UNIVERZITET U SARAJEVU
MAŠINSKI FAKULTET U ZENICI

mr NERMINA ZAIMOVIĆ UZUNOVIĆ

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MEHANIKE I

(STATIKA)

Zenica, avgusta, 1988. god.

mr Nermina Zaimović Uzunović,dipl.inž.

ZBIRKA RIJEŠENIH ZADATAKA IZ MEHANIKE I

Stručna recenzija
v.prof. Aleksandar Juvan,dipl.inž.

Skripta je izdata na osnovu odluke Naučno-nastavnog vijeća Mašinskog fakulteta u Zenici

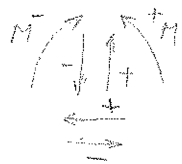
Izdanje: Mašinski fakultet u Zenici

Štampa
RO Štamparija "Bakar" Bor

S A D R Ž A J

P r e d g o v o r

Zadaci uradjeni u skripti predstavljaju zadatke koji su se pojavljivali na ispitima iz predmeta "Statika" koji se sluša u prvom semestru na Mašinskom fakultetu u Zenici. Osnovni motiv za pravljenje ove zbirke zadataka bio je da se studentima pomogne u savladavanju materije bitne i za predmete koji se slušaju na višim godinama studija. Zbirka, isto tako, treba da posluži i studentima Metalurškog fakulteta u Zenici koji dio materije obradjene u ovoj zbirci zadataka slušaju u okviru predmeta "Mehanika".

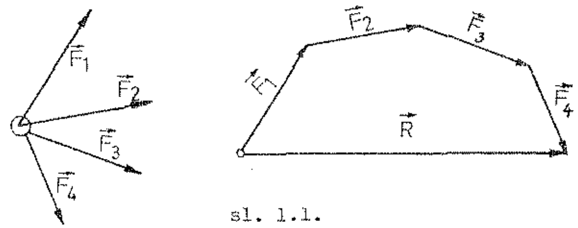


1. OSNOVNI POJMOVI IZ STATIKE

Na početku zbirke zadataka u najkraćim crtama biće objašnjeni osnovni pojmovi iz statike neophodni za rješavanje zadataka.

1.1. Tijelo ili sistem tijela čija se ravnoteža u statici izučava je kruto - nedeformabilno i pod djelovanjem opterećenja ne mijenja svoj oblik i dimenzije.

1.2. Sila je vektorska veličina. Da bi se odredila sila potrebno je naći njen pravac smjer, intenzitet i napadnu tačku. Ove karakteristike sile - vektora mogu se odrediti i analitičkim i grafičkim metodama. Sistem sila koji djeluje na tijelo može se svesti na rezultantu (sl.1.1)



sl. 1.1.

Sile se mogu podijeliti na unutrašnje i spoljašnje. Unutrašnje sile su one koje djeluju izmedju tijela unutar sistema.

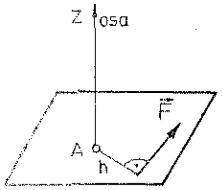
Spoljašnje sile predstavljaju djelovanje okoline na tijelo ili sistem.

Može se napraviti i podjela sila na aktivne i reakcije veza. Aktivne sile mogu biti kontinuirane (pritisak vjetra, snijega, opterećenje po jedinici dužine) ili koncentrisane, dakle djeluju u tački tijela.

Reakcije veza su sile suprotstavljaju se djelovanju aktivnih sila pa imaju suprotan smjer.

1.3. Moment sile za osu

To je umnožak sile i najkraćeg rastojanja ose i pravca sile (sl.1.2.)



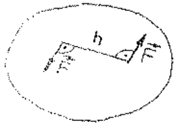
Moment sile F za osu z je umnožak sile i kraka h

$$M_z^{\vec{F}} = F \cdot h$$

Ukoliko pravac sile siječe osu moment je nula.

sl. 1.2.

1.4. Spreg sila



Spreg sila čine dvije medjusobno paralelne sile, suprotnih smjerova na rastojanju h.(sl.1.3.)

Moment sprega je umnožak sile i najkraćeg rastojanja izmedju sila

$$M = F \cdot h$$

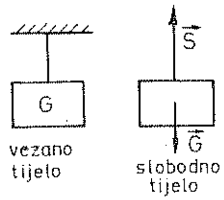
sl. 1.3.

Spreg sila nastoji da izazove čistu rotaciju tijela. Njegovo djelovanje na tijelo ne mijenja se ako ga pomjeramo u ravni tijela. Spregovi se mogu algebarski sabirati. Djelovanje sprega sila na tijelo neće se promijeniti ako se poveća sila, a smanji krak ili obratno, samo njihov umnožak mora ostati konstantan.

1.5. Veze i reakcije veza

Tijelo ili sistem može biti slobodno ili vezano, slobodnom tijelu ništa ne sprečava kretanje.
Vezanom tijelu veze ne dozvoljavaju da se slobodno kreće. Kada se posmatra ravnoteža tijela (sistema) potrebno ga je osloboditi veza, a djelovanje veza zamijeniti reakcijama veza (pravilo o oslobadjanju tijela od veza). Pod djelovanjem aktivnih sila i reakcija veza tijelo mora biti u položaju ravnoteže. Veze kojima je vezano tijeli (sistem) za spoljašnju sredinu su: uže, tanak štap bez težine, glatka površina, tačka površina

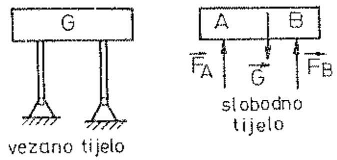
1.5.1. Uže



sl. 1.4.

Ako je veza tanko, neistegljivo idealno savitljivo uže, reakcija veze S kojom se zamjenjuje djelovanje veze ima pravac užeta, a smjer suprotan od aktivne sile (sl. 1.4.)

1.5.2. Tanak štap bez težine

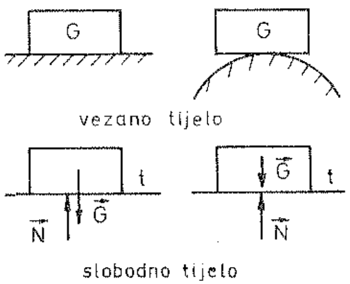


sl. 1.5.

Pod tankim štapom podrazumijeva se štap zanemarljivog poprečnog presjeka u odnosu na njegovu dužinu.

Reakcija veze ($\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$) ima pravac ose štapa, a za razliku od užeta koje može biti opterećeno samo na istezanje, štap može biti opterećen i na pritisak i na istezanje. (sl.1.5.)

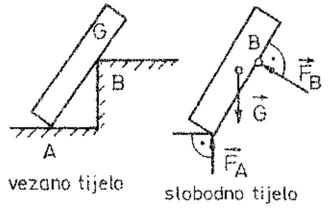
1.5.3. Glatka površina



sl.1.6.

Ukoliko se tijelo oslanja na glatku površinu nakon uklanjanja veze zamjenjuje se reakcijom koja je okomita na zajedničku dodirnu površinu, tj. ima pravac normale na zajedničku dodirnu površinu. (sl. 1.6.)

1.5.4. Tačka - površina



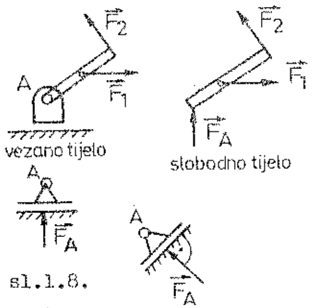
sl.1.7.

Ukoliko tijelo svojom tačkom dodiruje vezu po površini (tačka A) nakon uklanjanja veze reakcije veze ima pravac normale na uklonjenu dodirnu površinu u toj tački.

Ukoliko tijelo svojom površinom dodiruje vezu u tački (tačka B), nakon uklanjanja veze treba dodati reakciju čiji je pravac okomit na površinu tijela u toj tački. (sl.1.7)

Kod svih nabrojanih veza poznat je pravac reakcije veze, pa ostaje da se grafičkim ili analitičkim putem odrede intenzitet i smjer reakcije.

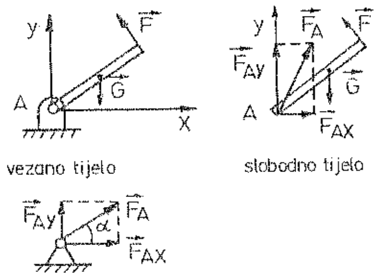
1.5.5. Pokretni oslonac



sl.1.8.

Ako je tijelo vezano za okolinu pomoću pokretnog oslonca reakcija veze ima pravac normale na uklonjenu vezu. (sl.1.8)

1.5.6. Nepokretni oslonac



sl.1.9.

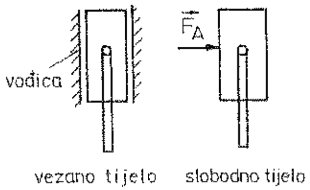
Ako je tijelo vezano za podlogu (sl.1.9) pomoću nepokretnog oslonca, koji ne dozvoljava translatorno pomjeranje u ravni, reakcija veze $\vec{F}_A$ je nepoznatog pravca, smjera i intenziteta i prolazi kroz tačku A. Prvo se traže komponente reakcije $\vec{F}_A$ u pravcu osa x i y. Reakcija F_A jednaka je zbiru komponenata $\vec{F}_{Ax}$ i $\vec{F}_{Ay}$, a njen intenzitet je

$$F_A = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2}$$

Pravac reakcije $\vec{F}_A$ odredjuje se pomoću ugla koji zaklapa sa nekom od osa npr. sa osom x zahvata ugao α pa je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{Ay}}{F_{Ax}}$

Nepokretni oslonac ne sprečava rotaciju oko ose okomite na ravan u kojoj leži $\vec{F}_A$

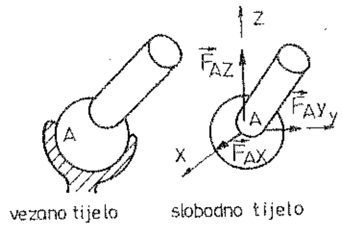
1.5.7. Klizač



sl.1.10.

Ako je veza klizač reakcija veze ima pravac okomit na uklonjenu vezu - vodjicu. (sl.1.10)

1.5.8. Sferni glatki zglob



sl.1.11.

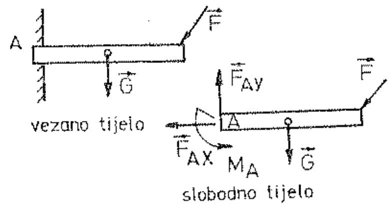
Ako je veza tijela za podlogu sferni zglob onda on ne dozvoljava kretanje u prostoru. Nakon uklanjanja zgloba njegovo djelovanje treba zamjeniti reakcijom u prostoru čiji je pravac smjer i intenzitet nepoznat. Prvo se odrede komponente $\vec{F}_{Ax}$, $\vec{F}_{Ay}$, $\vec{F}_{Az}$ reakcije F_A, a zatim nadje njen intenzitet

$$F = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2 + F_{Az}^2}$$

i uglovi koje zatvara sa pravcima koordinatnih osa

$$\cos\alpha = \frac{F_{Ax}}{F}, \quad \cos\beta = \frac{F_{Ay}}{F}, \quad \cos\gamma = \frac{F_{Az}}{F}$$

1.5.9. Uklještenje



sl.1.12.

Ako je veza uklještenje nakon uklanjanja veze njeno djelovanje zamjenjuje se reakcijom, koja se kao kod nepokretnog oslonca računa preko komponenata $\vec{F}_{Ax}$ i $\vec{F}_{Ay}$ i momentom u uklještenju M koji sprečava rotaciju oko tačke A u pravcu ose okomite na ravan djelovanja sile. (sl.1.12)

1.6. Ravnoteža proizvoljnog sistema sila u ravni

Za ravnotežu proizvodljnog sistema sila u ravni postavljaju se 3 jednačine. Da bi tijelo mirovalo ne smije da se kreće u ravni pa važe jednačine

$$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0$$

i ne smije da se obrće oko ose okomite na tu ravan, a to je obuhvaćeno uslovom

$$\sum M^{\vec{F}_i} = 0$$

1.7. Postupak rješavanja zadataka

1.7.1. Prvo je potrebno odrediti tijelo ili sistem čiju ravnotežu treba razmatrati.

1.7.2. Od vezano tijela treba napraviti slobodno tako što će se ukloniti veze a djelovanje veze zamijeniti reakcijama, čiji se smjer, u nekim slučajevima slobodno pretpostavi.

1.7.3. Na tijelo oslobodjeno veze treba dodati aktivne sile.

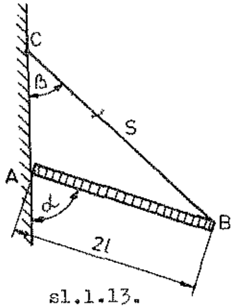
1.7.4. Pod djelovanjem aktivnih sila i reakcija tijelo (sistem) je u ravnoteži, a prije nego što se postave uslovi ravnoteže treba odabrati koordinatni sistem. Od izbora koordinatnog sistema ne zavise rezultati, ali pravilan izbor koordinatnog sistema može pojednostaviti postavljanje uslova ravnoteže.

1.7.5. Postaviti analitičke uslove ravnoteže.

1.7.6. Riješiti dobiveni sistem jednačina.
Ukoliko se dobiveni negativne vrijednosti reakcija znači da su pogrešno pretpostavljeni smjerovi reakcija, tj. da su suprotni od pretpostavljenih.

1.7.7. Reakcije u osloncima dobiti grafičkim putem.

Z a d a c i



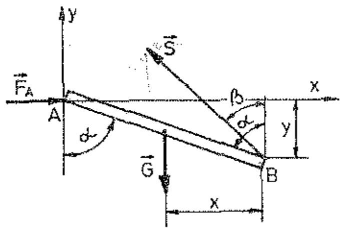
sl.1.13.

1. Homogena greda AB težine G, dužine 2 l oslanja se krajem u A na vertikalni glatki zid. Drugi kraj B pridržava uže, koje je učvršćeno u tački C. (sl.1.13)
Za ravnotežni položaj izračunaj:
- silu u užetu S,
- reakciju u osloncu A i
- ugao α koji mora zatvarati greda u odnosu na zid.

Zadano je $G=5oo$ N, $\beta = 45^o$

Rješenje: Ravnoteže grede AB

$$\sum X = 0 \quad F_A - S \cdot \sin\beta = 0 \qquad (1)$$
$$\sum Y = 0 \quad S \cos\beta - G = 0 \qquad (2)$$
$$\sum M_B = 0 \quad G \cdot X - F_A \cdot Y = 0 \qquad (3)$$



(2) $\quad S = \dfrac{G}{\cos\beta} = 5oo\sqrt{2} = 7o7{,}1$ N

(1) $\quad F_A = S \sin\beta = \dfrac{G}{\cos\beta}\sin\beta = G\ tg\beta$

$F_A = 5oo$ N

$Y = 2\ l \cos\alpha$

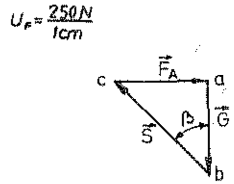
$X = l \sin\alpha$

(3) $\quad G\ l \sin\alpha - G tg\beta \cdot 2\ l \cos\alpha = 0$

$\sin\alpha - 2\cos\alpha = 0 / : \cos\alpha$

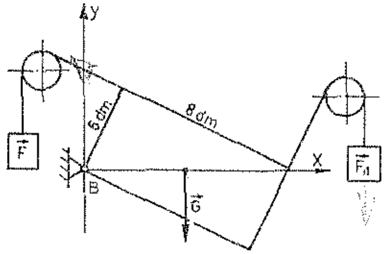
$tg\alpha = 2$

$\alpha = 63{,}43^o$



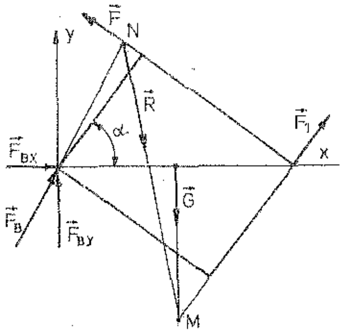
Grafičko rješenje

Reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{S}$ odrediće se tako da se vektor $\vec{G}$ rastavi na dva poznata pravca, pravac $\vec{F}_A$ i $\vec{S}$. Kroz tačku a vektora $\vec{G}$ povuče se pravac paralelan $\vec{F}_A$ a kroz tačku b pravac paralelan S. Presječna tačka ta dva pravca je c i ona odredjuje intenzitete vektora $\vec{F}_A$ i $\vec{S}$. Da bi greda AB bila u ravnoteži aktivna sila $\vec{G}$ i reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{S}$ moraju zatvrati trokut sila. Na taj način grafičkim putem odredjeni su smjer i intenzitet reakcija, a pravci su tačno odredjeni prilikom oslobadjanja tijela od veza.



sl.1.14.

2. Homogena pravougaona ploča 6x8 dm težine G=4oo kN zglobno je vezana u tački B i zategnuta je užetima koja su prebačena preko koturova. Na kraju jednog užeta visi teret F_1=1oo kN, a na drugom kraju teret F. Grafički i analitički odrediti veličinu tereta F i otpor zgloba B u ravnotežnom položaju. *(sl.1.14)*



Rješenje:

$U_F = \frac{100\ kN}{1\ cm}$

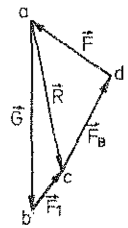
$F = daU_F = 200$ kN

$F_B = cd = U_F = 201$ kN

$tg\,\alpha = \frac{4}{3}$

$\sin\alpha = \frac{tg\,\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{4}{5}$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$



$$\Sigma X = 0 \qquad F_{BX} - F\sin\alpha + F_1\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \qquad F_{BY} - G + F\cos\alpha + F_1\sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad F_1\cdot 8 + F\cdot 6 - G\cdot 5 = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \qquad F = \frac{5\,G - 8\,F_1}{6} = 200\ kN$$

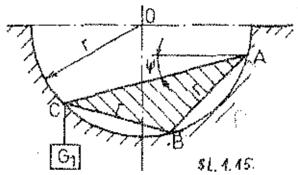
$$(1) \qquad F_{BX} = F\sin\alpha - F_1\cos\alpha = 100\ kN$$

$$(2) \qquad F_{BY} = G - F\cos\alpha - F_1\sin\alpha = 200\ kN$$

$$F_B = \sqrt{F_{BX}^2 + F_{BY}^2} = \sqrt{100^2 + 200^2} = 100\sqrt{5}\ kN$$

Grafičko rješenje

Na ploču djeluju sila težine $\vec{G}$ i poznata sila $\vec{F_1}$. Rezultanta te dvije sile je $\vec{R}$ koja ima početak u početku prve nanesene sile (tačka a), a kraj u kraju druge nanesene sile (tačka c). Pravac rezultante prolazi kroz presječnu tačku sila $\vec{F_1}$ i $\vec{G}$ (tačka M). Rezultantu $\vec{R}$ treba rastaviti na pravac sile $\vec{F}$ koji je poznat i pravac $\vec{F_B}$ koji treba prethodno odrediti. Da bi ploča bila u ravnoteži pravac $\vec{R}$, $\vec{F}$ i $\vec{F_B}$ moraju se sjeći u jednoj tački (tačka N). Tačka N je presječna tačka $\vec{F}$ i $\vec{R}$, a kroz tu tačku i tačku B prolazi pravac reakcije $\vec{F_B}$. Pošto su poznata oba pravca sila $\vec{F}$ i $\vec{F_B}$ ostaje da se $\vec{R}$ sl.1.14. razloži na 2 poznata pravca. Smjerovi $\vec{F}$ i $\vec{F_B}$ su takvi da sa $\vec{R}$ zatvaraju trokut sila.

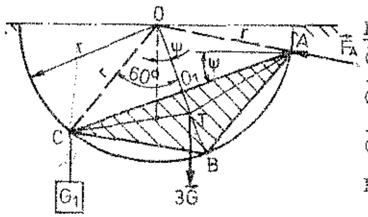


sl.1.15.

3. Homogena ploča oblika jednakokrakog trougla težine 3 G, klizi bez trenja po unutrašnjoj strani cilindra glatke površine poluprečnika r. U tjemenu C ploča nosi teret težine G_1, *(sl.1.15)*

a) Odrediti položaj ravnoteže (ugao ψ) uzimajući da je AB=BC=r

b) Kolika je minimalna težina tereta za slučaj da sila dodira u tački A bude jednaka nuli?



Rješenje:

Četverougao ABCO je romb

$\overline{OO_1} = \overline{O_1B} = \frac{r}{2}$

$\overline{OT} = \overline{OB} - \overline{BT} = r - \frac{2}{3}\frac{r}{2} = \frac{2}{3}r$

Ravnoteža trougaone ploče

$$\Sigma M_o = G_1 r\sin(60° - \psi) - 3G\,\overline{OT}\sin\psi = 0 \qquad (1)$$

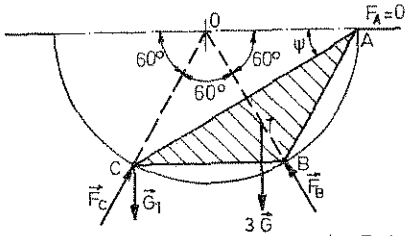
$$G_1\, r\,(\sin 60°\cos\psi - \cos 60°\sin\psi) - 3G\,\frac{2}{3}\,r\sin\psi = 0$$

$$G_1\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi - G_1\frac{1}{2}\sin\psi - 2G\sin\psi = 0\ /:\cos\psi/\cdot 2$$

$$G_1\sqrt{3} - G_1\,tg\psi - 4G\,tg\psi = 0$$

$$tg\,\psi = \frac{G_1\sqrt{3}}{4G+G_1}$$

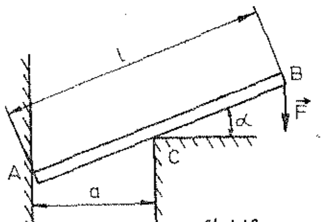
Kada se tačka A nadje na horizontalnom prečniku reakcija F_A je jednaka nuli. Za taj slučaj ψ = 3o°, što se vidi iz trokuta OCA. Minimalna težina tereta u tom slučaju može se odrediti iz prethodnog izraza za tangens ugla ψ.



$$tg\ 3o^o = \frac{G_1\sqrt{3}}{4G+G_1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\,4G + \frac{\sqrt{3}}{3}\,G1 = G_1\sqrt{3}$$

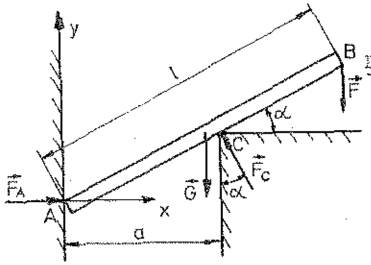
$$G_1 = 2G$$



sl. 1.16.

4. Prizmatični štap AB težine G i dužine l oslonjen je na glatki zid (bez trenja). Kraj B štapa opterećen je silom F. Naći ugao α koji štap mora zaklapati sa horizontalom pri ravnotežnom položaju i odrediti veličine reakcije u osloncima štapa A i C. (sl. 1.16)

Zadano: l = loo cm
a = 4o cm
G = 5o N
F = 7o N



Rješenje:

$$U_F = \frac{25\ N}{1\ cm}$$

$$|\vec{F}_A| = \overline{cd}\ U_F = 9o,8\ N$$

$$|\vec{F}_C| = \overline{da}\ U_F = 15o,8\ N$$

$\Sigma X = 0 \quad F_A - F_C \sin\alpha = 0$ (1)

$\Sigma Y = 0 \quad F+G-F_C \cos\alpha = 0$ (2)

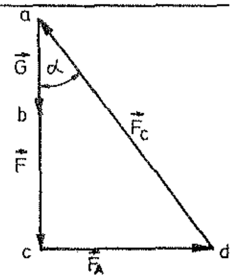
$\Sigma M_A = 0 \quad F_C \frac{a}{\cos\alpha} - G\frac{l}{2}\cos\alpha - F\,l\cos\alpha = 0$ (3)

(2) $F_C = \frac{F+G}{\cos\alpha}$

$\frac{F+G}{\cos\alpha}\,\frac{a}{\cos\alpha} - G\frac{l}{2}\cos\alpha - F\,l\cos\alpha = 0 /\cdot\cos^2\alpha$

$(F+G)\,a - G\frac{l}{2}\cos^3\alpha - F\,l\cos^3\alpha = 0$

$(F+G)\,a = (G\frac{l}{2} + F\,l)\cos^3\alpha$



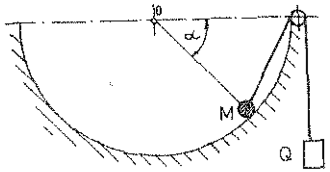
$$\cos^3\alpha = \frac{(F+G)\ a}{G\frac{l}{2}+F\ l} = \frac{(5o+7o)\cdot 4o}{5o\cdot 5o+7o\cdot loo} = \frac{48}{95} = o,5o5$$

$\cos^3\alpha = o,5o5; \quad \cos\alpha = o,796$

$\alpha = 37,25^o$

$$F_C = \frac{F+G}{\cos\alpha} = \frac{12o}{\cos\alpha} = 15o,75\ N$$

$F_A = F_C \sin\alpha = 9o,79$ N

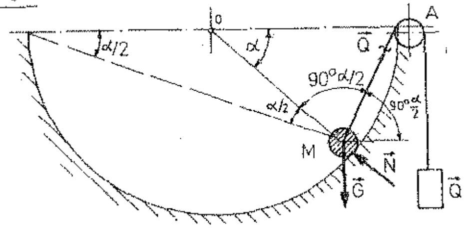


sl.1.17.

5. Tačka M težine G stoji u ravnoteži na unutarnjoj glatkoj polukružnoj površini pomoću tereta Q obješenog preko koloture u tački A. Odredi veličinu pritiska N kojim teška tačka M pritišće na glatku površinu i odredi ugao α u ravnotežnom položaju. (sl.1.17)

Zadano: G = loo N Q = 5o N

Rješenje:



$\Sigma X = 0 \quad N\cos\alpha - Q\cos(9o - \frac{\alpha}{2}) = 0$ (1)

$N\cos\alpha - Q\sin\frac{\alpha}{2} = 0$

$$N = \frac{Q\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

$\Sigma M_o = 0 \quad G\,R\cos\alpha - Q\,R\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ (2)

$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

$G\cos^2\frac{\alpha}{2} - G\sin^2\frac{\alpha}{2} - Q\cos\frac{\alpha}{2} = 0$

$\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}$

$$G\cos^2\frac{\alpha}{2} - G\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right) - Q\cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

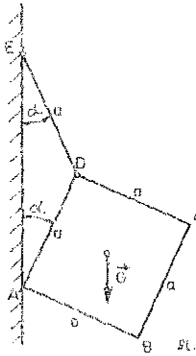
$$2G\cos^2\frac{\alpha}{2} - Q\cos\frac{\alpha}{2} - G = 0$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Q+\sqrt{Q^2+8G^2}}{4\,G}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{50+\sqrt{50^2+8\cdot 100^2}}{4.100} = 0{,}842$$

$$\frac{\alpha}{2} = 32{,}5^\circ \qquad \alpha = 65^\circ$$

$$N = \frac{Q\sin 32{,}5^\circ}{\cos 65^\circ} = 63{,}6\ N$$

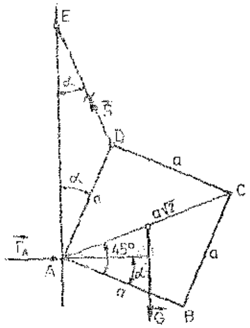


sl.1.18.

6. Kvadratna ploča težine G= 2o kN obješena je pomoću užeta DE za tačku E vertikalnog glatkog zida, na koji se oslanja u tački A.

Odredi ravnotežni položaj užeta, odnosno ploče (ugao α), silu u užetu DE i reakciju zida u tački A. *(sl.1.18)*

Rješenje:



Ravnoteže ploče ABCD

$\sum X = 0 \qquad F_A - S\sin\alpha = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad S\cos\alpha - G = 0 \qquad (2)$

$\sum M_E = 0 \qquad F_A\cdot 2a\cos\alpha - G\frac{a\sqrt{2}}{2}\cos(45-\alpha) = 0 \qquad (3)$

$(3) \rightarrow \quad 2F_A\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}G\cos(45^\circ-\alpha) = 0$

$2F_A\cos\alpha - \frac{\sqrt{2}}{2}G(\cos 45^\circ\cos\alpha + \sin 45^\circ\sin\alpha) = 0 \quad /:2$

$F_A\cos\alpha - \frac{1}{4}G\cos\alpha - \frac{1}{4}G\sin\alpha = 0$

$(1) \qquad F_A = S\sin\alpha \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{F_A}{G}$

$(2) \qquad G = S\cos\alpha$

$G\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha - \frac{1}{4}G\cos\alpha - \frac{1}{4}G\sin\alpha = 0 \;/:G$

$\sin\alpha - \frac{1}{4}\cos\alpha - \frac{1}{4}\sin\alpha = 0$

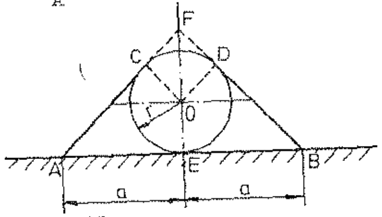
$3\sin\alpha = \cos\alpha; \quad 3\operatorname{tg}\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3} = 18{,}43^\circ$

$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}; \sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$(2) \qquad S = \frac{G}{\cos\alpha} = 21{,}08\ kN$

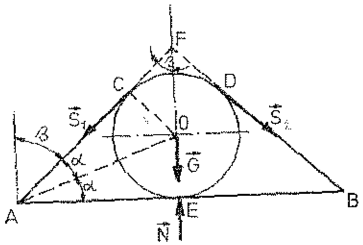
$(1) \qquad F_A = S\sin\alpha = 6{,}67\ kN$

7. Valjak radijusa r i težine G privezan je pomoću užeta za nepomičnu horizontalnu ravninu prema sl.1.19. Kolika je reakcija podloge u tački E ako je poznata sila u užetu S i ako je zadano AE=EB=a?



sl.1.19.

Rješenje:



$\sum X = 0 \qquad -S_1\sin\beta + S_2\sin\beta = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad N - G - 2S\cos\beta = 0 \qquad (2)$

$S_1 = S_2 = S$

$N = 2S\cos\beta + G$

$\sphericalangle OAC = \sphericalangle OAE = \alpha$

$\beta = 90^\circ - 2\alpha$

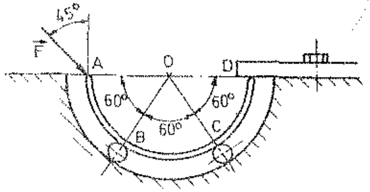
$\cos\beta = \cos(90^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r}{a}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \cos\beta$

$$\cos\beta = \frac{2\,\frac{r}{a}}{1+\frac{r^2}{a^2}} = \frac{2\,ar}{a^2+r^2}$$

$$N = G+S\,\frac{4\,ar}{a^2+r^2}$$



sl.1.20.

8. Na polukružni ležaj u njegovoj tački A djeluje sila $F = 2o\sqrt{2}$ N, čija napadna linija gradi ugao $\alpha = 45^0$ prema vertikali.(sl.1.20)

Odrediti veličine reakcije kuglice B i C kao i oslonca D grafički i analitički.

