1 Karhunen-Loeva transformacija

I. pristup: K-L transformacija kao postupak minimizacije srednje kvadratne pogreške približnog zapisa uzorka

- Za svaki potpuni skup ortonormiranih jediničnih vektora $\{\vec{e_j}\}$ možemo uzorak $\vec{X}$ zapisati kao:
  $\vec{X} = \sum_{j=1}^{r} c_j \vec{e_j}$.
  gdje su c_j; $i = 1, 2, \ldots, r$ koeficijenti reda.
  Ako uzorak $\vec{X}$ aproksimiramo pomoću n<r članova /koeficijenata reda izazvat ćemo srednju kvadratnu pogrešku $\vec{\mathcal{E}}^2 = E\left\{|\vec{X} - \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{e_j}|^2\right\}$, gdje je E operator matematičkog očekivanja.
  $\vec{\mathcal{E}}^2 = E\left\{|\sum_{j=1}^{r} c_j \vec{e_j} - \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{e_j}|^2\right\}$
- ako uzmemo u obzir ortonormalnost jediničnih vektora:
  $\vec{e_j}^T \vec{e_i} = \begin{cases} 1, \text{ ako je } j = i \\ 1, \text{ ako je } j \neq i \end{cases}$
  dobivamo $\vec{\mathcal{E}}^2 = E\left\{\sum_{j=n+1}^{r} c_j^2\right\}$
- uzevši u obzir ortonormalnost jediničnih vektora $\vec{e_j}$ dobivamo:
  $\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} c_j \vec{e_j} \Big/ \cdot \vec{e_j}^T$
  $\vec{e_j}^T \vec{X} = \vec{e_j}^T (c_1 \vec{e_1} + c_2 \vec{e_2} + \ldots + c_r \vec{e_r})$
  $\vec{e_j}^T \vec{X} = \vec{e_j}^T \vec{e_j} c_j$
  $c_j = \vec{e_j}^T \vec{X}$ (1. međurezultat)
  uvrstimo 1. međurezultat u $\vec{\mathcal{E}}^2$:
  $\vec{\mathcal{E}}^2 = E\left\{\sum_{j=n+1}^{r} \underbrace{\vec{e_j}^T \vec{X} \vec{X}^T \vec{e_j}}_{c_j^2}\right\}$
- Vektori $\vec{e_j}$ su deterministički zato možemo zamijeniti redoslijed operacija zbrajanja i matematičkog očekivanja:
  $\vec{\mathcal{E}}^2 = \sum_{j=n+1}^{r} \vec{e_j}^T [E\left\{\vec{X}\vec{X}^T\right\}] \vec{e_j}$
  Što je $E\left\{\vec{X}\vec{X}^T\right\}$?
  - korelacijska matrica uzoraka R

Možemo zapisati:
$\vec{\mathcal{E}}^2 = \sum\limits_{j=n+1}^{r} \vec{e_j}^T R \vec{e_j}$
Skup ortonormalnih vektora $\vec{e_j}$ (koordinatni sustav) koji minimizira srednju kvadratnu pogrešku $\vec{\mathcal{E}}^2$ možemo dobiti pomoću Lagrangeovih multiplikatora
Lagrangeovu funkciju:
$\mathcal{L}(\vec{e_j}) = \sum\limits_{j=n+1}^{r} \vec{e_j}^T R \vec{e_j} - \sum\limits_{j=n+1}^{r} \lambda_j \cdot (\vec{e_j}^T \vec{e_j} - 1)$
deriviramo po $\vec{e_j}$ i izjednačimo s nulom.
Najmanju vrijednost kriterijske funkcije dobivamo s vektorima $\vec{e_j}$ koji zadovoljavaju jednadžbu:
$(R - \lambda_j I)\vec{e_j} = \vec{0}$, odnosno jednadžbu:
$R\vec{e_j} = \lambda_j \vec{e_j}$
Najbolji vektori $\vec{e_j}$ - koordinatne osi Karhunen-Loeve - su **svojstveni vektori korelacijske matrice** $R = E\left\{\vec{X}\vec{X}^T\right\}$, gdje svojstvenom vektoru $\vec{e_j}$ odgovara svojstvena vrijednost korelacijske matrice λ_j

- **Svojstveni vektori korelacijske matrice su ortonormalni → koeficijenti K-L reda su međusobno nekorelirani**

