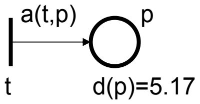
Dinamičke Petrijeve mreže (*timed Petri nets)*

Dva načina prezentacije vremena

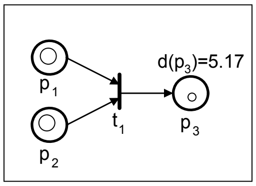
Petrijeve mreže s
dinamičkim mjestima

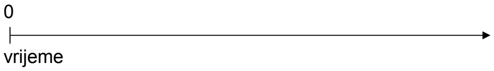
$$PM = (P, T, I, O, \Phi, m_0, d)$$

$d : P \rightarrow \Re^{+}$



Oznaka će se u mjestu p pojaviti d(p) vremena nakon propaljivanja t.

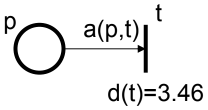




Petrijeve mreže s
dinamičkim prijelazima

$$PM = (P, T, I, O, \Phi, m_0, d)$$

$d : T \rightarrow \Re^{+}$



Prijelaz t će propaliti d(t) vremena nakon što je bio omogućen.

Analiza FPS-a primjenom dinamičkih Petrijevih mreža

- jednadžba prijelaza dinamičke Petrijeve mreže

$$m(t) = m(t_0) + W^T \cdot \tau(t)$$

- srednja promjena oznaka u periodu $\Delta t = t - t_0$

$$\frac{\Delta m(t)}{\Delta t} = W^T \cdot \frac{\tau(t)}{\Delta t} = W^T \cdot i(t)$$

i(t) – frekvencija propaljivanja

- za FPS koji posjeduje svojstvo reverzibilnosti vrijedi (nakon što je završila prijelazna pojava)

$$m(t_0 + \Delta t) = m(t_0)$$

Cikličko ponašanje.

- ciklus FPS-a (vrijeme potrebno da predmet napusti sustav)

$$C = \frac{1}{\min\limits_{k=1}^{n} (i_k)}$$

Modeliranje fleksibilnih proizvodnih sustava matričnom algebrom

- Petrijeve mreže - dobar alat za “vizualizaciju” zbivanja u FPS-u,
- problem pri algoritmizaciji određivanja strukturnih svojstava => baratanje velikim matricama I i O,
- ideja: pronaći matrice manjih dimenzija koje će opisati sustav, a da istovremeno omoguće jednostavnu analizu,

Matrična algebra

- FPS se promatra kao skup pravila AKO – ONDA,
- za razliku od Petrijevih mreža operacije i resursi tretiraju se odvojeno,
- operacije nad matricama uključuju i logičke operacije,
- rezultat modeliranja je “hibridni sustav”.

Opis sustava

- sustav je skup pravila

$$\left.\begin{array}{l}\text{AKO resurs A je slobodan I operacija B je završila I ... ONDA } x_1=1 \\ \text{AKO } x_1=1 \text{ ONDA započni operaciju C I oslobodi resurs D I ...}\end{array}\right\}\text{ pravilo}$$

- vektor pravila x – svakom pravilu odgovara jedna komponenta vektora pravila
- vektor pravila x funkcija je vektora stanja i matrica sustava
- vektor stanja m

$$m = \begin{bmatrix} u \\ v \\ r \\ y \end{bmatrix}$$

u – vektor ulaznih operacija
v – vektor operacija koje obavljaju resursi
r – vektor resursa
y – vektor izlaznih operacija

Matrice sustava

F_v - *matrica potrebnih operacija,* predstavlja veze operacija prema pravilima. Ukoliko je $F_v(j,k)=1$ operacija v_k sudjeluje u tvorbi pravila x_j.

F_r - *matrica potrebnih resursa,* predstavlja veze resursa prema pravilima. Ukoliko je $F_r(j,k)=1$ resurs r_k sudjeluje u tvorbi pravila x_j.

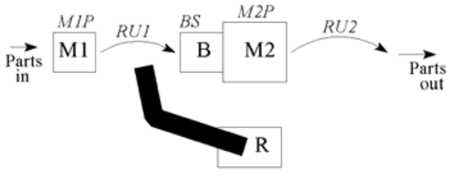
S_v - *matrica započinjanja operacija,* predstavlja veze pravila prema operacijama. Ukoliko je $S_v(j,k)=1$ operacija v_j započet će ako su svi uvjeti pravila x_k zadovoljeni.

S_r - *matrica otpuštanja resursa,* predstavlja veze pravila prema resursima. Ukoliko je $S_r(j,k)=1$ resurs r_j bit će otpušten ako su svi uvjeti pravila x_k zadovoljeni.

