SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA
ZAVOD ZA ELEKTRONIČKE SUSTAVE I OBRADBU INFORMACIJA

TOMISLAV PETKOVIĆ, DAMIR SERŠIĆ

# ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ SLUČAJNIH PROCESA U SUSTAVIMA

Zagreb, rujan 2012.

Dragi studentice i studenti,

ova zbirka riješenih zadataka je slobodno dostupna i može se preuzeti kao PDF datoteka s adrese `http://www.fer.unizg.hr/predmet/spus_a/`.

# Predgovor

Ova zbirka riješenih zadataka je zamišljena kao pomoć studentima pri pripremanju ispita iz predmeta *Slučajni procesi u sustavima*. Kako u zbirci vjerojatno ima još pogrešaka sve ispravke, primjedbe, prijedlozi i pohvale (pokude također) su dobrodošle i možete ih poslati e-poštom na adresu tomislav.petkovic@gmail.com.

# Sadržaj

# 1. Slučajni proces i njegova svojstva

## 1.1. Podjela slučajnih procesa

Prirodne ili tehničke fenomene često opisujemo signalima koje predstavljamo vremenskim funkcijama. Taj opis možemo prirodno proširiti ako pretpostavimo da je svaka takva funkcija ishod nekog slučajno eksperimenta $\omega$. U tom slučaju više ne govorimo o signalu $x(t)$, već o slučajnom procesu $X(t, \omega)$.

**Definicija 1.1.1. (Slučajni proces)** *Slučajni ili stohastički proces je familija slučajnih varijabli $X(t, \omega)$*[1]*. Slučajni proces možemo interpretirati kao preslikavanje*

$$X : T \times \Omega \to S,$$

*gdje je $T$ vrijeme dok je $S$ skup stanja unutar kojih proces poprima vrijednosti.*

Za različite ishode slučajnog eksperimenta $s_1$, $s_2$, $s_3$, itd. dobivamo različite signale $x(t, s_1)$, $x(t, s_2)$ i $x(t, s_3)$. Ti signali su pojedinačne realizacije slučajnog procesa (slika 1.1.). Odaberemo li pak različite fiksne vremenske trenutke $t_1$, $t_2$, $t_3$, itd. dobivamo slučajne varijable $X(t_1, s)$, $X(t_2, s)$ i $X(t_3, s)$ koje obično kraće zapisujemo izostavljajući $s$, dakle kao $X(t_1)$, $X(t_2)$ i $X(t_3)$. Ponekad ishod slučajnog ekspримenta $s$ izostavljamo i pri označavanju pojedinih realizacija slučajnog procesa pa umjesto $x(t, s_1)$ pišemo $x_1(t)$.

**Definicija 1.1.2. (Realizacija slučajnog procesa)** *Realizacija ili trajektorija slučajnog procesa je preslikavanje*

$$t \mapsto X(t, \omega)$$

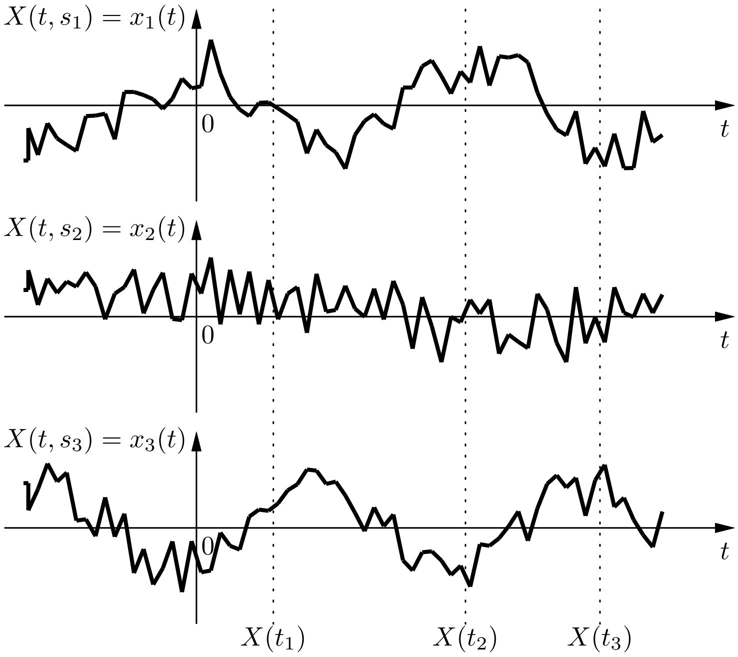
*za neki fiksni $\omega$.*

Neke trajektorije su manje, a neke su više vjerojatne što ovisi o odabranom događaju $\omega$. Isto vrijedi i za snopove trajektorija, samo što za snop promatramo skup koji sadrži više elementarnih događaja. Fiksiramo li pak vrijeme $t$ dobivamo slučajnu varijablu.

Slučajne procese uobičajeno dijelimo prema svojstvima vremenske varijable $t$ na slučajne procese i slučajne nizove. Za slučajne procese je vremenska varijabla $t$ kontinuirana, dok je za slučajne nizove vrijeme diskretno. Za slučajne nizove vrijeme obično označavamo s $n$. Prema dozvoljenim vrijednostima amplitude slučajne procese dijelimo na kontinuirane i diskretne. Dakle, podjela je:

1. po svojstvima vremenske varijable na
   (a) slučajne procese (kontinuirano vrijeme), i

[1] Iako je $\omega$ uobičajena oznaka u matematičkoj literaturi ponekad se slučajan događaj označava sa $s$ ili s nekim drugim slovom jer je $\omega$ uobičajna oznaka kružne frekvencije.



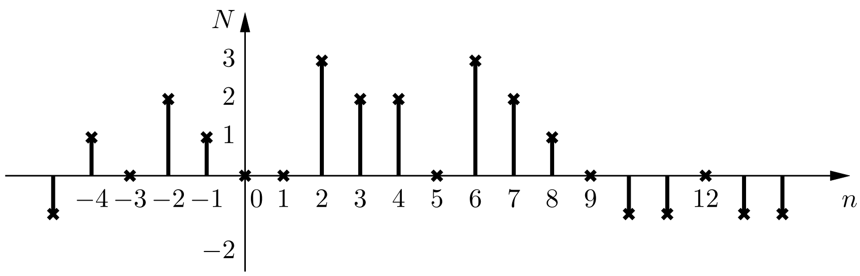

Slika 1.1.: Više realizacija jednog slučajnog procesa

   (b) slučajne nizove (diskretno vrijeme), te

2. po mogućim iznosima na
   (a) kontinuirane (kontinuirana amplituda), i
   (b) diskretne (amplituda poprima prebrojivo mnogo vrijednosti).

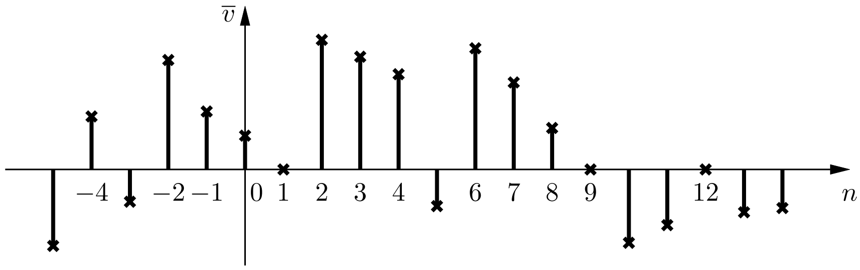
**Primjer 1.1.** Neka se slučajni eksperiment sastoji od promatranja prometa u nekoj nasumice odabranoj dvosmjernoj ulici. Definirajte različite vrste slučajnih procesa i nizova vezanih uz protok automobila kroz takvu ulicu.

RJEŠENJE: Definirajmo najprije diskretan slučajni niz. Takav proces karakteriziraju diskretne vrijednosti koje signal poprima u diskretnim trenutcima vremena. Jedna od mogućnosti je promatranje ukupnog broja automobila koji prođu ulicom u odabranom intervalu $T$. Pri tome možemo dogovorno prolaz automobila u jednom smjeru predstaviti s pozitivnim brojevima, a u drugom smjeru s negativnim brojevima. Jedna moguća realizacija prikazana je na slici 1.2..



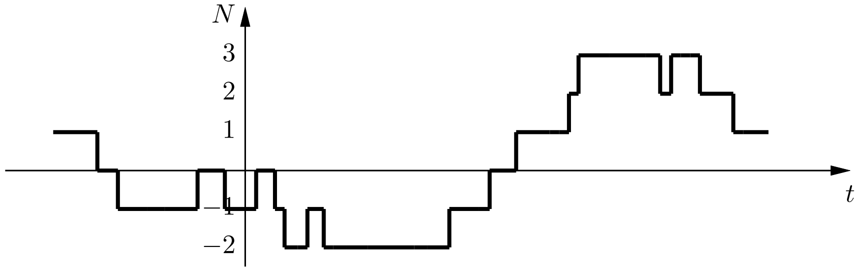

Slika 1.2.: Diskretni slučajni niz

Promatramo li umjesto broja automobila koji prođu kroz ulicu u određenom intervalu $T$ njihovu srednju brzinu, koja može poprimiti bilo koju vrijednost, dobivamo kontinuirani slučajni niz. Jedna moguća realzacija prikazana je na slici 1.3..



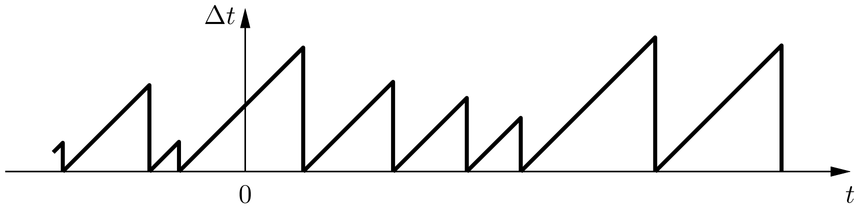

Slika 1.3.: Kontinuirani slučajni niz

Diskretni slučajni proces možemo dobiti ako promatramo kumulativan broj automobila koji su prošli ulicom. U tom slučaju za pojedinu realizaciju slučajnog procesa promjena amplitude se uvijek događa u trenutku prolaska automobila ulicom, odnosno vrijeme je kontinuirano. Jedna moguća realzacija prikazana je na slici 1.4..




Slika 1.4.: Diskretni slučajni proces

Promatramo li kumulativno vrijeme između prolaska dva automobila dobivamo kontinuirani slučajni proces. Jedna moguća realzacija prikazana je na slici 1.5..




Slika 1.5.: Kontinuirani slučajni proces

# 1.2. Konstrukcija slučajnog procesa

Postavlja se pitanje kako konstruirati slučajni proces. Problem konstrukcije se svodi na pronalaženje $\sigma$-algebre za prostor funkcija $f : T \to \mathbb{R}$ (trajektorije slučajnog procesa) te definiranje konačne mjere na njoj (vjerojatnosna mjera). Uobičajeno se koristi Kolmogorovljevo proširenje.

**Stavak 1.2.1. (Kolmogorovljevo proširenje)** *Neka su $\mu_n$, $1 \leq n < \infty$ vjerojatnosne mjere na $\mathbb{R}^n$ te neka su konzistente u slijedećem smislu—za svaki $n$ promotramo $\mu_{n+1}$ kao vjerojatnosnu mjeru na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Sada je $\mu_n$ granična mjera od $\mu_{n+1}$. Onda postoji jedinstvena vjerojatnosna mjera $\mu_\infty$ na $\mathbb{R}^\infty$ takva da uz $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\infty$ granična mjera od $\mu_\infty$ je upravo $\mu_n$.*

**Stavak 1.2.2. (Hahn-Kolmogorov)** *Neka je $\mathcal{A}_0$ algebra podskupova skupa $\Omega$. Ako konačno aditivna mjera $\mu_0 : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \infty$ zadovoljava*

$$\mu_0\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu_0(A_n)$$

*za svaki disjunktni niz $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ elemenata $\mathcal{A}_0$ takav da $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$ onda se $\mu_0$ na jedinstven način proširuje do mjere definirane na $\sigma$-algebri $\mathcal{A}$ generiranoj od $\mathcal{A}_0$, odnosno postoji jedinstvena mjera $\mu_{\mathcal{A}} \to \mathbb{R} \cup \infty$ takva da je restrikcija $\mu$ na $\mathcal{A}_0$ upravo $\mu_0$.*

# 1.3. Opis slučajnih procesa

## 1.3.1. Distribucija i gustoća vjerojatnosti

Odaberemo li neki vremenski trenutak $t_1$ za slučajni proces $X(t)$ dobivamo slučajnu varijablu $X(t_1)$. Za svaki proces možemo proizvoljno odabrati bilo koji broj vremenskih trenutaka te promatrati tako dobivene slučajne varijable. Osim samih slučajnih varijabli možemo promatrati i njihove zajedničke distirbucije, odnosno funkcije gustoće vjerojatnosti.

Za slučajnu varijablu $X(t_1)$ funkcija distiribucije vjerojatnosti je

$$F_{X(t_1)}(x) = P\big(X(t_1) < x\big), \tag{1.1}$$

dok je odgovarajuća gustoća vjerojatnosti

$$f_{X(t_1)}(x) = \frac{d}{dx} F_{X(t_1)}(x). \tag{1.2}$$

Za slučajni proces $X(t)$ definiramo općenitu distribuciju i gustoću $n$-tog reda kao

$$F_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\big(X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \ldots, X(t_n) < x_n\big), \tag{1.3}$$

i

$$f_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{X(t_1),\ldots,X(t_n)}(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.4}$$

Odaberemo li dva vremenska trenutka $t_1$ i $t_2$ time smo odabrali dvije slučajne varijable $X(t_1)$ i $X(t_2)$. Računanjem korelacije tih dviju slučajnih varijabli određujemo autokorelacijsku funkciju slučajnog procesa $X(t)$,

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\big[X(t_1)X(t_2)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \tag{1.5}$$

Neka su zadana dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$. Kroskorelacijska funkcija dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ je

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_{X(t_1),Y(t_2)}(x, y) dx dy. \tag{1.6}$$

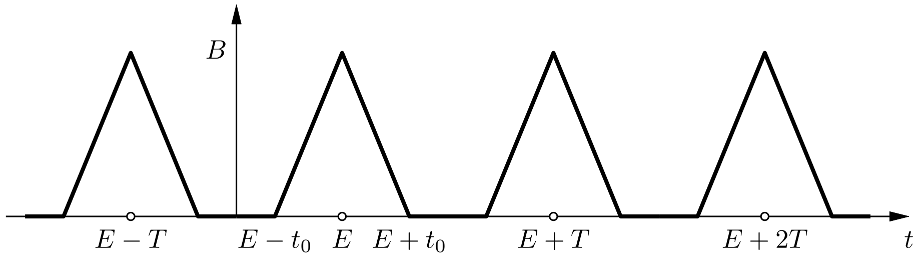
Procesi $X(t)$ i $Y(t)$ su ortogonalni ako je

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0. \tag{1.7}$$

Ako su procesi $X(t)$ i $Y(t)$ statistički nezavisni vrijedi

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = E\big[X(t_1)\big] \cdot E\big[Y(t_2)\big]. \tag{1.8}$$

**Primjer 1.2.** Zadan je slučajni proces $X(t)$ čije su realizacije periodički ponavljani impulsi kako je prikazano na slici 1.6., gdje su $B$, $T$ i $t_0$ konstante za koje vrijedi $4t_0 \leq T$, dok je $E$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, T]$. Odredite




Slika 1.6.: Jedna realizacija slučajnog procesa

a) funkciju distribucije vjerojatnosti prvog reda $F_{X(t)}(x)$,

b) funkciju gustoće vjerojatnosti prvog reda $f_{X(t)}(x)$,

c) očekivanje $E[X(t)]$, moment drugog reda $E[X^2(t)]$ i varijancu $\sigma^2_{X(t)}$.

RJEŠENJE: Određivanje funkcije distirbucije i gustoće vjerojatnosti je međusobno povezano jer određivanjem jedne funkcije odmah prema izrazu (1.2) možemo odrediti i drugu. Mi ćemo odrediti funkciju gustoće $f_{X(t)}(x)$ zadanog procesa iz složene funkcije gustoće vjerojatnosti $f_{X(t),E}(x,e)$ na sljedeći način:

1. za neki fiksirani $e$ određujemo uvjetnu funkciju distribucije

$$F_{X(t)|E=e} = P\big(X(t) < x|E = e\big)$$

i pripadnu uvjetnu funkciju gustoće,

2. iz određene funkcije gustoće $f_{X(t)|E=e}(x)$ računamo zajedničku gustoću

$$f_{X(t),E}(x,e) = f_{X(t)|E=e}(x) \cdot f_E(e),$$

3. iz zajedničke funkcije gustoće vjerojatnosti $f_{X(t),E}(x,e)$ određujemo marginalnu gustoću vjerojatnosti $f_{X(t)}(x)$ i pripadnu distribuciju $F_{X(t)}(x)$.

Najprije određujemo uvjetnu distribuciju vjerojatnosti $F_{X(t)|E=e}$. Iz slike 1.6. vidimo da je za svaki odabrani $e$ vjerojatnost $P\big(X(t) < 0\big) = 0$, jer proces $X(t)$ nikada ne poprima negativne vrijednosti. Također vidimo da je vjerojatnost $P\big(X(t) < B\big) = 1$ jer proces $X(t)$ nikada ne dostiže vrijednosti veće od $B$. Iz slike također određujemo vjerojatnosti za $0 \leq x < B$ te dobivamo

$$P\big(X(t) = 0\big) = \frac{T - 2t_0}{T}$$

i

$$P\big(X(t) < x\big) = \frac{T - 2t_0}{T} + \frac{2t_0 x}{BT}, \quad \text{za } 0 < x < B.$$

Uvjetnu funkciju distiribucije sada možemo zapisati kao

$$F_{X(t)|E=e}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0 \\ \frac{T-2t_0}{T}\,\mathrm{s}(x) + \frac{2t_0 x}{BT}, & \text{za } 0 \leq x < B \\ 1, & \text{za } B \leq x \end{cases},$$

a iz nje dobivamo i uvjetnu funkciju gustoće

$$\frac{d}{dx}F_{X(t)|E=e}(x) = f_{X(t)|E=e}(x) = \begin{cases} \frac{T-2t_0}{T}\delta(x) + \frac{2t_0}{BT}, & \text{za } 0 \leq x < B \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Zajednička funkcija gustoće je $f_{X(t),E}(x,e) = f_{X(t)|E=e}(x) \cdot f_E(e)$. Kako je $f_E(e)$ jednolika na intervalu $[0,T]$ dobivamo

$$f_{X(t),E}(x,e) = \begin{cases} \frac{T-2t_0}{T^2}\delta(x) + \frac{2t_0}{BT^2}, & \text{za } (x,e) \in [0,B\rangle \times \langle 0,T\rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Sada integriranjem određujemo $f_{X(t)}(x)$ prema

$$f_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X(t),E}(x,e)de,$$

te za funkciju gustoće vjerojatnosti procesa $X(t)$ dobivamo

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{T-2t_0}{T}\delta(x) + \frac{2t_0}{BT}, & \text{za } 0 \leq x < B \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

dok je distribucija

$$F_{X(t)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0 \\ \frac{T-2t_0}{T}\,\mathrm{s}(x) + \frac{2t_0 x}{BT}, & \text{za } 0 \leq x < B \\ 1, & \text{za } B \leq x \end{cases}.$$

Primijetite da dobivena uvjetna distribucija $F_{X(t)|E=e}(x)$ nije uopće ovisila o izboru slučajne varijable $E = e$ te je stoga $F_{X(t)|E=e}(x) = F_{X(t)}$, odnosno koraci 2. i 3. postupka rješavanja nisu bili potrebni.

Preostaje nam još odrediti očekivanje, moment drugog reda i varijancu procesa $X(t)$. Očekivanje je

$$\begin{aligned} E\big[X(t)\big] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t)}(x)dx = \int_0^B x\frac{T-2t_0}{T}\delta(x)\,dx + \int_0^B x\frac{2t_0}{BT}\,dx \\ &= \frac{2t_0}{2BT}x^2\Big|_0^B = \frac{t_0 B}{T} = \overline{x} = \text{const} \end{aligned}$$

Moment drugog reda je

$$\begin{aligned} E\big[X^2(t)\big] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_{X(t)}(x)dx = \int_0^B x^2\frac{T-2t_0}{T}\delta(x)\,dx + \int_0^B x^2\frac{2t_0}{BT}\,dx \\ &= \frac{2t_0}{3BT}x^3\Big|_0^B = \frac{2}{3}\frac{t_0 B^2}{T} = \text{const} \end{aligned}$$

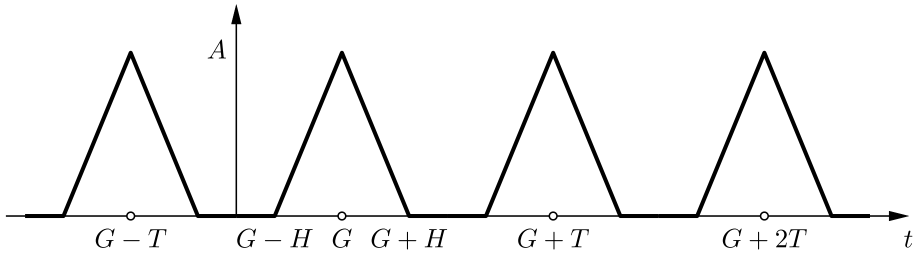
Varijanca $\sigma^2_{X(t)}$ prema definiciji je

$$\sigma^2_{X(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\overline{x})^2 f_{X(t)}(x)dx = E\big[X^2(t)\big] - \big(E\big[X(t)\big]\big)^2,$$

što nakon uvrštavanja daje

$$\sigma^2_{X(t)} = \frac{t_0 B^2}{T}\Big(\frac{2}{3} - \frac{t_0}{T}\Big).$$

**Primjer 1.3.** Zadan je slučajni proces $X(t)$ čije su realizacije periodički ponavljani impulsi kako je prikazano na slici 1.7., gdje su $A$ i $T$ konstante, dok su $G$ i $H$ nezavisne slučajne varijable s jednolikim razdiobama $F_G(g)$ na intervalu $[0,T]$ i $F_H(h)$ na intervalu $[0,T/4]$. Odredite




Slika 1.7.: Jedna realizacija slučajnog procesa

a) funkciju distribucije vjerojatnosti prvog reda $F_{X(t)}(x)$,

b) funkciju gustoće vjerojatnosti prvog reda $f_{X(t)}(x)$.

Rješenje: Postupamo kao u prethodnom zadatku te najprije određujemo uvjetnu distribuciju vjerojatnosti $F_{X(t)|G=g,H=h}(x)$. Iz slike 1.7. određujemo

$$\begin{aligned} P\big(X(t) \le A\big) &= 1 \\ P\big(X(t) < 0\big) &= 0 \\ P\big(X(t) = 0\big) &= \frac{T-2h}{T} \\ P\big(X(t) < x\big) &= \frac{T-2h}{T} + \frac{2hx}{AT}, \quad \text{za } 0 < x < A \end{aligned}$$

te je uvjetna funkcija distribucije vjerojatnosti

$$F_{X(t)|G=g,H=h}(x) = \begin{cases} 1, & A \le x \\ \frac{T-2h}{T}\,\mathrm{s}(x) + \frac{2hx}{AT}, & 0 \le x < A \\ 0, & x < 0 \end{cases},$$

dok je uvjetna funkcija gustoće

$$f_{X(t)|G=g,H=h}(x) = \begin{cases} \frac{T-2h}{T}\delta(x) + \frac{2h}{AT}, & 0 \le x < A \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Traženu funkciju gustoće vjerojatnosti $f_{X(t)}(x)$ određujemo kao marginalnu gustoću:

$$f_{X(t)}(x) = \iint f_{X(t)|G=g,H=h}(x) f_G(g) f_H(h)\, dg dh.$$

Primijetite da uvjetna gustoća ovisi samo o slučajnoj varijabli $H$ te integral po $G$ možemo izostaviti. Sada je

$$\begin{aligned} f_{X(t)}(x) &= \int_0^{T/4} \Big(\frac{T-2h}{T}\delta(x) + \frac{2h}{AT}\Big)\frac{4}{T}\, dh \\ &= \frac{4}{T}\left(h\delta(x) - \frac{h^2}{T}\delta(x) + \frac{h^2}{AT}\right)\Bigg|_0^{T/4} \\ &= \frac{4}{T}\Big(\frac{T}{4}\delta(x) - \frac{T^2}{16T}\delta(x) + \frac{T^2}{16AT}\Big) \\ &= \frac{3}{4}\delta(x) + \frac{1}{4A}. \end{aligned}$$

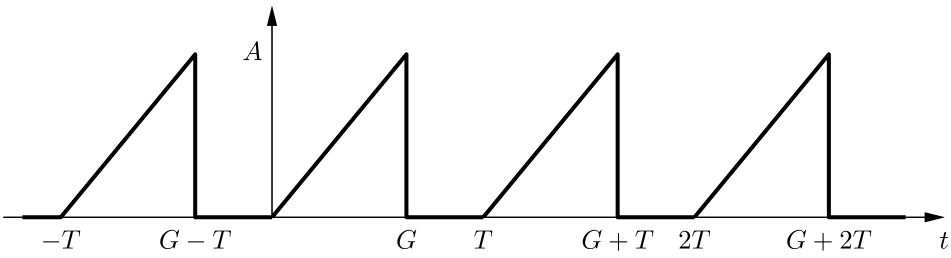
Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa $X(t)$ je

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\delta(x) + \frac{1}{4A}, & 0 \le x \le A \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

dok je funkcija distribucije

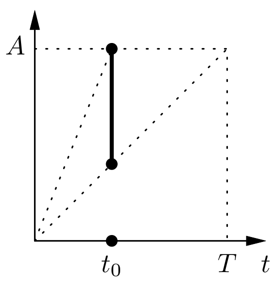
$$F_{X(t)}(x) = \begin{cases} 1, & A \leq x \\ \frac{3}{4}\,\mathrm{s}(x) + \frac{x}{4A}, & 0 \leq x < A \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

**Zadatak 1.1.** Zadan je slučajni proces $X(t)$ čije su realizacije periodički ponavljani impulsi kako je prikazano na slici 1.8., gdje su $A$ i $T$ konstante, dok je $G$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom $F_G(g)$ na intervalu $[0, T]$. Odredite funkciju distribucije vjerojatnosti prvog reda $F_{X(t)}(x)$, funkciju gustoće vjerojatnosti prvog reda $f_{X(t)}(x)$ te očekivanu vrijednost $E[X(t)]$ za svaki $t$. Je li proces stacionaran?




Slika 1.8.: Jedna realizacija slučajnog procesa

Rješenje: Moramo odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti za svaki trenutak $t$. Primjetimo najprije da je proces periodičan te je stoga dovoljno promatrati samo jedan period—neka to bude osnovni period $[0, T]$. Fiksirajmo sada neki trenutak $t_0$ iz odabranog perioda. Iz slike 1.9. vidimo da amplituda slučajnog procesa za odabrani $t_0$ može biti ili nula ili neka vrijednost iz intervala $[A\frac{t_0}{T}, A]$, s time da je točna vrijednost amplitude slučajnog procesa $X(t)$ određena upravo slučajnom varijablom $G$ (za svaku određenu vrijednost $g$ znamo koju vrijednost proces poprima u svakom trenutku $t$).




Slika 1.9.: Osnovni period slučajnog procesa

Sada je lagano odrediti koliko realizacija za odabrani trenutak $t_0 \in [0, T]$ popirma vrijednost nula, a koliko realizacija poprima vrijednost iz intrevala $[A\frac{t_0}{T}, A]$. Vrijedi:

$$P\big(X(t_0) = 0\big) = P\big(G < t_0\big) = \frac{t_0}{T}$$
$$P\Big(A\frac{t_0}{T} \leq X(t_0) \leq A\Big) = P\big(t_0 < G < T\big) = \frac{T - t_0}{T}$$

Funkcija razdiobe je definirana kao $P\big(X(t_0) \le x\big)$. Za $x \in [A\frac{t_0}{T}, A]$ je sada

$$\begin{aligned} P\big(X(t_0) \le x\big) &= P\big(X(t_0) = 0\big) + P\Big(A\frac{t_0}{T} \le X(t_0) \le x\Big) \\ &= \frac{t_0}{T} + P\Big(\frac{At_0}{x} < G < T\Big) = \frac{t_0}{T} + \int_{At_0/x}^{T} f_G(g)\, dg \\ &= \frac{t_0}{T} + \int_{At_0/x}^{T} \frac{1}{T}\, dg = \frac{t_0}{T} + \frac{1}{T}\Big(T - \frac{At_0}{x}\Big) \end{aligned}$$

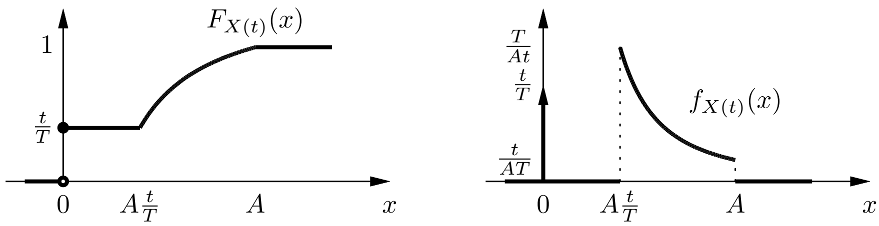
Iz dobivenog izraza možemo odmah napisati traženu funkciju razdiobe $F_{X(t)} = P\big(X(t) \le x\big)$ za svaki $t$ iz osnovnog perioda:

$$F_{X(t)}(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{t}{T}, & 0 \le x < A\frac{t}{T} \\ \frac{t}{T} + 1 - \frac{At}{Tx}, & A\frac{t}{T} \le x < A \\ 1, & A < x \end{cases}.$$

Deriviranjem razdiobe dobivamo funkcija gustoće vjerojatnosti na osnovnom periodu:

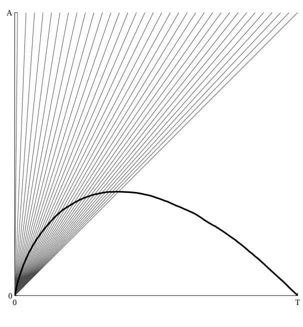
$$f_{X(t)}(x) = \frac{t}{T}\delta(x) + \begin{cases} \frac{At}{Tx^2}, & A\frac{t}{T} \le x \le A \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Vidimo da funkcija gustoće slučajnog procesa $f_{X(t)}(x)$ ima vrijednost $\frac{t}{T}\delta(x)$ u nuli jer funkcija raziobe ima skok za $x = 0$. Funkcije razdiobe i gustoće su nacrtane na slici 1.10..




Slika 1.10.: Funkcije razdiobe i gustoće vjerojatnosti

Kako funkcije razdiobe i gustoće ovise o vremenu $t$ proces nije stacionaran. Nacrtamo li na jednoj slici osnovne periode odabranih 20-tak realizacija kao što je prikazano na slici 1.11. odmah uočavamo da realizacije nemaju jednako prekrivanje za svaki $t$, odnosno da proces nije stacionaran prvog reda u širem smislu. Također možemo odmah procijeniti kako izgleda očekivanje procesa za svaki $t$ (na slici je nacrtano podebljanom linijom). Vidimo da očekivanje ovisi o vremenu $t$ pa shodno tome proces ne može biti striktno stacionaran.

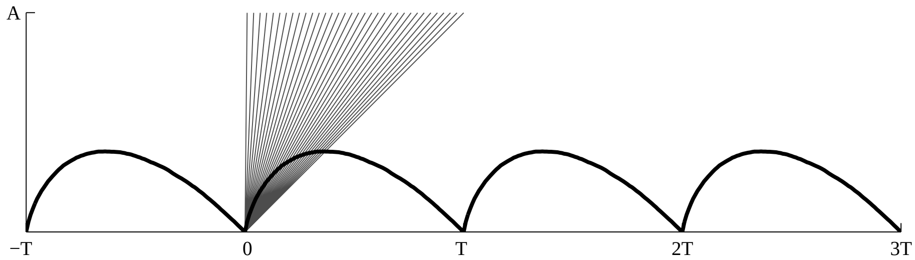


Slika 1.11.: Jedan period zadanog periodičkog slučajnog procesa

Odredimo još i točan izraz za očekivanje slučajnog procesa. Na osnovnom periodu je

$$E\big[X(t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{t}{T}\delta(x)\,dx + \int_{At/T}^{A} x\frac{At}{Tx^2}\,dx$$
$$= 0\frac{t}{T} + \frac{At}{T}\ln(x)\Big|_{At/T}^{A} = \frac{At}{T}\ln(A) - \ln\Big(\frac{At}{T}\Big)$$

Sada smo dobili izraze za razdiobu, gustoću i očekivanje, no samo za osnovni period. Jednostavnim proširivanjem po periodičnosti na ostale periode dobivamo očekivanje za bilo koji $t$ (vidi sliku 1.12. na kojoj je nacrtano očekivanje $E\big[X(t)\big]$ za $t \in [-T, 3T]$).




Slika 1.12.: Očekivana vrijednost $E[X(t)]$ zadanog slučajnog procesa

Zadatak možemo riješiti i na drugi način:

1. za neki fiksirani $g$ određujemo uvjetnu funkciju razdiobe
$$F_{X(t)|G=g} = P\big(X(t) < x|G = g\big)$$
i pripadnu uvjetnu funkciju gustoće,
2. iz određene funkcije gustoće $f_{X(t)|G=g}(x)$ računamo zajedničku gustoću
$$f_{X(t),G}(x,g) = f_{X(t)|G=g}(x) \cdot f_G(g),$$
3. iz zajedničke funkcije gustoće vjerojatnosti $f_{X(t),G}(x,g)$ određujemo marginalnu gustoću vjerojatnosti $f_{X(t)}(x)$ i pripadnu razdiobu $F_{X(t)}(x)$.

No primijetite da u ovom slučaju uvjetna funkcija gustoće $f_{X(t)|G=g}(x)$ ovisi o parametru $t$, odnosno vrijedi

$$f_{X(t)|G=g}(x) = \begin{cases} \delta(x), & g < t \\ \delta\big(x - \frac{At}{g}\big), & \text{inače} \end{cases},$$

jer za neki odabrani $g$ proces $X(t)$ u bilo kojem trenutku $t$ poprima poznatu vrijednost. Problem u ovom načinu rješavanja je određivanje marginalne funkcije gustoće iz zajedničke funkcije gustoće jer moramo rješavati sustav nejednadžbi po parametru $t$ u ravnini $xOg$ kako bi odredili područje intergracije.

## 1.3.2. Korelacijske i kovarijancijske funkcije

**Primjer 1.4.** Definirajte slijedeće pojmove:

a) nezavisnost slučajnih procesa,

b) nekoreliranost slučajnih procesa,

c) autokorelaciju i kroskorelaciju, te

d) autokovarijancu i kroskovarijancu.

Pod pretpostavkom da su dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ nezavisna pokažite da je $C_{XY}(t_1,t_2) = R_{XY}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[Y(t_2)] = 0$. Vrijedi li isti rezultat i za nekorelirane procese? Jesu li nekorelirani procesi nužno nezavisni? Objasni!

Rješenje: Definirajmo tražene pojmove:

**Definicija 1.3.1. (Nezavisnost)** *Dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ su nezavisna ako su za bilo koji izbor trenutaka $t_i$ i $t_j$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, $n \in \mathbb{N}$, slučajni vektori $\mathbf{X} = \big(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\big)$ i $\mathbf{Y} = \big(Y(t_1), Y(t_2), \ldots, Y(t_n)\big)$ nezavisni.*

Nezavisnost svodimo na zahtijev da zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti $f_{\mathbf{XY}}$ bude separabilna, dakle $f_{\mathbf{XY}} = f_{\mathbf{X}} f_{\mathbf{Y}}$, i to za sve vektore $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ sastavljene od $n$ odabranih trenutaka iz procesa $X(t)$ i $Y(t)$ (kriterij nezavisnosti).

**Definicija 1.3.2. (Nekoreliranost)** *Za dva slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ kažemo da su nekorelirani ako je $C_{XY}(t_1,t_2) = 0$.*

Nekoreliranost možemo definirati i kao $E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = E\big[X(t_1)\big]E\big[Y(t_2)\big]$. Obično jedan od izraza odabiremo kao definiciju te dokazujemo ekvivalentnost drugog.

**Definicija 1.3.3. (Autokorelacijska funkcija)** *Autokorelacijska funkcija (AKF) slučajnog procesa je*

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\big[X(t_1)X(t_2)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2.$$

**Definicija 1.3.4. (Kroskorelacijska funkcija)** *Kroskorelacijska funkcija (križna ili unakrsna korelacija) slučajnih procesa $X(t)$ i $Y(t)$ je*

$$R_{XY}(t_1,t_2) = E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y)\,dxdy$$

**Definicija 1.3.5. (Autokovarijancijska funkcija)** *Autokovarijancijska funkcija slučajnog procesa je*

$$\begin{aligned} C_{XX}(t_1,t_2) &= E\big[\big(X(t_1) - E[X(t_1)]\big)\big(X(t_2) - E[X(t_2)]\big)\big] \\ &= R_{XX}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[X(t_2)] \end{aligned}$$

**Definicija 1.3.6. (Kroskovarijancijska funkcija)** *Kroskovarijancijska funkcija slučajnog procesa je*

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E\big[\big(X(t_1) - E[X(t_1)]\big)\big(Y(t_2) - E[Y(t_2)]\big)\big]$$

Nezavisni slučajni procesi su i korelirani, no obrat ne vrijedi—nekorelirani procesi mogu biti međusobno zavisni. Za nezavisne procese je $f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y) = f_{X(t_1)}(x) f_{Y(t_2)}(y)$ te možemo pisati

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1,t_2) = E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t_1)}(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y(t_2)}(y)\,dy = E\big[X(t_1)\big]E\big[Y(t_2)\big], \end{aligned}$$

odnosno $E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = E\big[X(t_1)\big]E\big[Y(t_2)\big]$. Sada je

$$\begin{aligned}
C_{XY}(t_1,t_2) &= E\big[\big(X(t_1) - E[X(t_1)]\big)\big(Y(t_2) - E[Y(t_2)]\big)\big] \\
&= E\big[X(t_1)Y(t_2) - E[X(t_1)]Y(t_2) - E[Y(t_2)]X(t_1) + E[X(t_1)]E[Y(t_2)]\big] \\
&= E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] - E[X(t_1)]E[Y(t_2)] - E[Y(t_2)]E[X(t_1)] + E[X(t_1)]E[Y(t_2)] \\
&= R_{XY}(t_1,t_2) - E[X(t_1)]E[Y(t_2)] \\
&= E[X(t_1)]E[Y(t_2)] - E[X(t_1)]E[Y(t_2)] = 0
\end{aligned}$$

Za nezavisne procese zahtijevamo separabilnost funkcije gustoće, odnosno vrijedi $f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y) = f_{X(t_1)}(x)f_{Y(t_2)}(y)$, dok za nekorelirane samo zahtijevamo da vrijedi $E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$. Dakle može postojati takva funkcija $f_{X(t_1),Y(t_2)}(x,y)$ koja nakon integriranja daje rezultat jednak $E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$, a nije separabilna—konstruirajte je za vježbu.

## 1.4. Stacionarnost slučajnog procesa

Slučajni proces $X(t)$ je striktno stacionaran ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za proizvoljan izbor vremenskih trenutaka $t_1$, $t_2$,..., $t_k$ za bilo koji vremenski pomak $\Delta t$ odabrani skup od $n$ slučajnih varijabli $X(t_1)$, $X(t_2)$,..., $X(t_n)$ i skup $X(t_1+\Delta t)$, $X(t_2+\Delta t)$,..., $X(t_n+\Delta t)$ imaju jednake zajedničke distirbucije, odnosno funkcije gustoće vjerojantosti. Ako je dani uvjet zadovoljen samo do nekog konačnog $n$ kažemo da je slučajni proces stacionaran do $n$-tog reda.

Mnogi praktični inženjerski problemi traže poznavanje autokorelacijske funkcije i srednje vrijednosti slučajnog procesa. Rješenja tih problema su jednostavnija kada te veličine ne ovise o apsolutnom vremenu. Ako je razmatrani proces stacionaran drugog reda, očekivanje i autokorelacijska funkcija nisu funkcije apsolutnog vremena. Stacionarnost drugog reda je najčešće prestrogi uvjet kojeg ne možemo provjeriti u praksi. Stoga uvodimo stacionarnost u širem smislu te za slučajni proces $X(t)$ kažemo da je stacionaran drugog reda u širem smislu ako vrijedi

$$E\big[X(t)\big] = \overline{x} \tag{1.9}$$

i

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E\big[X(t_1)X(t_2)\big] = E\big[X(t)X(t+\tau)\big] = R_{XX}(\tau), \tag{1.10}$$

odnosno ako je očekivanje konstanta te ako autokorelacijska funkcija $R_{XX}$ ovisi samo o pomaku $\tau$.