- Korelacijska matrica vektora koeficijenata reda $R = E\left\{\vec{C}\vec{C}^T\right\}$ je dijagonalna matrica elemenata koji su jednaki svojstvenim vrijednostima korelacijske matrice $R = E\left\{\vec{X}\vec{X}^T\right\}$

- Ako u izrazu za srednje kvadratnu pogrešku $\vec{\mathcal{E}}^2$ zamijenimo $R\vec{e_j}$ sa $\lambda_j \vec{e_j}$ i uzmemo u obzir ortonormalnost vektora $\vec{e_j}$ dobivamo $\vec{\mathcal{E}}^2 = \sum\limits_{j=n+1}^{r} \lambda_j$

ZAKLJUČAK: Najmanju srednju kvadratnu pogrešku dobivamo (kada imamo približni zapis uzorka $\vec{X}$ pomoću n<r koeficijenata reda) ako vektor $\vec{X}$ zapišemo s koeficijentima onih svojstvenih vektora $\vec{e_j}$ koji odgovaraju najvećim svojstvenim vrijednostima korelacijske matrice R.

- Tramsformacijsku matricu A koja minimizira $\vec{\mathcal{E}}^2$ tvorimo iz prvih n vektora koordinatnih osi $\vec{e_j}$; $j = 1, 2, \ldots, n$ koji su uređeni po padajućem redoslijedu svojstvenih vrijednosti matrie R:
  $A = \begin{bmatrix} \vec{e_1}^T \\ \vec{e_2}^T \\ \vdots \\ \vec{e_n}^T \end{bmatrix}$, gdje $\vec{e_j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ odgovaraju članovima niza $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \ldots \geq \lambda_r$

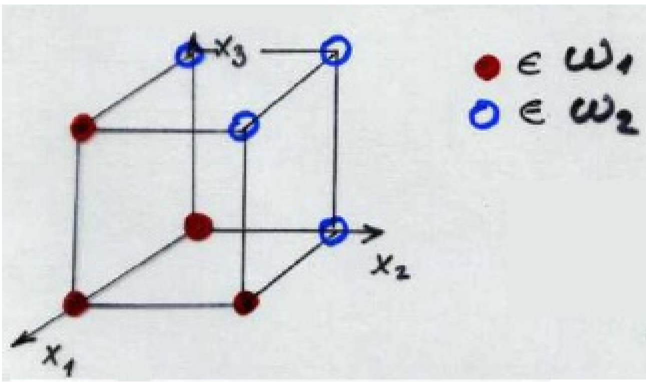
- Vektor uzoraka $\vec{Y}$ dobivamo :
  $\vec{Y}_{[n\times 1]} = A_{[n\times r]} \cdot \vec{X}_{[r\times 1]}$ n<r
  $\vec{Y}$ je reducirani vektor uzoraka s r dimenzija na n !

Na području raspoznavanja uzoraka umjesto korelacijske matrice R upotrebljavamo kovarijantnu matricu K (inačica K-L transformacije) koja je osnova za računanje koordinatnih osi reda:
$K\vec{e_j} = \lambda_j \vec{e_j}$. gdje je $K = E\left\{(\vec{x}-\vec{m})(\vec{x}-\vec{m})^T\right\}$

- Uporabom kovarijantne matrice (umjesto korelacijske matrice) naglašavamo varijacije uzoraka u razredima / od svakog smo uzorka oduzeli srednju vrijednost svih uzoraka /

- Srednja kvadratna pogreška ako uzorak $\vec{X}$ zapišemo uzorkom $\vec{Y}$, $\vec{Y} = A\vec{X}$ je:
  $\vec{\mathcal{E}}^2 = \sum_{j=n+1}^{r} E\left\{c_j\right\}\vec{e_j}$

Primjer:
Zadani su uzorci za učenje:
Razred $\omega_1 = \left\{(0,0,0)^T,(1,0,0)^T,(1,0,1)^T,(1,1,0)^T\right\}$
Razred $\omega_2 = \left\{(0,0,1)^T,(0,1,0)^T,(0,1,1)^T,(1,1,1)^T\right\}$



