Branimir Novoselnik
0036444731
1.D_AUT

Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb
Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

Sustavi s diskretnim događajima

1. domaća zadaća :
Analiza sustava s diskretnim događajima pomoću max-plus modela i automata

24.4.2012

## 1.1 Zadatak 1

Razmatraju se dvije linije vlakova između 4 grada: A, B, C i D. Na liniji 1 vlak vozi od grada A, preko B do C, i natrag (oznakom A1 → B1 → C1 → B2 → A1). Na liniji 2 vlak vozi od grada A, preko B do D, i natrag (oznakom A2 → B3 → D1 → B4 → A2). Vremena trajanja puta prikazana su u tablici 1.1.

**Tablica 1.1:** Vremena trajanja puta

| segment | A1→B1 | B1→C1 | C1→B2 | B2→A1 | A2→B3 | B3→D1 | D1→B4 | B4→A2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| trajanje puta [min] | 60 | 80 | 86 | 58 | 60 | 35 | 36 | 58 |

Zadana je i sinkronizacija između linija:

1. vlak u B1 čeka vlak sa segmenta D1→B4 (prekrcaj putnika koji idu iz D u C);
2. vlak u B3 čeka vlak sa segmenta C1→B2 (prekrcaj putnika koji idu iz C u D).

*Napomena: vrijeme prekrcaja uključeno je u vrijeme putovanja na segmentima.*

(a) U početnom trenutku vrijedi:

- Linija 1: po jedan vlak kreće iz A1, B1, C1 i B2 (ukupno četiri vlaka).
- Linija 2: po jedan vlak kreće iz A2 i B4. Dodatno, jedan vlak se nalazi na polovici A2→B3 i jedan vlak na polovici B4→A2 (ukupno četiri vlaka).

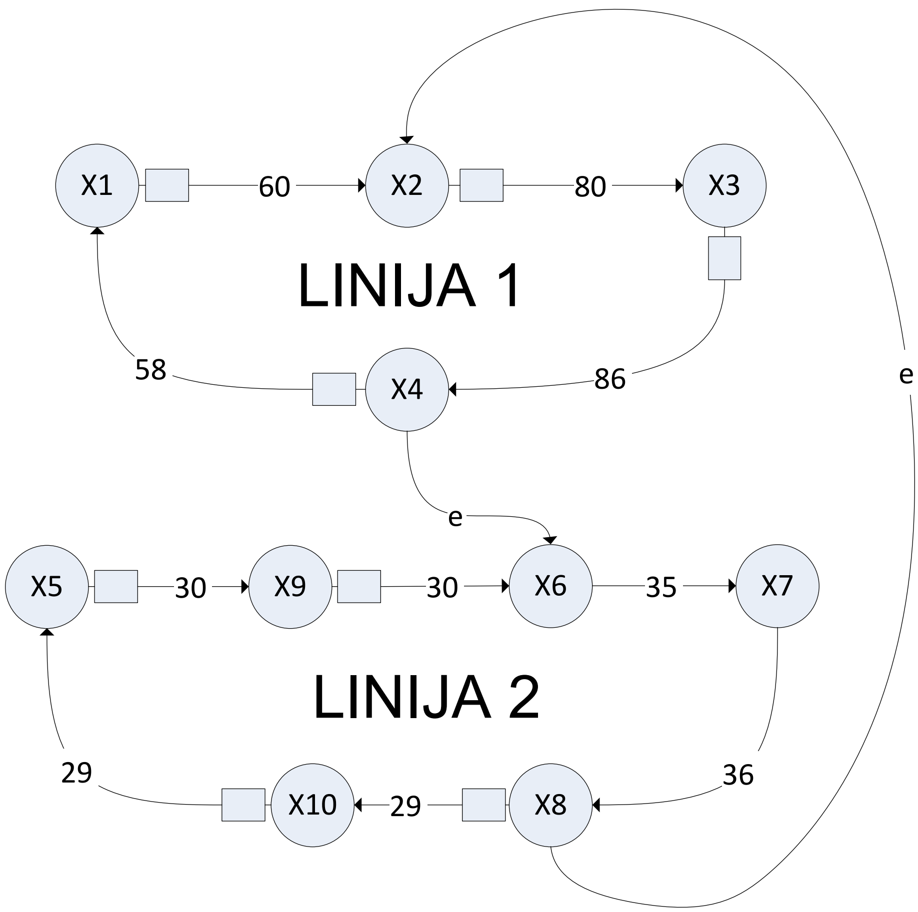
Odrediti matrice max-plus modela sustava, početno stanje, prve četiri vrijednosti vektora stanja te prosječan ciklus sustava. Koji je kritični ciklus grafa? Objasniti.

(b) Ako je broj vlakova na linijama nepromjenjiv, kao i uvjeti sinkronizacije linija, na koji način se može smanjiti prosječni ciklus sustava? Odrediti matrice max-plus modela, početno stanje i ciklus za taj slučaj.

### 1.1.1 Rješenje 1.(a) zadatka

Na slici 1.1 prikazan je graf sustava iz 1.(a) zadatka. Značenje događaja $\{x_1, \ldots, x_{10}\}$ navedeno je u nastavku:

- $x_1$ - polazak vlaka iz grada A u grad B na liniji 1;
- $x_2$ - polazak vlaka iz grada B u grad C na liniji 1;
- $x_3$ - polazak vlaka iz grada C u grad B na liniji 1;
- $x_4$ - polazak vlaka iz grada B u grad A na liniji 1;
- $x_5$ - polazak vlaka iz grada A u grad B na liniji 2;
- $x_6$ - polazak vlaka iz grada B u grad D na liniji 2;
- $x_7$ - polazak vlaka iz grada D u grad B na liniji 2;
- $x_8$ - polazak vlaka iz grada B u grad A na liniji 2;
- $x_9$ - polazak vlaka s polovice puta između gradova A i B prema gradu B na liniji 2;
- $x_{10}$ - polazak vlaka s polovice puta između gradova B i A prema gradu A na liniji 2;




