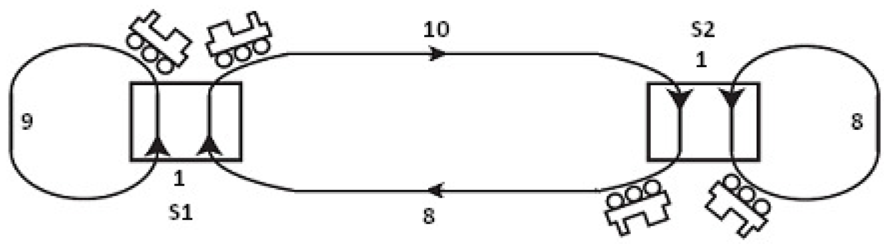
Zadaci s predavanja (maks-plus algebra i automati)

Zadatak 1.

Jednostavan sustav autobusa prikazan na slici sastoji se dvije stanice (S1 i S2) i četiri linije (S1→S1, S1→S2, S2→S1, S2→S2). Vremena trajanja puta na pojedinim etapama za svaku liniju prikazana su na slici. U svakoj stanici prometuju dva autobusa, po jedan na svakoj liniji.

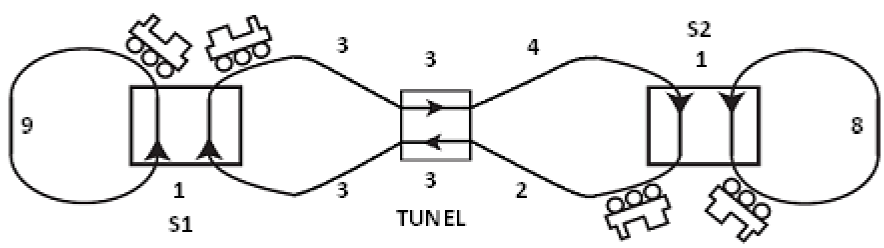
Autobus koji prvi dođe u stanicu čeka dolazak autobusa s druge linije koji vozi prema stanici. Nakon dolaska autobusa s druge linije, autobusi kreću istovremeno po isteku 1 vremenske jedinice potrebne za transfer putnika između autobusa. U početnom trenutku autobusi su spremni za polazak u stanicama S1 i S2 (dva autobusa u svakoj stanici).

a) Potrebno je napraviti max-plus model sustava te odrediti ciklus za sustav na Slici 1.



Slika 1.

b) Na putu između stanica nalazi se tunel kroz koji je dozvoljen prolaz samo jednog autobusa istovremeno. Autobusi kroz tunel prolaze naizmjenično, a prvi prolazi autobus koji kreće iz S1. Vremena trajanja puta na pojedinim segmentima prikazana su na Slici 2.



Slika 2.

a)

x_1 – dolazak autobusa na liniji $S_1 \to S_1$ u stanicu S_1

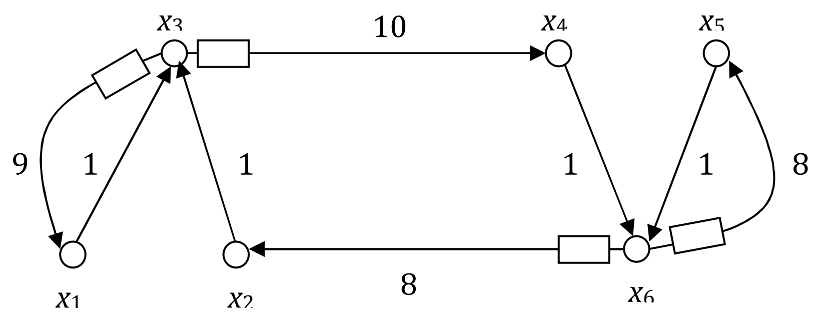
x_2 – dolazak autobusa na liniji $S_2 \to S_1$ u stanicu S_1

x_3 –polazak autobusa iz stanice S_1

x_4 – dolazak autobusa na liniji $S_1 \to S_2$ u stanicu S_2

x_5 – dolazak autobusa na liniji $S_2 \to S_2$ u stanicu S_2

x_6 – polazak autobusa iz stanice S_2



$x_1(k) = 9x_3(k-1)$
$x_2(k) = 8x_6(k-1)$
$x_3(k) = 1x_1(k) + 1x_2(k)$
$x_4(k) = 10x_3(k-1)$
$x_5(k) = 8x_6(k-1)$
$x_6(k) = 1x_4(k) + 1x_5(k)$

$\mathbf{x}(0) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e]^T$

Pojednostavljeni model:

$x_3(k) = 10x_3(k-1) + 9x_6(k-1)$
$x_6(k) = 11x_3(k-1) + 9x_6(k-1)$

$\mathbf{x}(0) = [e \quad e]^T$

$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \ \ \mathbf{A}_0^* = \begin{bmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{bmatrix}$

$\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0^*\mathbf{A_1} = \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 11 & 9 \end{bmatrix}$

$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 20 & 19 \\ 21 & 20 \end{bmatrix}$

Ciklus:

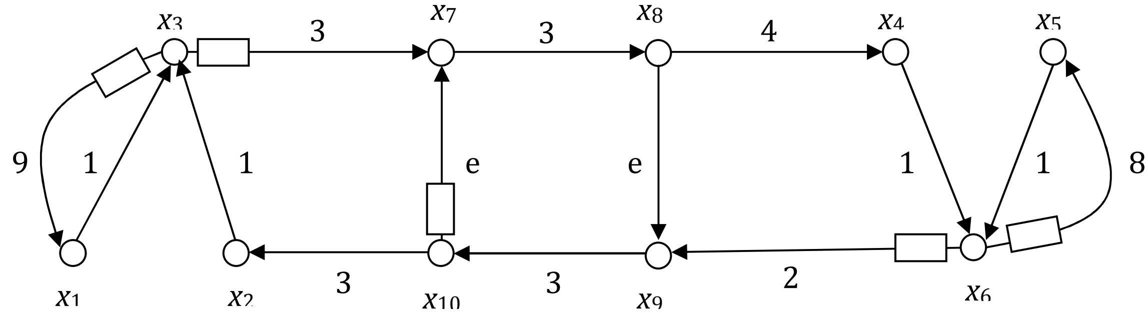
$\lambda = \left(\frac{trag(\mathbf{A})}{1}\right) \oplus \left(\frac{trag(\mathbf{A}^2)}{2}\right) = \left(\frac{10}{1}\right) \oplus \left(\frac{20}{2}\right) = 10$

$\mathbf{x}(1) = [10 \quad 11]^T, \mathbf{x}(2) = [20 \quad 21]^T, \mathbf{x}(3) = [30 \quad 31]^T$
$\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}(1) = [10 \quad 10]^T$
$\mathbf{x}(3) - \mathbf{x}(2) = [10 \quad 10]^T$

$\lambda = 10$

b) dodani događaji:

x_7 – ulazak autobusa na liniji $S_1 \to S_2$ u tunel
x_8 – izlazak autobusa na liniji $S_1 \to S_2$ iz tunela
x_9 – ulazak autobusa na liniji $S_2 \to S_1$ u tunel
x_{10} – izlazak autobusa na liniji $S_2 \to S_1$ iz tunela



$x_1(k) = 9x_3(k-1)$
$x_2(k) = 3x_{10}(k)$
$x_3(k) = 1x_1(k) + 1x_2(k)$
$x_4(k) = 4x_8(k)$
$x_5(k) = 8x_6(k-1)$
$x_6(k) = 1x_4(k) + 1x_5(k)$
$x_7(k) = 3x_3(k-1) + ex_{10}(k-1)$
$x_8(k) = 3x_7(k)$
$x_9(k) = ex_8(k) + 2x_6(k-1)$
$x_{10}(k) = 3x_9(k)$

$\mathbf{x}(0) = [\varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad e\,]^T$

$\mathbf{x}(1) = [9 \quad 12 \quad 13 \quad 10 \quad 8 \quad 11 \quad 3 \quad 6 \quad 6 \quad 9\,]^T$
$\mathbf{x}(2) = [22 \quad 25 \quad 26 \quad 23 \quad 19 \quad 24 \quad 16 \quad 19 \quad 19 \quad 22\,]^T$
$\mathbf{x}(3) = [35 \quad 38 \quad 39 \quad 36 \quad 32 \quad 37 \quad 29 \quad 32 \quad 32 \quad 35\,]^T$
$\mathbf{x}(4) = [48 \quad 51 \quad 52 \quad 49 \quad 45 \quad 50 \quad 42 \quad 45 \quad 45 \quad 48\,]^T$

$\lambda = 13$

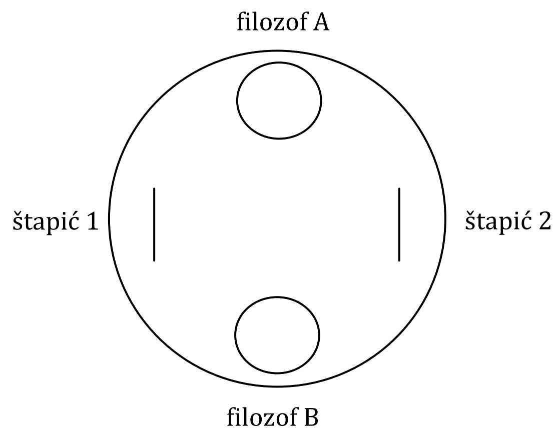
$\mathbf{x}(2) - \mathbf{x}(1) = [13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 11 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13\,]^T$
$\mathbf{x}(3) - \mathbf{x}(2) = [13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13\,]^T$
$\mathbf{x}(4) - \mathbf{x}(3) = [13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13 \quad 13\,]^T$

$\lambda = 13$

Zadatak 2.

