Rješenje zadatka 2.2 predmeta Strojno učenje

Siniša Biđin

9. prosinca 2012.

(a) *Preskočeno.*

(b) Izglednosti klasa modeliramo multivarijatnom Gaussovom gustoćom

$$p(\mathbf{x}|C_j) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\mathbf{\Sigma}_j|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_j^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j)\right\}.$$

Uvrštavanjem u model $h_j(\mathbf{x}) = \ln p(\mathbf{x}|C_j) + \ln P(C_j)$ dobivamo

$$h_j(\mathbf{x}) = -\frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\ln|\mathbf{\Sigma}_j| - \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j)^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_j^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}_j) + \ln P(C_j).$$

Odbacujemo prvi pribrojnik jer je jednak za sve klase i raspisujemo treći pribrojnik te dobivamo da je hipoteza jednaka

$$h_j(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\ln|\mathbf{\Sigma}_j| - \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_j^{-1}\mathbf{x} - 2\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_j^{-1}\boldsymbol{\mu}_j + \boldsymbol{\mu}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}_j^{-1}\boldsymbol{\mu}_j\right) + \ln P(C_j).$$

Uvodimo prvo pojednostavljenje: dijeljenu kovarijacijsku matricu. Kovarijacijska matrica $\mathbf{\Sigma}$ tada je identična za sve klase, pa iz prethodnog izraza izbacujemo sve konstantne pribrojnike te dobivamo

$$h_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_j - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_j + \ln P(C_j).$$

Zatim pretpostavljamo da su varijable nezavisne, pa dijeljena kovarijacijska matrica postaje $\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\sigma_i^2)$, a njen inverz $\mathbf{\Sigma}^{-1} = \mathrm{diag}(1/\sigma_i^2)$. S tim na umu, raspisujemo prethodan izraz te konačno dobivamo

$$\begin{aligned} h_j(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\mu_{ij}}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{ij}^2}{\sigma_i^2} + \ln P(C_j) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i\mu_{ij}}{\sigma_i^2} - \frac{1}{2}\frac{\mu_{ij}^2}{\sigma_i^2}\right) + \ln P(C_j) = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_{ij}^2 - 2x_i\mu_{ij}}{\sigma_i^2} + \ln P(C_j). \end{aligned}$$

Vidimo da je izraz jednak (3.31) iz skripte, no bez pribrojnika $-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\sigma_i}\right)^2$, jednakog za sve klase.

(c) (i)

$$\begin{aligned}
\text{Params}(\mathcal{H}_1) &= 1 + 6 + 6/2(6+1) = 28 \\
\text{Params}(\mathcal{H}_2) &= 1 + 6 + 6 = 13 \\
\text{Params}(\mathcal{H}_3) &= 1 + 6 + 1 = 8
\end{aligned}$$

(ii) Očekujem da će najbolje generalizirati model $\mathcal{H}_1$, jer ulazne varijable nisu uvjetno neovisne s obzirom na klasu. (Odnosno, na primjer, dobra ocjena prvog razreda povećava vjerojatnost dobre ocjene drugog razreda.) Daljnjim pojednostavljenjima gubimo tu informaciju o zavisnosti varijabli i svodimo model na ekvivalent naivnog Bayesovog; pretpostavka je ekstremna i u ovom slučaju ne opisuje dobro stvarne podatke.

(iii) Svakim pojednostavljenjem empirijska pogreška i pogreška generalizacije obje padaju.

(iv) Unakrsnom provjerom.