**Slika 1.1:** Graf koji predstavlja sustav iz 1.(a) zadatka.

Na grafu je pomoću kvadrata označeno početno stanje sustava. Iz grafa direktno pišemo max-plus model sustava:

$$
\begin{aligned}
x_1(k) &= 58 \otimes x_4(k-1); \\
x_2(k) &= 60 \otimes x_1(k-1) \oplus e \otimes x_8(k); \\
x_3(k) &= 80 \otimes x_2(k-1); \\
x_4(k) &= 86 \otimes x_3(k-1); \\
x_5(k) &= 29 \otimes x_{10}(k-1); \\
x_6(k) &= 30 \otimes x_9(k-1) \oplus e \otimes x_4(k); \\
x_7(k) &= 35 \otimes x_6(k); \\
x_8(k) &= 36 \otimes x_7(k); \\
x_9(k) &= 30 \otimes x_5(k-1); \\
x_{10}(k) &= 29 \otimes x_8(k-1).
\end{aligned}
\tag{1-1}
$$

Iz sustava jednadžbi 1-1 možemo očitati matrice $\boldsymbol{A_0}$ i $\boldsymbol{A_1}$.

$$
\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix}
\tag{1-2}
$$

$$
\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & 80 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 86 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix}
\tag{1-3}
$$

Matricu $\boldsymbol{A_0^*}$ možemo izračunati preko sljedeće formule:

$$
\boldsymbol{A_0^*} = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{A_0}^1 \oplus \boldsymbol{A_0}^2 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{A_0}^{10},
\tag{1-4}
$$

gdje je $\boldsymbol{E}$ jedinična matrica u kontekstu max-plus algebre ($e$ na glavnoj dijagonali i $\varepsilon$ izvan glavne dijagonale).

$$
\boldsymbol{A}_0^* = \begin{bmatrix}
e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & e & \varepsilon & 71 & \varepsilon & 71 & 36 & e & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon & 35 & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 71 & \varepsilon & 71 & 36 & e & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e
\end{bmatrix} \tag{1-5}
$$

Iz 1-5 i 1-3 slijedi matrica sustava:

$$
\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0^* \otimes \boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix}
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
60 & \varepsilon & 157 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 101 & \varepsilon \\
\varepsilon & 80 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 86 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 \\
\varepsilon & \varepsilon & 86 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 121 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 65 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & 157 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 101 & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 30 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 29 & \varepsilon & \varepsilon
\end{bmatrix} \tag{1-6}
$$

Sada sustav možemo opisati na sljedećom matričnom jednadžbom:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{x}(k). \tag{1-7}$$

Početno stanje sustava opisujemo vektorom stanja $\boldsymbol{x}(0)$:

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} e & e & e & e & e & \varepsilon & \varepsilon & e & e & e \end{bmatrix}^\mathsf{T}. \tag{1-8}$$

Prvih nekoliko vrijednosti vektora stanja možemo dobiti korištenjem jednadžbe 1-7.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(1) &= \begin{bmatrix} 58 & 157 & 80 & 86 & 29 & 86 & 121 & 157 & 30 & 29 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(2) &= \begin{bmatrix} 144 & 237 & 237 & 166 & 58 & 166 & 201 & 237 & 59 & 186 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(3) &= \begin{bmatrix} 224 & 394 & 317 & 323 & 215 & 323 & 358 & 394 & 88 & 266 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(4) &= \begin{bmatrix} 381 & 474 & 474 & 403 & 295 & 403 & 438 & 474 & 245 & 423 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(5) &= \begin{bmatrix} 461 & 631 & 554 & 560 & 452 & 560 & 595 & 631 & 325 & 503 \end{bmatrix}^\mathsf{T}
\end{aligned} \tag{1-9}
$$

Oduzimanjem susjednih vrijednosti vektora stanja dobivamo:

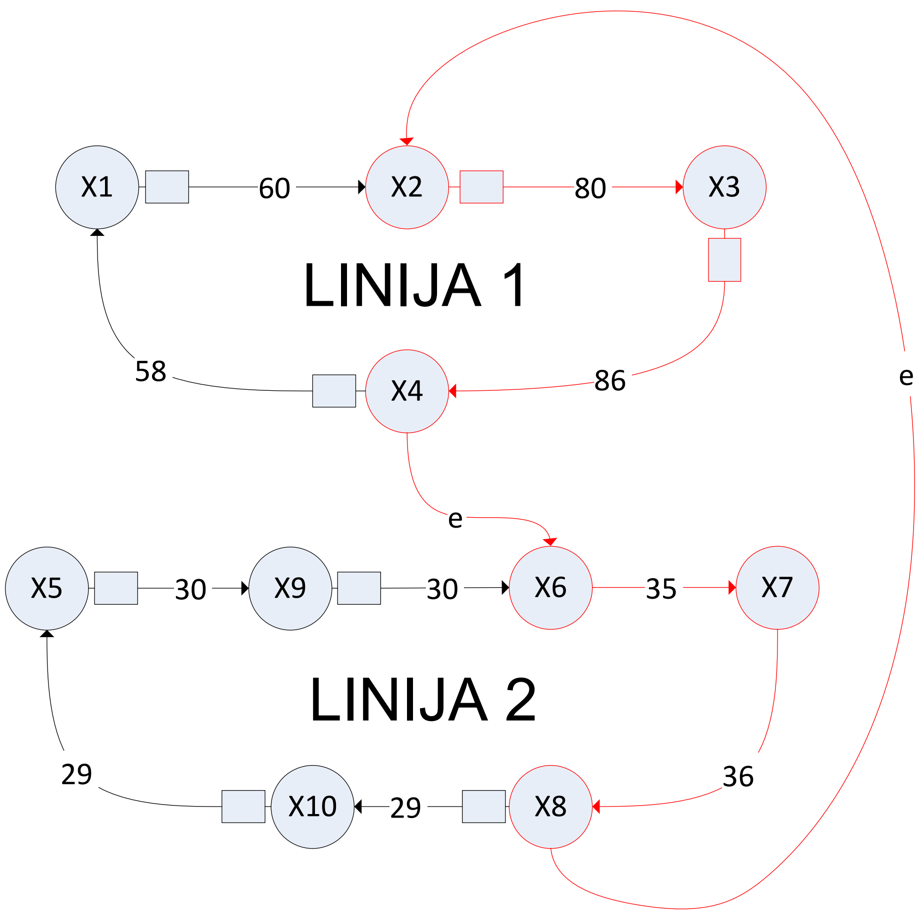
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(1) - \boldsymbol{x}(0) &= \begin{bmatrix} 58 & 157 & 80 & 86 & 29 & \varepsilon & \varepsilon & 157 & 30 & 29 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(2) - \boldsymbol{x}(1) &= \begin{bmatrix} 86 & 80 & 157 & 80 & 29 & 80 & 80 & 80 & 29 & 157 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(3) - \boldsymbol{x}(2) &= \begin{bmatrix} 80 & 157 & 80 & 157 & 157 & 157 & 157 & 157 & 29 & 80 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(4) - \boldsymbol{x}(3) &= \begin{bmatrix} 157 & 80 & 157 & 80 & 80 & 80 & 80 & 80 & 157 & 157 \end{bmatrix}^\mathsf{T} \\
\boldsymbol{x}(5) - \boldsymbol{x}(4) &= \begin{bmatrix} 80 & 157 & 80 & 157 & 157 & 157 & 157 & 157 & 80 & 80 \end{bmatrix}^\mathsf{T}
\end{aligned} \tag{1-10}
$$