Autokorelacijska funkcija stacionarnih slučajnih procesa je simetrična funkcija za koju vrijedi

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0). \tag{1.11}$$

Primijetite da je vrijednost autokorelacijske funkcije u nuli moment drugog reda,

$$R_{XX}(0) = E\big[X^2(t)\big]. \tag{1.12}$$

Za stacionarni slučajni proces $X(t)$ bez periodičkih komponetni je

$$\lim_{\tau\to-\infty} R_{XX}(\tau) = \lim_{\tau\to+\infty} R_{XX}(\tau) = \big(E\big[X(t)\big]\big)^2 \tag{1.13}$$

**Primjer 1.5.** Pokažite da očekivanje slučajnog procesa $X(t)$ koji je stacionaran prvog reda ne ovisi o vremenu, odnosno da je

$$E\big[X(t)\big] = \overline{x} = \text{const.}$$

RJEŠENJE: Odaberemo li neki vremenski trenutak $t_1$ za slučajnu varijablu $X(t_1)$ vrijedi

$$E\big[X(t_1)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t_1)}(x)dx$$

Kako je promatrani proces stacionaran prvog reda vrijedi

$$f_{X(t_1)}(x) = f_{X(t_1+\Delta t)}(x)$$

za bilo koji pomak $\Delta t$. Tada je

$$E\big[X(t_1)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t_1)}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X(t_1+\Delta t)}(x)dx = E\big[X(t_1+\Delta t)\big],$$

a kako dobiveni izraz vrijedi za bilo koji $\Delta t$ očekivanje je konstanta,

$$E\big[X(t)\big] = \overline{x} = \text{const.}$$

**Primjer 1.6.** Pokažite da autokorelacijska funkcija $R_{XX}(t_1, t_2)$ slučajnog procesa $X(t)$ koji je stacionaran drugog reda ne ovisi o vremenu već samo o pomaku $\tau = t_2 - t_1$, odnosno da je

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(\tau).$$

RJEŠENJE: Kako je zadani slučajni proces stacionaran drugog reda vrijedi

$$f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2) = f_{X(t_1+\Delta t),X(t_2+\Delta t)}(x_1, x_2).$$

Autokorelacijska funkcija je

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\big[X(t_1)X(t_2)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)dx_1 dx_2$$

Kombiniranjem ta dva izraza dobivamo

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_{X(t_1+\Delta t),X(t_2+\Delta t)}(x_1, x_2)dx_1 dx_2,$$

što vrijedi za bilo koji pomak $\Delta t$, pa i za $\Delta t = -t_1$. Uvrštavanjem pomaka $-t_1$ dobivamo

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2\, f_{X(0),X(t_2-t_1)}(x_1, x_2)dx_1 dx_2 = R_{XX}(0, t_2 - t_1),$$

što uvođenjem pomaka $\tau = t_2 - t_1$ možemo interpretirati kao funkciju koja ovisi samo o pomaku. Sada je

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(0, t_2 - t_1) = R_{XX}(0, \tau) = R_{XX}(\tau).$$

Autokorelacijska funkcija $R_{XX}$ slučajnog procesa koji je stacionaran drugog reda ovisi samo o pomaku $\tau$.

**Zadatak 1.2.** Pokaži da je slučajni proces koji je striktno stacionaran reda $n$ također striktno stacionaran svih redova manjih od $n$.

**Primjer 1.7.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\sin(\omega t + \theta),$$

gdje su $A$ i $\omega$ konstante, dok je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na $[-\pi, \pi]$. Ako je proces $Y(t)$ definiran kao $Y(t) = X^2(t)$ odredite:

a) autokorelacijsku funkciju $R_{YY}$ slučajnog procesa $Y(t)$,

b) kroskorelacijsku funkciju $R_{XY}$ procesa $X(t)$ i $Y(t)$.

Ispitajte stacionarnost u širem smislu procesa $X(t)$ i $Y(t)$. Da li su slučajni procesi $X(t)$ i $Y(t)$ zajednički stacionarni?

Rješenje: Autokorelacijsku funkciju procesa $Y(t)$ određujemo prema definiciji,

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_2) &= E\big[Y(t_1)Y(t_2)\big] = E\big[X^2(t_1)X^2(t_2)\big] \\ &= E\big[A^2 \sin^2(\omega t_1 + \theta) A^2 \sin^2(\omega t_2 + \theta)\big] \end{aligned}$$

Uvođenjem pomaka $\tau = t_2 - t_1$ i iskorštavanjem svojstva linearnosti dobivamo

$$\begin{aligned} R_{YY}(t_1, t_1+\tau) &= A^4 E\big[\sin^2(\omega t_1 + \theta)\sin^2(\omega t_1 + \omega\tau + \theta)\big] \\ &= \frac{A^4}{4} E\big[\big(1 - \cos(2\omega t_1 + 2\theta)\big)\big(1 - \cos(2\omega t_1 + 2\omega\tau + 2\theta)\big)\big] \\ &= \frac{A^4}{4} - \frac{A^4}{4} E\big[\cos(2\omega t_1 + 2\theta)\big] - \frac{A^4}{4} E\big[\cos(2\omega t_1 + 2\omega\tau + 2\theta)\big] + \\ &\quad + \frac{A^4}{4} E\big[\cos(2\omega t_1 + 2\theta)\cos(2\omega t_1 + 2\omega\tau + 2\theta)\big] \end{aligned}$$

U dobivenom izrazu jedina slučajna varijabla je $\theta$ te je potrebno izračunati odgovarajuće integrale. Kako slučajna varijabla $\theta$ ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-\pi, \pi]$ drugi i treće pribrojnik predstavljaju integral kosinusa preko dva perioda što daje nulu. Četvrti pribrojnik rastavljamo te dobivamo

$$R_{YY}(t_1, t_1+\tau) = \frac{A^4}{4} + \frac{A^4}{4} E\Big[\frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)\Big] + \frac{A^4}{4} E\Big[\frac{1}{2}\cos(4\omega t_1 + 2\omega\tau + 4\theta)\Big].$$

Zadnji pribrojnik je opet integral kosinusa po višektraniku perioda te daje nulu, dok operator $E$ ne utječe na prvi pribrojnik. Dobivamo

$$R_{YY}(t_1, t_1+\tau) = \frac{A^4}{4} + \frac{A^4}{8}\cos(2\omega\tau) = R_{YY}(\tau).$$

Autokorelacijska funkcija procesa $Y(t)$ je samo funkcija pomaka $\tau$.

Kroskorelacijsku funkciju $R_{XY}(t_1, t_2)$ procesa $X(t)$ i $Y(t)$ također računamo prema definiciji

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1, t_2) &= E\big[X(t_1)Y(t_2)\big] = E\big[X(t_1)X^2(t_2)\big] \\ &= E\big[A\sin(\omega t_1 + \theta)A^2\sin^2(\omega t_2 + \theta)\big] \\ &= \frac{A^3}{2} E\Big[\sin(\omega t_1 + \theta) - \frac{1}{2}\sin(\omega t_1 - 2\omega t_2 - \theta) - \frac{1}{2}\sin(\omega t_1 + 2\omega t_2 + 3\theta)\Big] \end{aligned}$$

Kako slučajna varijabla $\theta$ ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-\pi, \pi]$ svi integrali postaju integrali sinusa preko višektranika perioda te je

$$R_{XY}(t_1, t_2) = 0.$$

Da bi ispitali stacionarnost u širem smislu procesa $X(t)$ i $Y(t)$ moramo pokazati da očekivanja ne ovise o vremenu te da autokorelacijska funkcija ovisi samo o pomaku $\tau$. Za slučajni proces $X(t)$ očekivanje je

$$E\big[X(t)\big] = E\big[A\sin(\omega t + \theta)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} A\sin(\omega t + \theta)\, f_\theta(\theta) d\theta = 0,$$

dok je autokorelacijska funkcija

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E\big[A\sin(\omega t + \theta)A\sin(\omega t + \omega\tau + \theta)\big] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau).$$

Kako su potrebni uvjeti zadovoljeni, proces $X(t)$ je stacionaran u širem smislu. Za proces $Y(t)$ smo već pokazali da autokorelacija ovisi samo o pomaku $\tau$, te je još potrebno odrediti očekivanje,

$$E\big[Y(t)\big] = E\big[X^2(t)\big] = R_{XX}(0) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega 0) = \frac{A^2}{2}.$$

Proces $Y(t)$ je stoga također stacionaran u širem smislu.

Procesi su zajednički stacionarni u širem smislu ako je kroskorelacijska funkcija ovisna samo o pomaku $\tau$. Za zadane procese je kroskorelacija $R_{XY}(t_1, t_2) = 0$ neovisna o vremenu te su procesi zajednički stacionarni u širem smislu.

**Primjer 1.8.** Zadan je vremenski diskretan slučajni proces

$$X[n] = A\cos(n\pi/2 + \theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-\pi, \pi]$. Da li je zadani proces stacionaran u širem smislu?

Rješenje: Da bi ispitali stacionarnost u širem smislu moramo pokazati da očekivanje ne ovisi o koraku $n$, te da autokorelacijski niz ovisi samo o pomaku $m$. Očekivanje procesa je

$$E\big[X[n]\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} A\cos(n\pi/2 + \theta)\, f_\theta(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(n\pi/2 + \theta)\, \frac{1}{2\pi} d\theta = 0,$$

dok je autokorelacijski niz

$$\begin{aligned} R_{XX}[n, n+m] &= E\big[X[n]X[n+m]\big] \\ &= E\big[A\cos(n\pi/2 + \theta)A\cos(n\pi/2 + m\pi/2 + \theta)\big] \\ &= \frac{A^2}{2}E\big[\cos(m\pi/2)\big] + \frac{A^2}{2}E\big[\cos(n\pi + m\pi/2 + 2\theta)\big] \\ &= \frac{A^2}{2}\cos(m\pi/2) \end{aligned}$$

Kako autokorelacijski niz ovisi samo o pomaku $m$ i kako je očekivanje konstanta zaključujemo da je proces stacionaran u širem smislu.

**Primjer 1.9.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),$$

gdje je frekvencija $\omega$ stalna, dok su amplitude $A$ i $B$ međusobno nekorelirane slučajne varijable s različitim funkcijam gustoće vjerojatnosti, no s jednakom srednjom vrijednošću nula i varijancom $\sigma^2$. Da li je proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

Rješenje: Moramo odrediti očekivanje i autokorelaciju zadanog procesa. Očekivanje je

$$E\big[X(t)\big] = E\big[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big] = E\big[A\big]\cos(\omega t) + E\big[B\big]\sin(\omega t) = 0$$

dok je autokorelacija

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E\Big[\big(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\big)\big(A\cos(\omega t + \omega\tau) + B\sin(\omega t + \omega\tau)\big)\Big]$$

Vidimo da je za određivanje autokorelacije potrebno poznavati $E[A^2]$, $E[B^2]$, $E[AB]$ i $E[BA]$. Kako su $A$ i $B$ nekorelirane slučajne varijable vrijedi

$$E[AB] = E[BA] = 0,$$

dok su u zadatku zadane varijance $E[A^2] = E[B^2] = \sigma^2$. Autokorelacijska funkcija je sada

$$R_{XX}(t, t+\tau) = \sigma^2\big(\cos(\omega t)\cos(\omega t + \omega\tau) + \sin(\omega t)\sin(\omega t + \omega\tau)\big) = \sigma^2\cos(\omega\tau)$$

Time smo pokazali da je proces $X(t)$ stacionaran u širem smislu.

**Primjer 1.10.** Slučajni proces $X(t)$ ima tri jednako vjerojatne realizacije

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2, \\ x_2(t) &= 2\cos(t), \\ x_3(t) &= 3\sin(t). \end{aligned}$$

Da li je proces stacionaran?

RJEŠENJE: Označimo zadane tri realizacije s

$$x_1(t) = X(t, s_1), \quad x_2(t) = X(t, s_2) \quad \text{i} \quad x_3(t) = X(t, s_3),$$

gdje je $S$ slučajna varijabla čiju funkciju gustoće vjerojantnosti možemo zapisati kao

$$f_S(s) = \frac{1}{3}\delta(s - s_1) + \frac{1}{3}\delta(s - s_2) + \frac{1}{3}\delta(s - s_3).$$

Očekivanje slučajne varijable $S$ je

$$E[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} s\, f_S(s) ds = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3).$$

Kako proces $X(t)$ ima tri determinističke realizacije koje odgovaraju vrijednostima $s_1$, $s_2$ i $s_3$ slučajne varijable $S$ možemo pisati

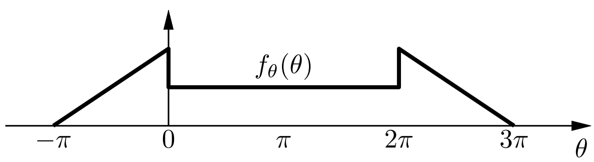
$$E\big[X(t)\big] = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1}{3}\big(2 + 2\cos(t) + 3\sin(t)\big).$$

Proces nije stacionaran ni u kojem smislu jer je očekivanje funkcija vremena.

**Primjer 1.11.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijable s gustoćom $f_\theta(\theta)$ zadanom slikom 1.13.. Ispitajte stacionarnost u širem smislu zadanog slučajnog procesa.




Slika 1.13.: Gustoća vjerojatnosti slučajne varijable

RJEŠENJE: Najprije je potrebno odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti iz zadane slike. Uz poznata svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti dobivamo

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} + \theta\frac{1}{2\pi^2}, & \text{za } -\pi \le \theta < 0 \\ \frac{1}{4\pi}, & \text{za } 0 \le \theta < 2\pi \\ \frac{3}{2\pi} - \theta\frac{1}{2\pi^2}, & \text{za } 2\pi \le \theta \le 3\pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Da bi ispitali stacionarnost u širem smislu najprije određujemo očekivanje zadanog slučajnog procesa:

$$
\begin{aligned}
E\big[X(t)\big] &= E\big[A\cos(\omega t+\theta)\big] = A\int_{-\pi}^{3\pi}\cos(\omega t+\theta)\, f_\theta(\theta)d\theta \\
&= A\int_{-\pi}^{0}\cos(\omega t+\theta)\, f_\theta(\theta)d\theta + A\int_{0}^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\, f_\theta(\theta)d\theta + \\
&\quad + A\int_{2\pi}^{3\pi}\cos(\omega t+\theta)\, f_\theta(\theta)d\theta.
\end{aligned}
$$

Integral po srednjem intervalu od 0 do $2\pi$ obuhvaća cijelu periodu funkcije $\cos(\omega t+\theta)$ uz konstantnu gustoću vjerojatnosti $f_\theta(\theta)$ te daje nulu. Sada pišemo:

$$
\begin{aligned}
E\big[X(t)\big] &= A\int_{-\pi}^{0}\cos(\omega t+\theta)\Big(\frac{1}{2\pi}+\theta\frac{1}{2\pi^2}\Big)\, d\theta + \\
&\quad + A\int_{2\pi}^{3\pi}\cos(\omega t+\theta)\Big(\frac{1}{2\pi}-(\theta-2\pi)\frac{1}{2\pi^2}\Big)\, d\theta.
\end{aligned}
$$

U zadnjem integralu od $2\pi$ do $3\pi$ vršimo zamjenu pomakom varijable $\theta$ za $2\pi$, dakle $\theta' = \theta - 2\pi$. Dobivamo

$$
\begin{aligned}
E\big[X(t)\big] &= A\int_{-\pi}^{0}\cos(\omega t+\theta)\Big(\frac{1}{2\pi}+\theta\frac{1}{2\pi^2}\Big)\, d\theta + \\
&\quad + A\int_{0}^{\pi}\cos(\omega t+\theta')\Big(\frac{1}{2\pi}-\theta'\frac{1}{2\pi^2}\Big)\, d\theta' \\
&= \frac{A}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t+\theta)\, d\theta + \\
&\quad + \frac{A}{2\pi^2}\int_{-\pi}^{0}\theta\cos(\omega t+\theta)\, d\theta - \frac{A}{2\pi^2}\int_{0}^{\pi}\theta\cos(\omega t+\theta)\, d\theta
\end{aligned}
$$

Prvi od ovih integrala opet obuhvaća cijeli period funkcije $\cos(\omega t+\theta)$ te daje nulu, dok su preostala dva integrala tablična. Njihovim računanjem dobivamo naposlijetku očekivanje zadanog slučajnog procesa,

$$
E\big[X(t)\big] = \frac{2A}{\pi^2}\cos(\omega t).
$$

Kako dobiveno očekivanje ovisi o vremenu $t$ odmah možemo zaključiti da zadani proces nije stacionaran u širem smislu te nije potrebno računati i statističku autokorelacijsku funkciju.

**Zadatak 1.3.** Zadan je slučajni proces

$$
X(t) = A\cos(\omega t+\theta),
$$

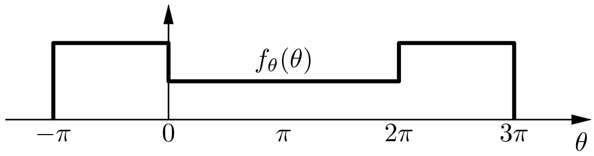
gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odredite očekivanje i autokorelacijsku funkciju zadanog slučajnog procesa te ispitajte stacionarnost u širem smislu.

Rješenje: $E\big[X(t)\big] = 0$, $R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2}A^2\cos(\omega\tau)$, proces je stacionaran u širem smislu.

**Primjer 1.12.** Zadan je slučajni proces

$$
X(t) = A\cos(\omega t+\theta),
$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla s gustoćom $f_\theta(\theta)$ zadanom slikom 1.14.. Ispitajte stacionarnost u širem smislu zadanog slučajnog procesa.




Slika 1.14.: Gustoća vjerojatnosti slučajne varijable

Rješenje: Najprije je potrebno točno odrediti funkciju gustoće vjerojatnosti iz zadane slike. Uz poznata svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti određujemo

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{3\pi}, & \text{za } -\pi \leq \theta < 0 \\ \frac{1}{6\pi}, & \text{za } 0 \leq \theta < 2\pi \\ \frac{1}{3\pi}, & \text{za } 2\pi \leq \theta \leq 3\pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Da bi ispitali stacionarnost u širem smislu potrebno je odrediti očekivanje i statističku autokorelacijsku funkciju zadanog procesa. Najprije određujemo očekivanje:

$$\begin{aligned} E\big[X(t)\big] &= E\big[A\cos(\omega t + \theta)\big] = A\int_{-\pi}^{3\pi} \cos(\omega t + \theta)\, f_\theta(\theta) d\theta \\ &= A\int_{-\pi}^{0} \cos(\omega t + \theta)\, \frac{1}{3\pi} d\theta + A\int_{0}^{2\pi} \cos(\omega t + \theta)\, \frac{1}{6\pi} d\theta + \\ &+ A\int_{2\pi}^{3\pi} \cos(\omega t + \theta)\, \frac{1}{3\pi} d\theta. \end{aligned}$$

Integral po srednjem intervalu od 0 do $2\pi$ obuhvaća cijelu periodu funkcije $\cos(\omega t + \theta)$ te daje nulu. U zadnjem integralu od $2\pi$ do $3\pi$ vršimo zamjenu pomakom varijable $\theta$ za $2\pi$, dakle $\theta' = \theta - 2\pi$. Sada je

$$\begin{aligned} E\big[X(t)\big] &= A\int_{-\pi}^{0} \cos(\omega t + \theta)\, \frac{1}{3\pi} d\theta + A\int_{0}^{\pi} \cos(\omega t + \theta' + 2\pi)\, \frac{1}{3\pi} d\theta' \\ &= A\int_{-\pi}^{0} \cos(\omega t + \theta)\, \frac{1}{3\pi} d\theta + A\int_{0}^{\pi} \cos(\omega t + \theta')\, \frac{1}{3\pi} d\theta' \\ &= A\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\omega t + \theta)\, \frac{1}{3\pi} d\theta = 0 \end{aligned}$$

Preostaje još odrediti statističku autokorelacijsku funkciju:

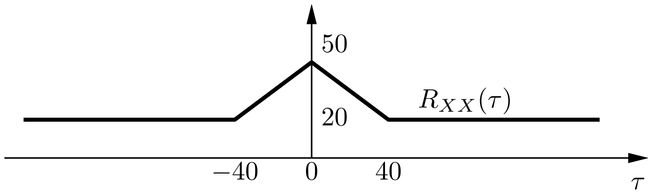
$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t+\tau) &= E\big[X(t)X(t+\tau)\big] = E\big[A\cos(\omega t + \theta) A\cos(\omega t + \omega\tau + \theta)\big] \\ &= \frac{A^2}{2} E\big[\cos(\omega\tau)\big] + \frac{A^2}{2} E\big[\cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)\big] \end{aligned}$$

Prvi član ne ovisi o slučajnoj varijabli $\theta$ te operator $E$ na njega nema utjecaja. Za drugi član vrijedi slično razmatranje kao što je provedeno pri računanju očekivanja, te se za drugi član dobiva nula. Sada je statistička autokorelacijska funkcija

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau).$$

Kako ni očekivanje ni statistička autokorelacijska funkcija ne ovise o vremenu zaključujemo da je zadani proces stacionaran u širem smislu.

**Primjer 1.13.** Autokorelacijska funkcija stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ bez periodičkih komponenti prikazana je na slici 1.15.. Odredite očekivanje $E\big[X(t)\big]$, moment drugog reda $E\big[X^2(t)\big]$ i varijancu $\sigma^2_{X(t)}$.




Slika 1.15.: Autokorelacijska funkcija stacionarnog slučajnog procesa

RJEŠENJE: Iz slike 1.15. očitavamo moment drugog reda,

$$R_{XX}(0) = E\big[X^2(t)\big] = 50.$$

Kako je zadani proces stacionaran bez periodičkih komponenti vrijedi

$$\big(E\big[X(t)\big]\big)^2 = \lim_{\tau \to -\infty} R_{XX}(\tau) = \lim_{\tau \to +\infty} R_{XX}(\tau) = 20,$$

te je očekivanje $\overline{x} = \sqrt{20}$. Varijancu određujemo pomoću momenata prvog i drugog reda,

$$\sigma^2_{X(t)} = E\big[X^2(t)\big] - \big(E\big[X(t)\big]\big)^2 = 50 - 20 = 30.$$

## 1.5. Ergodičnost slučajnog procesa

Vremensko usrednjavanje ili prosjek neke vremenske veličine $f(t)$ definirano je kao

$$A\big[f(t)\big] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t)\, dt. \tag{1.14}$$

U primjenama pri analizi slučajnih procesa najvažnije vremenski usrednjenje veličine su vremenska srednja vrijednost $A\big[x(t)\big]$ i vremenska autokorelacijska funkcija $\mathcal{R}_{XX}(\tau)$. Vremensku srednju vrijednost računamo kao

$$A\big[x(t)\big] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)\, dt, \tag{1.15}$$

dok vremensku autokorelacijsku funkciju određujemo prema

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) = A\big[x(t)x(t+\tau)\big] = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)\, dt. \tag{1.16}$$

Pri analizi konačnih signala uobičajeno se izostavlja lim pri računanju vremenskih srednjih vrijednosti.

Za slučajni proces $X(t)$ koji je stacionaran u širem smislu vrijedi

$$E\big[A[x(t)]\big] = E\big[X(t)\big] = \overline{x} \tag{1.17}$$

i

$$E\big[\mathcal{R}_{XX}(\tau)\big] = E\big[X(t)X(t+\tau)\big] = R_{XX}(\tau). \tag{1.18}$$

Slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje jednako statističkom usrednjavanju.

**Primjer 1.14.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla, a $A$ i $\omega$ su konstante. Odredi vremensku srednju vrijednost i vremensku autokorelacijsku funkciju.

RJEŠENJE: Odredimo najprije vremensku srednju vrijednost. Primijetimo da je svaka realizacija oblika

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

te je

$$\begin{aligned} A\big[x(t)\big] &= \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)\,dt = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} A\cos(\omega t+\theta)\,dt \\ &= \frac{A}{\omega}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\big(\sin(\omega T+\theta) - \sin(-\omega T+\theta)\big) = 0 \end{aligned}$$

Vremenska autokorelacijska funkcija je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{XX}(\tau) = A\big[x(t)x(t+\tau)\big] &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)x(t+\tau)\,dt \\ &= \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} A\cos(\omega t+\theta)A\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)\,dt \\ &= \frac{A^2}{2}\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}\cos(\omega\tau)+\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)\,dt \end{aligned}$$

što nakon integriranja i računanja limesa postaje

$$\mathcal{R}_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau).$$

**Zadatak 1.4.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla, a $A$ i $\omega$ su konstante. Ispitajte ergodičnost zadanog procesa ako je

a) $\theta$ slučajna varijabla je jednolikom raspodjelom na $[-\pi,\pi]$,

b) $\theta$ slučajna varijabla je jednolikom raspodjelom na $[0,\pi]$.

RJEŠENJE: Za slučaj kada je $\theta$ jednolika na $[-\pi,\pi]$ proces $X(t)$ je ergodičan, a za interval $[0,\pi]$ nije.

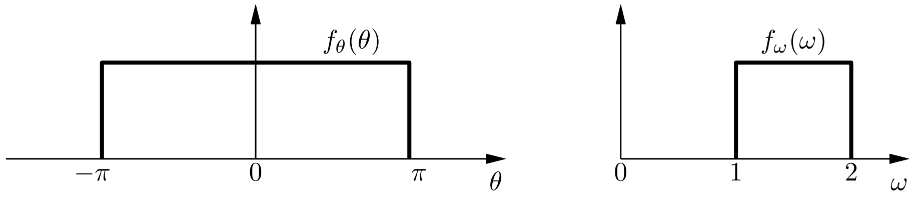
**Primjer 1.15.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

gdje su $\omega$ i $\theta$ nezavisne slučajne varijable s gustoćama vjerojatnosti $f_\omega(\omega)$ i $f_\theta(\theta)$ zadanima slikom 1.16.. Ispitajte stacionarnost u širem smislu te ergodičnost zadanog slučajnog procesa. Skicirajte statističku autokorelacijsku funkciju slučajnog procesa.

RJEŠENJE: Zadan je slučajni proces čija realizacija ovisi o dvije nezavisne slučajne varijable. Najprije je potrebno odrediti funkcije gustoće vjerojatnosti za zadane slučajne varijable. Kako površina ispod funkcije gustoće vjerojatnosti mora biti jedinična, iz slika odmah određujemo

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{za } -\pi \le \theta \le \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad f_\omega(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{za } 1 \le \omega \le 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$




Slika 1.16.: Gustoće vjerojatnosti slučajnih varijabli

Sada određujemo očekivanje i autokorelacijsku funkciju. Očekivanje je

$$E\big[X(t)\big] = \int_1^2 \int_{-\pi}^{\pi} A\cos(\omega t + \theta)\, f_\theta(\theta) d\theta\, f_\omega(\omega) d\omega.$$

Kako je integral po slučajnoj varijabli $\theta$ takav da obuhvaća cijeli period funkcije $A\cos(\omega t + \theta)$ unutrašnji integral daje nulu, te je očekivanje

$$E\big[X(t)\big] = 0.$$

Računamo autokorelacijsku funkciju

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t+\tau) &= E\big[X(t)X(t+\tau)\big] \\ &= E\big[A\cos(\omega t + \theta) A\cos(\omega t + \omega\tau + \theta)\big] \\ &= \frac{A^2}{2} E\big[\cos(\omega\tau)\big] + \frac{A^2}{2} E\big[\cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)\big]. \end{aligned}$$

Ako raspišemo drugi član u dobivenom izrazu integral po slučajnoj varijabli $\theta$ obuhvaća dva cijela perioda te taj član daje nulu. Potrebno je raspisati samo prvi član da bi odredili $R_{XX}$:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t+\tau) &= \frac{A^2}{2} E\big[\cos(\omega\tau)\big] = \frac{A^2}{2} \int_1^2 \cos(\omega\tau)\, f_\omega(\omega) d\omega = \frac{A^2}{2\tau} \sin(\omega\tau)\bigg|_1^2 \\ &= \frac{A^2}{2\tau}\big(\sin(2\tau) - \sin(\tau)\big) = \frac{A^2}{\tau} \sin(\tau/2)\cos(3\tau/2) \end{aligned}$$

Kako očekivanje ne ovisi o vremenu i kako autokorelacijska funkcija $R_{XX}$ ovisi samo o pomaku $\tau$ proces je stacionaran u širem smislu.

Kod provjere ergodičnosti potrebno je provjeriti ergodičnost srednje vrijednosti te ergodičnost autokorelacijske funkcije. Prvo računamo vremensku srednju vrijednost

$$\begin{aligned} A\big[X(t)\big] &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} A\cos(\omega t + \theta)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T}\, \frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \theta)\bigg|_{-T}^{T} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{A}{2T} \frac{\sin(\omega T + \theta) + \sin(\omega T - \theta)}{\omega} = 0 \end{aligned}$$

Kako je vremenska srednja vrijednost jednaka statističkoj srednjoj vrijednosti govorimo o ergodičnosti srednje vrijednosti. Potrebno je još izračunati vremensku autokorelacijsku funkciju

$$\begin{aligned} A\big[X(t)X(t+\tau)\big] &= A\big[A\cos(\omega t + \theta) A\cos(\omega t + \omega\tau + \theta)\big] \\ &= \frac{A^2}{2} A\big[\cos(\omega\tau)\big] + \frac{A^2}{2} A\big[\cos(2\omega t + 2\theta + \omega\tau)\big]. \end{aligned}$$

Drugi član nakon limesa postaje nula, dok je prvi član konstanta s obzirom na vrijeme $t$ te operator $A$ ne utječe na njega. Stoga je vremenska autokorelacijska funkcija

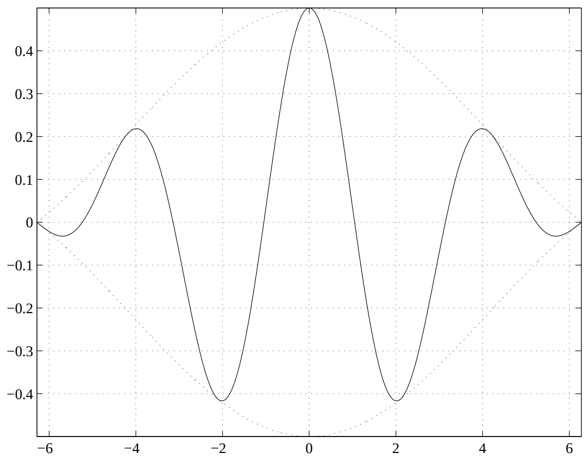
$$A\big[X(t)X(t+\tau)\big] = \frac{A^2}{2} A\big[\cos(\omega\tau)\big] = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau).$$

Kako je vremenska autokorelacijska funkcija različita od statističke autokorelacijske funkcije kažemo da autokorelacija nije ergodična, a i za sam proces kažemo da nije ergodičan.

Sada skiciramo statističku autokorelacijsku funkciju

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2} \frac{\sin(\tau/2)}{\tau/2} \cos(3\tau/2).$$

Primijetimo da se autokorelacija sastoji od produkta kosinus funkcije visoke frekvencije i sinc funkcije niže frekvencije te se dani produkt može promatrati kao obična cosinus funkcija s ovojnicom oblika sinc funkcije, što je i prikazano na slici 1.17..

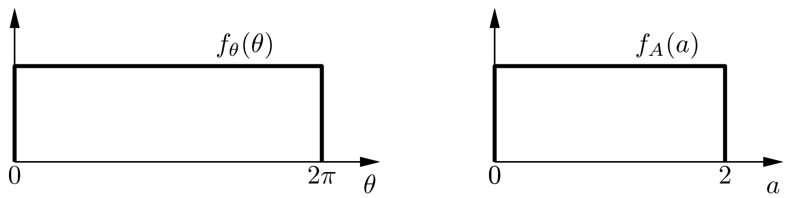



Slika 1.17.: Autokorelacijska funkcija uz $A = 1$

**Primjer 1.16.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

gdje su $\theta$ i $A$ nezavisne slučajne varijable s gustoćama $f_\theta(\theta)$ i $f_A(a)$ zadanima slikom 1.18.. Ispitajte stacionarnost u širem smislu te ergodičnost zadanog slučajnog procesa.




Slika 1.18.: Gustoće vjerojatnosti zadanog procesa

Rješenje: Najprije je potrebno točno odrediti funkcije gustoće vjerojatnosti iz zadanih slika. Uz poznata svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti određujemo

$$f_\theta(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & \text{za } 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad \text{i} \quad f_A(a) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{za } 0 \le a \le 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Sada računamo očekivanje:

$$E\big[X(t)\big] = E\big[A\cos(\omega t + \theta)\big] = E\big[A\big]E\big[\cos(\omega t + \theta)\big].$$

Rezultat odmah slijedi jer funkciju $\cos(\omega t + \theta)$ integriramo po periodu što daje nulu pa je

$$E\big[X(t)\big] = E\big[A\big] \cdot 0 = 0.$$

Na sličan način računamo i statističku autokorelacijsku funkciju,

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t,t+\tau) &= E\big[X(t)X(t+\tau)\big] = E\big[A\cos(\omega t+\theta)A\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)\big] \\
&= E\Big[\frac{A^2}{2}\big(\cos(\omega\tau)+\cos(2\omega t+2\theta+\omega\tau)\big)\Big] \\
&= \frac{1}{2}E\big[A^2\big]E\big[\cos(\omega\tau)\big] + \frac{1}{2}E\big[A^2\big]E\big[\cos(2\omega t+2\theta+\omega\tau)\big].
\end{aligned}$$

Opet je za drugi član potrebno integrirati funkciju $\cos(2\omega t+2\theta+\omega\tau)$ po intervalu $[0,2\pi]$ što daje nulu, pa dobivamo

$$\begin{aligned}
R_{XX}(t,t+\tau) &= \frac{1}{2}E\big[A^2\big]\cos(\omega\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega\tau)\int_0^2 a^2 f_A(a)da \\
&= \frac{1}{2}\cos(\omega\tau)\ \frac{1}{3}a^3\frac{1}{2}\bigg|_0^2 = \frac{2}{3}\cos(\omega\tau).
\end{aligned}$$

Kako očekivanje ne ovisi o vremenu i kako autokorelacijska funkcija $R_{XX}$ ovisi samo o pomaku $\tau$ proces je stacionaran u širem smislu.

Kod provjere ergodičnosti potrebno je provjeriti ergodičnost srednje vrijednosti te ergodičnost autokorelacijske funkcije. Prvo računamo vremensku srednju vrijednost

$$A\big[X(t)\big] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} A\cos(\omega t+\theta)\,dt = 0.$$

Kako je vremenska srednja vrijednost jednaka statističkoj srednjoj vrijednosti govorimo o ergodičnosti srednje vrijednosti. Potrebno je još izračunati vremensku autokorelacijsku funkciju

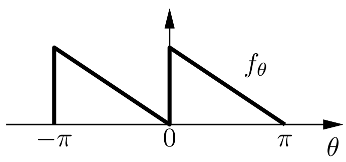
$$\begin{aligned}
A\big[X(t)X(t+\tau)\big] &= A\big[A\cos(\omega t+\theta)A\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)\big] \\
&= \frac{A^2}{2}A\big[\cos(\omega\tau)\big] + \frac{A^2}{2}A\big[\cos(2\omega t+2\theta+\omega\tau)\big] \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau)
\end{aligned}$$

Kako je vremenska autokorelacijska funkcija različita od statističke autokorelacijske funkcije kažemo da autokorelacija nije ergodična, a i za sam proces kažemo da nije ergodičan.

**Zadatak 1.5.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = \cos(t+\theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla s funkcijom gustoće vjerojatnosti zadanom slikom 1.19.. Ispitaj stacionarnost u širem smislu te ergodičnost danog slučajnog procesa.




Slika 1.19.: Funkcija gustoće vjerojatnosti

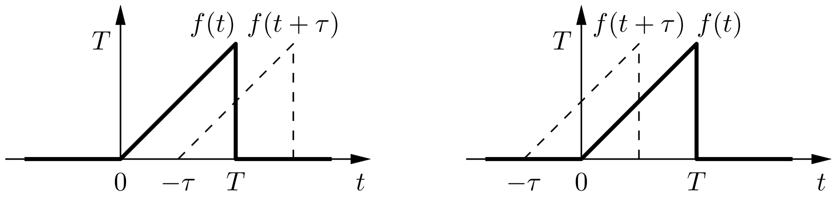
RJEŠENJE: Srednja vrijednost je ergodična jer je $E\big[X(t)\big] = A\big[X(t)\big] = 0$. Proces nije stacionaran u širem smislu i autokorelacijska funkcija nije ergodična jer je $R_{XX}(t,t+\tau) = \frac{1}{2}\cos(\tau) - \frac{1}{\pi}\sin(2t+\tau)$.

**Primjer 1.17.** Odredite vremensku autokorelacijsku funkciju konačnog signala

$$f(t) = \begin{cases} t, & \text{za } 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

RJEŠENJE: Kako je zadan konačni signal ne računamo limes. Vremenska autokorelacijska funkcija je tada

$$\mathcal{R}_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)\,dt.$$




Slika 1.20.: Računanje vremenske autokorelacijske funkcije

Da bi izračunali integral razlikujemo dva slučaja (slika 1.20.). Za prvi slučaj je $-T < \tau < 0$ te je

$$\mathcal{R}_{ff}(\tau) = \int_{-\tau}^{T} t(t+\tau)\,dt = -\frac{1}{6}\tau^3 + \frac{T^2}{2}\tau + \frac{T^3}{3}.$$

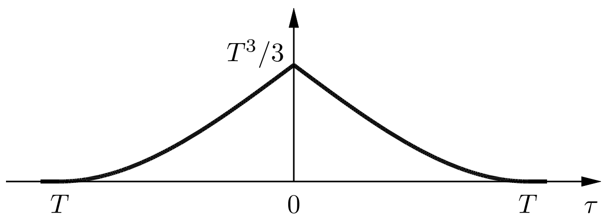
Za drugi slučaj je $0 < \tau < T$ te je

$$\mathcal{R}_{ff}(\tau) = \int_{0}^{T-\tau} t(t+\tau)\,dt = \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{T^2}{2}\tau + \frac{T^3}{3}.$$

Autokorelacijska funkcija je

$$\mathcal{R}_{ff}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{T^2}{2}\tau + \frac{T^3}{3}, & \text{za } 0 \leq \tau \leq T \\ -\frac{1}{6}\tau^3 + \frac{T^2}{2}\tau + \frac{T^3}{3}, & \text{za } -T \leq \tau < 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

i prikazana je na slici 1.21.. Vremenska autokorelacijska funkcija je uvijek simetrična.




Slika 1.21.: Vremenska autokorelacijska funkcija

**Zadatak 1.6.** Odredite vremensku autokorelacijsku funkciju konačnog signala

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & \text{za } 0 \leq t \leq \pi \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

RJEŠENJE:

$$\mathcal{R}_{ff}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - \tau)\cos(\tau) + \frac{1}{2}\sin(\tau), & \text{za } 0 \leq \tau \leq \pi \\ \frac{1}{2}(\pi + \tau)\cos(\tau) - \frac{1}{2}\sin(\tau), & \text{za } -\pi \leq \tau < 0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

**Primjer 1.18.** Zadan je diskretni slučajni proces $X[n]$ s četiri jednako vjerojatne realizacije

$$\begin{aligned}
x_1[n] &= \{\ldots, 0, \underline{10}, -10, 0, 0, 0, \ldots\}\\
x_2[n] &= \{\ldots, 0, \underline{-10}, 10, 0, 0, 0, \ldots\}\\
x_3[n] &= \{\ldots, 0, \underline{0}, 0, 10, -10, 0, \ldots\}\\
x_4[n] &= \{\ldots, 0, \underline{0}, 0, -10, 10, 0, \ldots\}
\end{aligned}$$

Ispitajte stacionarnost u širem smislu i ergodičnost danog slučajnog procesa.

Rješenje: Označimo četiri zadane realizacije s

$$\begin{aligned}
x_1[n] &= X[n, s_1] = \{\ldots, 0, \underline{10}, -10, 0, 0, 0, \ldots\} = 10\delta[n] - 10\delta[n-1]\\
x_2[n] &= X[n, s_2] = \{\ldots, 0, \underline{-10}, 10, 0, 0, 0, \ldots\} = -10\delta[n] + 10\delta[n-1]\\
x_3[n] &= X[n, s_3] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 0, 10, -10, 0, \ldots\} = 10\delta[n-2] - 10\delta[n-3]\\
x_4[n] &= X[n, s_4] = \{\ldots, 0, \underline{0}, 0, -10, 10, 0, \ldots\} = -10\delta[n-2] + 10\delta[n-3]
\end{aligned}$$

gdje je $S$ slučajna varijabla s funkcijom gustoće vjerojatnosti

$$f_S(s) = \frac{1}{4}\delta(s - s_1) + \frac{1}{4}\delta(s - s_2) + \frac{1}{4}\delta(s - s_3) + \frac{1}{4}\delta(s - s_4).$$

Očekivanje slučajne varijable $S$ je

$$E[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} s f_S(s)\, ds = \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4).$$

Kako zadani proces $X[n]$ ima četiri determinističke realizacije koje odgovaraju vrijednostima $s_1$, $s_2$, $s_3$ i $s_4$ vrijedi

$$\begin{aligned}
E\big[X[n]\big] &= \frac{1}{4}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)\\
&= \frac{1}{4}\big(X[n, s_1] + X[n, s_2] + X[n, s_3] + X[n, s_4]\big) = 0
\end{aligned}$$

Vremenska srednja vrijednost za sve četiri realizacije je jednaka te možemo pisati

$$A\big[X[n]\big] = 0,$$

pa je srednja vrijednost ergodična. Potrebno je još odrediti autokorelacijske funkcije. Vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{XX}[n, n+m] &= E\big[X[n, s]X[n+m, s]\big]\\
&= \frac{1}{4}\big(x_1[n]x_1[n+m] + x_2[n]x_2[n+m] + x_3[n]x_3[n+m] + x_4[n]x_4[n+m]\big)\\
&= \frac{1}{4}\big(100(\delta[n] - \delta[n-1])(\delta[n+m] - \delta[n-1+m])\\
&\quad + 100(-\delta[n] + \delta[n-1])(-\delta[n+m] + \delta[n-1+m])\\
&\quad + 100(\delta[n-2] - \delta[n-3])(\delta[n-2+m] - \delta[n-3+m])\\
&\quad + 100(-\delta[n-2] + \delta[n-1])(-\delta[n-2+m] + \delta[n-3+m])\big)
\end{aligned}$$

Nakon sređivanja autokorelacijsku funkciju možemo zapisati kao

$$R_{xx}[n, n+m] = 50\begin{cases} -\delta[n-3] - \delta[n-1], & m = -1\\ \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3], & m = 0\\ -\delta[n] - \delta[n-2], & m = 1\\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Kako statistička autokorelacijska funkcija nije samo funkcija pomaka $m$ proces nije stacionaran i autokorelacijska funkcija nije ergodična.