F_u – *ulazna matrica*, veza ulaznih operacija i pravila,

S_y – *izlazna matrica*, veza izlaznih operacija i pravila,

Primjer: određivanje pravila i matrica sustava



$r = [M1\ M2\ B\ R]^T$

$v = [M1P\ \ RU1\ \ BS\ \ M2P\ \ RU2]^T$

$u = [\ PI\ ]^T$

$y = [\ PO\ ]^T$

Broj pravila = ?

započinjanje operacije => pravilo

$x = [\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ ]^T$

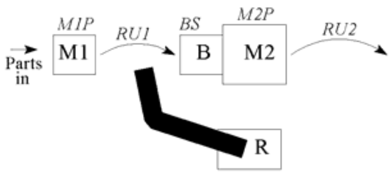
AKO predmet prisutan (PI) I M1 spreman ONDA $x_1= 1$
AKO $x_1= 1$ ONDA započni operaciju M1P

AKO operacija M1P završila I R spreman ONDA $x_2= 1$
AKO $x_2= 1$ ONDA započni operaciju RU1 I oslobodi M1

AKO operacija RU1 završila I B spreman ONDA $x_3= 1$
AKO $x_3= 1$ ONDA započni operaciju BS I oslobodi R

. . .

Primjer: određivanje pravila i matrica sustava



$r = [M1\ M2\ B\ R]^T$

$v = [M1P\ \ RU1\ \ BS\ \ M2P\ \ RU2]^T$

$u = [\ PI\ ]^T$

$y = [\ PO\ ]^T$

$x = [\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6\ ]^T$

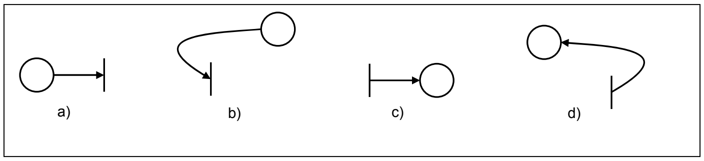
$$F_v = \begin{array}{ccccc|c} M1P & RU1 & BS & M2P & RU2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & x3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x6 \end{array} \qquad F_r = \begin{array}{cccc|c} M1 & M2 & B & R & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x6 \end{array} \qquad F_u = \begin{array}{c|c} PI & \\ 1 & x1 \\ 0 & x2 \\ 0 & x3 \\ 0 & x4 \\ 0 & x5 \\ 0 & x6 \end{array}$$

$$S_v = \begin{array}{cccccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M1P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & RU1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & BS \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & M2P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & RU2 \end{array}$$

$$S_r = \begin{array}{cccccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & M2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & R \end{array}$$

$$S_y = \begin{array}{cccccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & PO \end{array}$$

Matrična algebra ⇔ Petrijeve mreže



F_v	F_r	S_v	S_r
F_u		S_y	
(S_u)		(F_y)	

$$F = \left[F_u \quad F_v \quad F_r \quad F_y\right]$$

$$\Big\downarrow$$

$$F = I$$

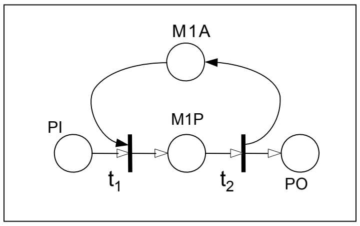
$$S = \begin{bmatrix} S_u \\ S_v \\ S_r \\ S_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\longrightarrow} \quad S^T = O$$

$$W = S^T - F$$

m ⇔ m

x ⇔ T

Primjer: veza između matrica sustava i Petrijeve mreže



$$F_u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad F_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad F_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$S_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$S_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$S_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = S^T - F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Proračun vektora pravila x

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_v \Delta \bar{\mathbf{v}}_c \nabla \mathbf{F}_r \Delta \bar{\mathbf{r}}_c \nabla \mathbf{F}_u \Delta \bar{\mathbf{u}}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{v_c} \\ \mathbf{v} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathbf{v_s} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathbf{r_c} \\ \mathbf{r} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathbf{r_s} \end{tikzcd}$$

$\mathbf{v}_s = \mathbf{S}_v \Delta \mathbf{x}$ - započinjanje operacija

$\mathbf{r}_s = \mathbf{S}_r \Delta \mathbf{x}$ - otpuštanje resursa

$\mathbf{y} = \mathbf{S}_y \Delta \mathbf{x}$ - gotovi proizvodi (izlaz)

logičke jednadžbe

ILI / I (*or / and*)
algebra

$\bar{a}_i = 0 \quad \text{za} \quad a_i > 0,$
$\bar{a}_i = 1 \quad \text{za} \quad a_i \le 0.$

negativna
logika

Kod logičkog množenja matrica (vektora) zbrajanje se zamjenjuje ILI ($\vee$) operacijom, a množenje I ($\wedge$) operacijom.