Prosječan ciklus sustava je:

$$\lambda = \frac{trace(\boldsymbol{A})}{1} \oplus \frac{trace(\boldsymbol{A}^2)}{2} \oplus \frac{trace(\boldsymbol{A}^3)}{3} \oplus \ldots \oplus \frac{trace(\boldsymbol{A}^{10})}{10} = 118.5 \qquad (1\text{-}11)$$

Kao što se vidi iz izraza 1-10, u stacionarnom stanju se za svaki čvor izmjenjuju dva ciklusa - 157 i 80, što znači da je prosječni ciklus $\frac{80+157}{2} = 118.5 = \lambda$. Do istog rezultata dolazimo ako gledamo izraz 1-9. Periodičko ponašanje se počne događati nakon $k = k_0 = 3$ uz $r = 2$ pa je prema formuli $\lambda = \frac{x_i(k+r) - x_i(k)}{r} = \frac{237}{2} = 118.5$ U fizikalnom kontekstu našeg sustava to bi značilo da će putnik u bilo kojem gradu bilo koji vlak čekati u najgorem slučaju (ako mu je prethodni vlak baš otišao pred nosom) 157 minuta ili 80 minuta ako je u prošlom ciklusu netko čekao 157 min na novi vlak, tj. u prosjeku 118.5 minuta.

Kritičan ciklus u grafu predstavlja ona kružna staza u grafu koja ima maksimalnu srednju težinu (tj. jednaku $\lambda$). Srednja težina kružne staze je definirana kao zbroj težina svih segmenata na stazi kroz broj paleta na stazi. U našem slučaju to je kružna staza $\{x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_7 \to x_8 \to x_2\}$, čija je srednja težina $\frac{80+86+0+35+36+0}{2} = 118.5 = \lambda$. Na slici 1.2 je prikazana ta kritična kružna staza.




**Slika 1.2:** Crvenom bojom je istaknuta kritična kružna staza.

Svi proračuni s matricama po max-plus algebri napravljeni su u *Matlabu*, pa je u nastavku priložen sav korišteni Matlab kod za ovaj zadatak.