## 1.6. Spektralna gustoća snage slučajnog procesa

Srednja snaga slučajnog procesa je

$$P_{XX} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} E\big[X^2(t)\big]\, dt = A\big[E\big[X^2(t)\big]\big] \tag{1.19}$$

Spektralna gustoća snage (spektar snage) slučajnog procesa $X(t)$ je

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} E\big[|X_T(\omega)|^2\big], \tag{1.20}$$

gdje je $X_T(\omega)$ spektar slučajnog procesa $X(t)$ koje je vremenski ograničen na interval $[-T, T]$. Vrijedi

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega. \tag{1.21}$$

Spektar snage je nenegativna realna funkcija,

$$S_{XX}(\omega) \geq 0.$$

Za realne slučajne procese spektar snage je simetrična funkcija,

$$S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega).$$

Za stacionarni slučajni proces autokorelacijska funkcija $R_{XX}(\tau)$ i spektar snage $S_{XX}(\omega)$ čine Fourierov transformacijski par, a pripadne transformacijske jednadžbe se nazivaju Wiener-Khinchinove relacije:

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau) e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{1.22}$$

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{1.23}$$

U općem slučaju za nestacionarne slučajne procese se uzima vremenski usrednjena statistička autokorelacijska funkcija pa je tada transformacijski par

$$S_{XX}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A\Big[R_{XX}(t, t+\tau)\Big] e^{-j\omega\tau}\, d\tau \tag{1.24}$$

$$A\big[R_{XX}(t, t+\tau)\big] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega) e^{j\omega\tau}\, d\omega \tag{1.25}$$

**Primjer 1.19.** Promatrajte segment konačnog trajanja slučajnog procesa te definirajte njegovu snagu i energiju.

a) Koja je značajna razlika između snage i energije?

b) Definirajte spektralnu gustoću snage i navedite njena svojstva.

c) Koja je veza između spektralne gustoće snage i autokorelacijske funkcije?

RJEŠENJE: Za slučajni proces $X(t)$ definiramo segment konačnog trajanja $2T$ kao

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & -T < t < T \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Za dani konačni segment snaga $P$ i energija $U$ ($U$ je česta oznaka za energiju kada je slovo $E$ već iskorišteno) su

$$P = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} X_T^2(t)\,dt \quad \text{i} \quad U = \int_{-T}^{T} X_T^2(t)\,dt.$$

Dakle snaga je prosječna energija. Snagu i energiju obično razlikujemo te signale razvrstavamo u signale energije i signale snage—signali energije su singali koji imaju konačnu energiju kada $T$ teži k $+\infty$, dok su signal snage oni signali koji imaju konačnu snagu, odnosno postoji $P$ kada $T$ teži k $+\infty$. Primijetite mogućnost postojanja signala koji nisu ni signali snage ni signali energije.

**Definicija 1.6.1. (Spektralna gustoća snage)** *Spektralna gustoća snage procesa $X(t)$ je*

$$S_{XX}(\omega) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} E\big[|X_T(\omega)|^2\big].$$

Spektralna gustoća snage je

1. nenegativna realna funkcija (dakle $S_{XX}(\omega) \in \mathbb{R}_0^+$),
2. spektralna gustoća snage i usrednjena autokorelacijska funkcija su Fourierov transformacijski par,

$$S_{XX}(\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\; A\big[R_{XX}(t, t+\tau)\big],$$

3. za realne slučajne procese je $S_{XX}(\omega) = S_{XX}(-\omega)$ (simetričnost),
4. srednja snaga je $P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega$, i
5. $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega) = \omega^2 S_{XX}(\omega)$.

**Primjer 1.20.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta),$$

gdje su $A$ i $\omega_0$ konstante, dok je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, \pi]$. Da li je zadani proces stacionaran? Odredite

a) srednju snagu slučajnog procesa prema izrazu (1.19),

b) spektar snage $S_{XX}(\omega)$ te iz nje izračunajte srednju snagu prema izrazu (1.21).

Rješenje: Ispitajmo najprije stacionarnost zadanog slučajnog procesa. Očekivanje slučajnog procesa je

$$E\big[X(t)\big] = \int_0^{\pi} A\cos(\omega_0 t + \theta)\,\frac{1}{\pi}d\theta = -\frac{2A}{\pi}\sin(\omega_0 t).$$

Kako je očekivanje funkcija vremena zadani proces $X(t)$ nije stacionaran. Da bi odredili srednju snagu procesa najprije određujemo moment drugog reda:

$$\begin{aligned} E\big[X^2(t)\big] &= E\big[A^2\cos^2(\omega_0 t + \theta)\big] = \frac{A^2}{2}E\big[1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)\big] \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\int_0^{\pi}\cos(2\omega_0 t + 2\theta)\,\frac{1}{\pi}d\theta = \frac{A^2}{2}. \end{aligned}$$

Iako proces nije stacionaran, moment drugog reda je stalan pa je srednja snaga

$$P_{XX} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \frac{A^2}{2}\, dt = \frac{A^2}{2}.$$

Za određivanje gustoće spektra snage promatramo vremenski ograničen slučajni proces $X_T(t)$. Spektar tog procesa je

$$\begin{aligned}
X_T(\omega) = \mathcal{F}\big[X_T(t)\big] &= \int_{-T}^{T} X(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-T}^{T} A\cos(\omega_0 t + \theta) e^{j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-T}^{T} \frac{A}{2}\big(e^{j(\omega_0 t+\theta)} + e^{-j(\omega_0 t+\theta)}\big) e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \frac{A}{2} e^{j\theta} \int_{-T}^{T} e^{j(\omega_0-\omega)t}\, dt + \frac{A}{2} e^{-j\theta} \int_{-T}^{T} e^{-j(\omega_0+\omega)t}\, dt \\
&= ATe^{j\theta} \operatorname{sinc}\Big(\frac{T}{\pi}(\omega-\omega_0)\Big) + ATe^{-j\theta} \operatorname{sinc}\Big(\frac{T}{\pi}(\omega+\omega_0)\Big).
\end{aligned}$$

Sada određujemo očekivanje kvadrata apsolute vrijednosti spektra vremenski ograničenog slučajnog procesa $X_T(t)$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
E\big[|X_T(\omega)|^2\big] &= E\Bigg[\bigg|ATe^{j\theta} \operatorname{sinc}\Big(\frac{T}{\pi}(\omega-\omega_0)\Big) + ATe^{-j\theta} \operatorname{sinc}\Big(\frac{T}{\pi}(\omega+\omega_0)\Big)\bigg|^2\Bigg] \\
&= A^2T^2\bigg(\operatorname{sinc}^2\Big(\frac{T}{\pi}(\omega-\omega_0)\Big) + \operatorname{sinc}^2\Big(\frac{T}{\pi}(\omega+\omega_0)\Big)\bigg) \\
&\quad + E\big[e^{-2j\theta} + e^{2j\theta}\big] \operatorname{sinc}\Big(\frac{T}{\pi}(\omega-\omega_0)\Big) \operatorname{sinc}\Big(\frac{T}{\pi}(\omega+\omega_0)\Big),
\end{aligned}$$

što uz

$$E\big[e^{-2j\theta} + e^{2j\theta}\big] = E\big[2\cos(2\theta)\big] = 0$$

daje

$$E\big[|X_T(\omega)|^2\big] = A^2T^2\bigg(\operatorname{sinc}^2\Big(\frac{T}{\pi}(\omega-\omega_0)\Big) + \operatorname{sinc}^2\Big(\frac{T}{\pi}(\omega+\omega_0)\Big)\bigg).$$

Računanjem limesa kada $T$ teži k beskonačnosti dobivamo spektar snage. Pri tome koristimo limes

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{T}{\pi} \operatorname{sinc}^2\Big(\frac{\alpha T}{\pi}\Big) = \delta(\alpha). \tag{1.26}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}
S_{XX}(\omega) &= \lim_{T\to+\infty} \frac{A^2\pi}{2}\bigg(\frac{T}{\pi}\operatorname{sinc}^2\Big(\frac{T}{\pi}(\omega-\omega_0)\Big) + \frac{T}{\pi}\operatorname{sinc}^2\Big(\frac{T}{\pi}(\omega+\omega_0)\Big)\bigg) \\
&= \frac{A^2\pi}{2}\big(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\big)
\end{aligned}$$

Srednju snagu određujemo iz gustoće spektra snage integriranjem prema izrazu (1.21). Dobivamo

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\frac{A^2\pi}{2}(1+1) = \frac{A^2}{2},$$

što smo i očekivali.

**Primjer 1.21.** Zadan je vremenski diskretan slučajni proces

$$X[n] = \cos(n\pi/2 + \theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-\pi, \pi]$. Odredite spektar snage zadanog procesa.

RJEŠENJE: Zadani proces je stacionaran u širem smislu jer je

$$E\big[X[n]\big] = 0 \quad \text{i} \quad R_{XX}[m] = \frac{1}{2}\cos(m\pi/2).$$

U tom slučaju nam autokorelacijski niz i spektar snage čine Fourierov transformacijski par. Sada je

$$\begin{aligned} S_{XX}(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}_{\text{vd}}\big[R_{XX}[m]\big] \\ &= \sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty} R_{XX}[m]e^{-j\omega m} = \sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\cos(m\pi/2)e^{-j\omega m} \\ &= \frac{\pi}{2}\big(\delta(\omega - \pi/2 + 2i\pi) + \delta(\omega + \pi/2 + 2i\pi)\big), \end{aligned}$$

gdje je $i \in \mathbb{Z}$. Dobivena transformacija koja predstavlja spektralnu gustoću snage je periodična s periodom $2\pi$. Pokažimo još da vrijedi inverzna transformacija

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{vd}}^{-1}\big[S_{XX}(e^{j\omega})\big] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega})\, e^{j\omega m} d\omega \\ &= \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \big(\delta(\omega - \pi/2) + \delta(\omega + \pi/2)\big)\, e^{j\omega m} d\omega \\ &= \frac{1}{4}\big(e^{jm\pi/2} + e^{-jm\pi/2}\big) = \frac{1}{2}\cos(m\pi/2). \end{aligned}$$

**Primjer 1.22.** Vremenski diskretan slučajni proces $X[n]$ ima tri realizacije konačnog trajanja koje se pojavljuju s jednakom vjerojatnošću. Ako su realizacije

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \{\underline{1}, 0, -1\} \\ x_2[n] &= \{\underline{0}, -1, 1\} \\ x_3[n] &= \{\underline{-1}, 1, 0\} \end{aligned}$$

odredite očekivanje i autokorelacijski niz slučajnog procesa. Provjerite ergodičnost te izračunajte spektar energije.

RJEŠENJE: Označimo zadane tri realizacije s

$$\begin{aligned} x_1[n] &= X[n, s_1] = \{\underline{1}, 0, -1\} = \delta[n] - \delta[n-2] \\ x_2[n] &= X[n, s_2] = \{\underline{0}, -1, 1\} = -\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ x_3[n] &= X[n, s_3] = \{\underline{-1}, 1, 0\} = -\delta[n] + \delta[n-1] \end{aligned}$$

gdje je $S$ slučajna varijabla čiju funkciju gustoće vjerojantnosti možemo zapisati kao

$$f_S(s) = \frac{1}{3}\delta(s - s_1) + \frac{1}{3}\delta(s - s_2) + \frac{1}{3}\delta(s - s_3).$$

Očekivanje slučajne varijable $S$ je

$$E[S] = \int_{-\infty}^{+\infty} s\, f_S(s) ds = \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3).$$

Kako proces $X[n]$ ima tri determinističke realizacije koje odgovaraju vrijednostima $s_1$, $s_2$ i $s_3$ vrijedi

$$\begin{aligned} E\big[X[n]\big] &= \frac{1}{3}(s_1 + s_2 + s_3) = \frac{1}{3}\big(X[n, s_1] + X[n, s_2] + X[n, s_3]\big) \\ &= \frac{1}{3}\big(\delta[n] - \delta[n-2] - \delta[n-1] + \delta[n-2] - \delta[n] + \delta[n-1]\big) = 0 \end{aligned}$$

Autokorelacijska funkcija je

$$\begin{aligned} R_{XX}[n, n+m] &= E\big[X[n,s]X[n+m,s]\big] \\ &= \frac{1}{3}\big(x_1[n]x_1[n+m] + x_2[n]x_2[n+m] + x_3[n]x_3[n+m]\big) \end{aligned}$$

jer vrijedi slično razmatranje kao što je provedeno pri računanju očekivanja. Nakon uvrštavanja i množenja dobivamo

$$\begin{aligned} R_{XX}[n, n+m] = &\frac{1}{3}\delta[n]\big(2\delta[n+m] - \delta[n+m-1] - \delta[n+m-2]\big) \\ &+ \frac{1}{3}\delta[n-1]\big(-\delta[n+m] + 2\delta[n+m-1] - \delta[n+m-2]\big) \\ &+ \frac{1}{3}\delta[n-2]\big(-\delta[n+m] - \delta[n+m-1] + 2\delta[n+m-2]\big), \end{aligned}$$

što možemo preglednije zapisati kao

$$R_{XX}[n, n+m] = \frac{1}{3}\begin{cases} -\delta[n-2], & m=-2 \\ -\delta[n-1] - \delta[n-2], & m=-1 \\ 2\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2], & m=0 \\ -\delta[n] - \delta[n-1], & m=1 \\ -\delta[n], & m=2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Kako je autokorelacijski niz $R_{XX}[n, n+m]$ funkcija i koraka $n$ i pomaka $m$ slučajni proces nije stacionaran, pa ni ergodičan.

Spektar energije određujemo kao Fourierovu transformaciju vremenski usrednjenog autokorelacijskog niza. Kako razmatramo konačni signal kod vremenskog usrednjavanja ne dijelimo dobivenu vrijednost sa širinom intervala. Za vremenski usrednjenu autokorelacijsku funkciju dobivamo

$$A\big[R_{XX}[n, n+m]\big] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{XX}[n, n+m] = \begin{cases} \frac{1}{3}(-1) = -\frac{1}{3}, & m=-2 \\ \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}, & m=-1 \\ \frac{1}{3}(2+2+2) = 2, & m=0 \\ \frac{1}{3}(-1-1) = -\frac{2}{3}, & m=1 \\ \frac{1}{3}(-1) = -\frac{1}{3}, & m=2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

odnosno

$$A\big[R_{XX}[n, n+m]\big] = -\frac{1}{3}\delta[m+2] - \frac{2}{3}\delta[m+1] + 2\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[m-1] - \frac{1}{3}\delta[m-2].$$

Spektar energije je sada

$$\begin{aligned} S_{XX}(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}_{\text{vd}}\big[A\big[R_{XX}[n, n+m]\big]\big] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Big(-\frac{1}{3}\delta[m+2] - \frac{2}{3}\delta[m+1] + 2\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[m-1] - \frac{1}{3}\delta[m-2]\Big)\, e^{j\omega m} \\ &= -\frac{1}{3}e^{-j2\omega} - \frac{2}{3}e^{-j\omega} + 2 - \frac{2}{3}e^{j\omega} - \frac{1}{3}e^{j2\omega} \\ &= 2 - \frac{4}{3}\cos(\omega) - \frac{2}{3}\cos(2\omega). \end{aligned}$$

**Zadatak 1.7.** Mali Ivica je na šest stranica kocke redom napisao brojeve 6 i $-6$ tako da se na nasuprotnim stranicama kocke nalaze šestice sa suprotnim predznakom. Ivica je zatim zamislio slučajni proces s realizacijama koje imaju po šest članova,

$$x_6 = \{\underline{6}, -6, 6, -6, 6, -6\} \quad \text{i} \quad x_{-6} = \{\underline{-6}, 6, -6, 6, -6, 6\},$$

s time da pojedinu realizaciju odabire bacanjem kocke i čitanjem broja na gornjoj stranici—odabire se realizacija koja započinje tim brojem. Ivica sluti da je konstruirao slučajni proces stacionaran u širem smislu, no nije potpuno siguran.

Ispitajte stacionarnost u širem smislu te ergodičnost Ivičinog diskretnog slučajnog niza. Također odredite spektralnu gustoću energije.

RJEŠENJE: Kako kocka ima šest stranica na koje su napisani brojevi 6 i $-6$ na način da se šestice sa suprotnim predznacima nalaze na nasuprotnim stranicama broj 6 se javlja tri puta, a broj $-6$ također tri puta. Označimo li s $\omega_1$ događaj "pala je šestica", a s $\omega_2$ događaj "pala je minus šestica" možemo pisati

$$P(\omega_1) = \frac{1+1+1}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P(\omega_2) = \frac{1+1+1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Shodno tome su vjerojatnosti pojedinih realizacija $x_6$ i $x_{-6}$ jednake, dakle

$$P\big(X[n,\omega_1] = x_6[n]\big) = p_1 = \frac{1}{2} \quad \text{i} \quad P\big(X[n,\omega_2] = x_{-6}[n]\big) = p_2 = \frac{1}{2}.$$

Ispitajmo najprije ergodičnost očekivanja. To je najlakše napraviti ispisivanjem realizacija u tablicu te računanjem zbroja po stupcima i retcima (tablica 1.1.). Pri tome je vremenska srednja vrijednost

$$A\big[X[n,\omega_i]\big] = \sum_{n=0}^{5} X[n,\omega_i] = 0,$$

za odabranu realizaciju $\omega_i$, dok je očekivanje

$$E\big[X[n,\omega_i]\big] = \sum_{i=1}^{2} X[n,\omega_i] p_i = \frac{1}{2} x_6 + \frac{1}{2} x_{-6} = 0.$$

Kako su očekivanje i vremenska srednja vrijednost uvijek jednaki možemo reći da je proces stacionaran u širem smislu prvog reda te da je očekivanje ergodično.

| | | $n$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P(\omega_i)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $A\big[X[n,\omega_i]\big]$ |
| $\omega_1$ | $\frac{1}{2}$ | 6 | $-6$ | 6 | $-6$ | 6 | $-6$ | 0 |
| $\omega_2$ | $\frac{1}{2}$ | $-6$ | 6 | $-6$ | 6 | $-6$ | 6 | 0 |
| | $E\big[X[n,\omega_i]\big]$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |

Tablica 1.1.: Računanje statističke i vremenske srednje vrijednosti

Još moramo ispitati autokorelacijske funkcije. Vremenska autokorelacijska funkcija je

$$\mathcal{R}_{XX}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n,\omega_i] X[n+m,\omega_i],$$

dok je statistička autokorelacijska funkcija

$$R_{XX}[n_1,n_2] = E\big[X[n_1,\omega_i] X[n_2,\omega_i]\big].$$

Za obje autokorelacijske funkcije moramo računati produkt između odgovarajućih članova niza. Postupak je opet najjednostavnije odrediti tablično. U tablici 1.2.

su izračunati svi postojeći produkti za prvu realizaciju, odnosno $x_6[n_1]x_6[n_2]$. Kako je $x_6[n] = -x_{-6}[n]$ vrijedi $x_6[n_1]x_6[n_2] = x_{-6}[n_1]x_{-6}[n_2]$ te smo također izračunali i sve potrebne produkte za drugu realizaciju $x_{-6}[n]$. Kako su obje realizacije jednako vjerojatne brojevi dobiveni u tablici nam odmah daju i statističku autokorelacijsku funkciju jer je

$$R_{XX}[n_1, n_2] = p_1 x_6[n_1]x_6[n_2] + p_2 x_{-6}[n_1]x_{-6}[n_2] = x_6[n_1]x_6[n_2]. \tag{1.27}$$

| | $x_6[n_1]$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_6[n_2]$ | $6$ | $-6$ | $6$ | $-6$ | $6$ | $-6$ |
| $6$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ |
| $-6$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ |
| $6$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ |
| $-6$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ |
| $6$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ |
| $-6$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ | $-6^2$ | $6^2$ |

Tablica 1.2.: Tablica množenja pojedinih elemenata niza $x_6[n]$

Zanima nas ovisi li dobivena autokorelacijska funkcija samo o pomaku $m = n_2 - n_1$. Ispišimo drugu tablicu u kojoj se nalaze razlike $n_2 - n_1$ (tablica 1.3.). Ako autokorelacijska funkcija ovisi samo o pomaku $m$ svi elementi iz tablice 1.2. koji se nalze na mjestu istih $m$-ova iz tablice 1.3. moraju biti jednaki jer zbog (1.27) oni odgovaraju tabeliranoj autokorelacijskoj funkciji.

| | $n_1$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 0 | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ |
| 1 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ |
| 2 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ | $-3$ |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | $-2$ |
| 4 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ |
| 5 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Tablica 1.3.: Tablica pomaka $m = n_2 - n_1$

Vremenska autokorelacijska funkcija je

$$\mathcal{R}_{XX}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n, \omega_i]X[n+m, \omega_i],$$

odnosno moramo zbrojiti sve produkte za isti $m$, što opet možemo napraviti izravno čitanjem i zbrajanjem elemenata iz tablice 1.2. koji se nalze na mjestu istih $m$-ova iz tablice 1.3., dakle to su elementi na dijagonalama. Dobivamo

$$\mathcal{R}_{XX}[m] = 6^2\{-1, 2, -3, 4, -5, \underline{6}, -5, 4, -3, 2, -1\}.$$

Dobiveni rezultat je neovisan o realizaciji slučajnog procesa.

Prije određivanja gustoće spektra energije pogledajmo je li autokorelacijska funkcija ergodična ili nije. Statistička autokorelacijska funkcija je tableirana u tablici 1.2., i iako imamo iste vrijednosti za iste pomake $m$, nismo odredili što se događa kada $n_1$ ili $n_2$ poprime vrijednosti izvan skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Prilikom računanja vremenske autokorelacijske funckije smo pretpostavili da su vrijednosti za ostale indekse $n$ jednake nuli, te ako bi isto pretpostavili i za računanje statističke autokorelacijske funkcije proces ne bi bio stacionaran u širem smislu drugog reda jer na primjer za pomak $m = 2$ autokorelacijska funkcija poprima vrijednosti $6^2$ i 0. Sada autokorelacijska funkcija ne može biti ergodična jer ne ovisi samo o pomaku $m$.

No ako bi pretpostavili da je proces konačnog trajanja te da vrijednosti koraka $n$ izvan skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ nemaju smisla vremensku autokorelacijsku funkciju više ne računamo kao

$$\mathcal{R}_{XX}[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X[n, \omega_i]X[n + m, \omega_i] = X[n, \omega_i] * X[-n, \omega_i],$$

već računamo cirkularnu autokorelacijsku funkciju

$$\mathcal{R}_{XX}[m] = \sum_{n=0}^{5} X[n, \omega_i]X[\langle n + m\rangle_6, \omega_i] = X[n, \omega_i] \circledast_6 X[-n, \omega_i].$$

U tom slučaju za vremensku autokorelacijsku funkciju dobivamo

$$\mathcal{R}_{XX}[m] = 6^2\{\underline{1}, -1, 1, -1, 1, -1\},$$

te odmah imamo ergodičnost. No i statistička autokorelacijska funkcija se mijenja— svim negativnim pomacima iz tablice 1.3. moramo dodati 6 te matrica autokorelacijske funkcije postaje cirkularna matrica. U ovom slučaju je autokorelacijska funkcija opet ergodična, dakle vrijedi $\mathcal{R}_{XX}[m] = R_{XX}[m]$, a spektralnu gustoću energije bi računali kao $\mathrm{DFT}_5\big[R_{XX}[m]\big]$. Dobivamo

$$S_{XX}[k] = \mathrm{DFT}_5\big[R_{XX}[m]\big] = 6^2 \sum_{m=0}^{5} (-1)^m W_5^{mk}.$$

Pretpostavimo li da su vrijednosti za korake $n$ izvan skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ jednake nuli prije računanja gustoće spektra energije moramo usrednjiti statističku autokorelacijsku funkciju zbrajanjem po dijagonalama čime dobivamo upravo $\mathcal{R}_{XX}[m]$. Gustoća spektra energije je sada

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) = \mathrm{DTFT}\big[\mathcal{R}_{XX}[m]\big] &= 6^2 \sum_{m=-5}^{5} m e^{j\omega m} \\ &= 6^3 + 2 \cdot 6^2 \sum_{m=1}^{5} m(-1)^m \cos(m\omega) \end{aligned}$$

**Primjer 1.23.** Koje od slijedećih funkcija ne mogu biti spektri snage realnog slučajnog procesa:

a) $\dfrac{\omega^2}{\omega^6 + 3\omega^2 + 3}$,

b) $e^{-(\omega-1)^2}$,

c) $\dfrac{\omega^2}{\omega^4 + 1} - \delta(\omega)$ i

d) $\dfrac{\omega^2}{1 + \omega^2 + j\omega^6}$?

Rješenje: Funkcije pod b), c) i d) nisu spektri snage realnog slučajnog procesa (funkcije nisu nenegativne parne funkcije).

**Primjer 1.24.** Autokorelacijska funkcija kontinuiranog stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ bez periodičkih komponenti je

$$R_{XX}(\tau) = 4 + e^{-2|\tau|}.$$

Odredite:

a) očekivanje $\overline{X}$ i varijancu $\sigma_X^2$,

b) spektar snage te srednju snagu.

Rješenje: Za stacionarne slučajne procese bez periodičkih komponenti vrijedi

$$R_{XX}(0) = \overline{X^2} \quad \text{i} \quad \lim_{\tau\to\infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X}^2.$$

Očekivanje je stoga

$$E\big[X(t)\big] = \sqrt{\lim_{\tau\to\infty} R_{XX}(\tau)} = 2.$$

Varijanca $\sigma_X^2$ je sada

$$\sigma_X^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 5 - 4 = 1.$$

Spektar snage je Fourierova transformacija statističke autokorelacijske funkcije, dakle

$$S_{XX} = \mathcal{F}\big[R_{XX}(\tau)\big] = 4 \cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{4}{\omega^2+4}.$$

Naposlijetku je potrebno odrediti srednju snagu,

$$\begin{aligned} P_{XX} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(4\cdot 2\pi\delta(\omega) + \frac{4}{\omega^2+4}\Big)\,d\omega \\ &= 4 + \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega^2+4}\,d\omega = 4 + \frac{2}{\pi}\frac{1}{2}\operatorname{tg}^{-2}\Big(\frac{\omega}{2}\Big)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= 4 + \frac{1}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

**Primjer 1.25.** Autokorelacijska funkcija diskretnog slučajnog procesa stacionarnog u širem smislu je

$$R_{XX}(m) = e^{-|m|}.$$

Odredite i skicirajte spektralnu gustoću snage. Kolika je srednja snaga ovog procesa?

Rješenje: Kako je zadan diskretni slučajni proces za određivanje spektra snage računamo vremenski disktretnu Fourierovu transformaciju:

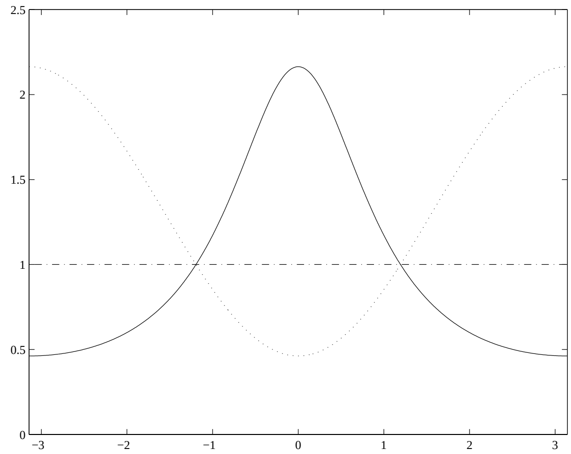
$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty} R_{XX}(m)e^{-j\omega m} = \sum\nolimits_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-|m|}e^{-j\omega m} \\ &= \sum\nolimits_{m=-\infty}^{0} e^{-|m|-j\omega m} + \sum\nolimits_{m=0}^{+\infty} e^{-|m|-j\omega m} - 1 \\ &= \sum\nolimits_{m=0}^{+\infty} e^{-m+j\omega m} + \sum\nolimits_{m=0}^{+\infty} e^{-m-j\omega m} - 1 \\ &= \frac{1}{1-e^{j\omega-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega-1}} - 1 \end{aligned}$$

Nakon sređivanja spektar snage postaje

$$S_{XX}(\omega) = \frac{e^2-1}{e^2+1-2e\cos(\omega)} \approx \frac{6{,}3891}{8{,}3891 - 5{,}4366\cos(\omega)}$$

Spektar je prikazan na slici 1.22.. Srednju snagu dobivamo integiranjem gustoće spektra snage po periodu. Dobivamo

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1 - 2e\cos(\omega)}\, d\omega = 1.$$




Slika 1.22.: Spektar snage diskretnog slučajnog procesa

**Primjer 1.26.** Ako je $X(t)$ stacionarni slučajni proces s poznatim očekivanjem $\overline{x}$ i poznatim spektrom snage $S_{XX}(\omega)$, koliki je spektar snage procesa

$$Y(t) = A + B \cdot X(t),$$

gdje su $A$ i $B$ realne konstante?

Rješenje: Spektar ćemo odrediti iz statističke autokorelacijske funkcije procesa $Y(t)$. Dobivamo

$$\begin{aligned} R_{YY}(t, t+\tau) &= E\big[Y(t)Y(t+\tau)\big] = E\big[\big(A + B\,X(t)\big)\big(A + B\,X(t+\tau)\big)\big] \\ &= A^2 + AB\,E\big[X(t)\big] + AB\,E\big[X(t+\tau)\big] + B^2\,E\big[X(t)X(t+\tau)\big] \\ &= A^2 + 2AB\overline{x} + R_{XX}(\tau). \end{aligned}$$

Spektar snage je Fourierova transformacija $R_{YY}(\tau)$. Dobivamo

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(A^2 + 2AB\overline{x} + R_{XX}(\tau)\big)e^{-j\omega\tau}\, d\tau \\ &= (A^2 + 2AB\overline{x})\delta(\omega) + B^2 S_{XX}(\omega). \end{aligned}$$

**Primjer 1.27.** Promatramo slučajni proces

$$Y(t) = AX(t)\cos(\omega_0 t + \theta),$$

gdje su $A$ i $\omega_0$ konstante, dok je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-\pi, \pi]$. $X(t)$ je slučajni proces stacionaran u širem smislu s poznatom autokorelacijskom funkcijom $R_{XX}(\tau)$ i pripadnom gustoćom snage $S_{XX}(\omega)$. Pri tome su slučajna varijabla $\theta$ i slučajni proces $X(t)$ međusobno nezavisni. Ispitaj stacionarnost u širem smislu procesa $Y(t)$. Izrazi spektar snage procesa $Y(t)$ preko poznatog spektra snage $S_{XX}(\omega)$ procesa $X(t)$.

Rješenje: Prvo ispitujemo stacionarnost u širem smislu zadanog procesa $Y(t)$. Uz pretopstavku nezavisnosti procesa $X(t)$ i slučajne varijable $\theta$ očekivanje je

$$E\big[Y(t)\big] = E\big[AX(t)\cos(\omega_0 t + \theta)\big] = AE\big[X(t)\big]E\big[\cos(\omega_0 t + \theta)\big] = 0$$

jer je očekivanje $E\big[\cos(\omega_0 t + \theta)\big] = 0$. Za autokorelacijsku funkciju analogno dobivamo

$$\begin{aligned} R_{YY}(t, t+\tau) &= E\big[Y(t)Y(t+\tau)\big] \\ &= E\big[AX(t)\cos(\omega_0 t + \theta)AX(t+\tau)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\big] \\ &= A^2 E\big[X(t)X(t+\tau)\big]E\big[\cos(\omega_0 t + \theta)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\big], \end{aligned}$$

što nakon računanja očekivanja postaje

$$R_{YY}(\tau) = \frac{A^2}{2} R_{XX}(\tau)\cos(\omega_0\tau).$$

Iz određenog očekivanja i autokorelacijske funkcije vidimo da je proces $Y(t)$ stacionaran u širem smislu. Sada spektar snage određujemo računajući Fourierovu transformaciju autokorelacijske funkcije. Dobivamo

$$\begin{aligned} S_{YY}(\omega) &= \mathcal{F}\big[R_{YY}(\tau)\big] \\ &= \mathcal{F}\big[\frac{A^2}{2} R_{XX}(\tau)\cos(\omega_0\tau)\big] \\ &= \frac{A^4}{4}\mathcal{F}\big[R_{XX}e^{j\omega_0\tau}\big] + \frac{A^4}{4}\mathcal{F}\big[R_{XX}e^{-j\omega_0\tau}\big], \end{aligned}$$

što uz $\mathcal{F}\big[R_{XX}(\tau)\big] = S_{XX}(\omega)$ prema teoremu o pomaku postaje

$$S_{YY}(\omega) = \frac{A^2}{4}\big(S_{XX}(\omega - \omega_0) + S_{XX}(\omega + \omega_0)\big).$$

**Primjer 1.28.** Promatramo dva slučajna procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ određena izrazima

$$X_1(t) = U\cos(\omega_0 t) + V\sin(\omega_0 t) \quad \text{i} \quad X_2(t) = V\cos(\omega_0 t) - U\sin(\omega_0 t).$$

Pri tome su $U$ i $V$ međusobno nezavisne slučajne varijable očekivanja nula i varijance $\sigma^2$. Odredi kroskorelacijsku funkciju te spektralnu gustoću međusnage procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$.

Rješenje: Odredimo najprije kroskorelacijsku funkciju procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} R_{X_1X_2}(t, t+\tau) &= E\big[X_1(t)X_2(t+\tau)\big] \\ &= E\big[\big(U\cos(\omega_0 t) + V\sin(\omega_0 t)\big)\big(V\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau) - U\sin(\omega_0 t + \omega_0)\big)\big] \\ &= E\big[UV\big]\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau) - E\big[UU\big]\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t + \omega_0) \\ &\quad + E\big[VV\big]\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau) - E\big[VU\big]\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t + \omega_0) \end{aligned}$$

Kako su $U$ i $V$ međusobno nezavisne slučajne varijable vrijedi $E\big[UV\big] = E\big[U\big]E\big[V\big] = 0$. Osim toga zbog očekivanja koje je jednako nuli još vrijedi i $E\big[U^2\big] = E\big[V^2\big] = \sigma^2$ pa autokorelacijska funkcija postaje

$$\begin{aligned} R_{X_1X_2}(t, t+\tau) &= \sigma^2\big(\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau) - \cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t + \omega_0)\big) \\ &= -\sigma^2\sin(\omega_0\tau). \end{aligned}$$

Kako je autokorelacijska funkcija samo funkcija pomaka $\tau$ spektar međusnage određujemo računajući Fourierovu transformaciju autokorelacijske funkcije:

$$S_{X_1X_2}(\omega) = -j\sigma^2\pi\big(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\big).$$

**Zadatak 1.8.** Slučajni proces ima spektar snage

$$S_{XX}(\omega) = \frac{6\omega^2}{1 + \omega^4}.$$

Odredite srednju snagu zadanog procesa.

RJEŠENJE: $P_{XX} = 3\sqrt{2}/2$.

**Zadatak 1.9.** Autokorelacijska funkcija stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ je

$$R_{XX}(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}\cos(\omega_0\tau),$$

gdje su $A$, $\alpha$ i $\omega_0$ pozitivni realni brojevi. Odredite spektar snage $S_{XX}(\omega)$.

RJEŠENJE: $S_{XX}(\omega) = \dfrac{\alpha A}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} + \dfrac{\alpha A}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2}$.

**Primjer 1.29.** Kolika je efektivna širina spektra snage slučajnog procesa ako je

$$S_{XX}(\omega) = \begin{cases} P, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gdje je $P$ realna konstanta.

RJEŠENJE: Zadan je niskopropusni spektar te efektivnu širinu spektra snage računamo prema izrazu

$$W_{ef}^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 S_{XX}(\omega)\, d\omega}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega}.$$

Za zadani spektar snage je

$$W_{ef}^2 = \frac{\displaystyle\int_{-\omega_0}^{\omega_0} \omega^2 P\, d\omega}{\displaystyle\int_{-\omega_0}^{\omega_0} P\, d\omega} = \frac{2P\omega_0^3/3}{2P\omega_0} = \frac{\omega_0^2}{3},$$

te je efektivna širina spektra snage

$$W_{ef} = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}.$$

**Primjer 1.30.** Kolika je efektivna širina spektra snage slučajnog procesa ako je

$$S_{XX}(\omega) = \frac{A^2\pi}{2}\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big),$$

gdje je $A$ realna konstanta.

RJEŠENJE: Zadan je pojasnopropusni spektar te efektivnu širinu spektra snage računamo prema izrazu

$$W_{ef}^2 = \frac{4\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\omega - \omega_0)^2 S_{XX}(\omega)\, d\omega}{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega}.$$

Za zadani spektar snage je

$$W_{ef}^2 = \frac{4\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\omega - \omega_0)^2 \frac{A^2\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0)\, d\omega}{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{A^2\pi}{2}\delta(\omega - \omega_0)\, d\omega} = 4(\omega_0 - \omega_0)^2 = 0,$$

te je efektivna širina spektra snage $W_{ef} = 0$.

**Primjer 1.31.** Odredi autokorelacijsku funkciju i spektar snage AM signala

$$X_{AM}(t) = \big(A_0 + X(t)\big)\cos(\omega_0 t + \theta),$$

gdje su $A_0$ i $\omega_0$ konstante, dok je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 2\pi]$. $X(t)$ je slučajni proces stacionaran u širem smislu s očekivanjem jednakim nuli. Slučajna varijabla $\theta$ i proces $X(t)$ su međusobno nezavisni. Na temelju gustoće spektra snage procijeni efikasnost AM sustava.