Slika 1: Primjer

Pretpostavimo $P(\omega_1) = P(\omega_2) = 0.5$
- Vektore za učenje (radi lakšeg računanja) označimo dvama indeksima
$\omega_1 = \left\{\vec{X_{11}}, \vec{X_{12}}, \vec{X_{13}}, \vec{X_{14}}\right\}$
$\omega_1 = \left\{\vec{X_{21}}, \vec{X_{22}}, \vec{X_{23}}, \vec{X_{24}}\right\}$
$\vec{X_{ij}}$, i označava pripadnost razredu, j označava redoslijed uzoraka u razredu
Izračunajmo korelacijsku matricu R:
$R = E\left\{\vec{X}\vec{X}^T\right\}$
$R = \sum_{i=1}^{2} P(\omega_i)\cdot E\left\{\vec{X_i}\vec{X_i}^T\right\} = \frac{1}{2}E\left\{\vec{X_1}\vec{X_1}^T\right\} + \frac{1}{2}E\left\{\vec{X_2}\vec{X_2}^T\right\}$, gdje $E\left\{\vec{X_1}\vec{X_1}^T\right\}$ i $E\left\{\vec{X_2}\vec{X_2}^T\right\}$ označavaju očekivanje svih uzoraka u razredima ω_1 i ω_2, respektivno.
$R = \frac{1}{N_1}P(\omega_1)\sum_{j=1}^{N_1=4}\vec{X_{1j}}\vec{X_{1j}}^T + \frac{1}{N_2}P(\omega_2)\sum_{j=1}^{N_2=4}\vec{X_{2j}}\vec{X_{2j}}^T$

$$R = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\left\{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)\right\}+$$

$$\frac{1}{4}\frac{1}{2}\left\{\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix} + \frac{1}{8}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 3 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$R = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Svojstvene vrijednosti i normalizirani vekori su:

$$\lambda_1 = 1 \qquad \vec{e_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4} \qquad \vec{e_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{4} \qquad \vec{e_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

Izaberimo $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ koji odgovaraju najvećim svojstvenim vrijednostima te dobivamo transformacijsku matricu A:

$$A = \begin{bmatrix}\vec{e_1}^T\\\vec{e_2}^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

Transformirajmo uzorke $\vec{X}$ i $\vec{Y}$

$\vec{Y} = A \cdot \vec{X}$

Dobivamo:

$$\vec{Y_1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{Y_{11}} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{Y_2} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix} \qquad \vec{Y_{12}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\-2\end{bmatrix}$$

$$\vec{Y_{13}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}$$

$$\vec{Y_{14}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\-1\end{bmatrix}$$

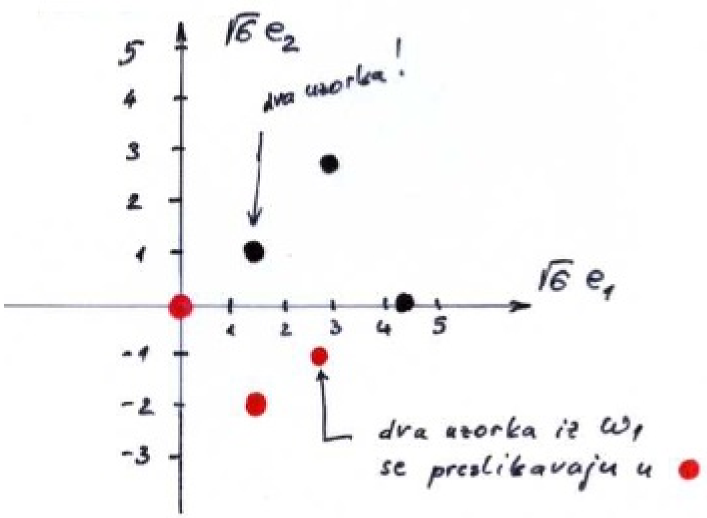
Uzorci iz razreda ω_2:

$$\vec{Y_{21}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{Y_{22}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$\vec{Y_{23}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\sqrt{2}\\2\end{bmatrix}$$

$$\vec{Y_{24}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}3\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}$$



Slika 2: Prikaz uzoraka u 2D prostoru

Vidimo: u reduciranom prostoru uzorci su i dalje linearno separatibilni
Što će se dogoditi ako uzorke transformiramo u 1-dimenzionalni prostor?