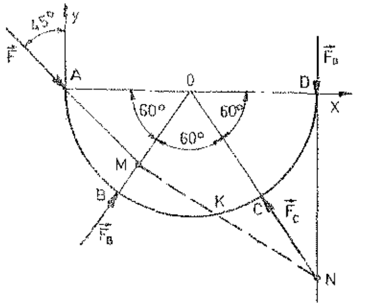
Rješenje:

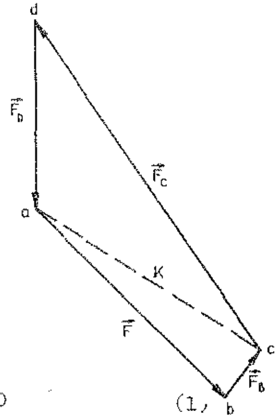
$U_F = \frac{1\ N}{2\ mm}$

$F_B = 3$ N

$F_C = 43$ N

$F_D = 2o$ N





$$\Sigma X = 0 \quad F \sin 45^0 + F_B \cos 60^0 - F_C \cos 60^0 = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad - F \cos 45^0 + F_B \sin 60^0 + F_C \sin 60^0 - F_D = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_O = 0 \quad F\, r \cos 45^0 - F_D\, r = 0 \qquad (3)$$

(3) $\quad F_D = F \cos 45^0 = 2o$ N

iz (1) i (2) nakon množenja sa $\cos 30^0$ odnosno $\sin 30^0$ i sabiranja dobije se

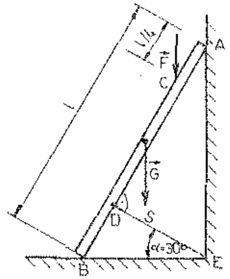
$$2\,F_B \sin 30^0 \cos 30^0 = F(2\cos 45^0 \sin 30^0 - \sin 45^0 \cos 30^0)$$

$F_B = 3$ N

$$F_C = F_B + F\,\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^0} = 43\ N$$

Grafičko rješenje pomoću metode Kulmana

Na ležaj djeluje aktivna sila $\vec{F}$, a nakon uklanjanja veza njihovo djelovanje zamjenjuje se reakcijama $\vec{F}_C$, $\vec{F}_B$ i $\vec{F}_D$ čiji je pravac poznat. Sila $\vec{F}$ ujedno je rezultante aktivnih sila i treba je razložiti na 3 poznata pravca. Prvo se odredi presječna tačka rezultante $\vec{F}$ i pravca jedne nepoznate sile (tačka M), a zatim presjek pravaca preostale dvije nepoznate sile $\vec{F}_C$ i $\vec{F}_D$ (tačka N) kroz te tačke povuče se Kulmanova linija zatim se sila $\vec{F}$ rastavi na $\vec{F}_B$ i K, tako da je trokut sila zatvoren. Obrne se smjer sile K koja je rezultante preostale 2 nepoznate sile, pa se tako dobiveno K rastavi na preostale 2 sile $\vec{F}_C$ i $\vec{F}_D$. I drugi trokut mora biti zatvoren.



sl.1.21.

9. Ljestve težine G=3oo N opterećene su u tački C vertikalnom silom F=5oo N prema sl.1.21. Zid i pod su savršeno glatki i klizanje ljestvi spriječeno je užetom DE. Grafički i analitički odredi veličine reakcije u A i B i silu silu S u užetu.

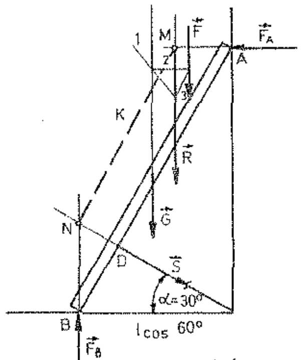
Rješenje:

$U_F = \frac{15o\ N}{1\ cm}$

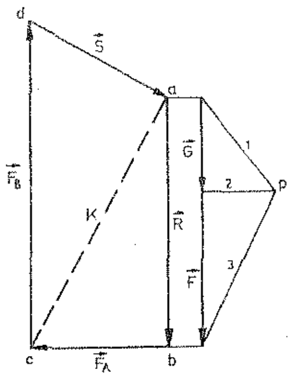
$|\vec{F}_B| = \overline{bc}\cdot U_F = 454{,}65$ N

$|\vec{F}_B| = \overline{cd}\cdot U_F = 1o62{,}5$ N

$|\vec{S}| = \overline{da}\cdot U_F = 525$ N



sl.1.21.a



$$\Sigma X = 0 \qquad S \cos 30^\circ - F_A = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \qquad F_B - S \sin 30^\circ - G - F = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_B = 0 \qquad F_A \cdot l \sin 60^\circ - G \frac{l}{2} \cos 60^\circ - F \frac{3}{4} l \cdot \cos 60^\circ - S \cdot l \cos^2 60^\circ = 0 \qquad (3)$$

---

(1) $F_A = S \cos 30^\circ$

(3) $$S = \frac{\cos 60^\circ \left(\frac{G}{2} + \frac{3}{4} F\right)}{\sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ} = 525 \text{ N}$$

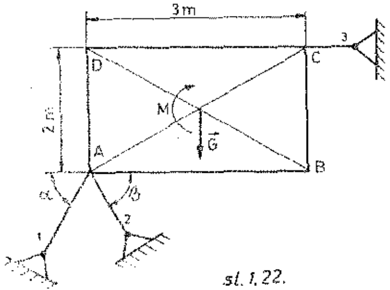
$F_A = 454{,}65$ N

$F_B = 1062{,}5$ N

Grafičko rješenje

Rezultatna aktivnih sila $\vec{G}$ i $\vec{F}$ je $\vec{R}$, a njen pravac (sl.1.21a) prelazi kroz presječnu tačku prvog i trećeg zraka. Rezultantu R treba rastaviti na tri poznata pravca reakcije $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ i $\vec{S}$. Prvo se odredi presječna tačka $\vec{R}$ i jedne nepoznate sile $\vec{F}_A$ (tačka M) a zatim presječna tačka preostale 2 nepoznate sile (tačka N). Kroz te tačke povuče se Kulmanov pravac. Zatim se sila R razloži pomoću Kulmanove linije na 3 poznata pravca, pri čemu četverougao sila mora biti zatvoren.

10. Pravougaona ploča težine G=320 N poduprta je sa 3 štapa kako je prikazano na sl.1.22. Ploča je izložena dejstvu sprega M=320 Nm.
Odrediti sile u štapovima grafičkim i analitičkim putem.



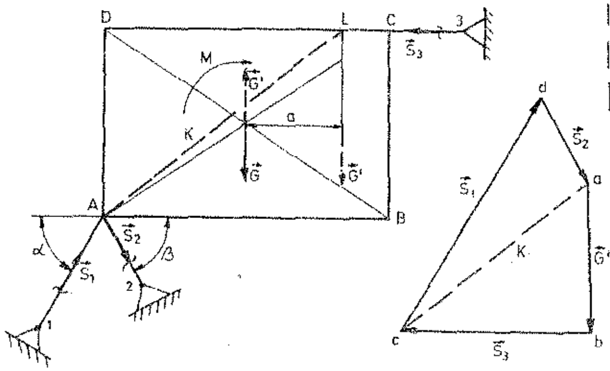
sl.1.22.

Rješenje:

$$a = \frac{M}{G} = \frac{320}{320} = 1 \text{ m}$$

$$U_F = \frac{100 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$$

Moment sprega M koji djeluje na ploču rastavićemo na spreg sila koje djeluju na kraku a = 1 m i staviti u položaj kao na slici Vektori $\vec{G}$ i $-\vec{G}'$ su suprotni pa će se poništiti. Od aktivnog opterećenja tada ostaje da djeluje samo sila $\vec{G}'$ intenziteta G izmaknuta za rastojanje a=1 m u odnosu na težište ploče.



$|\vec{S}_1| = U_F \cdot \overline{cd} = 585$ N

$|\vec{S}_2| = U_F \cdot \overline{ad} = 215$ N

$|\vec{S}_3| = U_F \cdot \overline{bc} = 400$ N

Kod grafičkog rješenja potrebno je silu $\vec{G}'$ rastaviti na 3 sile čiji su pravci poznati.

$$\Sigma X = 0 \qquad S_1 \cos\alpha + S_2 \cos\beta - S_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \qquad S_1 \sin\alpha - S_2 \sin\beta - G = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_A = 0 \qquad G \cdot 2{,}5 - S_3 \cdot 2 = 0 \qquad (3)$$

---

(3) $S_3 = \frac{2{,}5G}{2} = 400$ N

(1) $S_1 \cos 60^\circ + S_2 \cos 60^\circ = S_3 \; /: \cos 60^\circ$

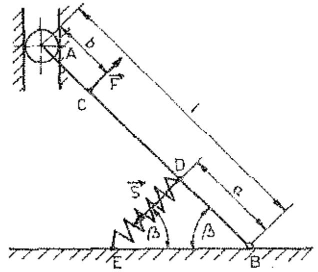
(2) $S_1 \sin 60^\circ - S_2 \sin 60^\circ = G \; /: \sin 60^\circ$

$$\left.\begin{aligned} S_1 + S_2 &= 800 \\ S_1 - S_2 &= 370 \end{aligned}\right\} +$$

$2S_1 = 1170$ N $\qquad S_1 = 585$ N

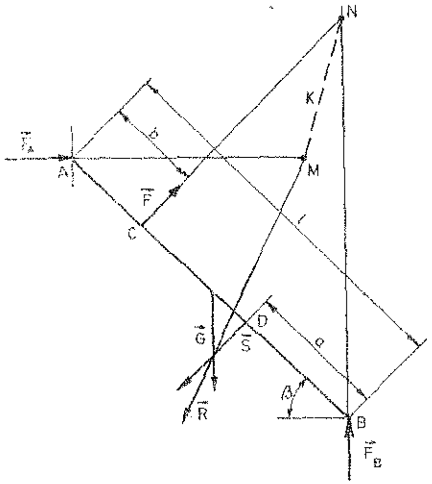
$S_2 = 800 - S_1$

$S_2 = 215$ N



sl.1.23.

11. Homogeni štap AB težine G=150 N i dužine l=80 cm oslanja se preko koture A u glatkoj vodjici, a kraj B na glatku horizontalnu podlogu. U tački D učvršćena je opruga napetosti S = 200 N.
Odredi grafički i analitički veličinu sile F koja djeluje okomito na pravac štapa AB,



te reakcije u osloncima A i B u slučaju ravnoteže. (sl.1.23)

Zadano je $\beta = 45^o$, a=3o cm,

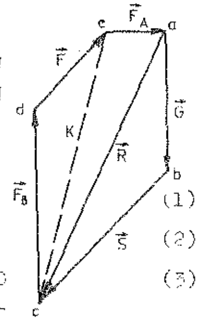
b = 2o cm.

Rješenje:

$$U_F = \frac{1\ kN}{2\ cm}$$

$$U_L = \frac{1o\ cm}{1\ cm}$$

F_A=65,6N
F_B=1o6,3N
F_B=21o,6N



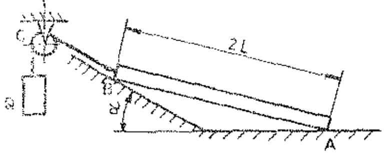
$\Sigma X = 0$	$F_A + F \sin\beta - S \sin\beta = 0$	(1)
$\Sigma Y = 0$	$F_B - G - S \cos\beta + F \cos\beta = 0$	(2)
$\Sigma M_A = 0$	$F_B \cdot l \cos\beta - G \frac{l}{2} \cos\beta - S(l-a) + F \cdot b = 0$	(3)

(2) − (3) F_B = 21o,6 N i F = 1o6,314 N

(1) F_A = 65,6 N

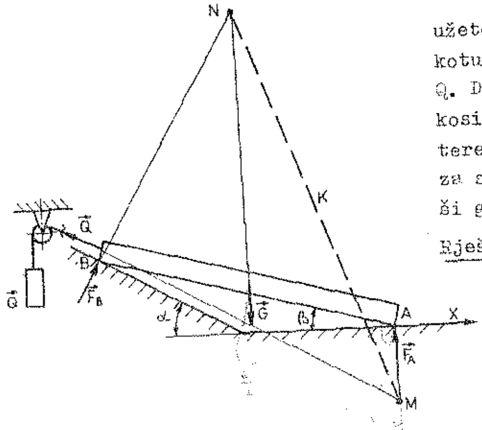
Grafičko rješenje

Pod djelovanjem svih sila aktivnih i reakcija veza štap mora biti u položaju ravnoteže. Poznate sile $\vec{G}$ i $\vec{S}$ treba svesti na njihovu rezultantu $\vec{R}$ čiji pravac prolazi kroz presječnu tačku sila $\vec{G}$ i $\vec{S}$. Dobivenu rezultantu pomoću Kulmanove linije treba razložiti na 3 sile ($\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ i $\vec{F}$) čiji su pravci poznati. Prvo se odredi presječna tačka M pravca $\vec{R}$ i $\vec{F}_A$, a zatim presječna tačka N pravaca preostale dvije nepoznate sile $\vec{F}_B$ i $\vec{F}$. Kroz tačke M i N povuče se Kulmanova linija, a zatim rezultanta rastavi prvo na $\vec{F}_A$ i $\vec{K}$, a nakon toga $\vec{K}$ se rastavi na $\vec{F}_B$ i $\vec{F}$.



sl.1.24.

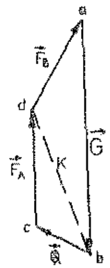
12. Homogena greda dužine 2 l i težine G=1oo N oslanja se jednim krajem na glatku horizontalnu podlogu, a drugim na glatku ravan nagnutu pod $\alpha = 3o^o$. Kraj B je vezan užetom koje je prebačeno preko kotura u tački C, a nosi teret Q. Dio užeta paralelan je sa kosinom. Izračunaj veličinu tereta Q i reakcije u A i B, za slučaj ravnoteže. Kontroliši grafički. (sl.1.24)



Rješenje:

$$U_F = \frac{1oo\ N}{5\ cm}$$

$F_A = cd \cdot U_F$ = 5o N
$F_B = da \cdot U_F$ = 43,75
$Q = bc \cdot U_F$ = 25 N



$\Sigma X = 0$	$Q \cos\alpha - F_B \sin\alpha = 0$	(1)
$\Sigma Y = 0$	$Q \sin\alpha + F_B \cos\alpha + F_A - G = 0$	(2)
$\Sigma M_B = 0$	$G \cdot l \cos\frac{\alpha}{2} - F_A \cdot 2\, l \cos\frac{\alpha}{2} = 0$	(3)

(3) $F_A = \frac{G}{2} = 5o$ N

(1) $Q = F_B\, tg\alpha$

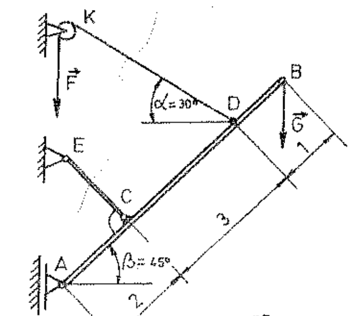
(2) $F_B \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \sin\alpha + F_B \cos\alpha + F_A - G = 0$

$$F_B = \frac{G - F_A}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + \cos\alpha} = \frac{1oo-5o}{\frac{(\frac{1}{2})^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5o}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = 43,75\ N$$

$$Q = 25\sqrt{3}\,\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 25\ N$$

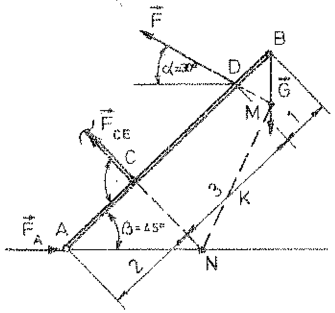
Grafičko rješenje

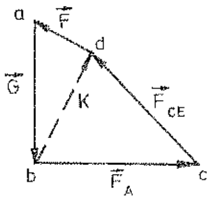
Greda je u ravnoteži ako sila $\vec{G}$ i sile $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ i $\vec{Q}$ zatvaraju četverokut sila. Koristeći Kulmanovu liniju sila $\vec{G}$ se prvo razloži na $\vec{F}_B$ i $\vec{K}$, a zatim se $\vec{K}$ razloži na $\vec{F}_A$ i $\vec{Q}$.



sl.1.25

13. Štap AB, pokretne dizalice, dužine l=6 m, učvršćen je zglobno u pokretnom osloncu A, a vodjen štapom EC. Veze u E i C su zglobne. Za tačku D privezano je uže koje je prebačeno preko kotura K i zategnuto silom F. U tački B djeluje teret G težine 3 kN. (sl.1.25) Grafički i analitički odredi veličinu sile F, reakciju u osloncu A i silu u štapu EC.





$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$

$F_A = bc \cdot U_F = 3{,}5\ kN$

$F_{CE} = cd \cdot U_F = 3{,}4\ kN$

$F = da \cdot U_F = 1{,}3\ kN$

$\Sigma X = 0$	$F_A - F_{CE} \cos 45^\circ - F \cos 30^\circ = 0$	(1)
$\Sigma Y = 0$	$F_{CE} \sin 45^\circ + F \sin 30^\circ - G = 0$	(2)
$\Sigma M_D = 0$	$F_A\, 5 \sin 45^\circ - F_{CE}\, 3 - G\, 1 \cos 45^\circ = 0$	(3)

$$2 F_A - F_{CE}\sqrt{2} - F\sqrt{3} = 0$$

$$F_{CE} \sqrt{2} + F - 6 = 0$$

$$5F_A\sqrt{2} - 6 F_{CE} - 3\sqrt{2} = 0$$

Iz jednačine (2) dobije se $F=6-F_{CE}\sqrt{2}$

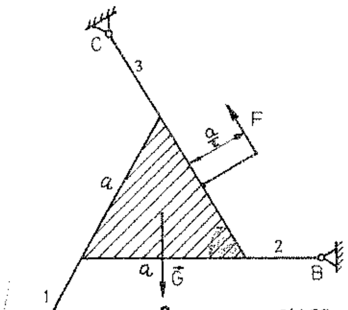
Zatim se F uvrsti u jednačinu (1)

Nakon toga rješava se sistem jednačina (1) i (2) u kojima su nepoznate F_A i F_{CE}. Kada se riješe te jednačine dobije se

$$F_{CE} = 3{,}37\ kN \quad i \quad F_A = 3{,}45\ kN$$

pa se iz jednačine (2) odredi vrijednost

$$F = 1{,}25\ kN$$



sl.1.26.

14. Homogena ploča težine $G = \frac{F}{2}$ ima oblik istostranog trougla i učvršćena je na 3 štapa. Odredi grafički i analitički sile u štapovima 1, 2 i 3, ako je veličina sile F = 1ooo N. (sl.1.26)

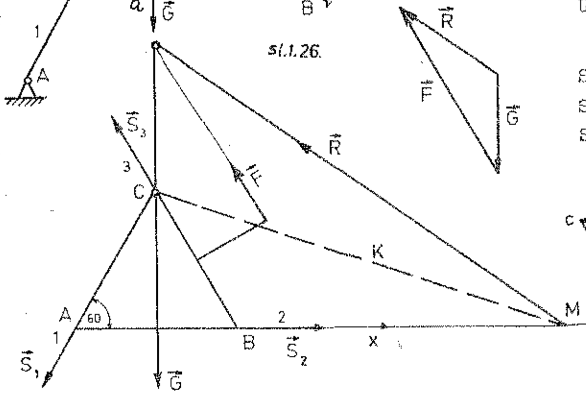
Rješenje:

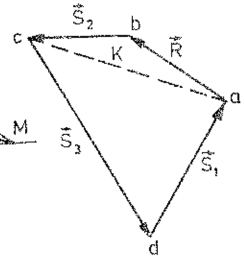
$U_F = \frac{25o\ N}{1\ cm}$

$S_3 = cdU_F \approx 1288\ N$

$S_1 = daU_F \approx 876\ N$

$S_2 = bcU_F \approx 578\ N$





$\Sigma X = 0$	$- S_1 \cos 6o^\circ + S_2 - S_3 \cos 6o^\circ - F \cos 6o^\circ = 0$	(1)
$\Sigma Y = 0$	$- S_1 \sin 6o^\circ - G + F \sin 6o^\circ + S_3 \sin 6o^\circ = 0$	(2)
$\Sigma M_C = 0$	$S_2\, a \sin 6o^\circ + F \frac{a}{2} = 0$	(3)

(3) $\quad S_2 = \frac{-F}{2a \sin 6o^\circ} = -578\ N$

Pretpostavljeno je da je štap 2 opterećen na istezanje. Pošto je dobivena negativna vrijednost stvarno naprezanje štapa je na pritisak.

Iz jednačina (1) i (2) dobiju se vrijednosti S_1 i S_3

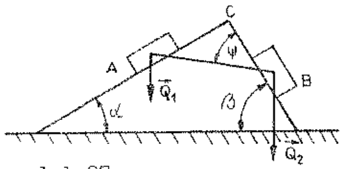
$$- S_1 \frac{1}{2} - 578 - S_3 \frac{1}{2} - 5oo = 0 \ / \cdot\sqrt{3}$$

$$- S_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - 5oo + 1ooo \frac{\sqrt{3}}{2} + S_3 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \qquad (+)$$

$S_3 = -1288{,}9\ N \qquad S_1 = -867{,}1\ N$?

Štapovi 1 i 3 su pritisnuti.

15. Na glatkim kosim ravninama koje zatvaraju uglove α i β klize 2 tereta Q_1 i Q_2 koji su medjusobno spojeni nerastegljivim užetom. (sl.1.27) Pri kojem uglu ψ je sistem u ravnoteži, kolika je napetost užeta S i kolika je veličina reakcije na kosim ravninama.



sl.1.27.

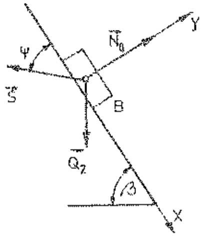
Zadano: $\alpha = 30^o$, $\beta = 60^o$, $2Q_1 = Q_2 = 100$ N

Rješenje:

Ako se posmatra ravnoteža sistema i traže samo spoljašnje reakcije onda sistem nije potrebno rastavljati. Dovoljno je osloboditi ga spoljašnjih veza pa iste zamijeniti spoljašnjim reakcijama.

Ako treba odrediti i unutrašnje reakcije onda sistem treba rastaviti, a veze, spoljašnje i unutrašnje zamijeniti odgovarajućim reakcijama i za svaki element sistema postaviti adekvatne uslove ravnoteže.

Ravnoteža tereta B



$\Sigma X = 0 \quad Q_2 \sin\beta - S\cos\psi = 0 \qquad (1)$

$\Sigma Y = 0 \quad N_B - S\sin\psi - Q_2\cos\beta = 0 \qquad (2)$

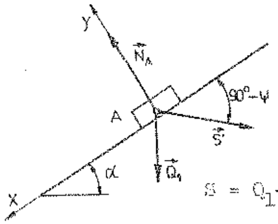
$(1) \quad S\cos\psi = Q_2 \sin\beta$

$$S = \frac{Q_2 \sin\beta}{\cos\psi}$$

$\Sigma X = 0 \quad Q_1 \sin\alpha - S\sin\psi = 0 \qquad (3)$

$\Sigma Y = 0 \quad N_A - S\cos\psi - Q_1\cos\alpha = 0 \qquad (4)$

Ravnoteža tereta A



$(3) \quad S\sin\psi = Q_1 \sin\alpha$

$$S = \frac{Q_1 \sin\alpha}{\sin\psi}$$

$$(1)=(3) \qquad \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{Q_1 \sin\alpha}{Q_2 \sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{50 \frac{1}{2}}{100\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0{,}289$$

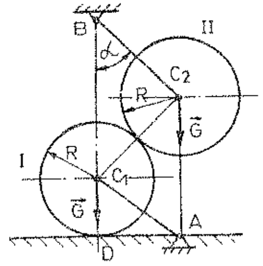
$$\psi = 16{,}12^o$$

$$S = Q_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\psi} = \frac{50\frac{1}{2}}{0{,}27765} = 90 \text{ N}$$

$$N_B = S\sin\psi + Q_2\cos\beta = 90 \cdot 0{,}277 + 100\frac{1}{2} = 75 \text{ N}$$

$$N_A = S\cos\psi + Q_1\cos\alpha = 90 \cdot 0{,}961 + 50\frac{\sqrt{3}}{2} = 129{,}76 \text{ N}$$

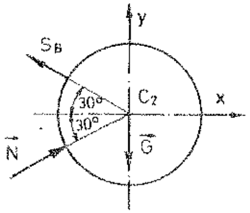
16. Dvije homogene kugle, jednakih težina G i poluprečnika R, vezane su koncima za nepokretne zglobove A i B i oslanjaju se jedna na drugu, a prva i na glatki pod. Odrediti sile u koncima, pritisak na pod i uzajamni pritisak kugli ako je u ravnotežnom položaju poznat ugao α i ako je $BC_1 = BC_2 = l$. Zadano je: $G = 10$ kN (sl.1.28) $\alpha = 60^o$.

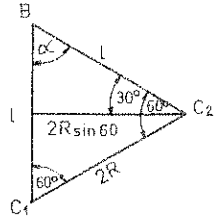


sl.1.28.

Rješenje:

Ravnoteža kugle II





$\Sigma X = 0 \quad - S_B \cos 30^o + N\cos 30^o = 0 \qquad (1)$

$\Sigma Y = 0 \quad S_B \sin 30^o + N\sin 30^o - G = 0 \qquad (2)$

Iz (1) slijedi da je $S_B = N$

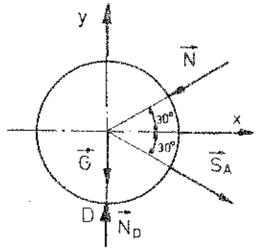
Ako se to uvrsti u (2) dobiće se

$2N \sin 30^o - G = 0$

$N = G \qquad S_B = 10$ kN

$\qquad\qquad N = 10$ kN

Ravnoteža kugle I



$\Sigma X = 0 \quad S_A \cos 30^o - N\cos 30^o = 0 \qquad (3)$

$\Sigma Y = 0 \quad N_D - G - N\sin 30^o - S_A \sin 30^o = 0 \qquad (4)$

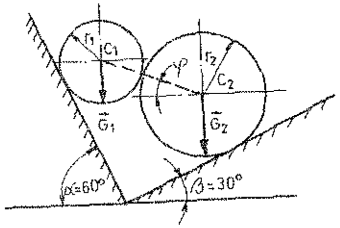
iz (3) slijedi da je $S_A = N$

Ako se to uvrsti u (4) dobiće se

$N_D - G - 2G\sin 30^o = 0$

$N_D = 2G \qquad N_D = 20$ kN

$\qquad\qquad S_A = 10$ kN



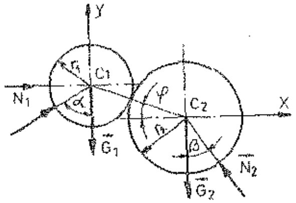
sl. 1.29

17. Izmedju dvije ravnine nagnute pod uglom $\alpha = 60°$ i $\beta = 30°$ nalaze se dvije homogene kugle radijusa r_1 i r_2 težina $G_1 = 10$ kN i $G_2 = 30$ kN. Odrediti ugao φ što ga središta kugla zatvaraju sa horizontalom, reakcije glatkih podloga i uzajamni pritisak izmedju kugla. (sl. 1.29)

Rješenje:

Ravnoteža sistema oslobodjenog spoljašnjih veza.

Posmatra se ravnoteža cijelog sistema oslobodjenog samo spoljašnjih veza.
Iz uslova ravnoteže izračunaju se spoljašnje reakcije N_1 i N_2.

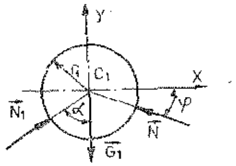


$$\Sigma X=0 \quad N_1 \sin\alpha - N_2 \sin\beta = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma Y=0 \quad N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta - G_1 - G_2 = 0 \qquad (2)$$

iz (1) slijedi $N_1 \frac{\sqrt{3}}{2} - N_2 \frac{1}{2} = 0$

iz (2) slijedi $N_1 \frac{1}{2} + N_2 \frac{\sqrt{3}}{2} - 40 = 0$

$N_1 = 20$ kN $\quad N_2 = 20\sqrt{3}$ kN



Ravnoteža kugle C_1

Da bi se odredio ravnotežni ugao φ i unutrašnja reakcija N posmatra se ravnoteža jednog elementa sistema npr. kugle C_1.

$$\Sigma X=0 \quad N_1 \sin\alpha - N \cos\varphi = 0 \qquad (3)$$
$$\Sigma Y=0 \quad N_1 \cos\alpha + N \sin\varphi - G_1 = 0 \qquad (4)$$

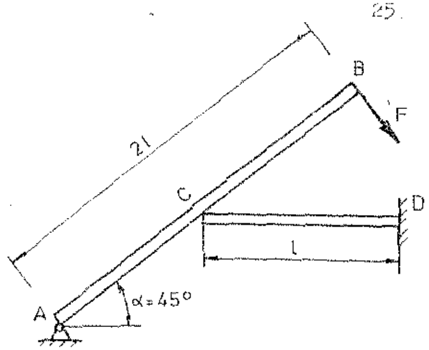
iz (3) slijedi $N \cos\varphi = 10\sqrt{3}$

iz (4) slijedi $N \sin\varphi = 10 - 20\,\frac{1}{2} = 0$

$tg\varphi = 0$

$\varphi = 0$

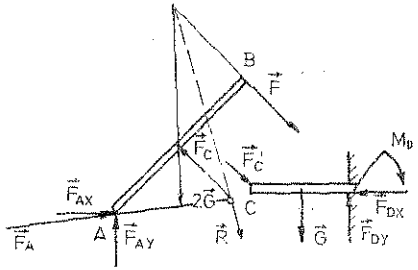
$N = 10\sqrt{3}$ kN

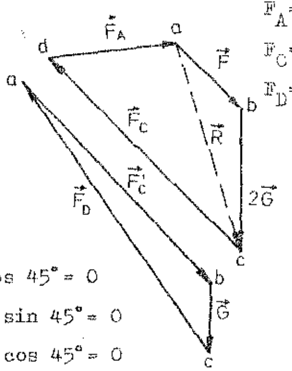


sl.1.30.

18. Homogena greda AB dužine 2l i težine 2G, i u B opterećena silom F, krajem A zglobno je vezana za nepokretni oslonac, a u tački C, sredina grede AB slobodno se oslanja na horizontalnu konzolu CD, dužine l i težine G, koja je krajem D uklještena u vertikalni zid. (sl. 1.30)

Grafički i analitički odredi veličine reakcija u osloncu A, tački C i uklještenju D. Dimenzije zadane prema slici: l = 40 cm, G = 300 N, F = 400 N.





$U_F = \frac{200 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$

$F_A = da\,U_F \approx 580,5$ N

$F_C = cd\,U_F \approx 1223$ N

$F_D = ca\,U_F \approx 1447$ N

Ravnoteža grede AB

$$\Sigma X = 0 \quad F_{Ax} + F\cos 45° - F_C \cos 45° = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma Y = 0 \quad F_{Ay} - 2G + F_C \sin 45 - F \sin 45° = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma M_A = 0 \quad F \cdot 2l - F_C \cdot l + 2G \cdot l \cos 45° = 0 \qquad (3)$$

(3) $\quad F_C = 2G\cos 45° + 2F = 1223$ N

(1) $\quad F_{Ax} = \cos 45°(F_C - F) = 580,2$ N

(2) $\quad F_{Ay} = 2G - F_C \sin 45° + F \sin 45°$

$F_{Ay} = 19,2$ N

Ravnoteža grede CD

$\sum X = 0 \qquad F_C \cos 45^\circ - F_{DX} = 0 \qquad (4)$

$\sum Y = 0 \qquad F_C \sin 45^\circ + G - F_{Dy} = 0 \qquad (5)$

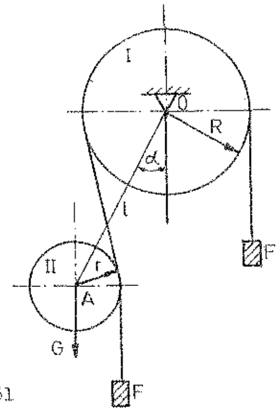
$\sum M_D = 0 \qquad F_C \sin 45^\circ\, l + G\,\frac{l}{2} - M_D = 0 \qquad (6)$

(4) $F_{Dx} = F_C \cos 45^\circ = 862{,}2\ N$

(5) $F_{Dy} = G + F \sin 45^\circ = 1162{,}2\ N$

(6) $M_D = 40488{,}6\ N\,cm \approx 40{,}5\ kNcm$

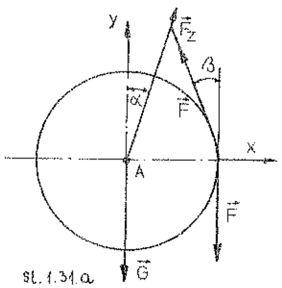
$$F_D = \sqrt{F_{Dx}^2 + F_{Dy}^2} = 1447{,}18\ N$$



sl.1.31

19. Preko kotura I koji se može okretati oko O prebačeno je uže i na njemu obješena dva jednaka tereta F. Kotur II težine G pričvršćen je zglobno na O pomoću štapa OA (bez težine) dužine l=10 cm, te djeluje na lijevi kraj užeta i otklanja ga od vertikalne ose prema slici 1.31.
Odredi analitički kut α koji štap zatvara sa vertikalom i silu u štapu OA.
Zadano je: $F=10^2 N$ $G=40\ N$
$r=3$ cm, $R=4$ cm, $l=10$ cm

Rješenje:



sl.1.31.a

Ravnoteža sistema (sl.1.31.b)

$\sum M_O = 0 \qquad G\cdot l \sin\alpha + F(l \sin\alpha - r) - FR = 0 \qquad (1)$

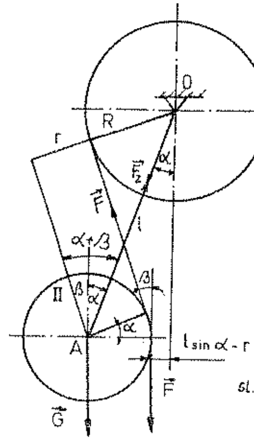
$G\cdot l \sin\alpha + Fl \sin\alpha - Fr - FR = 0$

$l \sin\alpha (G+F) - F(r+R) = 0$

$\sin\alpha = \frac{F(r+R)}{l(G+F)}$

$\sin\alpha = \frac{100(4+3)}{10(40+100)} = 0{,}5$

$\alpha = 30^\circ$



sl.1.31b

Ravnoteža koture II

$\sum X = 0 \qquad F_z \sin\alpha - F \sin\beta = 0 \qquad (2)$

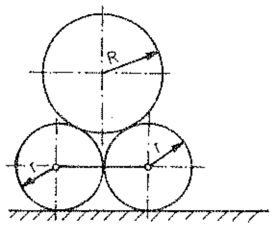
$\sin(\alpha+\beta) = \frac{R+r}{l} = 0{,}7$

$\alpha + \beta = 44{,}43^\circ \qquad \beta = 14{,}43^\circ$

Iz jednačine (2) nadje se F_z

$F_z = \frac{F \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{100\cdot 0{,}249}{0{,}5}$

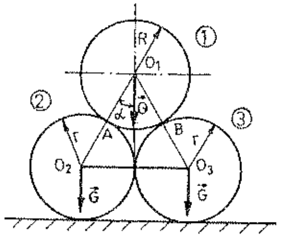
$F_z = 49{,}84\ N$

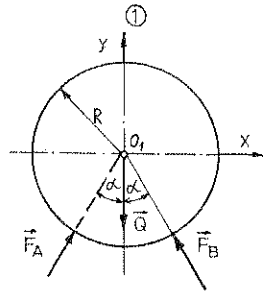


sl.1.32.