Primjer:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \Delta \bar{\mathbf{a}} \nabla \mathbf{B} \Delta \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} \bar{v}_a \\ \bar{v}_b \\ \bar{v}_c \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Delta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_b \vee \bar{v}_c \\ \bar{v}_b \end{bmatrix} \nabla \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{v}_b \vee \bar{v}_c \vee 0 \\ \bar{v}_b \vee 1 \end{bmatrix}$$

Iterativni proračun vektora stanja **m**

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{F}_{\mathrm{v}} \Delta \bar{\mathbf{v}}_{\mathrm{c}}(k-1) \nabla \mathbf{F}_{\mathrm{r}} \Delta \bar{\mathbf{r}}_{\mathrm{c}}(k-1) \nabla \mathbf{F}_{\mathrm{u}} \Delta \bar{\mathbf{u}}(k-1)$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{s}}(k) = \mathbf{S}_{\mathrm{v}} \Delta \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{r}_{\mathrm{s}}(k) = \mathbf{S}_{\mathrm{r}} \Delta \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{S}_{\mathrm{y}} \Delta \mathbf{x}(k)$$

?

v_s => v_c

r_s => r_c

Pitanje: koliko predmeta "drži" pojedina operacija u trenutku *k* ?

$$\mathbf{v}_{\mathrm{c}}(k) = \mathbf{v}_{\mathrm{c}}(k-1) + \mathbf{v}_{\mathrm{s}}(k) - \mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}(k)$$

predmeti koje operacija "drži" u trenutku *k*-1

predmeti nad kojima počinje obrada u trenutku *k*

predmeti nad kojima je završila obrada u trenutku *k*

$$\mathbf{v}_{\mathrm{c}}(k) = \mathbf{v}_{\mathrm{c}}(k-1) + \mathbf{S}_{\mathrm{v}}\mathbf{x}(k) - \mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}(k) = \mathbf{v}_{\mathrm{c}}(k-1) + \left[\mathbf{S}_{\mathrm{v}} - \mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}\right] \mathbf{x}(k)$$

Iterativni proračun vektora stanja **m**

$$\mathbf{r}_{\mathrm{c}}(k) = \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(k-1) + \mathbf{S}_{\mathrm{r}}\mathbf{x}(k) - \mathbf{F}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \mathbf{x}(k) = \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(k-1) + \left[\mathbf{S}_{\mathrm{r}} - \mathbf{F}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\right] \mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{y}(k-1) + \mathbf{S}_{\mathrm{y}}\mathbf{x}(k)$$

$$\mathbf{m}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(k) \\ \mathbf{v}_{\mathrm{c}}(k) \\ \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(k) \\ \mathbf{y}(k) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathrm{u}} \\ \mathbf{S}_{\mathrm{v}} \\ \mathbf{S}_{\mathrm{r}} \\ \mathbf{S}_{\mathrm{y}} \end{bmatrix} \; , \quad \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{F}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{F}_{\mathrm{y}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{F} \Delta \bar{\mathbf{m}}(k-1) \;\; , \quad \mathbf{m}(0) = \mathbf{m}_0$$

$$\mathbf{m}(k) = \mathbf{m}(k-1) + \left[\mathbf{S} - \mathbf{F}^{T}\right] \mathbf{x}(k)$$

Iterativni proračun vektora stanja **m**

- m daje stanje svih resursa i operacija u FPS-a, dok istovremeno logički vektor daje stanje pravila

- vektora stanja m određuje se rekurzivnim hibridnim jednadžama => pogodno za simuliranje

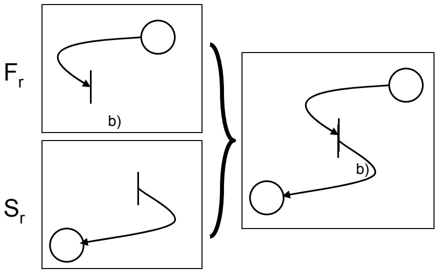
- određivanje matrica sustava na prvi je pogled složenije nego kreiranje grafa Petrijeve mreže => nacrtati graf pa iz njega odrediti matrice

- konverzija upravljačkih pravila iz ladder dijagrama (PLC) u matrice vrlo je jednostavna