**Matlab kod 1:** mpm.m - klasa koja implementira max-plus algebru nad matricama

```
classdef mpm
   % Max-plus matrix.
   % Class that implements max-plus algebra. Object of class MPM is
   % essentially a matrix with redefined operations like matrix
   % product or matrix addition according to max-plus model.
   %
   % (c) Branimir Novoselnik, FER, 2012.

   properties
      mat
   end

   % Class methods
   methods
      function obj = mpm(A)
         % Construct a mpm object using the matrix supplied
         if isa(A,'mpm')
            obj.mat = A.mat;
         else
            obj.mat = A;
         end
      end % mpm
      function obj = setmat(obj,A)
         if ¬isa(A,'double')
            error('Matrix must be of class double')
         end
         obj.mat = A;
      end % setmat

      function c = double(obj)
         c = obj.mat;
      end % double

      function disp(obj)
         % DISP Display object in MATLAB syntax
         disp(obj.mat);
      end % disp

      function C = mtimes(obj1,obj2)
         % MTIMES  Implements obj1 * obj2 for mpm
         A=double(obj1);
         B=double(obj2);
         [n1 m1] = size(A);
         [n2 m2] = size(B);
         if (m1 ≠ n2)
             error('Inner matrix dimensions must agree.');
         end
         C=-Inf(n1,m2);
         for i=1:n1
            for j=1:m2
                for k=1:m1
                    C(i,j) = max(C(i,j),A(i,k)+B(k,j));
                end
            end
         end
         C=mpm(C);
      end % mtimes

      function C = plus(obj1,obj2)
```

```
           % PLUS   Implements obj1 + obj2 for mpm.
           A=double(obj1);
           B=double(obj2);
           [n1 m1] = size(A);
           [n2 m2] = size(B);
           if (n1 ≠ n2 || m1 ≠ m2)
               error('Inner matrix dimensions must agree.');
           end
           C=Inf(n1,m1);
           for i=1:n1
               for j=1:m1
                   C(i,j)=max(A(i,j),B(i,j));
               end
           end
           C=mpm(C);
        end % plus

        function C=ctranspose(obj)
            % CTRANSPOSE Implements ctranspose for mpm.
            C=mpm(obj.mat');
        end % ctranspose

        function C=transpose(obj)
            % TRANSPOSE Implements transpose for mpm.
            C=mpm(obj.mat.');
        end % transpose

        function d = size(obj)
            % SIZE Implements size for mpm.
            d = size(obj.mat);
        end % size

        function t = trace(obj)
            % TRACE Implements trace for mpm.
            d = size(obj);
            if (d(1) ≠ d(2))
                error('Matrix must be square!')
            end
            t = max(diag(obj.mat)); % returns double
        end % trace

        function C = mpower(obj,b)
            % MPOWER Implements mpower for mpm.
            d=size(obj);
            if(d(1)≠d(2))
                error('Matrix must be square!')
            end
            C = eye(obj);
            for i=1:b
                C=C*obj;
            end
        end % mpower

        function I = eye(obj)
            % EYE Creates size(obj) max-plus identity matrix.
            d=size(obj);
            if(d(1)≠d(2))
                error('Matrix must be square!')
            end
            tmp=-Inf(d(1));
```

```
            tmp(1:d(1)+1:d(1)*d(1))=0;
            I=mpm(tmp);
        end % eye

        function C = mrdivide(obj1, obj2)
            % MRDIVIDE Implements mrdivide for mpm.
            C = mpm(obj1.mat/obj2.mat);
        end % mrdivide

        function C = mldivide(obj1, obj2)
            % MLDIVIDE Implements mldivide for mpm.
            C = mpm(obj1.mat\obj2.mat);
        end % mldivide

        function C=minus(obj1,obj2)
            % MINUS Implements obj1-obj2 for mpm.
            A=double(obj1);
            B=double(obj2);
            [n1 m1] = size(A);
            [n2 m2] = size(B);
            if (n1 ~= n2 || m1 ~= m2)
              error('Inner matrix dimensions must agree.');
            end
            C=mpm(A-B);
        end % minus
    end % methods
end % classdef
```

**Matlab kod 2:** zad1a.m - skripta u kojoj su napravljeni svi proračuni iz 1.(a) zadatka

```
% SSDD - 1. domaća zadaća
% 1.(a) zadatak
%
% (c) Branimir Novoselnik, FER, 2012.

clear; clc;
% konstante
eps = -Inf;
e = 0;
% matrica A0
A0 = mpm([ -Inf(1,10);
           -Inf(1,7) e -Inf(1,2);
           -Inf(1,10);
           -Inf(1,10);
           -Inf(1,10);
           -Inf(1,3) e -Inf(1,6);
           -Inf(1,5) 35 -Inf(1,4);
           -Inf(1,6) 36 -Inf(1,3);
           -Inf(1,10);
           -Inf(1,10) ]);
% matrica A1
A1 = mpm([ -Inf(1,3) 58 -Inf(1,6);
           60 -Inf(1,9);
           eps 80 -Inf(1,8);
           eps eps 86 -Inf(1,7);
           -Inf(1,9) 29;
           -Inf(1,8) 30 eps;
           -Inf(1,10);
           -Inf(1,10);
```

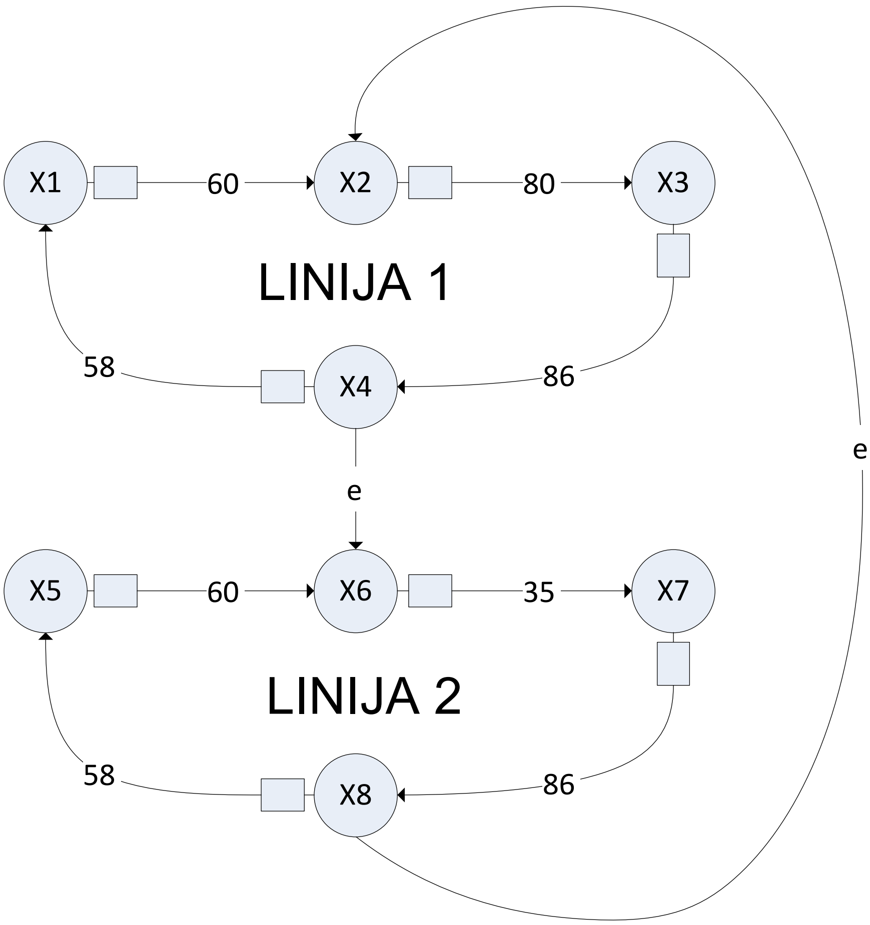
```
            -Inf(1,4) 30 -Inf(1,5);
            -Inf(1,7) 29 eps eps ]);
% proračun matrice A0*
A0z=eye(mpm(eye(10)));
for i=1:10
    A0z=A0z+A0^i;
end
% proračun matrice sustava A
A = A0z*A1;
% početno stanje sustava x0
x0=mpm([e e e e e eps eps e e e]');
% proračun prosječnog ciklusa sustava
lambda=mpm(-Inf);
for i=1:10
    lambda=lambda+mpm(trace(A^i)/i);
end
disp(['lambda = ' mat2str(double(lambda))])
% proračun i ispis prvih nekoliko
% vrijednosti vektora stanja sustava
xk = x0;
for i=1:5
    xkp1 = A*xk;
    disp(['x' mat2str(i) ''' = ' mat2str(double((xkp1)'))])
    disp(['(x' mat2str(i) '-x' mat2str(i-1) ')'' = ' ...
       mat2str(double((xkp1-xk)'))])
    xk=xkp1;
end
```