20. Na dva jednaka homogena cilindra (sl.1.32) radijusa r i težine G, koji leže na horizontalnoj ravni i koji su vezani u centrima sa nerastegljivim užetom dužine 2 r, leži treći homogeni cilindar radijusa R i težine Q. Odrediti silu S u užetu, pritisak cilindara na ravninu i uzajamni pritisak cilindara. Trenje se zanemaruje.

Rješenje:





Ravnoteža cilindra 1

$\sum X = 0 \qquad F_A \sin\alpha - F_B \sin\alpha = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad F_A \cos\alpha + F_B \cos\alpha - Q = 0 \qquad (2)$

Iz jednačine (1) slijedi da je $F_A = F_B$ pa jednačina (2) dobiva oblik $2F_A \cos\alpha - Q = 0$

Iz trougla $O_1\,O_2\,O_3$ vidi se da je

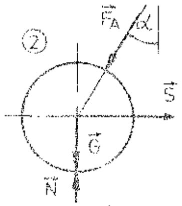
$$O_2\,O_3 = 2r = 2(R+r)\sin\alpha, \text{ pa je } \sin\alpha = \frac{r}{R+r}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{r^2}{(R+r)^2}} = \frac{\sqrt{R^2+2Rr}}{R+r}$$

Uvrštavanjem $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{R^2+2Rr}}{R+r}$ u jednačinu (2) dobije se

$$F_A = \frac{Q\,(R+r)}{2\sqrt{R^2+2Rr}} \qquad F_B = \frac{Q\,(R+r)}{2\sqrt{R^2+2Rr}}$$

Ravnoteža cilindra 2



$$\sum X=0 \qquad S - F_A \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\sum Y=0 \qquad N - G - F_A\cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

Iz jednačine (3) može se izračunati sila u užetu S.

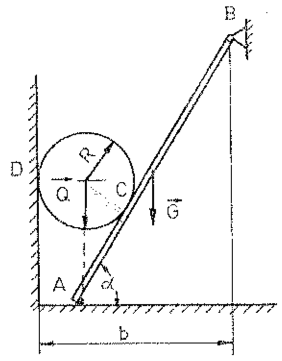
$$S = F_A \sin\alpha = \frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2Rr}} \cdot \frac{r}{(R+r)}$$

$$S = \frac{Q\cdot r}{2\sqrt{R^2+2Rr}}$$

a iz jednačine (4) reakcija podloge N

$$N = G+F_A\cos\alpha = G + \frac{Q(R+r)}{2\sqrt{R^2+2Rr}} \cdot \frac{\sqrt{R^2+2Rr}}{R+r}$$

$$N = \frac{Q}{2} + G$$



sl.1.33.

21. Homogena greda AB, dužine l i težine G, krajem B zglobno je vezana, a krajem A slobodno se oslanja o glatku horizontalnu ravan pod uglom α prema slici. Na gredu i vertikalni zid oslanja se valjak radijusa R i težine Q. Odredi grafički i analitički otpore u osloncima A, B i tački D. (sl. 1.33.)

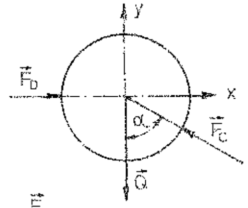
Zadano je: $G = 300$ N, $\alpha = 60°$,

$r = 15$ cm, $Q = 500$ N,

$b = 60$ cm

Rješenje:

Ravnoteža valjka



$$\sum X=0 \qquad F_D - F_C\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y=0 \qquad F_C\cos\alpha - Q = 0 \qquad (2)$$

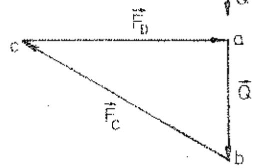
$$(2) \qquad F_C = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{500}{\frac{1}{2}}$$

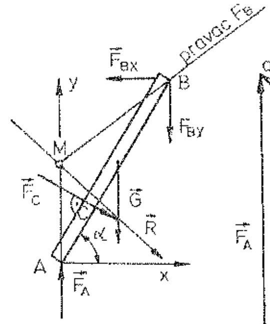
$$F_C = 1000 \text{ N}$$

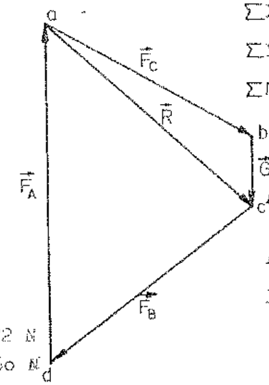
$$(1) \qquad F_D = F_C \sin\alpha$$

$$F_D = 1000\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F_D = 865 \text{ N}$$







$$\sum X=0 \qquad F_C\cdot\sin\alpha - F_{Bx} = 0 \qquad (3)$$

$$\sum Y=0 \qquad F_A - G - F_{By} - F_C\cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$\sum M_B = 0 - F_A\cdot l\cos\alpha + F_C\cdot BC + G\cdot\frac{l}{2}\cos\alpha = 0 \qquad (5)$$

$$AB = l = \frac{b-r}{\cos\alpha} = \frac{60-15}{\cos 60°} = 90 \text{ cm}$$

$$AC = r\,\mathrm{tg}\,\alpha = 15\cdot\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$BC = l - AC \approx 64 \text{ cm}$$

$$U_F = \frac{200 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$$

$F_A = \text{da}\,U_F = 1572$ N

$F_B = \text{dc}\,U_F = 1060$ N

(3) $F_{Bx} = F_C \sin \alpha$

$F_{Bx} = 1000 \ \frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_{Bx} = 865$ N

Iz jednačine (5)

$$F_A = \frac{F_C \cdot BC + G \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha}{l \cos \alpha}$$

$$F_A = \frac{1000 \cdot 64 + 300 \cdot 45 \cdot \frac{1}{2}}{90 \cdot \frac{1}{2}}$$

$F_A = 1572,2$ N

(4) $F_{By} = F_A - G - G_C \cos \alpha$

$F_{By} = 1572,2 - 300 - 1000 \cdot \frac{1}{2}$

$F_{By} = 772,2$ N

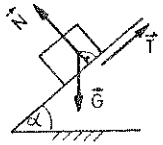
$$F_B = \sqrt{F_{Bx}^2 + F_{By}^2} = 1159 \text{ N}$$

2. T R E N J E

Pošto podloge na kojima tijelo miruje ili se kreće nisu glatke, izmedju tijela i podloge (veze) dolazi do pojave trenja koje djelimično ili potpuno sprečava kretanje. Trenje se može posmatrati kao: trenje klizanja, trenje kotrljanja, trenje obrtanja i užetno trenje. Pošto su ispitni zadaci uglavnom obuhvatali oblast trenja klizanja i užetnog trenja to ovdje će ukratko biti obuhvaćena samo ta dva oblika trenja.

2.1. Trenje klizanja

Ukoliko tijelo leži na hrapavoj kosini ono ima tendenciju spuštanja niz kosinu. Kretanju tijela na hrapavim površinama suprotstavlja se sila trenja



sl.2.1.

$$\boxed{T = \mu \cdot N}$$

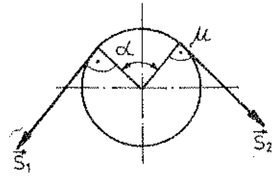
koja ima pravac kretanja, a smjer suprotan od smjera kretanja (sl.2.1)

Intenzitet sile trenja je umnožak koeficijenta trenja klizanja i normalne reakcije N. Kao i na glatkim površinama osim sile trenja javlja se i normalna reakcija N. Ukupna reakcija veze na hrapavoj kosini je zbir sile trenja i normalne reakcije

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{N}$$

2.2. Užetno trenje

Užetno trenje javlja se na kontaktu izmedju hrapave površine kotura i užeta, odnosno remena i remenice (sl.2.2.).



sl.2.2.

Za slučaj da je $S_1 > S_2$ važi Ojlerov obrazac

$$\boxed{S_1 = S_2 \, e^{\mu\alpha}}$$

gdje je:

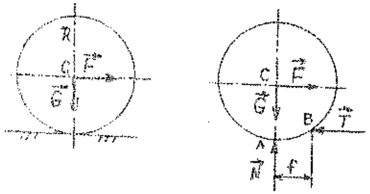
μ - koeficijent užetnog trenja

α - obuhvatni ugao koji se uvijek uvrštava u radijanima S_1 i S_2 su sile u granama užeta (remena). Kod rješavanja zadataka bitno je pravilno odrediti koja sila je veća, te na osnovu toga postaviti relaciju njihovog odnosa.

Veća sila je na onom kraju užeta na kojem je ono vučeno, a manja na onom koje se suprotstavlja vučenju. Ovo važi samo u graničnom slučaju ravnoteže.

Užetno trenje je iskorišteno kod transmisija da bi se mogao podići teret ili izvršiti prenos snage. Da bi nastalo kretanje moment trenja mora biti veći ili jednak momentu tereta. Užetno trenje iskorišteno je i kod kočnica sa trakom. Na doboš djeluje obrtni moment koji nastoji da ga obrne. Obrtnom momentu suprotstavlja se moment sile kočenja. Da bi kočnica bila u ravnoteži veća sila je ona koja pravi moment suprotnog smjera u odnosu na obrtni moment.

2.3. Trenje kotrljanja



Sl. 2.2.a

Točak na slici 2.2.a može da se kotrlja po podlozi kada nema klizanja. Ako ne postoji otpor kotrljanja, pri najmanjoj sili F točak bi se kretao. Eksperimentalno je utvrdjeno da se točak neće pomjeriti pri malim vrijednostima sile F sve dok ona ne dostigne graničnu vrijednost F_{gr}. Za granični slučaj ravnoteže sila

$$F = \frac{f}{R} \quad N$$

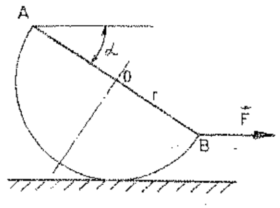
gdje je: f – koeficijent trenja kotrljanja i ima dimenziju dužine,

$\frac{f}{R}$ – neimenovan broj i njegove vrijednosti su u većini slučajeva manje od koeficijenta trenja klizanja.

Zato se u mašinstvu gdje god je to moguće trenje klizanja zamjenjuje trenjem kotrljanja.

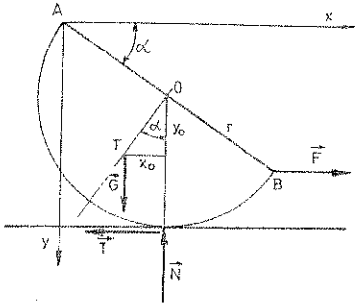
Suro

Zadaci



sl.2.3.

1. Na homogeni poluvaljak radijusa r i težine G djeluje sila F prema slici 2.3. Poluvaljak leži na horizontalnoj hrapavoj podlozi čiji je koeficijent trenja μ. Odrediti ugao α koji zatvara ravan AB sa horizontalom neposredno prije nego što nastupi klizanje valjka.



Težište poluvaljka

$$X_o = \frac{4r}{3\pi}\sin\alpha$$

$$Y_o = \frac{4r}{3\pi}\cos\alpha$$

Rješenje:

$$\sum X = 0 \qquad F = T \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \qquad N = G \qquad (2)$$

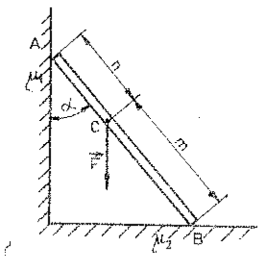
$$T = N \quad \text{iz (1) i (2)}$$

$$F = T = \mu G$$

$$\sum M_o = 0 \quad G\,X_o - Tr + Fr\sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

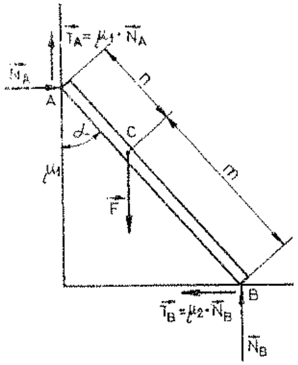
$$G\frac{4r}{3\pi}\sin\alpha - G\mu r + G\mu r\sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha = \frac{3\pi\mu}{4+3\pi\mu}$$



sl. 2.4.

2. Na vertikalni zid prislonjene su ljestve AB. Koeficijent trenja na vertikalnom zidu je μ_1, a na podu μ_2. Težina ljestava i čovjeka skoncentrisana je u tački C i dijeli dužinu ljestava u odnosu m:n. Odrediti:
   a) Najveći ugao α pod kojim će ljestve biti u ravnoteži
   b) Veličine reakcija u osloncima A i B. (sl. 2.4)



Rješenje:

$$\Sigma X = 0 \quad N_A - \mu_2 N_B = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad \mu_1 N_A - F + N_B = 0 \qquad (2)$$

iz (1) slijedi $N_A = \mu_2 N_B$ pa kada se uvrsti u (2)

$$\mu_1 \mu_2 N_B - F + N_B = 0$$

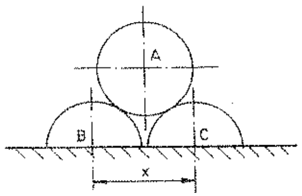
$$N_B = \frac{F}{1+\mu_1 \mu_2} \; ; \quad N_A = \frac{\mu_2 F}{1+\mu_1 \mu_2}$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad N_B(m+n) \sin\alpha - \mu_2 N_B(m+n) \cos\alpha - F n \sin\alpha = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{F}{1+\mu_1 \mu_2}(m+n) \sin\alpha - \mu_2 \frac{F}{1+\mu_1 \mu_2}(m+n) \cos\alpha - F n \sin\alpha = 0$$

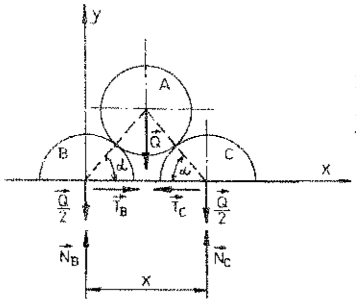
$$tg\alpha \left(\frac{m+n}{1+\mu_1 \mu_2} - n\right) = \frac{\mu_2 (m+n)}{1+\mu_1 \mu_2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\mu_2 (m+n)}{m - n \mu_1 \mu_2}$$



sl.2.5.

3. Homogeni cilindar poluprečnika r težine Q postavljen je na dva homogena polucilindra težine Q/2 i istog poluprečnika r. Koeficijent trenja izmedju polucilindara i ravni na kojoj se nalaze je μ, a trenje izmedju cilindričnih površina se zanemaruje. Odrediti najveće rastojanje X središta B i C polucilindara, pri kojem će sistem ostati u ravnoteži. (sl.2.5)



Rješenje:

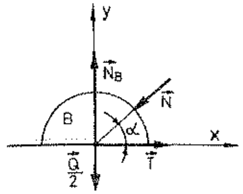
Ravnoteža sistema

$$\Sigma X = 0 \quad T_B - T_C = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad N_B + N_C - Q - 2\frac{Q}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma M_C = 0 \quad N_B \cdot X - \frac{Q}{2} X - Q \frac{X}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$T_B = T_C = T \quad N_B = N_C = Q \quad T = \mu Q$$



Ravnoteža polucilindra B

$$\Sigma X = 0 \quad T - N \cos\alpha = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad N_B - N \sin\alpha - \frac{Q}{2} = 0 \qquad (5)$$

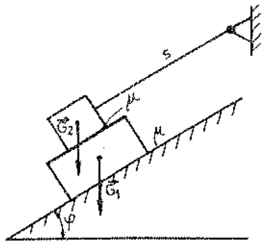
iz (4) slijedi $N \cos\alpha = \mu Q$

iz (5) slijedi $N \sin\alpha = \frac{Q}{2}$

Dijeljenjem jednačine (5) i (4) dobije se: $tg\alpha = \frac{1}{2\mu}$

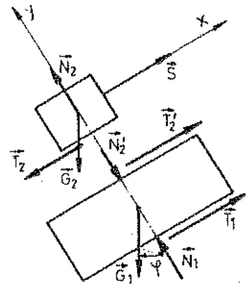
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{1+4\mu^2}}$$

$$X = 4\, r \cos\alpha = \frac{8\mu r}{\sqrt{1+4\mu^2}}$$



Sl. 2.6.

4. Na strmoj ravni pod uglom φ leži blok težine G_1 = 2oo N, a na njemu drugi težine G_2 = 7o N kojeg pridržava uže koje je paralelno sa kosinom. Trenje izmedju blokova, te izmedju bloka G_1 i kosine je μ=o,3 Odredi najmanji ugao φ kosine pri kojem će doći do klizanja bloka G_1 i silu u užetu S (sl.2.6)



Rješenje:

Ravnoteža tereta G_2

$$\Sigma X = 0 \quad S - T_2 - G_2 \sin\varphi = 0 \qquad (1)$$

$$S = G_2 \sin\varphi + T_2$$

$$\Sigma Y = 0 \quad N_2 - G_2 \cos\varphi = 0; \; N_2 = G_2 \cos\varphi \qquad (2)$$

$$T_2 = \mu N_2 = \mu G_2 \cos\varphi$$

Iz jednačina (1) i (2) izrazi se sila S samo u funkciji nepoznatog ugla

(1) i (2) $S = G_2 \sin\varphi + \mu G_2 \cos\varphi$

Ravnoteža tereta G_1

$$\Sigma X = 0 \quad G_1 \sin\varphi - T_1 - T_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma Y = 0 \quad G_1 \cos\varphi + G_2 \cos\varphi - N_1 = 0 \qquad (4)$$

$$N_1 = (G_1 + G_2) \cos\varphi \; ; \; T_1 = \mu N_1 = \mu \cos\varphi \,(G_1 + G_2)$$

Iz jednačine (4) izraze se N_1 i T_1 u funkciji ugla φ, pa se sve uvrsti u jednačinu (3). Dobije se jednačina samo sa nepoznatom φ iz koje se i odredi ravnotežni ugao.

u (3) $\quad G_1 \sin\varphi - \mu\cos\varphi(G_1+G_2) - \mu G_2 \cos\varphi = 0$

$$G_1 \sin\varphi - \mu\cos\varphi(G_1+2G_2) = 0 \;/ : \cos\varphi$$

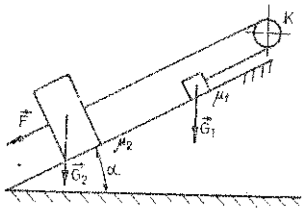
$$G_1 \operatorname{tg}\varphi - \mu(G_1+2G_2) = 0$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mu(G_1+2G_2)}{G_1}$$

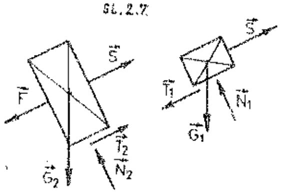
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{0,3(200+2\cdot 70)}{200} = 0,51 \qquad \varphi = 29^\circ$$

$$S = G_2\sin\varphi + T_2 = G_2\sin\varphi + \mu G_2\cos\varphi = 70\cdot\sin 29^\circ + 0,3\cdot 70\cos 29^\circ = 52,3\ N$$

5. Tereti G_1 i G_2 povezani su užetom preko kotura K. Izračunaj silu F koja je paralelna sa kosinom, koja je potrebna da se ostvari kretanje tereta niz kosinu (G_2 dole, G_1 gore). Zadano: $G_1 = 10$ N, $G_2 = 20$ N, $\alpha = 30^\circ$, $\mu_1 = 0,1$ $\mu_2 = 0,2$ (sl.2.7)



Sl. 2.7



Rješenje:

Ravnoteža tereta G_1

$\sum X = 0 \qquad S - T_1 - G_1 \sin\alpha = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad N_1 - G_1 \cos\alpha = 0 \qquad (2)$

$T_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 G_1 \cos\alpha \qquad (3)$

Ravnoteža tereta G_2

$\sum X = 0 \qquad S + T_2 - F - G_2 \sin\alpha = 0 \qquad (4)$

$\sum Y = 0 \qquad N_2 - G_2 \cos\alpha = 0 \qquad (5)$

$T_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 G_2 \cos\alpha \qquad (6)$

(1) i (3) $\quad S - \mu_1 G_1 \cos\alpha - G_1 \sin\alpha = 0$

$S = G_1(\mu_1 \cos\alpha + \sin\alpha) \qquad (*)$

(4) i (6) $\quad S + \mu_2 G_2 \cos\alpha - F - G_2 \sin\alpha = 0$

$S - F = G_2(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha),\quad S = F + G_2(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha) \quad (**)$

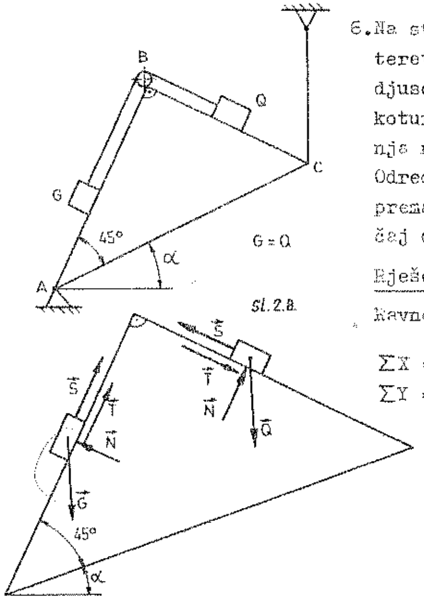
Pošto je sila S (*) jednaka S (**) slijedi da je sila F

$$F = G_1(\mu_1\cos\alpha + \sin\alpha) + G_2(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)$$

Nakon uvrštavanja podataka vrijednost sile F je

$$F = -0,67\ N$$

6. Na stranicama AB i BC nalaze se dva tereta G i Q iste težine vezani medjusobno užetom prebačenim preko kotura u tački B. Koeficijent trenja na podlogama tereta je μ. Odredi kut α nagiba stranice AC prema horizontali za granični slučaj da teret G počne da se spušta (sl.2.8).



Sl. 2.8.

Rješenje:

Ravnoteža tereta G

$\sum X = 0 \qquad T + S - G\sin(45^\circ+\alpha) = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad N - G\cos(45^\circ+\alpha) = 0 \qquad (2)$

$T = \mu N = \mu G \cos(45^\circ+\alpha) \qquad (3)$

$\sum X = 0 \qquad T - S + Q\sin(45^\circ-\alpha) = 0 \qquad (4)$

$\sum Y = 0 \qquad N - Q\cos(45^\circ-\alpha) = 0 \qquad (5)$

$T = \mu N = \mu Q\cos(45^\circ-\alpha) = \mu G\cos(45^\circ-\alpha) \qquad (6)$

iz (1) i (3) $\quad G\cos(45^\circ+\alpha) + S - G\sin(45^\circ+\alpha) = 0$

iz (4) i (6) $\quad Q\cos(45^\circ-\alpha) - S + Q\sin(45^\circ+\alpha) = 0$

Sabiranjem posljednjih jednačina i dijeljenjem sa Q odnosno G dobije se

$\mu\cos(45^\circ+\alpha) - \sin(45^\circ+\alpha) + \cos(45^\circ-\alpha) + \sin(45^\circ-\alpha) = 0$

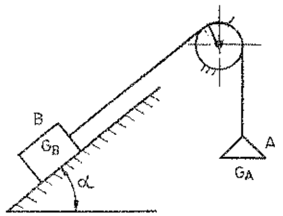
$\mu(\cos 45^\circ \cos\alpha - \sin 45^\circ \sin\alpha + \cos 45^\circ \cos\alpha + \sin 45^\circ \sin\alpha) +$

$$+(-\sin 45^\circ \cos\alpha - \cos 45^\circ \sin\alpha + \sin 45^\circ \cos\alpha - \cos 45^\circ \sin\alpha) = 0$$

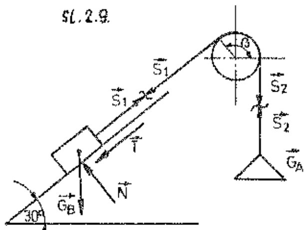
$$2\mu \cos 45^\circ \cos\alpha - 2 \cos 45^\circ \sin\alpha = 0$$

$$\mu \cos\alpha - \sin\alpha = 0 \quad / : \cos\alpha$$

$$\mu = \operatorname{tg}\alpha; \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg}\mu$$



sl.2.9.



7. Kolika mora biti težina tereta A da bi se tijelo B, težine $G_B = 5$ kN jednolikom brzinom kretalo uz kosinu ako je koeficijent trenja klizanja užeta na nepokretnom koturu i kosini $\mu = 0{,}25$ i ugao $\alpha = 30^\circ$ (sl.2.9).

Rješenje:

Ravnoteža tereta G_B

$$\sum X = 0 \qquad S_1 - G_B \sin 30^\circ - T = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \qquad N - G_B \cos 30^\circ = 0 \qquad (2)$$

$$T = \mu \cdot N \qquad (3)$$

Iz (2) slijedi da je

$$N = G_B \cos 30^\circ$$

a iz (3) da je

$$T = \mu G_B \cos 30^\circ$$

Iz jednačine (1) kada se uvrsti N i T dobije se

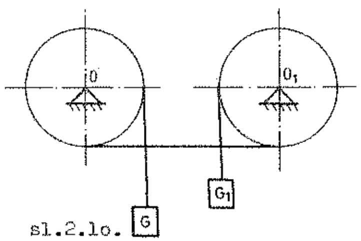
$$S_1 = G_B \sin 30^\circ + \mu G_B \cos 30^\circ$$

$$S_1 = G_B(\sin 30^\circ + \mu \cos 30^\circ)$$

$$S_1 = 3{,}5825 \text{ kN}$$

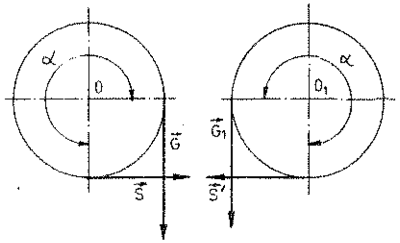
Jednačina užetnog trenja na nepokretnom koturu daje vezu izmedju sila S_1 i S_2 pri čemu je $S_2 > S_1$ jer se teret kreće uz kosinu. Obuhvatni ugao $\beta = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ $\quad S_2 = S_1 e^{\mu\beta} = 3{,}5825\, e^{0{,}25 \cdot \frac{2\pi}{3}} = 6{,}045$ kN

Sila S_2 jednaka je težini tereta $G_A = 6{,}045$ kN



sl.2.10.

8. Preko dvije nepomične osovine sa centrima u O i O_1 prebačen je konopac o čije su krajeve obješeni tereti G_1 i G pri čemu je $G > G_1$ (G uravnotežuje sistem). Odrediti minimalnu vrijednost koeficijenta trenja izmedju osovina i konopca pri kojoj



će se tereti nalaziti u ravnoteži.

Rješenje:

Jednačina užetnog trenja na lijevoj osovini je:

$$S = G\, e^{\mu\alpha} \qquad (1)$$

Jednačina užetnog trenja na desnoj osovini je

$$G_1 = S\, e^{\mu\alpha} \qquad (2)$$

Uvrštavanjem jednačine (1) u (2) dobije se

$$G_1 = G\, e^{2\mu\alpha}; \quad e^{2\mu\alpha} = \frac{G_1}{G}$$

$\alpha = \frac{3\pi}{2}$ je obuhvatni ugao sila $\vec{S}$ i $\vec{G}$ i sila $\vec{S'}$ i $\vec{G_1}$

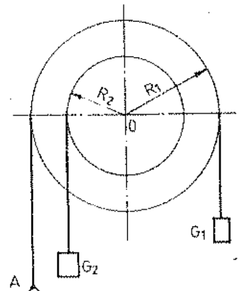
$$S = S'$$

$$2\mu\alpha \ln e = \ln G_1 - \ln G$$

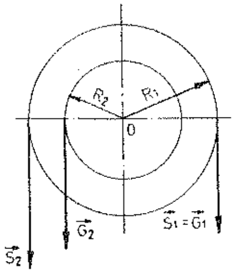
$$2\mu \frac{3\pi}{2} = \ln G_1 - \ln G$$

$$\mu = \frac{\ln G_1 - \ln G}{3\pi}$$

9. Preko točka radijusa $R_1 = 3$ m prebačeno je uže čiji je jedan krak učvršćen u tački A, a drugi opterećen tegom $G_1 = 200$ N. Na istoj osi oko bubnja radijusa $R_2 = 1$ m omotano je uže na čijem slobodnom kraju je obješen teret $G_2 = 100$ N. Izračunati koliki je koeficijent trenja izmedju užeta i kotura. (sl. 2.11.)



sl. 2.11.



Rješenje:

Ravnoteža točka

$$\sum M_O = 0 \qquad S_2 R_1 + G_2 R_2 - G_1 R_1 = 0$$

$$3S_2 + G_2 - 3G_1 = 0$$

$$S_2 = \frac{3G_1 - G_2}{3} = \frac{3 \cdot 200 - 100}{3}$$

$$S_2 = \frac{500}{3} \text{ N}$$

Pošto je $S_1 = G_1 > S_2$ važi uslov užetnog trenja

$$S_1 = S_2\, e^{\mu\alpha}$$

$$\mu\alpha \ln e = \ln S_1 - \ln S_2$$

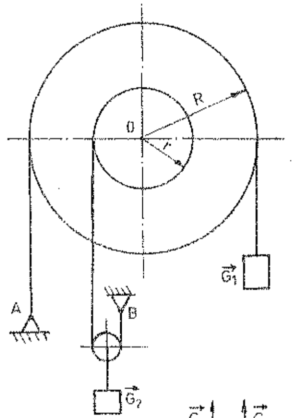
$$\mu = \frac{\ln S_1 - \ln S_2}{\alpha}$$

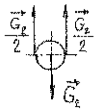
$$\mu = \frac{\ln 2oo - \ln \frac{5oo}{3}}{\pi}$$

$$\mu = o{,}o5828$$

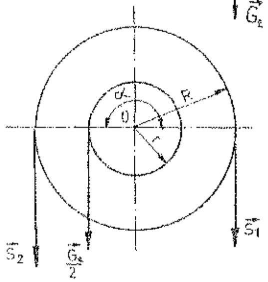
$R = 3R_2$

$\alpha = \pi$





sl. 2.12.



$S_1 = G_1$

$\alpha = \pi$

1o. Preko točka radijusa $R=3o$ cm prebačeno je uže čiji je jedan krak učvršćen u tački A, a drugi opterećen tegom težine G_1 2oo N. Na istoj osovini oko bubnja radijusa $r=1o$ cm omotano je uže koje je opterećeno prema sl. 2.12. teretom G_2.

Izračunaj koliki teret G_2 možemo ovjesiti, ako je koeficijent trenja između užeta i točka $\mu = o{,}2$ pa da se sistem nalazi na granici ravnoteže.