---

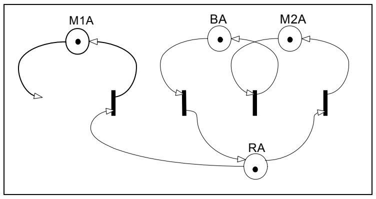
Određivanje kružnih čekanja

- odrediti relacije čekanja među resursima



matrica čekanja

$$\rightarrow G_w = S_r \wedge F_r$$



Primjer:

$$S_r = \begin{array}{cccccc|c} x1 & x2 & x3 & x4 & x5 & x6 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & M1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & M2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & R \end{array} \wedge F_r = \begin{array}{cccc|c} M1 & M2 & B & R & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & x1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x6 \end{array} = \begin{array}{cccc|c} M1 & M2 & B & R & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & M1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & 0 & R \end{array} = G_w$$

Određivanje kružnih čekanja

String algebra *(Wysk, Yang, Joshi 1991)* - manipuliranje nizovima karaktera

Ac – string koji završava karakterom c (npr. hgfkc, konac)
cB – string koji započinje karakterom c (npr. cmjhbn, cocacola)

D – string koji ne započinje niti završava karakterom c (npr. jura, pero)

$\bullet$ - operator množenja stringova

$Ac \bullet 0 = 0 \bullet Ac = 0$ - množenje stringa s 0 (nul string)

- množenje stringa sa stringom

$Ac \bullet cB = AcB$

$cB \bullet Ac = 0$

$D \bullet cB = 0$

$Ac \bullet D = 0$

$E \bullet (H + J) = E \bullet H + E \bullet J$

Primjer: $\text{konac} \bullet \text{cocta} = \text{konacocta}$
$\text{cocta} \bullet \text{konac} = 0$
$\text{tata} \bullet \text{mata} = 0$
$\text{ana} \bullet (\text{ante} + \text{jura} + \text{adolf}) =$
$\text{ana} \bullet \text{ante} + \text{ana} \bullet \text{jura} + \text{ana} \bullet \text{adolf} =$
$\text{anante} + 0 + \text{anadolf} = \text{anante} + \text{anadolf}$

Određivanje kružnih čekanja

- kako iskoristiti string algebru? => od matrice čekanja G_w kreirati matricu stringova Z => string algebrom odrediti kružna čekanja

a) svakom resursu pridijeliti određeni znak - karakter (npr. 1, a, €, µ, ك),

b) kreirati matricu stringova Z, →

c) string algebrom množiti matricu stringova – na dijagonali se pojavljuju kružna čekanja,

Na mjesto jedinice u matrici G_w upisati string koji se sastoji od znakova pridjeljenih resursima danog retka i stupca. Na mjestu nule upisati 0 string.

korak a:

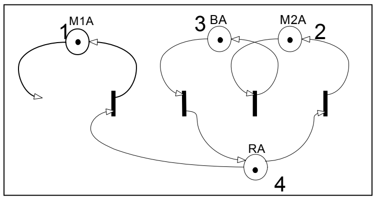
$$G_w = \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ M1 & M2 & B & R & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & M2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & B & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & R & 4 \end{array}$$

korak b:

$$Z = \begin{array}{cccc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ M1 & M2 & B & R & & \\ 0 & 0 & 0 & 14 & M1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 24 & M2 & 2 \\ 0 & 32 & 0 & 0 & B & 3 \\ 0 & 0 & 43 & 0 & R & 4 \end{array}$$

Određivanje kružnih čekanja

korak c:



$$Z^n = Z^{n-1} \bullet Z$$

$$z_{ij}^{r} = \sum_{k} z_{ik}^{r-1} \bullet z_{kj} \ , \quad i, j, k = 1, 2, ..., n$$

$$Z^2 = Z \bullet Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 143 & 0 \\ 0 & 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 324 \\ 0 & 432 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

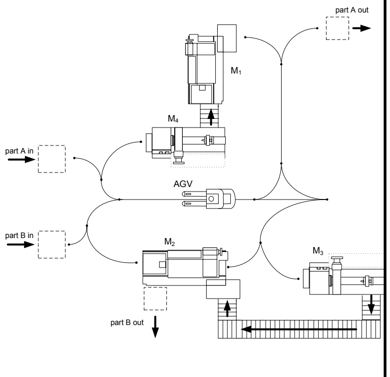
Čekanja 2. reda.

$$Z^3 = Z^2 \bullet Z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 143 & 0 \\ 0 & 0 & 243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 324 \\ 0 & 432 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1432 & 0 & 0 \\ 0 & 2432 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3243 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4324 \end{bmatrix}$$

Čekanja 3. reda.

