1. Osnove slučajnih procesa

1.1. Koncept i definicija slučajnog procesa

Koncept slučajnog procesa dobiva se iz koncepta slučajne varijable uz dodavanje vremenske varijable. Po definiciji, slučajna varijabla je preslikavanje koje svakom ishodu s eksperimenta dodjeljuje broj x(s) koji se zove realizacija slučajne varijable.Svaki ishod eksperimenta ima svoju vjerojatnost tako da i svaka realizacija slučajne varijable ima svoju vjerojatnost. Skup svih vrijednosti x(s) zove se slučajna varijabla i označava se s X(s) ili češće samo s **X**.

Slučajni proces je preslikavanje koje svakom ishodu eksperimenta s dodjeljuje funkciju vremena x(t,s). Familija svih takvih funkcija x(t,s) zove se slučajni proces i označava se **X**(t,s)

1.2. Klasifikacija slučajnih procesa

Klasifikacije: s obzirom na diskretnost tj. kontinuiranost (klasifikacija s obzirom na diskretizaciju vrši se na osnovi diskretnosti/kontinuiranosti parametara t i X(t)); na determinističke i nedeterminističke (klasifikacija s obzirom na predvidivost) te na stacionarne i nestacionarne (stacionarni slučajni procesi su oni čija se statistička svojstva ne mijenjaju s vremenom).

1.3. Funkcije distribucije i gustoće vjerojatnosti slučajnog procesa

Za neki slučajni proces X(t) može se izračunati funkcija distribucije prvog, drugog ili N-tog reda. U određenom trenutku t, X(t) je slučajna varijabla koja ima funkciju distribucije definiranu izrazom:

$$F_X(x,t) = P(\mathbf{X}(t) \le x)$$

Ova se funkcija također zove funkcija distribucije prvog reda slučajnog procesa X(t) zato jer se gleda distribucija samo jedne slučajne varijable (u trenutku t).

Funkcija gustoće vjerojatnosti prvog reda slučajnog procesa X(t) definirana je izrazom:

$$f_X(x,t) = \frac{dF_X(x,t)}{dx}$$

2. Stacionarnost, nezavisnost i ergodičnost

2.1. Definicija striktne stacionarnosti prvog, drugog i N-tog reda

Stohastički proces X(t) je stacionaran ako za svaki n e N, za svaki izbor trenutaka t1, …, tn i za svaki u e R slučajne varijable X(t1), …, X(tn) i slučajne varijable X(t1+u), …, X(tn+u) imaju jednake funkcije distribucije n-tog reda.

Stacionarnost prvog reda:

$$f_X(x,t) = f_X(x,t+\Delta t)$$

Stacionarnost drugog reda:

$$f_X(x_1,x_2,t_1,t_2) = f_X(x_1,x_2,t_1+\Delta t,t_2+\Delta t)$$

Stacionarnost N-tog reda:

$$f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) = f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1+\Delta t,\ldots,t_N+\Delta t)$$

2.2. Definicija stacionarnosti u širem smislu

Proces je stacionaran u širem smislu ako vrijedi:

$$E[\mathbf{X}(t)] = \text{konst}$$
$$E[\mathbf{X}(t)\mathbf{X}(t+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

2.3. Korelacijske funkcije slučajnih procesa. Definicije i izrazi.

Autokorelacijska funkcija slučajnog procesa X(t) definirana je izrazom:

$$R_{XX}(t_1,t_2) = E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_2)]$$

Za t = t2 - t1:

$$R_{XX}(t_1,t_1+\tau) = E[\mathbf{X}(t_1)\mathbf{X}(t_1+\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Svojstva:

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0)$$
$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau)$$
$$R_{XX}(0) = E[\mathbf{X}^2(t)]$$

2.4. Statističko i vremensko usrednjavanje. Definicije i izrazi.

Vremensko usrednjavanje (ili vremenski prosjek) A neke veličine definiran je kao:

$$A[.] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [.]dt$$

Notacija A je analogna notaciji E za statistički prosjek (eng. expectation).

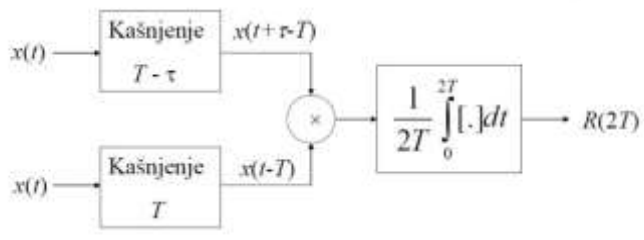
2.5. Ergodičnost

Slučajni proces je ergodičan ako je vremensko usrednjavanje neke vrijednosti jednako statističkom usrednjavanju te iste vrijednosti. Drugim riječima ergodičnost znači da npr. vremenska srednja vrijednost svake realizacije mora biti jednaka statističkoj srednjoj vrijednosti, a isto važi i za obje AKF:

$$\overline{x} = E[\mathbf{X}(t)] = \overline{\mathbf{X}}$$
$$\mathrm{R}_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

2.6. Mjerenje autokorelacijske funkcije slučajnog procesa. Izrazi, blok dijagram.

U praksi često ne možemo izmjeriti prave korelacijske funkcije dvaju procesa X(t) i Y(t) zato jer nemamo sve realizacije procesa. Jedini način u tom slučaju je mjerenje vremenskim usrednjavanjem u dovoljno dugom intervalu i uz prepostavku da se radi o ergodičnim procesima. Blok za autokorelaciju:



3. Primjeri slučajnih procesa

3.1. Gaussov slučajni proces. Funkcija gustoće vjerojatnosti.

Neka je za slučajni proces X(t) definirano N slučajnih varijabli X1=X(t1), X2=X(t2), …, XN=X(tN) koje su definirane u N vremenskih trenutaka t1, t2,…, tN . Ako su za bilo koji N i trenutke t1, t2, …, tN ove varijable zajednički Gaussove, tj. ako imaju gustoću vjerojatnosti N-tog reda danu izrazom.

$$f_X(x_1,\ldots,x_N,t_1,\ldots,t_N) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^T \mathbf{C}_x^{-1}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\right\}}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_x|}}$$

gdje je $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_N]^T$

vektor **x**, $\overline{\mathbf{x}} = [\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_N]^T$

3.2. Kompleksni slučajni proces. Srednja vrijednost, korelacijske funkcije

Kompleksni slučajni proces definiran je kao:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) + j\mathbf{Y}(t)$$

gdje su X(t) i Y(t) realni slučajni procesi.