Rješenje:

Ravnoteža točka

$$\sum M_o = 0 \qquad S_2 R + \frac{G_2}{2}\, r - S_1 R = 0$$

$$S_2 R + \frac{1}{6}\, G_2 R - S_1 R = 0$$

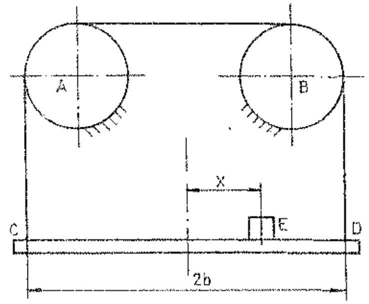
$$S_1 = S_2\, e^{\mu\alpha}; \quad S_2 = \frac{S_1}{e^{\mu\alpha}}$$

$$\frac{S_1}{e^{\mu\alpha}} + \frac{1}{6}\, G_2 - S_1 = 0$$

$$G_2 = \frac{6\, S_1 (e^{\mu\alpha} - 1)}{e.}$$

$$G_2 = \frac{6 \cdot 2oo(e^{o,2\pi} - 1)}{e^{o,2\pi}}$$

$$G_2 = 559{,}6 \text{ kN}$$



Sl. 2.13.

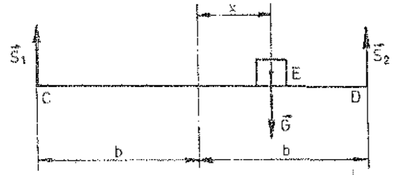
11. Preko nepomičnih točkova A i B prebačena je traka i vezana za krajeve štapa CD, dužine 2b i zanemarljive težine. Na štapu leži teret E težine G. Odrediti najveću udaljenost x tereta E od sredine štapa, pri kome štap ostaje u horizontalnom položaju, kao i sile u traci. Koeficijent trenja između trake i točka je μ

Rješenje:

Ravnoteža štapa CD

$$\sum Y = 0 \qquad S_1 + S_2 - G = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_C = 0 \qquad S_2 \cdot 2b - G(b+x) = 0 \qquad (2)$$



Ravnoteža točkova

$$S_2 = S\, e^{\mu\alpha}$$

$$S = S_1\, e^{\mu\alpha}$$

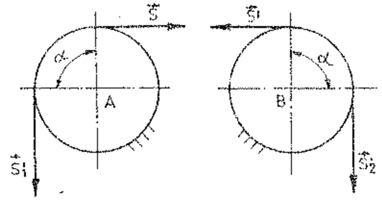
$$S_2 = S_1\, e^{2\mu\alpha} = S_1\, e^{\mu\pi} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

iz (1) i (3) $\quad S_1 + S_1\, e^{\mu\pi} - G = 0$

$$S_1 = \frac{G}{1+e^{\mu\pi}}$$

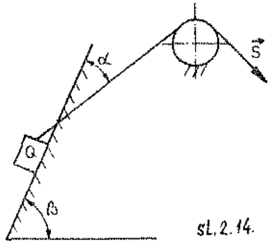
iz (3) slijedi $\quad S_2 = \dfrac{G\, e^{\mu\pi}}{1+e^{\mu\pi}}$

iz (2) slijedi $\quad x = \dfrac{S_2 \cdot 2b - G \cdot b}{G}$



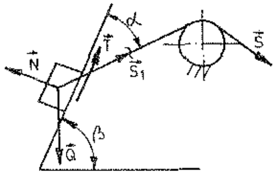
$$X = \frac{\frac{G\, e^{\mu\pi}}{1+e^{\mu\pi}}\, 2b - G\, b}{G} = \frac{b(2e^{\mu\pi} - 1 - e^{\mu\pi})}{1+e^{\mu\pi}}$$

$$X = \frac{b(e^{\mu\pi} - 1)}{1+e^{\mu\pi}}$$



sl.2.14.

12. Prizmatično tijelo težine $Q=10$ kN kreće se jednoliko niz kosinu nagnutu pod uglom $\beta=60^\circ$. Koliko puta mora u tom slučaju biti omotano uže oko nepomičnog hrapavog valjka A, ako je napetost užeta $S=100$ N, koeficijent trenja na kosini i valjku $\mu_1=\mu_2=0{,}25$, i ugao $\alpha=30^\circ$. (sl. 2.14)



Rješenje:

Ravnoteža tereta Q

$$\sum X = 0 \qquad T + S_1 \cos\alpha - Q \sin\beta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \qquad N - Q\cos\beta - S_1 \sin\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$T = \mu N \qquad (3)$$

iz (1) slijedi $\mu \cdot N + S_1 \cos\alpha - Q \sin\beta = 0$

iz (2) slijedi $N = Q\cos\beta + S_1 \sin\alpha = 0$

Kada se N uvrsti u prvu jednačinu dobije se

$$\mu Q \cos\beta + \mu S_1 \sin\alpha + S_1 \cos\alpha - Q\sin\beta = 0$$

$$S_1 = \frac{Q\,(\sin\beta - \mu\cos\beta)}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha}$$

$$S_1 = 10^4\,\frac{\sin 60^\circ - \mu\cos 60^\circ}{\mu\sin 30^\circ + \cos 30^\circ}$$

$$S_1 = 7470 \text{ N}$$

Iz ravnoteže nepokretnog kotura slijedi da je $S_1 > S$

$$S_1 = S\, e^{\mu\alpha}$$

$\alpha = 2n\pi$ obuhvatni ugao

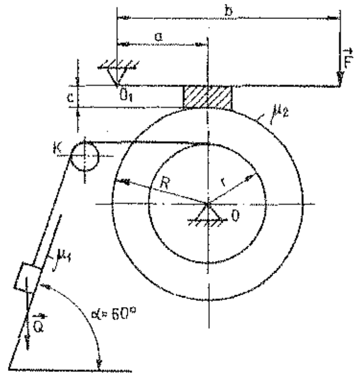
$$\frac{S_1}{S} = e^{2\mu\pi n}$$

$$n = \frac{\ln S_1 - \ln S}{2\pi\mu}$$

$$n = \frac{\ln 7470 - \ln 100}{2\cdot\pi\cdot 0{,}25}$$

$n = 2{,}747$ puta

Uže je oko hrapavog valjka omotano n puta.



sl.2.15.

13. Pomoću spuštaljke prema sl.2.15 spušta se jednoliko teret $Q=5$ kN niz kosinu pod uglom $\alpha=60^\circ$. Odredi potrebnu silu F na kraju kočnice, ako su zadane veličine:

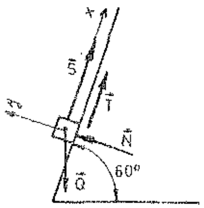
r = 20 cm	a = 20 cm
R = 40 cm	b = 100 cm
	c = 8 cm

$Q = 5$ kN

$\mu_1 = 0{,}1$ na kosini

$\mu_2 = 0{,}3$ na kočnici.

Trenje koloture K zanemariti.



Rješenje:

Ravnoteža tereta Q

$$\sum X=0 \qquad S+T-Q\sin 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

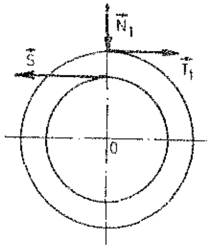
$$\sum Y=0 \qquad N-Q\cos 60^\circ = 0 \qquad (2)$$

$$T=\mu_1 N=\mu_1 Q\cos 60^\circ \qquad (3)$$

iz (1) i (3) $S+\mu_1 Q\cos 60^\circ - Q\sin 60^\circ = 0$

$$S = Q\,(\sin 60^\circ - \mu_1 \cos 60^\circ)$$

$$S = 4{,}08 \text{ kN}$$



Ravnoteža kočionog doboša

$$\sum M_o = 0 \qquad S\cdot r - T_1 R = 0 \qquad (4)$$

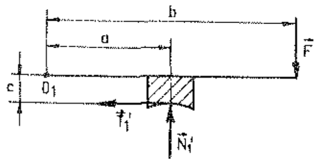
$$T_1 = S\,\frac{r}{R}$$

$$T_1 = 2{,}04 \text{ kN}$$

$$T_1 = \mu_2 N; \qquad N_1 = \frac{T}{\mu_2} \qquad (5)$$

$$N_1 = 6{,}8 \text{ kN}$$

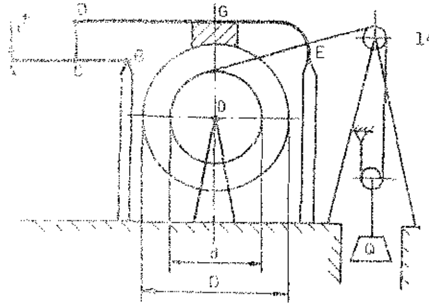
Ravnoteža poluge



$$\sum M_{o1} = 0 \qquad F\cdot b - N_1 a + T_1 c = 0 \qquad (6)$$

$$F = \frac{N_1 a - T_1 c}{b}$$

$$F = 1{,}1968 \text{ kN}$$



sl. 2.16.

14. Za spuštanje tereta na gradilištu upotrebljava se vitlo sa kočnicom kako je prikazano na sl. 2.16. Odredi maksimalnu veličinu tereta Q koji se može spuštati pri pritisku na kočnicu silom F=25o N i koeficijent trenja $\mu = 0,3$.

Zadane su veličine:

Dijametar kočnog vijenca D=5o cm

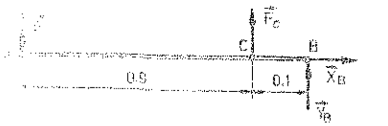
Dijametar bubnja d = 2o cm

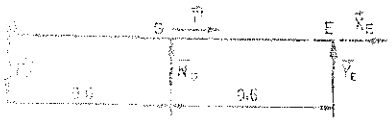
Udaljenosti poluga: AB = 1 m

BC = 1o cm

DE = 1,2 m

GE = 6o cm





Rješenje:

Ravnoteža poluge AB

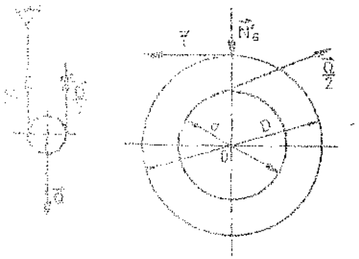
$\sum M_B = 0 \qquad F\,1 - F_C\,0,1 = 0$

$F_C = 10\,F = 2500$ N

Ravnoteža poluge DE

$\sum M_E = 0 \qquad N_G\,0,6 - F_C\,1,2 = 0$

$N_G = 2F_C = 5000$ N



Ravnoteža kočionog doboša

$T = \mu N_G = 0,3 \cdot 5000 = 1500$ N

$\sum M_0 = 0 \qquad T\,\frac{D}{2} - \frac{Q}{2}\,\frac{d}{2} = 0$

$\frac{Q}{2} = T\,\frac{D}{d} = 1500\,\frac{50}{20} = 3750$ N

$Q = 7500$ N

15. Koliki teret Q možemo zadržati kočionim tegom G težine 2oo N na pojasnoj kočnici prema uslovima zadanim na slici 2.17

G = 2oo N

r = 7o cm

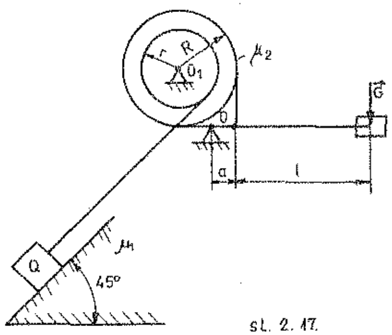
R = 5o cm

l = 16o cm

a = 15 cm

$\mu_1 = 0,1$ – trenje na kosini

$\mu_2 = 0,4$ – trenje kočnice



sl. 2.17.

Rješenje:

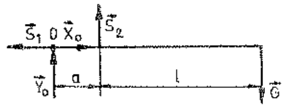
Ravnoteža poluge OG

$\sum M_o = 0 \qquad G(l+a) - S_2 a = 0 \qquad (1)$

$S_2 = \frac{G(l+a)}{a}$

$S_2 = \frac{200(160+15)}{15}$

$S_2 = 2333,3$ N

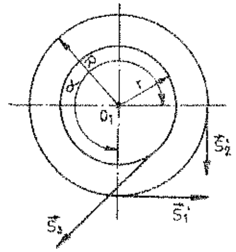


Ravnoteža kočionog doboša

$\sum M_{o1} = 0 \qquad S_2\,R + S_3\,r - S_1\,R = 0 \qquad (2)$

$S_1 = S_2\,e^{\mu_2\alpha}\ ;\ \alpha = \frac{3\pi}{2} \qquad (3)$

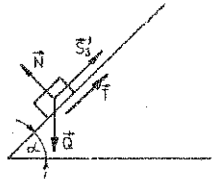
$S_1 = 15353,3$ N



$S_3 = \frac{S_1 R - S_2 R}{r}$

$S_3 = 21700$ N

Ravnoteža tereta Q



$\sum X = 0 \qquad T + S_3 - Q\sin 45^\circ = 0 \qquad (4)$

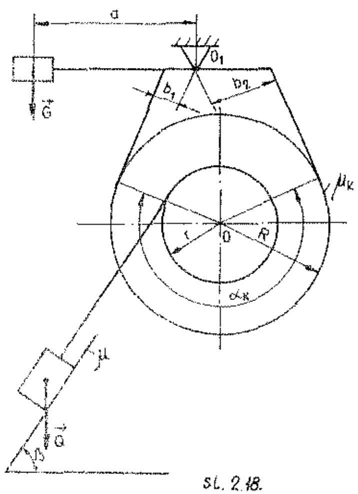
$\sum Y = 0 \qquad N - Q\cos 45^\circ = 0 \qquad (5)$

(5) $\quad N = Q\cos 45^\circ$

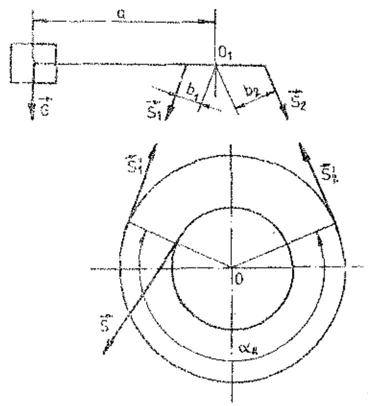
$T = \mu_1\,Q\cos 45^\circ$

$\mu_1 Q\cos 45^\circ + S_3 - Q\sin 45^\circ = 0$

$$Q = \frac{S_3}{(\sin 45^\circ - \mu_1\cos 45^\circ)} = \frac{21700}{\frac{\sqrt{2}}{2} - 0,1\,\frac{\sqrt{2}}{2}} = 17100\ \text{N}$$



sl. 2.18.



16. Za diferencijalnu kočnicu prema sl.2.18. odredi:

a) koliki teret Q možemo pridržavati na kosini ako težina tega na kočnici iznosi G=5o kN,

b) kakav odnos krakova $b_2:b_1$ mora biti da kočenje bude automatsko (težina tega G=0). Zadane veličine:

G=5o kN	a=5o cm	R=5o cm
μ_k=o,3	b_1=4 cm	r=2o cm
α_k=24o°	b_2=16 cm	
β = 45°	μ = o,1	

Rješenje:

Ravnoteža poluge

$$\Sigma M_{o1}=0 \quad G\cdot a+S_1 b_1-S_2 b_2=0 \qquad (1)$$

$$S_1=S_2\, e^{\mu_k\alpha_k} \qquad (2)$$

iz (1) i (2)

$$Ga+S_2 e^{\mu_k\alpha_k}\cdot b_1-S_2 b_2=0$$

$$S_2=\frac{Ga}{b_2-b_1\, e^{\mu_k\alpha_k}}$$

$$S_2=1275{,}5 \text{ kN}$$

$$S_1=3{,}51\ S_2=4477 \text{ kN}$$

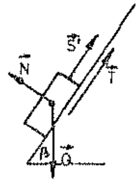
Ravnoteža doboša

$$\Sigma M_o=0 \quad S_1\cdot R-S_2\cdot R-S\cdot r=0 \qquad (3)$$

$$S=\frac{R(S_1-S_2)}{r}=8oo3{,}75 \text{ kN}$$

$$\alpha_k=24o°=\frac{4\pi}{3}$$

$$e^{\mu_k\alpha_k}=e^{o,3\,\frac{4\pi}{3}}=3{,}51$$



Ravnoteža tereta Q

$$\Sigma X=0 \quad T+S-Q\sin 45°=0 \qquad (4)$$

$$\Sigma Y=0 \quad N-Q\cos 45°=0 \qquad (5)$$

$$T=\mu N=\mu Q\cos 45° \qquad (6)$$

iz (4) i (6)

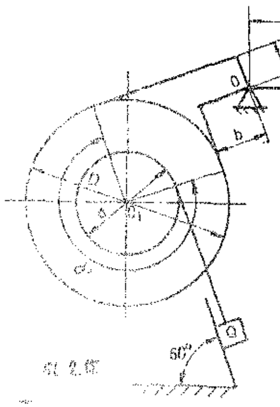
$$\mu Q\cos 45°+S-Q\sin 45°=0$$

$$Q=\frac{S}{\sin 45°-\mu\cos 45°}=1o32o{,}78 \text{ kN}$$

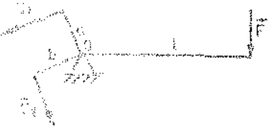
b) za G=0 jednačina (1) dobiva oblik

$$S_1\, b_1=S_2 b_2$$

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{S_1}{S_2}=3{,}51$$



Sl.2.19



17. Pomoću kočnice prikazane na sl.2.19 vrši se jednoliko spuštanje tereta Q. Koliki teret Q možemo spuštati ako na kraju kočnice djeluje sila F=40 kN. Ostali podaci su: D=80 cm, d=40 cm, L=100 cm, $\alpha=270^{\circ}$, a=b=4 cm, $\mu=0,3$.

Rješenje:

Ravnoteža poluge

$$\sum M_0 = 0$$

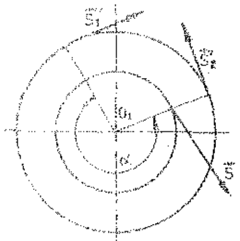
$$-F\cdot L + S_1\cdot a + S_2\cdot b = 0 \qquad (1)$$

$$S_2 = \frac{F\cdot L - S_1\cdot a}{b} = \frac{40\cdot 100 - S_1\cdot 4}{4}$$

$$S_2 = 1000 - S_1$$

$$S_2 = S_1\, e^{\mu\alpha} = S_1\, e^{0,3\,\frac{3\pi}{2}} \qquad (2)$$

Ravnoteža kočionog doboša



$$\sum M_{01} = 0$$

$$-S\,\frac{d}{2} - S_1\,\frac{D}{2} + S_2\,\frac{D}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$S = \frac{(S_2 - S_1)D}{d} = S_1\,(e^{\mu\alpha} - 1)\,\frac{D}{d}$$

$$S_1\, e^{0,3\,\frac{3\pi}{2}} = 1000 - S_1$$

$$S_1 = \frac{1000}{e^{\mu\alpha}+1} = \frac{1000}{e^{0,3\,\frac{3\pi}{2}}+1} = \frac{1000}{4,108+1}$$

$$e^{0,3\cdot\frac{3\pi}{2}} = 4,108$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2}$$

$$S_1 = 195,78 \text{ kN}$$

$$S_2 = 804,23 \text{ kN} \qquad S = 1216,9 \text{ kN}$$

Ravnoteža tereta Q

$$\sum X = 0 \qquad S + T - Q\cos 30^{\circ} = 0 \qquad (4)$$

$$\sum Y = 0 \qquad N - Q\cos 60^{\circ} = 0 \qquad (5)$$

$$T = \mu N = \mu Q \cos 60^{\circ}$$

$$(4) \qquad S + \mu Q\cos 60^{\circ} - Q\cos 30^{\circ} = 0$$

$$Q = \frac{S}{\cos 30^{\circ} - \mu\cos 60^{\circ}} = 1699,6 \text{ kN}$$

3. T E Ž I Š T A

Težište tijela predstavlja tačku u kojoj djeluje sila težine tog tijela. Svi zadaci koji su uradjeni u slijedećem poglavlju odnose se na homogene linije i površine. Kod homogene linije težina je ravnomjerno rasporedjena po dužini linije. Kod homogene površina težina je ravnomjerno rasporedjena po površini.

3.1. Težište homogene linije i površine

Koordinate težišta homogene linije u ravni računa se po izrazima

$$X_C = \frac{\sum L_i X_i}{\sum L_i}, \qquad Y_C = \frac{\sum L_i Y_i}{\sum L_i}$$

Koordinate težišta homogene površine u ravni računa se po izrazima

$$X_C = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i}, \qquad Y_C = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i}$$

Ovi izrazi koriste se u slučaju da je složena homogena linija ili površina djeljiva na konačan broj dijelova tako da su za svaki dio linije odnosno površine poznate koordinate težišta, tj. da se mogu odrediti iz geometrijskih relacija. Ukoliko se homogena linija ili površina dijeli na beskonačan broj elementarnih dijelova, tada se težište homogene linije u ravni računa po izrazima

$$X_C = \frac{\int X_i\, dL}{dL}, \qquad Y_C = \frac{\int Y_i\, dL}{dL}$$

a homogene površine kao

$$X_C = \frac{\int_A X_i\, dA}{\int_A dA}, \qquad Y_C = \frac{\int_A Y_i\, dA}{\int_A dA}$$

3.2. Papus-Guldinova pravila

Na osnovu izračunatih koordinata težišta homogene linije i površine može se pomoću Papus-Guldinovih pravila odrediti homogena površina i zapremina.

Prvo pravilo može se napisati u obliku:

$$A_X = 2\pi y_C L \quad ; \qquad A_y = 2\pi X_C L$$

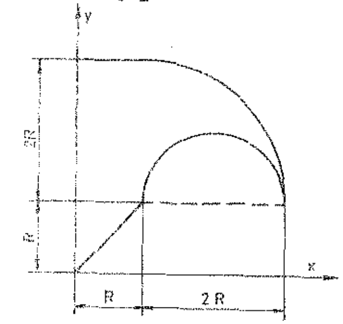
Površina nastala rotacijom krive linije oko osa y ili x jednaka je proizvodu dužine te linije i puta koji predje težište ($2\pi Y_T$ ili $2\pi X_T$).

Drugo pravilo može se napisati u obliku:

$$V_x = 2\pi Y_T\, A \quad ; \quad V_y = 2\pi X_T\, A$$

Zapremina nastala rotacijom površine oko osa y ili x jednaka je proizvodu te površine i puta koji predje težište prilikom rotacije.

Z a d a c i

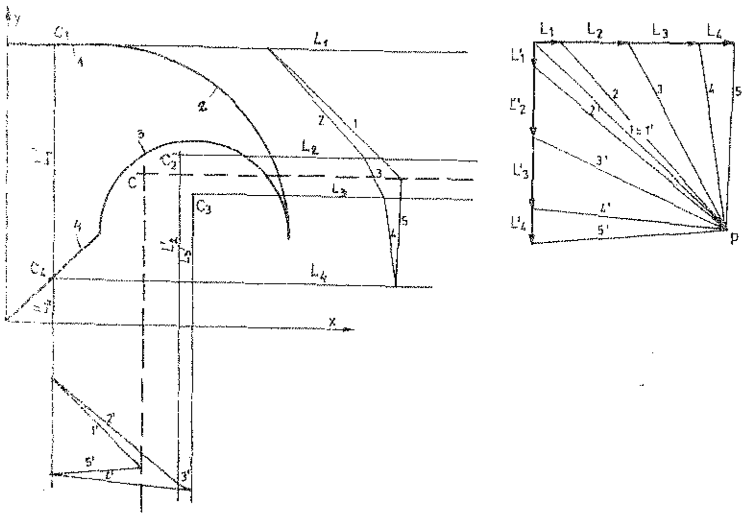


sl.3.1.

1. Za datu liniju prikazanu na slici 3.1. analitički i grafički odrediti položaj težišta. Odrediti veličinu obrtne površine nastale obrtanjem linije oko ose oy. R = 2 cm

Rješenje:

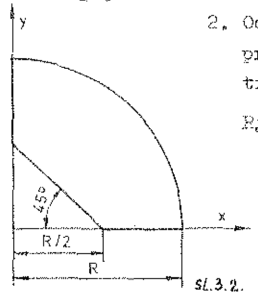
$$U_L = \frac{4\ cm}{1\ cm}$$



i	L_i	X_i	Y_i	L_iX_i	L_iY_i
1	$R = 2$	$\frac{R}{2} = 1$	$3R=6$	2	12
2	$R\pi = 2\pi$	$R+\frac{4R}{\pi} =2+\frac{8}{\pi}$	$R+\frac{4R}{\pi} =2+\frac{8}{\pi}$	28,56	28,56
3	$R\pi = 2\pi$	$2R=4$	$R+\frac{2R}{\pi} =2+\frac{4}{\pi}$	25,13	2o,56
4	$R\sqrt{2}=2\sqrt{2}$	$\frac{R}{2} = 1$	$\frac{R}{2} = 1$	2,83	2,83
$\sum$	17,38			58,52	63,95

$$x_c = \frac{L_iX_i}{L_i} = 3{,}36\ cm; \quad y_c = \frac{L_iY_i}{L_i} = 3{,}68\ cm$$

$$A_y = 2\pi L_i X_c = 366{,}73\ cm^2$$

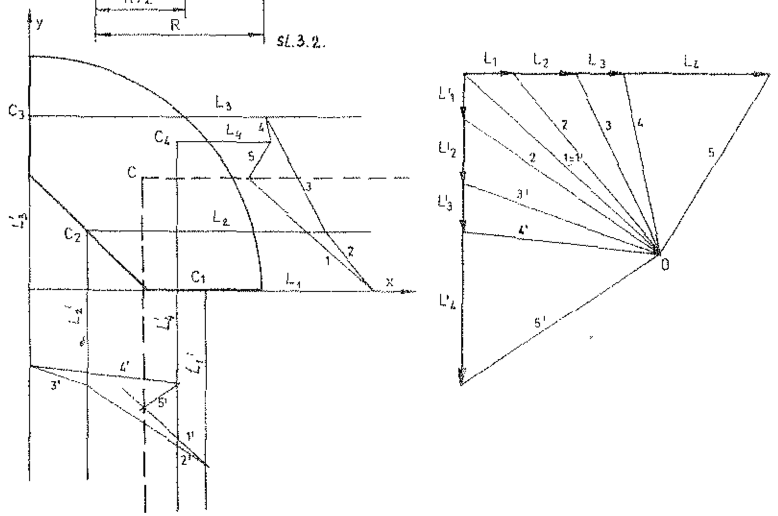


SL.3.2.

2. Odrediti težište zadane homogene linije prema slici 3.2. (grafički i analitički). $R = 10 cm$

Rješenje:

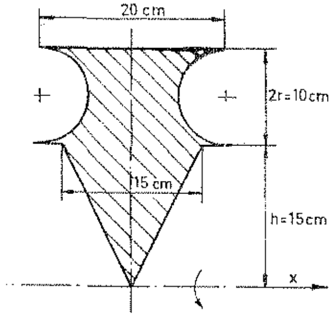
$$U_L = \frac{5\ cm}{1\ cm}$$



i	L_i	X_i	Y_i	L_iX_i	L_iY_i
1	$\frac{R}{2} = 5$	$\frac{3}{4} R = 7,5$	0	37,5	0
2	$R\frac{\sqrt{2}}{2} = 7$	$\frac{R}{4} = 2,5$	$\frac{R}{4} = 2,5$	17,5	17,5
3	$\frac{R}{2} = 5$	0	$\frac{3}{4} R=7,5$	0	37,5
4	$\frac{R\pi}{2} = 15,7$	$\frac{2R}{\pi} = 6,4$	$\frac{2R}{\pi} = 6,4$	100,48	100,48
$\sum$	32,7			155,5	155,5

$$X_c = \frac{\sum L_iX_i}{\sum L_i} = 4,75 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{\sum L_iY_i}{\sum L_i} = 4,75 \text{ cm}$$

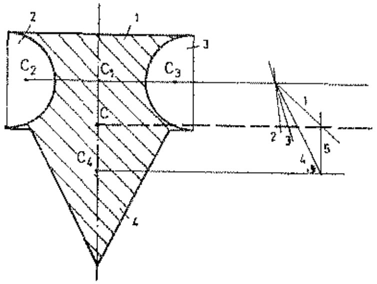


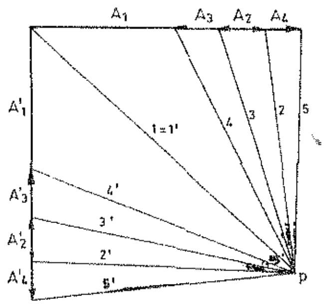
sl.3.3.

3. Odredi zapreminu tijela koje nastaje rotacijom zadane površine oko osi x. (sl.3.3.)

Rješenje:

$$U_L = \frac{40 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$$



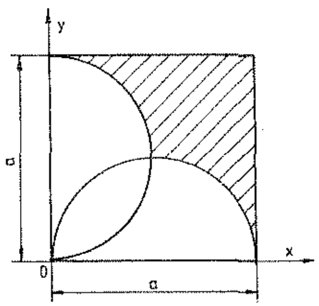


i	A_i	X_i	Y_i	A_iX_i	A_iY_i
1	200	0	20	0	4000
2	$-\frac{25\pi}{2}$	$-10+\frac{20}{3\pi}$	20	309,2	-785
3	$-\frac{25\pi}{2}$	$10-\frac{20}{3\pi}$	20	-309,2	-785
4	112,5	0	10	0	1125
$\sum$	234			0	3555

$$X_c = 0$$

$$Y_c = \frac{\sum A_iY_i}{\sum A_i} = 15,2 \text{ cm}$$

$$V_x = 2\pi A_i\, Y_c = 2232,4 \text{ cm}^3$$

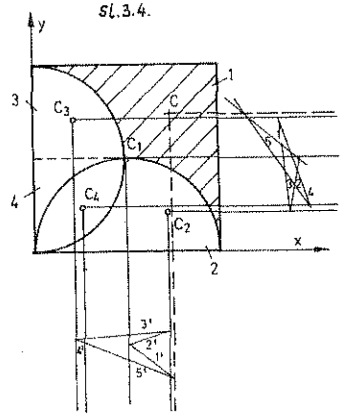


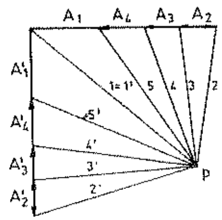
sl.3.4.

4. Grafički i analitički odrediti težište šrafirane površine. Naći zapreminu koja nastaje rotacijom oko ose x. Zadano je a = 4 cm. (sl.3.4.)

Rješenje:

$$U_L = \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$$

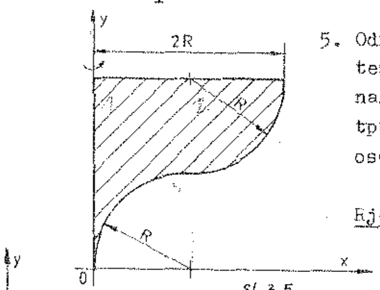




i	A_i	X_i	Y_i	A_iX_i	A_iY_i
1	$a^2=16$	$\frac{a}{2}=2$	$\frac{a}{2}=2$	32	32
2	$-\frac{a^2\pi}{16}=-\pi$	$\frac{2a}{3\pi}+\frac{a}{2}=\frac{8}{3\pi}+2$	$\frac{2a}{3\pi}=\frac{8}{3\pi}$	-8,95	-2,67
3	$-\frac{a^2\pi}{16}=-\pi$	$\frac{2a}{3}=\frac{8}{3\pi}$	$\frac{2a}{3\pi}+\frac{a}{2}=\frac{8}{3\pi}+2$	-2,67	-8,95
4	$-\frac{a^2}{4}=-4$	$\frac{a}{4}=1$	$\frac{a}{4}=1$	- 4	- 4
$\sum$	5,72			16,38	16,38

$$x_c = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} = 2,86 \text{ cm} \qquad V_X = 2\pi A_i y_c = 1o2,92 \text{ cm}^3$$

$$y_c = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i} = 2,86 \text{ cm}$$



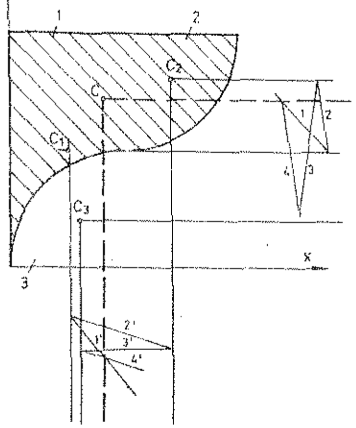
Sl. 3.5.