### 1.1.2 Rješenje 1.(b) zadatka

Kao što se može vidjeti iz slike 1.2, kritični ciklus se može smanjiti tako da se u početnom stanju palete premjeste iz čvorova $x_9$ i $x_{10}$ u čvorove $x_6$ i $x_7$. Drugim riječima, u tom slučaju vlakovi u početnom trenutku neće kretati s polovice segmenta A2→B3, odnosno B4→A2, već iz B3 prema D1, odnosno iz D1 prema B4. To je prikazano grafom na slici 1.3.

Sada je max-plus model sustava:

$$
\begin{aligned}
x_1(k) &= 58 \otimes x_4(k-1);\\
x_2(k) &= 60 \otimes x_1(k-1) \oplus e \otimes x_8(k);\\
x_3(k) &= 80 \otimes x_2(k-1);\\
x_4(k) &= 86 \otimes x_3(k-1);\\
x_5(k) &= 58 \otimes x_8(k-1);\\
x_6(k) &= 60 \otimes x_5(k-1) \oplus e \otimes x_4(k);\\
x_7(k) &= 35 \otimes x_6(k);\\
x_8(k) &= 36 \otimes x_7(k).
\end{aligned}
\tag{1-12}
$$




**Slika 1.3:** Graf koji predstavlja sustav iz 1.(b) zadatka.

Istim postupkom kao u prethodnom zadatku dolazimo do matrica sustava te prosječnog ciklusa sustava.

$$\boldsymbol{A_0} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{1-13}$$

$$\boldsymbol{A_1} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 80 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 86 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon \end{bmatrix}. \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}^{*} = \boldsymbol{E} \oplus \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}{}^{1} \oplus \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}{}^{2} \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}{}^{8} = \begin{bmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \tag{1-15}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{0}}^{*} \otimes \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}} = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon \\ \varepsilon & 80 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 86 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 58 \\ \varepsilon & \varepsilon & 86 & \varepsilon & 60 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 35 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 36 & \varepsilon \end{bmatrix} \tag{1-16}$$