Srednja vrijednost:

$$E[\mathbf{Z}(t)] = E[\mathbf{X}(t)] + jE[\mathbf{Y}(t)]$$

Korelacijska funkcija:

$$R_{ZZ}(t, t+\tau) = E[\mathbf{Z}^*(t)\mathbf{Z}(t+\tau)]$$

3.3. Bernoullijev proces i slučajni hod. Definicije.

Proces ili niz:

$$\mathbf{X}(n), \quad -\infty < n < \infty$$

nezavisnih slučajnih varijabli koje poprimaju dvije vrijednosti +1 i -1 s vjerojatnostima p i 1-p zove se Bernoullijev proces. Ako je p = 0.5 proces se zove binarni bijeli šum.

Slučajni niz definiran izrazom:

$$Y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \mathbf{X}(k), \quad -\infty < n < \infty$$

gdje je X(k) Bernoullijev slučajni proces koji poprima vrijednosti +1, -1 s vjerojatnostima p i 1-p zove se slučajni hod.

4. Spektralne karakteristike slučajnih procesa

4.1. Spektar, energija i snaga signala.

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-j\omega t}\,dt$$

Dovoljni (ne i nužni) uvjeti za postojanje spektra X(w) su:
1. Dirichletovi uvjeti – x(t) je ograničena konačnim brojem maksimuma i minimuma te konačnim brojem diskontinuiteta na bilo kojem konačnom intervalu od t.
2. apsolutna integrabilnost x(t).

Energija:

$$\mathcal{E}(T)=\int_{-T}^{T}\left|x_T(t)\right|^2\,dt=\int_{-T}^{T}x(t)x^*(t)\,dt$$

Snaga:

$$P(T)=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|x(t)\right|^2\,dt$$

4.2. Srednja snaga slučajnog procesa: prijelaz od konačnog segmenta jedne realizacije do slučajnog procesa.

P(T) je slučajna varijabla koja daje snagu za jednu realizaciju i vrijeme T; ako se primjeni operator očekivanja i T formira u limes dobije se snaga cjelokupnog procesa:

$$P_{XX}=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|X(t)\right|^2dt\right]t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{E[\left|X_T(\omega)\right|^2]}{2T}d\omega.$$

4.3. Gustoća spektra snage, definicija i svojstva.

Gustoća spektra snage Sxx je mjera srednje snage frekvencijskog sadržaja, definirana izrazom:

$$S_{XX}(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{E[\left|X_T(\omega)\right|^2]}{2T}$$

Svojstva:

1.) $S_{xx}(\omega)$ je uvijek realna, točnije $S_{xx}(\omega)\geq 0$,
2.) $S_{xx}(-\omega)$ = $S_{xx}(\omega)$ za realne procese,
3.) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_{XX}(\omega)\,d\omega=A\{E[\,|X(t)|^2]\}\;=P_{XX}$,
4.) $S_{\dot{X}\dot{X}}(\omega)=\omega^2 S_{XX}(\omega)$, $\dot{X}=\frac{dX(t)}{dt}$.

4.4. Veza spektra snage s autokorelacijskom funkcijom: izrazi za nestacionarne procese. Wiener-Khinchinove relacije.

Veza spektra i AKF:

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(t,t+\tau)]e^{-j\omega\tau}d\tau$$

Wiener-Khinchinove relacije:

$$S_{XX}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_{XX}(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

4.5. Veza spektara međusnage s kroskorelacijskim funkcijama. Svojstva.

Pri računanju autokorelacije i spektralne gustoće snage Sww:

$$R_{WW}(t,t+\tau)=E[W(t)\,W(t+\tau)]=R_{XX}(t,t+\tau)+R_{YY}(t,t+\tau)+R_{XY}(t,t+\tau)+R_{YX}(t,t+\tau)$$

$$S_{WW}(\omega)=S_{XX}(\omega)+S_{YY}(\omega)+S_{XY}(\omega)+S_{YX}(\omega)$$

članovi Sxy i Syx su spektralne gustoće međusnage. Svojstva:

- $S_{XY}(\omega)=S_{YX}(-\omega)=S_{YX}^{*}(\omega)$,
- $\mathrm{Re}[S_{XY}(\omega)]$ i $\mathrm{Re}[S_{YX}(\omega)]$ – parne funkcije,
- $\mathrm{Im}[S_{XY}(\omega)]$ i $\mathrm{Im}[S_{YX}(\omega)]$ – neparne funkcije,
- $S_{XY}(\omega)=0$ i $S_{YX}(\omega)=0$ ako su $X(t)$ i $Y(t)$ ortogonalni.
- Nekorelirani $X(t)$ i $Y(t)$ s konstantnom srednjom vrijednosti => $S_{XY}(\omega)=S_{YX}(\omega)=2\pi\,\underline{XY}\,\delta(\omega)$.
- $A[R_{XY}(t,t+\tau)]$ o–> $S_{XY}(\omega)$ i $A[R_{YX}(t,t+\tau)]$ o–> $S_{YX}(\omega)$ tj. srednja kroskorelacijska funkcija i spektralne gustoće međusnage čine Fourierov transformacijski par,
- za zajednički stacionarne procese vrijedi: $R_{XY}(\tau)$ o–> $S_{XY}(\omega)$ i $R_{YX}(\tau)$ o–> $S_{YX}(\omega)$.

4.6. Veza spektra snage vremenski diskretnih sustava s autokorelacijskom funkcijom: izrazi za nestacionarne procese. Wiener-Khinchinove relacije.

Veza spektra i AKF:

$$S_{XX}(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{\infty} A[R_{XX}(n,n+k)]\cdot e^{-j\omega k}$$

Wiener-Khinchinove relacije:

$$S_{XX}(e^{j\omega})=\sum_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(k)\cdot e^{-j\omega k}$$

$$R_{XX}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(e^{j\omega})e^{j\omega k}\,d\omega$$

5. Slučajni proces u linearnom sustavu

5.1. Odziv linearnog sustava u vremenskoj i frekvencijskoj domeni, kauzalnost i stabilnost.

Opći linearan sustav je definiran kao:

$$y(t) = \mathbf{\Pi}[x(t)]$$

Odziv u vremenskoj domeni:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t,\xi)\, d\xi$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

Odziv u frekvencijskoj domeni:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \cdot h(t-\xi)\, d\xi \right] \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\xi) e^{-j\omega(t-\xi)}\, dt \right] \cdot e^{-j\omega\xi} d\xi, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) H(\omega) \cdot e^{-j\omega\xi} d\xi \quad = H(\omega) \cdot X(\omega). \end{aligned}$$

Sustav se definira kao kauzalan ako se ne odaziva prije pobude ili matematički uvjet:

$$y(t) = 0 \text{ za } t < t_0 \text{ ako je } x(t) = 0 \text{ za } t < t_0$$

Sustav se definira kao BIBO kauzalan ako je odziv na svaku ograničenu pobudu ograničen ili uvjet:

$$|x(t)| < M \rightarrow |y(t)| < M \cdot C \text{ (M i C su konstante)}$$

5.2. Slučajni proces u linearnom sustavu: definicija. Srednja vrijednost odziva za stacionarni proces. Srednja kvadratna vrijednost odziva za stacionarni proces pobuđen bijelim šumom.

