radi ispravno barem jedna od redundantnih jedinica sustava. U grafičkom prikazu strukture vruće rezerve gornja se činjenica može izraziti konstatacijom da sustav radi ukoliko od ulaza do izlaza strukture postoji barem jedan put.



*Slika 3 - Paralelna (redundantna) struktura pouzdanosti*

Pretpostavimo da su kvarovi u paralelnoj strukturi nezavisni. Neka $x_i$, $\underline{x}_i$ i $n$ imaju značenje kao kod serijske strukture. Nadalje neka

$X_{p,n}$ označava ispravan rad paralelne strukture vruće rezerve od $n$ elemenata i

$P_{p,n}$ vjerojatnost ispravnog rada paralelne strukture vruće rezerve od $n$ elemenata.

Iz definicije strukture proizlazi da je

$$X_{p,n} = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n$$

odnosno

$$R_{p,n}(t) = \mathrm{p}\{X_{p,n}\} = R_{s,n} = \mathrm{p}\{x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n\}$$

Gornja se pouzdanost može izraziti i suprotnim vjerojatnostima:

$$R_{p,n}(t) = 1 - \mathrm{p}\{\underline{x}_1 \wedge \underline{x}_2 \wedge \cdots \wedge \underline{x}_n\} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathrm{p}(\underline{x}_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - R_i(t)].$$

Ako sve jedinice paralene strukture imaju jednaku pouzdanost $R(t)$, odnosno kraće $R$, ukupna pouzdanost jednaka je

$$R_{p,n} = 1 - (1 - R)^n.$$

Najčešće se paralelna struktura sastoji od dvije paralelne jedinice pouzdanosti $R$. Pouzdanost je u tom slučaju

$$R_{p,2} = 1 - (1 - R)^2 = 2R - R^2.$$

Da bi odredili nadomjesnu funkciju intenziteta kvarova za paralelnu strukturu vruće rezerve, ukoliko su intenziteti kvarova pojedinih jedinica konstantni treba poći od gornje formule

$$R_{p,n} = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - R_i(t)\right] = 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right].$$

$$\lambda_{p,n} = \frac{-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} R_{p,n}}{R_{p,n}} = \frac{n\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}(1 - e^{-\lambda_0 t})^{n-1}}{1 - \left[1 - e^{-\lambda_0 t}\right]^n}$$

Tok funkcije $\lambda_{p,n}$ dobije se graničnim postupkom:

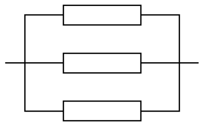
$$\lim_{t \to 0} \lambda_{p,n} = 0$$

odnosno

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_{p,n} = \lambda_0 .$$

Dakle, može se zaključiti da je nadomjesna funkcija intenziteta kvarova vremenski ovisna, iako su pojedini intenziteti kvarova konstante.

Primjer 1: Treba odrediti funkciju intenziteta kvarova i srednje vrijeme do prvog kvara za paralelnu strukturu vruće rezerve prema slici 4. ($\lambda_0 = 10^{-5}$ 1/h). Srednje vrijeme do prvog kvara dobiveno za paralelnu strukturu usporedite sa srednjim vremenom do prvog kvara za nerdundantnu strukturu.