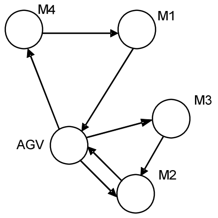
Primjer:

$$\mathbf{S}_r = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{M1} \\ \text{M2} \\ \text{M3} \\ \text{M4} \\ \text{AGV} \end{array} , \quad \mathbf{F}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\swarrow$$

$$\mathbf{G}_W = \begin{array}{c} \text{M1} \\ \text{M2} \\ \text{M3} \\ \text{M4} \\ \text{AGV} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \longrightarrow$$

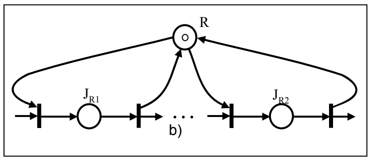


Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

P-invarijante

- promjene u vektoru operacija **v** $\left[\mathbf{S}_\mathrm{v} - \mathbf{F}_\mathrm{v}^\mathrm{T}\right] \cdot \mathbf{x}(k)$
- promjene u vektoru resursa **r** $\left[\mathbf{S}_\mathrm{r} - \mathbf{F}_\mathrm{r}^\mathrm{T}\right] \cdot \mathbf{x}(k)$

Podsjetnik => resurs + operacije = p-inv.



$r_i \cup J(r_i) = p_{inv}$

$$\left[\mathbf{S}_\mathrm{v}^\mathrm{T} - \mathbf{F}_\mathrm{v}\right] \cdot \mathbf{v} + \left[\mathbf{S}_\mathrm{r}^\mathrm{T} - \mathbf{F}_\mathrm{r}\right] \cdot \mathbf{r} = 0$$

$$\left[\mathbf{W}_\mathrm{v} \quad \mathbf{W}_\mathrm{r}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{p} = 0$$

Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

P-invarijante

$$\left[\mathbf{W}_\mathrm{v} \quad \mathbf{W}_\mathrm{r}\right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{p} = 0 \longrightarrow \mathbf{W}_\mathrm{v} \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{W}_\mathrm{r} \cdot \mathbf{r}$$

svaki resurs ima “svoju” p-invarijantu =>
r = [0 … 0 1 0 …0]$^\mathrm{T}$ => **v** = ?

Problem – invertiranje matrice **W**$_\mathrm{v}$

$$\mathbf{v} = -\hat{\mathbf{W}}_\mathrm{v}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{W}}_\mathrm{r} \cdot \mathbf{r}$$

$$\hat{\mathbf{W}}_\mathrm{v} = \hat{\mathbf{S}}_\mathrm{v}^\mathrm{T} - \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{v}$$
$$\hat{\mathbf{W}}_\mathrm{r} = \hat{\mathbf{S}}_\mathrm{r}^\mathrm{T} - \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{r}$$

$\hat{S}, \hat{F}$ **- matrice s isključenim stupcima (redcima) koji se odnose na pravila s ponorima**

$$S_r = \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

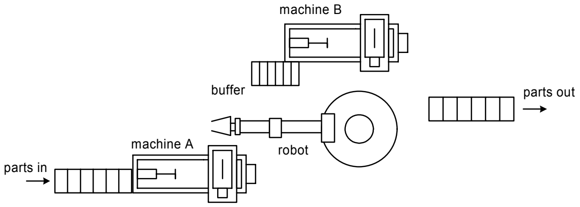
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -(\hat{\mathbf{S}}_\mathrm{v}^\mathrm{T} - \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{v})^{-1} \cdot (\hat{\mathbf{S}}_\mathrm{r}^\mathrm{T} - \hat{\mathbf{F}}_\mathrm{r}) \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

I$_{nxn}$ jedinična matrica (n = broj resursa u sustavu).

Svaki stupac matrice P predstavlja jednu p-invarijantu.

Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

P-invarijante - primjer



$$\hat{\mathbf{F}}_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \scriptstyle MAP & \scriptstyle RP1 & \scriptstyle BP & \scriptstyle MBP & \scriptstyle RP2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \end{array}, \hat{\mathbf{F}}_r = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle MA & \scriptstyle MB & \scriptstyle B & \scriptstyle R \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \end{array} \;\longleftarrow\; \mathbf{F}_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \scriptstyle MAP & \scriptstyle RP1 & \scriptstyle BP & \scriptstyle MBP & \scriptstyle RP2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{1} \end{array}\right] \end{array} \quad \mathbf{F}_r = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle MA & \scriptstyle MB & \scriptstyle B & \scriptstyle R \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1\\ \cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_v = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{S}}_r = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \;\longleftarrow\; \mathbf{S}_v = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&\cancel{0}\\ 0&1&0&0&0&\cancel{0}\\ 0&0&1&0&0&\cancel{0}\\ 0&0&0&1&0&\cancel{0}\\ 0&0&0&0&1&\cancel{0} \end{bmatrix} \quad \mathbf{S}_r = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&\cancel{0}\\ 0&0&0&0&1&\cancel{0}\\ 0&0&0&1&0&\cancel{0}\\ 0&0&1&0&0&\cancel{1} \end{bmatrix}$$

Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

P-invarijante - primjer

$$\hat{\mathbf{F}}_v = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \scriptstyle MAP & \scriptstyle RP1 & \scriptstyle BP & \scriptstyle MBP & \scriptstyle RP2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0 \end{array}\right] \end{array}, \hat{\mathbf{F}}_r = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \scriptstyle MA & \scriptstyle MB & \scriptstyle B & \scriptstyle R \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\hat{\mathbf{S}}_v = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{S}}_r = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0 \end{bmatrix} \;\longrightarrow\; \hat{\mathbf{W}}_v = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0\\ -1&1&0&0&0\\ 0&-1&1&0&0\\ 0&0&-1&1&0\\ 0&0&0&-1&1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{W}}_r = \begin{bmatrix} -1&0&0&0\\ 1&0&0&-1\\ 0&0&-1&1\\ 0&-1&1&0\\ 0&1&0&-1 \end{bmatrix}$$

donje-trokutasta kvadratna matrica

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{P} = \begin{array}{c|ccccc|cccc|} & \text{MAP} & \text{RP1} & \text{BP} & \text{MBP} & \text{RP2} & \text{MA} & \text{MB} & \text{B} & \text{R} \\ \cline{7-10} \mathbf{p}_1 & 1&0&0&0&0&1&0&0&0\\ \mathbf{p}_2 & 0&0&0&1&0&0&1&0&0\\ \mathbf{p}_3 & 0&0&1&0&0&0&0&1&0\\ \mathbf{p}_4 & 0&1&0&0&1&0&0&0&1 \\ \cline{7-10} \end{array}^{T}$$

I_{4x4} jedinična matrica

Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

Kritični sifoni

podsjetnik

$S_C = C \cup J_S(C)$

$m_{C_i}(k) = \mathbf{c}_i^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{r}_{\mathrm{c}}(k)$ - sadržaj kružnog čekanja C_i

$\mathbf{x}_C^d$ - pravila koja imaju barem jedan resurs iz C u ***posljedičnom*** dijelu

${}^d\mathbf{x}_C$ - pravila koja imaju barem jedan resurs iz C u ***uzročnom*** dijelu

$$\mathbf{s}_C = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{\mathrm{SC}} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix}$$

vektorski prikaz

?

string algebra

$$\mathbf{x}_C^{d\,\mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{S}_{\mathrm{r}}$$

$${}^d\mathbf{x}_C^{\ \mathrm{T}} = \mathbf{c}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{F}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}$$

$\mathbf{x}_C^+ = \mathbf{x}_C^d - \mathbf{x}_C^d \wedge {}^d\mathbf{x}_C$ - pravila koja “pune” C

$\mathbf{x}_C^- = {}^d\mathbf{x}_C - {}^d\mathbf{x}_C \wedge \mathbf{x}_C^d$ - pravila koja “prazne” C

podsjetnik (PN)

- $T_S \cap J(C) = J_S(C)$ → - odrediti operacije koje se nalaze u uzročnom dijelu onih pravila koja “pune” C, a nemaju resurs(e) iz C u uzročnom dijelu

---

Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

Kritični sifoni

$$\mathbf{v}_{\mathrm{SC}}^{\ \mathrm{T}} = \mathbf{x}_C^{+\,\mathrm{T}} \Delta \mathbf{F}_{\mathrm{v}}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{SC}} = \mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{S}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{c}_{\mathrm{s}} \wedge \overline{\mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{F}_{\mathrm{r}} \Delta \mathbf{c}}$$

operacije koje izvode višeradni resursi u C (**c**$_{\mathrm{s}}$)

operacije koje se nalaze u uzročnom dijelu pravila skupa s resursima iz C

Kritična zamka

$$\mathbf{v}_{\mathrm{QC}}^{\ \mathrm{T}} = \mathbf{x}_C^{-\,\mathrm{T}} \Delta \mathbf{S}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{QC}} = \mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{F}_{\mathrm{r}} \Delta \mathbf{c}_{\mathrm{s}} \wedge \overline{\mathbf{F}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{S}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}} \Delta \mathbf{c}}$$