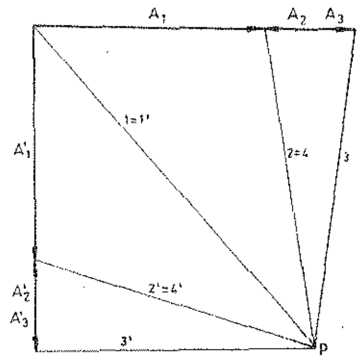
5. Odredi računski i grafički koordinate težišta šrafirane površine i izračunaj zapreminu tijela koja nastaje potpunim obrtanjem te površine oko 0 y ose. (Sl. 3.5.)

$R = 5$ cm

Rješenje:

$$U_L = \frac{2 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$$



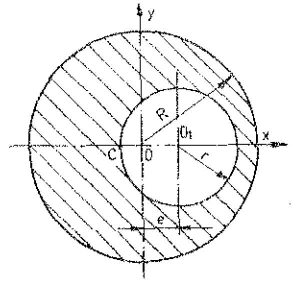


i	A_i	X_i	Y_i	A_iX_i	A_iY_i
1	$R\cdot 2R=5o$	$\frac{R}{2}=2,5$	$R=5$	125	25o
2	$\frac{R^2\pi}{4}=\frac{25\pi}{4}$	$R+\frac{4R}{3\pi}=5+\frac{2o}{3\pi}$	$2R-\frac{4R}{3\pi}=1o-\frac{2o}{3\pi}$	139,8	154,58
3	$-\frac{R^2\pi}{4}=-\frac{25\pi}{4}$	$R-\frac{4R}{3\pi}=5-\frac{2o}{3\pi}$	$\frac{4R}{3\pi}=\frac{2o}{3\pi}$	-56,46	-41,67
	5o			2o8,34	362,91

$$X_c = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} = 4,17 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i} = 7,258 \text{ cm}$$

$$V_y = 2\pi A_i \cdot X_c = 14oo,44 \text{ cm}^3$$



Sl. 3.6.

6. Iz homogene kružne ploče radijusa R treba isjeći drugu kružnu ploču dvaput manjeg radijusa. (Sl. 3.6.)
Odredi udaljenost $e = oo_1$ pod uslovom da težište šrafirane površine padne u tačku C.

Rješenje:

$$X_c = \frac{A_1X_1 - A_2X_2}{A_1 - A_2}$$

$$A_1 = R^2\pi \quad X_1 = 0$$

$$A_2 = r^2\pi \quad X_2 = e$$

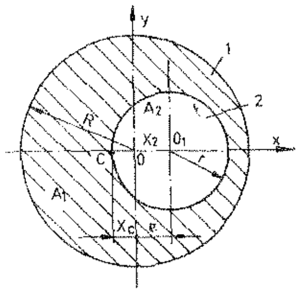
$$X_c = \frac{R^2\pi \cdot 0 - r^2\pi \cdot e}{R^2\pi - r^2} = \frac{\frac{R^2\pi}{4}\, e}{\frac{3}{4}\, R^2\pi} = -\frac{e}{3}$$

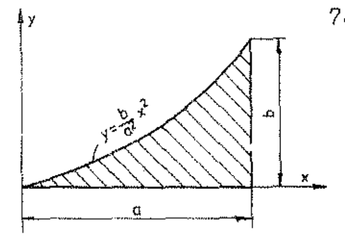
$$e + X_c = \frac{R}{2}$$

$$e = \frac{R}{2} - X_c = \frac{R}{2} - \frac{e}{3}$$

$$\frac{R}{2} = \frac{4}{3}\, e$$

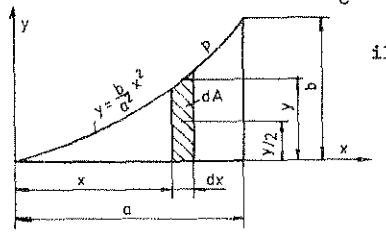
$$e = \frac{3}{8}\, R$$





sl. 3.7

7. Izračunaj koordinate težišta površine ograničene apscisnom osom na dužini a, ordinatom b i parabolom $y = \frac{b}{a^2}x^2$. (sl. 3.7)



Rješenje:

$$X_c = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} \qquad Y_c = \frac{\sum A_i Y_i}{\sum A_i}$$

ili

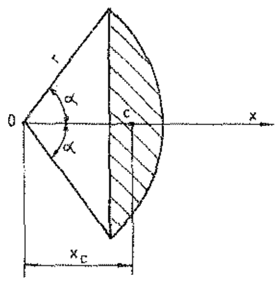
$$x_C = \frac{\int_{(A)} x\,dA}{\int_{(A)} dA} \qquad y_C = \frac{\int_{(A)} y\,dA}{\int_{(A)} dA}$$

$$dA = \int y\,dx$$

$$A = \int_0^a dA = \int_0^a y\,dx = \frac{b}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{b}{a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{ab}{3}$$

$$X_c = \frac{\int_{(A)} x\,dA}{A} = \frac{\int_0^a xy\,dx}{A} = \frac{\frac{b}{a^2}\int_0^a x^3 dx}{A} = \frac{b\,\frac{x^4}{4}}{a^2\,\frac{ab}{3}}\Bigg|_0^a = \frac{3}{4}a$$

$$Y_c = \frac{\int_{(A)} \frac{y}{2}\,dA}{A} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a y^2\,dx}{A} = \frac{b^2}{2a^4}\,\frac{\int_0^a x^4 dx}{A} = \frac{b^2}{2a^4}\,\frac{\frac{x^5}{5}}{\frac{ab}{3}}\Bigg|_0^a = \frac{3}{10}b$$



Sl. 3.8.

8. Odrediti koordinate težišta kružnog odsječka prikazanog na slici 3.8.

Rješenje:

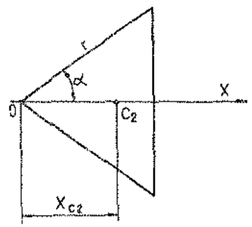
Težište kružnog isječka

$$X_{c1} = \frac{\iint x\,dA_1}{A_1} \qquad dA_1 = \rho\,d\rho\,d\varphi \qquad A_1 = r^2\alpha$$

$$X_{c1} = \frac{\int_0^r \rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\,\rho\,d\rho\,d\varphi}{r^2\alpha} = \frac{\int_0^r \rho^2\,d\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\varphi\,d\varphi}{r^2\alpha}$$

$$X_{c1} = \frac{\frac{\rho^3}{3}\Big|_0^r \sin\varphi\Big|_{-\alpha}^{\alpha}}{r^2\alpha} = \frac{\frac{r^3}{3}(\sin\alpha - \sin(-\alpha))}{r^2\alpha}$$

$$X_{c1} = \frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$



Težište trougla

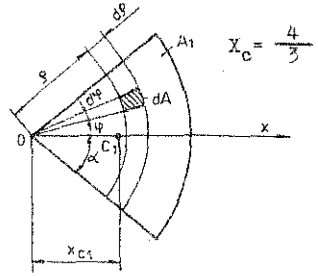
$$A_2 = \frac{1}{2}\,r\cos\alpha\,2r\sin\alpha = \frac{1}{2}\,r^2\sin 2\alpha$$

$$X_{c2} = \frac{2}{3}\,r\cos\alpha$$

Težište kružnog odsječka

$$X_c = \frac{\sum A_i X_i}{\sum A_i} = \frac{r^2\alpha\cdot\frac{2}{3}\,r\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \frac{1}{2}\,r^2\sin 2\alpha\,\frac{2}{3}\,r\cos\alpha}{r^2\alpha - \frac{1}{2}\,r^2\sin 2\alpha}$$

$$X_c = \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}$$



4. R E Š E T K A S T I N O S A Č I

Rešetka je nosač sastavljen od pravih štapova koji su medjusobno povezani zglobovima - čvorovima. Kod rješavanja rešetkastih nosača treba voditi računa o slijedećem:

1. Sve sile koje djeluju na rešetku treba nanositi u čvorovima.
2. Težine štapova su zanemarljive u odnosu na opterećenje koje štapovi prenose.
3. Kod proračuna rešetke uzima se da su štapovi opterećeni na pritisak ili istezanje.
4. Trenje u zglobovima rešetki ne uzima se u obzir.

4.1. Postupak rješavanja zadataka

Prije nego što se započne rješavanje rešetki, odnosno nalaženje sila u štapovima treba odrediti da li je statički odredjena. Ako je rešetka statički odredjena važi odnos broja čvorova i štapova rešetke

$$s = 2n - 3$$

s - broj štapova

n - broj čvorova

Ako je $s < 2n - 3$ rešetka prelazi u mehanizam, a ako je $s > 2n - 3$ rešetka je statički neodredjena.

Metode za odredjivanje sila u štapovima, koje će ovdje biti pomenute, važe samo za statički odredjene rešetke.

Rešetka je vezana za okolinu pomoću veza. Veze treba uloniti, a njihovo djelovanje zamijeniti reakcijama. Reakcije treba odrediti analitičkim i grafičkim putem. Kod analitičkog odredjivanja reakcija u osloncima postavljaju se analitički uslovi ravnoteže $\sum X = 0$ $\sum Y = 0$ $\sum M_A = 0$, gdje je tačka A oslonac kroz koji prolazi najveći broj nepoznatih reakcija. Rješavanjem jednačina ravnoteže izračunaju se nepoznate reakcije.

Grafičkim putem mogu se odrediti pravci, smjerovi i intenziteti reakcije u osloncu. Prvo se svo aktivno opterećenje koje djeluje na rešetku zamijeni rezultantom, odnosno odredi se pravac, smjer, intenzitet i napadna tačka rezultante. Zatim se koristi uslov ravnoteže tri sile u ravni, koji kaže da se pravci sila sijeku u jednoj tački tj. rezultanta i pravci reakcija sijeku se u jednoj tački. Pravac jedne reakcije je poznat - pokretni oslonac ili štap.

Rezultanta i poznati pravac reakcije sijeku se u jednoj tački. Kroz tu tačku i nepokretni oslonac povlači se pravac druge reakcije. Pošto su odredjena oba pravca reakcija rezultanta se razloži na dva poznata pravca. Pod djelovanjem aktivnih sila i reakcija veza rešetka je u ravnoteži, trokut sila koji čine rezultante i reakcije mora biti zatvoren. Na taj način odredjeni su smjerovi reakcija.

Nakon odredjivanja reakcija veza, treba odrediti sile u štapovima rešetke grafičkim ili analitičkim metodama. Grafička metoda je Kremonin plan sila Kulmanova metoda, a analitička je Riterova metoda.

4.2. Kremonin plan sila

Da bi se odredile sile u štapovima rešetke pomoću Kremoninog plana sila, treba krenuti od čvora u kome djeluju najviše 2 nepoznate sile u štapovima i najmanje jedna poznata sila. Crtanje Kremoninog plana sila počinje od poznate sile. Zatim se u smjeru kazaljke na satu nanose pravci sila u štapovima koji se sijeku u posmatranom čvoru. Sučelne sile u jednom čvoru zatvaraju mnogougao sila. Ukoliko je sila usmjerena prema čvoru, štap je opterećen na pritisak. Ako je sila usmjerena od čvora štap je opterećen na istezanje. Formiranje Kremoninog plana sila nastavlja se sa slijedećim čvorom u kom se sijeku pravci najviše dvije nepoznate sile. Plan je nacrtan kada je zatvoren mnogougao za svaki čvor. Mjerenjem linija u planu dobiju se vrijednosti sila u štapovima.

4.3. Kulmanova metoda

Koristi se uglavnom za računanje sila u štapovima presjeka rešetke. Postupak se sastoji u rastavljanju rezultante ukupnog opterećenja bilo sa lijeve ili desne strane presjeka na poznate pravce traženih sila u štapovima. Postupak nastavljanja sila na tri poznata pravca pomoću Kulmanove linije objašnjen je u poglavlju 2.

4.4. Riterova metoda

Kao i prethodna i ova metoda se koristi za odredjivanje sila u štapovima presjeka. Ukoliko se rešetka presječe na 2 dijela na presjeku se dodaju sile koje imaju pravce presječenih štapova a koje zajedno sa ostalim silama lijevog ili desnog dijela rešetke održavaju taj dio u ravnoteži. Za čvorove lijevog ili desnog dijela rešetke mogu se postaviti 3 uslova ravnoteže

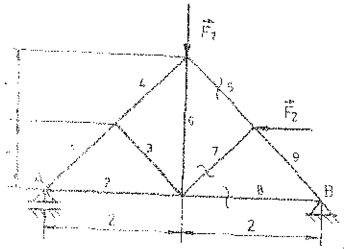
$$\sum M_I = 0 \qquad \sum M_{II} = 0 \qquad \sum M_{III} = 0$$

Iz 3 jednačine mogu se izračunati 3 sile u štapovima

Ovdje su pomenute metode korištene za rješavanje zadataka.

Zadaci

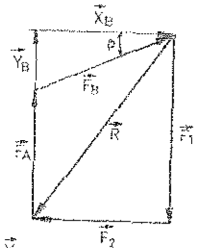
1. Odredi sile u štapovima rešetke u čijim čvorovima djeluju dvije sile $F_1=2$ kN i $F_2=1,5$ kN metodom Kremoninog plana sila. Izvršiti kontrolu sila u štapovima 5, 7 i 8 pomoću Ritterove i Kulmanove metode. (sl.4.1)



sl.4.1

Rješenje:

$$U_L = \frac{1\ \text{m}}{2\ \text{cm}} \qquad U_F = \frac{1\ \text{kN}}{2\ \text{cm}}$$

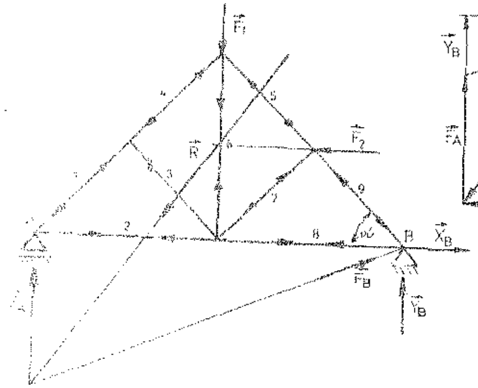


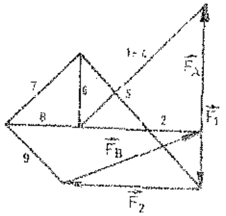
$F_A = 1,36$ kN

$F_B = 1,7$ kN

$$\text{tg}\,\beta = \frac{Y_B}{X_B} = 0,417$$

$\beta = 22,62°$





n = 6 čvorova

s = 9 štapova

2n-3=9 Rešetka je statički odredjena

$S_1 = -1,95$ kN

$S_2 = 1,35$ kN

$S_3 = 0$

$S_4 = -1,95$ kN

$S_5 = -2$ kN

$S_6 = 0,8$ kN

$S_7 = -1,06$ kN

$S_8 = 2,15$ kN

$S_9 = -1$ kN

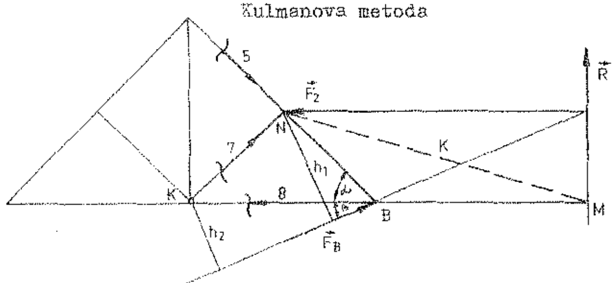
$\sum X = 0$	$X_B - F_2 = 0$	(1)
$\sum Y = 0$	$F_A + Y_B - F_1 = 0$	(2)
$\sum M_A = 0$	$Y_B \cdot 4 + F_2 \cdot 1 - F_1 \cdot 2 = 0$	(3)

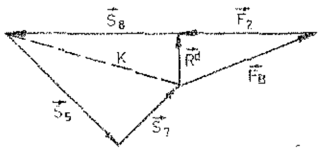
(1)	$X_B = 1,5$ kN
(3)	$Y_B = 0,625$ kN
(2)	$F_A = 1,375$ kN

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 1,625 \text{ kN}$$

Štapovi 2, 6 i 8 opterećeni su na istezanje dok su ostali opterećeni na pritisak.

Kulmanova metoda





$S_5 = 2$ kN

$S_7 = 1,06$ kN

$S_8 = 2,15$ kN

Riterova metoda

$$\sum M_B = F_2 \cdot 1 - S_7 \cdot \sqrt{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum M_N = F_B\, h_1 - S_8 \cdot 1 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_K = F_B\, h_2 + F_2 \cdot 1 - S_5 \sqrt{2} = 0 \qquad (3)$$

$S_7 = 1,06$ kN

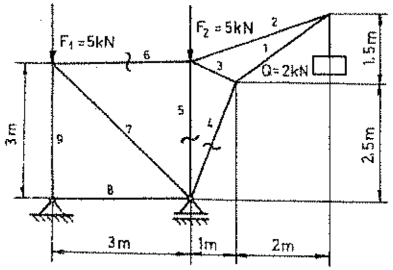
$S_8 = 2,15$ kN

$S_5 = 2$ kN

$h_1 = \overline{NB} \sin(\alpha+\beta) = \sqrt{2} \sin 67,62°$

$h_1 = 1,3$ cm

$h_2 = \overline{KB}\, \text{tg}\,\beta = 2 \cdot \text{tg}\, 22,62° = 0,833$ cm



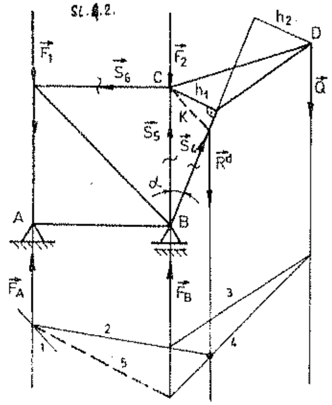
2. Za rešetkastu konstrukciju krana sl.4.2. odredi:

a) grafički i analitički reakcije u osloncima A i B

b) pomoću Kulmanove i Riterove metode odredi veličinu i karakter sila u štapovima 4, 5 i 6.

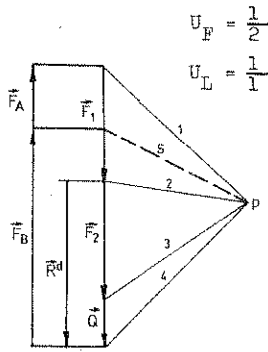
Rješenje:

Sl.4.2.



$$U_F = \frac{1\ kN}{2\ cm}$$

$$U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$$



$F_A = 3$ kN

$F_B = 9$ kN

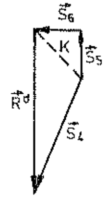
$$\sum Y = F_A + F_B - F_1 - F_2 - Q = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_A = F_B \cdot 3 - F_2 \cdot 3 - Q \cdot 6 = 0 \quad (2)$$

$F_B = 9$ kN

$F_A = 3$ kN

Kulmanova metoda



$S_4 = 5{,}2$ kN

$S_5 = 2{,}2$ kN

$S_6 = 2$ kN

Riterova metoda

$$\sum M_B = S_6 \cdot 3 - Q \cdot 3 = 0 \quad (1)$$

$$\sum M_C = S_4 \cdot h_1 - Q \cdot 3 = 0 \quad (2)$$

$$\sum M_D = S_4 \cdot h_2 + S_5 \cdot 3 - F_2 \cdot 3 + S_6 \cdot 1 = 0 \quad (3)$$

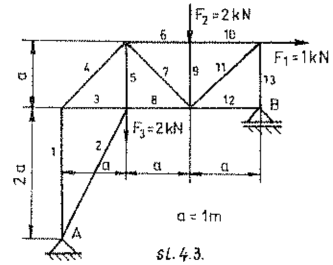
$h_1 = 3\ \mathrm{tg}\alpha = 1{,}15$ cm

$h_2 = 1{,}2$ cm

$S_6 = 2$ kN

$S_4 = 5{,}22$ kN

$S_5 = 2{,}24$ kN



sl.4.3.

3. Za rešetkastu konstrukciju zadanu prema sl.4.3. odrediti:

a) grafički i analitički veličine reakcija u A i B

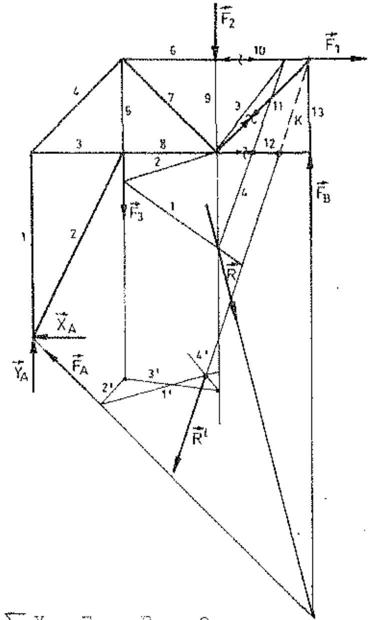
b) odredi pomoću metode Kulmana i Ritera sile u štapovima 2, 3 i 4, te u štapovima 10, 11 i 12.

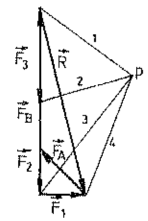
Rješenje:

$$U_L = \frac{1m}{2cm} \qquad U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$$

$F_A = 1{,}4$ kN

$F_B = 3$ kN



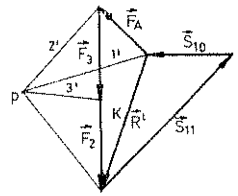


$S_{10} = 2$ kN

$S_{11} = 4{,}3$ kN

$S_{12} = 0$

Kulmanova metoda za štapove 10,11,12



$$\sum X = F_1 - F_A = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = Y_A + F_B - F_2 - F_3 = 0 \quad (2)$$

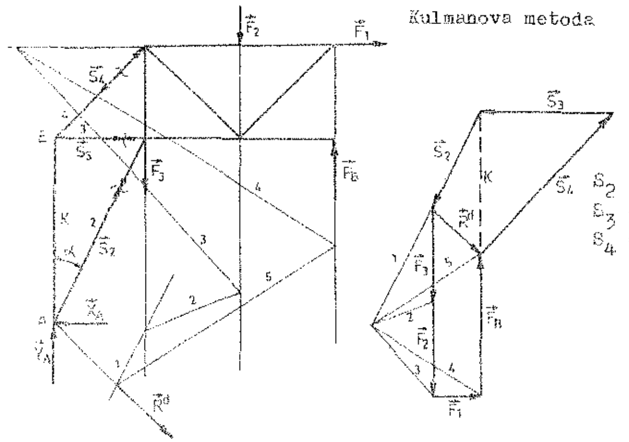
$$\sum M_A = F_B \cdot 3a - F_1 \cdot 3a - F_2 \cdot 2a - F_3 \cdot a = 0 \quad (3)$$

(1) $X_A = F_1 = 1$ kN

(3) $F_B = \dfrac{3F_1 + 2F_2 + F_3}{3} = 3$ kN

(2) $Y_A = F_2 + F_3 - F_B = 1$ kN

Kulmanova metoda



$S_2 = 2,3$ kN
$S_3 = 3$ kN
$S_4 = 4,2$ kN

Riterova metoda

$$\sum M_B = F_1 \cdot 1 + S_{10} \cdot 1 - S_{11}\frac{\sqrt{2}}{2}\,1 = 0 \qquad (4)$$

$$\sum M_C = S_{12} \cdot 1 = 0 \qquad (5)$$

$$\sum Y = 0 \quad F_B - S_{11}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (6)$$

(5) $\quad S_{12} = 0$

(6) $\quad S_{11} = 4,23$ kN

(4) $\quad S_{10} = 2$ kN

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sum M_A = 0 \quad S_3 \cdot 2 - S_4\frac{\sqrt{3}}{2}\,2 = 0 \qquad (7)$$

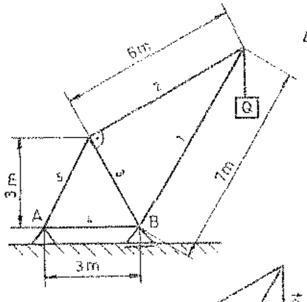
$$\sum M_E = 0 \quad 2S_2 \sin\alpha - X_A \cdot 2 = 0 \qquad (8)$$

$$\sum Y = 0 \quad Y_A + S_2\cos\alpha - S_4\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \qquad (9)$$

(8) $\quad S_2 = \frac{X_A}{\sin\alpha} = \sqrt{5} \cdot 1 = \sqrt{5} = 2,23$ kN

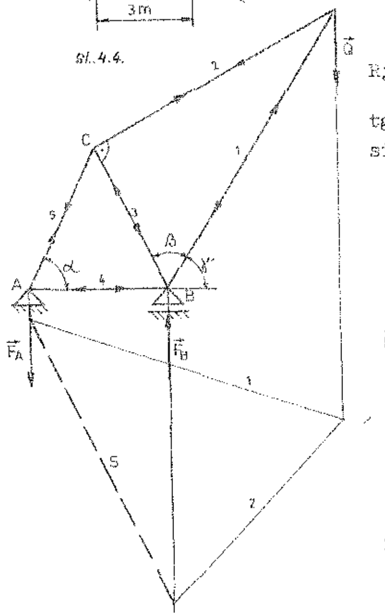
(9) $\quad S_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y_A + S_2\cos\alpha) = 4,23$ kN

(7) $\quad S_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} S_4 = 2,99$ kN



Sl.4.4.

4. Za zadanu rešetku konzolne dizalice(Sl 4.4) odrediti:
   a) grafički i analitički reakcije
   b) sile u štapovima pomoću Kremoninog plana sila
   c) kontrolisati sile u štapovima 2, 3 i 4 pomoću Kulmanove i Riterove metode.
   Zadano je $Q = 3$ kN



Rješenje:

$\operatorname{tg}\alpha = 2 \qquad \alpha = 63,4^{\circ}$

$\sin\beta = \frac{6}{7} \qquad \beta = 59^{\circ}$

$\gamma = 180 - \alpha - \beta$

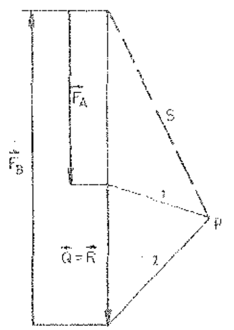
$\gamma = 57,6^{\circ}$

$U_F = \frac{1\ \text{kN}}{1\ \text{cm}}$

$U_L = \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{cm}}$

$F_A = 3,7$ kN

$F_B = 6,7$ kN



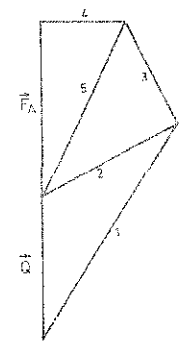
Kremonim plan sila

Štapovi 2 i 5 opterećeni su na istezanje, a 3, 4 i 1 na pritisak.

$S_1 = -5,5$ kN $\qquad S_4 = -1,85$ kN

$S_2 = 3,4$ kN $\qquad S_5 = 4,2$ kN

$S_3 = -2,4$ kN



$\Sigma Y = 0 \qquad F_B - F_A - Q = 0 \qquad (1)$

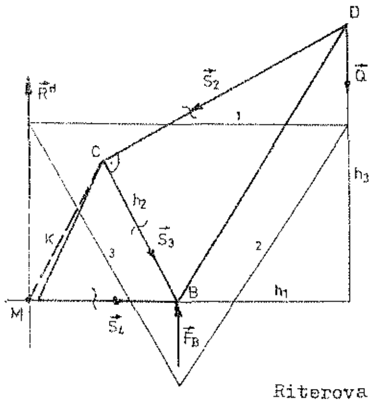
$\Sigma M_A = 0 \qquad F_B \cdot 3 - Q\,(3+7\cos\beta) = 0 \qquad (2)$

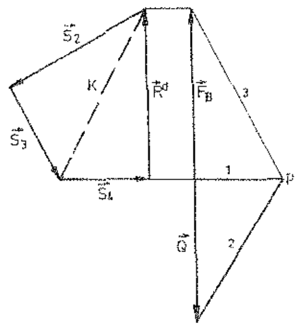
$F_B = 6{,}75$ kN

$F_A = F_B - Q = 3{,}75$ kN

Kulmanova metoda

$U_F = \frac{1\ \text{kN}}{1\ \text{cm}} \qquad U_L = \frac{1\ \text{m}}{1\ \text{cm}}$





Riterova metoda

$\Sigma M_B = Q\,h_1 - S_2\,h_2 = 0 \qquad (1)$

$\Sigma M_C = Q\,(1{,}5+h_1) - F_B\,1{,}5 - S_4\,3 = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_D = F_B\,h_1 - S_3\,6 - S_4\,h_3 = 0 \qquad (3)$

$h_1 = 7\cos\beta = 3{,}75$ m

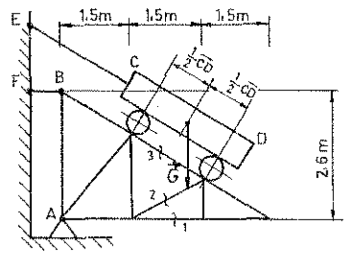
$h_2 = \frac{3}{\sin\alpha} = 3{,}355$ m

$h_3 = 7\sin\beta = 5{,}9$ m

$S_2 = 3{,}35$ kN

$S_4 = 1{,}875$ kN

$S_3 = 2{,}37$ kN



sl.4.5.

5. Na rešetkastoj kosoj ravni oslonjenoj u tački A, a u tački B vezana štapom BF za zid, nalaze se kolica CD težine G=4 kN. Kolica su vezana užetom CE za tačku E na vertikalnom zidu. Uže EC paralelno je sa kosom ravni. Grafičkim i analitičkim putem odrediti veličinu reakcija u osloncima A i BF. Grafičkim putem odrediti veličinu sila u štapovima 1, 2 i 3. Riterovom metodom kontrolisati sile u štapovima 1, 2 i 3. (sl.4.5)

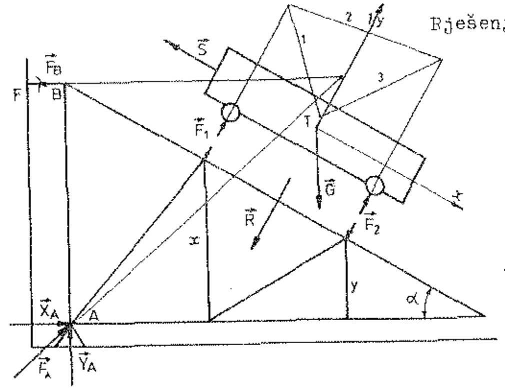
Rješenje:

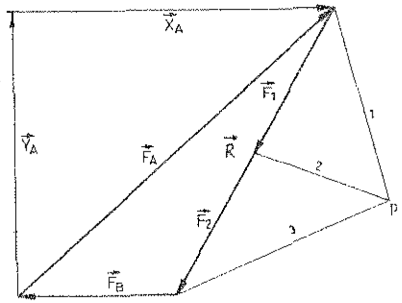
$tg\,\alpha = \frac{2{,}6}{4{,}5} \qquad \alpha = 30^\circ$

$tg\,30^\circ = \frac{x}{3} \qquad x = \sqrt{3}$ m

$tg\,30^\circ = \frac{y}{1{,}5} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m

$CD = \frac{1{,}5}{\cos\alpha}$





$U_F = \frac{1\ \text{kN}}{2\ \text{cm}}$

$U_L = \frac{1\ \text{m}}{2\ \text{cm}}$

Ravnoteža kolica

$\Sigma X = -S + G\cos 60^\circ = 0 \qquad (1)$

$\Sigma Y = F_1 + F_2 - G\sin 60^\circ = 0 \qquad (2)$

$\Sigma M_T = F_1\,\frac{1}{2}\,CD - F_2\,\frac{1}{2}\,CD = 0 \qquad (3)$

$F_1 = F_2 = \sqrt{3}$ kN

$S = G\cos 60^\circ = 2$ kN

Ravnoteža rešetke

$$\Sigma X = X_A - F_B - F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 60^\circ = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma Y = Y_A - F_1 \sin 60^\circ - F_2 \sin 60^\circ = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma M_A = F_B\, 2{,}6 - F_1\, 1{,}5 \cos 30^\circ - F_2\, 3 \cos 30^\circ + F_1\, X \cos 60^\circ + F_2\, y \cos 60^\circ = 0 \qquad (3)$$

$F_A = 4{,}5$ kN;

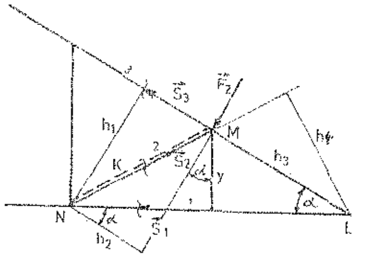
$F_B = 1{,}73$ kN

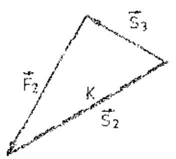
$F_B = 1{,}73$ kN

$Y_A = 3$ kN

$X_A = 3{,}46$ kN

Kulmanova metoda





$S_1 = 0$

$S_2 = 2$ kN

$S_3 = 1$ kN

Riterova metoda

$$\Sigma M_M = S_1\, y = 0 \qquad (1)$$
$$\Sigma M_N = S_3\, h_1 - F_2 h_2 = 0 \qquad (2)$$
$$\Sigma M_L = F_2\, h_3 - S_2 h_4 = 0 \qquad (3)$$

$S_1 = 0$

$S_3 = 1$ kN

$S_2 = 2$ kN

$h_1 = 3 \sin 30^\circ = 1{,}5$ m

$h_2 = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ m

$h_3 = \frac{1{,}5}{\cos 30^\circ} = \sqrt{3}$ m

$h_4 = 1{,}5$ m

5. GERBEROVI, OKVIRNI I TROZGLOBNI NOSAČI

Dvije ili više zglobno vezanih greda čine složenu Gerberovu gredu. Zadatak se rješava slijedećim redoslijedom.