Rješenje: Autokorelacijsku funkciju $R_{AM}(t, t+\tau)$ računamo prema definiciji:

$$\begin{aligned}
R_{AM}(t, t+\tau) &= E\big[X_{AM}(t)X_{AM}(t+\tau)\big] \\
&= E\big[\big(A_0 + X(t)\big)\cos(\omega_0 t + \theta)\big(A_0 + X(t+\tau)\big)\cos(\omega_0 t + \omega_0\tau + \theta)\big] \\
&= \frac{1}{2}E\big[\big(A_0^2 + A_0X(t) + A_0X(t+\tau) + X(t)X(t+\tau)\big) \\
&\qquad \big(\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + 2\theta + \omega_0\tau)\big)\big]
\end{aligned}$$

Kako su proces $X(t)$ i slučajna varijabla međusobno nezavisni uz poznatu autokorelacijsku funkciju procesa $X(t)$ autokorelacijska funkcija $R_{AM}(t, t+\tau)$ postaje

$$\begin{aligned}
R_{AM}(t, t+\tau) &= \frac{1}{2}\big(A_0^2 + A_0E\big[X(t)\big] + A_0E\big[X(t+\tau)\big] + E\big[X(t)X(t+\tau)\big]\big) \\
&\qquad \big(\cos(\omega_0\tau) + E\big[cos(2\omega_0 t + 2\theta + \omega_0\tau)\big]\big) \\
&= \frac{1}{2}\big(A_0^2 + R_{XX}(\tau)\big)\cos(\omega_o\tau)
\end{aligned}$$

Dobivena autokorelacijska funkcija ovisi samo o pomaku $\tau$ pa spektralnu gustoću snage računamo kao Fourierovu transformaciju:

$$\begin{aligned}
S_{AM}(\omega) &= \mathcal{F}\big[R_{AM}(\tau)\big] = \mathcal{F}\big[\frac{1}{2}\big(A_0^2 + R_{XX}(\tau)\big)\cos(\omega_o\tau)\big] \\
&= \mathcal{F}\big[\frac{1}{2}A_0^2\cos(\omega_0\tau)\big] + \mathcal{F}\big[\frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)R_{XX}(\tau)\big] \\
&= \frac{A_0^2\pi}{2}\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big) + \frac{1}{4}\mathcal{F}\big[R_{XX}(\tau)(e^{j\omega_0\tau} + e^{-j\omega_0\tau})\big] \\
&= \frac{A_0^2\pi}{2}\big(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\big) + \frac{1}{4}\big(S_{XX}(\omega - \omega_0) + S_{XX}(\omega + \omega_0)\big).
\end{aligned}$$

Korisnost AM sustava možemo definirati kao omjer snage korisnog signala prema ukupnoj emitiranoj snazi, dakle

$$\eta_{AM} = \frac{P_{\text{signala}}}{P_{AM}}.$$

Ukupna snaga AM signala je

$$P_{AM} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{AM}(\omega)\,d\omega = \frac{A_0^2}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega,$$

dok je snaga korisnog dijela signala koji odgovara procesu $X(t)$

$$P_{\text{signala}} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\,d\omega.$$

Sada je

$$\eta_{AM} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega}{2\pi A_0^2 + \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega} = \frac{R_{XX}(0)}{A_0^2 + R_{XX}(0)},$$

jer je za procese stacionarne u širem smislu

$$R_{XX}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(\omega)\, d\omega.$$

**Primjer 1.32.** Pokaži da se zbroj FM signala i uskopojasnog šuma $N(t) = N_c(i)\cos(\omega_0 t) - N_s(t)\sin(\omega_0 t)$ može zapisati u obliku

$$R(t)\cos\big(\omega_0 t + \theta_0 + \theta_{FM}(t) + \theta_N(t)\big),$$

gdje je

$$\theta_{FM}(t) = k_{FM} \int X(t)\, dt.$$

Pri tome je amplituda $R(t)$

$$R(t) = \sqrt{\big(N_c(t) + A\cos\big(\theta_0 + \theta_{FM}(t)\big)\big)^2 + \big(N_s(t) + A\sin\big(\theta_0 + \theta_{FM}(t)\big)\big)^2},$$

dok je kut $\theta_N(t)$

$$\operatorname{tg}\big(\theta_N(t)\big) = \frac{N_s(t)\cos\big(\theta_0 + \theta_{FM}(t)\big) - N_c(t)\sin\big(\theta_0 + \theta_{FM}(t)\big)}{A + N_c(t)\cos\big(\theta_0 + \theta_{FM}(t)\big) + N_s(t)\sin\big(\theta_0 + \theta_{FM}(t)\big)}.$$

Rješenje: FM signal je određen s

$$X_{FM}(t) = A_0\cos\big(\omega_0 t + \theta_0 + k_{FM} \int X(t)\, dt\big),$$

gdje je $k_{FM}$ konstanta modulacije. FM signalu pribrajamo uskopojasni aditivni šum $N(t)$. Uskopojasni aditivni šum možemo zapisati kao

$$N(t) = A(t)\cos\big(\omega_0 t + \theta(t)\big),$$

gdje je $A(t)$ sporo promjenjiva ovojnica, dok je $\theta(t)$ promjenjiva faza. U slučaju da je $N(t)$ Gausov slučajni proces $A(t)$ ima Rayleighovu distribuciju, dok proces $\theta(t)$ ima jednoliku razdiobu na $[0, 2\pi]$. Šum $N(t)$ kao i svaki drugi signal možemo zapisati rastavljen na dvije komponente,

$$N(t) = N_c(i)\cos(\omega_0 t) - N_s(t)\sin(\omega_0 t).$$

Za ovakav rastav vrijedi

$$A(t) = \sqrt{N_c^2(t) + N_s^2(t)}$$
$$\theta(t) = \operatorname{arctg}\frac{N_c(t)}{N_s(t)}$$

i

$$N_c(t) = A(t)\cos\big(\theta(t)\big)$$
$$N_s(t) = A(t)\sin\big(\theta(t)\big)$$

Zbroj FM signala i šuma možemo zapisati u obliku

$$\big(A_0\cos(\theta_0+\theta_{FM}(t))+N_c(t)\big)\cos(\omega_0 t)-\big(A_0\sin(\theta_0+\theta_{FM}(t))+N_s(t)\big)\sin(\omega_0 t),$$

gdje član uz $\cos(\omega_0 t)$ predstavlja amplitudu komponente u fazi (*in phase*), dok član uz $\sin(\omega_0 t)$ predstavlja amplitudu komponente pomaknute za $\pi/2$ (*quadrature*). Dobiveni signal sada odmah možemo zapisati u obliku

$$R(t)\cos\big(\omega_0 t+\phi(t)\big),$$

gdje je

$$R(t)=\sqrt{\big(N_c(t)+A\cos\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)\big)\big)^2+\big(N_s(t)+A\sin\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)\big)\big)^2},$$

dok je

$$\operatorname{tg}\big(\phi(t)\big)=\frac{A_0\sin(\theta_0+\theta_{FM}(t))+N_s(t)}{A_0\cos(\theta_0+\theta_{FM}(t))+N_c(t)}.$$

Sada je još potrebno pokazati valjanost rastava

$$\operatorname{tg}\big(\phi(t)\big)=\operatorname{tg}\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)+\theta_N(t)\big).$$

Dovoljno je dobiveni izraz za $\operatorname{tg}\big(\phi(t)\big)$ raspisati tako da odgovara izrazu za tangens zbroja:

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg}\big(\phi(t)\big) &= \frac{A_0\sin(\theta_0+\theta_{FM}(t))+N_s(t)}{A_0\cos(\theta_0+\theta_{FM}(t))+N_c(t)}\\
&= \frac{A_0\sin(\theta_0+\theta_{FM})+N_s\big(\sin^2(\theta_0+\theta_{FM})+\cos^2(\theta_0+\theta_{FM})\big)}{A_0\cos(\theta_0+\theta_{FM})+N_c\big(\sin^2(\theta_0+\theta_{FM})+\cos^2(\theta_0+\theta_{FM})\big)}\frac{\sec(\theta_0+\theta_{FM})}{\sec(\theta_0+\theta_{FM})}\\
&= \frac{A_0\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_{FM})+N_s\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_{FM})\sin(\theta_0+\theta_{FM})+N_s\cos(\theta_0+\theta_{FM})}{A_0+N_c\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_{FM})\sin(\theta_0+\theta_{FM})+N_c\cos(\theta_0+\theta_{FM})}\\
&= \frac{\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_{FM})+\dfrac{N_s\cos(\theta_0+\theta_{FM})-N_c\sin(\theta_0+\theta_{FM})}{A_0+N_s\sin(\theta_0+\theta_{FM})+N_c\cos(\theta_0+\theta_{FM})}}{1-\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_{FM})\dfrac{N_s\cos(\theta_0+\theta_{FM})-N_c\sin(\theta_0+\theta_{FM})}{A_0+N_s\sin(\theta_0+\theta_{FM})+N_c\cos(\theta_0+\theta_{FM})}}
\end{aligned}$$

Iz dobivenog rastava sada dobivamo

$$\operatorname{tg}\big(\theta_N(t)\big)=\frac{N_s(t)\cos\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)\big)-N_c(t)\sin\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)\big)}{A+N_c(t)\cos\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)\big)+N_s(t)\sin\big(\theta_0+\theta_{FM}(t)\big)}.$$

# 2. Procjene

## 2.1. Točkasti procjenitelji

**Definicija 2.1.1. (Slučajni uzorak)** *Neka je $X$ slučajna varijabla s poznatom funkcijom gustoće vjerojatnosti $f_X(x)$ i neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ skup $n$ nezavisnih slučajnih varijabli od kojih svaka također ima funkciju gustoće vjerojatnosti $f_X(x)$. Skup slučajnih varijabli*

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

*se zove slučajni uzorak veličine $n$ od $X$.*

**Definicija 2.1.2. (Statistika)** *Svaka funkcija slučajnog uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ zove se statistika.*

Neka funkcija razdiobe obilježja $X$ ovisi o nepoznatom parametru $\theta$. Problem točkaste procjene je pronalaženje $\hat{\theta}$ na temelju $n$ promatranih realizacija slučajne varijable $X$, odnosno za neki slučajni uzorak $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ definiramo procjenu $\hat{\theta}_n$ kao neku statistiku dobivenih $n$ uzoraka,

$$\hat{\theta}_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

**Definicija 2.1.3. (Nepristranost)** *Za točkastu procjenu $\hat{\theta}$ kažemo da je nepristrana ili centrirana ako je*

$$E\big[\hat{\theta}\big] = \theta.$$

Za procjenu koja nije nepristrana kažemo da je pristrana. Za pristranu ocjenu promatramo pomak (eng. *bias*)

$$b(\theta_n) = E\big[\hat{\theta}_n\big] - \theta,$$

koji obično ovisi o broju uzoraka $n$. Za procjenitelj ili estimator kažemo da je asimptotski nepristran ako

$$\lim_{n\to\infty} b(\theta_n) = 0.$$

**Definicija 2.1.4. (Konzistentnost)** *Za estimator kažemo da je konzistentan (ili postojan) ako srednja kvadratna pogreška teži k nuli za velike uzorke,*

$$\lim_{n\to\infty} E\big[\epsilon_n^2\big] = \lim_{n\to\infty} E\big[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\big] = 0.$$

Varijanca $\mathrm{Var}\big[\hat{\theta}_n\big] = \sigma^2_{\hat{\theta}_n}$ nam određuje efikasnost (ili učinkovitost) procjenitelja.

**Definicija 2.1.5. (Efikasnost)** *Za procjenitelj $\hat{\theta}_{n\boldsymbol{MV}} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ kažemo da je najefikasniji (ili najučinkovitiji) nepristrani procjenitelj parametra $\theta$ ako je*

$$\mathrm{Var}\big[\hat{\theta}_{n\boldsymbol{MV}}\big] \leq \mathrm{Var}\big[\hat{\theta}_n\big]$$

*za sve procjenitelje $\hat{\theta}_n$ (procjenitelj* ***m****inimalne* ***v****arijance).*

**Primjer 2.1.** Jedna realizacija stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ otipkana je u $N$ vremenskih trenutaka $t_i$, $i = 1, \ldots, N$. Promatramo li otipkane uzorke $x_i$ kao realizacije slučajnih varijabli $X(t_i)$ možemo ocijeniti srednju vrijednost slučajnog procesa $E\big[X(t)\big] = \overline{x}$ usrednjavanjem otipkanih uzoraka

$$\hat{\overline{x}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Pokažite da je

a) očekivanje ocjene srednje vrijednosti upravo srednja vrijednost, $E\big[\hat{\overline{x}}\big] = \overline{x}$,

b) varijanca ocjene srednje vrijednosti $\sigma^2_{\hat{\overline{x}}} = \sigma^2_{X(t)}/N$.

Rješenje: Odredimo očekivanje ocjene srednje vrijednosti:

$$E\big[\hat{\overline{x}}\big] = E\Big[\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i\Big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i\big].$$

Kako je zadani proces stacionaran vrijedi $E\big[X(t)\big] = E\big[X(t+\Delta t)\big]$ za svaki $\Delta t$, te je sada

$$E\big[x_i\big] = E\big[X(t_i)\big] = E\big[X(t)\big] = \overline{x}.$$

Očekivanje ocjene srednje vrijednosti je

$$E\big[\hat{\overline{x}}\big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} \overline{x} = \overline{x},$$

što je trebalo i pokazati. Na sličan način određujemo varijancu ocjene srednje vrijednosti. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\hat{\overline{x}}} &= E\Big[\big(\hat{\overline{x}} - E[\hat{\overline{x}}]\big)^2\Big] = E\bigg[\Big(\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\overline{x}\Big)^2\bigg] \\
&= E\bigg[\frac{1}{N^2}\Big(\sum\nolimits_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})\Big)^2\bigg] = \frac{1}{N^2}E\bigg[\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N}(x_i - \overline{x})(x_j - \overline{x})\bigg] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} E\big[(x_i - \overline{x})(x_j - \overline{x})\big]
\end{aligned}$$

Uzorci $x_i$ i $x_j$ odgovaraju različitim nezavisnim slučanim varijablama $X(t_i)$ i $X(t_j)$ te vrijedi

$$E\big[(x_i - \overline{x})(x_j - \overline{x})\big] = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2_{X(t_i)}, & i = j \end{cases},$$

pa je

$$\sigma^2_{\hat{\overline{x}}} = \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sigma^2_{X(t_i)} = \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sigma^2_{X(t)} = \frac{1}{N}\sigma^2_{X(t)}.$$

Jedna realizacija stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ otipkana je u $N$ vremenskih trenutaka $t_i$, $i = 1, \ldots, N$. Promatramo li otipkane uzorke $x_i$ kao realizacije slučajnih varijabli $X(t_i)$ možemo ocijeniti varijancu slučajnog procesa koristeći estimator

$$\hat{\sigma}^2_{X(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big(x_i - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} x_j\Big)^2.$$

Da li je takav estimator pristran?

Rješenje: Estimator varijance nije pristran ako je očekivana vrijednost estimacije upravo varijanca promatranog slučajnog procesa, odnosno

$$E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] = \sigma^2_{X(t)}.$$

Očekivana vrijednost estimatora je

$$E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] = E\Big[\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\Big(x_i - \frac{1}{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} x_j\Big)^2\Big].$$

Vrijedi

$$\hat{\overline{x}} = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i,$$
$$(\hat{\overline{x}})^2 = \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} x_i x_j,$$

te je

$$\begin{aligned} E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] &= E\Big[\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\overline{x}})^2\Big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i^2 - 2x_i\hat{\overline{x}} + (\hat{\overline{x}})^2\big] \\ &= \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\Big[x_i^2 - 2x_i\frac{1}{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} x_j + \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{j=1}^{N}\sum\nolimits_{k=1}^{N} x_j x_k\Big] \\ &= \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i^2\big] - \frac{2}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} E\big[x_i x_j\big] \\ &\quad + \frac{1}{N^3}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N}\sum\nolimits_{k=1}^{N} E\big[x_j x_k\big] \end{aligned}$$

Dva uzorka $x_i$ i $x_j$ odgovaraju različitim nezavisnim slučanim varijablama $X(t_i)$ i $X(t_j)$ te vrijedi

$$E\big[x_i x_j\big] = \begin{cases} E\big[x_i^2\big] = \overline{x^2}, & i = j \\ E\big[x_j\big]E\big[x_j\big] = \overline{x}^2, & i \neq j \end{cases}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] &= \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i^2\big] - \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} E\big[x_i x_j\big] \\ &= \frac{1}{N}NE\big[x_i^2\big] - \frac{1}{N^2}\big((N^2 - N)E\big[x_i x_j\big] + NE\big[x_i^2\big]\big) \\ &= \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)\overline{x^2} - \frac{N-1}{N}\overline{x}^2 = \frac{N-1}{N}\big(\overline{x^2} - \overline{x}^2\big) = \frac{N-1}{N}\sigma^2_{X(t)}. \end{aligned}$$

Kako očekivanje ovisi o broju uzoraka $N$ zadani estimator varijance je pristran. Bolji procjenitelj je *korigirana uzoračka varijanca*,

$$\hat{\sigma}^2_{X(t)} = \frac{1}{N-1}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\Big(x_i - \frac{1}{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} x_j\Big)^2.$$

**Primjer 2.2.** Kolika je varijanca ocjene varijance prema izrazu iz prethodnog zadatka,

$$\hat{\sigma}^2_{X(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \hat{\overline{x}})^2,$$

ako znamo da stacionarni slučajni proces $X(t)$ daje uzorke $X_i$ s Gaussovom raspodjelom srednje vrijenosti nula.

Rješenje: Pokažimo najprije da za ovaj posebni slučaj procjenitelj nije pristran. Vrijedi:

$$\begin{aligned} E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] &= E\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\Big] \\ &= E\Big[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\Big] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overline{x^2} = \overline{x^2} = \sigma^2_{X(t)} \end{aligned}$$

Ocijenimo sada varijancu naše procjene varijance:

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\hat{\sigma}^2_X} &= E\big[(\hat{\sigma}^2_X - E[\hat{\sigma}^2_X])^2\big] = E\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sigma^2_X\Big)\Big] \\
&= E\Big[\frac{1}{N^2}\Big(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\Big)^2 - 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2\sigma^2_X + \sigma^4_X\Big] \\
&= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E[x_i^2x_j^2] - 2\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[x_i^2]\sigma^2_X + \sigma^4_X
\end{aligned}$$

Kako smo pretpostavili nezavisnost vrijedi

$$E\big[x_i^2x_j^2\big] = \begin{cases} E\big[x_i^2\big]E\big[x_j^2\big] = \sigma^4_X, & i \neq j \\ E\big[x_i^4\big] = 3\sigma^4_X, & i = j \end{cases}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\sigma^2_{\hat{\sigma}^2_X} &= \frac{1}{N}\big(3N\sigma^4_X + (N^2 - N)\sigma^4_X\big) - 2\sigma^4_X + \sigma^4_X \\
&= \frac{2}{N}\sigma^4_X.
\end{aligned}$$

**Primjer 2.3.** Zadan je stacionarni slučajni proces $X(t)$ s Gaussovom razdiobom srednje vrijednosti nula. Ako varijancu procesa ocjenjujemo estimatorom

$$\hat{\sigma}^2_{X(t)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2,$$

koliko uzoraka treba uzeti u obzir da standardna devijacija naše ocjene ne prelazi 0.5% stvarne vrijednosti $\sigma^2_{X(t)}$? Da li je estimator pristran?

Za slučajnu varijablu $X$ s Gaussovom razdiobom vrijedi $E[x^4] = 3\sigma^4_X$.

Rješenje: Standardna devijacija naše ocjene je

$$\sigma^2_{\hat{\sigma}^2_{X(t)}} = E\big[(\hat{\sigma}^2_{X(t)})^2\big] - E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big]^2.$$

Najprije računamo očekivanje $\hat{\sigma}^2_{X(t)}$,

$$E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] = E\Big[\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i^2\Big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i^2\big].$$

Kako se radi o slučajnom procesu s Gaussovom razdiobom srednje vrijednosti nula vrijedi $E[x_i^2] = \sigma^2_{X(t_i)}$ te je

$$E\big[\hat{\sigma}^2_{X(t)}\big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i^2\big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} \sigma^2_{X(t_i)} = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} \sigma^2_{X(t)} = \sigma^2_{X(t)}.$$

Kako je očekivanje našeg estimatora varijance upravo varijanca promatranog procesa, estimator nije pristran. No da bi odredili koliko uzoraka nam je potrebno moramo još izračunati i očekivanje kvadrata naše ocjene,

$$E\big[(\hat{\sigma}^2_{X(t)})^2\big] = E\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i^2\Big)^2\Big] = \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} E\big[x_i^2x_j^2\big].$$

Za Gaussovu razdiobu vrijedi

$$\begin{aligned}
E\big[x_i^2x_j^2\big] &= E\big[x_i^2\big]E\big[x_j^2\big] = \sigma^4_{X(t)}, \quad i \neq j \\
E\big[x_i^2x_i^2\big] &= E\big[x_i^4\big] = 3\sigma^4_{X(t)}, \quad i = j
\end{aligned}$$

te je

$$E\big[(\hat\sigma^2_{X(t)})^2\big] = \frac{1}{N^2}\sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} E\big[x_i^2 x_j^2\big]$$
$$= \frac{1}{N^2}\big(3N\sigma^4_{X(t)} + (N^2-N)\sigma^4_{X(t)}\big) = \frac{2}{N}\sigma^4_{X(t)} + \sigma^4_{X(t)}.$$

Naposijetku je kvadrat standardne devijacije naše ocjene

$$\sigma^2_{\hat\sigma^2_{X(t)}} = \frac{2}{N}\sigma^4_{X(t)} + \sigma^4_{X(t)} - \sigma^4_{X(t)} = \frac{2}{N}\sigma^4_{X(t)}.$$

Zahtijevamo da vrijedi

$$\sigma_{\hat\sigma^2_{X(t)}} = \sqrt{\frac{2}{N}\sigma^4_{X(t)}} \leq 0{,}005\sigma^2_{X(t)}$$

te dobivamo da je $N \geq 80000$ što znači da je potrebno barem 80 tisuća uzoraka da standardna devijacija naše ocjene ne prelazi 0.5% stvarne vrijednosti $\sigma^2_{X(t)}$.

**Primjer 2.4.** Neka je $X$ slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/a, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gdje je $a$ realna pozitivna konstanta. Iz $N$ realizacija slučajne varijable procijenjujemo $a$ kao

$$\hat a = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

Koliko uzoraka moramo uzeti da devijacija naše procjene bude manja od $0{,}001a$?

Rješenje: Odredimo najprije očekivanu vrijednost naše procjene. Vrijedi

$$E\big[\hat a\big] = E\Big[\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\Big] = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} E\big[x_i\big].$$

Kako je očekivana vrijednost pojedine realizacije

$$E[x_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx = \int_0^a \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^2}{2a}\Big|_0^a = \frac{a}{2},$$

za očkivanu vrijednost procjene dobivamo

$$E\big[\hat a\big] = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} E\big[x_i\big] = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{a}{2} = a,$$

te je zadani estimator nepristran. Sada možemo odrediti devijaciju naše procjene $\sigma_{\hat a}$ kao

$$\sigma^2_{\hat a} = E\big[\big(\hat a - E[\hat a]\big)^2\big] = E\big[\hat a^2 - 2\hat a a + a^2\big] = E\big[\hat a^2\big] - 2E\big[\hat a\big]a + a^2$$
$$= E\big[\hat a^2\big] - a^2 = E\Big[\Big(\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i\Big)^2\Big] - a^2 = E\Big[\frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j\Big] - a^2$$
$$= \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E\big[x_i x_j\big] - a^2.$$

Vidimo da nam je još treba očekivanje produkta. Kako pretpostavljamo nezavisnost pojedinih uzoraka vrijedi

$$E[x_i x_j] = \begin{cases} E[x_i]E[x_j] = \frac{a^2}{4}, & i \neq j \\ E[x_i x_i] = E[x_i^2], & i = j \end{cases},$$

s time da je

$$E[x^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx = \left.\frac{x^3}{3a}\right|_0^a = \frac{a^2}{3}.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$\sigma_{\hat{a}}^2 = \frac{4}{N^2}\Big((N^2 - N)\frac{a^2}{4} + N\frac{a^2}{3}\Big) - a^2 = a^2 - \frac{1}{N}a^2 + \frac{4}{N}a^2 - a^2 = \frac{a^2}{3N}.$$

Kako je $E\big[\hat{a}\big] = a$ i $\lim_{N\to+\infty} \sigma_{\hat{a}}^2 = 0$ naš procjenitelj je nepristran i konzistentan. No nas zanima koliko uzoraka je potrebno da vrijedi $\sigma_{\hat{a}} \leq 0{,}001a$, odnosno

$$\sigma_{\hat{a}} = \sqrt{\frac{a^2}{3N}} \leq 0{,}001a.$$

Sređivanjem dobivamo

$$N \geq \frac{1}{3} \cdot 0{,}001^{-2} = \frac{1000000}{3},$$

a kako $N$ mora biti cijeli broj potrebno je uzeti 333334 uzorka.

**Zadatak 2.1.** Jedna realizacija stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ s poznatim očekivanjem $E\big[X(t)\big] = \mu$ otipkana je u $N$ vremenskih trenutaka $t_i$, $i = 1, \ldots, N$. Promatramo li otipkane uzorke $x_i$ kao realizacije slučajnih varijabli $X(t_i)$ možemo ocijeniti varijancu slučajnog procesa koristeći estimator

$$\hat{\sigma}_{X(t)}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\big(x_i - \mu\big)^2.$$

Da li je takav estimator pristran?

Rješenje: Estimator nije pristran jer je $E\big[\hat{\sigma}_{X(t)}^2\big] = \sigma_{X(t)}^2$.

**Primjer 2.5.** Neka su $x_1$, $x_2$,… $x_N$ uzorci Poissonove slučajne varijable $X$ s nepoznatim parametrom $\lambda$. Pokaži da su estimatori

$$\lambda_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{i} \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

nepristrani estimatori parametra $\lambda$. Koji je estimator bolji?

Rješenje: Estimator nije pristran ako je očekivanje estimatora jednako vrijednosti koju estimiramo. Za prvi estimator vrijedi

$$E\big[\lambda_1\big] = E\Big[\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i\Big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} E\big[x_i\big] = \frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} \lambda = \frac{1}{N}N\lambda = \lambda.$$

Za drugi estimator vrijedi

$$E\big[\lambda_2\big] = E\Big[\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\Big] = \frac{1}{2}\big(E[x_1] + E[x_2]\big) = \frac{1}{2}(\lambda + \lambda) = \lambda.$$

Kako je očekivana vrijednost oba estimatora $\lambda$ estimatori nisu pristrani.

Bolji odnosno efikasniji estimator je onaj koji ima manju varijancu. Za prvi estimator je

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda_1}^2 &= E[\lambda_1^2] - E[\lambda_1]^2 = E\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum\nolimits_{i=1}^{N} x_i\Big)^2\Big] - \lambda^2 \\
&= \frac{1}{N}^2 \sum\nolimits_{i=1}^{N}\sum\nolimits_{j=1}^{N} E[x_i x_j] - \lambda^2 \\
&= \frac{1}{N}^2 \big(N(\lambda^2+\lambda) + (N^2-N)\lambda^2\big) - \lambda^2 \\
&= \lambda^2 + \frac{\lambda}{N} - \lambda^2 = \frac{\lambda}{N},
\end{aligned}$$

dok je za drugi estimator

$$\begin{aligned}
\sigma_{\lambda_2}^2 &= E[\lambda_2^2] - E[\lambda_2]^2 = E\Big[\frac{1}{4}(x_1+x_2)^2\Big] - \lambda^2 \\
&= \frac{1}{4}\big(E[x_1^2] + E[x_2^2] + 2E[x_1]E[x_2]\big) - \lambda^2 \\
&= \frac{1}{4}\big(\lambda^2+\lambda+\lambda^2+\lambda+2\lambda\lambda\big) - \lambda^2 = \frac{\lambda}{2}.
\end{aligned}$$

Kako je

$$\sigma_{\lambda_1}^2 = \frac{\lambda}{N} > \sigma_{\lambda_2}^2 = \frac{\lambda}{2}$$

prvi estimator je bolji za svaki $n > 2$.

**Primjer 2.6.** Koja je značajna razlika između estimacije (procjene) i detekcije? Definirajte slijedeće pojmove vezane uz teoriju estimacije:

a) procjenitelj, linearni procjenitelj i ML procjenitelj, te

b) nepristranost procjenitelja.

Rješenje: Kod problema detekcije želimo na temelju opažanja ili mjerenja odabrati samo jednu od konačnog broja mogućih situacija, s time da najčešće uzimamo samo dvije mogućnosti. Kod problema estimacije želimo procijeniti vrijednost (ili vrijednosti) nekih veličina koje ne možemo direktno mjeriti. U problemima detekcije stoga dajemo samo "jedan" odgovor, dok u problemima estimacije dajemo procjenu parametra. Definirajmo sada tražene pojmove:

**Definicija 2.1.6. (Procjenitelj)** *Procjenitelj ili estimator $\hat{\theta}$ je funkcija (statistika) slučajnog uzorka $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ koja kao rezultat daje procjenu parametra $\theta$,*

$$\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Pri tome statistika $\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nije funkcija od $\theta$ (jer u protivnom ne bi mogli procijeniti $\theta$). Procjenitelj $\hat{\theta}$ nazivamo linearnim ako ga možemo izraziti kao linearnu kombinaciju elemenata slučajnog uzorka, dakle

$$\hat{\theta} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \mathbf{b}^T\mathbf{X}.$$

Pri tome je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor s $n$ elemenata koji ne ovise o slučajnom uzorku $\mathbf{X}$.

Prije definiranja ML procjenitelja potrebno je definirati funkciju vjerodostojnosti (eng. *likelihood function*).

**Definicija 2.1.7. (Funkcija vjerodostojnosti)** *Funkcija vjerodostojnosti* $\mathrm{lik}(\theta)$ *nekog slučajnog vektora* $\mathbf{X}$ *koji ovisi o parametru* $\theta$ *je*

$$\mathrm{lik}(\theta) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n|\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta).$$

Funkcija vjerodostojnosti nam dakle opisuje koliko je vjerojatno da smo dobili upravo naš slučajni uzorak uz neku vrijednost parametra $\theta$. ML procjenitelj se sada prirodno definira uzimanjem one vrijednosti parametra $\theta$ koja nam daje najveću vjerodostojnost:

**Definicija 2.1.8. (ML procjenitelj)** *ML procjenitelj* $\hat{\theta}_{ML}$ *jest onaj procjenitelj koji maksimizira funkciju vjerodostojnosti* $\mathrm{lik}(\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta)$*, dakle*

$$\hat{\theta}_{ML} = \max_{\theta} \mathrm{lik}(\theta).$$

Kako obično pretpostavljamo nezavisnost elemenata slučajnog uzorka $\mathbf{X}$ funkciju $\mathrm{lik}(\theta)$ možemo zapisati kao umnožak odgovarajućih uvjetnih funkcija gustoće vjerojatnosti, dakle

$$\begin{aligned}\mathrm{lik}(\theta) &= P(X_1 = x_1|\theta)P(X_2 = x_2|\theta)\ldots P(X_n = x_n|\theta)\\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i|\theta}(x_i),\end{aligned}$$

te traženje maksimuma po $\theta$ možemo svesti na traženje ekstrema funkcije $\ln\big(\mathrm{lik}(\theta)\big)$ (logaritam je monoton te ne mijenja ekstrem, a smijemo ga primijeniti jer su sve uvjetne funkcije gustoće $f_{X_i|\theta}(x_i)$ nenegativne).

**Definicija 2.1.9. (Nepristranost)** *Za točkastu procjenu* $\hat{\theta}$ *kažemo da je nepristrana ili centrirana ako je* $E\big[\hat{\theta}\big] = \theta$*.*

Za procjenu koja nije nepristrana kažemo da je pristrana. Za pristranu ocjenu promatramo pomak (eng. *bias*) koji je određen razlikom procijenjene i stvarne vrijednosti, $b(\hat{\theta}_n) = E\big[\hat{\theta}_n\big] - \theta$, i koji obično ovisi o broju uzoraka $n$.

# 2.2. Optimalni nepristrani točkasti procjenitelji

**Stavak 2.2.1. (Cramér-Raova nejednakost)** *Neka je* $X$ *slučajna varijabla s poznatom gustoćom vjerojatnosti* $f_{X|\theta}(x)$*, gdje je* $\theta$ *neki parametar. Procjenjujemo li parametar* $\theta$ *preko nepristranog procjenitelja* $\theta_n$ *na temelju* $n$ *uzoraka vrijedi*

$$\sigma^2_{\hat{\theta}_n} = E\big[(\hat{\theta}_n - \theta)^2\big] \geq \frac{1}{n\displaystyle\int\Big(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\big(f_{X|\theta}(x)\big)\Big)^2 f_{X|\theta}(x)dx} = \frac{1}{nI(\theta)}.$$

Primijetite da Cramér-Raova nejednakost vrijedi samo za *nepristrane* procjenitelje. Pristrani procjenitelji mogu dati i manju srednju kvadratnu pogrešku. Stoga nejednakost možemo koristiti za ocjenu kvalitete procjenitelja samo ako znamo da za dani problem postoje nepristrani procjenitelji.

**Primjer 2.7.** Neka su $x_1$, $x_2$,$\ldots x_N$ uzorci Poissonove slučajne varijable $X$ s nepoznatim parametrom $\lambda$. Pokaži da je estimator

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

najefikasniji nepristrani estimator parametra $\lambda$.

RJEŠENJE: Znamo da je dani procjenitelj nepristran (pokažite za vježbu). Odredimo stoga najprije kolika je varijanca naše procjene. Vrijedi

$$\begin{aligned}\sigma_{\hat\lambda}^2 &= E\big[(\hat\lambda-\lambda)^2\big] = E\Big[\Big(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N x_i - \lambda\Big)^2\Big]\\ &= \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N E\big[x_i x_j\big] + \frac{2}{N}\sum_{i=1}^N E[x_i]\lambda + \lambda^2\\ &= \frac{1}{N^2}\big((N^2-N)\lambda^2 + N(\lambda^2+\lambda)\big) - \frac{2}{N}N\lambda^2 + \lambda^2\\ &= \lambda^2 + \frac{1}{N}\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^2 = \frac{\lambda}{N}.\end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati da je dobivena varijanca $\sigma_{\hat\lambda}^2$ upravo donja granica prema Cramér-Raovoj nejednakosti. Vrijedi

$$\begin{aligned}I(\lambda) &= E\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln\Big(\frac{\lambda^X}{X!}e^{-\lambda}\Big)\Big)^2\Big]\\ &= E\Big[\Big(\frac{X-\lambda}{\lambda}\Big)^2\Big] = \frac{1}{\lambda^2}\operatorname{Var}[X] = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Izračunata funkcija $I(\lambda)$ zove se *Fisherova informacija* i iz nje odmah dobivamo donju Cramér-Raovu granicu

$$\frac{1}{NI(\lambda)} = \frac{\lambda}{N}.$$

Naš procjenjitelj je najefikasniji (odnosno najučinkovitiji) nepristrani procjenitelj pa je u tom smislu i optimalan.

## 2.3. Intervalni procjenitelji

Za razliku od točkastog procjenitelja kojim procjenjujemo neku vrijednost ponekad je potrebno procijeniti s kolikom vjerojatnošću neki interval pokriva nepoznati parametar $\theta$. Procjenjujemo dakle s kojom vjerojatnošću se procjena $\hat\theta$ nalazi u intervalu $\langle g_1, g_2\rangle$.

**Definicija 2.3.1. (Interval povjerenja pouzdanosti $\gamma$)** *Neka su rubovi $g_1$ i $g_2$ intervala $\langle g_1, g_2\rangle$ dobiveni kao vrijenosti statistika $G_1$ i $G_2$ slučajnog uzorka. Ako je*

$$P(G_1 < \theta < G_2) \geq \gamma,$$

*kažemo da je $\langle g_1, g_2\rangle$ interval povjerenja pouzdanosti $\gamma$ nepoznatog parametra $\theta$.*

Broj $\gamma$ zove se i razina povjerenja. Uobičajeno se uzima $\gamma = 0{,}95$ ili $\gamma = 0{,}99$, pri čemu odabir vrijednosti parametra $\gamma$ ovisi o primjeni.

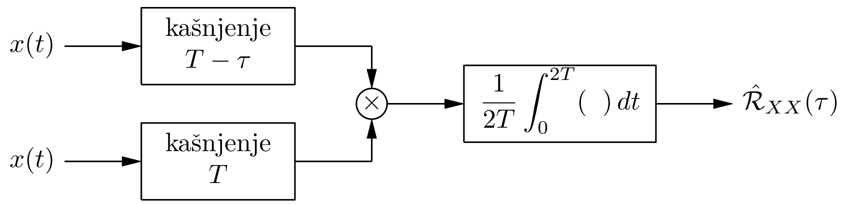
Kako intervalne procjene (kao i dobar dio ovih vježbi :) predstavljaju gradivo za "one koji žele znati više" dodatne informacije o intervalnim procjenama potražite u knjizi Ž. Pauše *Uvod u matematičku statistiku*, Školska Knjiga, Zagreb 1993.

# 2.4. Procjena parametara slučajnog procesa

**Primjer 2.8.** U praksi ne možemo nikada izmjeriti pravu autokorelacijsku funkciju slučajnog procesa. Jedan mogući način procjene autokorelacijske funkcije je mjerenje vremenskim usrednjavanjem na dovoljno dugom intervalu uz pretpostavku ergodičnosti procesa. Neka je promatrani slučajni proces

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta),$$

gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 2\pi]$. Za mjerenje autokorelacijske funkcije koristimo sustav prikazan na slici 2.1.. Procijenite trajanje vremenskog usrednjavanja s kojim je maksimalna pogreška barem 20 puta manja od najveće vrijednosti autokorelacijske funkcije $R_{XX}(\tau)$.




Slika 2.1.: Dijagram sustava za mjerenje vremenske korelacijske funkcije

Rješenje: Statistička autokorelacijska funkcija zadanog slučajnog procesa je

$$R_{XX}(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau).$$

Očekujemo da izlaz sustava za estimaciju (slika 2.1.) bude približno jednak statističkoj autokorelacijskoj funkciji. Neka u trenutku $t = 0$ započinje vremensko usrednjavanje (integracija). Tada izlaz moramo promatrati od trenutka $t = 2T$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{R}}_{XX}(\tau) &= \frac{1}{2T}\int_0^{2T} x(t-T)x(t-T+\tau)\,dt = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\,dt \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} A\cos(\omega t+\theta)A\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)\,dt \\
&= \frac{A^2}{4T}\int_{-T}^{T}\big(cos(\omega\tau) + \cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)\big)\,dt \\
&= \frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau) + \frac{A^2}{4\omega T}\cos(\omega\tau+2\theta)\sin(2\omega T)
\end{aligned}$$

U dobivenoj estimaciji $\hat{\mathcal{R}}_{XX}(\tau)$ vremenske autokorelacijske funkcije prepoznajemo dio koji odgovara statističkoj autokorelacijskoj funkciji $R_{XX}(\tau)$, dok je preostali dio pogreška

$$e(\tau, T) = \frac{A^2}{4\omega T}\cos(\omega\tau + 2\theta)\sin(2\omega T).$$

Pogreška ovisi o odabranom pomaku $\tau$ te o duljini vremenskog usrednjavanja $T$. Pri tome je

$$\lim_{T\to+\infty} e(\tau, T) = \lim_{T\to+\infty}\frac{A^2}{2}\cos(\omega\tau+2\theta)\frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T} = 0,$$

odnosno za dulje vremensko usrednjavanje dobivamo bolje rezultate. Ako zahtijevamo da maskimalna pogreška bude 20 puta manja od najveće vrijednosti autokorelacijske funkcije zahtijevamo da vrijedi

$$20\max_{\tau}\big|e(\tau, T)\big| \le \max_{\tau} R_{XX}(\tau) = R_{XX}(0).$$

Maksimum funkcije pogreške je

$$\max_{\tau} \big| e(\tau, T) \big| = \frac{A^2}{2} \Big| \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T} \Big|,$$

te je sada

$$20 \Big| \frac{\sin(2\omega T)}{2\omega T} \Big| \leq 1.$$

Funkcija sinus nam u gornjem izrazu smeta, no kako je vrijednost te funkcije uvijek između jedan i minus jedan možemo je zamijeniti s jedinicom te za trajanje vremenskog usrednjavanja dobivamo

$$T \geq \frac{10}{\omega}.$$

# 3. Slučajni procesi u sustavima

Odziv linearnog sustava na deterministički signal određen je konvolucijom

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)\,d\tau. \tag{3.1}$$

Pri tome je $h(t,\tau)$ impulsni odziv sustava. Za vremenski nepromjenjive sustave impulsni odziv ne ovisi o vremenu $t$, već samo o pomaku te vrijedi

$$h(t,\tau) = h(t-\tau). \tag{3.2}$$

Za takve sustave je

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = h(t) * x(t), \tag{3.3}$$

a transformacijom u frekvencijsku domenu dolazimo do poznatog izraza za odziv sustava

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(\omega) = X(\omega)H(\omega), \tag{3.4}$$

gdje je $H(\omega)$ prijenosna funkcija sustava. Ako na ulaz takvog sustava dovedemo stohastički signal, odnosno slučajni proces, prema izrazu 3.1 možemo odrediti samo kako se sustav odaziva na pojedinu realizaciju slučajnog procesa. Izlazni slučajni proces je skup odziva svih odziva sustava na pojedine realizacije ulaznog slučajnog procesa.