Definicija slučajnog procesa Y(t) u sustavu:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi) \cdot X(t-\xi)\, d\xi$$

Za stacionarni proces u širem smislu srednja vrijednost Y(t) je jednaka srednjoj vrijednosti X(t) pomnoženoj s površinom ispod impulsnog odziva:

$$E[Y(t)] = \overline{X} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi)\, d\xi \quad = \overline{Y}$$

Ako je na ulazu bijeli šum srednja kvadratna vrijednost odziva se može dobiti kao:

$$\overline{Y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{2} \delta(\xi_1 - \xi_2) h(\xi_1) h(\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2$$

$$\overline{Y^2} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2) \cdot h(\xi_2)\, d\xi_2$$

$$\overline{Y^2} = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\xi) d\xi$$

5.3. Vremenski kontinuirani sustav: veza autokorelacijske funkcije odziva i pobude (izraz, autokorelacijska funkcija impulsnog odziva). Spektar snage odziva. Prijenosna funkcija snage: izraz i svojstva.

AKF odziva:

$$R_{YY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2$$

gdje se autokorelacija impulsnog odziva može prikazati kao:

$$r_{hh}(\tau)=h(-\tau)*h(\tau)$$

Spektar snage odziva:

$$S_{YY}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$S_{YY}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2 e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_1)\int_{-\infty}^{+\infty} h(\xi_2)\int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)e^{-j\omega\tau}d\tau\,d\xi_2 d\xi_1$$

Rezultat računanja spektra snage se može prikazati kao:

$$S_{YY}(\omega)=H^*(\omega)\cdot H(\omega)\cdot S_{XX}(\omega)$$

$$S_{YY}(\omega)=|H(\omega)|^2\cdot S_{XX}(\omega)$$

Pri tom je (H(w))^2 prijenosna funkcija snage.

5.4. Veza kroskorelacijskih funkcija odziva i pobude. Spektri međusnage: izrazi i svojstva.

Kroskorelacija odziva i pobude:

$$R_{XY}(\tau)=\int R_{XX}(\tau-\xi)h(\xi)\,d\xi$$

$$R_{XY}(\tau)=R_{XX}(\tau)*h(\tau)$$

Za spektre međusnage vrijede:

$$S_{XY}(\omega)=H(\omega)\cdot S_{XX}(\omega)$$

$$S_{YX}(\omega)=H(-\omega)\cdot S_{XX}(\omega)$$

5.5. Vremenski diskretan sustav: veza autokorelacijske funkcije odziva i pobude (izraz, autokorelacijska funkcija impulsnog odziva). Spektar snage odziva. Prijenosna funkcija snage: izraz i svojstva.

AKF odziva:

$$R_{yx}(n_1,n_2)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n_1-m)\,R_{xx}(m,n_2)$$

Autokorelacija impulsnog odziva:

$$r_{hh}(k)=h(k)*h(-k)$$

Spektar snage s prijenosnom funkcijom:

$$S_{YY}(e^{j\omega})=|H(e^{j\omega})|^2\,S_{XX}(e^{j\omega})$$

6. Teorija estimacije

6.1. Definicija estimatora. Nepristranost estimatora.

Estimator *theta'* je funkcija slučajnog vektora opažanja X = (X1, X2, …, Xn) koja kao rezultat daje estimaciju od *theta*, ali sam estimator nije funkcija od *theta*.

Estimator je nepristran ako vrijedi:

$$E\left[\hat{\Theta}\right] = \Theta$$

Pristranost se može odrediti izrazom:

$$\left|E\left[\hat{\Theta}\right] - \Theta\right|$$

6.2. Estimator srednje vrijednosti.

Estimacija srednje vrijednosti na temelju n nezavisnih izmjerenih realizacija Xi slučajne varijable X i definirana je izrazom:

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Ovakav estimator je nepristran što se može prikazati izrazom:

$$E\left[\hat{\Theta}\right] = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

6.3. Estimator varijance kad srednja vrijednost nije i kada je poznata.

Kada srednja vrijednost nije poznata, koristi se sljedeći estimator srednje vrijednosti:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Za estimator srednje varijance se tada koristi izraz:

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \hat{\mu})^2$$

Kada je srednja vrijednost poznata:

$$\hat{\Theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$$

6.4. Estimacija srednje vrijednosti i kovarijancijske matrice slučajnih vektora.

Neka je X = [X1, X2, …, Xp]T slučajni vektor i neka su X1, X2, …, Xn realizacije tog slučajnog vektora. Srednju vrijednost tog slučajnog vektora možemo estimirati izrazom:

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{X}_i$$

Za slučaj da je srednja vrijednost poznata (nije estimirana), onda je izraz za estimaciju kovarijancijske matrice:

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_i - \boldsymbol{\mu})^T$$

A ako je nepoznata tad je izraz za estimator:

$$\hat{\mathbf{\Theta}} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})(\mathbf{X}_i - \hat{\boldsymbol{\mu}})^T$$

6.5. ML estimacija.

Ranije navedeni estimatori parametara slučajnih varijabli i slučajnih vektora su na neki način proizvoljni tj. nisu bili temeljeni na nekom općem principu- Za neku realizaciju x1,x2,…,xn, ML (maximum likelihood) estimacija je ona vrijednost parametra *theta* za koji je najveća vjerojatnost fX1X2…Xn(x1,x2,…,xn; *theta*) dobivanja dane realizacije. Ukoliko su X1, X2, …, Xn nezavisne realizacije slučajne varijable X s gustoćom vjerojatnosti fX(x; *theta*) onda je funkcija vjerojatnosti:

$$L(\Theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i;\Theta)$$

ML estimator se tad dobiva maksimizacijom L(*theta*), što se postiže derivacijom po *theta* i izjednačavanjem derivacije s nulom.

7. Detekcija signala

7.1. Definicija problema detekcije.

U najjednostavnijem slučaju problem odlučivanja sastoji se u odabiru jedne od dviju mogućih odluka (hipoteza) na temelju raspoloživih podataka. Problem odlučivanja u kojem postoje samo dvije moguće odluke zove se problem detekcije. Teorija detekcije bavi se metodama za donošenje odluke u problemu detekcije.