5.1. Uklone se veze i zamijene reakcijama veza. Postave se analitički uslovi ravnoteže

$$\Sigma X = 0 \qquad \Sigma Y = 0 \qquad \Sigma M = 0$$

Pošto je broj nepoznatih spoljašnjih reakcija veći od broja jednačina postavljaju se i momentne jednačine za Gerberove tačke sa lijeve ili sa desne strane. Broj dodatnih jednačina jednak je broju zglobova. Rješavanjem jednačina odrede se sve nepoznate spoljašnje reakcije.
Ukoliko se traže i unutrašnje reakcije (reakcije u zglobu) složeni nosač rastavi se na proste nosače, a djelovanje jednog dijela nosača na drugi zamijeni reakcijama. Da bi složeni nosač bio u ravnoteži svaki njegov dio mora biti u ravnoteži, pa se za svaki dio nosača postave uslovi ravnoteže proste grede. Rješavanjem jednačina dobiju se sve spoljašnje i unutrašnje reakcije.

5.2. Kod grafičkog odredjivanja reakcija treba rezultantu rastaviti na tri ili više reakcija. Nakon povlačenja zraka verižnog poligona odrede se zaključnice. Zaključnice prolaze kroz tačke u kojima je moment savijanja mala (krajnje tačke nosača oslonjene na oslonce, gerberovi zglobovi). Pomoću zaključnica i rezultante odrede se reakcije u osloncima.

5.3. Prilikom grafičkog i analitičkog odredjivanja reakcija u osloncima treba kontinuirano opterećenje zamijeniti koncentrisanom silom koja djeluje u težištu kontinuiranog opterećenja usmjerena ka nosaču, a intenziteta jednakog površini kontinuiranog opterećenja (pravougaonika, trokuta, trapeza).

5.4. Za crtanje dijagrama momenata savijanja i transverzalnih sila potrebno je izvršiti analizu po poljima. Nosač se podijeli na polja opterećenja i za presjek unutar svakog polja postavi momentna jednačina. Nacrtana momentna jednačina predstavlja momentnu liniju.
Ako na dijelu nosača djeluju samo koncentrisane sile linija momenta je pravac.

Ako na dijelu nosača djeluje pravougaono kontinuirano opterećenje linija momenta je kvadratna funkcija. Ako djeluje trokutno ili trapezno opterećenje linija momenta je kubna parabola. Ukoliko na nosač djeluje moment sprega, horizontalna ili vertikalna koncentrisana sila na tom mjestu javiće se skok u dijagramu momenata savijanja odnosno razlika u vrijednosti momenta sa lijeve ili desne strane iste tačke.

Transverzalne (poprečne) sile u odgovarajućim poljima dobiju se kao prvi izvodi momenata savijanja u presjecima

$$F_T = \frac{dM(x)}{dx}$$

Ako na gredu u nekom polju djeluju koncentrisane sile dijagram transverzalnih sila je konstantan. Ako djeluje kontinuirano pravougaono opterećenje dijagram je pravac. Transverzalna sila u polju djelovanja trokutnog ili trapeznog opterećenja je parabola drugog reda.

5.5. Ukoliko je sve navedeno u prethodnim tačkama ovog poglavlja dobro poznato (oblik dijagrama momenta savijanja i transverzalna sila) dijagram momenta savijanja može se nacrtati na osnovu vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim tačkama - granicama polja. Dijagram transverzalnih sila može se nacrtati na osnovu poznatih vrijednosti aktivnih sila i reakcija u osloncima.

Aksijalne (uzdužne) sile su pozitivne ako su istežuće, a negativne ukoliko su pritiskujuće. Dijagram aksijalnih sila može se nacrtati na osnovu poznatih horizontalnih aktivnih sila i reakcija oslonaca.

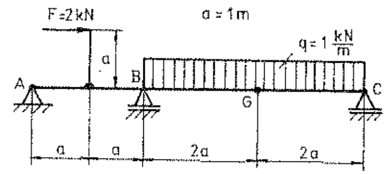
Z a d a c i

1. Za Gerberov nosač prema sl.5.1. odrediti:

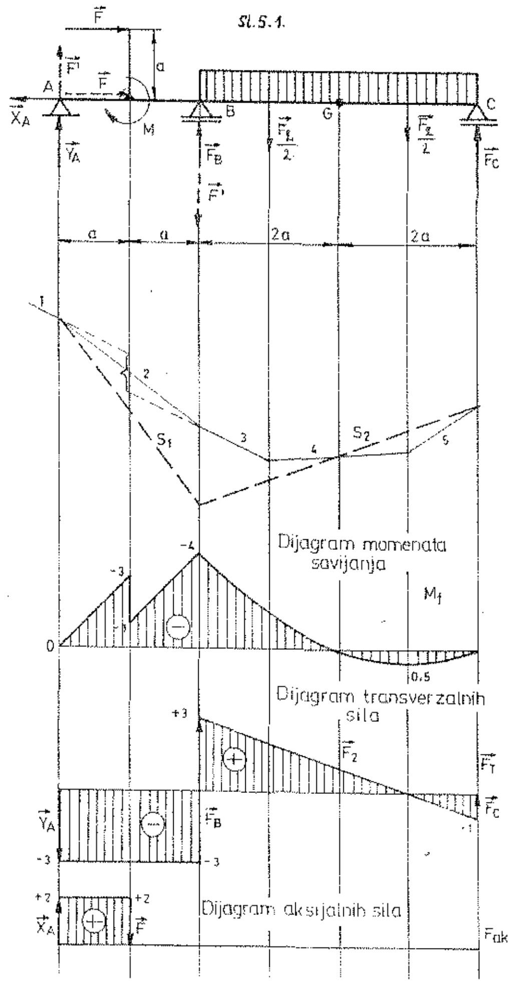
a) grafički i analitički reakciju u osloncima,

b) nacrtati statičke dijagrame,

c) naći maksimalnu vrijednost momenta savijanja



Sl.5.1.

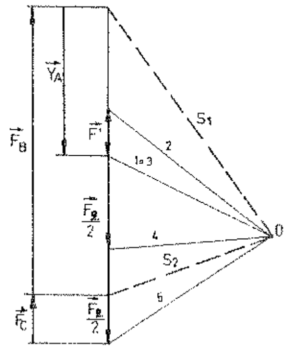


$M = F' \cdot a = 2 kNm$

$F' = \frac{M}{2a} = 1$ kN

$U_F = \frac{1 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$

$U_L = \frac{1m}{1,5cm}$



$F_C = 1$ kN

$Y_A = 3$ kN

$F_B = 6$ kN

$\sum X = 0 \qquad F - X_A = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad Y_A + F_B + F_C - F_q = 0 \qquad (2)$

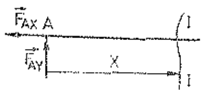
$\sum M_G^d = 0 \qquad F_C\ 2a - q\ 2a\ a = 0 \qquad (3)$

$\sum M_A = 0 \qquad F_C\ 6a - F_q\ 4a + F_B\ 2a - F\ a = 0 \qquad (4)$

(1) $X_A = 2$ kN
(3) $F_C = 1$ kN
(4) $F_B = 6$ kN
(2) $Y_A = -3$ kN

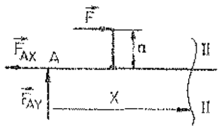
Analiza po poljima

I polje $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$



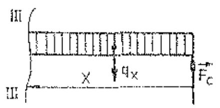
$M(x) = Y_A\ x$ – linija momenta je pravac
$F_T = Y_A$
za $x = 0 \quad M = 0 \quad F_T = -3$ kN
za $x = 1-\varepsilon \quad M = -3$ kNm $\quad F_T = -3$ kN
$F_{ak} = X_A = 2$ kN istežuća

II polje $1 + \varepsilon \leq x \leq 2$



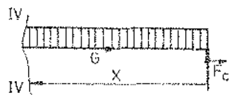
$M(x) = Y_A x + F \cdot a$ – linija momenta je pravac
$F_T = Y_A$
za $x = 1+\varepsilon \quad M = -1$ kNm $\quad F_T = -3$ kN
za $x = 2 \quad M = -4$ kNm $\quad F_T = -3$ kN
$F_{ak} = X_A - F = 0$

III polje $0 \leq x \leq 2$



$M(x) = F_C x - q \frac{x^2}{2}$ – linija momenta je parabola
$F_T = -F_C + q\ X$
za $x = 0 \quad M = 0 \quad F_T = -1$ kN
za $x = 2 \quad M = 0 \quad F_T = 1$ kN
$F_{ak} = 0$

IV polje $2 \leq x \leq 4$

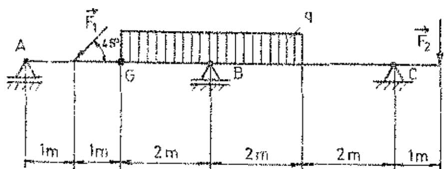


$M(x) = F_C\ x - q \frac{x^2}{2}$ – linija momenta je parabola
$F_T = -F_C + q\ x$
za $x = 2 \quad M = 0 \quad F_T = 1$
za $x = 4 \quad M = -4$ kNm $\quad F_T = 3$ kN

Odredjivanje maksimalnog momenta savijanja

$M_{max} = F_C x - \frac{q\ x^2}{2} \qquad F_T = \frac{dM}{dx} = -1 + x = 0$

$M_{max} = x - \frac{x^2}{2} \qquad x = 1$ m od tačke C ulijevo

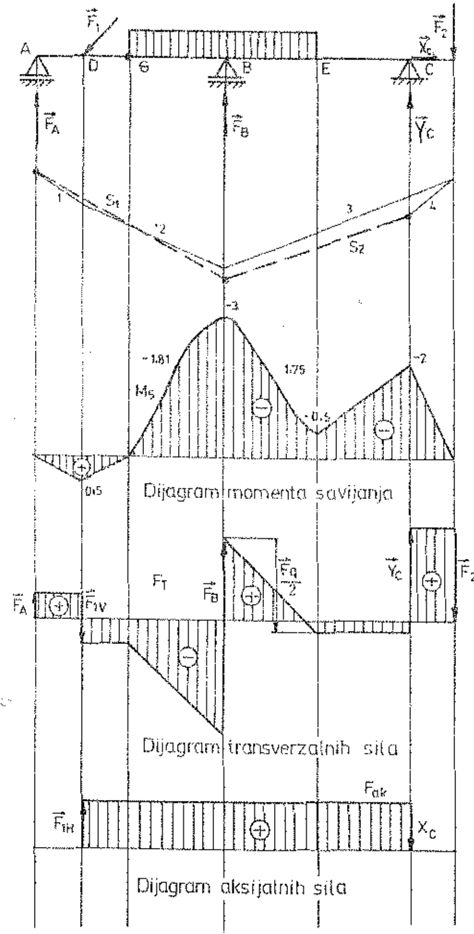


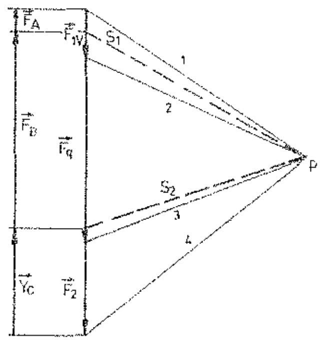
sl.5.2.

$M_{max} = 0{,}5$ kN je matematički ekstrem funkcije $F_C x - \frac{q\ x^2}{2}$ u IV polju i to nije stvarna maksimalna vrijednost momenta savijanja. Stvarna maksimalna vrijednost momenta je u osloncu B, na mjestu gdje transverzalna sila mijenja znak (prelazi iz negativnog u pozitivno područje).

2. Za nosač, sl.5.2. zglobno vezan u tački G potrebno je odrediti:

   a) analitički reakcije u A, B, C i G,





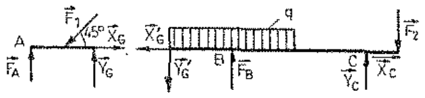
   b) grafički reakcije oslonca A, B i C, te na osnovu tih podataka nacrtati statičke dijagrame za cijeli nosač.

Zadano je: $F_1 = \sqrt{2}$ kN, $F_2 = 2$ kN, $q = 1$ kN/m.

$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$

$F_A = 0{,}5$ kN
$F_B = 4{,}25$ kN
$Y_C = 2{,}25$ kN



$F_1 = 2$ kN
$F_2 = 2$ kN
$q = 1 \ \frac{kN}{m}$

I dio nosača

$\sum X = 0 \qquad X_G - F_1 \cos 45^o = 0 \qquad (1)$
$\sum Y = 0 \qquad F_A + Y_G - F_1 \sin 45^o = 0 \qquad (2)$
$\sum M_A = 0 \qquad Y_G \cdot 2 - F_1 \sin 45^o \, 1 = 0 \qquad (3)$

(1) $\quad X_G = 1$ kN
(3) $\quad Y_G = 0{,}5$ kN
(2) $\quad F_A = 0{,}5$ kN

II dio nosača

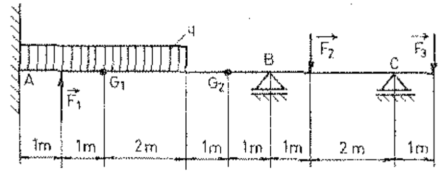
$\sum X = 0 \qquad X_C - X_G = 0 \qquad (4)$
$\sum Y = 0 \qquad F_B + Y_C - F_2 - Y_G - F_q = 0 \qquad (5)$
$\sum M_C = 0 \qquad -Y_G \, 6 - F_q \, 4 + F_B \, 4 + F_2 \, 1 = 0 \qquad (6)$

(4) $\quad X_C = 1$ kN
(6) $\quad F_B = 4{,}25$ kN
(5) $\quad Y_C = 2{,}25$ kN

Vrijednosti momenata u pojedinim tačkama nosača

$M_A = 0$
$M_D = F_A \cdot 1 = 0{,}5$ kNm
$M_B = F_A \cdot 4 - F_1 \sin 45^o \cdot 3 - \frac{F_q}{2} \, 1 = -3$ kNm
$M_C = -F_2 \cdot 1 = -2$ kNm
$M_E = -F_2 \cdot 3 + Y_C \cdot 2 = -0{,}5$ kNm

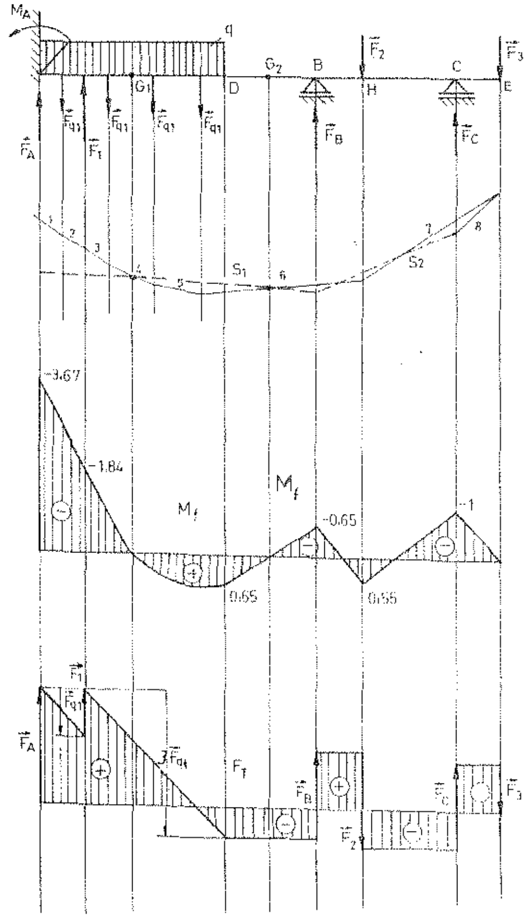
Dijagram momenata savijanja ispod kontinuiranog opterećenja (GE) ima oblik parabole, za ostale dijelove nosača dijagram momenta ima oblik pravca.
Dijagram transverzalnih sila ispod kontinuiranog opterećenja ima oblik pravca, na svim ostalim dijelovima nosača je konstanta.



Sl. 5.3.

3. Za Gerberov nosač na slici 5.3. odrediti:
   a) grafički i analitički reakcije oslonaca,
   b) nacrtati statičke dijagrame,
   c) naći maksimalnu vrijednost momenta.

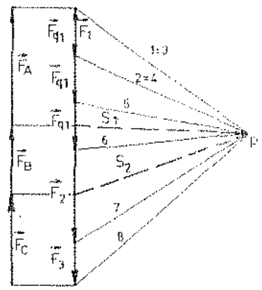
Zadano je: $F_1 = 1$ kN, $F_2 = 2$ kN, $F_3 = 1$ kN, $q = \frac{1 \ kN}{m}$



$F_q = 4 \cdot q = 4$ kN

$U_F = \frac{1 \ kN}{1 \ cm}$

$U_L = \frac{1 \ m}{1 \ cm}$



$F_A = 2{,}33$ kN
$F_B = 1{,}89$ kN
$F_C = 1{,}78$ kN

$\sum Y = 0$ $F_A + F_B + F_C - F_q - F_2 - F_3 + F_1 = 0$ (1)

$\sum M_A = 0$ $F_C \cdot 9 - F_3 \cdot 1o - F_2 \cdot 7 + F_B \cdot 6 - F_q \cdot 2 + F_1 \cdot 1 + M_A = 0$ (2)

$\sum M_{G2}^{d} = 0$ $F_B \cdot 1 + F_C \cdot 4 - F_2 \cdot 2 - F_3 \cdot 5 = 0$ (3)

$\sum M_{G1}^{d} = 0$ $F_B \cdot 4 + F_C \cdot 7 - F_3 \cdot 8 - F_2 \cdot 5 - \frac{F_q}{2} 1 = 0$ (4)

Kada se u jednačine (1) do (4) uvrste vrijednosti poznatih sila dobije se sistem od 4 jednačine sa 4 nepoznate

$F_A + F_B + F_C - 6 = 0$ (1)

$9F_C + 6F_B + M_A - 31 = 0$ (2)

$F_B + 4F_C - 9 = 0$ (3)

$4F_B + 7F_C - 2o = 0$ (4)

Rješavaju se prvo (3) i (4) jednačine tako što se jednačina (3) pomnoži brojem 4, a zatim od nje oduzme četvrta jednačina. Na taj način dobije se vrijednost reakcije F_C.

$$4F_B + 16\,F_C - 36 - 4F_B - 7F_C + 2o = 0$$

$$F_C = \frac{16}{9} = 1{,}78 \text{ kN}$$

nakon toga se iz (3) i (4) jednačine odredi F_B

$$F_B = \frac{17}{9} = 1{,}89 \text{ kN}$$

Zatim se iz (1) i (2) jednačine odrede F_A i M_A

$$F_A = \frac{21}{9} = 2{,}33 \text{ kN}$$

$$M_A = \frac{11}{3} = 3{,}67 \text{ kNm}$$

Računanje momenata savijanja u pojedinim tačkama

$$M'_A = -M_A = -3{,}67 \text{ kNm}$$

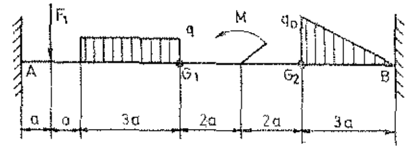
$$M_F = F_A \cdot 1 - M_A - q \cdot 1\,\frac{1}{2} = -1{,}84 \text{ kNm}$$

$$M_D = -M_A + F_A \cdot 4 - F_q \cdot 2 + F_1 \cdot 3 = o{,}65 \text{ kNm}$$

$$M_E = F_3 \cdot 4 + F_C \cdot 3 - F_2 \cdot 1 = -o{,}65 \text{ kNm}$$

$$M_H = -F_3 \cdot 3 + F_C \cdot 2 = o{,}556 \text{ kNm}$$

$$M_G = F_3 \cdot 1 = -1 \text{ kNm}$$



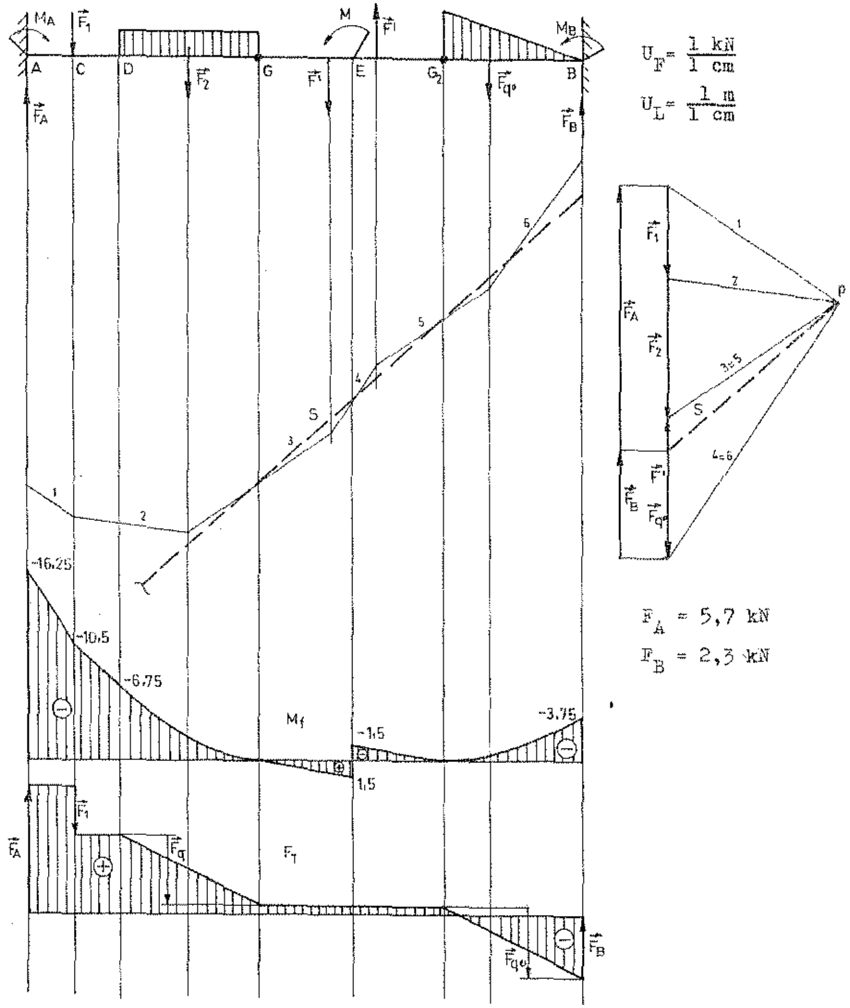
sl.5.4.

4.Za Gerberov nosač na slici 5.4.

a) Analitički i grafički odrediti reakcije oslonaca,

b) Nacrtati statičke dijagrame

Dato je $F_1 = 2$ kN $q = 1$ kN/m $M = 3$ kNm, $q_o = 2$ kN/m



$F_A = 5{,}7$ kN

$F_B = 2{,}3$ kN

$F_Q = 3q = 3$ kN

$F_{qo} = 3\,\frac{q_o}{2} = 3$ kN

$\sum Y = 0$	$F_A + F_B - F_1 - F_Q - F_{qo} = 0$	(1)
$\sum M_{G1}^{d} = 0$	$F_B \cdot 7 + M_B - F_{qo} \cdot 5 + M = 0$	(2)
$\sum M_{G2}^{d} = 0$	$F_B \cdot 3 + M_B - F_{qo} \cdot 1 = 0$	(3)
$\sum M_E = 0$	$F_B \cdot 12 + M_B - F_{qo} \cdot 1o + M - F_q \cdot 3,5 - F_1 \cdot 1 - M_A = 0$	(4)

Jednačine ravnoteže u koje se uvrste vrijednosti aktivnih sila

(1)	$F_A + F_B - 8 = 0$	
(2)	$7F_B + M_B - 12 = 0$	
(3)	$3F_B + M_B - 3 = 0$	(-)
(4)	$12F_B + M_B - M_A - 39,5 = 0$	

Oduzimanjem jednačina (2) i (3) odredi se reakcija F_B

$7F_B + M_B - 12 - 3F_B - M_B + 3 = 0$ (2) - (3)

$4F_B - 9 = 0$ $\qquad F_B = \frac{9}{4} = 2,25$ kN

$F_B = \frac{9}{4} = 2,25$ kN

Iz jednačine (1) odredi se F_A

$F_A = 5,75$ kN

Iz jednačine (3) odredi se moment u uklještenju M_B

$M_B = 12 - 7F_B = -3,75$ kNm

Iz jednačine (4) odredi se moment u uklještenju M_A

$M_A = 12F_B + M_B - 39,5 = 12 \cdot 2,25 - 3,75 - 39,5$

$M_A = 27 - 43,25 = -16,25$ kNm

Vrijednosti momenata savijanja u ostalim tačkama nosača

$M_C = F_A \cdot 1 + M_A = 5,75 - 16,25 = -1o,5$ kNm

$M_D = F_A \cdot 2 + M_A - F_1 \cdot 1 = 5,75 \cdot 2 - 16,25 - 2 \cdot 1$

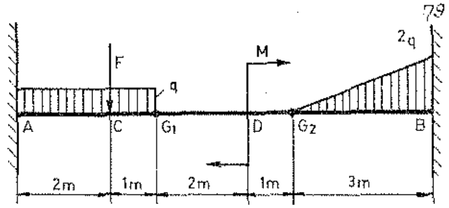
$M_D = -6,75$ kNm

$M_E^{\ell} = F_A \cdot 7 + M_A - F_1 \cdot 6 - F_Q \cdot 3,5$

$M_E^{\ell} = 5,75 \cdot 7 - 16,25 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 3,5$

$M_E^{\ell} = 1,5$ kNm

$M_E^{d} = M_E - M = 1,5 - 3 = -1,5$ kNm



sl. 5.5.

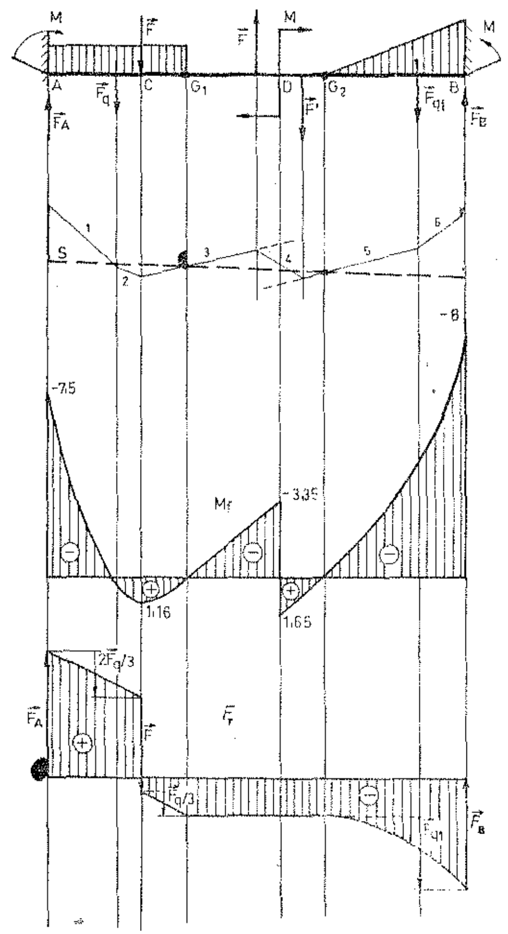
5. Za Gerberov nosač prikazan na sl.5.5. odrediti:

a) grafički i analitički otpore u osloncima,

b) nacrtati statičke dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila.

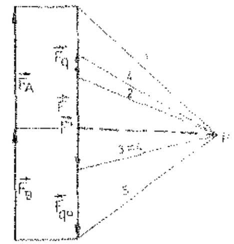
Zadano je: $F = 4$ kN,

$q = 1\,\frac{kN}{m}$, $M = 5$ kNm



$U_F = \frac{1\ kN}{0,5\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$



$F_A = 5,4$ kN

$F_B = 4,7$ kN

$F_q = 3_q = 3$ kN

$F_{q1} = 3\,\frac{2q}{2} = 3$ kN

$\sum Y = 0$	$F_A + F_B - F - F_q - F_{q1}\cdot 2 = 0$	(1)
$\sum M_{G2}^{d} = 0$	$F_B\cdot 3 + M_B - F_{q1}\cdot 2 = 0$	(2)
$\sum M_{G1}^{d} = 0$	$F_B\cdot 6 + M_B - F_{q1}\cdot 5 - M = 0$	(3)
$\sum M_A = 0$	$F_B\cdot 9 + M_B - F_{q1}\cdot 8 - M - F\cdot 2 - F_q\cdot 1,5 - M_A = 0$	(4)

Kada se u jednačine (1) do (4) uvrste vrijednosti poznatih sila dobije se sistem od 4 jednačine sa 4 nepoznate.

$$F_A + F_B - 10 = 0 \qquad (1)$$
$$3F_B + M_B - 6 = 0 \qquad (2)$$
$$6F_B + M_B - 20 = 0 \quad (-) \qquad (3)$$
$$9F_B + M_B - M_A - 41,5 = 0 \qquad (4)$$

Oduzimanjem jednačina (2) i (3) odredi se vrijednost reakcije F_B

$$3F_B + M_B - 6 - 6F_B - M_B + 20 = 0 \qquad (2) - (3)$$
$$-3F_B + 14 = 0 \qquad F_B = \frac{14}{3} = 4,67 \text{ kN}$$

Iz jednačine (1) izračuna se reakcija F_A

$$F_A = 10 - F_B = 5,33 \text{ kN}$$

Iz jednačine (2) moment u uklještenju M_B

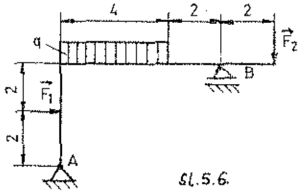
$$M_B = 6 - 3F_B = 6 - 3\,\frac{14}{3} = -8 \text{ kNm}$$

Iz jednačine (4) izračuna se moment M_A

$$M_A = 9F_B + M_B - 41,5$$
$$M_A = -7,5 \text{ kNm}$$

Vrijednosti momenata savijanja u ostalim tačkama nosača.

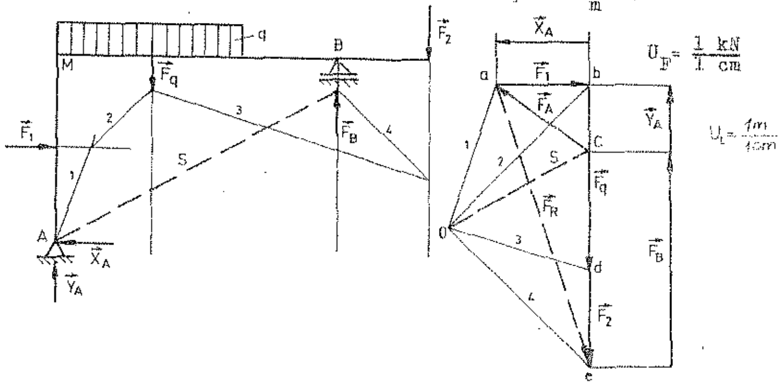
$$M_C = F_A\cdot 2 + M_A - q\cdot 2\cdot 1 = 5,33\cdot 2 - 7,5 - 2 = 1,16 \text{ kNm}$$
$$M_D^1 = F_A\cdot 5 + M_A - F\cdot 3 - F_q\cdot 3,5 = 5,33\cdot 5 - 7,5 - 12 - 3\cdot 3,5$$
$$M_D^1 = -3,35 \text{ kNm}$$
$$M_D = M_D^1 + M = -3,35 + 5 = 1,65 \text{ kNm}$$



Sl.5.6.