*Slika 4 - Paralelna struktura* $n = 3$, $\lambda(t) = \lambda_0$

$$\begin{aligned}R_{p,3}(t) &= 1-\left[1-R_0(t)\right]^3 = 1-\left[1-e^{-\lambda_0 t}\right]^3 = \\ &= 1-(1-3e^{-\lambda_0 t}+3e^{-2\lambda_0 t}-e^{-3\lambda_0 t}) = \\ &= 3e^{-\lambda_0 t}-3e^{-2\lambda_0 t}+e^{-3\lambda_0 t} = e^{-\lambda_0 t}(3-3e^{-\lambda_0 t}+e^{-2\lambda_0 t})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{p,3} &= \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_{p,3}}{R_{p,3}} = \frac{3\lambda_0 e^{-\lambda_0 t}-6\lambda_0 e^{-2\lambda_0 t}+3\lambda_0 e^{-3\lambda_0 t}}{3e^{-\lambda_0 t}-3e^{-2\lambda_0 t}+e^{-3\lambda_0 t}} = \\ &= 3\lambda_0\frac{1-2e^{-\lambda_0 t}+e^{-2\lambda_0 t}}{3-3e^{-\lambda_0 t}+e^{-2\lambda_0 t}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_1 &= \int_0^\infty R_{p,3}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty\left(3e^{-\lambda_0 t}-3e^{-2\lambda_0 t}+e^{-3\lambda_0 t}\right)\mathrm{d}t = \\ &= \frac{3}{\lambda_0}-\frac{3}{2\lambda_0}+\frac{1}{3\lambda_0} = 3\cdot 10^5-1{,}5\cdot 10^5+0{,}33\cdot 10^5 = 1{,}8\cdot 10^5 \text{ sati}\end{aligned}$$

Za neredundantni sustav srednje vrijeme do prvog kvara iznosi:

$$T_1 = \int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda_0} = 10^5 \text{ sati}$$

Dakle, za redundantnu strukturu s 3 paralelne jedinice, srednje vrijeme do prvog kvara veće je za 80% u odnosu na ono kod neredundantne strukture.

### *Hladna rezerva*

Struktura hladne rezerve primjenjuje se u određivanju pouzdanosti onih redundantnih sustava kod kojih je od $n$ jedinica sustava jedna aktivna, pouzdanosti $R$ i intenziteta kvarova l, dok je preostalih $n$-1 u rezervi, ali tako da se ne "troše" pa se može pretpostaviti da im je pouzdanost jednaka jedan. U slučaju kvara aktivne jedinice "sklopka", pouzdanosti $R_s$, uključuje sljedeću rezervnu jedinicu.

Vjerojatnost događaja da od $n$ jedinica određeni broj ne radi može se karakterizirati Poissonovom razdiobom

$$P(n,\mu)=\frac{\mu^n}{n!}\mathrm{e}^{-\mu}$$

gdje je $n$ broj elemenata, a $\mu$ očekivanje broja neispravnih jedinica.

$$\mu=\int_0^\tau \lambda(u)\,\mathrm{d}u$$

Za stacionarni proces vrijedi

$$\mu=\lambda_0\tau$$

Vjerojatnost da je neispravno 0 jedinica jednaka je pouzdanosti aktivne jedinice

$$P(0,\mu)=\mathrm{e}^{-\mu}=\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}=R_0$$

odnosno

$$\ln R_0=-\lambda_0\tau$$

Pouzdanost strukture jednaka je vjerojatnosti da je ispravna barem jedna od $n$ jedinica odnosno da je neispravno 0, 1, 2, . . . ili $n$-1 jedinica.

$$R_{h,n}=\sum_{k=0}^{n-1}P(k,n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\mu^k}{k!}\mathrm{e}^{-\mu}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda_0\tau)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}=$$
$$=\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda_0\tau)^k}{k!}=\mathrm{e}^{-\lambda_0\tau}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-\ln R_0)^k}{k!}.$$

Za $n$ = 2, najčešći slučaj hladne rezerve, pouzdanost je jednaka

$$R_{h,2}=R_0+R_0(-\ln R_0)=R_0(1-\ln R_0).$$

***r* od *n* struktura**

Struktura pouzdanosti $r$ od $n$ primjenjuje se u onim slučajevima kad se za neki sustav može utvrditi da radi ispravno ukoliko od $n$ jedinica sustava barem njih $r$ radi ispravno ($r<n$).

Budući da se $r$ elemenata od ukupno $n$ može izabrati na $c=n!/r!(n-r)!$ načina, struktura pouzdanosti sastoji se od $c$ grana, svaka s $r$ elemenata. Kako se u različitim granama pojavljuju isti elementi, to ispadi grana nisu međusobno disjunktni. Pouzdanost ove paralelne strukture treba računati kao vjerojatnost paralelno-serijske strukture zavisnih elemenata.