Kod problema detekcije postoje dvije moguće točne odluke i dvije moguće pogrešne odluke.Kriteriji za donošenje odluke ovise o vjerojatnostima donošenja pogrešnih ili ispravnih odluka. Problem detekcije se često svodi na mjerenje jednog parametra na temelju kojeg se donosi odluka

7.2. Kriteriji odlučivanja: MAP, ML, Bayesov kriterij.

Map kriterij - Jedan razuman kriterij je da se izabere hipoteza koja je najvjerojatnija s obzirom na opaženu vrijednost parametra. Neka su a posteriori vjerojatnosti (vjerojatnosti hipoteza nakon realizacije) dane izrazima P(H0|r) i P(H1|r). P(H0|r) je vjerojatnost da je hipoteza H0 istinita ako je izmjerena vrijednost parametra r. P(H1|r) je vjerojatnost da je hipoteza H1 istinita ako je izmjerena vrijednost parametra r. MAP (maximum a posteriori) kriterij odlučivanja je da se odabere hipoteza H1 ako vrijedi:

$$P(H_1 | r) > P(H_0 | r)$$

$$\frac{P(H_1 | r)}{P(H_0 | r)} > 1$$

ML kriterij – kriterij maksimalne vjerojatnosti kaže da se odabire hipoteza s većom vjerojatnosti, odnosno treba odabrati hipotezu H1 ako vrijedi:

$$\lambda(r) = \frac{P(r | H_1)}{P(r | H_0)} > 1$$

Bayesov kriterij – Bayersov kriterij optimizira donošenje odluka s različitim funkcijama cijena koje mogu primjerice maksimizirati vjerojatnost točne odluke ili minnimizirati vjerojatnost pogrešne odluke. Pritom vrijede vjerojatnosti hipoteza:

$$P(H_0) + P(H_1) = 1$$

$$P(D_0 | H_i) + P(D_1 | H_i) = 1$$

A prosječna cijena je:

$$\begin{aligned} C &= P(H_0)C_{10} + [1 - P(H_0)]C_{11} \\ &- P(H_0)(C_{10} - C_{00})P(D_0 | H_0) \\ &+ [1 - P(H_0)](C_{01} - C_{11})P(D_0 | H_1) \end{aligned}$$

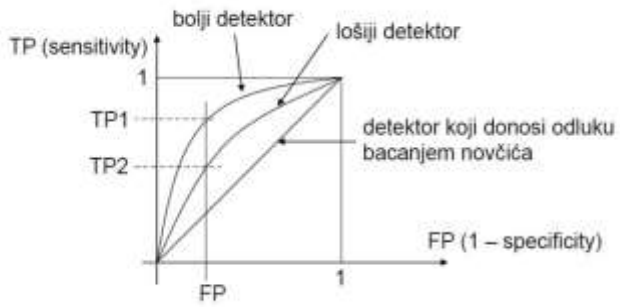
gdje Cij odgovaraju cijenama različitih situacija. Nakon provedene minimizacije sumanada, konačni izgled Bayesovog kriterija je:

$$\frac{P(r | H_1)}{P(r | H_0)} \leq \frac{P(H_0)(C_{10} - C_{00})}{[1 - P(H_0)](C_{01} - C_{11})}$$

koji ako vrijedi treba izabrati hipotezu H0, inače treba odabrati hipotezu H1. Vidi se da ako je cijena ispravne odluke jednaka nuli (C00=C11=0), a cijena pogrešne odluke jednaka jedan (C01=C10=1) onda Bayesov kriterij postaje ekvivalentan MAP kriteriju.

7.3. ROC krivulje.

Za svaki prag odlučivanja imamo određene vjerojatnosti ispravnih i pogrešnih odluka. U analizi detektora korisno je prikazati kako međusobno ovise te vjerojatnosti. Najčešće korišteni grafički prikaz su ROC krivulje. Za neki detektor, ROC krivulje pokazuju vjerojatnost korektno odabrane hipoteze H1 (TP) u ovisnosti o vjerojatnosti pogrešno odabrane hipoteze H1 (FP). Dakle kod ROC grafa nanosimo na apscisu FP (1-specifičnost) i na ordinatu TP (osjetljivost).



8. Detekcija periodičkog signala u šumu

8.1. Detekcija autokorelacijom. Izrazi i grafički prikaz.

Neka je primljeni signal f(t) = x(t) + n(t). Neka su Rff(t), Rxx(t) i Rnn(t) vremenske autokorelacijske funkcije signala f, x, i n. Računanjem autokorelacije se dobije izraz:

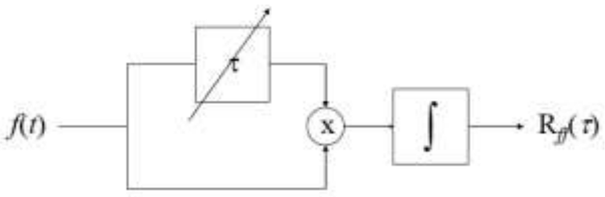
$$R_{ff}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{nn}(\tau) + R_{xn}(\tau) + R_{nx}(\tau)$$

Signal koji se detektira i šum nisu korelirani pa vrijedi:

$$R_{xn}(\tau) = R_{nx}(\tau) = 0 \quad \Rightarrow R_{ff}(\tau) = R_{xx}(\tau) + R_{nn}(\tau)$$

Iz izračunate autokorelacije se zatim provjerava za veliki vremenski pomak da li Rff ima periodički karakter što ukazuje na prisutnost signala iste frekvencije.

Grafički prikaz:

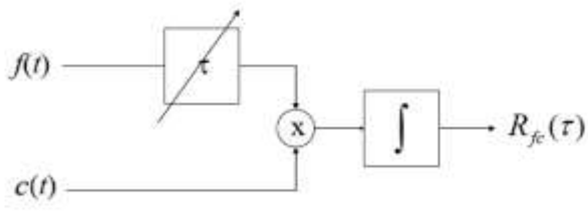


8.2. Detekcija kroskorelacijom. Izrazi i grafički prikaz.

Ako je poznata frekvencija signala koji se treba detektirati, detekcija se može obaviti kroskorelacijom primljenog signala f(t)=x(t) + n(t) s signalom iste frekvencije c(t):

$$R_{fc}(\tau) = R_{xc}(\tau) + R_{nc}(\tau)$$

Grafički prikaz:



9. Modeliranje izvora šuma

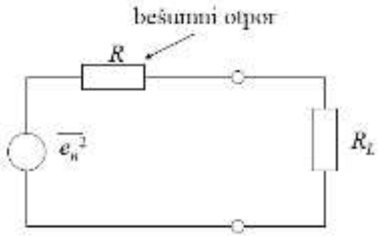
9.1. Termički šum, srednji kvadratni napon izvora termičkog šuma.