Određivanje strukturnih svojstava MRF$_1$ pomoću matrica sustava

Kritični podsustav

podsjetnik (PN)

$$C \cup J(C) = \bigcup_{r\in C} L(r)$$

$$J(C)=J_S(C) \cup J_0(C)$$

$$\longrightarrow \quad S_C \cup J_0(C) = \bigcup_{r\in C} L(r)$$

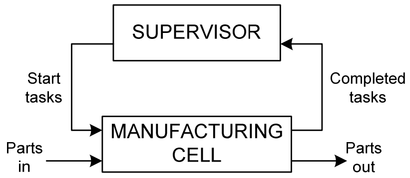
vektorski prikaz $\mathbf{v}_{0C}$

p-invarijante resursa u kružnom čekanju C

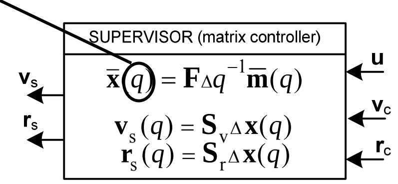
$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{0C} \\ \mathbf{0}_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}\Delta\mathbf{c} \wedge \overline{\mathbf{s}_C}$$

nul vektor – n = broj resursa u sustavu

Upravljanje pomoću matrica sustava



operator kašnjenja



$$\bar{\mathbf{x}}(q) = \mathbf{F}\Delta q^{-1}\bar{\mathbf{m}}(q)$$

$$\mathbf{v}_s(q) = \mathbf{S}_v\Delta\mathbf{x}(q)$$

$$\mathbf{r}_s(q) = \mathbf{S}_r\Delta\mathbf{x}(q)$$

- ovakav supervisor opisuje samo logičko ponašanje sustava (bez upravljanja)

Upravljanje pomoću matrica sustava

- potrebno je uključiti upravljački vektor (*dispatching vector*) $\mathbf{u}_\mathrm{d}$ kao dio supervisora

$$\mathbf{u}_\mathrm{d}(q) = h\Big(\mathbf{m}(q)\Big) \quad , \mathbf{u}_\mathrm{d}(0) = \mathbf{u}_\mathrm{d0}$$

funkcija upravljanja (*dispatching policy*)

mjerenja (signali sa senzora) – ne sadrže eksplicitnu informaciju o "prošlosti" sustava

=> u funkciju *h* uvrstiti prošla stanja vektora **m**

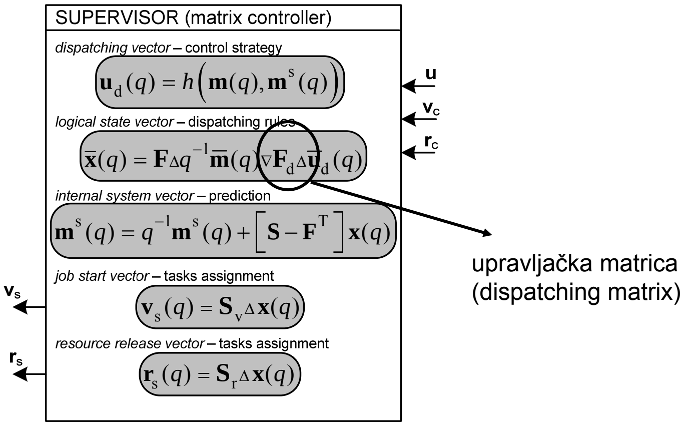
alternativa => računati pomoćni vektor $\mathbf{m}^\mathrm{s}$

$$\mathbf{m}^\mathrm{s}(q) = q^{-1}\mathbf{m}^\mathrm{s}(q) + \left[\mathbf{S} - \mathbf{F}^\mathrm{T}\right]\mathbf{x}(q) \ , \quad \mathbf{m}^\mathrm{s}(0) = \mathbf{m}^\mathrm{s}_0$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{u}_\mathrm{d}(q) = h\Big(\mathbf{m}(q), \mathbf{m}^\mathrm{s}(q)\Big)$$

Upravljanje pomoću matrica sustava



Upravljanje pomoću matrica sustava

Kako odrediti upravljačku matricu?

- konfliktna pravila $\hat{\bar{\mathbf{x}}}_d = \hat{\mathbf{F}}_r \Delta \bar{\mathbf{r}}_s$ **r_v vektor višeradnih resursa**

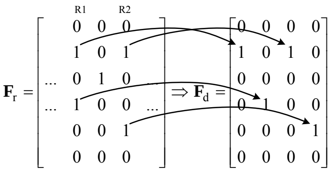
- elementi upravljačke matrice $\mathbf{F}_d$ (veza upravljačkog vektora prema pravilima)

$$f_d(i,j) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } x_d(i) = 1 \text{ i } j = \sum_{k=1}^{i} x_d(k) \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ostalo} \end{cases}$$

Broj redaka matrice F_d jednak je broju pravila (broju redaka vektora x), dok je broj stupaca određen s $x_d^T x_d$.