Odredimo pouzdanost za jednostavniji slučaj, kada su sve pouzdanosti elemenata jednake i iznose $R_0$. Vjerojatnost da je točno $r$ elemenata ispravno jednaka je

$$p(r,n)=\binom{n}{r}R_0^r(1-R_0)^{n-k}$$

Vjerojatnost da je $r$ i više od $r$ elemenata ispravno jednaka je pouzdanosti strukture $r$ od $n$

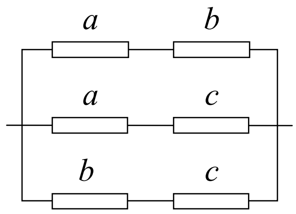
$$R_{r,n} = \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{r} R_0^r (1 - R_0)^{n-k}$$

Određivanje pouzdanosti *r od n strukture* u slučaju da pouzdanosti elemenata nisu jednake pokazat ćemo na sljedećem primjeru.

Primjer 2: Za strukturu 2 od 3 treba odrediti pouzdanost i to

a) razvojem izraza za vjerojatnost unije zavisnih događaja i
b) primjenom K-tablice kojom se unija transformira u skup disjunktnih članova.

Struktura 2 od 3 što se sastoji od elemenata *a*, *b* i *c* prikazana je na slici 5.




*Slika 5 – Struktura pouzdanosti* 2 *od* 3

a) Razvojem izraza za vjerojatnost unije nedisjunktnih događaja dobije se

$$
\begin{aligned}
R_{2,3} &= \mathrm{p}\{(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\} = \mathrm{p}\{A \vee B \vee C\} \\
&\{\mathrm{p}(x \vee y) = \mathrm{p}(x) + \mathrm{p}(y) - \mathrm{p}(x \wedge y)\} \\
R_{2,3} &= \mathrm{p}(A \vee B) + \mathrm{p}(C) - \mathrm{p}[(A \vee B) \wedge C] = \\
&= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(AB) + \mathrm{p}(C) - \mathrm{p}(C)[\mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(AB)] = \\
&= \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B) - \mathrm{p}(AB) + \mathrm{p}(C) - \mathrm{p}(AC) - \mathrm{p}(BC) + \mathrm{p}(ABC) = \\
&= \mathrm{p}(ab) + \mathrm{p}(ac) - \mathrm{p}(abc) + \mathrm{p}(bc) - \mathrm{p}(abc) - \mathrm{p}(abc) + \mathrm{p}(abc) = \\
&= \mathrm{p}(ab) + \mathrm{p}(ac) + \mathrm{p}(bc) - 2\,\mathrm{p}(abc).
\end{aligned}
$$

Budući da su kvarovi međusobno nezavisni vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{p}(ab) = \mathrm{p}(a \wedge b) = \mathrm{p}(a)\,\mathrm{p}(b) = R_a R_b \\
&\mathrm{p}(abc) = R_a R_b R_c
\end{aligned}
$$

i konačno

$$R_{2,3} = R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c - 2 R_a R_b R_c .$$

b) Primjenom K-tablice treba uniju članova, koji su nedisjunktni, transformirati u uniju disjunktnih članova, pri čemu prvi član unije, ili bilo koji drugi član, može ostati nepromijenjen, a ostali se transformiraju u dijelove koji su međusobno disjunktni, te disjunktni s obzirom na sve prethodne članove. U ovom se primjeru pouzdanost odredi na sljedeći način:

$$R_{2,3} = \mathrm{p}(A \vee B \vee C) = \mathrm{p}(A \vee B^D \vee C^D)$$

gdje su $B^D$ i $C^D$ unije disjunktnih članova za koje općenito vrijedi:

$$B^D = B_1^D \vee B_2^D \vee \ldots \vee B_b^D \qquad B_1^D \wedge B_2^D \wedge \ldots \wedge B_b^D = 0$$

$$C^D = C_1^D \vee C_2^D \vee \ldots \vee C_c^D \qquad C_1^D \wedge C_2^D \wedge \ldots \wedge C_c^D = 0$$

$$A \vee B^D \vee C^D = A \vee B \vee C$$

$$A \wedge B^D \wedge C^D = 0$$

Ako su članovi unije disjunktni, onda se vjerojatnost unije može izračunati na jednostavan način:

$$R_{2,3} = \mathrm{p}(A) + \mathrm{p}(B^D) + \mathrm{p}(C^D)$$

Disjunktni se članovi odrede pomoću K-tablice za tri binarne varijable stanja ispravnosti elemenata $a$, $b$ i $c$.

| $c$ \ $a\,b$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | $\boxed{1}$ | |
| 1 | | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ |

$$R_{2,3} = \mathrm{p}(ab \vee \underline{a}bc \vee a\underline{b}c) = \mathrm{p}(ab) + \mathrm{p}(\underline{a}bc) + \mathrm{p}(a\underline{b}c) =$$
$$= R_a R_b + (1 - R_a) R_b R_c + R_a (1 - R_b) R_c =$$
$$= R_a R_b + R_a R_c + R_b R_c - 2 R_a R_c R_c$$

## Struktura s većinskim odlučivanjem

Redundantna struktura s većinskim odlučivanjem (prema von Neumannu) sastoji se od neparnog broja istovrsnih modula ( $n \geq 3$ ) koji obavljaju isti posao, a ukupni se rezultat na izlazu strukture dobije preglasavanjem pojedinačnih rezultata to jest "sklop odluke" $v$ prosljeđuje dalje većinsko, vjerojatnije, rješenje. Pouzdanost takve strukture (NMR *N-Modular Redundancy*) ekvivalentna je vjerojatnosti da od $n$ elemenata pouzdanosti $R_0$ barem $r$ radi ispravno (struktura $r$ od $n$, $r>n/2$) pri čemu treba uzeti u obzir i pouzdanost neredundantnog sklopa odluke $R_V$.

$$R_{v,n} = R_v R_{r,n} = R_v \sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} R_0^k (1 - R_0)^{n-k}$$

Pouzdanost strukture s većinskim odlučivanjem za $n$= 3 (*TMR - Triple Modular Redundancy*) može se dobiti iz gornjeg općeg izraza:

$$R_{v,3} = R_v (3R_0^2 - 2R_0^3)$$

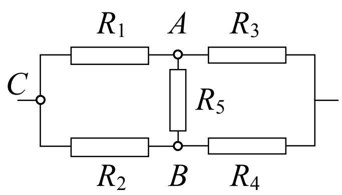
## Metoda superpozicije

Metoda superpozicije primjenjuje se u slučajevima u kojima je moguće složenu strukturu pouzdanost razložiti na veći broj jednostavnijih struktura. Odabere se element u strukturi pouzdanosti čiji izostanak iz strukture znači pojednostavljenje strukture, npr. mosnu strukturu pretvara u serijsko-paralelnu. Neka izabrani element ima pouzdanost $R$. Superpozicija se sastoji u tome da se odvojeno odrede pouzdanosti sustava za slučaj kada odabrani element radi ispravno (stanje $x$, "kratki spoj" u strukturi pouzdanosti, tj. $R$ = 1) odnosno kada je odabrani element u kvaru (stanje $\underline{x}$, "prekid" u strukturi pouzdanosti, tj. $R$ = 0). Neka je u prvom slučaju, kad je sustav "dobar", pouzdanost sustava $R_D$, a u drugom slučaju, kad je sustav "loš", pouzdanost sustava $R_L$. Ukupna pouzdanost $R_T$ jednaka je vjerojatnosti ispravnog rada sustava ako je odabrani element ispravan (vjerojatnost tog stanja je upravo $R$) ili vjerojatnosti ispravnog rada sustava ukoliko je odabrani element neispravan (vjerojatnost tog stanja jednaka je 1 - $R$ ). Budući da su događaji $x$ i $\underline{x}$ disjunktni, to vrijedi:

$$\begin{aligned} R_T &= \mathrm{p}(x \cup \underline{x}) = \mathrm{p}(x) + \mathrm{p}(\underline{x}) = \\ &= R_D R + R_L (1 - R) \end{aligned}$$