Pretpostavimo da imamo idealni (bešumni, s beskonačnom ulaznom impedancijom) voltmetar koji mjeri napon u jednom uskom frekvencijskom opsegu dw centriranom na frekvenciji w.Ako mjerimo napon na nekom realnom otporniku dobit ćemo signal koji možemo shvatiti kao jednu realizaciju nekog slučajnog procesa en(t). Ako izmjerimo šum na realnom otporniku otpora R može se vidjeti da je srednji kvadratni napon šuma jednak:

$$E[e_n^2(t)] = \overline{e_n^2(t)} = \frac{2kTRd\omega}{\pi}$$

9.2. Inkrementalna snaga izvora termičkog šuma.

Prikaz kruga:



Ako na realni otpornik priključimo opterećenje onda je inkrementalna snaga šuma prenesena na opterećenje u inkrementalnom frekvencijskom pojasu dw jednaka:

$$dN_L = \frac{\overline{e_n^2(t)\ R_L}}{(R+R_L)^2}$$

9.3. Inkrementalna raspoloživa snaga izvora termičkog šuma.

Kao što znamo maksimalna prenesena snaga je kada je RL = R .Ta maksimalna prenesena snaga zove se inkrementalna raspoloživa snaga izvora šuma i označena je s dNas:

$$dN_{as} = \frac{\overline{e_n^2(t)R}}{(R+R)^2} = \frac{\overline{e_n^2(t)}}{4R} = \frac{kTd\omega}{2\pi}$$

9.4. Efektivna temperatura šuma.

Pretpostavimo da neki izvor šuma ima inkrementalnu raspoloživu snagu dNas, srednji kvadratni napon u praznom hodu:

$$\overline{e_n^2(t)}$$

i impedanciju:

$$Z_0(\omega) = R_0(\omega) + jX_0(\omega)$$

Tad je:

$$dN_{as} = \frac{\overline{e_n^2(t)}}{4R_0(\omega)}$$

Ako sada pretpostavimo da sav šum potječe od R0(w) tada vrijedi:

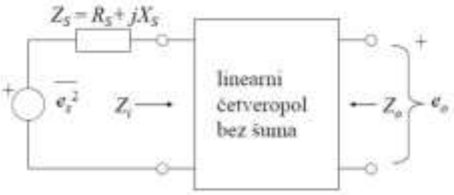
$$\overline{e_n^2(t)} = \frac{2kT_S R_0(\omega) d\omega}{\pi}$$

gdje je po definiciji TS efektivna temperatura šuma:

$$dN_{as} = \frac{kT_S d\omega}{2\pi}$$

9.5. Inkrementalno modeliranje mreža sa šumom. Pojačanje raspoložive snage šuma. Šum u kaskadnom spoju četveropola. Faktor šuma. Standardni faktor šuma.

U ovom dijelu predavanja ćemo vidjeti kako se modelira mreža sa šumom kao mreža bez šuma + vanjski izvor šuma. Analiza vrijedi u jednom uskom pojasu frekvencija dw i zato se zove inkrementalno modeliranje mreža sa šumom.



Raspoloživa snaga izvora šuma jednaka je:

$$dN_{as} = \frac{\overline{e_s^2(t)}}{4R_s}$$

Raspoloživa snaga na izlazu četveropola jednaka je:

$$dN_{aos} = \frac{\overline{e_o^2(t)}}{4R_o}$$

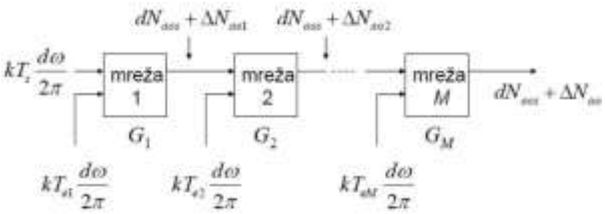
Pojačanje raspoložive snage četveropola Ga je tad definirano kao:

$$G_a = \frac{dN_{aos}}{dN_{as}} = \frac{R_s\overline{e_o^2(t)}}{R_o\overline{e_s^2(t)}}$$

Ako imamo kaskadu od M bešumnih četveropola onda pojačanje raspoložive snage šuma za cijelu kaskadu Ga dano je izrazom:

$$G_a = \prod_{i=1}^{M} G_i$$

Izgled kaskadnog spoja:



Ukupna inkrementalna snaga šuma na izlazu kaskade jednaka je onda:

$$dN_{aos} + \Delta N_{ao} = k\frac{d\omega}{2\pi}(T_s + T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1G_2} + \cdots + \frac{T_{eM}}{G_1G_2\cdots G_{M-1}})G_1G_2\cdots G_M$$

Ekvivalentna temperatura vlastitog šuma za cijelu kaskadu jednaka je dakle:

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1G_2} + \cdots + \frac{T_{eM}}{G_1G_2\cdots G_{M-1}}$$

Faktor šuma (ili radni faktor šuma) je odnos ukupne inkrementalne raspoložive snage šuma na izlazu pojačala i inkrementalne raspoložive snage šuma na izlazu pojačala od samog izvora:

$$F = \frac{dN_{ao}}{dN_{aos}} = \frac{dN_{aos} + \Delta N_{ao}}{dN_{aos}}$$

Standardni faktor šuma je faktor šuma izračunat za temperaturu ulaznog šuma Ts = T0 = 290 K:

$$F_0 = 1 + \frac{T_e}{T_0}$$

9.6. Modeliranje realnih mreža sa šumom. Srednji faktor šuma. Srednji standardni faktor šuma. Srednja temperatura šuma. Frekvencijski pojas šuma.

U realnim mrežama frekvencijski opseg nije inkrementalan (infinitezimalan).Veličine kao što su raspoloživa snaga šuma, pojačanje raspoložive snage šuma, temperatura šuma i faktor šuma postaju ovisne o frekvenciji.