## 3.1. Slučajni proces u linearnom sustavu

Obično nas ne zanima kako se sustav odaziva na pojedine realizacije, već kakva su svojstva izlaznog procesa (npr. očekivanje i spektar snage). Očekivanje izlaznog procesa $Y(t)$ je

$$E\big[Y(t)\big] = E\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t-\tau)\,d\tau\Big] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)E\big[X(t-\tau)\big]\,d\tau, \tag{3.5}$$

pri čemu integral i operator očekivanja mogu zamijeniti mjesta samo ako su zadovoljeni određeni uvjeti. Za proces stacionaran u širem smislu je

$$E\big[Y(t)\big] = E\big[X(t)\big] \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau. \tag{3.6}$$

Srednja kvadratna vrijednost izlaznog procesa je

$$\begin{aligned} E\big[Y^2(t)\big] &= E\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)\,d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2)X(t-\tau_2)\,d\tau_2\Big] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\big[X(t-\tau_1)X(t-\tau_2)\big]h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

što za proces stacionaran u širem smislu postaje

$$E\big[Y^2(t)\big] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau_1-\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2. \tag{3.7}$$

Za ulazni proces $X(t)$ autokorelacijska funkcija odziva je

$$\begin{aligned} R_{YY}(t,t+\tau) &= E\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)\,d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau_2)X(t+\tau-\tau_2)\,d\tau_2\Big] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\big[X(t-\tau_1)X(t+\tau-\tau_2)\big]h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2, \end{aligned}$$

što za proces stacionaran u širem smislu postaje

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\tau_1-\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2. \tag{3.8}$$

Izraz (3.8) prepoznajemo kao dvostruku konvoluciju te ga obično zapisujemo kao

$$R_{YY}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) * R_{XX}(\tau). \tag{3.9}$$

Za stacionarne slučajne procese vrijedi (1.22) te transformacijom izraza (3.9) dobivamo

$$S_{YY}(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)S_{XX}(\omega) = \big|H(\omega)\big|^2 S_{XX}(\omega). \tag{3.10}$$

Pri tome je $\big|H(\omega)\big|^2$ prijenosna funkcija snage i zajedno s autokorelacijskom funkcijom impulsnog odziva sustava $r_{hh}(\tau)$ čini Fouirerov transformacijski par

$$r_{hh}(\tau) = h(\tau) * h(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ H^*(\omega)H(\omega) = \big|H(\omega)\big|^2. \tag{3.11}$$

Za stacionarni ulazni proces još vrijede slijedeće jednakosti koje povezuju kroskorelacijske funkcije

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_{XY}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(\omega) \tag{3.12}$$

$$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ S_{YX}(\omega) = S_{XX}(\omega)H(-\omega) \tag{3.13}$$

Za diskretne slučajne procese vrijede analogni izrazi. Dovedemo li na ulaz vremenski invarijantnog linearnog diskretnog sustava slučajni proces $X[n]$ stacionaran u širem smislu očekivanje izlaznog procesa $Y[n]$ je

$$E\big[Y[n]\big] = E\Big[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]X[n-i]\Big] = E\big[X[n]\big]\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h[i], \tag{3.14}$$

što u domeni $\mathcal{Z}$ transformacije postaje

$$E\big[Y[n]\big] = E\big[X[n]\big]H(1). \tag{3.15}$$

Autokorelacijska funkcija izlaznog procesa je

$$R_{YY}[m] = \sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{j=-\infty}^{+\infty} R_{XX}[m+i-j]h[i]h[j], \tag{3.16}$$

što obično zapisujemo kao dvostruku konvoluciju

$$R_{YY}[m] = h[m] * h[-m] * R_{XX}[m]. \tag{3.17}$$

U frekvencijskoj domeni jednadžba (3.17) postaje

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega})S_{XX}(\omega) = \big|H(e^{j\omega})\big|^2 S_{XX}(\omega), \tag{3.18}$$

pri čemu prijenosna funkcija snage $\left|H(e^{j\omega})\right|^2$ i autokorelacijska funkcija impulsnog odziva $r_{hh}[m]$ čine transformacijski par

$$r_{hh}[m] = h[m] * h[-m] \circ\!\!-\!\!\bullet\; H^*(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2. \qquad (3.19).$$

**Primjer 3.1.** Na ulaz linearnog vremenski nepromjenjivog sustava s poznatim impulsnim odzivom $h(t)$ doveden je bijeli šum poznate autokorelacijske funkcije

$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau),$$

gdje je $N_0$ pozitivna realna konstanta. Odredi moment drugog reda izlaznog procesa.

Rješenje: Prema (3.7) je

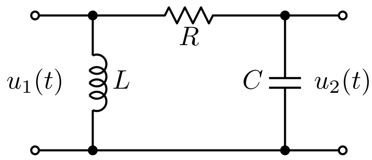
$$E\left[Y^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{NN}(\tau_1 - \tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2,$$

što nakon uvrštavanja daje

$$E\left[Y^2(t)\right] = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau_1 - \tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\tau)\, d\tau.$$

Iz dobivenog rezultata vidimo da je izlazna snaga $\overline{Y^2}$ proporcionalna površini ispod kvadrata impulsnog odziva sustava.

**Primjer 3.2.** Definirajte prijenosnu funkciju snage. Odredite prijenosnu funkciju snage mreže prikazane na slici 3.1.. Ulazni i izlazni signali su naponi $u_1(t)$ i $u_2(t)$.




Slika 3.1.: Jednostavna mreža ($\pi$-četveropol)

Rješenje: Definirajmo prvo prijenosnu funkciju snage:

**Definicija 3.1.1. (Prijenosna funkcija snage)** *Neka je linearan vremenski nepromjenjiv sustav opisan s prijenosnom funkcijom $H(\omega)$. Prijenosna funkcija snage ili prijenosna funkcija drugog reda je $H(\omega)H^*(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2$ (u Fourierovoj domeni).*

Primijetite da iako u Fourierovoj domeni imamo $HH^*$ i za kontinuirane i za diskretne sustave, za Laplaceovu i $\mathcal{Z}$ domenu su izrazi nešto drugačiji, odnosno prijenosna funkcija drugog reda se promatra kao produkt prijenosnih funkcija kauzalnog i pripadnog antikauzalnog sustava. Za kontinuiranu domenu prijenosna funkcija drugog reda je

$$H(s)H(-s),$$

što zamjenom $s = j\omega$ postaje

$$H(j\omega)H(-j\omega) = H(j\omega)H^*(j\omega) = HH^* = |H|^2,$$

no samo na *imaginarnoj osi* u $s$-ravnini. Za diskretnu domenu je pak prijenosna funkcija snage

$$H(z)H(z^{-1})$$

što zamjenom $z = e^{j\omega}$ postaje

$$H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = HH^* = |H|^2,$$

no samo na *jediničnoj kružnici* u $z$-ravnini. Sada kada znamo što je prijenosna funkcija snage možemo riješiti zadatak.

Odredimo najprije prijenosnu funkciju $H(s)$. Vrijedi

$$U_2(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC} + R} U_1(s),$$

te je prijenosna funkcija sustava u Laplaceovoj domenu

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + sRC},$$

odnosno ako zamijenimo $s$ sa $j\omega$ dobivamo

$$H(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC},$$

što odgovara prijenosnoj funkciji u Fourierovoj domeni. Prijenosna funkcija snage je sada

$$H(\omega)H^*(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \frac{1}{1 - j\omega RC} = \frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

**Primjer 3.3.** Promatramo slučajni proces (niz) stacionaran u širem smislu kojega propuštamo kroz linearni vremenski nepromjenjivi kontinuirani (diskretni) sustav. Napišite definiciju linearnosti sustava te izraze koji povezuju slijedeće parametre ulaznog i izlaznog procesa, i to i za kontinuirani i za diskretni slučaj:

a) očekivanje ulaznog i izlaznog procesa (niza),

b) autokorelacijska funkcija ulaznog i izlaznog procesa (niza), i

c) spektralna gustoća snage ulaznog i izlaznog procesa (niza).

Rješenje: Definirajmo najprije linearnost sustava (operatora):

**Definicija 3.1.2. (Linearnost operatora)** *Neka su $X$ i $Y$ vektorski prostori iznad istog polja $K$. Za operator $f : X \to Y$ koji opisuje neki sustav kažemo da je linearan ako za dva vektora $x_1, x_2 \in X$ te skalar $a \in K$ vrijedi*

*a) $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ (aditivnost), i*

*b) $f(ax_1) = af(x_1)$ (homogenost).*

U obradi signala su vektorski prostori $X$ i $Y$ obično jednaki, i njihovi elementi su funkcije, dakle sustav opisan preko operatora $f$ djeluje na funkcije. Najinteresantniji vekotrski prostori za obradu signala su prostor razapet kompleksnim eksponencijalama $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{j\omega t}$ te prostor razapet $\mathrm{sinc}(t - n)$ funkcijama[1].

[1]Prostor razapet $\mathrm{sinc}(t - n)$ je upravo prostor spektralno ograničenih funkcija za koje prilikom otipkavanja ne dolazi do preklapanja spektra. U ovakvoj interpretaciji otipkavanje signala postaje ortogonalna projekcija neke funkcije na vektorski potprostor razapet sa $\mathrm{sinc}(t - n)$ funkcijama.

Za prostor razapet kompleksnim eksponencijalama signale predstavljamo preko funkcija koje možemo prikazati Fourierovim integralom,

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \Big\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} d\omega.$$

Za prostor razapet funkcijama $\mathrm{sinc}(t-n)$, a to je prostor svih spektralno ograničenih funkcija, signale predstavljamo preko sume

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big\langle f(t), \mathrm{sinc}(t-n) \big\rangle \, \mathrm{sinc}(t-n).$$

U ovom slučaju funkciju u potpunosti možemo opisati preko prebrojivo mnogo uzoraka $f[n] = \big\langle f(t), \mathrm{sinc}(t-n) \big\rangle$.

Pri tome je $\langle \ , \ \rangle : X \times X \to K$ skalarni produkt koji je u našem slučaju definiran preko integrala. Primijetite da je

$$\Big\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \Big\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Big( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{j\omega t} \Big)^{*} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

upravo izraz za Fourierovu transformaciju, no s ortonormiranom bazom.

Navedimo sada tražene izraze:

a) Očekivanje izlaznog procesa je

$$E\big[Y(t)\big] = E\big[X(t)\big] \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\, d\tau = E\big[X(t)\big] H(\omega = 0),$$

a očekivanje izlaznog niza je

$$E\big[Y[n]\big] = E\big[X[n]\big] \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m] = E\big[X[n]\big] H(e^{j\omega} = 1).$$

Primijetite da možemo pisati $E[Y] = E[X]H(0)$ ako prijenosnu funkciju kontinuiranog i diskretnog sustava jednostvano označimo s $H(\omega)$ (jer iz $e^{j\omega} = 1$ slijedi $\omega = 0$).

b) Autokorelacijska funkcija izlaznog procesa je

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau + \tau_1 - \tau_2) h(\tau_1) h(\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 \\ &= R_{XX}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) = R_{XX}(\tau) * r_{hh}(\tau), \end{aligned}$$

a autokorelacijska funkcija slučajnog niza je

$$\begin{aligned} R_{YY}[m] &= \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} R_{YY}[m + m_1 - m_2] h[m_1] h[m_2] \\ &= R_{XX}[m] * h[m] * h[-m] = R_{XX}[m] * r_{hh}[m]. \end{aligned}$$

Spektralna gustoća snage izlaznog procesa i izlaznog niza je

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega) H(\omega) H^{*}(\omega).$$

Kako se ponekad želi naglasiti da radimo baš s diskretnim sustavima umjesto $\omega$ se piše $e^{j\omega}$ te je

$$S_{YY}(e^{j\omega}) = S_{XX}(e^{j\omega}) H(e^{j\omega}) H^{*}(e^{j\omega})$$

za diskretne sustave.

**Primjer 3.4.** Zadan je slučajni proces

$$X(t) = A\sin(\omega t + \theta),$$

gdje su $A$ i $\omega$ pozitivne realne konstante, dok je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-\pi, \pi]$. Proces $X(t)$ je doveden na ulaz linearnog vremenski nepromijenjivog sustava s impulsnim odzivom $h(t) = be^{-bt}$. Odredite izlazni proces $Y(t)$.

RJEŠENJE: Izlazni proces $Y(t)$ određujemo prema (3.3). Dobivamo

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)X(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} be^{-b\tau}\,\mathrm{s}(\tau)A\sin(\omega t - \omega\tau + \theta)\,d\tau \\
&= bA\int_{0}^{+\infty} e^{-b\tau}\frac{1}{2j}\big(e^{j\omega t - j\omega\tau + j\theta} - e^{-j\omega t + j\omega\tau - j\theta}\big)\,d\tau \\
&= bA\Big(\frac{e^{j(\omega t+\theta)}}{2j}\int_{0}^{+\infty} e^{-(b+j\omega)\tau}\,d\tau - \frac{e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j}\int_{0}^{+\infty} e^{-(b-j\omega)\tau}\,d\tau\Big)
\end{aligned}$$

što nakon integriranja daje

$$\begin{aligned}
Y(t) &= bA\Big(\frac{e^{j(\omega t+\theta)}}{2j}\frac{1}{b+j\omega} - \frac{e^{-j(\omega t+\theta)}}{2j}\frac{1}{b-j\omega}\Big) \\
&= \frac{bA}{b^2+\omega^2}\Big(e^{j(\omega t+\theta)}\frac{b-j\omega}{2j} - e^{-j(\omega t+\theta)}\frac{b+j\omega}{2j}\Big).
\end{aligned}$$

Izlazni proces je tada

$$Y(t) = \frac{bA}{b^2+\omega^2}\big(b\sin(\omega t+\theta) - \omega\cos(\omega t+\theta)\big).$$

**Primjer 3.5.** Na ulaz linearnog vremenski nepromjenjivog sustava s impulsnim odzivom $h(t) = e^{-2t}\,\mathrm{s}(t)$ doveden je slučajni proces $X(t) = \sin(t+\theta)$ gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na $[-\pi, \pi]$. Odredite izlazni proces $Y(t)$ i njegovu statističku autokorelacijsku funkciju.

RJEŠENJE: Najprije određujemo izlazni proces $Y(t)$ konvolucijom

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-2\tau}\sin(t-\tau+\theta)\,d\tau \\
&= \int_{0}^{+\infty} e^{-2\tau}\frac{1}{2j}\left(e^{j(t-\tau+\theta)} - e^{-j(t-\tau+\theta)}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty}\left(e^{j(t+\theta)}e^{-\tau(2+j)} - e^{-j(t+\theta)}e^{-\tau(2-j)}\right)d\tau \\
&= \frac{1}{2j}\left(e^{j(t+\theta)}\frac{1}{-2-j}e^{-\tau(2+j)} + e^{-j(t+\theta)}\frac{1}{2-j}e^{-\tau(2-j)}\right)\Bigg|_{0}^{+\infty} \\
&= -\frac{1}{2}\Big(e^{j(t+\theta)}\frac{1}{1-2j} + e^{-j(t+\theta)}\frac{1}{1+2j}\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1+2j}{5}e^{j(t+\theta)} + \frac{1}{2}\frac{1-2j}{5}e^{-j(t+\theta)} \\
&= -\frac{1}{5}\cos(t+\theta) + \frac{2}{5}\sin(t+\theta)
\end{aligned}$$

Pri tome je razdioba slučajne varijable $\theta$ ostala nepromijenjena. Još je potrebno odrediti statističku autokorelacijsku funkciju $R_{YY}$,

$$\begin{aligned}
R_{YY}(t,t+\tau) &= E\big[Y(t)Y(t+\tau)\big] \\
&= E\Big[\Big(\frac{1}{5}\cos(t+\theta)-\frac{2}{5}\sin(t+\theta)\Big)\Big(\frac{1}{5}\cos(t+\tau+\theta)-\frac{2}{5}\sin(t+\tau+\theta)\Big)\Big] \\
&= E\Big[\ \frac{1}{25}\cos(t+\theta)\cos(t+\tau+\theta)-\frac{2}{25}\sin(t+\theta)\cos(t+\tau+\theta)- \\
&\quad -\frac{2}{25}\cos(t+\theta)\sin(t+\tau+\theta)+\frac{4}{25}\sin(t+\theta)\sin(t+\tau+\theta)\Big] \\
&= \ \frac{1}{50}E\big[\cos(\tau)+\cos(2t+2\theta+\tau)\big]-\frac{1}{25}E\big[\sin(-\tau)+\sin(2t+2\theta+\tau)\big]- \\
&\quad -\frac{1}{25}E\big[\sin(\tau)+\sin(2t+2\theta+\tau)\big]+\frac{2}{25}E\big[\cos(\tau)-\cos(2t+2\theta+\tau)\big]
\end{aligned}$$

Drugi dio svakog od dobivena četiri člana daje nulu jer se računa integral preko točno dva perioda podintegralne funkcije. Kako prvi dio svakog od tih četiriju članova ne ovisi o slučajnoj varijabli $\theta$, operator $E$ na njih nema utjecaja. Naposlijetku dobivamo statističku autokorelacijsku funkciju

$$R_{YY}(t,t+\tau)=R_{YY}(\tau)=\frac{1}{10}\cos(\tau).$$

**Primjer 3.6.** Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa $X(t)$ je

$$R_{XX}(\tau)=A^2+Be^{-|\tau|},$$

gdje su $A$ i $B$ realne pozitivne konstante. Odredite očekivanje procesa $Y(t)$ koji nastaje propuštanjem zadanog procesa $X(t)$ kroz linearni sustav s impulsnim odzivom $h(t)=e^{-bt}\,\mathrm{s}(t)$, gdje je $b$ realna pozitivna konstanta.

Rješenje: Kako autokorelacijska funkcija ovisi samo o pomaku $\tau$ i kako ne sadrži periodičke komponente vrijedi

$$\lim_{\tau\to\pm\infty}R_{XX}(\tau)=\big(E\big[X(t)\big]\big)^2=\overline{x}^2,$$

odnosno nakon uvrštavanja autokorelacijske funkcije dobivamo $\overline{x}=\pm|A|$. Prema izrazu (3.6) je sada

$$E\big[Y(t)\big]=\overline{x}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\tau)\,d\tau=\overline{x}\int_{0}^{+\infty}e^{-b\tau}\,d\tau=\pm\frac{A}{b}=\overline{y}.$$

**Primjer 3.7.** Na ulaz linearnog vremenski nepromjenjivog sustava s impulsnim odzivom $h[n]=e^{-5n}\,\mathrm{s}[n]$ doveden je slučajni proces $X[n]=2\sin(\pi n+\theta)$, gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na $[-\pi,\pi]$. Izračunajte izlazni proces $Y[n]$. Odredite očekivanje izlaznog procesa $Y[n]$ te njegov spektar snage.

Rješenje: Izlazni proces $Y[n]$ računamo preko konvolucijske sume,

$$\begin{aligned}
Y[n] &= \sum_{i=-\infty}^{+\infty}h[i]X[n-i]=\sum_{i=-\infty}^{+\infty}e^{-5i}s[i]2\sin(\pi n-\pi i+\theta) \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty}e^{-5i}\frac{2}{2j}\Big(e^{j(\pi n-\pi i+\theta)}-e^{-j(\pi n-\pi i+\theta)}\Big) \\
&= \frac{1}{j}e^{j(\pi n+\theta)}\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-5i-j\pi i}-\frac{1}{j}e^{-j(\pi n+\theta)}\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-5i+j\pi i} \\
&= \frac{1}{j}e^{j(\pi n+\theta)}\frac{1}{1-e^{-5-j\pi}}-\frac{1}{j}e^{-j(\pi n+\theta)}\frac{1}{1-e^{-5+j\pi}} \\
&= \frac{2}{1+e^{-5}}\frac{1}{2j}e^{j(\pi n+\theta)}-\frac{2}{1+e^{-5}}\frac{1}{2j}e^{-j(\pi n+\theta)} \\
&= \frac{2}{1+e^{-5}}\sin(\pi n+\theta)
\end{aligned}$$

Pri tome je distribucija slučajne varijable $\theta$ ostala nepromijenjena. Očekivanje izlaznog procesa je

$$E_{YY}\big[Y[n]\big] = \frac{2}{1+e^{-5}} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\pi n + \theta) \frac{1}{2\pi}\, d\theta = 0,$$

dok je statistička autokorelacijska funkcija

$$\begin{aligned} R_{YY}(n, n+m) &= E\big[Y[n]Y[n+m]\big] \\ &= E\Big[\frac{2}{1+e^{-5}} \sin(\pi n + \theta) \frac{2}{1+e^{-5}} \cos(2\pi n + 2\theta + \pi m)\Big] \\ &= \frac{2}{(1+e^{-5})^2} E\big[\cos(\pi m)\big] - \frac{2}{(1+e^{-5})^2} E\big[\cos(2\pi n + 2\theta + \pi m)\big] \\ &= \frac{2}{(1+e^{-5})^2} \cos(\pi m). \end{aligned}$$

Kako je proces stacionaran u širem smislu spektar snage određujemo kao Furierovu transformaciju statističke autokorelacijske funkcije,

$$S_{YY} = \mathcal{F}\big[R_{YY}(m)\big] = \frac{2\pi}{(1+e^{-5})^2} \big(\delta(\omega - \pi + 2i\pi) + \delta(\omega + \pi + 2i\pi)\big), \quad i \in \mathbb{Z}$$

**Zadatak 3.1.** Na ulaz linearnog vremenski nepromjenjivog sustava s impulsnim odzivom $h[n] = e^{-4n}\,\mathrm{s}[n]$ doveden je slučajni proces $X[n] = 2(1+e^{-4}) \sin(\pi n + \theta)$, gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na $[-\pi, \pi]$. Izračunajte izlazni proces $Y[n]$. Odredite očekivanje izlaznog procesa $Y[n]$ te njegov spektar snage.

RJEŠENJE: $Y[n] = 2\sin(\pi n + \theta)$, $E\big[Y[n]\big] = 0$, $S_{YY} = 2\pi\big(\delta(\omega - \pi + 2i\pi) + \delta(\omega + \pi + 2i\pi)\big)$, $i \in \mathbb{Z}$.

**Zadatak 3.2.** Na ulaz linearnog vremenski nepromjenjivog sustava s impulsnim odzivom $h[n] = e^{-4n}\,\mathrm{s}[n]$ doveden je slučajni proces $X[n] = 2(1+e^{-4}) \cos(\pi n + \theta)$, gdje je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na $[-\pi, \pi]$. Izračunajte izlazni proces $Y[n]$. Odredite očekivanje izlaznog procesa $Y[n]$ te njegov spektar snage.

RJEŠENJE: $Y[n] = 2\cos(\pi n + \theta)$, $E\big[Y[n]\big] = 0$, $S_{YY} = 2\pi\big(\delta(\omega - \pi + 2i\pi) + \delta(\omega + \pi + 2i\pi)\big)$, $i \in \mathbb{Z}$.

**Primjer 3.8.** Vremenski diskretan slučajni proces

$$X[n] = \cos(n + \theta)$$

doveden je na ulaz linearnog vremenski diskretnog sustava s konačnim impulsnim odzivom

$$h[n] = \{\underline{1}, 1\}.$$

Odredite očekivanje i statističku autokorelacijsku funkciju ulaznog procesa $X[n]$ i izlaznog procesa $Y[n]$ ako je $\theta$ slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-\pi, \pi]$.

RJEŠENJE: Odredimo najprije očekivanje i autokorelacijsku funkciju ulaznog slučajnog procesa $X[n]$. Očekivanje je

$$E\big[X[n]\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(n + \theta)\, f_\theta(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n + \theta)\, \frac{1}{2\pi} d\theta = 0,$$

dok je autokorelacijska funkcija

$$\begin{aligned}R_{XX}[n,n+m] &= E\big[X[n]X[n+m]\big] = E\big[\cos(n+\theta)\cos(n+m+\theta)\big]\\ &= \frac{1}{2}E\big[\cos(m)\big] + \frac{1}{2}E\big[\cos(2n+m+2\theta)\big]\\ &= \frac{1}{2}\cos(m)\end{aligned}$$

Da bi odredili očekivanje i autokorelacijsku funkciju izlaznog procesa $Y[n]$ moramo najprije odrediti izlazni proces. Koristimo konvoluciju:

$$\begin{aligned}Y[n] &= \sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty} h[i]X[n-i]\\ &= \sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty} \big(\delta[i]+\delta[i-1]\big)\cos(n-i+\theta)\\ &= \cos(n+\theta)+\cos(n-1+\theta).\end{aligned}$$

Sada je očekivanje procesa $Y[n]$

$$\begin{aligned}E\big[Y[n]\big] &= E\big[\cos(n+\theta)+\cos(n-1+\theta)\big]\\ &= E\big[\cos(n+\theta)\big]+E\big[\cos(n-1+\theta)\big] = 0+0=0\end{aligned}$$

dok je autokorelacijska funkcija

$$\begin{aligned}R_{YY}[n,n+m] =& E\big[Y[n]Y[n+m]\big]\\ &= E\Big[\big(\cos(n+\theta)+\cos(n-1+\theta)\big)\\ &\qquad \big(\cos(n+m+\theta)+\cos(n+m-1+\theta)\big)\Big]\\ &= E\big[\cos(n+\theta)\cos(n+m+\theta)\big]\\ &\quad + E\big[\cos(n+\theta)\cos(n+m-1+\theta)\big]\\ &\quad + E\big[\cos(n-1+\theta)\cos(n+m+\theta)\big]\\ &\quad + E\big[\cos(n-1+\theta)\cos(n+m-1+\theta)\big]\\ &= \frac{1}{2}\cos(m)+\frac{1}{2}\cos(m-1)+\frac{1}{2}\cos(m+1)+\frac{1}{2}\cos(m)\\ &= \frac{1}{2}\cos(m+1)+\cos(m)+\frac{1}{2}\cos(m-1).\end{aligned}$$

Kako je zadani proces $X[n]$ stacionaran očekivanje i autokorelacijsku funkciju izlaznog procesa $Y[n]$ smo mogli odrediti prema

$$E\big[Y[n]\big] = E\big[X[n]\big]\sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty} h[n]$$

i

$$R_{YY}[m] = h[m]*h[-m]*R_{XX}[m].$$

Očekivanje je sada

$$E\big[Y[n]\big] = E\big[X[n]\big]\sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty}\big(\delta[i]+\delta[i-1]\big) = 0\cdot 2 = 0.$$

Da bi odredili autokorelacijsku funkciju najprije računamo $h[m]*h[-m]$. Dobivamo

$$\begin{aligned}h[m]*h[-m] &= \sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty}\big(\delta[i]+\delta[i-1]\big)\big(\delta[i-m]+\delta[i-1-m]\big)\\ &= \sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty}\big(\delta[i]\delta[i-m]+\delta[i]\delta[i-1-m]\\ &\qquad\qquad + \delta[i-1]\delta[i-m]+\delta[i-1]\delta[i-1-m]\big)\\ &= \delta[-m]+\delta[-1-m]+\delta[1-m]+\delta[-m]\\ &= \delta[m+1]+2\delta[m]+\delta[m-1]\end{aligned}$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
R_{YY}[m] &= h[m] * h[-m] * R_{XX}[m] \\
&= \sum\nolimits_{i=-\infty}^{+\infty} \big(\delta[i+1] + 2\delta[i] + \delta[i-1]\big)\frac{1}{2}\cos(m-i) \\
&= \frac{1}{2}\cos(m+1) + \cos(m) + \frac{1}{2}\cos(m-1),
\end{aligned}
$$

što je naravno rezultat jednak prijašnjem.

**Primjer 3.9.** Neka su zadana dva slučajna procesa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ koji su zajednički stacionarni u širem smislu. Proces $X_1(t)$ dovodimo na ulaz linearnog sustava s impulsnim odzivom $h_1(t)$, dok proces $X_2(t)$ dovodimo na ulaz linearnog sustava s impulsnim odzivom $h_2(t)$. Odredite kroskorelacijsku funkciju izlaznih procesa $Y_1(t)$ i $Y_2(t)$ kao funkciju impulsnih odziva $h_1(t)$ i $h_2(t)$ te kroskorelacijske funkcije $R_{X_1X_2}(\tau)$.

Rješenje: Prema (3.3) možemo pisati:

$$
\begin{aligned}
Y_1(t) = h_1(t) * X_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1)X_1(t-\tau_1)\,d\tau_1 \\
Y_2(t) = h_2(t) * X_2(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_2)X_2(t-\tau_2)\,d\tau_2
\end{aligned}
$$

Kroskorelacijska funkcija izlaznih procesa je

$$
R_{Y_1Y_2}(t, t+\tau) = E\big[Y_1(t)Y_2(t+\tau)\big],
$$

što nakon uvrštavanja konvolucijskih integrala postaje

$$
\begin{aligned}
R_{Y_1Y_2}(t, t+\tau) &= E\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1)X_1(t-\tau_1)\,d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(\tau_2)X_2(t+\tau-\tau_2)\,d\tau_2\Big] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\big[X_1(t-\tau_1)X_2(t+\tau-\tau_2)\big]h_1(\tau_1)h_2(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.
\end{aligned}
$$

Kako su ulazni procesi $X_1(t)$ i $X_2(t)$ zajednički stacionarni u širem smislu vrijedi

$$
R_{X_1X_2}(t_1, t_2) = E\big[X_1(t_1)X_2(t_2)\big] = R_{X_1X_2}(t_2 - t_1),
$$

odnosno

$$
E\big[X_1(t-\tau_1)X_2(t+\tau-\tau_2)\big] = R_{X_1X_2}(\tau + \tau_1 - \tau_2).
$$

Naposlijetku dobivamo izraz za traženu kroskorelacijsku funkciju,

$$
R_{Y_1Y_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{X_1X_2}(\tau + \tau_1 - \tau_2)h_1(\tau_1)h_2(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2.
$$

**Primjer 3.10.** Slučajni proces $X(t)$ ima autokorelacijsku funkciju

$$
R_{XX}(\tau) = ae^{-b|\tau|},
$$

gdje su $a$ i $b$ pozitivne realne konstante. Dovedemo li taj proces na ulaz linearnog sustava s impulsnim odzivom

$$
h(t) = \alpha e^{-\alpha t}\,\mathrm{s}(t),
$$

gdje je $\alpha$ realna pozitivna konstanta, odredite autokorelacijsku funkciju izlaznog procesa $Y(t)$.

RJEŠENJE: Kako autokorelacijska funkcija ovisi samo o pomaku $R_{YY}(\tau)$ računamo prema izrazu (3.9). Uvrštavanjem $R_{XX}(\tau)$ i $h(t)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= h(\tau) * h(-\tau) * R_{XX}(\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\tau_1-\tau_2)h(\tau_1)h(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-b|\tau+\tau_1-\tau_2|}\alpha e^{-\alpha\tau_1}\,\mathrm{s}(\tau_1)\alpha e^{-\alpha\tau_2}\,\mathrm{s}(\tau_2)\,d\tau_1 d\tau_2 \\ &= a\alpha^2\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-b|\tau+\tau_1-\tau_2|}e^{-\alpha(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Kod računanja dobivenog dvostrukog integrala moramo paziti na predznak vrijednosti $\tau+\tau_1-\tau_2$. Iskoristit ćemo svojstvo simetričnosti autokorelacijske funkcije te ćemo promatrati samo slučajeve za koje je $\tau > 0$. Uz tako odabrani $\tau$ u prvom kvadrantu razlikujemo dva područja integriranja kako je prikazano na slici 3.2.. Sada se dobiveni dvostruki integral rastavlja u dva integrala:

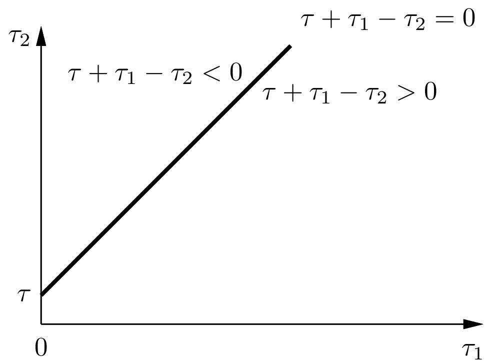
$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= a\alpha^2\int_{\tau_1=0}^{+\infty}\int_{\tau_2=\tau+\tau_1}^{+\infty} e^{b(\tau+\tau_1-\tau_2)-\alpha(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2 \\ &+ a\alpha^2\int_{\tau_1=0}^{+\infty}\int_{\tau_2=0}^{\tau+\tau_1} e^{-b(\tau+\tau_1-\tau_2)-\alpha(\tau_1+\tau_2)}\,d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned}$$

Nakon računanja integrala za autokorelacijsku funkciju dobivamo

$$R_{YY}(\tau) = \frac{a\alpha}{b^2-\alpha^2}\big(be^{-\alpha\tau} - \alpha e^{-b\tau}\big), \quad \text{za } \tau > 0.$$

Iskorištavanjem svojstva simetričnosti dobivamo potpunu autokorelacijsku funkciju izlaznog procesa,

$$R_{YY}(\tau) = \frac{a\alpha}{b^2-\alpha^2}\big(be^{-\alpha|\tau|} - \alpha e^{-b|\tau|}\big).$$




Slika 3.2.: Područja integriranja u prvom kvadrantu

**Primjer 3.11.** Odredite širinu pojasa šuma sustava čija je prijenosna funkcija snage

$$\big|H(\omega)\big|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_0)^4},$$

gdje je $\omega_0$ realna pozitivna konstanta.

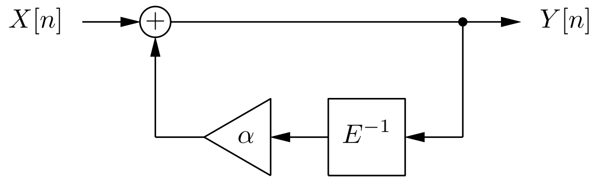
RJEŠENJE: Širina pojasa šuma dana je relacijom

$$W_N = \frac{\displaystyle\int_0^{+\infty}\big|H(\omega)\big|^2\,d\omega}{\big|H(0)\big|^2}.$$

Za zadanu prijenosnu funkciju snage je $\left|H(0)\right|^2 = 1$. Sada je

$$\begin{aligned}
W_N &= \int_0^{+\infty} \left|H(\omega)\right|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+(\omega/\omega_0)^4} d\omega = \omega_0^4 \int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega_0^4+\omega^4} \\
&= \frac{\omega_0}{4\sqrt{2}} \log\Big(\frac{\omega^2+\omega_0\sqrt{2}\omega+\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0\sqrt{2}\omega+\omega_0^2}\Big)\Bigg|_0^{+\infty} \\
&+ \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}}\Bigg(\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{2}\omega}{\omega_0}+1\Big)+\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{2}\omega}{\omega_0}-1\Big)\Bigg)\Bigg|_0^{+\infty} \\
&= 0 - 0 + \frac{\omega_0}{2\sqrt{2}}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi\omega_0}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

**Primjer 3.12.** Za diskretni sustav sa slike 3.3. odredite spektralnu gustoću snage i srednju snagu izlaznog procesa $Y[n]$ ako se na ulaz sustava dovede bijeli šum srednje snage $\sigma^2$. Parametar $\alpha$ je manji od jedinice.




Slika 3.3.: Diskretni sustav

Rješenje: Za zadani sustav u $\mathcal{Z}$ domeni vrijedi

$$X(z) + \frac{\alpha}{z} Y(z) = Y(z)$$

te je prijenosna funkcija

$$H(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}.$$

Da bi odredili spektralnu gustoću snage izlaznog procesa najprije računamo prijenosnu funkciju snage. Vrijedi

$$|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \frac{1}{1-\alpha e^{j\omega}} = \frac{1}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}$$

te je prema (3.10)

$$S_{YY}(\omega) = S_{XX}(\omega)|H(e^{j\omega})|^2 = \frac{\sigma^2}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}.$$

Srednju snagu izlaznog procesa možemo odrediti integriranjem. Vrijedi

$$P_{YY} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma^2\, d\omega}{1+\alpha^2-2\alpha\cos(\omega)}$$

što nakon integriranja daje

$$P_{YY} = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}.$$

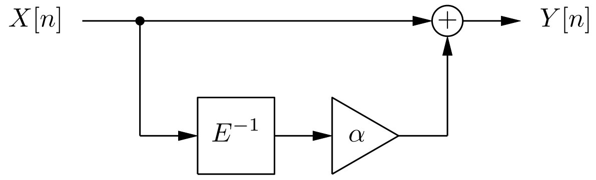
Srednju snagu možemo odrediti i računanjem autokorelacijskog niza. Autokorelacijski niz je

$$R_{YY}(m) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\alpha^{|m|},$$

te je srednja snaga

$$P_{YY} = R_{YY}(0) = \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}.$$

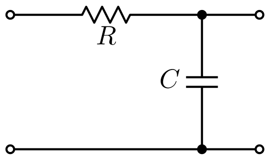
**Zadatak 3.3.** Za diskretni sustav zadan slikom 3.4. odredite srednju snagu izlaznog procesa $Y[n]$ ako se na ulaz sustava dovede bijeli šum srednje snage $\sigma^2$. Parametar $\alpha$ je realan broj različit od nule.




Slika 3.4.: Diskretni sustav

RJEŠENJE: Srednja snaga izlaznog procesa je $P_{YY} = \sigma^2(1+\alpha^2)$.

**Primjer 3.13.** Odredite prijenosnu funkciju snage mreže prikazane slikom 3.5.. Ako na ulaz mreže dovedemo bijeli šum srednje snage $\sigma^2$ odredi srednju snagu izlaznog procesa.




Slika 3.5.: Električna mreža

RJEŠENJE: Da bi odredili prijenosnu funkciju snage naprije moramo odrediti običnu prijenosnu funkciju $H(s)$. Neka je na ulazu mreže napon $U_1(s)$ te neka je na izlazu mreže napon $U_2(s)$. Tada je

$$U_2(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{\frac{1}{sC}+R} = \frac{1}{1+sRC}U_1(s),$$

te je prijenosna funkcija mreže

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1+sRC}.$$

Prijenosna funckija snage je

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+j\omega RC}\frac{1}{1-j\omega RC} = \frac{1}{1+(\omega RC)^2}.$$

Spektralna gustoća snage izlaznog procesa je određena izrazom (3.10) što uz korištenje izraza (1.21) daje

$$S_{YY}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2}{1+(\omega RC)^2}\,d\omega = \frac{\sigma^2}{2RC}.$$

**Primjer 3.14.** Neka je za petlju povratne veze

$$H_1(\omega) = \frac{AB}{B+j\omega} \quad \text{i} \quad H_2(\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

Ako je $H_2(\omega)$ frekvencijska karakteristika povratne grane te ako su $A$ i $B$ realne pozitivne konstante odredite:

a) Za koje vrijednosti $A$ i $B$ je petlja stabilna?

b) Ako je $A = 40$ i $B = 200\,\mathrm{rad/s}$ odredite prijenosnu funkciju snage sustava i snagu izlaznog šuma ako se na ulaz sustava dovede bijeli šum za koji je $N_0/2 = 10^{-4}\,\mathrm{W/Hz}$.

RJEŠENJE: Promatramo sustav s povratnom vezom prikazan na slici 3.6.. Za podsustave su u zadatku dane prijenosne funkcije u Fourireovoj domeni. Formalnom zamjenom $j\omega$ sa $s$ prelazimo u Laplaceovu domenu. Prijenosna funkcija sustava je sada

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} = \frac{ABs}{s^2 + Bs + AB}.$$

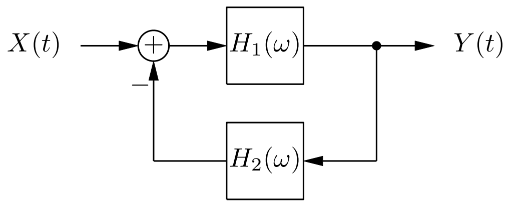
Za stabilan sustav polovi se moraju nalaziti u lijevoj poluravini kompleksne ravnine. Korijeni sustava su

$$s_{1,2} = -\frac{B}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{B^2 - 4AB}.$$

Polovi $s_{1,2}$ se nalaze u desnoj poluravini ako vrijedi

$$\begin{aligned} B &> 4A \\ \sqrt{B^2 - 4AB} &> B \end{aligned}$$

Kako dobiveni sustav nejednadžbi nema rješenja za realne pozitivne $A$ i $B$ sustav je uvijek stabilan.




Slika 3.6.: Sustav s povratnom vezom

Prijenosna funkcija sustava je

$$H(\omega) = \frac{ABj\omega}{-\omega^2 + j\omega B + AB},$$

pa je prijenosna funkcija snage

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = \frac{A^2B^2\omega^2}{A^2B^2 + (B^2 - 2AB)\omega^2 + \omega^4}.$$

Snaga izlaznog šuma je

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)H^*(\omega)\frac{N_0}{2}\,d\omega.$$

Za računanje ovog integrala koristimo tablični integral

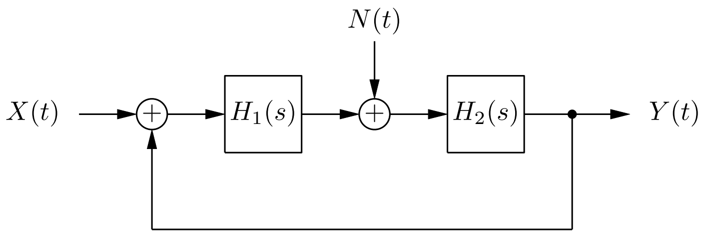
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_1 - b_0\omega^2}{a_2^2 + (a_1^2 - 2a_0a_1)\omega^2 + a_0\omega^4}\,d\omega = \frac{a_0b_1 - a_2b_0}{2a_0a_1a_2}.$$

Dani izraz vrijedi ako su konstante $a_0$, $a_1$, $a_2$, $b_0$ i $b_1$ realne te ako polinom $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$ nema korjena u donjoj poluravnini kompleksne ravnine. Integriranjem dobivamo

$$P = \frac{1}{4}A^2BN_0 = 16\,\mathrm{W}.$$

**Primjer 3.15.** Za kontinuirani sustav zadan slikom 3.7. odredi prijenosnu funkciju snage za signal $X(t)$ i šum $N(t)$. Ako je srednja snaga signala $P_0$ te ako je srednja snaga šuma $N_0$ odredi odnos signal/šum na izlazu sustava. Pri tome su prijenosne funkcije podsustava sa slike

$$H_1(s) = \frac{2s+3}{s+1} \quad \text{i} \quad H_2(s) = \frac{s+1}{(2s+3)(s+2)}.$$




Slika 3.7.: Sustav s povratnom vezom

RJEŠENJE: Odredimo najprije prijenosne funkcije sustava za signal i šum. Za signal vrijedi

$$Y(s) = H_1(s)H_2(s)\big(X(s) + Y(s)\big),$$

te je prijenosna funkcija signala

$$H_X(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)H_2(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)} = \frac{1}{s+1}.$$

Za šum je

$$Y(s) = H_2(s)\big(N(s) + H_1(s)Y(s)\big),$$

pa je prijenosna funkcija šuma

$$H_N(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{H_2(s)}{1 - H_1(s)H_2(s)} = \frac{1}{2s+3}.$$

Prijenosna funkcija snage signala je

$$|H_X(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+j\omega}\frac{1}{1-j\omega} = \frac{1}{1+\omega^2},$$

dok je prijenosna funkcija snage šuma

$$|H_N(j\omega)|^2 = \frac{1}{3+2j\omega}\frac{1}{3-2j\omega} = \frac{1}{9+4\omega^2}.$$

Da bi odredili odnos signal/šum na izlazu sustava moramo odrediti srednje snage signala i šuma na izlazu. Vrijedi

$$P_{XXi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2} P_0 \, d\omega = \frac{P_0}{2}$$

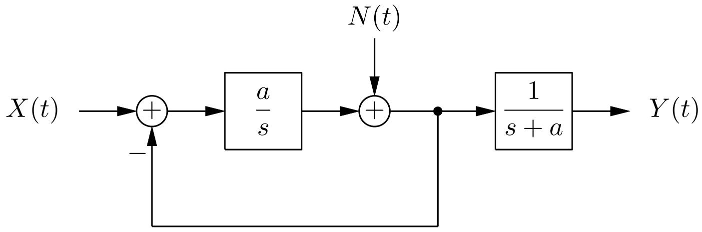
i

$$P_{NNi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{9+4\omega^2} N_0 \, d\omega = \frac{N_0}{12}.$$

Sada je odnos signal/šum

$$\mathrm{SNR}_i = \frac{P_0/2}{N_0/12} = 6\frac{P_0}{N_0}.$$

**Primjer 3.16.** Za kontinuirani sustav zadan slikom 3.8. pobuđen signalom $X(t)$ srednje snage $P_0$ te šumom $N(t)$ srednje snage $N_0$ odredite prijenosne funkcije snage za signal $X(t)$ i




Slika 3.8.: Kontinuirani sustav

šum $N(t)$. Koliki je odnos signal/šum na izlazu zadanog sustava? Koliki je omjer snaga signala i šuma unutar frekvencijskog pojasa $[0, a\rangle$, a koliki unutar pojasa $[a, \infty\rangle$?

