BAYESOV KLASIFIKATOR - AUDITORNE 2010/2012

$\omega_1 = \{ [-1\ 0]^T, [0\ -1]^T, [1\ 0]^T, [0\ 1]^T \}$

$\omega_2 = \{ [-2\ 0]^T, [0\ -2]^T, [2\ 0]^T, [0\ 2]^T \}$

$P(\omega_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $P(\omega_2) = \frac{1}{2}$ // PRVO IZRAČUNAMO VJEROJATNOSTI KLASA

$\boxed{\text{IZRAČUNAMO SREDINE SVAKE KLASE}}$

$$\vec{m}_1 = \vec{m}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{IZRAČUNAMO KOVARIJACIJSKE MATRICE } C_i}$

$$C_1 = \frac{1}{N_1} \sum (\vec{x}_i - \vec{m}_1) \cdot (\vec{x}_i - \vec{m}_1)^T$$

$$C_1 = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \frac{1}{4} \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{IZRAČUNAMO DETERMINANTE I INVERZE, TREBAĆE POSLIJE}}$

$$|C_1| = \frac{1}{4} \qquad |C_2| = 4$$

$$C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{DECIZIJSKA FUNKCIJA KLASE}}$

$$d_i = \ln P(\omega_i) + \ln P(\vec{x} | \omega_i)$$

$$= \ln P(\omega_i) - \frac{1}{2} \ln |C_i| - \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m}_i)^T C_i^{-1} (\vec{x} - \vec{m}_i)$$

MARGINA RAZDVAJANJA KLASIFIKATORA:

$$d_1 - d_2 = 0$$

$$\ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2) - \frac{1}{2}\ln|C_1| + \frac{1}{2}\ln|C_2| - \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m}_1)^T C_1^{-1}(\vec{x}-\vec{m}_1)$$
$$+ \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m}_2)^T C_2^{-1}(\vec{x}-\vec{m}_2)$$

$$-\frac{1}{2}\ln 4^{-1} + \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\ln 4 - \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x_1}{4} & \frac{x_2}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

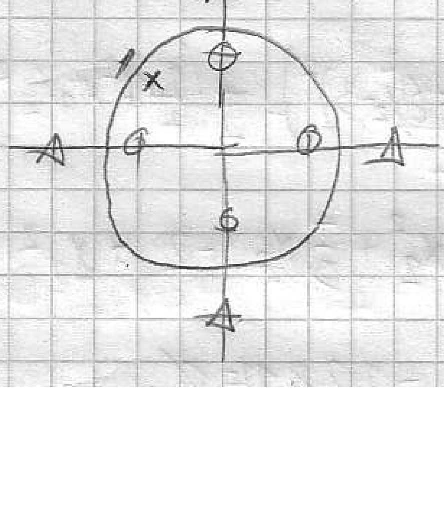
$$\ln 4 - x_1^2 - x_2^2 + \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} = 0 \quad / \cdot 4$$

$$4\ln 4 - 3x_1^2 - 3x_2^2 = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{4}{3}\ln 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.848 = 1.359^2$$

OVO GORE JE FUNKCIJA KRUŽNICE U ISHODIŠTU SA RADIJUSOM 1.359



(7 bodova) Zadani su dvodimenzionalni uzorci iz dvaju razreda za koje se pretpostavlja da slijede višedimenzionalnu normalnu razdiobu. Uzorci iz prvoga razreda su

$\omega_1 = \{[1, 3]^T, [2, 0]^T, [2, 6]^T, [3, 3]^T\}$

Uzorci iz ω_2 imaju središte u ishodištu i kovarijacijsku matricu $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Pretpostavlja se da su vjerojatnosi pojavljivanja uzoraka iz oba razreda jednake. Napišite jednadžbu granice između razreda i to u obliku:

$a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 + c \cdot x_1 \cdot x_2 + d \cdot x_1 + e \cdot x_2 + f = 0$

BAYES – ZAVRŠNI 2009/2010

$$\vec{m}_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}8\\12\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 9/2\end{bmatrix}$$

$$|C_1| = \frac{9}{4}, \quad C_1^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2/9\end{bmatrix} \quad C_2^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \quad |C_2| = 1$$

$$\cancel{\ln P(\omega_1) - \ln P(\omega_2)} - \frac{1}{2}\ln|C_1| + \frac{1}{2}\ln|C_2| - \frac{1}{2}\left(\vec{x} - \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)^T C_1^{-1}\left(x - \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\vec{x}\, C_2^{-1}\vec{x}^T = 0$$

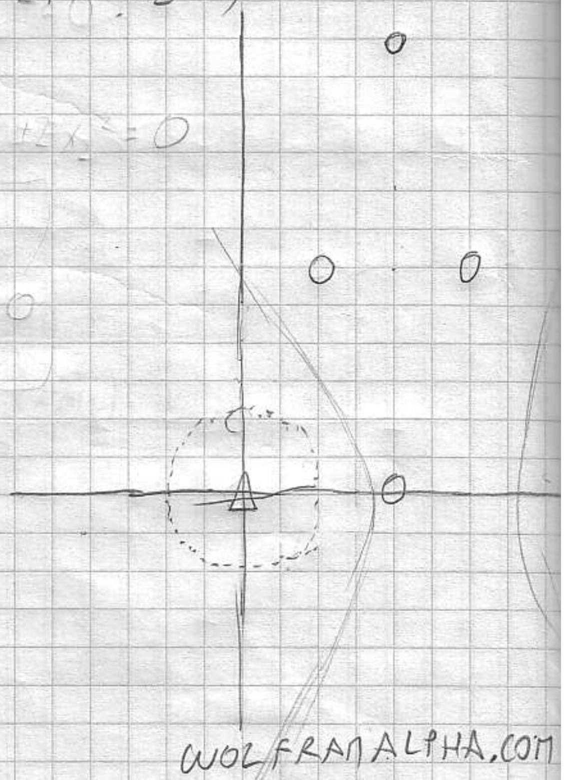
$$-\frac{1}{2}\ln\frac{9}{4} + \cancel{\frac{1}{2}\ln 1} - \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}x_1-2 & x_2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-2\\x_2-3\end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)$$