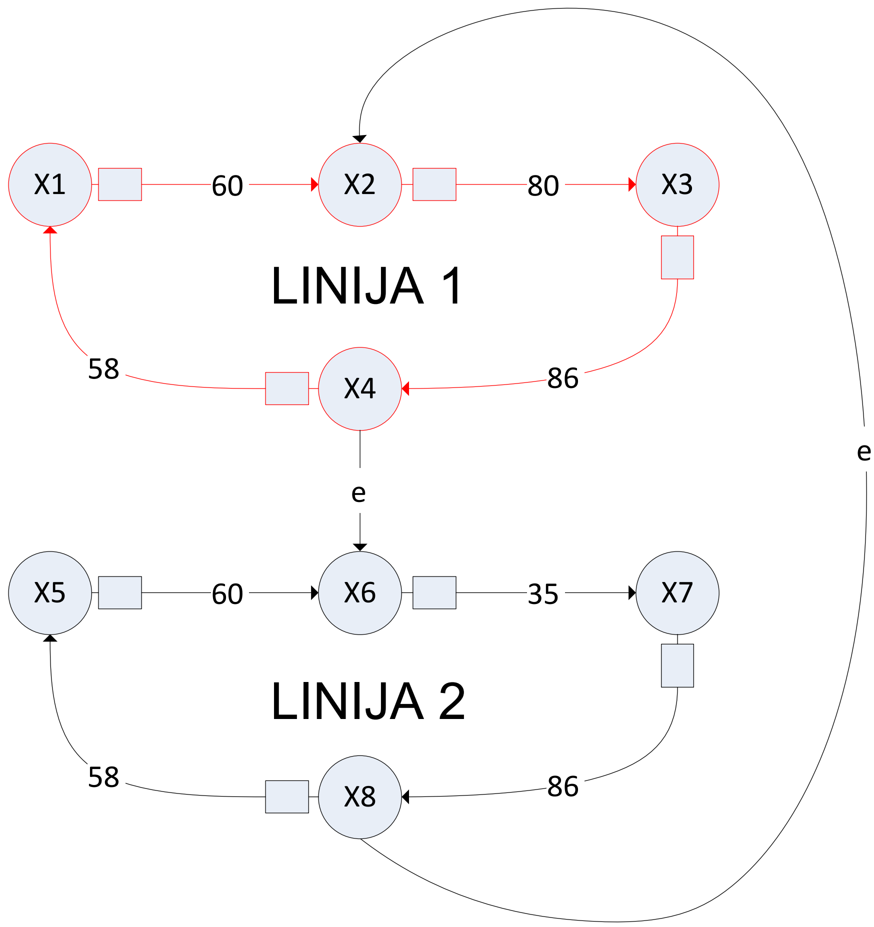
$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} e & e & e & e & e & e & e & e \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \tag{1-17}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(1) &= \begin{bmatrix} 58 & 60 & 80 & 86 & 58 & 86 & 35 & 36 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(2) &= \begin{bmatrix} 144 & 118 & 140 & 166 & 94 & 166 & 121 & 71 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(3) &= \begin{bmatrix} 224 & 204 & 198 & 226 & 129 & 226 & 201 & 157 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(4) &= \begin{bmatrix} 284 & 284 & 284 & 284 & 215 & 284 & 261 & 237 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(5) &= \begin{bmatrix} 342 & 344 & 364 & 370 & 295 & 370 & 319 & 297 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(6) &= \begin{bmatrix} 428 & 402 & 424 & 450 & 355 & 450 & 405 & 355 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(7) &= \begin{bmatrix} 508 & 488 & 482 & 510 & 413 & 510 & 485 & 441 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(8) &= \begin{bmatrix} 568 & 568 & 568 & 568 & 499 & 568 & 545 & 521 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(9) &= \begin{bmatrix} 626 & 628 & 648 & 654 & 579 & 654 & 603 & 581 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(10) &= \begin{bmatrix} 712 & 686 & 708 & 734 & 639 & 734 & 689 & 639 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \end{aligned} \tag{1-18}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(1) - \boldsymbol{x}(0) &= \begin{bmatrix} 58 & 60 & 80 & 86 & 58 & 86 & 35 & 36 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(2) - \boldsymbol{x}(1) &= \begin{bmatrix} 86 & 58 & 60 & 80 & 36 & 80 & 86 & 35 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(3) - \boldsymbol{x}(2) &= \begin{bmatrix} 80 & 86 & 58 & 60 & 35 & 60 & 80 & 86 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(4) - \boldsymbol{x}(3) &= \begin{bmatrix} 60 & 80 & 86 & 58 & 86 & 58 & 60 & 80 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(5) - \boldsymbol{x}(4) &= \begin{bmatrix} 58 & 60 & 80 & 86 & 80 & 86 & 58 & 60 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(6) - \boldsymbol{x}(5) &= \begin{bmatrix} 86 & 58 & 60 & 80 & 60 & 80 & 86 & 58 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(7) - \boldsymbol{x}(6) &= \begin{bmatrix} 80 & 86 & 58 & 60 & 58 & 60 & 80 & 86 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(8) - \boldsymbol{x}(7) &= \begin{bmatrix} 60 & 80 & 86 & 58 & 86 & 58 & 60 & 80 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(9) - \boldsymbol{x}(8) &= \begin{bmatrix} 58 & 60 & 80 & 86 & 80 & 86 & 58 & 60 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \\ \boldsymbol{x}(10) - \boldsymbol{x}(9) &= \begin{bmatrix} 86 & 58 & 60 & 80 & 60 & 80 & 86 & 58 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \end{aligned} \tag{1-19}$$

$$\lambda = \frac{trace(\boldsymbol{A})}{1} \oplus \frac{trace(\boldsymbol{A}^2)}{2} \oplus \frac{trace(\boldsymbol{A}^3)}{3} \oplus \ldots \oplus \frac{trace(\boldsymbol{A}^8)}{8} = 71 \tag{1-20}$$

Kao što se vidi iz razlika susjednih vektora stanja 1-19, u svakom čvoru se izmjenjuje četiri ciklusa u trajanju: 86, 80, 60 i 58 minuta, što je u prosjeku upravo 71 minuta. Drugim riječima, periodično ponašanje u ovom slučaju počinje nakon $k = k_0 = 3$ i uz $r = 4$, tj. $\lambda = \frac{x_i(k+r) - x_i(k)}{r} = \frac{284}{4} = 71$. Kritična kružna staza u grafu je ovaj put staza $\{x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_1\}$, čija je srednja težina $\frac{60+80+86+58}{4} = 71 = \lambda$.




**Slika 1.4:** Crvenom bojom je istaknuta kritična kružna staza.

U nastavku je dana Matlab skripta korištena pri proračunima u 1.(b) zadatku.

**Matlab kod 3:** zad1b.m - skripta u kojoj su napravljeni svi proračuni iz 1.(b) zadatka

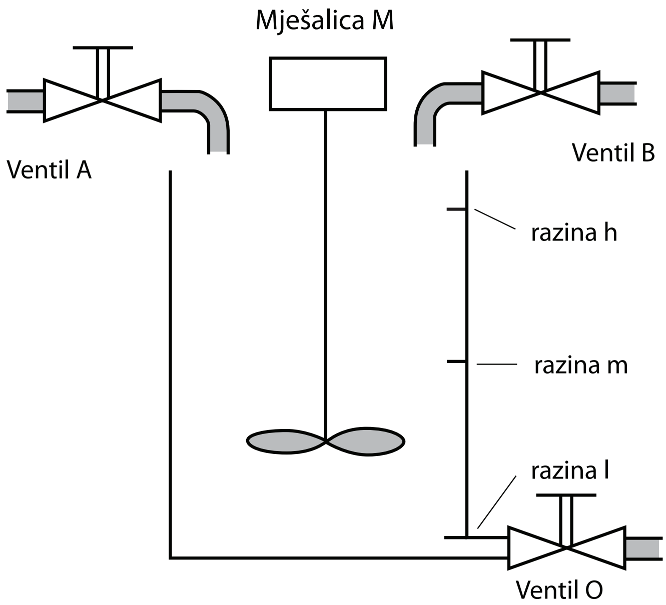
```
% SSDD - 1. domaća zadaća
% 1.(b) zadatak
%
% (c) Branimir Novoselnik, FER, 2012.

clear; clc;
% konstante
eps = -Inf;
e = 0;
% matrica A0
A0 = mpm([ -Inf(1,8);
           -Inf(1,7) e;
           -Inf(1,8);
           -Inf(1,8);
           -Inf(1,8);
           -Inf(1,3) e -Inf(1,4);
           -Inf(1,8);
           -Inf(1,8) ]);
% matrica A1
A1 = mpm([ -Inf(1,3) 58 -Inf(1,4);
           60 -Inf(1,7);
           eps 80 -Inf(1,6);
           eps eps 86 -Inf(1,5);
           -Inf(1,7) 58;
           -Inf(1,4) 60 eps eps eps;
           -Inf(1,5) 35 eps eps;
           -Inf(1,6) 36 eps ]);
% proračun matrice A0*
A0z=eye(mpm(eye(8)));
for i=1:8
    A0z=A0z+A0^i;
end
% proračun matrice sustava A
A = A0z*A1;
% početno stanje sustava x0
x0=mpm([e e e e e e e e]');
% proračun prosječnog ciklusa sustava
lambda=mpm(-Inf);
for i=1:8
    lambda=lambda+mpm(trace(A^i)/i);
end
disp(['lambda = ' mat2str(double(lambda))])
% proračun i ispis prvih nekoliko
% vrijednosti vektora stanja sustava
xk = x0;
for i=1:10
    xkp1 = A*xk;
    disp(['x' mat2str(i) ''' = ' mat2str(double((xkp1)'))])
    disp(['(x' mat2str(i) '-x' mat2str(i-1) ')'' = ' ...
        mat2str(double((xkp1-xk)'))])
    xk=xkp1;
end
```