6. Za poluokvirni nosač odrediti
   a) grafički i analitički veličine reakcije u osloncima A i B
   b) maksimalni moment
   c) statičke dijagrame

   Zadano je $F_1 = 2$ kN; $F_2 = 2$ kN; $q = 1\ \frac{\text{kN}}{\text{m}}$, (Sl.5.6.)



$U_F = \frac{1 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$

$U_L = \frac{1 m}{1 cm}$

$F_q = 4q = 4$ kN

$F_B = ce\cdot U_F \qquad X_A = ab\cdot U_F$

$Y_A = cb\cdot U_F \qquad F_A = ac\cdot U_F$

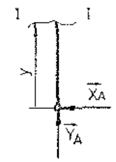
$\sum X = 0$	$F_1 - X_A = 0$	(1)
$\sum M_A = 0$	$6F_B - 8F_2 - 2F_2 - 2F_1 = 0$	(2)
$\sum Y = 0$	$Y_A + F_B - F_2 - F_2 = 0$	(3)

(1) $\quad X_A = F_1 = 2$ kN

(2) $\quad F_B = \frac{8F_2 + 2F_q + 2F_1}{6} = \frac{28}{6} = 4,7$ kN

(3) $\quad Y_A = F_2 + F_q - F_B = 1,3$ kN

Momenti i transverzalne sile



I polje $\quad 0 \leq y \leq 2$

$M(y) = X_A\cdot y \quad$ linija momenta je pravac

$F_T = \frac{dM(y)}{dy} = X_A$

Za $y = 0 \qquad M = 0; \qquad F_T = 2$ kN

za $y = 2 \qquad M = 4$ kNm; $\quad F_T = 2$ kN

$F_{ak} = 1,3$ kN pritiskujuća

II polje $2 \le y \le 4$

$M(y) = X_A\, y - F_1(y-2)$ linija momenta je pravac

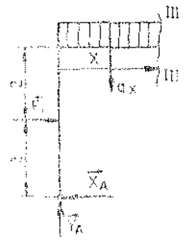
$F_T = X_A - F_1$

za $y = 2$ $M = 4$ kNm; $F_T = 0$

za $y = 4$ $M = 4$ kNm; $F_T = 0$

$F_{ak} = Y_A = 1,3$ kN pritiskujuća

III polje $0 \le x \le 4$



$M(x) = Y_A x + X_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 - \frac{q x^2}{2}$ linija momenta je parabola

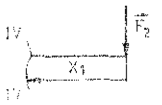
$F_T = \frac{dM(x)}{dx} = Y_A - q \cdot x$

za $x = 0$ $M = 4$ kNm; $F_T = 1,3$ kN

za $x = 4$ $M = 1,2$ kNm; $F_T = 2,7$ kN

$F_{ak} = 0$

IV polje $0 \le x_1 \le 2$



$M(x_1) = - F_2 \cdot x_1$ linija momenta je pravac

$$F_T = - \frac{dM(x_1)}{dx_1} = F_2$$

za $x_1 = 0$ $M = 0$ $F_T = 2$ kN

za $x_1 = 2$ $M = -4$ kNm $F_T = 2$ kN

$F_{ak} = 0$

V polje $2 \le x_1 \le 4$

$M(x_1) = - F_2 x_1 + F_B\,(x_1 - 2)$

$$F_T = - \frac{dM(x_1)}{dx} = F_2 - F_B$$

za $x_1 = 2$ $M = -4$ kNm $F_T = 2,7$ kN

za $x_1 = 4$ $M = 1,4$ kNm

Mjesto djelovanja maksimalnog momenta

$$M = Y_A x + 4X_A - 2F_1 - \frac{q\, x^2}{2}$$

$$M = 1,3\, x + 8 - 4 - \frac{x^2}{2}.$$

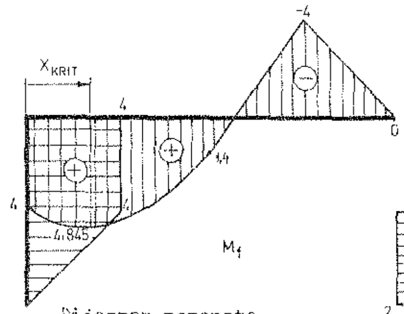
$M = -\frac{x^2}{2} + 1,3\, x + 4$ – momentna jednačina u III polju

$\frac{dM}{dx} = 0$ $\quad -x + 1,3 = 0$ $\quad x = 1,3$ m

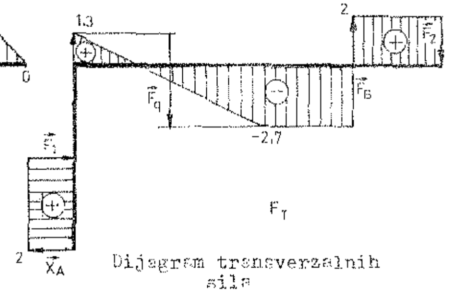
Na rastojanju od 1,3 m od tačke M nalazi se mjesto djelovanja maksimalnog momenta.

$$M_{max} = -\frac{1,3^2}{2} + 1,3 \cdot 1,3 + 4 = 4,845 \text{ kNm}$$

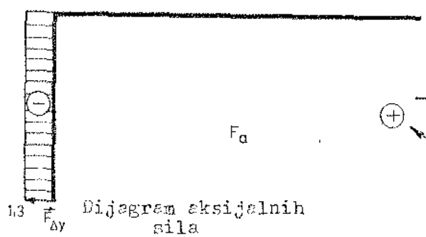
Prilikom crtanja dijagrama momenta savijanja treba poštovati pravilo da pozitivne vrijednosti momenata nanosimo unutar okvira, a negativne vrijednosti sa spoljašnje strane okvira. Pozitivne vrijednosti transverzalnih i aksijalnih sila nanose se sa spoljašnje, a negativne sa unutrašnje strane okvira.



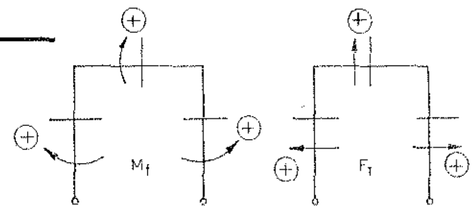
Dijagram momenata savijanja



Dijagram transverzalnih sila

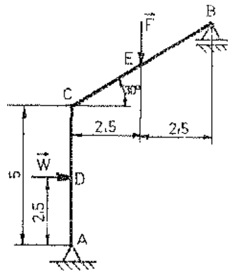


Dijagram aksijalnih sila



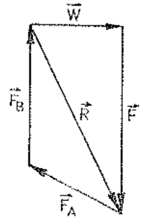
Smjer momenata za pojedine presjeke okvira

Predznaci momenata savijanja odredjuju se posmatranjem djelovanja sile ako posmatramo unutar okvira.



sl. 5.7.

7. Nosač u obliku poluokvira ABC opterećen je koncentrisanim silama W=1 kN i F=2 kN prema sl.5.7. Odrediti grafički i analitički reakcije u osloncima i nacrtati statičke dijagrame.

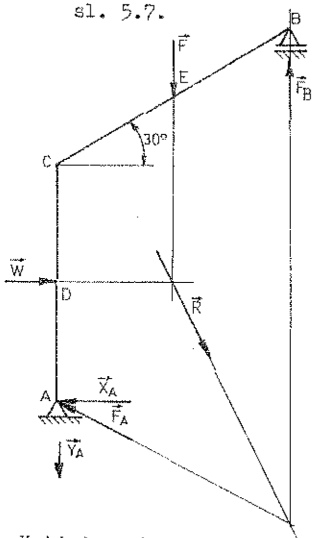


$U_F = \frac{1\ kN}{2\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$

$F_A = 1,1\ kN$

$F_B = 1,5\ kN$



$\sum X = 0 \qquad W - X_A = 0 \qquad (1)$

$\sum M_A = 0 \qquad 5F_B - 2,5F - 2,5W = 0 \qquad (2)$

$\sum Y = 0 \qquad F_B - F - Y_A = 0 \qquad (3)$

(1) $X_A = W = 1\ kN$

(2) $F_B = \frac{2,5(W+F)}{5} = 1,5\ kN$

(3) $Y_A = F_B - F = -\ 0,5\ kN$

Vrijednosti momenata savijanja

$M_A = 0$

$M_D = X_A \cdot 2,5 = 2,5\ kNm$

$M_C = X_A \cdot 5 - W \cdot 2,5 = 2,5\ kNm$

$M_E = F_B \cdot 2,5 = 3,75\ kNm$

Vrijednosti aksijalnih sila

$F_{AA} = Y_A = -0.5$ kN pritisak

$F_{AD} = Y_A = -0.5$ kN pritisak

$F_{AB} = F_B \cos 60^o = 1,5\ \frac{1}{2} = 0,75$ kN istezanje

$F_{AE} = F_B \cos 60^o - F \cos 60^o = 0,75 - 2\ \frac{1}{2} = 0.25$ kN pritisak

$F_{AC} = F_{AE} = 0.25$ kN pritisak

Vrijednosti transverzalnih sila

$F_{TA} = X_A = 1\ kN$

$F_{TD} = X_A - W = 0$

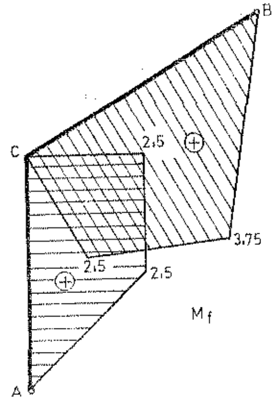
$F_{TC} = 0$

$F_{TB} = F_B \cos 30^o = -\ 1,3\ kN$

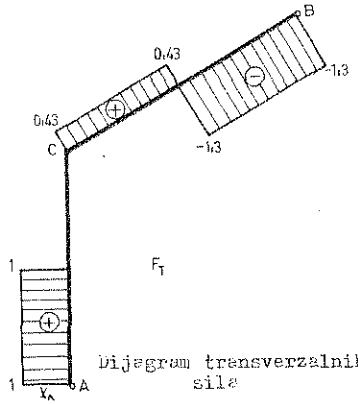
$F_{TE} = -\ F_B \cos 30^o + F \cos 30^o =$
$= 0,43\ kN$

$F_{TC} = 0,43\ kN$

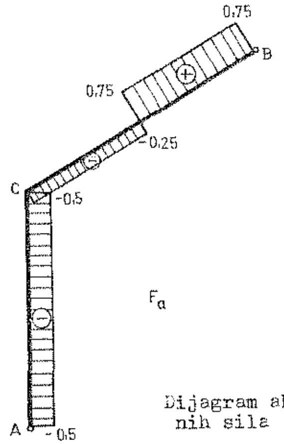
$U_M = \frac{1\ kNm}{1\ cm} \qquad U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$



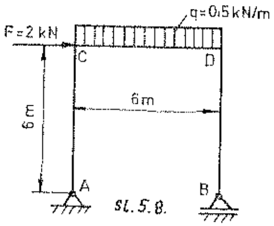
Dijagram momenata savijanja



Dijagram transverzalnih sila



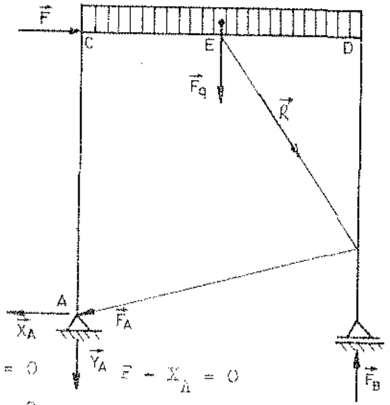
Dijagram aksijalnih sila

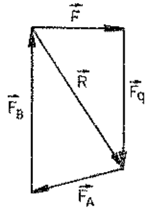


8. Za nosač u obliku okvira ABCD opterećen prema sl.5.8. odrediti:

a) grafički i analitički otpore oslonaca A i B.

b) Nacrtati statičke dijagrame za cio nosač.





$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$

$F_B = 3{,}5\ kN$

$F_A = 2\ kN$

$F_q = q \cdot 6 = 3\ kN$

$\sum X = 0 \qquad F - X_A = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad Y_A + F_B - F_q = 0 \qquad (2)$

$\sum M_A = 0 \qquad F_B \cdot 6 - F_q \cdot 3 - F \cdot 6 = 0 \qquad (3)$

(1) $X_A = 2\ kN$

(3) $F_B = 3{,}5\ kN$

(2) $Y_A = -\ 0{,}5\ kN$

Vrijednosti momenata savijanja

$M_C = X_A \cdot 6 = 12\ kNm$

$M_E = X_A \cdot 6 + Y_A \cdot 3 - q \cdot 3 \cdot 1{,}5 = 3{,}75\ kNm$

$M_D = 0$

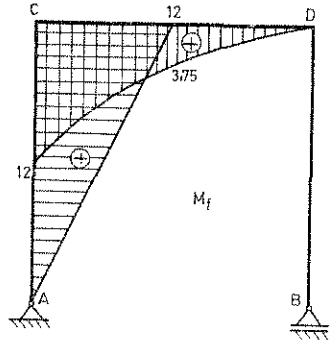
Dijagram transverzalnih sila može se nacrtati i na osnovu reakcija u osloncima

$F_{TA} = X_A = 2\ kN$

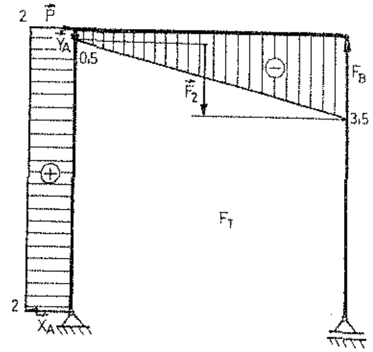
$F_{TB} = 0$

$F_{TC} = Y_A = -\ 0{,}5\ kN$

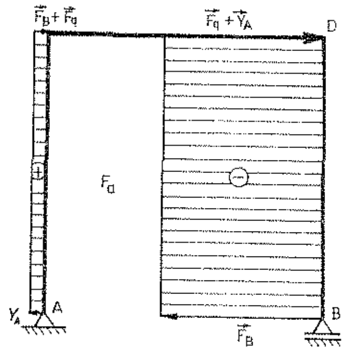
$F_{TD} = F_B = 3{,}5\ kN$



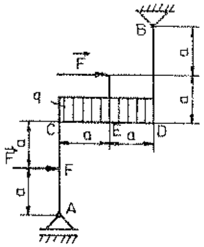
Dijagrami momenata savijanja



Dijagrami transverzalnih sila



Dijagrami aksijalnih sila



Sl.5.9.

9. Za zadani okvirni nosač odrediti

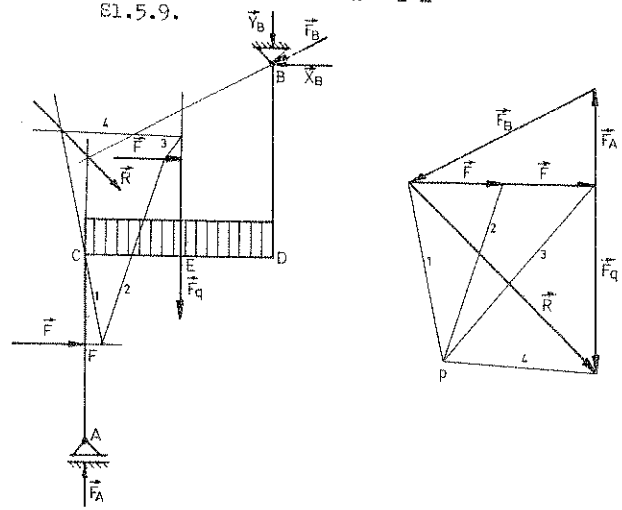
a) grafički i analitički veličine reakcije u osloncima A i B

b) statičke dijagrame za cijeli okvir.

(sl. 5.9.)

$F = 2$ kN $\qquad q = 2\ \frac{kN}{m}$ $\qquad U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$a = 1$ m $\qquad U_L = \frac{1\ m}{2\ cm}$



$F_A = 6$ kN

$F_B = 4{,}5$ kN

$\sum X = 0 \qquad F + F - X_B = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = 0 \qquad F_A - F_q - Y_B = 0 \qquad (2)$

$\sum M_B = 0 \qquad F_A \cdot 2 - F \cdot 3 - F \cdot 1 - F_q \cdot 1 = 0 \qquad (3)$

(1) $\qquad X_B = 4$ kN

(3) $\qquad F_A = 6$ kN

(2) $\qquad Y_B = 2$ kN

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 4{,}47 \text{ kN}$$

Momenti savijanja u pojedinim tačkama

Vertikalni štap AC

$M_A = 0$

$M_F = 0$

$M_C = - F \cdot 1 = - 2$ kNm

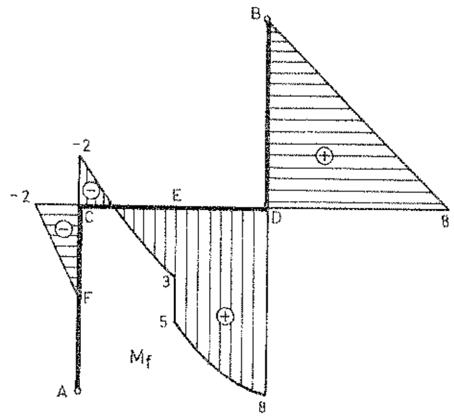
Horizontalni štap CD

$M_C = - F \cdot 1 = - 2$ kNm

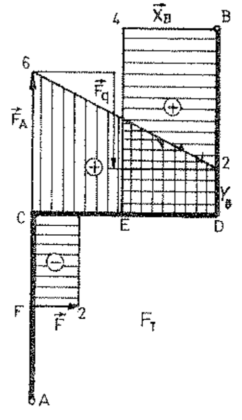
$M_E^l = - F \cdot 1 + F_A \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 3$ kNm

$M_E^d = M_E^l + F \cdot 1 = 5$ kNm

$M_D = - F \cdot 1 + F_A \cdot 2 + F \cdot 1 - F_q \cdot 1 = 8$ kNm



Dijagrami momenata savijanja



Dijagrami transverzalnih sila

Transverzalne sile u pojedinim tačkama

Štap AC

$F_{TA} = 0$

$F_{TF} = - F = -2$ kN

$F_{TC} = -F = -2$ kN

Štap CD

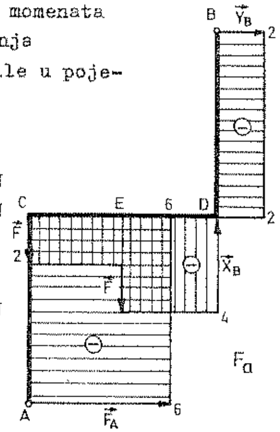
$F_{TC} = F_A = 6$ kN

$F_{TD} = F_A - 2q = 2$kN

Štap BD

$F_{TB} = X_B = 4$ kN

$F_{TD} = X_B = 4$ kN



Dijagrami aksijalnih sila

Aksijalne sile u pojedinim tačkama

Štap AC

$F_{AA} = F_A = 6$ kN

$F_{AF} = F_A = 6$ kN

$F_{AC} = F_A = 6$ kN

Štap CD

$F_{AC} = -F = -2$ kN -pritisak

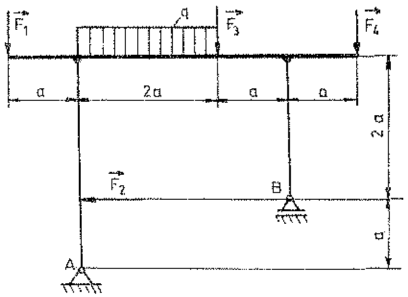
$F_{AE} = -F-F = -4$ kN-pritisak

$F_{AD} = -F-F = -4$kN-pritisak

Štap BD

$F_B = -Y_B = -2$ kN-pritisak

$F_D = -Y_B = -2$ kN -pritisak



sl. 5.1o.

1o. Za okvir prema sl. 5.10. odredi:

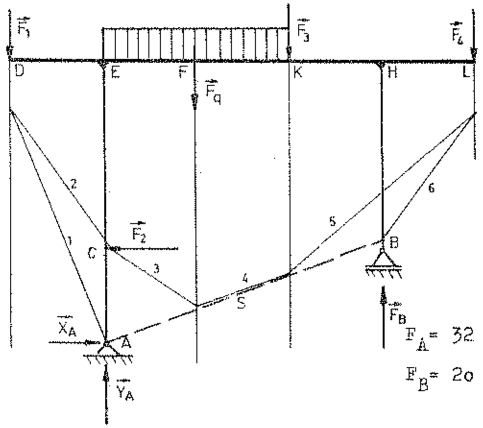
a) grafički i analitički reakcije u osloncima

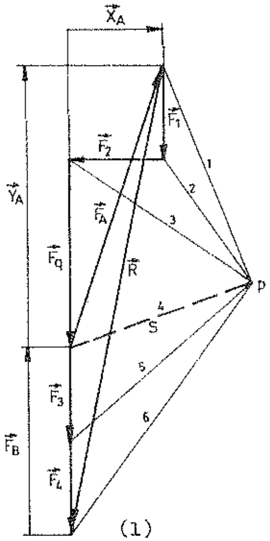
b) nacrtati i izračunati statičke veličine (dijagrame momenata, uzdužnih i poprečnih sila).

$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 10$ kN, $a = 1$ m

$F_q = 2q = 20$ kN

$U_F = \frac{10 \text{ kN}}{2 \text{ cm}}$ $\quad U_L = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$





$F_A = 32$ kN

$F_B = 20$ kN

$$\sum X = X_A - F_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = Y_A + F_B - F_1 - F_q - F_3 - F_4 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = F_b \cdot 3 - F_4 \cdot 4 - F_3 \cdot 2 - F_q \cdot 1 + F_1 \cdot 1 + F_2 \cdot 1 = 0 \qquad (3)$$

(1) $X_A = F_2 = 10$ kN

(2) $F_B = 20$ kN

(3) $Y_A = 30$ kN

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 31{,}63 \text{ kN}$$

Vrijednosti momenata savijanja

Štap AE

$M_A = 0$

$M_C = -X_A \cdot 1 = -10$ kNm

$M_E = -X_A \cdot 3 + F_2 \cdot 2 = -10$ kNm

Štap DL

$M_D = 0$

$M_E^e = F_1 \cdot 1 = -10$ kNm

$M_E^d = F_1 \cdot 1 - X_A \cdot 3 + F_2 \cdot 2 = -20$ kNm

$M_F = -F_1 \cdot 2 + Y_A \cdot 1 - X_A \cdot 3 + F_2 \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -5$ kNm

$M_K = -F_4 \cdot 2 + F_3 \cdot 1 = 0$

$M_H = -F_4 \cdot 1 = -10$ kNm

Štap BH

$M_B = 0$

$M_H = 0$

Vrijednosti transverzalnih sila

Štap AE

$F_{TA} = -X_A = -10$ kN

$F_{TC} = -X_A + F_2 = 0$

$F_{TE} = 0$

Štap DL

$F_{TD} = -F_1 = -10$ kN

$F_{TE}^l = -F_1 = -10$ kN

$F_{TE}^d = -F_1 + Y_A = 20$ kN

$F_{TK}^l = -F_1 + Y_A - F_q = 0$

$F_{TK}^d = -F_1 + Y_A - F_q - F_3 = -10$ kN

$F_{TH}^l = -F_1 + Y_A - F_q - F_3 = -10$ kN

$F_{TH}^d = -F_1 + Y_A - F_q - F_3 + F_B = 10$ kN

$F_{TL}^l = -F_1 + Y_A - F_q - F_3 + F_B = 10$ kN

$F_{TL}^d = 0$

Vrijednosti aksijalnih sila

Štap AE

$F_{AA} = -Y_A = -30$ kN

$F_{AE} = -Y_A = -30$ kN

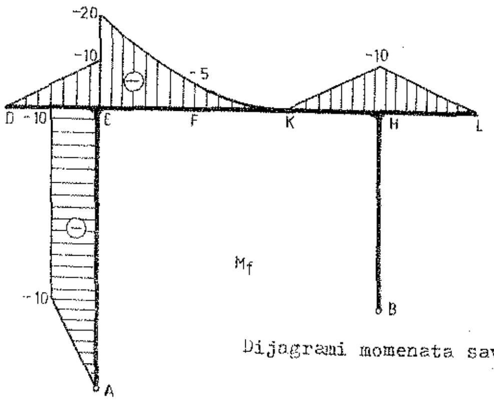
Štap BH

$F_{AB} = -F_B = -20$ kN

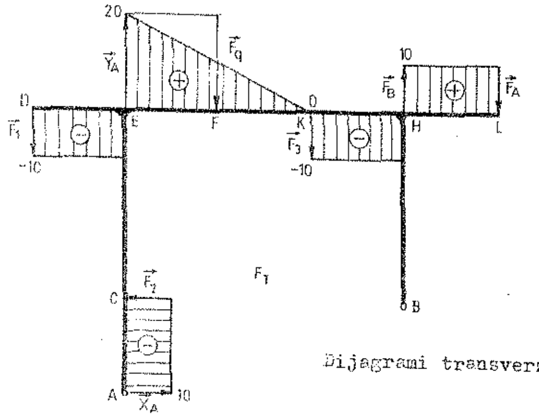
$F_{AH} = -F_B = -20$ kN

Štap DL

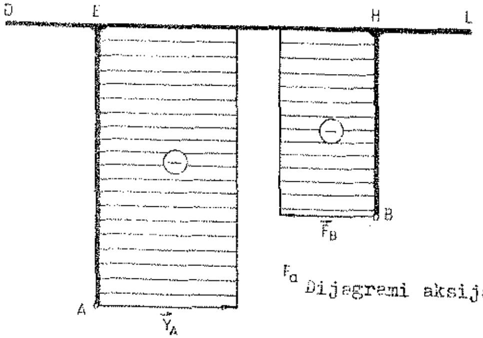
$F_{AD} = F_{AE} = F_{AH} = F_{AL} = 0$



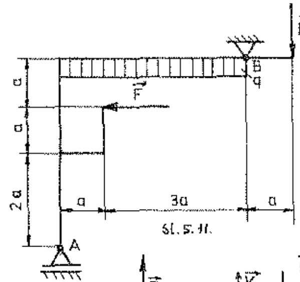
Dijagrami momenata savijanja



Dijagrami transverzalnih sila



F_a Dijagrami aksijalnih sila



11. Za zadani okvir prema sl.5.11. odredi:

a) grafički i analitički reakcije u osloncima A i D.

b) Statičke dijagrame

$F = 1$ kN

$a = 1$ m

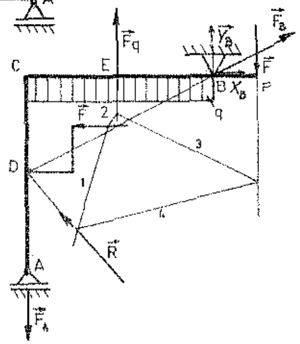
$q = \frac{F}{2a} = \frac{1}{2} \frac{kN}{m}$

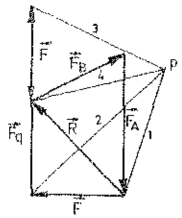
$F_q = 4 \cdot a \cdot q = 2$ kN

$U_F = \frac{1\ kN}{2\ cm}$ $U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$

$F_A = 1,5$ kN

$F_B = 1,1$ kN





$$\sum X = X_B - F = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = Y_B + F_q - F - F_A = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_D = -F_A \cdot 4 + F_q \cdot 2 + F \cdot 1 + F \cdot 1 = 0 \qquad (3)$$

(1) $X_B = F = 1$ kN

(3) $F_A = \frac{2F_q + 2F}{4} = 1,5$ kN

(2) $Y_B = F + F_A - F_q = 0,5$ kN

$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 1,12$ kN

Vrijednosti momenata savijanja

Štap AC

$M_A = 0$

$M_D^l = 0$

$M_D^d = -F\cdot 1 = -1$ kNm

$M_C = F\cdot 1 = 1$ kNm

Štap CF

$M_C = F\cdot 1 = 1$ kNm

$M_E = -F_A\cdot 2 + F\cdot 1 + q\cdot 2\cdot 1 = -1$ kNm

$M_B = -F\cdot 1 = -1$ kNm

Vrijednosti transverzalnih sila

Štap AC

$F_{TA} = 0$

$F_{TD} = F = 1$ kN

$F_{TC} = F = 1$ kN

Štap CB

$F_{TC} = -F_A = -1,4$ kN

$F_{TB}^e = -F_A + q\cdot 4 = 0,5$ kN

$F_{TB}^d = -F_A + q\cdot 4 + Y_B = 1$ kN

$F_{TF}^e = -F_A + q\cdot 4 + Y_B = 1$ kN

$F_{TF} = -F_A\ q\cdot 4 + Y_B - F = 0$

Vrijednosti aksijalnih sila

Štap AC

$F_{AA} = F_A = 1,5$ kN istezanje

$F_{AC} = F_A = 1,5$ kN istezanje

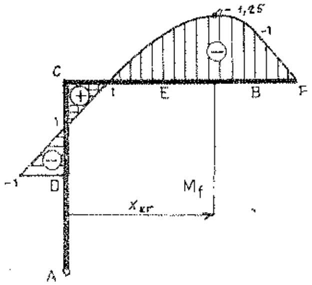
Štap CF

$F_{AC} = F = 1$ kN

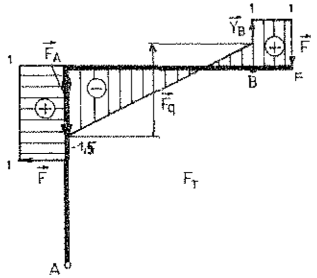
$F_{AB}^e = F = 1$ kN

$F_{AB}^d = F - X_B = 0$

$F_{AF} = 0$



Dijagrami momenata savijanja



Dijagrami transverzalnih sila

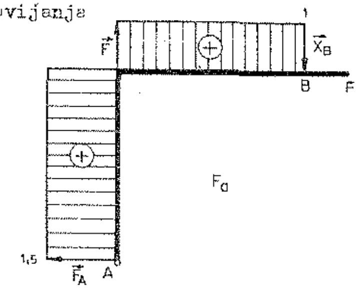
$M_{max} = -F_A\cdot x + F\cdot 1 + q\,\frac{x^2}{2}$

$-F_A + qx = 0$

$x = \frac{F_A}{q} = \frac{1,5}{0,5} = 3$ m

Mjesto kritičnog presjeka nalazi se udaljeno 3 m od tačke C štap CF. U toj tački $F_T = 0$.

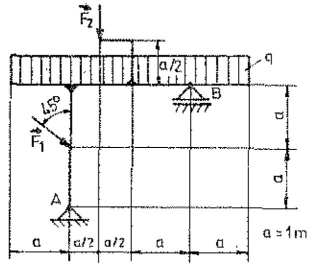
$M_{max} = 1,25$ kNm



Dijagram aksijalnih sila

12. Za nosač opterećen prema sl.5.12, analitički i grafički odrediti sile u osloncima A, B.
Za cijeli nosač nacrtati dijagrame momenata.

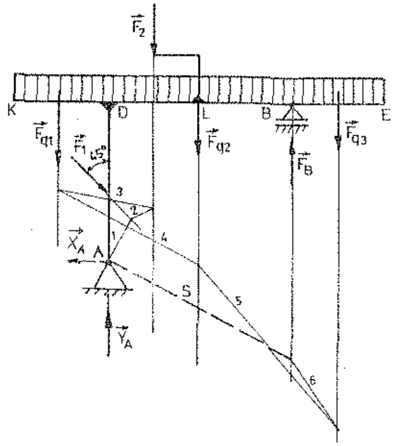
$F_1 = 2$ kN $\quad F_2 = 2$ kN $\quad q = 1$ kN/m



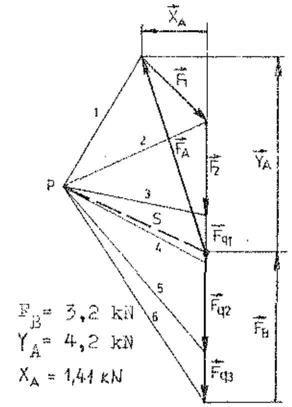
sl.5.12.