II. pristup: K-L transformacija kao postupak kojim se maksimizira varijanca

- ako imamo vektor $\vec{X}$ koji je r-dimenzionalan i želimo ga predočiti uporabom n<r komponenti $\rightarrow$ vektor $\vec{X}$ reduciramo tako da srednja kvadratna pogreška između vektora $\vec{X}$ i aproksimiranog vektora bude jednaka sumi varijanci komponenti koje su eliminirane iz $\vec{X}$
  Drugim riječima: aproksimaciju vekora $\vec{X}$ "gradimo" iz n<r komponenti koje imaju najveću varijancu!

- Označimo s $\vec{X}$ r-dimenzionalni vektor (slučajni)!

- Pretpostavimo da slučajni vektor $\vec{X}$ ima srednju vrijednost 0:
  $E[\vec{X}] = \vec{0}$, gdje je E operator matematičkog očekivanja!

- ako $\vec{X}$ nema srednju vrijednost $\vec{0}$ možemo srednju vrijednosti oduzeti od $\vec{X}$ prije negoli nastavimo daljnji postupak

- označimo s $\vec{e}$ jedinični vektor koji je također r-dimenzionalan

- Projiciramo vektor $\vec{X}$ na $\vec{e}$!
  / Projekcija je definirana kao skalarni produkt vektora $\vec{X}$ i $\vec{e}$ /
  $A = \vec{X}^T\vec{e} = \vec{e}^T\vec{X}$
  uz ograničenje
  $\|\vec{e}\| = (\vec{e}^T\vec{e})^{1/2} = 1$

- Projekcija A je slučajna varijabla sa srednjom vrijednosti i varijancom u kojima se zrcali statistika slučajnog vektora $\vec{X}$

- uz pretpostavku da slučajni vektor $\vec{X}$ ima srednju vrijednost $\vec{0}$ slijedi da je srednja vrijednost projekcije A
  $E[A] = E[\vec{e}^T\vec{X}] = \vec{e}^T E[\vec{X}] = 0$

- Varijanca projekcije A (zato što je $E[A] = 0$) je:
  $\sigma^2 = E[A^2] = E[(\vec{e}^T\vec{X})(\vec{X}^T\vec{e})] = \vec{e}^T E[\vec{X}\vec{X}^T]\vec{e} = \vec{e}^T R\vec{e}$, gdje je R $r \times r$ korelacijska matrica slučajnog vektora $\vec{X}$:
  $R = E[\vec{X}\vec{X}^T]$

- Korelacijska matrica je simetrična:
  $R^T = R$
  /iz tog svojstva slijedi:
  $\vec{a}^T R\vec{b} = \vec{b}^T R\vec{a}$, gdje su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $r \times 1$ vektori/

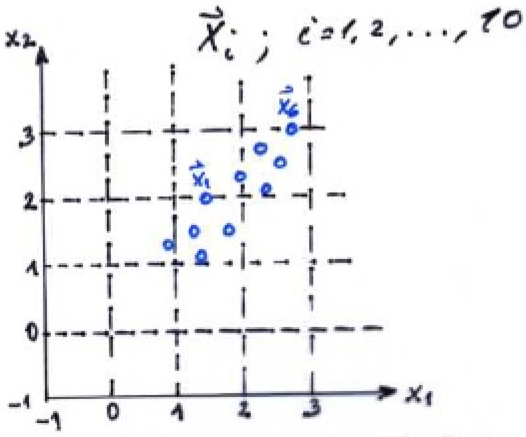
- Označimo s Ψ varijancu σ^2
  $\Psi(\vec{e}) = \sigma^2$
  $\Psi(\vec{e}) = \vec{e}^T R\vec{e}$

- **Tražimo one jedinične vektore ẽ uzduž koji $\boldsymbol{\Psi}$(ẽ) ima ekstreme ili stacionarne vrijednosti (lokalni maksimum ili lokalni minimum) / uz ograničenja koje se odnosi na Eukldisku normu vektora ẽ; $\mathbf{\tilde{e}^T\tilde{e} = 1}$ /**

Optimizacijski problem:
$\Psi(\vec{e})$ - maksimalna vrijednost uz ograničenje $\vec{e}^T\vec{e} = 1$
$\mathcal{L}(\vec{e}) = \vec{e}^T R\vec{e} - \lambda(\vec{e}^T\vec{e} - 1)$
Rješenje:
$(R - \lambda I)\vec{e} = \vec{0}$
odnosno: $R\vec{e} = \lambda\vec{e}$