## 1.2 Zadatak 2

Na slici 1.5 prikazan je sustav miješanja tekućina. Sustav se sastoji od spremnika, ventila A, ventila B, ventila O i mješalice M. Senzori razine detektiraju prazan spremnik ($\ell$), polupuni spremnik ($m$) i puni spremnik ($h$) (senzori generiraju događaj tj. trigger). Proces miješanja obavlja se tako da se spremnik napuni tekućinom A do razine $m$, nakon čega se zatvara ventil A, započinje punjenje tekućinom B i miješanje. Kada se spremnik napuni, zatvara se ventil B i počinje pražnjenje spremnika uz miješanje. Po istjecanju tekućine iz spremnika ($\ell$) isključuje se miješanje i proces se ponavlja.

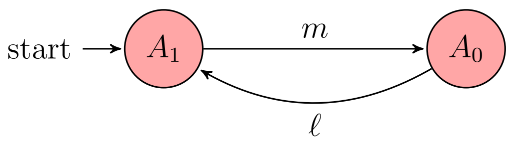
Potrebno je odrediti automat za svaki pojedini aktuator u sustavu (ventili i mješalica) te paralelnom kompozicijom odrediti automat cjelokupnog sustava. U početnom je stanju otvoren ventil A, a svi ostali aktuatori zatvoreni/ugašeni. Analizirati svih 16 stanja automata paralele.



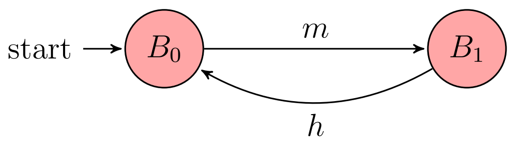

**Slika 1.5:** Mješalica.

### 1.2.1 Rješenje 2. zadatka

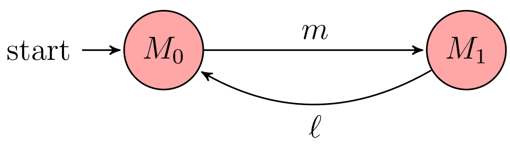
Na slici 1.2.1 su prikazani automati koji predstavljaju pojedine aktuatore u sustavu.



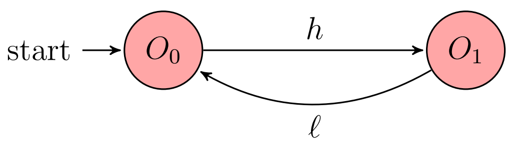

(a) Automat ventila A.




(b) Automat ventila B.




(c) Automat mješalice M.




(d) Automat ventila O.

**Slika 1.6:** Prikaz dijelova sustava iz 2. zadatka preko automata.

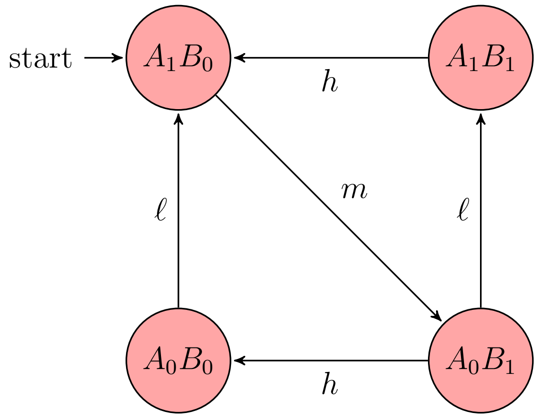
(a) **Paralelna kompozicija automata A i automata B**

Skup događaja koji odgovaraju automatu A je $E_A = \{m, \ell\}$, a skup događaja koji odgovaraju automatu B je $E_B = \{m, h\}$. Zajednički događaj je $E_{A\cap B} = \{m\}$. Sva četiri stanja paralele $A \parallel B$ najlakše je analizirati pomoću tablice 1.2.

**Tablica 1.2:** Prijelazi stanja paralele automata $A \parallel B$.

| A | B | $\rightarrow$ | A | B |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\ell$ | 1 | 0 |
| 0 | 1 | $\ell$ | 1 | 1 |
| 0 | 1 | $h$ | 0 | 0 |
| 1 | 0 | $m$ | 0 | 1 |
| 1 | 1 | $h$ | 1 | 0 |

Iz tablice 1.2 slijedi grafički prikaz automata $AB = A \parallel B$ koji se može vidjeti na slici 1.7.