Srednji radni faktor šuma je kvocijent ukupne izlazne raspoložive snage šuma Nao iz mreže ukupne raspoložive snage šuma Naos na izlazu od samog izvora:

$$\overline{F_{op}} = \frac{N_{ao}}{N_{aos}}$$

Srednji standardni faktor šuma je srednji faktor šuma izračunat za standardni izvor šuma temperature Ts = T0 = 290 K:

$$\overline{F_o} = \frac{\int_0^\infty F_o G_a d\omega}{\int_0^\infty G_a d\omega}$$

Definicija srednje temperature izvora šuma:

$$\overline{T_s} = \frac{\int_0^\infty T_s G_a d\omega}{\int_0^\infty G_a d\omega}$$

Frekvencijski pojas šuma se definira kao:

$$W_N = \frac{\int_0^\infty G_a(\omega) d\omega}{G_a(\omega_0)}$$

10. Mjerenje gustoće spektra snage

10.1. Mjerenje pomoću NP filtra. Izrazi i blok dijagram.

Ideja: slučajni signal filtrirati s NP filtrom promjenjive granične frekvencije Wg i mjeriti snagu signala P(Wg) u ovisnosti od granične frekvencije filtra Wg.

$$P(\omega_g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_g} S_{XX}(\omega)d\omega$$

Nakon derivacije po Wg se dobije izraz sa spektralnu gustoću snage:

$$S(\omega_g) = \pi\frac{dP(\omega_g)}{d\omega_g}$$

Blok dijagram:

10.2. Mjerenje pomoću uskog PP filtra. Izrazi i blok dijagram.

Način mjerenja gustoće spektra snage uskim pojasnopropusnim filtrom promjenjive centralne frekvencije. Usrednjavanjem snage kroz dovoljno dugi interval se može dobiti:

$$P_{YY}(\omega_f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2 d\omega \approx \frac{1}{\pi}S_{XX}(\omega_f)\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}S_{XX}(\omega_f)|H(\omega_f)|^2 W_N$$

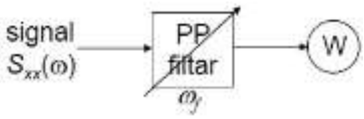
Gdje je Wn:

$$W_N = \frac{\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2 d\omega}{|H(\omega_f)|^2}$$

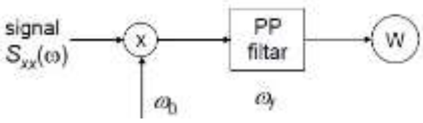
Spektar snage je konačno:

$$S_{XX}(\omega_f) = \frac{\pi\, P_{YY}(\omega_f)}{W_N|H(\omega_f)|^2}$$

Blok dijagram:



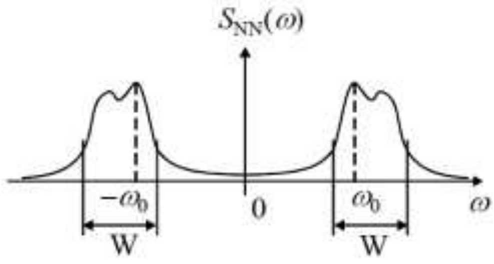
Blok dijagram za alternativni način mjerenja:



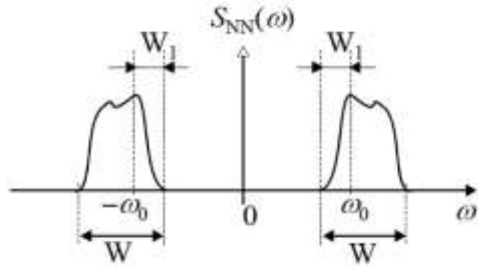
11. Pojasni, pojasno ograničeni i uskopojasni procesi

11.1. Definicije pojasnih, pojasno ograničenih i uskopojasnih slučajnih procesa.

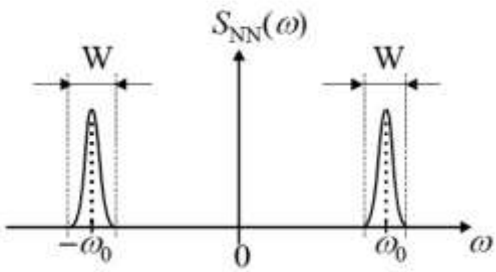
Slučajni proces N(t) nazivamo pojasnim ako funkcija gustoće spektra snage SNN(w) ima značajni dio komponenti u pojasu širine W koji ne sadrži frekvenciju w = 0.Vrijednost SNN(0) ne mora biti jednaka nuli, ali mora biti puno manja od ostalih vrijednosti kako bi se proces razlikovao od niskopojasnog procesa.



Ako izvan određenog frekvencijskog pojasa W funkcija gustoće spektra snage ima vrijednost SNN(w)=0, slučajan se proces naziva pojasno ograničenim. Ova vrsta slučajnih procesa nam često služi za aproksimaciju slučajnih signala u praksi, kako bismo ih mogli lakše analizirati.



Uskopojasni slučajni proces je pojasno ograničeni proces za koji vrijedi W << w0.



11.2. Analitički prikaz pojasno ograničenih i uskopojasnih procesa.

Uskopojasni proces možemo zapisati u obliku:

$$N(t) = A(t)[\cos(\omega_0 t + \Theta(t))]$$

gdje je A(t) slučajni proces koji opisuje sporu promjenu amplitude, *theta*(t) proces koji opisuje sporu promjenu faze, a w0 je neka konstantna frekvencija. Zapis uskopojasnog slučajnog procesa u prethodnom obliku ekvivalentan je zapisu u obliku:

$$N(t) = X(t)\cos(\omega_0 t) - Y(t)\sin(\omega_0 t),$$
$$X(t) = A(t)\cos[\Theta(t)]$$
$$Y(t) = A(t)\sin[\Theta(t)]$$

Prethodni prikazi vrijede i za pojasno ograničene slučajne procese.

12. Identifikacija sustava mjerenjem kroskorelacije

12.1. Metoda identifikacije sustava mjerenjem kroskorelacije s bijelim šumom. Izrazi i blok dijagrami.

Za identifikaciju sustava ovom metodom koristimo izvor bijelog šuma s konstantnom gustoćom spektra snage gdje je N0 konstanta:

$$S_{XX}(\omega) = \frac{N_0}{2}$$

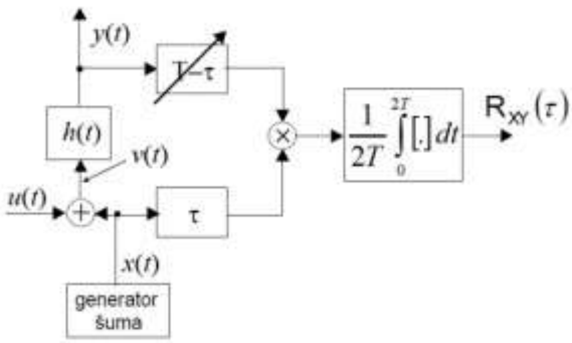
Pretpostavimo da na ulaz sustava koji se identificira s impulsnim odzivom h(t) dovedemo bijeli šum, te izračunamo kroskorelaciju između ulaza i izlaza:

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= \int R_{XX}(\tau - \nu) h(\nu) d\nu \\ &= \frac{N_0}{2} \int \delta(\tau - \nu) h(\nu) d\nu = \frac{N_0}{2} h(\tau) \end{aligned}$$

Pa se impulsni sustav može izračunati kao:

$$h(\tau) = \frac{2}{N_0} R_{XY}(\tau)$$

Blok dijagram:

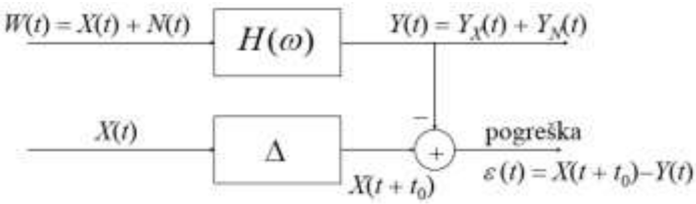


13. Optimalni linearni sustavi

13.1. Wienerov filtar: model, matematički izrazi. Ostvarivost, pogreška filtra, optimalna karakteristika. Primjeri.

Sustav koji najbolje izdvaja slučajni signal iz aditivnog šuma, uz eventualni vremenski pomak je Wienerov filtar. Sustav se projektira tako da njegov izlaz bude najbolja procjena (estimacija) prošle, sadašnje ili buduće trenutne vrijednosti realizacije slučajnog procesa. "Najbolje" ovdje znači "uz najmanju kvadratnu pogrešku" procjene.

Blok model:



Optimalna prijenosna funkcija filtra koja najbolje izdvaja signal iz šuma je:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{S_{XX}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} e^{j\omega t_0}$$

Općenito, impulsni odziv filtra je nekauzalan. Nekauzalni odziv je neostvariv no možemo ga aproksimirati ako stavimo dovoljno veliko kašnjenje t0: nekauzalni dio odziva postaje zanemariv.

Srednja vrijednost (očekivanje) kvadrata greške (najmanja među svim linearnim sustavima) estimacije je određena ostatkom:

$$E\left[\varepsilon^2(t)\right]_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{XX}(\omega) S_{NN}(\omega)}{S_{XX}(\omega) + S_{NN}(\omega)} d\omega$$

13.2. Prilagođeni filtar: model, odnos signal-šum, izrazi. Odziv prilagođenog filtra. Prilagođeni filtar za bijeli šum. Primjeri.

Prilagođeni filtar maksimizira odnos signal-šum za deterministički signal uz prisutnost slučajnog šuma u nekom odabranom trenutku t0, gdje je definicija SNR-a:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right) = \frac{\left|x_o(t_0)\right|^2}{E\left[N_o^2(t)\right]}$$

Karakteristika filtra koja maksimizira taj odnos je:

$$H_{opt}(\omega) = \frac{X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}}{2\pi \cdot c \cdot S_{NN}(\omega)}$$

Za bijeli šum je prilagođeni filtar proporcionalan konjugiranom spektru signala jer Snn(W) ne ovisi o frekvenciji, to jest vrijedi:

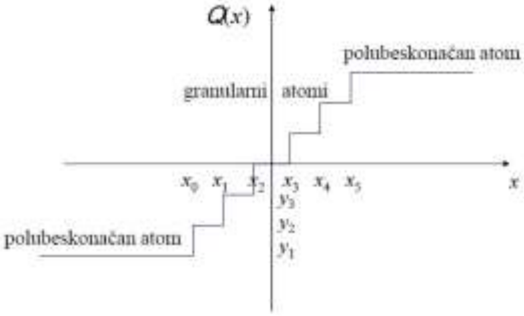
$$H_{opt}(\omega) = k \cdot X^*(\omega) e^{-j\omega t_0}$$

14. Skalarna kvantizacija

14.1. Model kvantizacije. Mjere greške kvantiziranog signala ili slučajnog procesa.

Amplitudna kvantizacija je transformacija amplitude signala x(n) u trenutku n u amplitudu y(n) iz konačnog skupa mogućih amplituda.Bezmemorijska, trenutna ili skalarna kvantizacija je transformacija amplitude ne ovisi o prethodnim ili budućim uzorcima (preslikavanje Q : R e C gdje je C ={y1,y2,…,yN} e R konačan skup sa N elemenata).Jednostavan postupak (primjer: A/D pretvarač) koji nije optimalan za prijenos ili pohranu podataka, osobito ako su uzorci statistički ovisni.

Q(x) je karakteristika kvantizatora; monotono rastuća funkcija s rezolucijom r = log2N.



Općeniti izraz za mjeru greške:

$$D = E\left(|X - Q(X)|^m \right)$$

Gdje različiti m daje različite mjere (m=1 srednja apsolutna greška, m=2 srednja kvadratna greška). Srednja kvadratna greška se može izračunati i preko:

$$D_2 = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - y_i)^2 f_x(x)\, dx$$

14.2. Odnos signal-šum za jednoliki kvantizator. Pretpostavke modela i izvod.

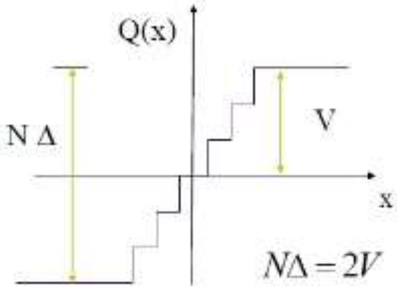
Odnos signal / šum:

$$SNR = 10\log_{10}\frac{E\left[x^2\right] \xleftarrow{\text{snaga signala}}}{D_2 \xleftarrow{\text{snaga šum}}}$$

Pretpostavke modela po kojima se moze izracunati SNR:
1) x i e nekorelirani, E[x·e]= E[x] ·E[e], što je čigledno netočno: e je deterministička funkcija od x.Ipak, za visoke rezolucije približno vrijedi.
2) e ima jednoliku PDF.
3) e je bijeli šum: sve su frekvencije jednako zastupljene.

V je najveća vršna vrijednost signala, sigma je standardna devijacija signala te je faktor ispune:

$$\gamma = V/\sigma$$



Izvod za SNR iz prethodnih parametara:

$$\Delta = \frac{2V}{N} = \frac{2\sigma\gamma}{N}$$

$$D_2 = E\left[\epsilon^2\right] = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{3}\sigma^2\gamma^2 N^2$$

- umjesto N, uvedimo rezoluciju u bitovima:

$$N = 2^r \qquad D_2 = \frac{1}{3}\sigma^2\gamma^2 2^{-2r}$$

$$SNR = 10\log_{10}\frac{\sigma^2}{D_2} = 10\log_{10}\left[3\gamma^{-2}2^{2r}\right]$$

$$= \left[20\log_{10}2\right]\cdot r + 10\log_{10}\left[3\gamma^{-2}\right]$$

$$SNR = 6{,}02 \cdot r + C_1 \text{ dB}$$

15. Praktične primjene teorije

15.1. Šum u AM sustavu, blok dijagram i matematički model, izraz za odnos signal/šum.