Primjer: Zadan je skup 2-D vektora:

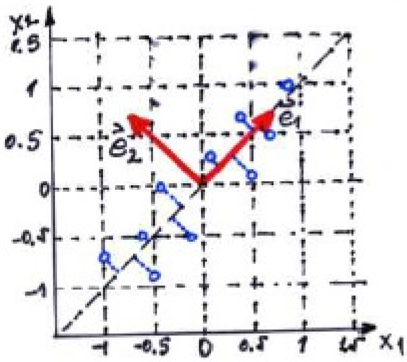
$\vec{X_1} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\vec{X_2} = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}$ $\vec{X_3} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.3 \end{bmatrix}$ $\vec{X_4} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.3 \end{bmatrix}$ $\vec{X_5} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 2.5 \end{bmatrix}$
$\vec{X_6} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{X_7} = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 2.7 \end{bmatrix}$ $\vec{X_8} = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ $\vec{X_9} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \end{bmatrix}$ $\vec{X_{10}} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 2.1 \end{bmatrix}$



Slika 3: Primjer

Izračunajmo srednju vrijednost i kovarijantnu matricu:
$E[\vec{X}] = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\vec{X_k} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\vec{X_k} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2 \end{bmatrix}$
K umjesto R
$K = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(\vec{X_k} - E[\vec{X}])(\vec{X_k} - E[\vec{X}])^T$
$K = \begin{bmatrix} 0.3990 & 0.3456 \\ 0.3456 & 0.4044 \end{bmatrix}$
-svojstvene vrijednosti matrice K su $\lambda_1 = 0.7423$ i $\lambda_2 = 0.051$ a svojstveni vektori
$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 0.6991 \\ 0.715 \end{bmatrix}$ i $\vec{e_1} = \begin{bmatrix} -0.715 \\ 0.6991 \end{bmatrix}$
svojstveni vektori $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ s ishodištem u $E[\vec{X}]$ razapinju novi prostor na kojeg preslikavamo novi prostor na kojeg preslikavamo uzorke $\vec{X_k}$; $k = 1, 2, \ldots, 10$!

- Svojstvene vrijednosti λ_1 i λ_2 su varijance uzduž osi $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$
- Vidimo da je raspršenje skupa najveće uzduž osi $\vec{e_1}$ jer je $\lambda_1 > \lambda_2$!

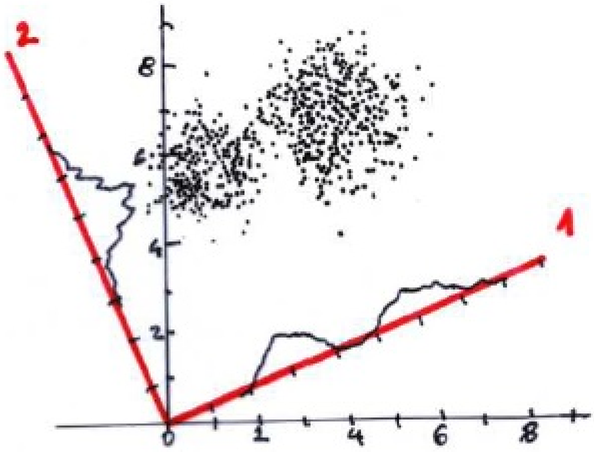


Slika 4: Normalizirani skup točaka s ucrtanim svojstvenim vektorima

- Izvorni skup je dvodimenzionalan. Možemo ga aproksimirati preslikavanjem na jednodimenzionalni prostor koristeći $\vec{e_1}$ kao os projekcije:
  $\vec{Y_1} = \vec{e_1}^T \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{bmatrix} = [0.6991, 0.715] \begin{bmatrix} 1.5 - 1.9 \\ 2 - 2 \end{bmatrix}$
  PAZI $x_1^* = x_1 - E[\vec{X}]$; $x_2^* = x_2 - E[\vec{X}]$
  $\vec{Y_1} = -0.28$ $\vec{Y_2} = -1.2$ $\vec{Y_3} = -0.99$ $\vec{Y_4} = 0.28$ $\vec{Y_5} = 0.85$
  $\vec{Y_6} = 1.34$ $\vec{Y_7} = 0.78$ $\vec{Y_8} = -0.78$ $\vec{Y_9} = -0.43$ $\vec{Y_{10}} = 0.42$
  $\vec{Y_i}$ promatramo kao jednodimenzionalni vektor!