Rješenje: Prvo određujemo prijenosne funkcije za signal $X(t)$ i šum $N(t)$. Za signal $X(t)$ vrijedi

$$Y(s) = \frac{\frac{a}{s}}{1+\frac{a}{s}} \frac{1}{s+a} X(s),$$

te je prijenosna funkcija signala

$$H_X(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{a}{(a+s)^2}.$$

Za šum $N(t)$ je pak

$$Y(s) = \frac{1}{1+\frac{a}{s}} \frac{1}{s+a} N(s),$$

te je prijenosna funkcija šuma

$$H_N(s) = \frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{s}{(a+s)^2}.$$

Prijenosne funkcije snage su sada

$$\begin{aligned} \left|H_X(\omega)\right|^2 &= \frac{a}{(a+j\omega)^2} \frac{a}{(a-j\omega)^2} = \frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2} \\ \left|H_N(\omega)\right|^2 &= \frac{j\omega}{(a+j\omega)^2} \frac{-j\omega}{(a-j\omega)^2} = \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2} \end{aligned}$$

SNR na izlazu sustava je određen izlaznim snagama signala i šuma. Izlazna snaga signala je

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2}{(a^2+\omega^2)^2} P_0 \, d\omega = \frac{P_0 a^2}{2\pi} \frac{1}{2a^3} \Big( \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{P_0}{4a},$$

dok je izlazna snaga šuma

$$P_{NN} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{(a^2+\omega^2)^2} N_0 \, d\omega = \frac{N_0}{2\pi} \frac{1}{2a} \Big( \frac{\pi}{2} - \Big(-\frac{\pi}{2}\Big)\Big) = \frac{N_0}{4a}.$$

Odnos signal/šum na izlazu je

$$\text{SNR} = \frac{P_{XX}}{P_{NN}} = \frac{P_0}{N_0}.$$

Promatramo li dakle cijeli frekvencijski opseg odnos signal/šum ostaje nepromijenjen. No što se događa ako promatramo pojaseve $[0, a\rangle$ i $[a, \infty\rangle$?

Za pojas $[0, a\rangle$ je izlazna snaga signala:

$$\begin{aligned}
P_{XX\,[0,a\rangle} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \big|H_X(\omega)\big|^2 P_0\,d\omega \\
&= \frac{P_0 a^2}{2\pi}\,\Big(\frac{\omega}{2a^2(a^2+\omega^2)} + \frac{1}{2a^3}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{\omega}{a}\Big)\Big)\Big|_{-a}^{a} \\
&= \frac{P_0 a^2}{2\pi}\Big(\frac{2a}{4a^4} + \frac{1}{2a^3}\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{P_0}{4a}\frac{\pi+2}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Izlazna snaga šuma je pak:

$$\begin{aligned}
P_{NN\,[0,a\rangle} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} \big|H_N(\omega)\big|^2 N_0\,d\omega \\
&= \frac{N_0}{2\pi}\,\Big(\frac{-\omega}{2(a^2+\omega^2)} + \frac{1}{2a}\,\mathrm{tg}^{-1}\Big(\frac{\omega}{a}\Big)\Big)\Big|_{-a}^{a} \\
&= \frac{N_0}{2\pi}\Big(\frac{-2a}{4a^2} + \frac{1}{2a}\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{N_0}{4a}\frac{\pi-2}{2\pi},
\end{aligned}$$

U pojasu $[0, a\rangle$ je odnos signal/šum popravljen, odnosno dobivamo

$$\mathrm{SNR}_{[0,a\rangle} = \frac{P_{XX\,[0,a\rangle}}{P_{NN\,[0,a\rangle}} = \frac{P_0}{N_0}\frac{\pi+2}{\pi-2}.$$

Za određivanje odnosa signal/šum u pojasu $[a, \infty\rangle$ ne trebamo opet računati integrale jer je

$$\begin{aligned}
P_{XX\,[a,\infty\rangle} &= P_{XX} - P_{XX\,[0,a\rangle} = \frac{P_0}{4a} - \frac{P_0}{4a}\frac{\pi+2}{2\pi} = \frac{P_0}{4a}\frac{\pi-2}{2\pi} \\
P_{NN\,[a,\infty\rangle} &= P_{NN} - P_{NN\,[0,a\rangle} = \frac{N_0}{4a} - \frac{N_0}{4a}\frac{\pi-2}{2\pi} = \frac{N_0}{4a}\frac{\pi+2}{2\pi}
\end{aligned}$$

Vidimo da smo u pojasu $[a, \infty\rangle$ dobili upravo obrnuti odnos signal/šum u odnosu na pojas $[0, a\rangle$, dakle

$$\mathrm{SNR}_{[a,\infty\rangle} = \frac{P_{XX\,[a,\infty\rangle}}{P_{NN\,[a,\infty\rangle}} = \frac{P_0}{N_0}\frac{\pi-2}{\pi+2}.$$

Opisano svojstvo da dobivamo drugačije odnose signal/šum unutar različitih pojaseva naziva se oblikovanje šuma. Na ovom rezultatu se temelji i $\Delta\Sigma$ A/D pretvornik—na mjestu gdje u sustav sa slike 3.8. ulazi šum postavljamo 1-bitni pretvornik koji je ujedno izvor kvantizacijskog šuma. Ako pretipkamo ulazni signal $X(t)$, čime efektivno uzimamo puno veći frekvencijski opseg od željenog $[0, a\rangle$, postižemo bolji odnos signal/šum na izlazu sustava jer smo snagu kvantizacijskog šuma oblikovali tako da se većina snage smješta unutar frekvencijskog opsega $\langle a, f_s/2\rangle$ koji nije od interesa.

## 3.2. Termički šum

Otpornik s termičkim šumom možemo nadomjestiti odgovarajućim naponskim ili strujnim modelom. Naponski model sastoji se od idealnog otpora $R$ i serijski spojenog naponskog izvora šuma

$$\overline{e^2} = \frac{1}{\pi}2kTRd\omega, \tag{3.20}$$

gdje je $T$ temperatura na kojoj se nalazi otpornik, dok je $k$ Boltzmanova konstanta. Strujni nadomjesni model sastoji se od idealnog otpora $R$ i paralelno spojenog strujnog izvora šuma

$$\overline{i^2} = \frac{1}{\pi} 2kTGd\omega = \frac{1}{R^2}\overline{e^2}. \tag{3.21}$$

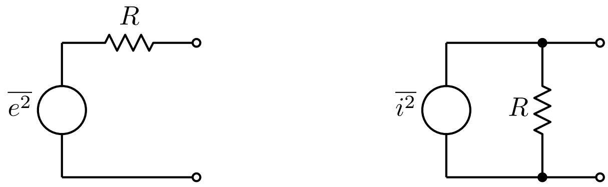
Obje nadomjesne sheme prikazane su na slici 3.9.. Ako radimo s impedancijama koristimo analogne modele, samo što je sada samo realni dio impedancije izvor šuma. Naponski izvor u tom slučaju je karakteriziran s

$$\overline{e^2} = \frac{1}{\pi} 2kTR(\omega)d\omega, \tag{3.22}$$

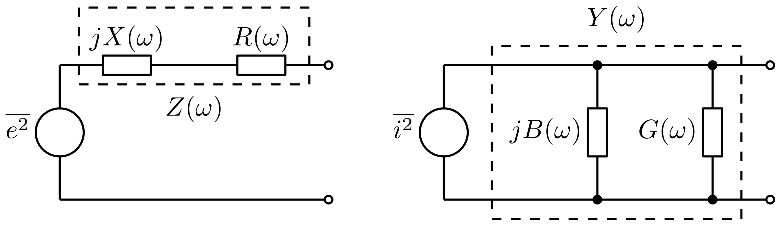
dok je strujni izvor

$$\overline{i^2} = \frac{1}{\pi} 2kTG(\omega)d\omega. \tag{3.23}$$

Nadomjesne sheme prikazane su na slici 3.10..

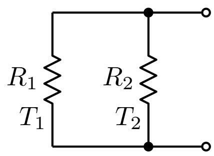



Slika 3.9.: Jednostavni nadomjesni naponski i strujni model




Slika 3.10.: Nadomjesni naponski i strujni model za složenije mreže

**Primjer 3.17.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.11. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ koji su na različitim temperaturama. Odredite izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$.




Slika 3.11.: Električna mreža

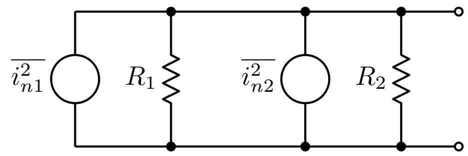
RJEŠENJE: Da bi odredili efektivnu temperaturu šuma mreže moramo cijelu mrežu nadomjestiti prema Nortonovom ili prema Theveninovom teoremu. Za ovaj slučaj zadanu mrežu nadomjestiti ćemo prema Nortonovom teoremu. Svaki otpornik s termičkim šumom u zadanoj mreži sada zamijenimo koristeći strujni model kako je prikazano na slici 3.12..

Pri tome je

$$\overline{i_{n1}^2} = \frac{2kT_1d\omega}{\pi R_1} \quad \text{i} \quad \overline{i_{n2}^2} = \frac{2kT_2d\omega}{\pi R_2}.$$

Za zadani sklop sada određujemo Nortonovu struju,

$$\overline{i_n^2} = \overline{i_{n1}^2} + \overline{i_{n2}^2},$$




Slika 3.12.: Električna mreža s izvorima termičkog šuma

te nadomjesnu admitanciju,

$$Y_N = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Pri određivanju Nortonove struje primijetite da smo struju odredili superpozicijom. Sam smjer struje pri tome nije bitan jer šum slučajan signal. Kako promatramo snagu signala te kako su izvori šuma nezavisni svaki izvor doprinosi konačnoj snazi. Stoga jednostavno zbrajamo dobivene snage na izlazu. Za određivanje efektivne temperature šuma mreže moramo odrediti realni dio admitancije $Y_N$. Tada je

$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}[Y_N]d\omega}{\pi} = \frac{2kT_1 d\omega}{\pi R_1} + \frac{2kT_2 d\omega}{\pi R_2},$$

odnosno

$$T_e(\omega)\Big(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\Big) = \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}$$

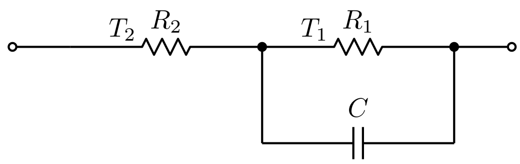
iz čega dobivamo traženi izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$,

$$T_e(\omega) = \frac{T_1 R_2 + T_2 R_1}{R_1 + R_2}.$$

**Primjer 3.18.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.13. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ koji su na različitim temperaturama, te od idealnog kapaciteta. Odredite izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$ na dva načina:

a) korištenjem nadomjesnih naponskih modela,

b) korištenjem nadomjesnih strujnih modela.




Slika 3.13.: Električna mreža

Rješenje: Zamjenimo li otpore nadomjesnim naponskim modelom dobivamo mrežu prikazanu na slici 3.14.. Za takvu mrežu se uobičajeno određuje nadomjesna shema prema Theveninu. Najprije određujemo ukupni izlazni napon superpozicijom. Kako je

$$\overline{e_{n1}^2} = \frac{2kT_1 R_1 d\omega}{\pi} \quad \text{i} \quad \overline{e_{n2}^2} = \frac{2kT_2 R_2 d\omega}{\pi}$$

superpozicijom dobivamo

$$\overline{e_n^2} = \overline{e_{n1}^2}\Big|\frac{1}{1 + j\omega R_1 C}\Big|^2 + \overline{e_{n2}^2},$$

što nakon sređivanja daje

$$\overline{e_n^2} = \frac{2kd\omega}{\pi}\Big(\frac{T_1R_1}{1+\omega^2R_1^2C} + T_2R_2\Big).$$

Kako promatramo snagu slučajnog signala umjesto obične prijenosne funkcije koristimo prijenosnu funkciju snage. Theveninovu impedanciju određujemo uz kratko spojene naponske izvore. Dobivamo

$$Z_T(\omega) = R_2 + \frac{R_1}{1+j\omega R_1C} = R_2 + R_1\frac{1-j\omega C}{1+\omega^2R_1^2C^2}.$$

Realni dio impedancije je

$$\mathrm{Re}\big[Z_T(\omega)\big] = R_T(\omega) = R_2 + \frac{R_1}{1+\omega^2R_1^2C^2}.$$

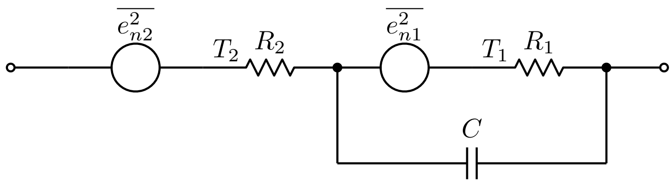
Sada je

$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}[Z_T]d\omega}{\pi} = \frac{2kd\omega}{\pi}\Big(\frac{T_1R_1}{1+\omega^2R_1^2C} + T_2R_2\Big),$$

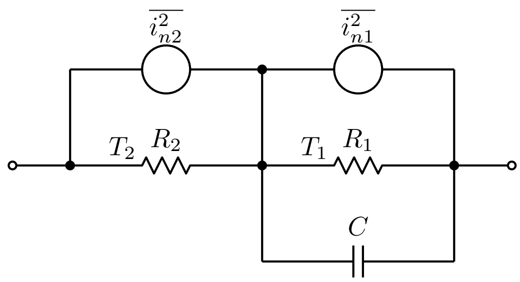
odnosno

$$T_e(\omega) = \frac{T_1R_1 + T_2R_2(1+\omega^2R_1^2C^2)}{R_1 + R_2(1+\omega^2R_1^2C^2)}.$$

Time smo odredili izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže. Za posebni slučaj $T_1 = T_2$ očito vrijedi $T_e(\omega) = T_1 = T_2$.




Slika 3.14.: Električna mreža s naponski nadomještenim izvorima šuma




Slika 3.15.: Električna mreža sa strujno nadomještenim izvorima šuma

Za rješavanje korištenjem strujnih nadomjesnih modela koristimo nadomjenu shemu prema Nortonu. Zamijenimo li izvore termičkog šuma nadomjesnim strujnim modelom dobivamo shemu prikazanu na slici 3.15.. Vrijedi

$$\overline{i_{n1}^2} = \frac{2kT_1d\omega}{\pi R_1} \quad \text{i} \quad \overline{i_{n2}^2} = \frac{2kT_2d\omega}{\pi R_2}.$$

Nortonovu struju određujemo superpozicijom. Dobivamo

$$\overline{i_n^2} = \overline{i_{n1}^2}\Big|\frac{R_1||C}{R_2+R_1||C}\Big|^2 + \overline{i_{n2}^2}\Big|\frac{R_2}{R_2+R_1||C}\Big|^2,$$

što uz

$$\Big|\frac{R_1||C}{R_2+R_1||C}\Big|^2 = \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2+\omega^2R_1^2R_2^2C^2}$$

i

$$\left|\frac{R_2}{R_2 + R_1||C}\right|^2 = \frac{R_2^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}$$

daje

$$\overline{i_n^2} = \frac{2kd\omega}{\pi} \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2 (1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}.$$

Potrebno je još odrediti Nortonovu admitanciju. Odrediti ćemo je iz Theveninove impedacije koju smo odredili rješavajući prvi dio zadatka. Vrijedi

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{Z_T(\omega)} = \frac{1 + j\omega R_1 C}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 C}.$$

Realni dio admitancije je

$$\mathrm{Re}\big[Y_N(\omega)\big] = G_N(\omega) = \frac{R_1 + R_2(1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}.$$

Za naš nadomjesni model sada tražimo da vrijedi

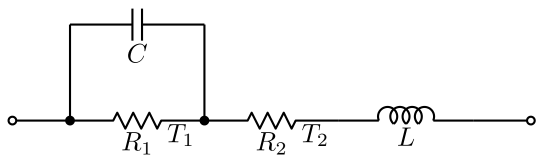
$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}[Y_N]d\omega}{\pi} = \frac{2kd\omega}{\pi} \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2(1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 R_1^2 R_2^2 C^2}.$$

Iz te relacije slijedi

$$T_e(\omega) = \frac{T_1 R_1 + T_2 R_2(1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}{R_1 + R_2(1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}.$$

Naravno, dobili smo isti rezultat samo na različit način.

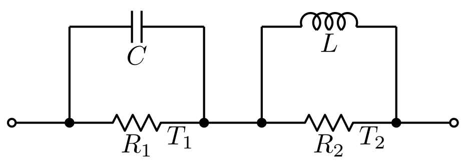
**Zadatak 3.4.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.16. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ koji su na različitim temperaturama $T_1$ i $T_2$ te od idealne zavojnice i idealnog kapaciteta. Odredite izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$.




Slika 3.16.: Električna mreža

Rješenje: $T_e(\omega) = \dfrac{T_1 R_1 + T_2 R_2(1 + \omega^2 C^2 R_1^2)}{R_1 + R_2(1 + \omega^2 C^2 R_1^2)}$

**Primjer 3.19.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.17. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ koji su na različitim temperaturama te od idelanog kapaciteta i idealne zavojnice. Odredite izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$. Na kojoj frekvenciji temperatura šuma ne ovisi o $L$ i $C$?




Slika 3.17.: Električna mreža

Rješenje: Koristimo nadomjesni model po Theveninu. Theveninova impedancija je

$$Z_T(\omega) = R_1 || \frac{1}{j\omega C} + R_2 || j\omega L = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C} + \frac{j\omega L R_2}{R_2 + j\omega L}.$$

Realni dio Theveninove impedancije je

$$\mathrm{Re}\big[Z_N(\omega)\big] = R(\omega) = \frac{R_1}{1 + \omega^2 R_1^2 C^2} + \frac{\omega^2 L^2 R_2}{R_2^2 + \omega^2 L^2}.$$

Doprinos svakog pojedinog izvora termičkog šuma određujemo odvojeno te tada koristimo superpoziciju. Doprinos prvog izvora je

$$\overline{e_1^2} = \frac{2kT_1 R_1 d\omega}{\pi} \left| \frac{1}{1 + j\omega R_1 C} \right|^2,$$

dok je doprinos drugog izvora

$$\overline{e_2^2} = \frac{2kT_2 R_2 d\omega}{\pi} \left| \frac{j\omega L}{R_2 + j\omega L} \right|^2.$$

Kako zahtijevamo da vrijedi

$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}\big[Z_N(\omega)\big] d\omega}{\pi} = \overline{e_1^2} + \overline{e_2^2},$$

za efektivnu temperaturu šuma mreže dobivamo

$$T_e(\omega) = \frac{T_1 R_1 (R_2^2 + \omega^2 L^2) + T_2 R_2 \omega^2 L^2 (1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}{R_1 (R_2 + \omega^2 L^2) + \omega^2 L^2 R_2 (1 + \omega^2 R_1^2 C^2)}.$$

Prepišemo li izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže u oblik

$$T_e(\omega) = \frac{T_1 R_1 \dfrac{1 + (\omega L/R_2)^2}{(\omega L/R_2)^2} + T_2 R_2 \big(1 + (\omega R_1 C)^2\big)}{R_1 \dfrac{1 + (\omega L/R_2)^2}{(\omega L/R_2)^2} + R_2 \big(1 + (\omega R_1 C)^2\big)},$$

vidimo da $T_e(\omega)$ ne ovisi o frekvenciji za

$$\frac{1 + (\omega L/R_2)^2}{(\omega L/R_2)^2} = 1 + (\omega R_1 C)^2,$$

odnosno za

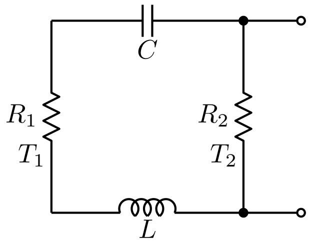
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}.$$

**Primjer 3.20.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.18. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ koji su na različitim temperaturama $T_1$ i $T_2$ te od idealne zavojnice i idealnog kapaciteta. Odredite izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$. Za koju frekvenciju $\omega$ efektivna temperatura šuma mreže ne ovisi o $L$ i $C$?

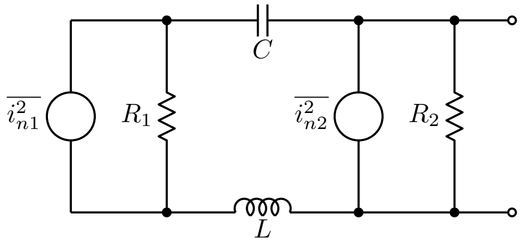
Rješenje: Kod računanja efektivne temperature šuma mreže koristiti ćemo nadomjesnu shemu prema Nortonu. Svaki od otpornika koji se ponaša kao izvor termičkog šuma nadomještamo koristeći strujni model kako je prikazano na slici 3.19..

Pri tome je

$$\overline{i_{n1}^2} = \frac{2kT_1 d\omega}{\pi R_1} \quad \text{i} \quad \overline{i_{n2}^2} = \frac{2kT_2 d\omega}{\pi R_2}.$$




Slika 3.18.: Električna mreža




Slika 3.19.: Električna mreža s izvorima termičkog šuma

Za zadani sklop sada određujemo nadomjesnu admitanciju,

$$Y_N = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{1}{R_2} + \frac{j\omega C(1-\omega^2 LC) + \omega^2 C^2 R_1}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_1^2 C^2}.$$

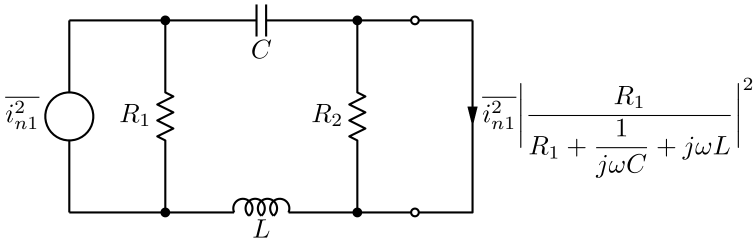
Realni dio admitancije je

$$\mathrm{Re}[Y_N] = \frac{1}{R_2} + \frac{\omega^2 C^2 R_1}{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R_1^2 C^2}.$$

Nortonova struja je

$$\overline{i_n^2} = \overline{i_{n1}^2}\left|\frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C} + j\omega L}\right|^2 + \overline{i_{n2}^2}.$$

Primijetite da u slučaju kada računamo sa srednjom vrijenošću kvadrata struje umjesto uobičajene prijenosne funkcije uzimamo prijenosnu funkciju snage. U ovom slučaju to je kvadrat apsolutne vrijednosti uobičajene prijenosne funkcije strujnog djelila prikazanog na slici 3.20.. Također, kako se radi o srednjoj vrijednosti kvadrata smjer struje nije bitan (na slici je tražena struja označena strelicom, no ta strelica je isto tako mogla pokazivati u suprotnom smjeru).




Slika 3.20.: Električna mreža s izvorima termičkog šuma

Sada je

$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}[Y_N]d\omega}{\pi} = \frac{2kT_1 d\omega}{\pi R_1}\left|\frac{R_1 j\omega C}{1-\omega^2 LC + j\omega R_1 C}\right|^2 + \frac{2kT_2 d\omega}{\pi R_2},$$

odnosno

$$T_e(\omega)\frac{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2R_1^2C^2+\omega^2C^2R_1R_2}{R_2\big((1-\omega^2LC)^2+\omega^2R_1^2C^2\big)}=\frac{T_2}{R_2}+\frac{T_1}{R_1}\frac{R_1^2\omega^2C^2}{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2R_1^2C^2}.$$

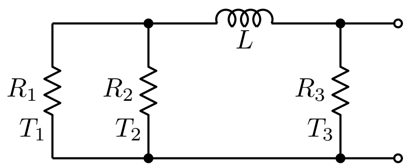
Nakon sređivanja dobivamo konačni izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže,

$$T_e(\omega)=\frac{T_1R_1R_2\omega^2C^2+T_2\big((1-\omega^2LC)^2+\omega^2R_1^2C^2\big)}{(1-\omega^2LC)^2+\omega^2C^2R_1(R_1+R_2)}.$$

Efektivna temeratura šuma mreže ne ovisi o $L$ i $C$ za

$$\omega=0 \quad \text{i} \quad \omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

**Primjer 3.21.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.21. koja se sastoji od tri otpora $R_1$, $R_2$ i $R_3$ koji su na temperaturama $T_1$, $T_2$ i $T_3$ te od idealne zavojnice. Odredite izraz za efektivnu temeraturu šuma mreže $T_e(\omega)$.




Slika 3.21.: Električna mreža

Rješenje: Kod računanja efektivne temperature šuma mreže koristiti ćemo nadomjesnu shemu prema Nortonu pa svaki od otpornika nadomještamo koristeći strujni model.

Najprije računamo nadomjesnu admitanciju po Nortonu,

$$Y_N=\frac{1}{R_3}+\frac{1}{j\omega L+R_1||R_2}=\frac{1}{R_3}+\frac{R_1||R_2-j\omega L}{(R_1||R_2)^2+\omega^2L^2}.$$

Realni dio admitancije je

$$\mathrm{Re}[Y_N]=\frac{1}{R_3}+\frac{R_1||R_2}{(R_1||R_2)^2+\omega^2L^2}.$$

Sada određujemo Nortonovu struju,

$$\overline{i_n^2}=\overline{i_{n1}^2}\Big|\frac{R_1||R_2}{R_1||R_2+j\omega L}\Big|^2+\overline{i_{n2}^2}\Big|\frac{R_1||R_2}{R_1||R_2+j\omega L}\Big|^2+\overline{i_{n3}^2}.$$

Pri tome je

$$\Big|\frac{R_1||R_2}{R_1||R_2+j\omega L}\Big|^2=\frac{(R_1||R_2)^2}{(R_1||R_2)^2+\omega^2L^2}.$$

Prema dobivenom izrazu za Nortonovu struju vrijedi

$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}[Y_N]d\omega}{\pi}=\Big(\frac{2kT_1d\omega}{\pi R_1}+\frac{2kT_2d\omega}{\pi R_2}\Big)\frac{(R_1||R_2)^2}{(R_1||R_2)^2+\omega^2L^2}+\frac{2kT_3d\omega}{\pi R_3},$$

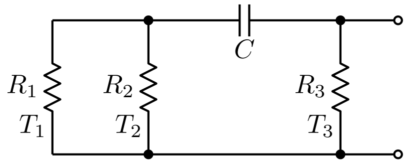
pa nakon uvrštavanja $\mathrm{Re}[Y_N]$ i sređivanja dobivamo

$$T_e(\omega)=\frac{T_1\dfrac{R_3}{R_1}(R_1||R_2)^2+T_2\dfrac{R_3}{R_2}(R_1||R_2)^2+T_3\big((R_1||R_2)^2+\omega^2L^2\big)}{(R_1||R_2)^2+\omega^2L^2+R_3(R_1||R_2)},$$

odnosno

$$T_e(\omega) = \frac{T_1R_1R_2^2R_3 + T_2R_1^2R_2R_3 + T_3\big(R_1^2R_2^2 + \omega^2L^2(R_1+R_2)^2\big)}{\omega^2L^2(R_1+R_2)^2 + R_1R_2(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)}.$$

**Zadatak 3.5.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.22. koja se sastoji od tri otpora $R_1$, $R_2$ i $R_3$ koji su na temperaturama $T_1$, $T_2$ i $T_3$ te od idealnog kapaciteta. Odredite izraz za efektivnu temeraturu šuma mreže $T_e(\omega)$.

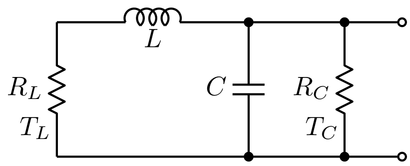



Slika 3.22.: Električna mreža

Rješenje:

$$T_e(\omega) = \frac{T_1\omega^2C^2R_1R_2^2R_3 + T_2\omega^2C^2R_1^2R_2R_3 + T_3\big(\omega^2C^2R_1^2R_2^2 + (R_1+R_2)^2\big)}{(R_1+R_2)^2 + \omega^2C^2R_1R_2(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)}$$

**Primjer 3.22.** Za mrežu sa slike 3.23. odredi opći izraz za efektivnu temperaturu šuma. Koliki bi trebao biti otpor $R_C$ da za $\omega = 2$ efektivna temperatura šuma mreže odgovara srednjoj vrijednosti temperatura pojedinih otpornika $T_L$ i $T_C$ ako je poznato da je $L = 1$ i $R_L = 2$.




Slika 3.23.: Električna mreža

Rješenje: Koristimo nadomjesni strujni model. Nortonova admitancija je

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{R_C} + j\omega C + \frac{1}{R_L + j\omega L}.$$

Realni dio admitancije je

$$\mathrm{Re}\big[Y_N(\omega)\big] = \frac{1}{R_C} + \frac{R_L}{R_L^2 + \omega^2L^2}.$$

Sada je

$$\frac{2kT_e(\omega)\,\mathrm{Re}[Y_N]d\omega}{\pi} = \frac{2kT_Cd\omega}{\pi R_C} + \frac{2kT_Ld\omega}{\pi R_L}\left|\frac{R_L}{R_L + j\omega L}\right|^2,$$

te je

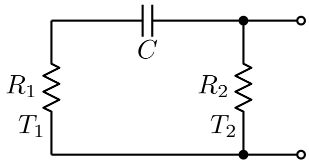
$$T_e(\omega) = \frac{T_C(R_L^2 + \omega^2L^2) + T_LR_LR_C}{R_L^2 + \omega^2L^2 + R_LR_C}.$$

Tražimo vrijednost otpora $R_C$ tako da vrijedi

$$T_e(2) = \frac{T_C + T_L}{2}.$$

Vrijedi

$$R_L^2 + \omega^2L^2 = R_LR_C$$



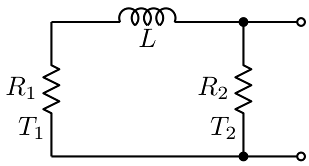

Slika 3.24.: Električna mreža

te uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobivamo $R_C = 4$.

**Zadatak 3.6.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.24. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ različitih temperatura $T_1$ i $T_2$ te od idealnog kapaciteta $C$. Odredi ekvivalentnu temperaturu šuma mreže.

RJEŠENJE: $T_e(\omega) = \dfrac{T_1\omega^2C^2R_1R_2 + T_2(1+\omega^2C^2R_1^2)}{1+\omega^2C^2R_1(R_1+R_2)}$.

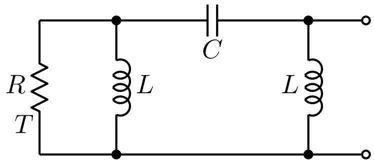
**Zadatak 3.7.** Zadana je električna mreža prikazana na slici 3.25. koja se sastoji od dva otpora $R_1$ i $R_2$ različitih temperatura $T_1$ i $T_2$ te od idealnog induktiviteta $L$. Odredi ekvivalentnu temperaturu šuma mreže.




Slika 3.25.: Električna mreža

RJEŠENJE: $T_e(\omega) = \dfrac{T_1R_1R_2 + T_2(\omega^2L^2 + R_1^2)}{\omega^2L^2 + R_1(R_1+R_2)}$.

**Primjer 3.23.** Zadana je električna mreža prikazna na slici 3.26. koja se sastoji od jednog otpornika $R$ na temperaturi $T$, od jednog kapaciteta $C$ i dvije jednake zavojnice. Odredi izraz za efektivnu temperaturu šuma mreže $T_e(\omega)$.




Slika 3.26.: Električna mreža

RJEŠENJE: Zadatak možemo riješiti nadomještanjem po Theveninu ili po Nortonu. Koristiti ćemo nadomjesnu shemu po Nortonu. Odredimo najprije Nortonovu admitanciju. Vrijedi

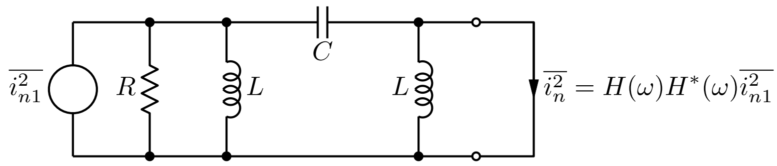
$$
\begin{aligned}
Y_N(\omega) &= \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\dfrac{1}{j\omega C} + \dfrac{j\omega LR}{R+j\omega L}} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega C(R+j\omega L)}{R+j\omega L-\omega^2RLC} \\
&= \frac{1}{j\omega L} + \frac{j\omega R^2C(1-\omega^2LC) - j\omega^3L^2C}{R^2(1-\omega^2LC)^2+\omega^2L^2} \\
&\quad + \frac{-\omega^2RLC(1-\omega^2LC) - \omega^2RLC}{R^2(1-\omega^2LC)^2+\omega^2L^2},
\end{aligned}
$$

pa je realni dio Nortonove admitancije

$$G(\omega) = \mathrm{Re}[Y_N(\omega)] = \frac{\omega^4 RL^2C^2}{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}.$$

Zamislimo sada strujni izvor koji se nalazi u paraleli s otporom (slika 3.27.). Prijenosna funkcija koja određuje Nortonovu struju je

$$H(\omega) = \frac{R||j\omega L}{\dfrac{1}{j\omega C} + R||j\omega L} = \frac{\dfrac{j\omega RL}{R+j\omega L}}{\dfrac{1}{j\omega C} + \dfrac{j\omega RL}{R+j\omega L}} = \frac{-\omega^2 RLC}{R - \omega^2 RLC + j\omega L}.$$




Slika 3.27.: Računanje Nortonove struje

Odredimo sada traženu efektivnu temepraturu mreže. Vrijedi

$$\frac{2kT_e(\omega)G(\omega)\,d\omega}{\pi} = \frac{2kT\,d\omega}{\pi R}H(\omega)H^*(\omega),$$

odnosno

$$T_e(\omega) = \frac{1}{R}\left|\frac{-\omega^2 RLC}{R-\omega^2 RLC + j\omega L}\right|^2 \frac{R^2(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2}{\omega^4 RL^2C^2}T.$$

Nakon sređivanja dobivamo

$$T_e(\omega) = T,$$

odnosno kako imamo samo jedan izvor efektivna temperatura šuma mreže je jednaka temperaturi otpornika.

**Primjer 3.24.** Pojačalo se sastoji od tri kaskadno spojena stupnja. Efektivne temperature šuma pojedinih stupnjeva su $T_{e1} = 200\,\mathrm{K}$, $T_{e2} = 300\,\mathrm{K}$ i $T_{e3} = 750\,\mathrm{K}$. Raspoloživo pojačanje snage prvog ulaznog stupnja je $G_1 = 10$. Koliko mora biti raspoloživo pojačanje snage drugog stupnja $G_2$ da bi efektivna temeratura šuma na ulazu pojačala bila $T_e = 250\,\mathrm{K}$?

Rješenje: Efektivna temperatura šuma za kaskadu sastavljenu od $N$ stupnjeva od kojih svaki ima pojačanje $G_i$ i temperaturu šuma $T_i$ je dana s

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1G_2} + \cdots + \frac{T_{eN}}{G_1G_2\ldots G_{N-1}}.$$

Za zadanu kaskadu je

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1G_2},$$

što postaje

$$G_2 = \frac{T_{e3}}{G_1}\frac{1}{T_e - T_{e1} - T_{e2}/G_1}.$$

Nakon uvrštavanja dobivamo potrebno pojačanje snage od $G_2 = 3{,}75$ puta.

**Zadatak 3.8.** Pojačalo se sastoji od tri kaskadno spojena stupnja. Efektivne temperature pojedinih stupnjeva su $T_{e1} = 200\,\mathrm{K}$, $T_{e2} = 450\,\mathrm{K}$ i $T_{e3} = 1000\,\mathrm{K}$. Ako je pojačanje snage drugog stupnja $G_2 = 5$, koliko mora biti pojačanje raspoložive snage prvog stupnja da bi efektivna temperatura šuma na ulazu u pojačalo bila $T_e = 250\,\mathrm{K}$?

Rješenje: Potrebno pojačanje snage je $G_1 = 13$.

**Primjer 3.25.** Jedan proizvođač prodaje mikrovalni prijemnik koji ima radni faktor šuma $F_{\mathrm{op}} = 10\,\mathrm{dB}$ kada je na njega priključen izvor sa efektivnom temperaturom šuma $T_s = 130\,\mathrm{K}$. Drugi proizvođač prodaje isti uređaj sa standardim faktorom šuma $F_0 = 6\,\mathrm{dB}$. Odredite efektivne temperature ulaznog šuma za oba prijemnika. Ako bi svi ostali parametri (npr. cijena i pojačanje) bili jednaki, koji prijemnik je isplativiji?

Rješenje: Radni faktor šuma je

$$F_{\mathrm{op}} = 1 + \frac{T_e}{T_s},$$

gdje je $T_s$ efektivna temperatura ulaznog šuma, a $T_e$ ekvivalentna temperatura šuma mreže. Standardni faktor šuma je definiran kao radni faktor šuma određen za ulaznu temperaturu šuma $T_s = T_0 = 290\,\mathrm{K}$,

$$F_0 = 1 + \frac{T_e}{T_0} = 1 + \frac{T_e}{290\,\mathrm{K}}.$$

Faktor šuma u decibelima je naravno

$$F_{\mathrm{op}}\,[\mathrm{dB}] = 10\log\Big(1 + \frac{T_e}{T_s}\Big).$$

Za prvi prijemnik je tada

$$10\,\mathrm{dB} = 10\log\Big(1 + \frac{T_{e1}}{130\,\mathrm{K}}\Big),$$

te je $T_{e1} = 1170\,\mathrm{K}$. Za drugi prijemnik je

$$6\,\mathrm{dB} = 10\log\Big(1 + \frac{T_{e1}}{290\,\mathrm{K}}\Big),$$

pa za $T_{e2}$ dobivamo $864{,}5\,\mathrm{K}$. Drugi prijemnik unosi manji šum jer je

$$T_{e2} < T_{e1},$$

pa bi kao takav bio isplativiji.

**Primjer 3.26.** Pojačalo ima srednji standardni faktor šuma iznosa $2\,\mathrm{dB}$. Kada se koristi sa izvorom srednje efektivne temperature šuma $T_s$, srednji radni faktor šuma je $6{,}5\,\mathrm{dB}$. Odredite $T_s$.

Rješenje: Vrijedi

$$\overline{F}_0 = 1 + \frac{\overline{T}_e}{T_0} \quad \text{i} \quad \overline{F}_{\mathrm{op}} = 1 + \frac{\overline{T}_e}{T_s}.$$

Zadani faktori šuma su u decibelima te možemo pisati

$$\overline{T}_e = T_0\big(10^{0,1\overline{F}_0} - 1\big)$$

i

$$\overline{T}_s = \frac{\overline{T}_e}{10^{0,1\overline{F}_{op}} - 1}.$$

Sada je

$$\overline{T}_s = T_0\frac{10^{0,1\overline{F}_0} - 1}{10^{0,1\overline{F}_{op}} - 1} = 290\frac{10^{0,2} - 1}{10^{0,65} - 1} = 48{,}9\,\mathrm{K}.$$

# 4. Optimalni sustavi

## 4.1. Prilagođeni filtar

Problem detekcije poznatog signala $x(t)$ u šumu poznatih karakteristika rješavamo korištenjem prilagođenog filtra koji daje maksimalni odnos signal-šum na izlazu filtra, odnosno na izlazu prilagođenog filtra signal može biti izobličen, ali je njegova energija maksimalno pojačana prema šumu.

