Slučajni procesi u sustavima

Završni ispit – 26. siječanj 2014.

1. **(8 bodova)** Promatramo aditivnu kombinaciju slučajnog procesa bez periodičkih komponenti $X(t)$ i nekoreliranog šuma $N(t)$, opisanih autokorelacijskim funkcijama $R_{XX}(\tau) = e^{-2|\tau|}$ i $R_{NN}(\tau) = e^{-3|\tau|}$.

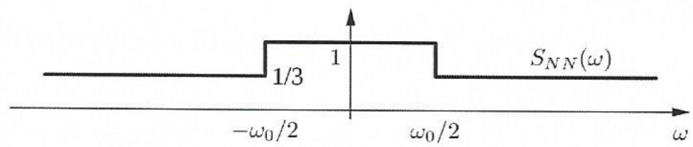
   a) **(2 boda)** Koristimo li za estimaciju signala $x(t)$ prilagođeni ili Wienerov filtar? Objasnite. Također objasnite u kojem smislu su ovi filtri optimalni.

   b) **(2 boda)** Odredite prijenosnu funkciju $H(\omega)$ potrebnog filtra.

   c) **(2 boda)** Izračunajte i skicirajte impulsni odziv izračunatog filtra. Može li filtar biti kauzalan? Objasnite.

   d) **(2 boda)** Odredite očekivanu kvadratnu pogrešku.

2. **(4 boda)** Promatramo aditivnu kombinaciju signala $x(t) = \frac{1}{\omega_0 t}\sin\omega_0 t$ i šuma čiji je spektar snage prikazan slikom 1..



Slika 1.: Spektar snage šuma.

   a) **(1 bod)** Koji filtar koristimo za detekciju signala iz aditivne kombinacije?

   b) **(3 boda)** Odredite prijenosnu funkciju i impulsni odziv odabranog filtra. Može li filtar biti kauzalan? Objasnite.

3. **(8 bodova)** Projektirajte kompander za slučajnu varijablu X s Laplaceovom razdiobom uz parametre $a = 2$ i $b = 4$.

   a) **(1 bod)** Odredite funkciju distribucije prvog reda slučajne varijable X i njezin inverz.

   b) **(2 boda)** Projektirajte kompander ako na raspolaganju imate 2 bita za kvantizaciju.

   c) **(2 boda)** Jesu li kompander, uniformni i Lloyd-Maxov kvantizator optimalni? Ako da, objasnite u kojem smislu.

   d) **(3 boda)** Skicirajte shemu kompandera, označite naziv i funkciju svakog bloka te naznačite razdiobe signala u svakom koraku.

4. **(8 bodova)** Neka su $Y_1, ..., Y_n$ nezavisne i jednoliko distribuirane slučajne varijable, gdje svaki Y_i ima funkciju gustoće:

$$f_Y(y|\theta) = \frac{y^2}{2\theta^3}\exp(-\frac{y}{\theta}), \qquad y > 0$$

   s parametrom $\theta > 0$. Za svaki i, $i = 1, ..., n$, vrijedi $E[Y_i] = 3\theta$ i $Var(Y_i) = 3\theta^2$

   a) **(2 boda)** Definirajte nepristranost, konzistentnost i efikasnost točkastog procjenitelja.

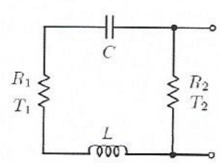
   b) **(1 bod)** Definirajte funkciju izglednosti (eng. *likelihood function*). Objasnite što je ML estimator.

   c) **(2 boda)** Izračunajte funkciju izglednosti $L(\theta)$.

   d) **(3 boda)** Odredite ML estimator parametra θ. Je li estimator pristran? (Pokažite!)

5. **(3 boda)** Slikom 2. je zadana električna mreža, koja se sastoji od idealnog kapaciteta, induktiviteta te od otpora R_i koji su na različitim temperaturama.

   a) **(3 boda)** Odredite izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže, $T_e(\omega)$



Slika 2.: Električna mreža.

6. (9 bodova) Uskopojasni slučajni proces pojasne širine $W << \omega_0$, sporo promjenjive amplitude $A(t)$ i faze $\theta(t)$, možemo prikazati u obliku:

$$N(t) = A(t)\cos(\omega_0 t) + \theta(t), \qquad \text{odnosno :} \tag{1}$$
$$N(t) = X(t)\cos(\omega_0 t) - Y(t)\sin(\omega_0 t). \tag{2}$$

Slikom 3. je zadana njegova spektralna gustoća snage, a slikama 4. sustavi koji izdvajaju komponente $X(t)$ i $Y(t)$.

a) **(3 boda)** Komponentu $X(t)$ možemo izraziti pomoću procesa $V_1(t)$ kao $X(t) = V_1(t) * h_{NP}(t)$, gdje je $h_{NP}(t)$ impulsni odziv idealnog NP filtra granične kružne frekvencije $\omega_g = \frac{W}{2}$. Korištenjem danog izraza izrazite korelaciju $R_{XX}(\tau)$ pomoću korelacijske funkcije početnog uskopojasnog procesa $R_{NN}(\tau)$.

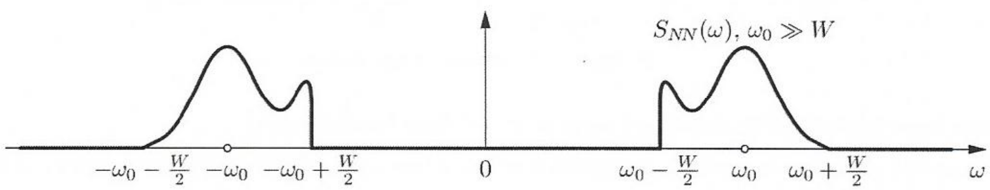
b) **(2 boda)** Ekvivalentno, izrazite kroskorelacijsku funkciju komponenti $X(t)$ i $Y(t)$ preko $V_1(t)$ i $V_2(t)$.

c) **(2 boda)** Prema vezi autokorelacijskih funkcija iz podzadatka a) pokažite da vrijedi:

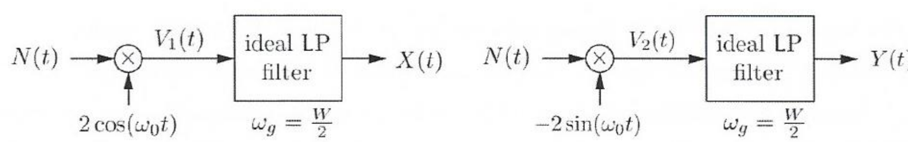
$$S_{XX}(\omega) = [S_{NN}(\omega - \omega_0) + S_{NN}(\omega + \omega_0)]\,\mathrm{rect}(\omega/W).$$

d) **(2 boda)** Prema vezi autokorelacijskih funkcija iz podzadatka b) pokažite da vrijedi:

$$S_{XY}(\omega) = j[S_{NN}(\omega - \omega_0) - S_{NN}(\omega + \omega_0)]\,\mathrm{rect}(\omega/W).$$



Slika 3.: Spektralna gustoca snage S_{XX}.



Slika 4.: Sustav za izdvajanje komponente $X(t)$ (lijevo) i komponente $Y(t)$ (desno).