$$\emptyset$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{9}{4} - \frac{1}{2}\left(2(x_1-2)^2 + \frac{2}{9}(x_2-3)^2\right) + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) = \emptyset \;/\cdot\frac{1}{2}$$

$$-\ln\frac{9}{4} - 2x_1^2 + 8x_1 - 8 - \frac{2}{9}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 - 2 + x_1^2 + x_2^2 = \emptyset$$

$$-x_1^2 + \frac{7}{9}x_2^2 + 8x_1 + \frac{4}{3}x_2 - 10.811 = \emptyset$$



WOLFRAMALPHA.COM

(6 bodova) Na raspolaganju su uzorci dvaju razreda za koje se pretpostavlja da slijede višedimenzionalnu normalnu razdiobu. Uzorci iz razreda ω_1 imaju središte u $\vec{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i kovarijacijsku matricu $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Uzorci iz razreda ω_2 imaju središte u $\vec{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i kovarijacijsku matricu $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pretpostavite da su vjerojatnosti pojavljivanja uzoraka iz ω_1 i ω_2 jednake. Napišite jednadžbu granice između razreda koju za ovakve uzorke daje Bayesov klasifikator, i to u obliku $a \cdot x_1^2 + b \cdot x_2^2 + c \cdot x_1 \cdot x_2 + d \cdot x_1 + e \cdot x_2 + f = 0$

BAYES - ZAVRŠNI 2008/2009

$|C_1| = 2 \quad |C_2| = 1 \quad C_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$-\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} - \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - 1 \end{bmatrix}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} x_1 - 1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \emptyset \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$-\ln 2 - \left(\frac{1}{2}x_1^2 + (x_2 - 1)^2\right) + (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \emptyset$$

$$-\ln 2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \cancel{x_2^2} + 2x_2 - \cancel{1} + x_1^2 - 2x_1 + \cancel{1} + \cancel{x_2^2} = \emptyset$$

$$\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1 + 2x_2 - \ln 2 = 0$$

RJEŠENJE U TRAŽENOJ FORMI!

$$\frac{1}{2}x_1^2 + \emptyset x_2^2 + \emptyset x_1 x_2 - 2x_1 + 2x_2 + \ln 2 = \emptyset$$

Na raspolaganju su uzorci dvaju razreda za koje se pretpostavlja da slijede višedimenzionalnu normalnu razdiobu. Uzorci iz razreda ω_1 imaju središte u $\vec{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i kovarijacijsku matricu $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Uzorci iz razreda ω_2 imaju središte u $\vec{m}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i kovarijacijsku matricu $C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pretpostavite da su vjerojatnosti pojavljivanja uzoraka iz ω_1 i ω_2 jednake. Napišite jednadžbu granice između razreda koju za ovakve uzorke daje Bayesov klasifikator.

BAYES - ISPIT 10.7.2006.

$$|C_1| = 4 \qquad |C_2| = 1$$

$$C_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad C_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $d_1 - d_2 = \emptyset$

$$-\frac{1}{2} \ln 4 + \frac{1}{2} \cancel{\ln 1} - \frac{1}{2} \vec{x}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \vec{x} + \frac{1}{2} \left(\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\vec{x} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \emptyset \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$\ln 4 - \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 + [x_1 - 1 \quad x_2] \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \emptyset$$

$$+ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = \emptyset$$

$$\ln 4 - \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2^2 + x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 = \emptyset$$

$$\frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - 2x_1 + 1 + \ln 4 = \emptyset \quad / \cdot 2$$

$$\boxed{2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 + 4.773 = \emptyset}$$

Na raspolaganju su uzorci dvaju razreda za koje se pretpostavlja da slijede višedimenzionalnu normalnu razdiobu. Uzorci iz razreda ω_1 imaju središte u $\vec{m}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i kovarijacijsku matricu $C_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$. Uzorci iz razreda ω_2 imaju središte u $\vec{m}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ i kovarijacijsku matricu $C_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Pretpostavite da su vjerojatnosti pojavljivanja uzoraka iz ω_1 i ω_2 jednake. Napišite jednadžbu granice između razreda koju za ovakve uzorke daje Bayesov klasifikator.

BAYES - ISPIT 20.6.2006.

$|C_1| = 1 \quad |C_2| = 1$

$C_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad C_2^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$

$d_1 - d_2 = \emptyset$

$-\cancel{\frac{1}{2}} x^T \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \cancel{\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} x_1 - 2 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 \end{bmatrix} - \cancel{\frac{1}{2}} \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{\emptyset} + \frac{1}{2} \underbrace{\cancel{\ln 1}}_{\emptyset} = \emptyset$

$-\frac{1}{2} x_1^2 - 2 x_2^2 + 2(x_1 - 2)^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = \emptyset$

$-\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{3}{2} x_2^2 + 2x_1^2 - 4x_1 + 4 = \emptyset$

$\boxed{\frac{3}{2} x_1^2 - \frac{3}{2} x_2^2 - 4x_1 + 4 = \emptyset}$