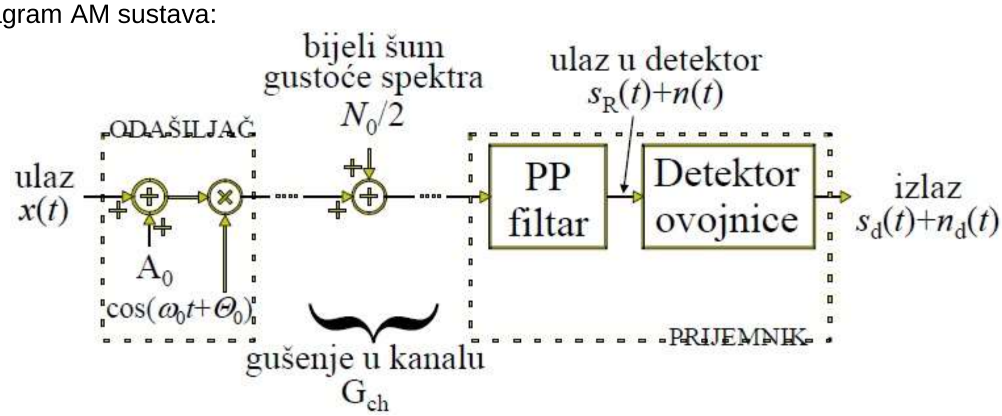
Amplitudna modulacija se koristi za radio prijenos kratkim valom te za prijenos TV signala. Amplituda visokofrekvencijskog vala nosioca je linearna funkcija niskofrekvencijskog signala x(t). Budući da je amplituda pozitivna veličina, signalu najprije dodajemo konstantnu vrijednost A0. Amplitudno modulirani signal:

$$s_{AM}(t) = [A_0 + x(t)]\cos(\omega_0 t)$$

Spektar AM signala:

$$F[s_{AM}(t)] = \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \pi A_0 \delta(\omega+\omega_0) + \pi A_0 \delta(\omega-\omega_0)$$

Blok dijagram AM sustava:



gdje su: Gch konstanta gušenja prijenosnog kanala, N0/2 gustoća spektra snage bijelog Gaussovog šuma, sR primljeni signal nakon filtriranja, n(t) pojasni šum (nastao od bijelog pojasnopropusnim filtriranjem), sd i nd izlazni signal i šum nakon demodulacije.

Odnos signal/šum:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{AM} = \frac{G_{ch}^2\overline{X^2(t)}}{\overline{N^2(t)}}.$$

Ili:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{AM} = \frac{2\pi G_{ch}^2\overline{X^2(t)}}{N_0\Omega_{AM}}$$

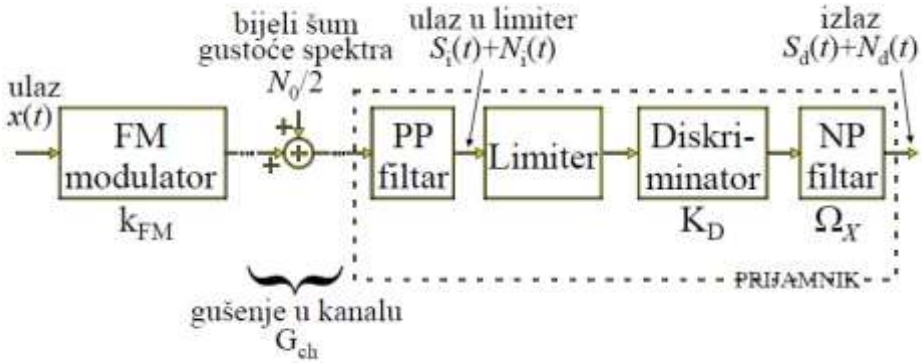
Odnos signal/šum bit će bolji ako je manje gušenje u kanalu, jači ulazni signal, užeg frekvencijskog pojasa te manji šum komunikacijskog kanala. Kako su šum i prijenosni medij obično zadani, kvalitetu prijenosa možemo u praksi povećati samo većom snagom signala.

15.2. Šum u FM sustavu: blok dijagram i matematički model. Pretpostavke modela i opisna usporedba rezultata sa šumom AM sustava.

Valni oblik FM signala dan je sa:

$$S_{FM}(t) = A\cos\left[\omega_0 t + k_{FM}\int X(t)dt\right]$$

Blok dijagram:

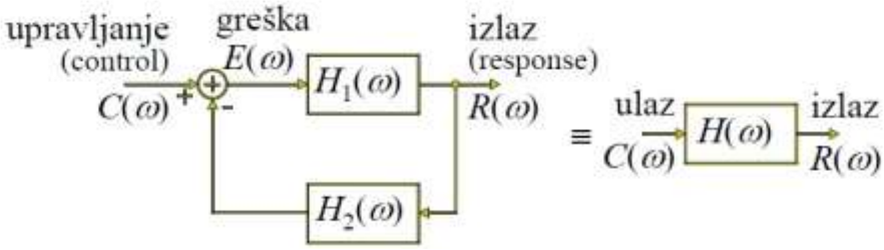


Odnos signal/šum:

$$\left(\frac{S_o}{N_o}\right)_{FM} = \frac{6}{\xi^2}\left(\frac{\Delta\omega}{\Omega_X}\right)^3\left(\frac{S_i}{N_i}\right)_{FM}$$

15.3. Šum u sustavu s povratnom vezom, blok dijagram i matematički model, izraz za odnos signal/šum.

Blok dijagram:



Ovim je dijagramom prikazan tipičan sustav automatskog upravljanja pomoću regulatora. Ponašanje izvršnog organa H1(w) određujemo izborom regulatora H2(w). Ako npr. želimo dobiti derivacijsko svojstvo u vremenskom području, H2(w) treba imati oblik H2(w)=1/(jw). Ako je pak H1(w)=1, dobivamo slijedilo. Ekvivalentna prijenosna funkcija je:

$$H(\omega) = \frac{H_1(\omega)}{1 + H_1(\omega)H_2(\omega)}$$

15.4. Šum u sustavu upravljanja sa slijeđenjem faze (PLL-u). Svrha, blok dijagram i prijenosna funkcija. Spektar snage demoduliranog signala.