Izvorne podatke, uz gubitak infromacije, možemo rekonstruirati primjenimo li inverznu transformaciju
$\vec{Y} = A \cdot \vec{X} \rightarrow \vec{X} = A^{-1}\vec{Y}$
vrijedi: $A^{-1} = A^T$ $\quad \vec{X}_{[2\times 1]} = A^T_{[2\times 1]}\vec{Y}_{[1\times 1]}$
za naš slučaj $\vec{X}_{[2\times 1]}$ $\quad \vec{Y}_{[1\times 1]}$
$A = \begin{bmatrix} 0.6991 & 0.715 \end{bmatrix}_{[1\times 2]}$
$A^T = \begin{bmatrix} 0.6991 \\ 0.715 \end{bmatrix}$
$\vec{X_1}^A = \begin{bmatrix} 0.6991 \\ 0.715 \end{bmatrix} \cdot [-0.28] + \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2 \end{bmatrix}$ → DODALI SREDNJU VRIJEDNOST
$\vec{X_1}^A = \begin{bmatrix} -0.195 \\ -0.2002 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2 \end{bmatrix}$
$\vec{X_1}^A = \begin{bmatrix} 1.705 \\ 1.7998 \end{bmatrix}$ → APROKSIMIRANA VRIJEDNOST
za $\vec{X_6} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 3 \end{bmatrix}$ ← izvorna vrijednost
$\vec{Y_6} = [1.34]$
$\vec{X_6}^A = A^T \cdot \vec{Y_6} = \begin{bmatrix} 0.6991 \\ 0.715 \end{bmatrix} \cdot [1.34] + \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9367 \\ 0.9581 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.9 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8367 \\ 2.9581 \end{bmatrix}$
Primjer:

- horizontalna i vertikalna os predstavlja "prirodni" koordinatni sustav skupa podataka



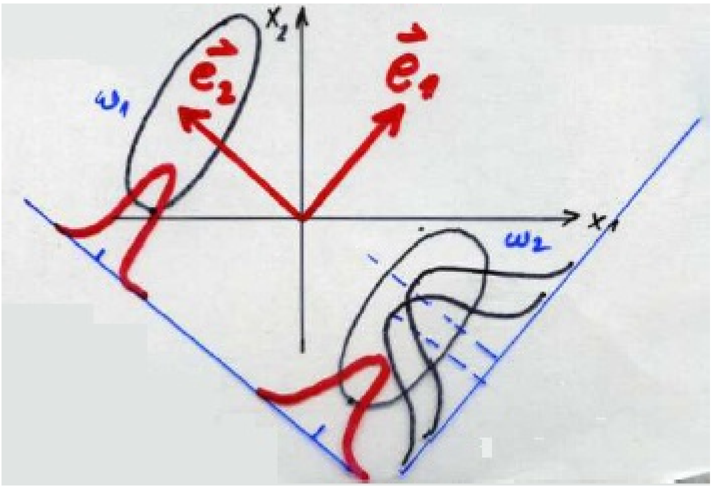
Slika 5: Primjer

- rotirane osi označene 1 i 2 su rezultat uporabe K-L transformacije na zadanom skupu podataka
- vidimo da projicirani skup podataka na os 1 sadrži istaknutu (engl. salient) karakteristiku podataka, tj. činjenicu da je skup podataka bimodalan
- varijanca projekcija skupa podataka na os 1 je veća od bilo koje druge projekcije (na osi u slici)

POZOR!

K-L transformacijom preslikavamo uzorke iz r-dimenzionalnog prostora u n-dimenzionalan prostor (n<r) uz kriterij najmanje srednje kvadratne pogreške preslikavanja! **To nužno ne znači da će separatibilnost razreda u n-dimenzionalnom prostoru biti jednaka ili približno jednaka separatibilnosti uzoraka u r-dimenzionalnom prostoru** (razumljivo jer je kriterijska funkcija takva da optimira rekonstrukciju!)
Ilustrirajmo to!
$\lambda_1 > \lambda 2$

Uzorci razreda ω_1 i ω_2 neka imaju normalnu distribuciju



Slika 6: Ilustracija