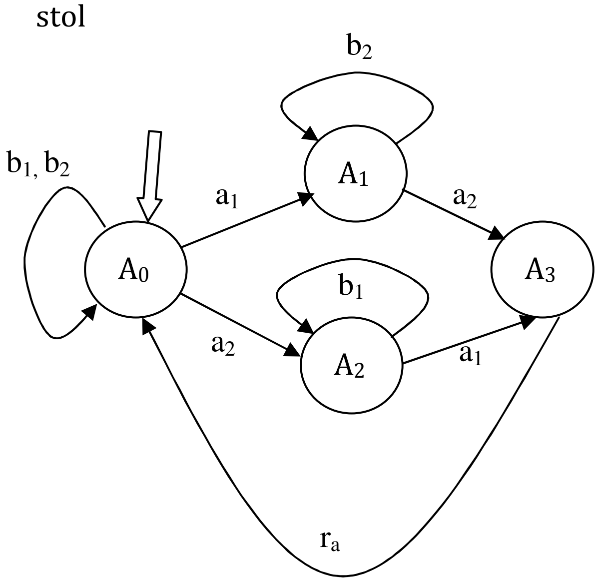
Dva filozofa sjede za okruglim stolom. Na stolu su dva tanjura, po jedan ispred svakog filozofa, te dva štapića za jelo. Ponašanje filozofa je sljedeće: filozof može ili razmišljati ili jesti. Da bi prešao iz stanja razmišljanja u stanje jedenja, filozof mora uzeti štapiće sa stola, jedan po jedan, bilo kojim redoslijedom. Nakon što je gotov s jelom, filozof odlaže štapiće na stol i vraća se u stanje razmišljanja. Filozof može vratiti na stol samo oba štapića zajedno.

U početnom stanju filozofi razmišljaju. Modelirati filozofe zasebnim automatima i napraviti njihovu paralelu. Koja su stanja zabranjena? Projektirati regulator koji će spriječiti da sustav dođe u zabranjeno stanje.

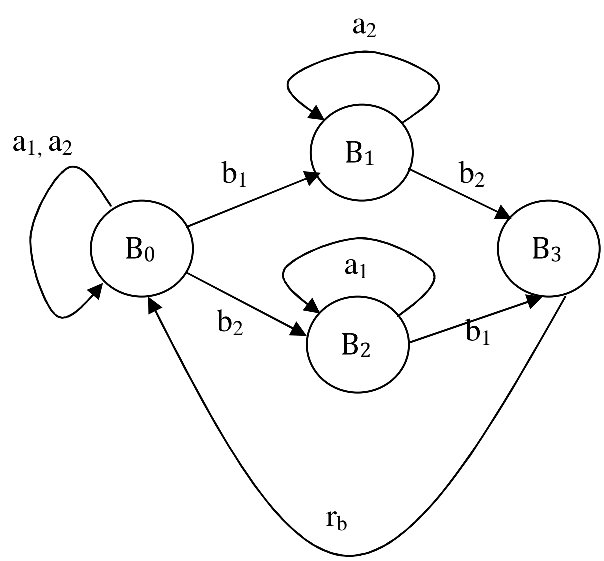


Događaji:

a_1 – filozof A uzima štapić 1, a_2 – filozof A uzima štapić 2, b_1 – filozof B uzima štapić 1, b_2 – filozof B uzima štapić 2, r_a – filozof A vraća štapiće na stol, r_b – filozof B vraća štapiće na stol



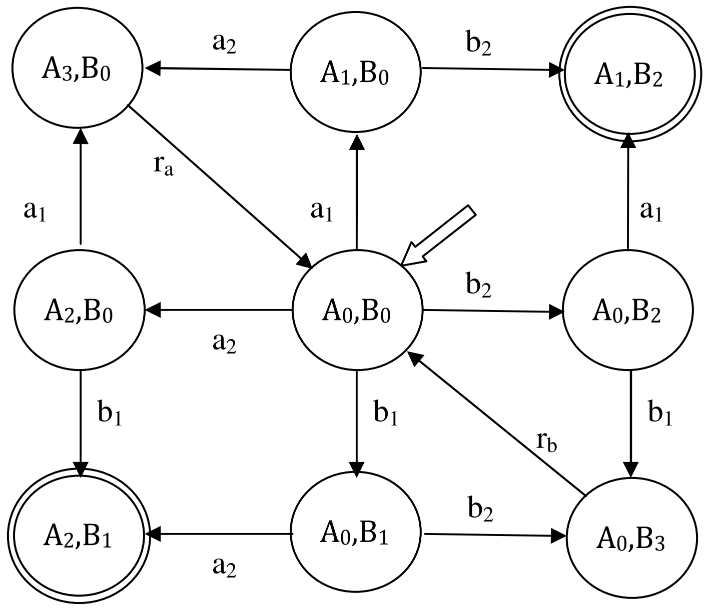
FILOZOF A
$E_a = \{a_1, a_2, b_1, b_2, r_a\}$



FILOZOF B
$E_b = \{a_1, a_2, b_1, b_2, r_b\}$

Paralela automata:

$E_a \cap E_b = \{\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2\}$



Zabranjena stanja: (A_2, B_1) i (A_1, B_2)
Automat regulatora kojim bi se spriječilo da sustav dođe u zabranjeno stanje ($A||B||R$ ne sadržava zabranjena stanja):