**Slika 1.7:** Automat AB.

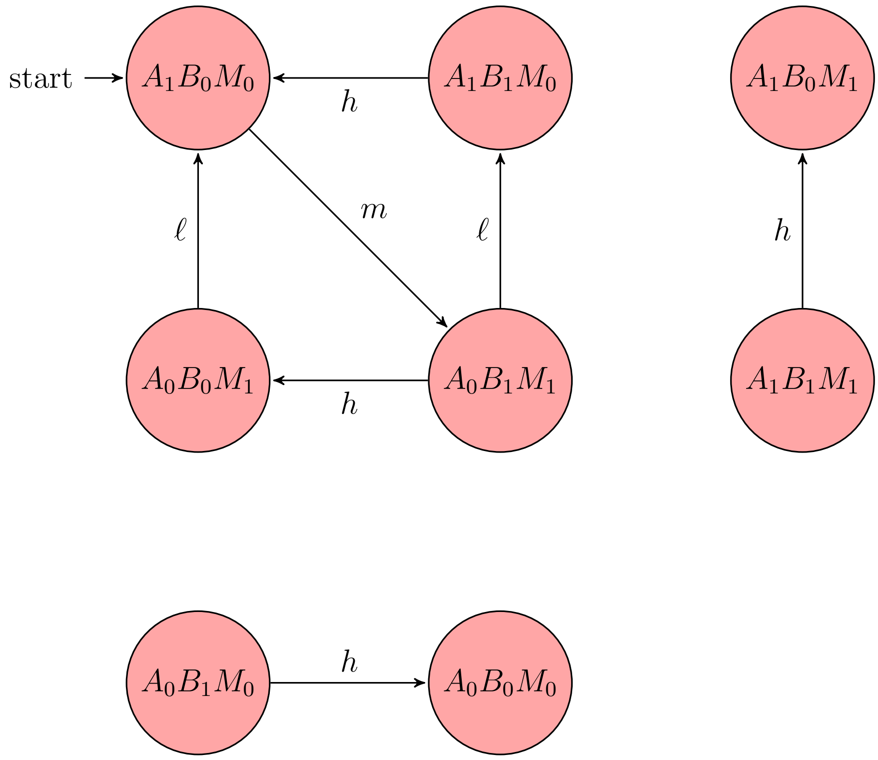
(b) **Paralelna kompozicija automata AB i automata M**

Skup događaja koji odgovaraju automatu AB je $E_{AB} = \{m, \ell, h\}$, a skup događaja koji odgovaraju automatu M je $E_M = \{m, \ell\}$. Zajednički događaji su $E_{AB\cap M} = \{m, \ell\}$. Stanja paralele ovih automata, $ABM = AB \parallel M$, ćemo opet analizirati pomoću tablice.

**Tablica 1.3:** Prijelazi stanja paralele automata $AB \parallel M$.

| A | B | M | $\rightarrow$ | A | B | M |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | x | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | $\ell$ | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | $h$ | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | $\ell$ | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | $h$ | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | $m$ | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | x | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | $h$ | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | $h$ | 1 | 0 | 1 |

Iz tablice 1.3 slijedi grafički prikaz automata $ABM = AB \parallel M$ koji se može vidjeti na slici 1.8. Vidimo da imamo četiri stanja u koja se nikako ne može doći (ostala su *plutati u zraku*) pa njih u daljnjoj analizi možemo odbaciti.




**Slika 1.8:** Automat ABM.

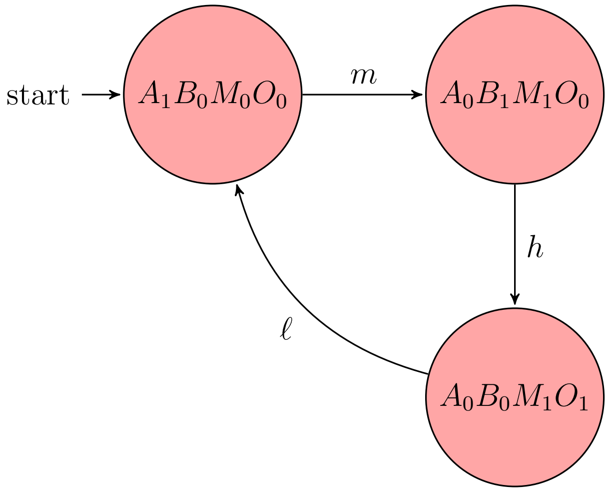
(c) **Paralelna kompozicija automata ABM i automata O**

Skup događaja koji odgovaraju automatu ABM je $E_{ABM} = \{m, \ell, h\}$, a skup događaja koji odgovaraju automatu O je $E_O = \{h, \ell\}$. Zajednički događaji su $E_{ABM \cap O} = \{h, \ell\}$. Stanja paralele ovih automata, $ABMO = ABM \parallel O$, ćemo opet analizirati pomoću tablice.

**Tablica 1.4:** Prijelazi stanja paralele automata $ABM \parallel O$.

| A | B | M | O | $\to$ | A | B | M | O |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | x | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | x | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | x | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | $\ell$ | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | $h$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | x | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | $h$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | $\ell$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | $m$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | $m$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | x | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | x | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | $h$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | x | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | $h$ | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | x | 1 | 1 | 1 | 1 |

Iz tablice vidimo da konačni automat čine samo tri stanja: $A_1B_0M_0O_0$ (početno stanje), $A_0B_1M_1O_0$ i $A_0B_0M_1O_1$. Sva ostala stanja *plutaju u zraku* i nisu povezana s ova tri stanja, tj. nikako se iz početnog stanja ne može doći u ta stanja, niti se iz tih stanja može doći do jednog od gore navedena tri stanja. Zato *plutajuća stanja* neće biti nacrtana u konačnom grafičkom prikazu automata cijelog sustava na slici 1.9.




**Slika 1.9:** Konačni automat cijelog sustava.