Općenito, broj izabranih elementa može biti $n \geq 1$. U tom je slučaju broj disjunktnih stanja koje treba superponirati $2^n$.

Primjer 3: Za mosnu strukturu pouzdanosti prema slici 6 treba odrediti ukupnu pouzdanost metodom superpozicije. $R_1$= 0,94, $R_2$ = 0,91, $R_3$ = 0,93, $R_4$ = 0,90, $R_5$ = 0.92.




*Slika 6 - Mosna struktura*

Odaberemo element s pouzdanošću $R_5$, jer se njegovim uklanjanjem mosna struktura pretvara u paralelno-serijsku. Pouzdanost se izračuna superpozicijom dva stanja, prema slici


1. korak $R_5$ = 1

$$R_D = \left[1-(1-R_1)(1-R_2)\right]\cdot\left[1-(1-R_3)(1-R_4)\right] = 0{,}9876$$

2. korak $R_5$ = 0

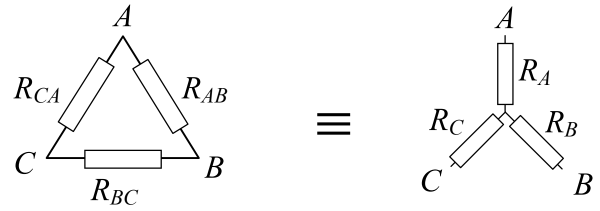
$$R_L = \left[1-(1-R_1R_3)(1-R_2R_4)\right] = 0{,}9772$$

I konačno, ukupna pouzdanost jednaka je:

$$R_T = R_D R_5 + R_L(1-R_5) = 0{,}9868$$

Primjer 4: Za istu strukturu kao u prethodnom primjeru treba odrediti ukupnu pouzdanost pretvorbom trokuta u strukturi pouzdanosti u zvijezdu.

Pretvorbom trokuta između točaka A, B i C u zvijezdu mosna struktura pretvara se u serijsko paralelnu. Da bi pretvorba bila valjana pouzdanost između bilo kojeg para točaka se ne smije promijeniti. Dakle, trebaju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti:

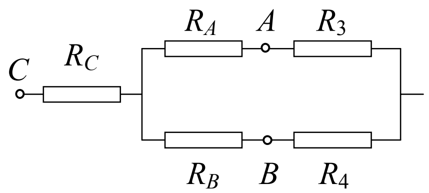



$$
\begin{aligned}
R_A R_B &= 1-(1-R_{AB})(1-R_{BC}R_{CA}) = x \\
R_B R_C &= 1-(1-R_{BC})(1-R_{CA}R_{AB}) = y \\
R_C R_A &= 1-(1-R_{CA})(1-R_{AB}R_{BC}) = z
\end{aligned}
$$

Rješenjem gornjih jednadžbi s tri nepoznanice $R_A$ $R_B$ i $R_C$ dobiju se izrazi

$$R_A = \sqrt{\frac{zx}{y}}, \quad R_B = \sqrt{\frac{xy}{z}}, \quad R_C = \sqrt{\frac{yz}{yx}}$$