Prilagođeni filtar je dakle optimalan linearni vremenski nepromjenjiv sustav koji na izlazu daje maksimalan odnos signal-šum. Prijenosna funkcija prilagođenog filtra je

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi C} \frac{X^*(\omega)}{S_{NN}(\omega)} e^{-j\omega t_0}, \tag{4.1}$$

gdje je $X^*(\omega)$ konjugirana Fourierova transformacija determinističkog signala $x(t)$ kojeg želimo detektirati, dok je $S_{NN}(\omega)$ spektralna gustoća snage šuma u komunikacijskom kanalu. $C \in \mathbb{R}$ je proizvoljna konstanta. Eksponencijalni član predstavlja kašnjenje za $t_0$ u vremenskoj domeni.

Ukoliko je šum bijeli s gustoćom spektra snage $N_0/2$, prijenosna funkcija prilagođenog filtra postaje

$$H(\omega) = \frac{1}{\pi C N_0} X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}. \tag{4.2}$$

Za Fourierovu transformaciju vrijedi

$$x^*(-t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X^*(\omega),$$

što za realne signale možemo protumačiti kao inverziju u vremenskoj domeni. Dakle ako znamo kako izgleda signal kojeg želimo detektirati u slučaju bijelog šuma samo ga zrcalimo i dobili smo impulsni odziv prilagođenog filtra.

Zapamtimo:

1. Na izlazu prilagođenog filtera signal je *izobličen*, ali je njegova energija maksimalno pojačana prema šumu.
2. Prilagođeni filtar služi za *detekciju* signala.

**Bilješka:** Općenito se problem traženja vremenski nepromijenjivog prilagođenog filtra može svesti na traženje rješenja integralne jednadžbe

$$\int_{-\infty}^{T} R_{NN}(t-\tau) h(T-\tau)\, d\tau = x(t).$$

Ako dakle pretražujete matematičku literaturu područje od interesa su integralne jednadžbe (a ne prilagođeni filtar).

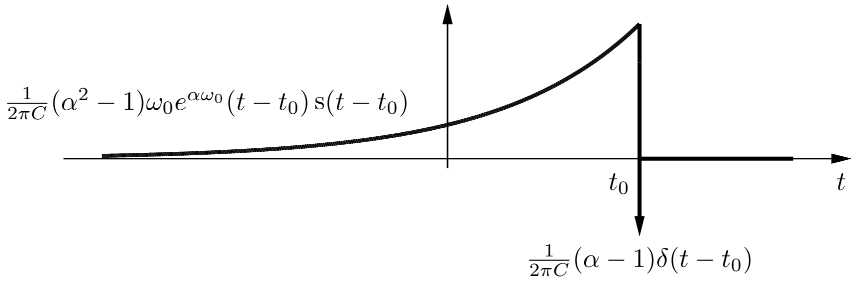
**Primjer 4.1.** Odredite prijenosnu funkciju i impulsni odziv prilagođenog filtra za signal

$$x(t) = \left(e^{-\omega_0 t} - e^{-\alpha\omega_0 t}\right) \mathrm{s}(t),$$

gdje su $\omega_0$ i $\alpha$ realne pozitivne konstante. Šum je određen gustoćom spektra snage

$$S_{NN}(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}.$$

Postoji li pomak $t_0$ za koji dobivamo kauzalni prilagođeni filtar?




Slika 4.1.: Impulsni odziv prilagođenog filtra

Rješenje: Da bi odredili prijenosnu funkciju filtra prema izrazu (4.1) najprije moramo odrediti konjugiranu Fourierovu transformaciju signala $x(t)$. Vrijedi

$$x(t) = \left(e^{-\omega_0 t} - e^{-\alpha\omega_0 t}\right)\mathrm{s}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega) = \frac{1}{\omega_0 + j\omega} - \frac{1}{\alpha\omega_0 + j\omega},$$

odnosno

$$X^*(\omega) = \frac{1}{\omega_0 - j\omega} - \frac{1}{\alpha\omega_0 - j\omega}.$$

Prijenosna funkcija filtra je

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{1}{2\pi C}\Big(\frac{1}{\omega_0 - j\omega} - \frac{1}{\alpha\omega_0 - j\omega}\Big)\frac{\omega_0^2 + \omega^2}{\omega_0}e^{-j\omega t_0} \\ &= \frac{1}{2\pi C}\frac{\alpha\omega_0 - j\omega - \omega_0 + j\omega}{(\omega_0 - j\omega)(\alpha\omega_0 - j\omega)}\frac{(\omega_0 + j\omega)(\omega_0 - j\omega)}{\omega_0}e^{-j\omega t_0} \\ &= \frac{1}{2\pi C}(\alpha - 1)\frac{\omega_0 + j\omega}{\alpha\omega_0 - j\omega}e^{-j\omega t_0} \end{aligned}$$

što nakon sređivanja postaje

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi C}(\alpha - 1)\Big(-1 + \frac{(\alpha+1)\omega_0}{\alpha\omega_0 - j\omega}\Big)e^{-j\omega t_0}.$$

Da bi odredili impulsni odziv moramo izračunati inverznu Fourierovu transformaciju. Prema pravilu o konjugaciji transformacije vrijedi

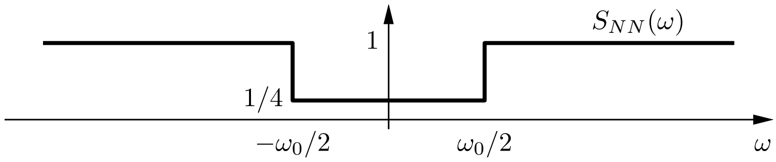
$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha\omega_0 + j\omega} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-\alpha\omega_0 t}\,\mathrm{s}(t) \\ \frac{1}{\alpha\omega_0 - j\omega} &\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{\alpha\omega_0 t}\,\mathrm{s}(-t) \end{aligned}$$

te je impulsni odziv

$$h(t) = \frac{1}{2\pi C}(\alpha - 1)\big(-\delta(t - t_0) + (\alpha+1)\omega_0 e^{\alpha\omega_0(t-t_0)}\,\mathrm{s}(-t + t_0)\big).$$

Impulsni odziv je prikazan na slici 4.1.. Vidimo da ne postoji takav pomak $t_0$ za koji bi impulsni odziv postao kauzalan.

No odziv možemo aproksimirati te dobiti kauzalni filtar ako odaberemo dovoljno veliki pomak $t_0$ jer u tom slučaju $h(t)$ gotovo jednak nuli za $t < 0$.




Slika 4.2.: Spektar snage šuma

**Primjer 4.2.** Odredite impulsni odziv prilagođenog filtra za signal $x(t) = \frac{1}{\omega_0 t}\sin(\omega_0 t)$ ako je zadan spektar snage šuma $S_{NN}(\omega)$ prikazan slikom 4.2.. Može li dobiveni prilagođeni filtar biti kauzalan?

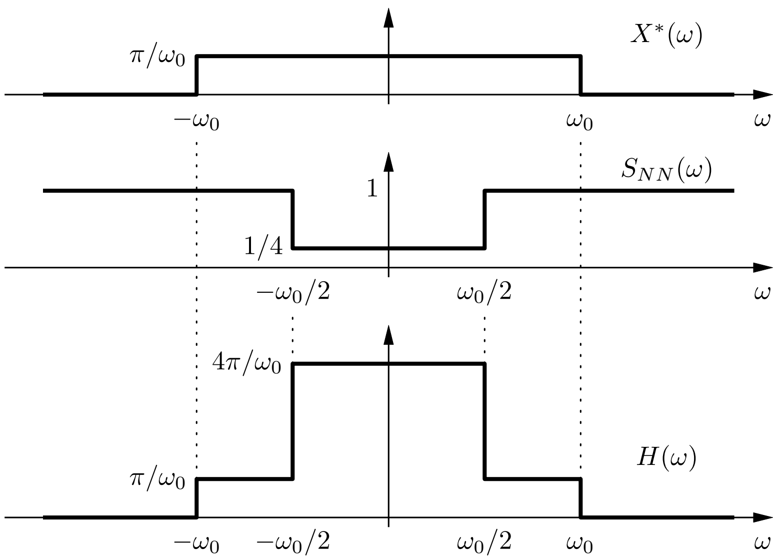
RJEŠENJE: Prijenosna funkcija prilagođenog filtra određena je s

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi C}\frac{X^*(\omega)}{S_{NN}(\omega)}e^{-j\omega t_0}.$$

Da bi odredili prijenosnu funkciju prilagođenog filtra najprije moramo odrediti Fouireriovu transformaciju zadanog signala $x(t)$. Vrijedi

$$\frac{1}{\omega_0 t}\sin(\omega_0 t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\pi}{\omega_0}\,\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{2\omega_0}\Big)$$

Prijenosnu funkciju u ovom slučaju najjednostavnije je odrediti grafički kako je prikazano na slici 4.3..




Slika 4.3.: Određivanje prijenosne funkcije prilagođenog filtra

Dobivenu prijenosnu funkciju napisati ćemo kao zbroj dviju rect funkcija,

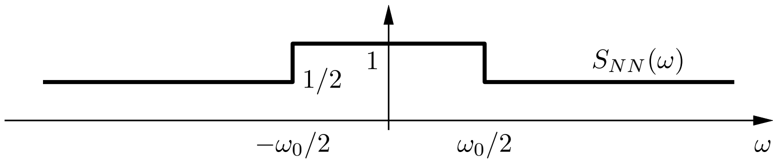
$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi C}\bigg(\frac{\pi}{\omega_0}\,\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{2\omega_0}\Big) + 3\frac{\pi}{\omega_0}\,\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{\omega_0}\Big)\bigg).$$

Sada još preostaje dodati proizvoljno kašnjenje te preslikati tako dobivenu funkciju u vremensku domenu. Dobivamo

$$h(t) = \frac{1}{2\pi C}\bigg(\frac{\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)}{\omega_0(t-t_0)} + \frac{3}{2}\frac{\sin\big(\omega_0/2(t-t_0)\big)}{\omega_0/2(t-t_0)}\bigg).$$

Kako ne postoji $t_0$ takav da odziv bude jednak nuli za $t$ manji od nule, dobiveni prilagođeni filtar ne može biti kauzalan.

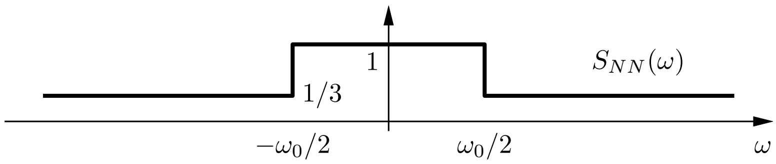
**Zadatak 4.1.** Odredite impulsni odziv prilagođenog filtra za signal $x(t) = \frac{1}{\omega_0 t}\sin(\omega_0 t)$ ako je zadan spektar snage šuma $S_{NN}(\omega)$ prikazan slikom 4.4.. Može li dobiveni prilagođeni filtar biti kauzalan?




Slika 4.4.: Spektar snage šuma

RJEŠENJE: $$h(t) = \frac{1}{2\pi C}\left(2\frac{\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)}{\omega_0(t-t_0)} - \frac{1}{2}\frac{\sin\big(\omega_0/2(t-t_0)\big)}{\omega_0/2(t-t_0)}\right)$$

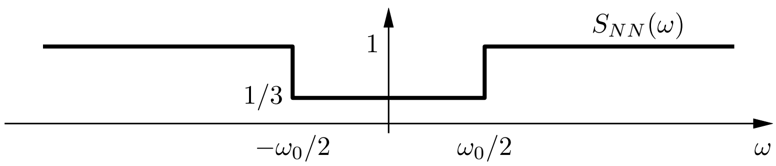
**Zadatak 4.2.** Odredite impulsni odziv prilagođenog filtra za signal $x(t) = \frac{1}{\omega_0 t}\sin(\omega_0 t)$ ako je zadan spektar snage šuma $S_{NN}(\omega)$ prikazan slikom 4.5.. Može li dobiveni prilagođeni filtar biti kauzalan?




Slika 4.5.: Spektar snage šuma

RJEŠENJE: $$h(t) = \frac{1}{2\pi C}\left(3\frac{\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)}{\omega_0(t-t_0)} - \frac{\sin\big(\omega_0/2(t-t_0)\big)}{\omega_0/2(t-t_0)}\right)$$

**Zadatak 4.3.** Odredite impulsni odziv prilagođenog filtra za signal $x(t) = \frac{1}{\omega_0 t}\sin(\omega_0 t)$ ako je zadan spektar snage šuma $S_{NN}(\omega)$ prikazan slikom 4.6.. Može li dobiveni prilagođeni filtar biti kauzalan?



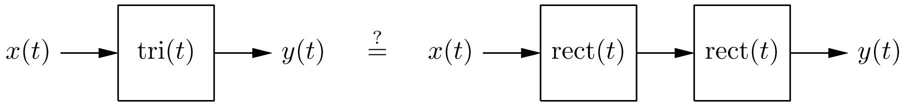

Slika 4.6.: Spektar snage šuma

RJEŠENJE: $$h(t) = \frac{1}{2\pi C}\left(\frac{\sin\big(\omega_0(t-t_0)\big)}{\omega_0(t-t_0)} + \frac{\sin\big(\omega_0/2(t-t_0)\big)}{\omega_0/2(t-t_0)}\right)$$

**Primjer 4.3.** Mali Ivica i zločesti Perica sjeli su u komunikacijsko vozilo HV-a i otišli u izviđanje. No zločesti Perica je prolio kavu preko uređaja koji sadrži prilagođene filtre impulsnih odziva $h_T(t) = \mathrm{tri}(t-1)$ i tako ugrozio izviđanje. No kako je u vozilu bilo puno prilagođenih filtara za razne namjene mali Ivica se dosjetio jadu te je spojio dva prilagođena filtra impulsnih odziva $h_R(t) = \mathrm{rect}(t-\frac{1}{2})$ u kaskadu te tako popravio komunikacijski uređaj. Pokažite ispravnost takvog rješenja!

RJEŠENJE: Moramo ispitati vrijedi li zamjena kako je prikazano na slici 4.7..
Prisjetimo se prvo kako izgledaju zadani impulsni odzivi:

$$h_T(t) = \mathrm{tri}(t-1) = \begin{cases} 1-|t-1|, & 0<t<2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

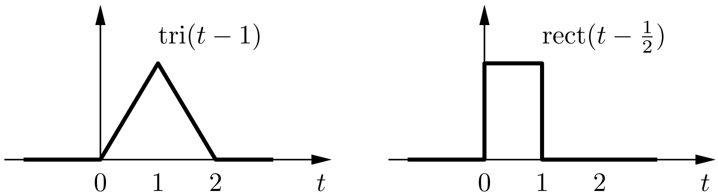



Slika 4.7.: Ekvivalentni sustavi

i

$$h_R(t) = \mathrm{rect}\Big(t - \frac{1}{2}\Big) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Signali su prikazani na slici 4.8.. Primijetite da su oba signala kauzalna (kao što i trebaju biti za stvarne prilagođene filtre).




Slika 4.8.: Konačni impulsi $h_T(t) = \mathrm{tri}(t-1)$ i $h_R(t) = \mathrm{rect}(t - \frac{1}{2})$

Trebamo samo pokazati da vrijedi

$$h_T(t) = h_R(t) * h_R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(\tau) h_R(t-\tau)\, d\tau.$$

Moramo razlikovati dva slučaja. Za $t \in \langle 0, 1\rangle$ dobivamo

$$\begin{aligned} h_R(t) * h_R(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(\tau) h_R(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{rect}(\tau - \frac{1}{2})\,\mathrm{rect}(t - \tau - \frac{1}{2})\, d\tau = \tau\Big|_0^t = t, \end{aligned}$$

dok je za $t \in [1, 2\rangle$

$$\begin{aligned} h_R(t) * h_R(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_R(\tau) h_R(t-\tau)\, d\tau \\ &= \int_{t-1}^1 \mathrm{rect}(\tau - \frac{1}{2})\,\mathrm{rect}(t - \tau - \frac{1}{2})\, d\tau = \tau\Big|_{t-1}^1 = 2 - t. \end{aligned}$$

Za $t \notin \langle 0, 2\rangle$ je $h_R(t) * h_R(t) = 0$. Dakle konvolucijom dobivamo

$$h_R(t) * h_R(t) = \begin{cases} t = 1 - |t-1|, & 0 < t < 1 \\ 2 - t = 1 - |t-1|, & 1 \le t < 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

što nam odgovara upravo traženom impulsnom odzivu $h_T(t) = \mathrm{tri}(t-1)$.

**Primjer 4.4.** Odredite impulsni odziv i prijenosnu funkciju prilagođenog filtra za signal

$$x(t) = \sin(4\pi t)\,\mathrm{rect}(t-2)$$

uz $S_{NN}(\omega) = 1$. Skicirajte impulsni odziv prilagođenog filtra. Može li dobiveni filtar biti kauzalan?

Rješenje: Kako se radi o prilagođenom filtru za slučaj aditivnog bijelog šuma prijenosna funkcija filtra je određena izrazom (4.2) što odgovara inverziji u vremenskoj domeni. Impulsni odziv je stoga

$$h(t) = -k \sin\big(4\pi(t - t_0)\big)\,\mathrm{rect}(t - t_0 + 2),$$

gdje je $k$ realna konstanta. Impulsni odziv prilagođenog filtra prikazan je na slici 4.9. za pomak $t_0 = 0$. Odaberemo li pomak $t_0 \geq 5/2$ dobivamo kauzalni filtar. Da bi odredili prijenosnu funkciju potrebno je izračunati Fourireovu transformaciju zadanog signala:

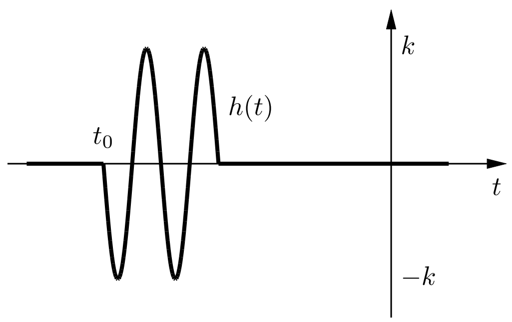
$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[\sin(4\pi t)\,\mathrm{rect}(t-2)\big] &= \mathcal{F}\Big[\frac{e^{4\pi jt} - e^{-4\pi jt}}{2j}\,\mathrm{rect}(t-2)\Big] \\ &= \frac{1}{2j}\mathcal{F}\big[e^{4\pi jt}\,\mathrm{rect}(t-2)\big] - \frac{1}{2j}\mathcal{F}\big[e^{-4\pi jt}\,\mathrm{rect}(t-2)\big]\end{aligned}$$

Korištenjem teorema o pomaku dobivamo

$$X(\omega) = \frac{1}{2j}\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega - 4\pi}{2\pi}\Big)e^{-2j(\omega-4\pi)} - \frac{1}{2j}\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega + 4\pi}{2\pi}\Big)e^{-2j(\omega+4\pi)}.$$

Prijenosna funkcija prilagođenog filtra je sada

$$H(\omega) = ke^{j\omega(2-t_0)}\bigg(-\frac{1}{2j}\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega - 4\pi}{2\pi}\Big) + \frac{1}{2j}\,\mathrm{sinc}\Big(\frac{\omega + 4\pi}{2\pi}\Big)\bigg).$$




Slika 4.9.: Impulsni odziv prilagođenog filtra

**Primjer 4.5.** Odredite impulsni odziv i prijenosnu funkciju prilagođenog filtra za signal

$$x(t) = \cos(\pi t)\cos(20\pi t)\,\mathrm{rect}(t-2)$$

uz $S_{NN}(\omega) = 1$. Skicirajte impulsni odziv prilagođenog filtra. Može li dobiveni filtar biti kauzalan?

RJEŠENJE: Kako se radi o prilagođenom filtru za slučaj aditivnog bijelog šuma prijenosna funkcija filtra je određena izrazom (4.2) što odgovara inverziji u vremenskoj domeni. Impulsni odziv je stoga

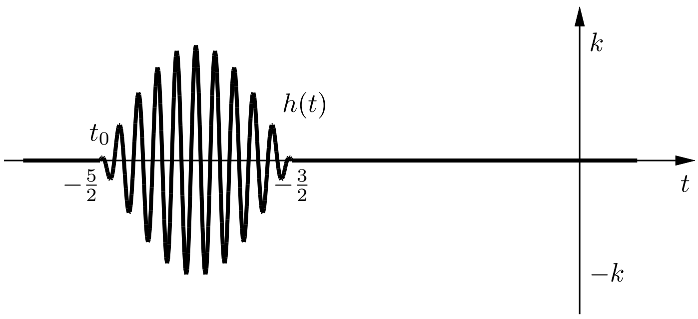
$$h(t) = k\cos\big(\pi(t-t_0)\big)\cos\big(20\pi(t-t_0)\big)\,\mathrm{rect}(t - t_0 + 2),$$

gdje je $k$ realna konstanta. Impulsni odziv prilagođenog filtra prikazan je na slici 4.10. za pomak $t_0 = 0$. Odaberemo li pomak $t_0 \geq 5/2$ dobivamo kauzalni filtar. Da bi odredili prijenosnu funkciju potrebno je izračunati Fourireovu transformaciju zadanog signala:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big[x(t)\big] &= \mathcal{F}\big[\cos(\pi t)\cos(20\pi t)\,\mathrm{rect}(t-2)\big] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\big[\cos(21\pi t)\,\mathrm{rect}(t-2)\big] + \frac{1}{2}\mathcal{F}\big[\cos(19\pi t)\,\mathrm{rect}(t-2)\big] \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{F}\big[e^{21\pi jt}\,\mathrm{rect}(t-2)\big] + \frac{1}{4}\mathcal{F}\big[e^{-21\pi jt}\,\mathrm{rect}(t-2)\big] \\ &\quad \frac{1}{4}\mathcal{F}\big[e^{19\pi jt}\,\mathrm{rect}(t-2)\big] + \frac{1}{4}\mathcal{F}\big[e^{-19\pi jt}\,\mathrm{rect}(t-2)\big]\end{aligned}$$

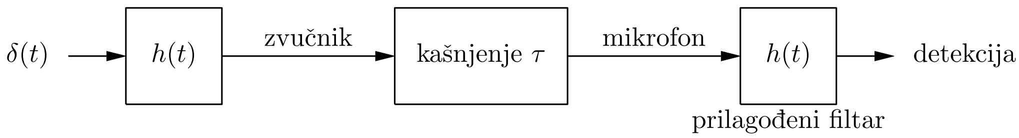
Naposlijetku za prijenosnu funkciju dobivamo

$$
\begin{aligned}
H(\omega) = \frac{k}{4} e^{-j\omega t_0 - 2j\omega} \Bigg( & \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega + 21\pi}{2\pi}\Big) + \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega - 21\pi}{2\pi}\Big) + \\
& \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega + 19\pi}{2\pi}\Big) + \operatorname{sinc}\Big(\frac{\omega - 19\pi}{2\pi}\Big)\Bigg).
\end{aligned}
$$




Slika 4.10.: Impulsni odziv prilagođenog filtra

**Primjer 4.6.** Definiraj prijenosnu funkciju i impulsni odziv prilagođenog filtra za realni signal u bijelom šumu. Pretpostavite da u nekom SONAR-u imamo linearan vremenski nepromijenjiv (LTI) sustav kojeg pobuđujemo u pravilnim razmacima s ciljem pobuđivanja zvučnika. Neka je impulsni odziv LTI sustava $h(t) = \sin(\omega t)\operatorname{rect}(\frac{\omega}{10\pi}t - \frac{1}{2})$. Možemo li isti sustav koji koristimo za kreiranje pobudnih impulsa koristiti i kao prilagođeni filtar? Za kakve impulsne odzive to vrijedi? Pokaži da to vrijedi za zadani impulsni odziv!




Slika 4.11.: Jednostavni sustav za detekciju impulsa

Rješenje: Definirajmo najprije prilagođeni filtar. Prijenosna funkcija prilagođenog filtra za slučaj bijelog šuma (spektralna gustoća snage je konstanta, dakle $S_{NN}(\omega) = N_0$) je

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi C}\frac{X^*(\omega)}{S_{NN}(\omega)}e^{-j\omega t_0} = KX^*(\omega)e^{-j\omega t_0}, \tag{4.3}$$

gdje je $K \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta (određuje pojačanje), a $t_0 \in \mathbb{R}$ proizvoljan vremenski pomak. Impulsni odziv prilagođenog filtra je

$$h(t) = -Kx(-t + t_0).$$

Kada možemo isti LTI sustav koristiti za sintezu pobudnog impulsa i za detekciju? Očito mora biti

$$h(t) = x(t) = -Kx(-t + t_0),$$

odnosno ako postoje konstante $K$ i $t_0$ takve da možemo zrcaljeni signal $x(-t)$ preklopiti sa izvornim signalom $x(t)$ možemo isti sustav upotrijebiti i za stvaranje pobude i za detekciju pobude. Štoviše, jedine vrijednost parametra $K$ koje imaju smisla su 1 i $-1$ tako da zahtijevamo da vrijedi

$$x(t) = -x(-t + t_0) \quad \text{ili} \quad x(t) = x(-t + t_0).$$

Vrijedi li to za zadani impulsni odziv? Prisjetimo se da je rect($t$) jedinični impuls jediničnog trajana s centrom u ishodištu, odnosno vrijedi

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

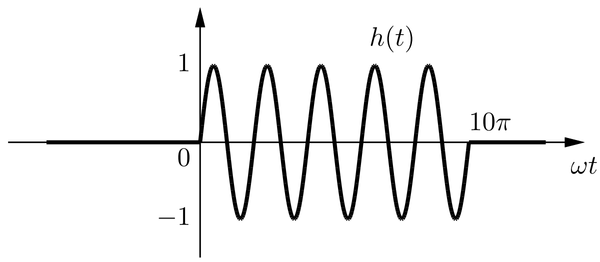
Zadani impulsni odziv je

$$h(t) = \sin(\omega t)\,\mathrm{rect}\Big(\frac{\omega}{10\pi}t - \frac{1}{2}\Big),$$

odnosno odabrali smo konačan broj perioda sinusnog signala, i to između vrijednosti

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{10\pi}t - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \omega t = 0 \\ \frac{\omega}{10\pi}t - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad \omega t = 10\pi \end{aligned}$$

kako je prikazano na slici 4.12.. Iz slike odmah možemo uočiti da za $K = -1$ i $t_0 = -10\pi$ dobivamo preklapanje signala, što znači da je odgovor na pitanje u zadatku potvrdan. Pomak $\tau$ nema utjecaja na rješenje.




Slika 4.12.: Zadani impulsni odziv $h(t)$

### 4.1.1. Kauzalni prilagođeni filtar

Opisani prilagođeni filtar je izveden uz zanemarivanje zahtijeva da bude izvediv, odnosno kauzalan. Prijenosna funkcija nekauzalnog filtra je dana izrazom (4.1):

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi C}\frac{X^*(\omega)}{S_{NN}(\omega)}e^{-j\omega t_0}.$$

Koristimo li prilagođeni filtar za impulse konačnog trajanja konjugirani spektar signala $X^*(\omega)$ nam neće predstavljati poseban problem (uvijek je izvediv uz odgovarajući pomak). No predstavlja li nam spektralna gustoća snage $S_{NN}$ problem?

Ako ne pretpostavimo bijeli šum spektralna gustoća snage $S_{NN}(\omega)$ općenito ne mora odgovarati nekom kauzalnom sustavu—prisjetite se da je moguće $S_{NN}(\omega)$ rastaviti na sličan način kao i prijenosnu funkciju drugog reda,

$$S_{NN}(\omega) = S_{NN,L}(\omega)S_{NN,R}(\omega) = S_{NN,L}(\omega)S^*_{NN,L}(\omega).$$

Pri tome je $S_{NN,L}(\omega)$ odgovara kauzalnom dijelu, a $S_{NN,R}(\omega) = S^*_{NN,L}(\omega)$ antikauzalnom dijelu. U Laplaceovoj domeni prijenosna funkcija prilagođenog filtra (4.1) postaje

$$H(s) = \frac{1}{2\pi C}\frac{X(-s)}{S_{NN}(s)}e^{-st_0} = \frac{1}{2\pi C}\frac{X(-s)}{S_{NN,L}(s)S_{NN,L}(-s)}e^{-st_0}.$$

Rastav $S_{NN}(s)$ je generalno takav da $S_{NN,L}(s)$ ima polove u lijevoj poluravnini kompleksne $s$-ravnine (zahtijevamo kauzalnost), a $S_{NN,L}(-s) = S_{NN,R}(s)$ u desnoj poluravnini. Također primijetite da se za $S_{NN}(s)$ polovi pojavljuju kao kompleksno-konjugirani parovi te da imamo simetrije i oko realne i oko imaginarne osi.

Sada rastav prijenosne funkcije pišemo kao

$$H(s) = \frac{1}{2\pi C}\frac{1}{S_{NN,L}(s)}\frac{X(-s)}{S_{NN,L}(-s)}e^{-st_0} = \frac{1}{2\pi C}H_1(s)H_2(s),$$

gdje je

$$H_1(s) = \frac{1}{S_{NN,L}(s)} \quad \text{i} \quad H_2(s) = \frac{X(-s)}{S_{NN,L}(-s)}e^{-st_0}.$$

Filtar $H_1(s)$ je trivijalno izvediv (kauzalan je), dok filtar $H_2(s)$ generalno nije. Jedna mogućnost izvedbe filtra $H_2(s)$ se dobiva množenjem pripadnog impulsnog odziva $h_2(t)$ sa jediničim skokom $\mathrm{s}(t)$ čime filtar postaje kauzalan, dakle

$$H_{2C}(s) = \int_0^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{X(-s)}{S_{NN,L}(-s)}\Big]e^{-s(t+t_0)}\,dt.$$

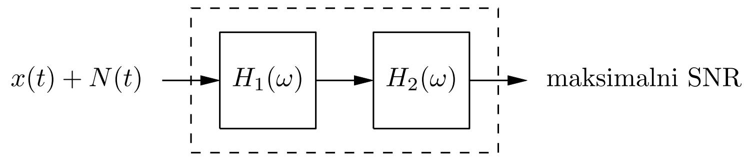
Prijenosna funkcija tako modificiranog prilagođenog filtra postaje

$$H_C(s) = \frac{1}{2\pi C}\frac{1}{S_{NN,L}(s)}\int_0^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{X(-s)}{S_{NN,L}(-s)}\Big]e^{-s(t-t_0)}\,dt.$$

Ovakvo rješenje se temelji na izbjeljivanju šuma (eng. *prewhitening*) jer nam problem prilikom realzacije prilagođenog filtra stvara upravo prisutan šum:

1. Prvi filtar u kaskadi s prijenosnom funkcijom $H_1(s)$ izbjeljuje šum (odnosno pretvara ga u bijeli šum), no on također utječe na signal kojeg želimo detektirati (no ipak znamo kako se signal promijeni).
2. Drugi filtar s prijenosnom funkcijom $H_{2C}(s)$ zapravo opet odgovara prilagođenom filtru, no u ovom slučaju je prilagođen na signal koji dobivamo propuštanjem signala $x(t)$ kroz $H_1(s)$.

Dobiveni rastav prilagođenog filtra je prikazan na slici 4.13..




$$H(\omega) = H_1(\omega)H_2(\omega)$$

$$H_1(\omega) = \frac{1}{S_{NN,L}(\omega)}$$

$$H_2(\omega) = \int_0^{+\infty}\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{X^*(\omega)}{S^*_{NN,L}(\omega)}e^{j\omega(t-t_0)}\,d\omega\Big)e^{-j\omega t}\,dt$$

Slika 4.13.: Kauzalni prilagođeni filtar

**Zadatak 4.4.** Za filtar dobiven u prvom zadatku odredite pripadni kauzalni prilagođeni filtar. Usporedite dobiveno rješenje s aproksimacijom koju smo komentirali u prvom zadatku! Kako se riješenje mijenja ako umjesto zadanog signala

$$x(t) = \big(e^{-\omega_0 t} - e^{-\alpha\omega_0 t}\big)\,\mathrm{s}(t)$$

uzmemo signal konačnog trajanja

$$x_T(t) = \big(e^{-\omega_0 t} - e^{-\alpha\omega_0 t}\big)\big(\mathrm{s}(t) - \mathrm{s}(t-T)\big)?$$

# 4.2. Wienerov filtar

Wienerov filtar daje najbolju ocjenu ulaznog procesa $X(t)$ u prisustvu *aditivnog* šuma $N(t)$ u smislu očekivane kvadratne pogreške od svih linearnih vremenski *nepromjenjivih* sustava. I signal $X(t)$ i šum $N(t)$ su stacionarni u širem smislu. Ako je ulazni proces

$$W(t) = X(t) + N(t),$$

prijenosna funkcija Wienerovog filtra je

$$H(\omega) = \frac{S_{WX}(\omega)}{S_{WW}(\omega)} e^{j\omega t_0}. \tag{4.4}$$

Ako su proces $X(t)$ i aditivni šum $N(t)$ nekorelirani prijenosna funkcija (4.4) postaje

$$H(\omega) = \frac{S_{XX}}{S_{XX} + S_{NN}} e^{j\omega t_0}. \tag{4.5}$$

Očekivana kvadratna pogreška estimacije procesa $X(t)$ u tom slučaju je

$$P_\epsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{XX} S_{NN}}{S_{XX} + S_{NN}} \, d\omega. \tag{4.6}$$

Navedeni izrazi definiraju Wienerov filtar bez ograničenja izvedivosti (ne zahtijevamo kauzalnost).

**Primjer 4.7.** Razmotrite Wienerov filtar koji je opisan prijenosnom funkcijom

$$H(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}.$$

a) U kojem smislu je Wienerov filtar optimalan?

b) Koji uvjete moraju zadovoljiti signal $X(t)$ i šum $N(t)$ da bi navedena prijenosa funkcija bila funkcija optimalnog Wienerovog filtra?

c) Diskutirajte danu amplitudnu karakteristiku za slučaj jakog šuma i slučaj jakog signala.

Rješenje: Wienerov filtar je optimalan u smislu da daje najbolju, i to u smislu srednje kvadratne pogreške, procjenu $\hat{X}(t)$ signala $X(t)$ na temelju poznate aditivne kombinacije $X(t) + N(t)$ od svih linearnih vremenski nepromijenjivih sustava[1]. Navedena prijenosna funkcija

$$H(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}.$$

je izvedena uz pretpostavku da signal $X(t)$ i aditivni šum $N(t)$ nisu korelirani. Uz nekoreliranost još zahtijevamo da su $X(t)$ i $N(t)$ stacionarni u širem smislu.

Amplitudna karakteristika filtra je

$$\left|H(\omega)\right| = \left|\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)}\right|.$$

Za slučaj jakog signala je $S_{XX}(\omega) \gg S_{NN}(\omega)$ te je

$$\left|H(\omega)\right| = \left|\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)}\right| \approx \left|\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)}\right| = 1,$$

[1] Može dakle postojati vremenski promijenjiv ili nelinearan sustav koji daje bolju procjenu u smislu najmanjeg kvadratnog odstupanja.

odnosno filtar propušta skoro sve. Za slučaj jakog šuma je $S_{NN}(\omega) \gg S_{XX}(\omega)$ te je

$$\big|H(\omega)\big| = \Big|\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega)+S_{NN}(\omega)}\Big| \approx \Big|\frac{S_{XX}(\omega)}{S_{NN}(\omega)}\Big|.$$

Vidimo da će sada filtar najbolje propuštati one frekvencije koje su dominantne u spektralnoj gustoći signala (možemo reći da je pojas propuštanja određen pojasom signala).

**Primjer 4.8.** Slučajni proces $X(t)$ i nekorelirani bijeli šum $N(t)$ imaju autokorelacijske funkcije

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\alpha\omega_0}{2} e^{-\omega_0|\tau|} \quad \text{i} \quad R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau),$$

gdje su $\alpha$, $\omega_0$ i $N_0$ pozitivne realne konstante. Odredite prijenosnu funkciju i impulsni odziv Wienerovog filtra.

Rješenje: Kako signal i šum nisu korelirani koristimo izraz (4.5) za određivanje prijenosne funkcije. Najprije korištenjem Wiener-Khinchinovih relacija (1.22) određujemo potrebne gustoće spektra snage:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{\alpha\omega_0}{2} e^{-\omega_0|\tau|} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{XX}(\omega) = \frac{\alpha\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}$$

$$R_{NN}(\tau) = \frac{N_0}{2}\delta(\tau) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S_{NN}(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

Prijenosna funkcija Wienerovog filtra je

$$H(\omega) = \frac{S_{XX}}{S_{XX}+S_{NN}} e^{j\omega t_0} = \frac{\alpha\omega_0^2}{\alpha\omega_0^2 + N_0/2(\omega_0^2+\omega^2)} e^{j\omega t_0},$$

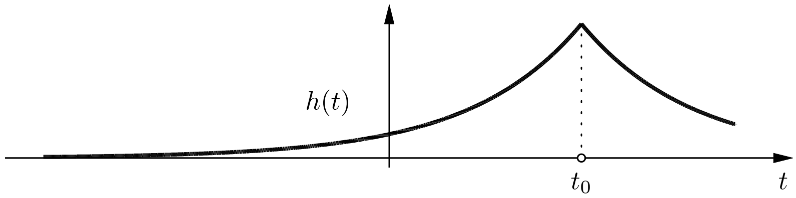
što možemo zapisati kao

$$H(\omega) = \frac{\alpha\omega_0}{N_0\sqrt{\dfrac{2\alpha}{N_0}+1}} \frac{2\omega_0\sqrt{\dfrac{2\alpha}{N_0}+1}}{\omega_0^2\Big(\dfrac{2\alpha}{N_0}+1\Big)+\omega^2} e^{j\omega t_0}.$$

Inverznom Fourierovom transformacijom dobivamo impulsni odziv

$$h(t) = \frac{\alpha\omega_0}{N_0\sqrt{\dfrac{2\alpha}{N_0}+1}} \exp\Big(-\omega_0|t+t_0|\sqrt{\frac{2\alpha}{N_0}+1}\Big).$$

Impulsni odziv je prikazan na slici 4.14.. Vidimo da ne postoji takav pomak $t_0$ za koji bi impulsni odziv postao kauzalan. No odziv možemo aproksimirati te dobiti kauzalni filtar ako odaberemo dovoljno veliki negativni pomak $t_0$ jer u tom slučaju $h(t)$ gotovo jednak nuli za $t < 0$.




Slika 4.14.: Impulsni odziv Wienerovog filtra

**Primjer 4.9.** Odredite očekivanu kvadratnu pogrešku za primjer iz prethodnog zadatka.

RJEŠENJE: Očekivanu srednju kvadratnu pogrešku računamo prema (4.6). Gustoće spektra snage procesa i šuma su

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\alpha\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \quad \text{i} \quad S_{NN}(\omega) = \frac{N_0}{2},$$

pa je očekivana kvadratna pogreška

$$\begin{aligned} P_\epsilon &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{N_0}{2}\frac{\alpha\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}}{\frac{N_0}{2} + \frac{\alpha\omega_0^2}{\omega_0^2+\omega^2}}\, d\omega = \frac{\alpha\omega_0^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\left(\frac{2\alpha}{N_0}+1\right)\omega_0^2 + \omega^2} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha\omega_0}{\sqrt{\frac{2\alpha}{N_0}+1}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0\sqrt{\frac{2\alpha}{N_0}+1}}\right)\Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\alpha\omega_0}{\sqrt{\frac{2\alpha}{N_0}+1}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\alpha\omega_0}{2\sqrt{\frac{2\alpha}{N_0}+1}}. \end{aligned}$$

**Primjer 4.10.** Nekorelirani signal i šum imaju statističke autokorelacijske funkcije:

$$R_{XX}(\tau) = \frac{1}{3}e^{-3|\tau|} \quad \text{i} \quad R_{NN}(\tau) = \frac{1}{5}e^{-5|\tau|}.$$

a) Odredite prijenosnu funkciju $H(\omega)$ Wienerovog filtra.

b) Skicirajte impulsni odziv $h(t)$ Winenerovog filtra. Da li je filtar kauzalan za neki $t_0$?

c) Odredite očekivanu kvadratnu pogrešku.

RJEŠENJE: Prijenosna funkcija Wienerovog filtra je određena s

$$H(\omega) = \frac{S_{XX}}{S_{XX} + S_{NN}} e^{j\omega t_0}.$$

Kako su zadane statističke autokorelacijske funkcije a za određivanje prijenosne funkcije su potrebni spektri snage, koristimo Wiener-Khinchinove relacije,

$$\begin{aligned} S_{XX}(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{3}e^{-3|\tau|}\right] = \frac{2}{\omega^2+9} \\ S_{NN}(\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{5}e^{-5|\tau|}\right] = \frac{2}{\omega^2+25} \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobivenih spektara u izraz za prijenosnu funkciju Wienerovog filtra dobivamo

$$H(\omega) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2+25}{\omega^2+17}e^{j\omega t_0}.$$

Sada računamo impulsni odziv inverznom Fourierovom transformacijom,

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\omega^2+17}\right)e^{j\omega t_0}\right] = \frac{1}{2}\delta(t-t_0) + \frac{2}{\sqrt{17}}e^{-\sqrt{17}|t-t_0|}.$$

Mijenjanjem parametra $t_0$ pomičemo odziv uzduž vremenske osi. Za kauzalan odziv se zahtijeva da je odziv jednak nuli za svaki trenutak $t$ manji od nule, no kako za bilo koji odabrani pomak $t_0$ ne vrijedi taj uvijet dobiveni filtar ne može biti kauzalan.