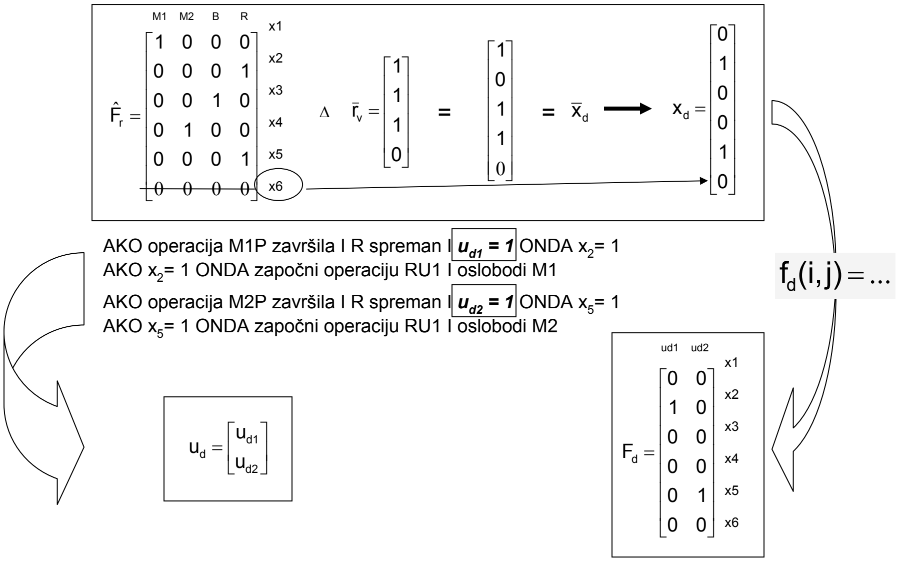
- broj komponenti upravljačkog vektor u_d jednak je broju konfliktnih pravila

- elementi matrice S_d (veza pravila prema komponentama upravljačkog vektora) ovise o algoritmu upravljanja $\mathbf{u}_d = \mathbf{S}_d \Delta \mathbf{x}$



$$\mathbf{F}_r = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \\ \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 0 & \end{array}\right] \end{array} \Rightarrow \mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Primjer: određivanje x_d i F_d



$$\hat{F}_r = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} M1 & M2 & B & R \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ \boxed{x6} \end{array} \end{array} \quad \Delta \quad \bar{r}_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{x}_d \longrightarrow x_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

AKO operacija M1P završila I R spreman I $\boxed{\boldsymbol{u_{d1} = 1}}$ ONDA x_2= 1
AKO x_2= 1 ONDA započni operaciju RU1 I oslobodi M1
AKO operacija M2P završila I R spreman I $\boxed{\boldsymbol{u_{d2} = 1}}$ ONDA x_5= 1
AKO x_5= 1 ONDA započni operaciju RU1 I oslobodi M2

$$f_d(i,j) = \ldots$$

$$u_d = \begin{bmatrix} u_{d1} \\ u_{d2} \end{bmatrix}$$

$$F_d = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} ud1 & ud2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \\ x5 \\ x6 \end{array} \end{array}$$

Simuliranje FPS-a uz pomoć matrične algebre

- programski paket Matlab
- ulazni parametri => matrice sustava
- statička analiza => u sustav nije uključeno vrijeme

Program:

```
% *** DES simulation ***
%  v=[]'
%  r = []'
%  ud = []'
%  u = []'
%  y = []'
clear all;
```

```
Fv = [ ];
Fr = [ ];
Fd= [ ];
Sv = [ ];
Sr = [ ];
Sd = [ ];
Fu = [ ];
Fy = [ ];
Su = [ ];
Sy = [ ];

F = [Fu Fv Fr Fd Fy];
S = [Su' Sv' Sr' Sd' Sy']';
W = S' - F;
```

```
% Initial Conditions
% m(to) = [PI v r ud PO] = [ ]'
        m = [ ]';
%ispis
        outputnames = [' k ...'];
        output = sprintf(' %2d ',[0 m']);
        outputnum=[0 m'];
% Running the simulation
        for i = 2:50;
% initial values for control inputs
        m(?)=1;m(?)=1;
% enabled transitions
        x = multoa(not(F), not(not(m)));
        conflict = (m - (F'*x));
```

```
% dispatching strategy
               if any(conflict < 0)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
               x = multoa(not(F), not(not(m)));
               end
        m = m + (W' * x);
        outputnum(i,:)=[i-1 m'];
        output(i,:) = sprintf(' %2d ',[i-1 m']);
end

% Displaying the results
disp(outputnames)
disp(output)
```