U konkretnom slučaju, pretvorbom trokuta u zvijezdu dobije se struktura prema slici s vrijednostima pouzdanosti $R_A = 0{,}9948$, $R_B = 0{,}9930$ i $R_C = 0{,}9954$. Ukupna pouzdanost iznosi:




$$R_T = \left[1-(1-R_3 R_A)(1-R_4 R_B)\right] R_C = 0{,}987$$

### Pouzdanost u slučaju dva stanja kvara

Tipični kvarovi elektroničkih elemenata su kratki spoj i prekid. Posljedice što ih u svojem okruženju izazivaju ovi kvarovi nisu jednake, pa ih treba selektivno i analizirati. To vrijedi pogotovo za one elektroničke elemente kod kojih se realno mogu pojaviti obje vrste kvarova. Npr. u slučaju da kvar uopće postoji, vjerojatnost prekida silicijske diode jednaka je 0,7, a vjerojatnost kratkog spoja je komplementarna i iznosi 0,3.

Neka su stanja kvara nekog elementa opisana kako slijedi:

$x$ ispravno stanje elementa
$\underline{x}$ neispravno stanje elelmenta
$x_s$ stanje kratkog spoja
$x_o$ stanje prekida
gdje je $\underline{x}$ unija disjunktnih stanja $x_s$ i $x_o$:

$$\underline{x} = x_s \cap x_o$$

odnosno vrijedi

$$x \wedge x_s \wedge x_o = 0$$

Vjerojatnosti stanja su sljedeća

| | | |
|---|---|---|
| $r$ | $= \mathrm{p}\ (x)$ | vjerojatnost ispravnosti elemena (pouzdanost elementa) |
| $q$ | $= \mathrm{p}\ (\underline{x})$ | vjerojatnost neispravnosti elemena (nepouzdanost elementa) |
| $q_s$ | $= \mathrm{p}(x_s)$ | vjerojatnost kratkog spoja |
| $q_o$ | $= \mathrm{p}(x_s)$ | vjerojatnost prekida. |

Vjerojatnost postojanja kvara jednaka je funkciji nepouzdanosti

$$F(t) = \mathrm{p}(\underline{x}) = \mathrm{p}(x_s \vee x_o) = \mathrm{p}(x_s) + \mathrm{p}(x_o) = q_s + q_o$$

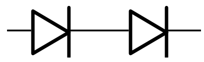
pri čemu uvijek vrijedi:

$$\mathrm{p}(x) + \mathrm{p}(x_s) + \mathrm{p}(x_o) = r + q_s + q_o = 1$$

Pouzdanost strukture s tri stanja kvara jednaka je:

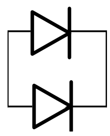
$$R(t) = 1 - F(t) = 1 - \mathrm{p}(x_s \cup x_o) = r = 1 - q_s - q_o$$

Primjer 5: Redundantna struktura od dva elementa iste pouzdanosti ispunjava svoju funkciju ukoliko ispravno rade oba elementa ili radi samo jedan element a drugi je u kratkom spoju. Kolika je pouzdanost takve strukture?



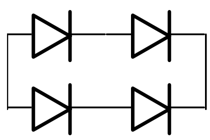
$$R = \mathrm{p}(x_1 x_2 \cup x_1 x_{2s} \cup x_{1s} x_2) = r^2 + rq_s + rq_s = r^2 + 2rq_s$$

Primjer 6: Redundantna struktura od dva elementa ispunjava svoju funkciju ukoliko rade oba elementa ili radi samo jedan element a drugi je u prekidu. Kolika je pouzdanost takve strukture?



$$R = \mathrm{p}(x_1 x_2 \cup x_1 x_{2o} \cup x_{1o} x_2) = r^2 + rq_o + rq_o = r^2 + 2rq_o$$

Primjer 7: Redundantna struktura od četiri elementa ispunjava svoju funkciju ako na putu između ulaza i izlaza postoji barem jedan ispravan element.