Očekivana pogreška je

$$P_\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{XX}S_{NN}}{S_{XX}+S_{NN}}\, d\omega,$$

odnosno

$$P_\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)e^{-j\omega t_0} S_{NN}\, d\omega.$$

Uvrštavanjem dobivamo

$$P_\epsilon = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\omega^2+25}{\omega^2+17}\frac{2}{\omega^2+25}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2+17}\, d\omega = \frac{1}{2\sqrt{17}}$$

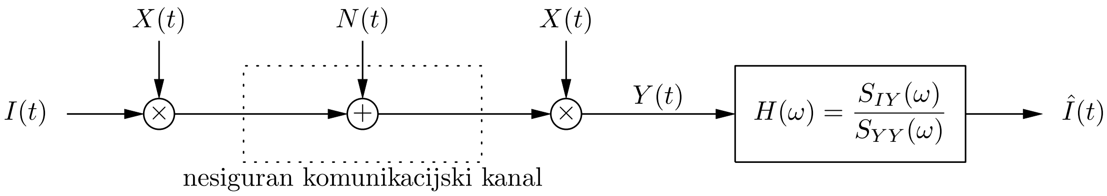
**Zadatak 4.5.** Spektar snage šuma i prijenosna funkcija Wienerovog filtra su

$$S_{NN}(\omega) = \frac{2}{2+\omega^2} \quad \text{i} \quad H(\omega) = \frac{2+\omega^2}{4+3\omega^2}e^{j\omega t_0}.$$

Odredi minimalnu kvadratnu pogrešku predikcije ako su slučajni signal i šum nekorelirani.

RJEŠENJE: Kvadratna pogreška predikcije je $P_\epsilon = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

**Primjer 4.11.** Zločesti Perica se ušuljao na ZESOI s ciljem otkrivanja netom pripremljenih ispita iz SPUS-a. On mora komunicirati s malim Ivicom na način da profesori ne zamijete komunikaciju, a da ona ipak bude uspješna. Mali Ivica je zamislio komunikacijski sustav prikazan slikom u kojem se poruka $I(t)$ množi s tajnim slučajnim signalom $X(t)$. Mali Ivica želi najbolji mogući filtar $H(\omega)$ tako da komunikacija bude uspješna.




Slika 4.15.: Komunikacijski sustav

Neka su $I(t)$ i $X(t)$ nezavisni slučajni telegrafski signali stacionarni u širem smislu očekivanja nula i autokorelacijskih funkcija $R_{II}(\tau) = I_0 e^{-2\lambda_I|\tau|}$ i $R_{XX}(\tau) = e^{-2\lambda_X|\tau|}$, uz $I_0, \lambda_I, \lambda_X \in \mathbb{R}$. Neka je $N(t)$ bijeli šum srednje vrijednosti nula i autokorelacijske funckije $R_{NN} = N_0\delta(\tau)$, $N_0 \in \mathbb{R}$. Ako je prijenosna funkcija filtra

$$H(\omega) = \frac{S_{IY}(\omega)}{S_{YY}(\omega)}$$

odredite očekivanu kvadratnu pogrešku

$$E\big[(I(t)-\hat{I}(t))^2\big].$$

Pokaži da dobivena pogreška ne ovisi o $\lambda_X$ (odnosno da možemo slobodno odabrati $\lambda_X$ i to tako da sakrijemo signal bez utjecanja na pogrešku)!

Napomena: Slučajni telegrafski signal $X(t)$ aplitude $a$ ima autokorelacijsku funkciju $a^2e^{-2\lambda|\tau|}$. Iako $X(t)$ poprima vrijednosti $a$ ili $-a$ primijetite da je uvijek $X^2(t) = a^2$, odnosno dobivamo deterministički signal.

RJEŠENJE: Moramo odrediti srednju kvadratnu pogrešku određenu izrazom $E\big[(I(t) - \hat{I}(t))^2\big]$. Dobivamo

$$\begin{aligned}E\big[(I(t) - \hat{I}(t))^2\big] &= E\big[I^2(t) - 2I(t)\hat{I}(t) + \hat{I}^2(t)\big] \\ &= E\big[I^2(t)\big] - 2E\big[I(t)\hat{I}(t)\big] + E\big[\hat{I}^2(t)\big] \\ &= R_{II}(0) - 2R_{\hat{I}I}(0) + R_{\hat{I}\hat{I}}(0),\end{aligned}$$

odnosno moramo odrediti autokorelacijske funkcije signala $I(t)$ i $\hat{I}(t)$. Autokorelacijska funckija signala $I(t)$ je $R_{II}(\tau) = I_0e^{-2\lambda_I|\tau|}$ te još preostaje računanje autokorelacijske funkcije signala $\hat{I}(t)$. Kako je $\hat{I}(t) = Y(t) * h(t)$ očekujemo da nam za $R_{\hat{I}\hat{I}}(\tau)$ treba i prijenosna funkcija ili impulsni odziv filtra.

Odredimo stoga prijenosnu funkciju $H(\omega)$. Signal $Y(t)$ je prema slici 4.15. određen izrazom

$$Y(t) = \big(I(t)X(t) + N(t)\big)X(t) = I(t)X^2(t) + N(t)X(t) = I(t) + N(t)X(t),$$

jer je $X^2(t) = 1$ (kvadrat slučajnog telegrafskog signala je konstanta). Autokorelacijska funkcija signala $Y(t)$ je

$$\begin{aligned}R_{YY}(t, t+\tau) &= E\big[\big(I(t) + N(t)X(t)\big)\big(I(t+\tau) + N(t+\tau)X(t+\tau)\big)\big] \\ &= E\big[I(t)I(t+\tau)\big] + E\big[N(t)\big]E\big[X(t)\big]E\big[I(t+\tau)\big] \\ &+ E\big[I(t)\big]E\big[N(t+\tau)\big]E\big[X(t+\tau)\big] + E\big[N(t)N(t+\tau)\big]E\big[X(t)X(t+\tau)\big] \\ &= R_{II}(\tau) + R_{NN}(\tau)R_{XX}(\tau) = I_0e^{-2\lambda_I|\tau|} + N_0\delta(\tau)e^{-2\lambda_X|\tau|},\end{aligned}$$

dok je kroskorelacijska funkcija između signala $I(t)$ i $Y(t)$

$$R_{IY}(t, t+\tau) = E\big[I(t)\big(I(t+\tau) + N(t+\tau)X(t+\tau)\big)\big] = R_{II}(\tau).$$

Sada su spektralne gustoće snage

$$S_{YY}(\omega) = \mathcal{F}\big[I_0e^{-2\lambda_I|\tau|} + N_0\delta(\tau)e^{-2\lambda_X|\tau|}\big] = I_0\frac{4\lambda_I}{4\lambda_I^2 + \omega^2} + N_0 = S_{II}(\omega) + N_0$$

i

$$S_{IY}(\omega) = \mathcal{F}\big[I_0e^{-2\lambda_I|\tau|}\big] = I_0\frac{4\lambda_I}{4\lambda_I^2 + \omega^2} = S_{II}(\omega),$$

pa je prijenosna funkcija sustava

$$H(\omega) = \frac{S_{IY}(\omega)}{S_{YY}(\omega)} = \frac{S_{II}(\omega)}{S_{II}(\omega) + N_0} = \frac{4\lambda_I I_0}{4\lambda_I(I_0 + \lambda_I N_0) + N_0\omega^2}.$$

Raspišimo sada izraz za očekivanu kvadratnu pogrešku. Primijetite da je $\hat{I}(t) = Y(t) * h(t)$ pa $R_{\hat{I}I}(0)$ možemo izraziti preko $R_{IY}(\tau)$, odnosno preko $S_{IY}(\omega)$. Zbog jednostavnosti raditi ćemo u frekvencijskoj domeni, dakle koristimo $S_{\hat{I}I}(\omega) = S_{IY}(\omega)H^*(\omega)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}E\big[(I(t) - \hat{I}(t))^2\big] &= R_{II}(0) - 2R_{\hat{I}I}(0) + R_{\hat{I}\hat{I}}(0) \\ &= R_{II}(0) - 2\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H^*(\omega)S_{IY}(\omega)\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\big|H(\omega)\big|^2 S_{YY}(\omega)\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(S_{II}(\omega) - 2\frac{S_{IY}^*(\omega)}{S_{YY}(\omega)}S_{IY}(\omega) + \frac{S_{IY}(\omega)S_{IY}^*(\omega)}{S_{YY}^2(\omega)}S_{YY}(\omega)\Big)\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(S_{II}(\omega) - \frac{S_{IY}(\omega)S_{IY}^*(\omega)}{S_{YY}(\omega)}\Big)\,d\omega.\end{aligned}$$

Kako je $S_{IY}(\omega) = S_{II}(\omega)$ i $S_{YY} = S_{II}(\omega) + N_0$ za očekivanu kvadratnu pogrešku dobivamo

$$
\begin{aligned}
E\big[(I(t) - \hat{I}(t))^2\big] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{II}(\omega)N_0}{S_{II}(\omega) + N_0}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\lambda_I N_0 I_0}{4\lambda_I(I_0 + \lambda_I N_0) + N_0\omega^2}\, d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{4\lambda_I N_0 I_0}{\sqrt{4\lambda_I N_0(I_0 + \lambda_I N_0)}}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\Big) \\
&= \frac{\lambda_I N_0 I_0}{\sqrt{4\lambda_I N_0 I_0 + \lambda_I^2 N_0^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + \dfrac{I_0}{\lambda_I N_0}}}.
\end{aligned}
$$

Vidimo da izraz za očkivanu kvadratnu pogrešku ne ovisi o parametru $\lambda_X$, dakle prvo odabiremo $I_0$ (koji odgovara kvadratu amplitude signala $I(t)$) takav da smanjimo pogrešku na prihvatljivu razinu, a zatim odaberemo $\lambda_X$ takav da sakrije signal.

### 4.2.1. Kauzalni Wienerov filtar

Kao i za kauzalni prilagođeni filtar problem prilikom realizacije Wienerovog filtra nam predstavljaju spektralne gustoće snage. Potrebno je spektralnu gustoću snage $S_{WW}(\omega)$ rastaviti na kauzalni i antikauzalni dio. Prijenosna funkcija Wienerovog filtra dana izrazom (4.4) tada postaje

$$
H(\omega) = \frac{S_{WX}(\omega)}{S_{WW}(\omega)}e^{j\omega t_0} = \frac{1}{S_{WW,L}(\omega)}\frac{S_{WX}(\omega)}{S^*_{WW,L}(\omega)}e^{j\omega t_0},
$$

odnosno u Laplaceovoj domeni dobivamo

$$
H(s) = \frac{1}{S_{WW,L}(s)}\frac{S_{WX}(s)}{S_{WW,L}(-s)}e^{st_0}.
$$

Pomnožimo li nekauzalni dio s jediničnim skokom u vremenskoj domeni dobivamo traženi kauzalni filtar. Prijenosna funkcija kauzalnog Wienerovog filtra je sada

$$
H(s) = \frac{1}{S_{WW,L}(s)}\int_{0}^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{S_{XW}(s)}{S_{WW,L}(-s)}\Big]e^{-s(t-t_0)}\, dt.
$$

**Primjer 4.12.** Neka je $X(t)$ slučajni telegrafski signal kojemu je dodan aditivni bijeli šum $N(t)$. Odredi Wienerov filtar za dani signal ako je

$$
S_{XX}(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \quad \text{i} \quad S_{NN}(\omega) = N_0.
$$

Odredi i pripadni kauzalni Wienerov filtar i usporedi rješenja!

RJEŠENJE: Wienerov filtar (koji nije izvediv) je dan izrazom (4.5), dakle

$$
H(\omega) = \frac{S_{XX}}{S_{XX} + S_{NN}}e^{j\omega t_0} = \frac{2a}{2a + N_0 a^2 + N_0\omega^2}e^{j\omega t_0}.
$$

Za određivanje kauzalnog filtra moramo rastaviti spektar $S_{WW}(\omega) = S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)$ na kauzalni i antikauzalni dio.

Zamijenimo li $\omega$ sa $-js$ u Laplaceovoj domeni dobivamo

$$
\begin{aligned}
S_{WW}(s) &= \frac{2a}{a^2 - s^2} + N_0 = \frac{2a + N_0 a^2 - N_0 s^2}{(a - s)(a + s)} \\
&= \frac{\sqrt{2a + N_0 a^2} - \sqrt{N_0}s}{a - s}\frac{\sqrt{2a + N_0 a^2} + \sqrt{N_0}s}{a + s}.
\end{aligned}
$$

Sada je kauzalni dio Winenerovog filtra (koji izbjeljuje šum) dan prijenosnom funkcijom

$$H_1(s) = \frac{1}{S_{WW,L}(s)} = \frac{a+s}{\sqrt{2a+N_0a^2}+\sqrt{N_0}s},$$

a problem nam predstavlja dio

$$\begin{aligned}
H_2(s) &= \frac{2a}{a^2-s^2}\frac{a-s}{\sqrt{2a+N_0a^2}-\sqrt{N_0}s}e^{-st_0} \\
&= \frac{2a}{(a+s)(\sqrt{2a+N_0a^2}-\sqrt{N_0}s)}e^{-st_0} \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2a+N_0a^2}+a\sqrt{N_0}}\Big(\frac{1}{a+s}+\frac{\sqrt{N_0}}{\sqrt{2a+N_0a^2}+a\sqrt{N_0}}\Big)e^{-st_0}
\end{aligned}$$

Vratimo li $H_2(s)$ u vremensku domenu te pomnožimo li ga zatim s jediničnim skokom $\mathrm{s}(t)$ dobivamo pripadni kauzalni sustav, odnosno moramo izračunati

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}^{-1}\Big[\frac{S_{XW}(s)}{S_{WW,L}(-s)}\Big]e^{-s(t-t_0)}\,dt.$$

No opisani postupak jednostavno poništi član s polom u desnoj poluravnini, odnosno tražena kauzalna prijenosna funkcija $H_{2C}(s)$ je

$$H_{2C}(s) = \frac{2a}{\sqrt{2a+N_0a^2}+a\sqrt{N_0}}\frac{1}{a+s}e^{-st_0}.$$

Kauzalni Wienerov filtar je sada

$$H_C(s) = H_1(s)H_{2C}(s),$$

odnosno

$$\begin{aligned}
H_C(j\omega) &= H_1(j\omega)H_{2C}(j\omega) \\
&= \frac{a+j\omega}{\sqrt{2a+N_0a^2}+\sqrt{N_0}j\omega}\cdot\frac{2a}{\sqrt{2a+N_0a^2}+a\sqrt{N_0}}\frac{1}{a+j\omega}e^{j\omega t_0} \\
&= \frac{2a}{\sqrt{2a+N_0a^2}+a\sqrt{N_0}}\frac{e^{j\omega t_0}}{\sqrt{2a+N_0a^2}+\sqrt{N_0}j\omega}.
\end{aligned}$$

Pripadni impulsni odziv kauzalnog Wienerovog filtra je

$$h_C(t) = \frac{2a}{\sqrt{N_0(2a+N_0a^2)}+aN_0}e^{-\frac{\sqrt{2a+N_0a^2}}{\sqrt{N_0}}(t-t_0)}\,\mathrm{s}(t+t_0),$$

dok je odziv nekauzalnog Wienerovog filtra

$$h(t) = \frac{a}{\sqrt{N_0(2a+N_0a^2)}}e^{-\frac{\sqrt{2a+N_0a^2}}{\sqrt{N_0}}|t+t_0|}.$$

Zamijetite razliku u eksponencijalnoj funkciji te također u pojačanju kojeg smo dobili.

### 4.2.2. Wienerov-Hopfova jednadžba

Wienerov filtar je optimalan u smislu srednje kvadratne greške. Može se pokazati da postupak kojeg smo proveli u frekvencijskoj domeni za stacionaran slučaj odgovara rješavanju Wiener-Hopfove integralne jednadžbe

$$\int_0^{+\infty} R_{WW}(\tau-\xi)h(\xi)\,d\xi = R_{WX}(\tau+t_0). \tag{4.7}$$

Tražite li dakle u matematičkoj literaturi nešto o Wienerovom filtru i postojanju rješenja trebate tražiti Wiener-Hopfovu intergralnu jednadžbu. Postoje Wiener-Hopfova jednadžba prve vrste, koja je oblika

$$\int_0^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)\,d\tau = f(t),$$

te Wiener-Hopfova jednadžba druge vrste

$$y(t) - \int_0^{+\infty} x(t-\tau)y(\tau)\,d\tau = f(t).$$

Diskretni Wienerov filtar se također može dobiti rješavanjem odgovarajuće Wiener-Hopfove jednadžbe. U diskretnom obliku jednadžba (4.7) postaje

$$\sum_i R_{WW}[m-i]h[i] = R_{WX}[m+k]. \tag{4.8}$$

Pretpostavimo diskretni FIR Wienerov filtar (***f**inite **i**mpulse **r**esponse*) impulsnog odziva $h[n]$. Pri tome je $h[n]$ različit od nule samo za neki konačan broj uzoraka, pa neka $h[n]$ ima upravo $L$ uzoraka različitih od nule. Označimo još $\ell = L-1$. Naša procjena signala $X[n]$ u aditivnom šumu $N[n]$ je

$$\hat{X}[n] = \sum_i W[i]h[n-i] = \sum_i \big(X[i]+N[i]\big)h[n-i].$$

Traženi impulsni odziv je rješenje jednadžbe

$$\sum_{i=0}^{L-1} R_{WW}[m-i]h[i] = R_{WX}[m+k].$$

Zapišemo li $h[n]$ kao vektor-stupac Wiener-Hopfova jednadžba postaje matrični sustav (za npr. $k=0$)

$$\begin{bmatrix} R_{WW}[0] & R_{WW}[-1] & \dots & R_{WW}[-\ell] \\ R_{WW}[1] & R_{WW}[0] & \dots & R_{WW}[-\ell+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{WW}[\ell] & R_{WW}[\ell-1] & \dots & R_{WW}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h[0] \\ h[1] \\ \vdots \\ h[\ell] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{WX}[0] \\ R_{WX}[1] \\ \dots \\ R_{WX}[\ell] \end{bmatrix},$$

odnosno $\mathbf{R}_{WW}\mathbf{h} = \mathbf{R}_{WX}$. Dakle da bi odredili Wienerov filtar za diskretni slučaj moramo riješiti matričnu jednadžbu. Kako je matrica $\mathbf{R}_{WW}$ Toeplitzova matrica umjesto Gaussove eliminacije za rješavanje sustava na računalu se koristi Levinson-Durbinova rekurzija koja ima kvadratnu složenost nasuprot kubne za Gaussovu eliminaciju.

# 5. Kvantizacija

**Definicija 5.0.1. (Particija skupa)** *$P$ je particija skupa $A$ ako je $P$ familija po parovima disjunktnih nepraznih skupova i $\bigsqcup P = A$.*

$P$ je particija od $A$ ako i samo ako elementi particije zadovoljavaju uvjete:

1. $\forall x \in P \wedge \forall y \in P : x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$,
2. $\forall x \in P : x \neq \emptyset$, i
3. $\bigcup_{x \in P} x = A$.

**Definicija 5.0.2. (Skalarni kvantizator)** *Skalarni kvantizator $Q$ je preslikavanje $Q : \mathbb{R} \to \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, pri čemu se svaki $y_i$ nalazi unutar intervala $R_i$, $y_i \in R_i$ s time da intervali $R_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ čine particiju skupa $\mathbb{R}$.*

Granice $d_i$ između intervala $R_{i-1}$ i $R_i$ moramo uključiti u neki od intervala—obično odabiremo jednaka uključenja, npr. $R_i = \langle d_i, d_i{+}1]$. Preslikavanje se sada može modelirati preko dvije realne funkcije $f$ i $g$, te funkcije najveće (ili najmanje) cijelo, dakle $Q(x) = f\big(\lfloor g(x) \rfloor\big)$.

**Primjer 5.1.** Kvantizirajte niz brojeva

$$x[n] = \{0{,}12, 1{,}10, -6{,}08, 5{,}99, -7{,}78, -8{,}58, 8{,}01, 7{,}97\}$$

ako raspolažete s 4 bita za prikaz broja u obliku dvojnog komplementa (3 bita i predznak). Koristite slijedeće metode kvantizacije:

1. zaokruživanje na najbliži cijeli broj (`round`),
2. odsijecanje prema dolje (`floor`),
3. odsijecanje prema gore (`ceil`) i
4. odsijecanje prema nuli (`fix`).

Rješenje: Raspolažemo li s $B$ bita možemo prikazati brojeve u rasponu

$$[-2^{B-1}, 2^{B-1} - 1].$$

Za zadani niz dobivamo rezultate koji su prikazani u tablici 5.. Kako raspolažemo s rasponom od $-8$ do 7 vrijednosti 8 i 9 postaju 7 dok $-9$ postaje $-8$ (kvantizacija s zasićenjem, lošije rješenje bi bilo prematanje za koje 8 postaje $-8$).

**Primjer 5.2.** Odredi odnos signal/šum za signal $X(t)$ s faktorom ispune $\gamma = 5$ za broj bitova $r = 1, 2, 4, 8$ i 16. Skiciraj ovisnost SNR o broju bitova $r$.

Rješenje: Za signal $X(t)$ s faktorom ispune $\gamma$ uz pretpostavku nezavisnosti signala $X(t)$ i pogreške kvantizacije odnos signal/šum je

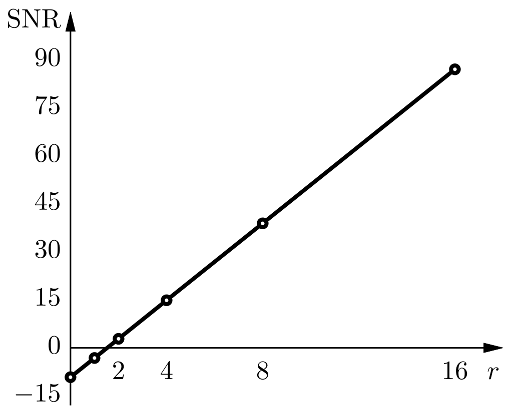
$$\mathrm{SNR} = 20r \log_{10}(2) + 10 \log_{10}\Big(\frac{3}{\gamma^2}\Big).$$

| $x$ | 0,12 | 1,10 | −6,08 | 5,99 | −7,78 | −8,58 | 8,01 | 7,97 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| round($x$) | 0 | 1 | −7 | 6 | −8 | −9 | 8 | 8 |
| $\lfloor x \rfloor$ | 0 | 1 | −7 | 5 | −8 | −9 | 8 | 7 |
| $\lceil x \rceil$ | 1 | 2 | −6 | 6 | −7 | −8 | 9 | 8 |
| fix($x$) | 0 | 1 | −6 | 5 | −7 | −8 | 8 | 7 |

Uz zadani faktor ispune $\gamma = 5$ dobivamo $10 \log_{10}(3\gamma^{-2}) = -9{,}21\,\mathrm{dB}$. Sada je

$$\begin{aligned} r = 1: &\quad \mathrm{SNR} = -3{,}19\,\mathrm{dB} \\ r = 2: &\quad \mathrm{SNR} = 2{,}83\,\mathrm{dB} \\ r = 4: &\quad \mathrm{SNR} = 14{,}87\,\mathrm{dB} \\ r = 8: &\quad \mathrm{SNR} = 38{,}96\,\mathrm{dB} \\ r = 16: &\quad \mathrm{SNR} = 87{,}12\,\mathrm{dB} \end{aligned}$$

Karakteristika je linearna po varijabli $r$ i prikazana je na slici 5.1..




Slika 5.1.: Ovisnost SNR o broju bitova $r$

Zapamtite karakteristiku prikazanu na slici 5.1. jer ona određuje uobičajeni odnos signal/šum kojeg možemo dobiti u nekom sustavu za digitalnu obradbu signala uz jednoliku kvantizaciju ako na raspolaganju imamo $r$ bitova. Tako npr. za 16-bitni sustav očekivani SNR jer reda veličine $16 \cdot 6{,}02\,\mathrm{db} \approx 96\,\mathrm{db}$, odnosno ako uspijete pronaći neki CD uređaj koji tvrdi da ima bolji SNR od 96 db morate se zamisliti jesu li specifikacije točne[1].

**Primjer 5.3.** Razmotrite jednostavni bezmemorijski skalarni amplitudni kvantizator $Q : \mathbb{R} \to \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ koji signal kvantizira u $n$ razina $y_i$.

a) Definirajte jednoliki simetrični kvantizator i pripadnu mu particiju $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\} = \{R_i\}_{i=1}^{n}$. Kolika je udaljenost između susjednih razina kvantizacije $y_i$ i $y_{i+1}$?

b) Definirajte $p$-udaljenost između dvije skalarne veličine te napišite izraze za srednju apsolutnu (MAE) i srednju kvadratnu pogrešku (MSE) skalarnog kvantizatora.

c) Razmotrite kvantizator $Q_{\mathrm{MAE}}(x)$ koji je optimalan u smislu apsolutnog odstupanja. Pronađite izraze koji povezuju optimalne razine kvantizacije $y_i$ s pripadnim granicama kvantizacije $x_i$.

Rješenje: Jednoliki simetrični kvantizator sa $n$ razina ima $n - 2$ granularna atoma te 2 polubeskonačna atoma, sve razine kvantizacije su jednako razmaknute

[1]Sličan primjer su i računalni zvučnici čija snaga se često deklarira na 300 W, no sitnim slovima se napiše PMPO.

i vrijedi $Q(x) = -Q(-x)$. Particiju skupa $\mathbb{R}$ sada čine intervali $R_i = \langle x_{i-1}, x_i]$ za $i = 2, 3, \ldots, n-1$, dok su krajnja dva intervala $R_1 = \langle -\infty, x_1]$ i $R_n = \langle x_{n-1}, +\infty\rangle$ polubeskonačni atomi. Svi intervali su međusobno disjunktni, odnosno vrijedi $R_i \cap R_j = \emptyset$ za $i \neq j$. Udaljenost svih susjednih $x_i$-jeva je jednaka i odgovara udaljenosti između susjednih razina kvantizacije $y_i$, odnosno $x_{i+1} - x_i = d$ i $y_{i+1} - y_i = d$, za $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Razine kvantizacije nalaze se na sredini granularnih atoma, odnosno vrijedi

$$y_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

i slično je za granice kvantizacije

$$x_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

Prisjetite se da je $p$-udaljenost između dva vektora

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_p = \Big(\sum_i |x_i - y_i|^p\Big)^{1/p},$$

no kada razmatramo pogrešku kvantizatora $p$-pogrešku obično definiramo kao

$$D_p = \int \big|x(t) - Q\big(x(t)\big)\big|^p \, dt$$

za neki signal $x(t)$. Ako signal možemo modelirati kao slučajan proces promatramo pogrešku

$$D_p = \int \big|x - Q(x)\big|^p f_X(x) \, dx.$$

Najčešći izbor su apsolutna pogreška za $p = 1$ te kvadratna pogreška za $p = 2$. Za jednoliki simetrični kvantizator srednja apsolutna pogreška je

$$D_1 = E\big[|x - Q(x)|\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - Q(x)| f_X(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{R_i} |x - y_i| f_X(x) \, dx,$$

a srednja kvadratna pogreška je

$$D_2 = E\big[|x - Q(x)|^2\big] = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - Q(x)|^2 f_X(x) \, dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{R_i} |x - y_i|^2 f_X(x) \, dx.$$

Razmotrimo sada kvantizator $Q_{\mathrm{MAE}}(x)$ koji je optimalan u smislu apsolutnog odstupanja. Pretpostavimo da poznajemo granice kvantizacije $x_i$ i razine $y_i$. Kvantizator sada minimizira izraz

$$D_{\mathrm{MAE}} = E\big[|x - Q_{\mathrm{MAE}}(x)|\big] = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - y_i| f_X(x) \, dx,$$

odnosno derivacije $D_{\mathrm{MAE}}$ po $x_i$ i $y_i$ moraju biti jednake nuli. Derivirajmo po $x_i$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx_i} D_{\mathrm{MAE}} &= \frac{d}{dx_i} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - y_i| f_X(x) \, dx \\
&= \frac{d}{dx_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - y_i| f_X(x) \, dx + \frac{d}{dx_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |x - y_{i+1}| f_X(x) \, dx = 0,
\end{aligned}$$

jer se $x_i$ javlja samo u dva člana kao gornja i donja granica integracije. Pretpostavimo da znamo odrediti određeni integral, odnosno neka vrijedi

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |x - y_i| f_X(x) \, dx = G_{y_i}(x_i) - G_{y_i}(x_{i-1}),$$

gdje je $G_{y_i}(x)$ funkcija za koju vrijedi $\frac{\partial}{\partial x}G_{y_i}(x) = |x - y_i| f_X(x)$. Sada je

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_i}D_{\mathrm{MAE}} &= \frac{d}{dx_i}\big(G_{y_i}(x_i) - G_{y_i}(x_{i-1})\big) + \frac{d}{dx_i}\big(G_{y_{i+1}}(x_{i+1}) - G_{y_{i+1}}(x_i)\big)\\ &= |x_i - y_i| f_X(x) - |x_i - y_{i+1}| f_X(x) = 0\end{aligned}$$

Kako je $y_i < x_i < y_{i+1}$ imamo

$$0 = (x_i - y_i) f_X(x) - (-x_i + y_{i+1}) f_X(x),$$

odnosno

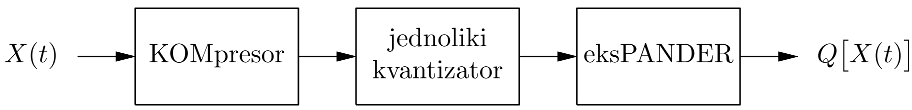
$$x_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}.$$

**Primjer 5.4.** Projektirajte kompander za stacionarni slučajni proces $X(t)$ čija je funkcija gustoće prvog reda

$$f_{X(t)}(x) = \frac{b}{a}e^{-b|x+a|}.$$

Neka jednoliki kvantizator ima 4 razine kvantizacije. Kolike su razine kvantizacije kada se preslikaju nazad preko ekspandera ako je $a = 2$ i $b = 3$? Da li je ovakav kvantizator optimalan?

RJEŠENJE: Kompander se sastoji od jednolikog kvnatizatora i dva nelinearna preslikavanja (kompresor i ekspander) kako je prikazano na slici 5.2.. Kompresor ulazni proces stacionaran u širem smislu preslikava u novi proces čija je razdioba jednolika, dok ekspander preslikava kvantizirani proces nazad tako da razdioba prvog reda kvantiziranog procesa $Q\big[X(t)\big]$ bude otprilike jednaka razdiobi ulaznog procesa.




Slika 5.2.: Kompander

Kako kompresor mora preslikati ulazni proces u novi proces s jednolikom razdiobom, funkcija kompresora jednaka je funkciji distribucije vjerojatnosti prvog reda stacionarnog ulaznog procesa $X(t)$. Za zadani ulazni proces je poznata funkcija gustoće vjerojatnosti te funkciju distirbucije određujemo integriranjem. Dobivamo

$$F_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}e^{b(x+a)}, & x < a \\ 1 - \frac{1}{a}e^{-b(x+a)}, & x > a \end{cases}.$$

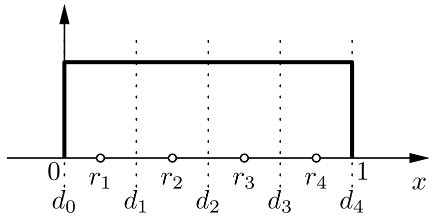
Funkcija ekspandera je inverz funkcije distribucije $F_{X(t)}(x)$. Za zadane parametre $a$ i $b$ funkcija kompresora je

$$F_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{3(x+2)}, & x < -2 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-3(x+2)}, & x > -2 \end{cases},$$

dok je funkcija kompandora

$$F^{-1}_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}\ln(2x) - 2, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3}\ln(2 - 2x) - 2, & \frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}.$$

Pri korištenju funkcije distirbucije prvog reda za preslikavanje dobili smo proces s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 1]$. Za taj proces sada moramo




Slika 5.3.: Razine i granice odlučivanja jednolikog kvantizatora

projektirati kvantizator s četiri razine koji će imati 5 granica odlučivanja kako je prikazano na slici 5.3.. Granice odlučivanja su

$$d_0 = 0, \quad d_1 = \frac{1}{4}, \quad d_2 = \frac{1}{2}, \quad d_3 = \frac{3}{4} \quad \text{i} \quad d_4 = 1,$$

dok su razine kvantizacije

$$r_1 = \frac{1}{8}, \quad r_2 = \frac{3}{8}, \quad r_3 = \frac{5}{8} \quad \text{i} \quad r_4 = \frac{7}{8}.$$

Preslikavanjem granica i razina preko ekspandera možemo odrediti granice i razine nelinearnog kvantizatora koji je realiziran kao kompandor. Granice su

$$\begin{aligned}
d'_0 &= -\infty, \\
d'_1 &= \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{1}{2}\Big) - 2 \approx -2{,}23, \\
d'_2 &= \frac{1}{3}\ln(1) - 2 = -\frac{1}{3}\ln(1) - 2 = -2, \\
d'_3 &= -\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{1}{2}\Big) - 2 \approx -1{,}77, \\
d'_4 &= +\infty,
\end{aligned}$$

dok su razine

$$\begin{aligned}
r'_1 &= \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{1}{4}\Big) - 2 \approx -2{,}46, \\
r'_2 &= \frac{1}{3}\ln\Big(\frac{3}{4}\Big) - 2 \approx -2{,}10, \\
r'_3 &= -\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{3}{4}\Big) - 2 \approx -1{,}90 \\
r'_4 &= -\frac{1}{3}\ln\Big(\frac{1}{4}\Big) - 2 \approx -1{,}54.
\end{aligned}$$

Ovako projektirani kvantizator nije optimalan u smislu najmanje kvadratne pogreške. Srednja kvadratna pogreška kvantizatora s $N$ razina je

$$\epsilon = \sum_{i=0}^{N} E\big[\big(X(t) - Q[X(t)]\big)^2\big] = \sum_{i=0}^{N} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \big(X(t) - r_i\big)^2 f_{X(t)}\, dx.$$

Optimalan kvantizator koji minimizira srednju kvadratnu pogrešku je Lloyd-Max kvantizator, no analitičko određivanje granica i razina kvantizacije koji minimiziraju kvadratnu pogrešku najčešće nije moguće. Stoga se dani problem minimizacije rješava numerički.

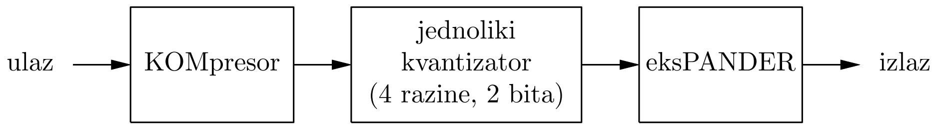
**Primjer 5.5.** Promatramo dva stacionarna slučajna procesa $X(t)$ i $Y(t)$ koja su funkcijski povezana preko izraza

$$Y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{X(t) - 2}.$$

Želimo ih kvantizirati korištenjem jednog kompandera na način da kvantiziramo samo jedan od procesa (bilo $X(t)$ bilo $Y(t)$) s time da ćemo drugi odrediti preko poznate veze između $X(t)$ i $Y(t)$. Odaberi proces za kojeg ćemo dobiti po iznosu manju apsolutnu pogrešku kvantizacije te za njega projektiraj kompander s jednolikim kvantizatorom s 4 razine kvantizacije (slika 5.4.) ako je poznato da je funkcija gustoće vjerojatnosti procesa $X(t)$

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} a(x-2), & 2 < x < 6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gdje je $a$ realna pozitivna konstanta.




Slika 5.4.: Kompander

RJEŠENJE: Odredimo najprije funkciju gustoće vjerojatnosti. Za proces $X(t)$ je

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} a(x-2), & 2 < x < 6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

gdje je $a$ realna pozitivna konstanta koju moramo odabrati tako da površina ispod krivulje postane jedinična. Vrijedi

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X(t)}(x)\,dx = \int_2^6 a(x-2)\,dx = a\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_2^6 = 8a,$$

te je $a = \frac{1}{8}$. Sada je funkcija gustoće vjerojatnosti procesa $X(t)$

$$f_{X(t)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x-2), & 2 < x < 6 \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

dok je funkcija razdiobe vjerojatnosti

$$F_{X(t)}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{X(t)}(\chi)\,d\chi = \int_2^x \frac{1}{8}(\chi-2)\,d\chi = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}x - 1\Big)^2,$$

za $2 < x < 6$, a inače je jednaka nuli.

Veza između slučajnih procesa $X(t)$ i $Y(t)$ je funkcijska i vrijedi

$$Y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{X(t)-2} \quad \text{i} \quad X(t) = 4Y^2(t) + 2,$$

odnosno možemo pisati $x = h(y) = 4y^2 + 2$. Kako je veza monotono rastuća funkcija (slika 5.5.) funkciju gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa $Y(t)$ računamo kao

$$f_{Y(t)}(y) = f_{X(t)}\big(h(y)\big)\left|\frac{dh(y)}{dy}\right|,$$

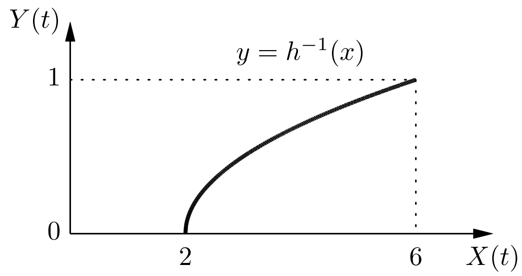
s time da veza vrijedi na intervalima $x \in \langle 2, 6\rangle$ i $y \in \langle 0, 1\rangle$.

Sada je

$$f_{Y(t)}(y) = \frac{1}{8}(4y^2 + 2 - 2)\left|\frac{d}{dy}\big(4y^2 + 2\big)\right| = \frac{1}{2}y^2 \cdot 4 \cdot 2y = 4y^3,$$

te je funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa $Y(t)$

$$f_{Y(t)}(y) = \begin{cases} 4y^3, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$




Slika 5.5.: Funkcijska veza između $X(t)$ i $Y(t)$

Pripadna razdioba je

$$F_{Y(t)}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y(t)}(\chi)\, d\chi = \int_{0}^{y} 4\chi^3\, d\chi = y^4, \quad 0 < y < 1.$$

Usporedbom funkcija gustoća vjerojatnosti vidimo da po iznosu manju apsolutnu pogrešku dobivamo za signal $Y(t)$ jer ima manju dinamiku amplituda, odnosno $Y(t) \in \langle 0, 1\rangle$ za razliku od $X(t) \in \langle 2, 6\rangle$ (što ne znači da će projektirani kompader biti optimalan—štoviše, kompander nije optimalan niti u MSE niti u MAE smislu).

Projektiramo kompandor za proces $Y(t)$. Funkcija radzdiobe vjerojatnosti te inverzna funkcija razdiobe vjerojatnosti su

$$F_{Y(t)}(y) = y^4, \quad 0 < y < 1$$

i

$$F_{Y(t)}^{-1}(y) = \sqrt[4]{y}, \quad 0 < y < 1.$$

Moramo odrediti pet granica odlučivanja (od $d_1$ do $d_4$) te četiri razine odlučivanja (od $r_0$ do $r_3$). Granice odlučivanja su:

$$\begin{aligned}
d_0 &= \frac{0}{4}, \quad d_0' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{0}{4}\right) = 0\\
d_1 &= \frac{1}{4}, \quad d_1' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071\\
d_2 &= \frac{2}{4}, \quad d_2' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{2}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \approx 0{,}8409\\
d_3 &= \frac{3}{4}, \quad d_3' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}9306\\
d_4 &= \frac{4}{4}, \quad d_4' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{4}{4}\right) = 1
\end{aligned}$$

Razine kvantizacije su:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{8}, \quad r_1' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \approx 0{,}5946\\
r_2 &= \frac{3}{8}, \quad r_1' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) = \sqrt[4]{\frac{3}{8}} \approx 0{,}7825\\
r_3 &= \frac{5}{8}, \quad r_1' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) = \sqrt[4]{\frac{5}{8}} \approx 0{,}8891\\
r_4 &= \frac{7}{8}, \quad r_1' = F_{Y(t)}^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) = \sqrt[4]{\frac{7}{8}} \approx 0{,}9672
\end{aligned}$$

Kako je veza između slučajnih procesa funkcijska, odnosno vrijedi

$$Y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{X(t) - 2},$$

mogli smo npr. projektirati kompander za signal $X(t)$ te tada samo preslikamo razine odlučivanja i kvantizacije preko funkcijske veze. Dobili bi jednaki rezultat! Znate li zašto?

# Literatura

[1] Hwei Hsu. *Schaum's Outline of Probability, Random Variables, and Random Processes.* McGraw-Hill, 1996.

[2] Zoran Ivković. *Uvod u teoriju verovatnoće, slučajne procese i matematičku statistiku.* Građevinska knjiga, 1972.

[3] Peyton Z. Peebles. *Probability, Random Variables, and Random Signal Principles.* McGraw-Hill, 2000.

[4] Željko Pauše. *Uvod u matematičku statistiku.* Školska knjiga, 1993.

[5] Željko Pauše. *Vjerojatnost-informacija-stohastički procesi.* Školska knjiga, 2003.