Neka su $x_o$ i $x_s$ stanja prekida odnosno kratkog spoja cijelog sklopa. Neka su $x_{12o}$, $x_{34o}$, $x_{12s}$ i $x_{34s}$ stanja prekida odnosno kratkog spoja pojedinih grana sklopa. Neka su $x_{io}$ i $x_{is}$, $i$ =1, 2, . . . , 4, stanja prekida odnosno kratkog spoja pojedinih elementa u strukturi. Vjerojatnosti stanja prekida odnosno kratkog spoja pojedinih elemenata su jednake i iznose $q_o$ odnosno $q_s$. Neka su $Q_o$ *i* $Q_s$ vjerojatnosti stanja prekida odnosno kratkog spoja za cijeli spoj. Vjerojatnost stanja neispravnosti cijele strukture $\underline{x}$ ima sljedeću vrijednost:

$$F = \mathrm{p}(\underline{x}) = Q_o + Q_s$$
$$\underline{x} = x_o \cup x_s, \quad x_o \cap x_s = \varnothing$$
$$x_o = x_{12o} \cap x_{34o}$$
$$x_{12o} = x_{1o} \cup x_{2o}, \quad x_{34o} = x_{3o} \cup x_{4o}$$
$$\mathrm{p}(x_{12o}) = \mathrm{p}(x_{1o} \cup x_{2o}) = \mathrm{p}(x_{1o}) + \mathrm{p}(x_{2o}) - \mathrm{p}(x_{1o})\,\mathrm{p}(x_{2o}) = 2q_o - q_o^2$$
$$\mathrm{p}(x_{34o}) = 2q_o - q_o^2$$
$$Q_o = \mathrm{p}(x_o) = \mathrm{p}(x_{12o})\,\mathrm{p}(x_{34o}) = \left(2q_o - q_o^2\right)^2$$
$$x_s = x_{12s} \cup x_{34s}$$
$$x_{12s} = x_{1s} \cap x_{2s} \quad x_{34s} = x_{3s} \cap x_{4s}$$
$$\mathrm{p}(x_{12s}) = \mathrm{p}(x_{1s} \cap x_{2s}) = \mathrm{p}(x_{1s})\,\mathrm{p}(x_{2s}) = q_s^2$$
$$\mathrm{p}(x_{34s}) = q_s^2$$
$$Q_s = \mathrm{p}(x_s) = \mathrm{p}(x_{12s} \cup x_{34s}) = \mathrm{p}(x_{12s}) + \mathrm{p}(x_{34s}) - \mathrm{p}(x_{12s})\,\mathrm{p}(x_{34s}) = 2q_s^2 - q_s^4$$
$$F = Q_o + Q_s = \left(2q_o - q_o^2\right)^2 + 2q_s^2 - q_s^4$$
$$R = 1 - F = 1 - 4q_o^2 + 4q_o^3 - q_o^4 - 2q_s^2 + q_s^4.$$

**Modeli za određivanje pouzdanosti**

1. Konstantni intenzitet kvarova

$$\lambda(t) = \lambda_0 = konst.$$
$$f(t) = \lambda_0\, \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} \qquad \text{(eksponencijalna razdioba)}$$
$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_0 t} = 1 - F(t)$$
$$T_1 = \int_0^\infty R(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{\lambda_0}$$

2. Linearni porast intenziteta kvarova

$$\lambda(t) = kt \quad \text{za } t \geq 0$$
$$f(t) = kt\,\mathrm{e}^{-\frac{kt^2}{2}} \qquad \text{(Rayleigheva razdioba)}$$
$$R(t) = \mathrm{e}^{-\frac{kt^2}{2}} = 1 - F(t)$$
$$T_1 = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{kt^2}{2}}\,\mathrm{d}\,t = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\frac{k}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2k}}$$

3. Model po Weibullu

$$\lambda(t) = kt^m \quad \text{za} \ \ m \geq -1$$

$$f(t) = kt^m \, \mathrm{e}^{-\frac{kt^{m+1}}{m+1}} \qquad \text{(Weibullova razdioba)}$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\frac{kt^{m+1}}{m+1}} = 1 - F(t)$$

Za $m$=0 Weibullova prelazi u eksponencijalnu, a za $m$=1 u Rayleighevu razdiobu.