$U_F = \frac{1\ \text{kN}}{1\ \text{cm}}$

$U_L = \frac{1\ \text{m}}{2\ \text{cm}}$



$F_q = 4aq = 4$ kN



$F_B = 3,2$ kN

$Y_A = 4,2$ kN

$X_A = 1,41$ kN

$$\sum X = 0 \qquad X_A - F_1 \sin 45^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = 0 \qquad Y_A + F_B - F_2 - F_q - F_1\ 45^\circ = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0 \qquad F_B\cdot 2 - F_q\cdot 1 - F_2\cdot \frac{1}{2} - F_1 \sin 45^\circ\cdot 1 = 0 \qquad (3)$$

$F_B = \frac{5 + \sqrt{2}}{2} = 3,2$ kN

$Y_A = \frac{7 + \sqrt{2}}{2} = 4,2$ kN

$X_A = \sqrt{2} = 1,41$ kN

Vertikalni štap

$M_C = X_A \cdot 1 = \sqrt{2}$ kNm

$M_D = X_A \cdot 2 - F_1 \sin 45^{\circ} \cdot 1 = \sqrt{2}$ kNm

Horizontalni štap

$M_K = 0$

$M_D^{l} = -q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -0{,}5$ kNm

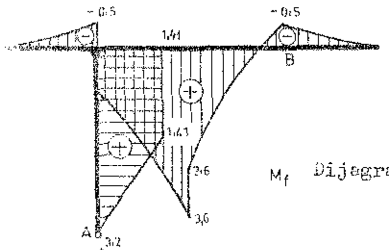
$M_D^{d} = -q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + X_A \cdot 2 - F_1 \sin 45^{\circ} \cdot 1 = 0{,}91$ kNm

$M_L^{l} = q \cdot 2 \cdot 1 + Y_A \cdot 2 - F_1 \sin 45^{\circ} \cdot 1 = 3{,}61$ kNm

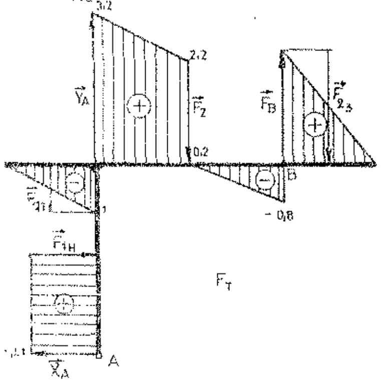
$M_L^{d} = q \cdot 2 \cdot 1 + Y_A \cdot 1 + X_A \cdot 2 - F_1 \sin 45^{\circ} \cdot 1 - F_2 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}61$ kNm

$M_E = 0$

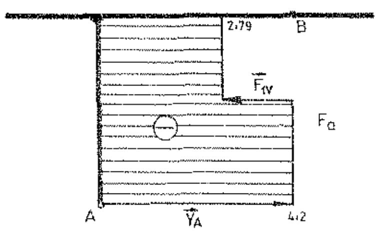
$M_B = -q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -0{,}5$ kNm



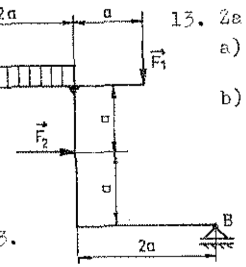
M_f Dijagram momenata savijanja



Dijagram transverzalnih sila



Dijagram aksijalnih sila



sl.5.13.

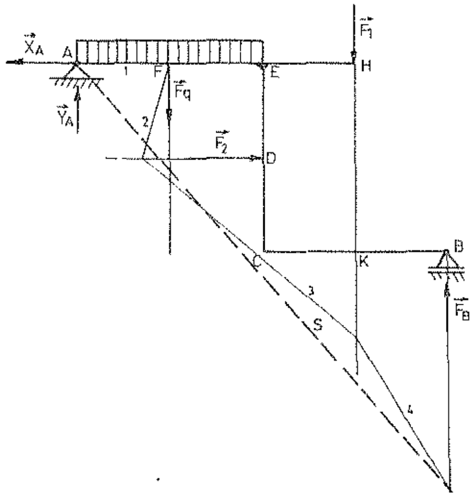
13. Za okvirni nosač na sl.5.13. odrediti:

a) analitički i grafički reakcije u osloncima A i B

b) statičke dijagrame momenata savijanja aksijalnih i transverzalnih sila

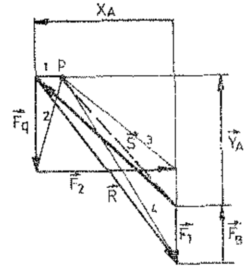
Zadano je $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 3$ kN

$q = 1\ \frac{kN}{m}$ $a = 1$ m



$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{2\ cm}$



$F_A = 4$ kN

$F_B = 1{,}25$ kN

$\sum X = X_A - F_2 = 0$ (1)

$\sum Y = Y_A + F_B - F_1 - F_q = 0$ (2)

$\sum M_A = F_B \cdot 4 + F_2 \cdot 1 - F_1 \cdot 3 - F_q \cdot 1 = 0$ (3)

(3) $F_B = \frac{F_1 \cdot 3 + F_q \cdot 1 - F_2 \cdot 1}{34} = 1{,}25$ kN

(1) $X_A = F_2 = 3$ kN

(2) $Y_A = F_1 + F_q - F_B = 2{,}75$ kN

<u>Štap BC</u>

$M_B = 0$

$M_K = F_B \cdot 1 = 1{,}25$ kNm $M_C = F_B \cdot 2 = 2{,}5$ kNm

Štap AH

$M_A = 0$

$M_F = Y_A \cdot 1 \; q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2,25$ kNm

$M_E^l = Y_A \cdot 2 - F_q \cdot 1 = 3,5$ kNm

$M_E^d = -F_1 \cdot 1 = -2$ kNm

Štap CE

$M_C = F_B \cdot 2a = 2,5$ kNm

$M_D = F_B \cdot 2a = 2,5$ kNm

$M_E = F_B \cdot 2a + F_2 \cdot 1 = 5,5$ kNm

Štap BC

$F_{TB} = F_B = 1,25$ kN

$F_{TC} = F_B = 1,25$ kN

Štap AH

$F_{TA} = Y_A = 2,75$ kN

$F_{TE}^e = Y_A - F_q = 0,75$ kN

$F_{TE}^d = Y_A - F_q + F_B = 2$ kN

$F_{TH}^e = Y_A - F_q + F_B = 2$ kN

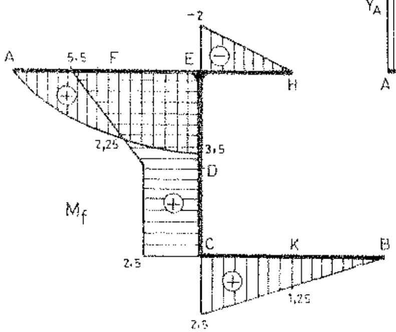
$F_{TH} = 0$

Štap CE

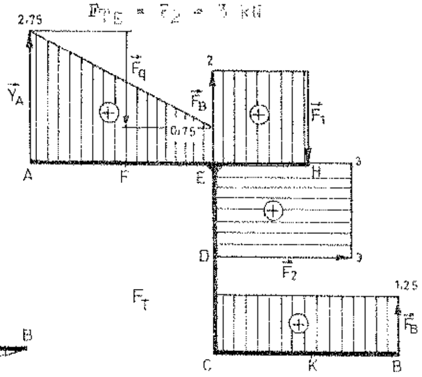
$F_{TC} = 0$

$F_{TD} = F_2 = 3$ kN

$F_{TE} = F_2 = 3$ kN



Dijagram momenata savijanja



Dijagram transverzalnih sila

Štap BC

$F_{AB} = 0 \quad F_{AC} = 0$

Štap AH

$F_{AA} = X_A = 3$ kN istezanje

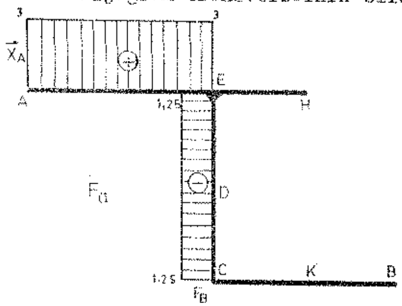
$F_{AF} = X_A = 3$ kN istezanje

$F_{AH} = 0$

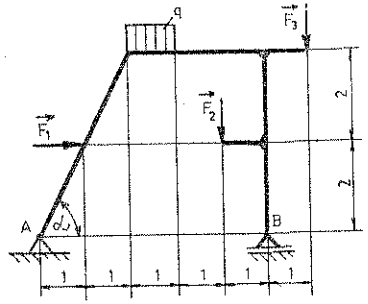
Štap CE

$F_{AC} = -F_B = -1,25$ kN pritisak

$F_{AE} = -F_B = -1,25$ kN pritisak



Dijagram aksijalnih sila



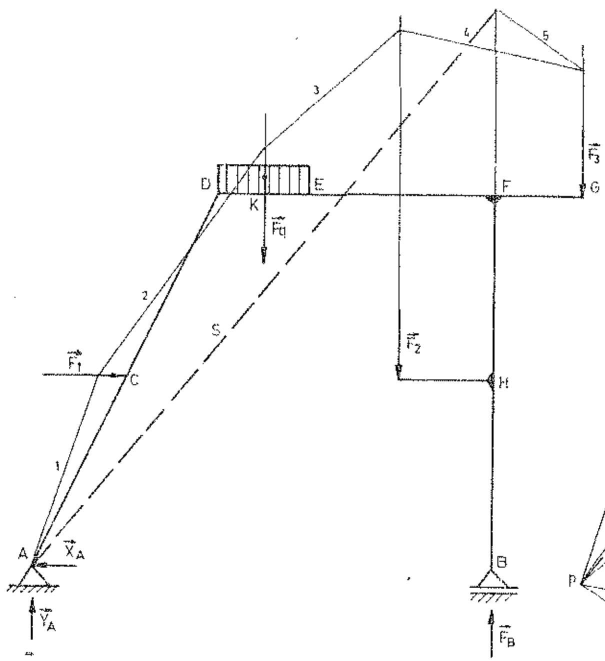
sl. 5.14.

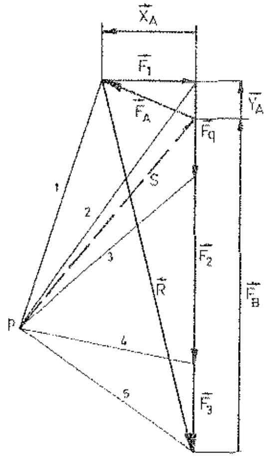
14. Za nosač na sl.5.14. odrediti:
    a) grafički i analitički reakcije oslonaca A i B
    b) nacrtati statičke dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila.

    Zadano je: $F_1 = 1$ kN, $F_2 = 2$ kN, $F_3 = 1$ kN, $q = 1 \frac{kN}{m}$

$U_F = \frac{1 \text{ kN}}{2 \text{ cm}}$

$U_L = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$





$F_B = 3,7$ kN

$F_A = 1,04$ kN

$$\sum X = F_1 - X_A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = F_B + Y_A - F_q - F_2 - F_3 = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = F_B \cdot 5 - F_2 \cdot 4 - F_3 \cdot 6 - F_q \cdot 2{,}5 - F_1 \cdot 2 = 0 \qquad (3)$$

$$(3) \quad F_B = \frac{4F_2 + 6F_3 + 2{,}5F_q + 2F_1}{5} = 3{,}7 \text{ kN}$$

$$(2) \quad Y_A = F_q + F_2 + F_3 - F_B = 0{,}3 \text{ kN}$$

$$(1) \quad X_A = F_1 = 1 \text{ kN}$$

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 1{,}04 \text{ kN}$$

Vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim tačkama

Štap AD

$M_A = 0$

$M_C = Y_A \cdot 1 + X_A \cdot 2 = 2{,}3$ kNm

$M_D = Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = 2{,}6$ kNm

Štap DG

$M_D = 2{,}6$ kNm

$M_K = Y_A \cdot 2{,}5 + X_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 - q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 2{,}625$ kNm

$M_E = Y_A \cdot 3 + X_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2{,}4$ kNm

$M_F^{l} = Y_A \cdot 5 + X_A \cdot 4 - F_1 \cdot 2 - F_q \cdot 2{,}5 = 1$ kNm

$M_F^{d} = -F_3 \cdot 1 = -1$ kNm

Štap BF

$M_B = 0$

$M_H = 0$

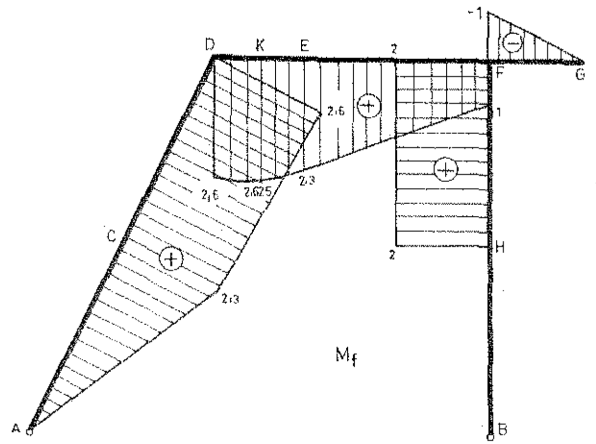
$M_H^{1} = F_2 \cdot 1 = 2$ kNm

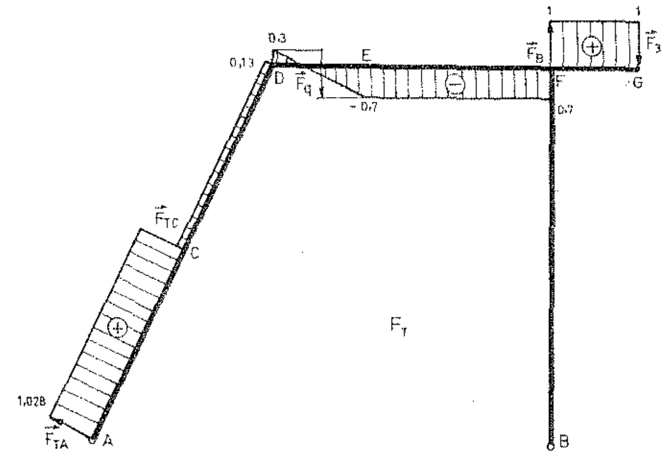
$M_F = F_2 \cdot 1 = 2$ kNm

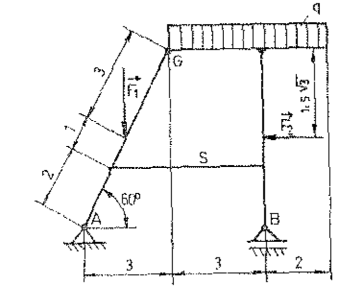
Vrijednosti transverzalnih sila

$F_{TA} = X_A \sin\alpha + Y_A \cos\alpha = 1{,}028$ kN

$F_{TC} = F_{TA} - F_1 \sin\alpha = 0{,}133$ kN







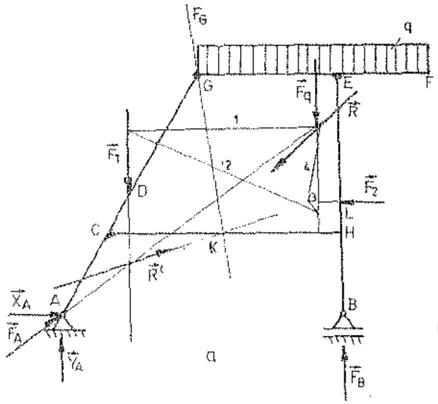
sl.5.15.

15.* Za nosač na sl.5.15. odrediti:

a) grafički i analitički reakcije u osloncima A i B silu S i reakciju uzzglobu G

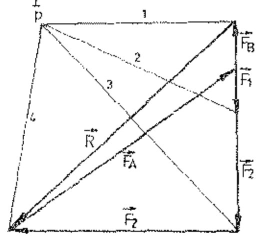
b) nacrtati dijagram momenata savijanja za cijeli nosač

Zadano je: $F_1 = 2$ kN,
$F_2 = 5$ kN,
$q = o,5\ \frac{kN}{m}$



$F_q = 5q = 2,5$ kN

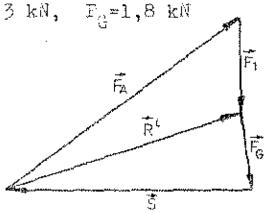
$F_2 = 5$kN $\quad F_1 = 2$ kN



$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$ $\qquad U_L = \frac{1\ m}{1\ cm}$

$F_A = 6,3$ kN, $\quad F_B = o,7$ kN,

$S = 5,3$ kN, $\quad F_G = 1,8$ kN



Grafičko rješenje je iznalaženje spoljašnjih reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$, a zatim unutrašnjih $\vec{F}_G$ i $\vec{S}$.

Spoljašnje reakcije odrede se kao i kod prostog okvira tako da rezultanta R i reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ zatvaraju trokut sila i da im se pravci sijeku u jednoj tački. Nakon toga se nosač u zglobu G rastavi na lijevi i desni dio. Ovdje su se odredile reakcije $\vec{F}_G$ i $\vec{S}$ iz ravnoteže lijevog dijela nosača. Prvo se odredi $\vec{R}^l$ rezultanta poznatog opterećenja sa lijeve strane tj. zbir $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_1$ i prolazi kroz njihovu presječnu tačku. Sile $\vec{F}_G$, $\vec{S}$ i $\vec{R}^l$ sijeku se u jednoj tački (K) i zatvaraju trokut sila.

$$\sum X = X_A - F_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = Y_A + F_B - F_1 - F_q = 0 \qquad (2)$$

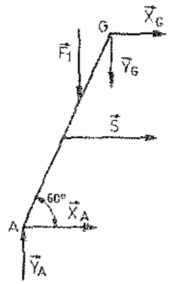
$$\sum M_A = \underline{6F_B - 5,5\ F_q - 1,5\ F_1 + 3F_2 \sin 6o^o = 0} \qquad (3)$$

(1) $X_A = 5$ kN

(3) $F_B = \dfrac{5,5F_q + 1,5F_1 - 1,5\ 3\ F_2}{6} = o,63$ kN

(2) $Y_A = F_q + F_1 - F_B = 3,87$ kN

$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 6,32$ kN



$$\sum X = X_A + X_G + S = 0 \qquad (4)$$

$$\sum Y = Y_A - F_1 - Y_G = 0 \qquad (5)$$

$$\sum M_G = Y_A \cdot 6 \cos 6o^o - F_1 \cdot 3 \cos 6o^o - S \cdot 4 \sin 6o^o - X_A \cdot 6 \sin 6o^o = 0 \qquad (6)$$

(5) $Y_G = Y_A - F_1 = 1,87$ kN

(6) $S = -5,o2$ kN

(4) $X_G = -S - X_A = o,o2$ kN

Štap AG

$M_A = 0$

$M_C = Y_A \cdot 2 \cdot \cos 6o^o - X_A \cdot 2 \cdot \sin 6o^o = -4,79$ kNm

$M_D = Y_A \cdot 3 \cdot \cos 6o^o - X_A \cdot 3 \cdot \sin 6o^o - S \cdot 1 \cdot \sin 6o = -2,855$ kNm

$M_G = 0$

Štap GF

$M_F = 0$

$M_E^d = -q \cdot 2 \cdot 1 = -1$ kNm

$M_E^l = -q \cdot 2 \cdot 1 - F_2 \cdot 1,5\sqrt{3} - S \cdot 2\sqrt{3} = 3,395$ kNm

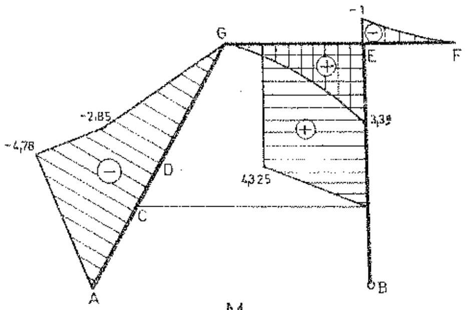
Štap BE

$N_B = 0$

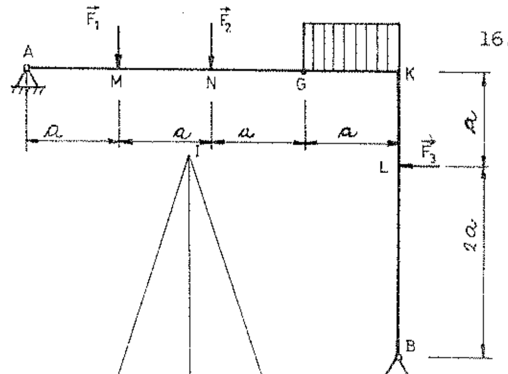
$M_B = 0$

$M_L = - S\cdot 1\cdot \sin 60^o = 4,35$ kNm

$M_E = - S\cdot 4 \sin 60^o - F_2\cdot 3 \sin 60^o = 4,39$ kNm



M_f



sl.5.16.

16. Za trozglobni nosač na sl.5.16. odrediti:

a) grafički i analitički reakcije u osloncima

b) nacrtati statičke dijagrame momenata savijanja, transverzalnih i aksijalnih sila.

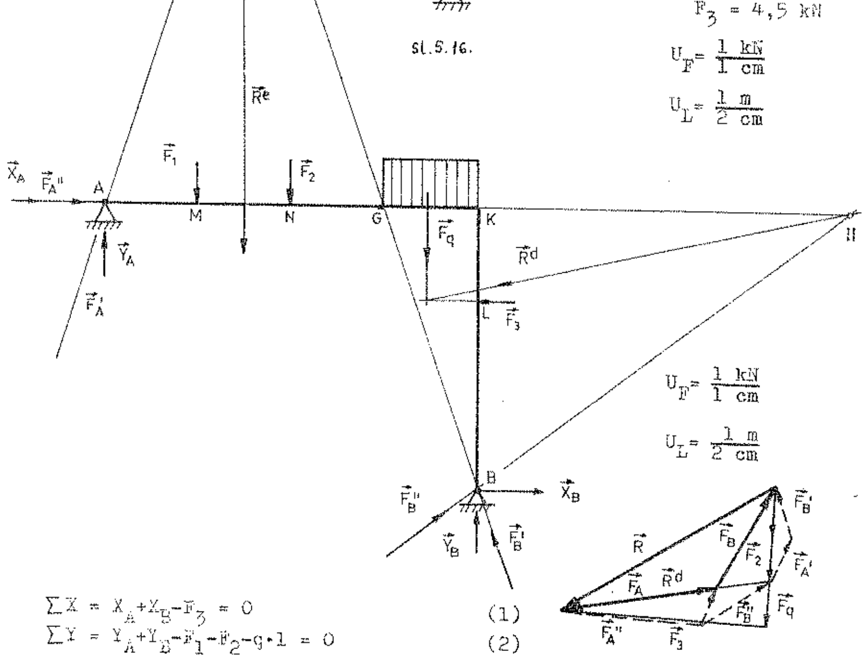
Zadano je: $F_1 = F_2 = 1$ kN

$q = 1 \frac{kN}{m}$ $a = 1m$

$F_3 = 4,5$ kN

$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{2\ cm}$



$U_F = \frac{1\ kN}{1\ cm}$

$U_L = \frac{1\ m}{2\ cm}$

$\sum X = X_A + X_B - F_3 = 0$ (1)

$\sum Y = Y_A + Y_B - F_1 - F_2 - q\cdot 1 = 0$ (2)

$\sum M_G^l = Y_A\cdot 3 - F_1\cdot 2 - F_2\cdot 1 = 0$ (3)

$\sum M_G^d = Y_B\cdot 1 - q\cdot 1\cdot 0,5 + X_B\cdot 3 - F_3\cdot 1 = 0$ (4)

(3) $Y_A = 1$ kN; $X_B = 1$ kN

(2) $Y_B = 2$ kN; $X_A = 3,5$ kN

$F_A = 3,6$ kN

$F_B = 2,2$ kN

Vrijednosti momenata savijanja u karakterističnim tačkama

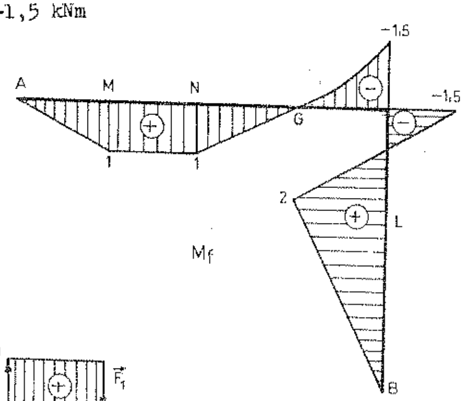
$M_A = 0$

$M_M = Y_A \cdot 1 = 1$ kNm

$M_k = Y_A \cdot 4 - F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 2 - F_q \cdot 0,5 = -1,5$ kNm

$M_L = X_B \cdot 2 = 2$ kNm

$M_k = X_B \cdot 4 - F_3 \cdot 1 = -1,5$ kNm



Vrijednosti aksijalnih sila u karakterističnim tačkama

Štap AK

$F_{AA} = -X_A = -3,5$ kN

$F_{AK} = -X_A = -3,5$ kN

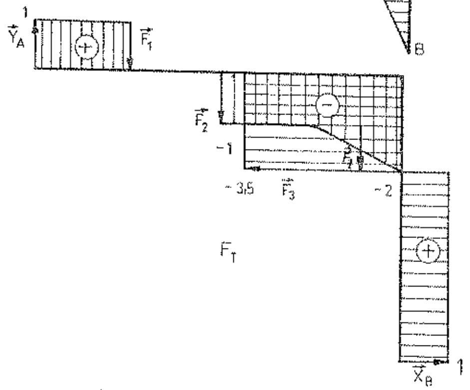
Dijagram zatvaraju transverzalne sile štapa BK a to su $X_B - F_3$

Štap BK

$F_{AB} = -Y_B = -2$ kN

$F_{AK} = -Y_B = -2$ kN

Dijagram u tački K zatvaraju transverzalne sile štapa AK $Y_A - F_1 - F_2 - F_q$



Vrijednosti transverzalnih sila u karakterističnim tačkama

Štap AK

$F_{TA} = Y_A = 1$ kN

$F^e_{TM} = Y_A = 1$ kN

$F^d_{TM} = Y_A - F_1 = 0$

$F_{TN} = Y_A - F_1 - F_2 = -1$ kN

$F_{TG} = Y_A - F_1 - F_2 = -1$ kN

$F_{TK} = Y_A - F_1 - F_2 - F_q = -2$ kN

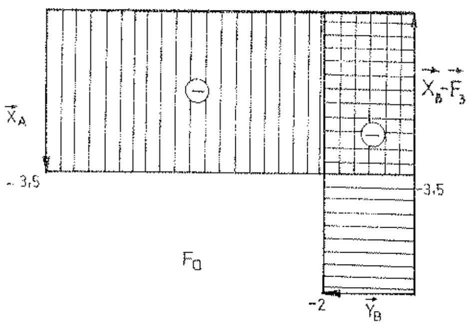
Štap BK

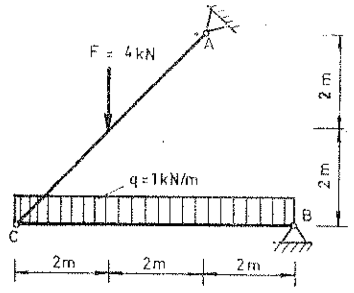
$F_{TB} = X_B = 1$ kN

$F^d_{TL} = X_B = 1$ kN

$F^e_{TL} = X_B - F_3 = -3,5$ kN

$F_{TK} = X_B - F_3 = -3,5$ kN





sl. 5.17

17. Zadani trozglob analitičkim i grafičkim putem odrediti otpore oslonaca i nacrtati statičke dijagrame momenata savijanja i transverzalnih sila. (sl. 5.17)

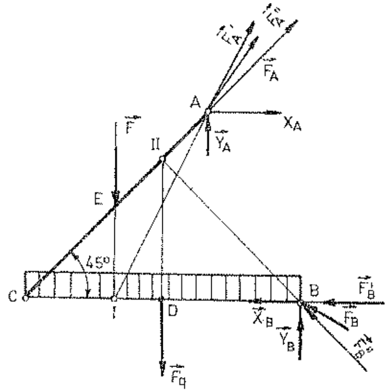
$U_F = \frac{2 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$

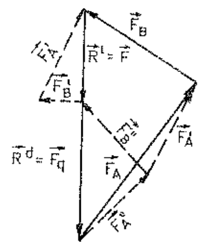
$U_L = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}}$

$F_A = 8,6$ kN

$F_B = 5,8$ kN

$F_q = 6q = 6$ kN





$\sum X = X_A - X_B = 0$ (1)

$\sum Y = Y_A + Y_B - F - F_q = 0$ (2)

$\sum M_B = Y_A \cdot 2 + X_A \cdot 4 - F_q \cdot 3 - F \cdot 4 = 0$ (3)

$\sum M_C^d = Y_B \cdot 6 - F_q \cdot 3 = 0$ (4)

(4) $Y_B = \frac{F_q}{2} = 3$ kN

(2) $Y_A = F + F_q - Y_B = 7$ kN

(3) $X_A = \frac{3F_q + 4F - 2Y_A}{4} = 5$ kN

(1) $X_A = X_B = 5$ kN

$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 8,6$ kN

$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 5,8$ kN

Vrijednosti momenata u karakterističnim tačkama

$M_A = 0$ $\quad M_D = Y_B \cdot 3 - \frac{F_q}{2} 1,5 = 4,5$ kNm

$M_B = 0$ $\quad M_E = Y_A \cdot 2 - X_A \cdot 2 = 4$ kNm

$M_C = 0$

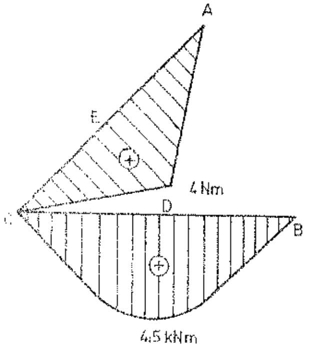
Transverzalne sile u karakterističnim tačkama

$F_{TA} = Y_A \cdot \cos 45^{o} - X_A \cdot \cos 45^{o} = \sqrt{2} = 1,41$ kN

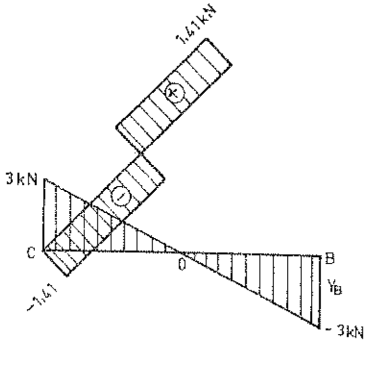
$F_{TE} = F_{TA} - F \cos 45^{o} = -\sqrt{2} = -1,41$ kN

$F_{TB} = -Y_B = -3$ kN

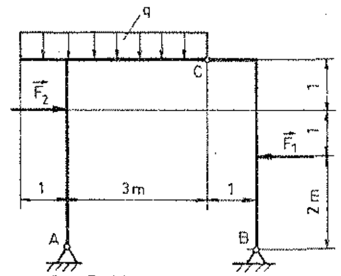
$F_{TC} = F_q - Y_B = 3$ kN



Dijagram momenata savijanja



Dijagram transverzalnih sila



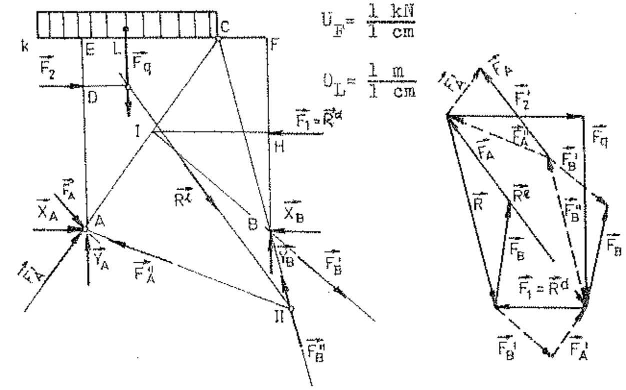
sl. 5.18.

18. Za dati trozglobni nosač ABC potrebno je odrediti
a) analitički i grafički reakcije u osloncima,
b) nacrtati dijagram momenata savijanja i transverzalnih sila.

Zadano je: $F_1 = 2$ kN, $F_2 = 3$ kN
$q = 1$ kN/m (sl. 5.18.)

$U_F = \frac{1 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$

$U_L = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}}$



$F_A = 2,3$ kN

$F_B = 2,3$ kN

$\sum X = \quad X_A - X_B + F_2 - F_1 = 0 \qquad (1)$

$\sum Y = \quad Y_A + Y_B - F_q = 0 \qquad (2)$

$\sum M_A = \quad Y_B \cdot 4 + F_1 \cdot 2 - F_q \cdot 1 - F_2 \cdot 3 = 0 \qquad (3)$

$\sum M_C^{d} = \quad Y_B \cdot 1 - X_B \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = 0 \qquad (4)$

(3) $\quad Y_B = \dfrac{1F_q + 3F_2 - 2F_1}{4} = 2,25$ kN

(2) $\quad Y_A = F_q - Y_B = 1,75$ kN

(4) $\quad X_B = \dfrac{1Y_B - 2F_1}{4} = -0,4375$ kN

(1) $\quad X_A = F_1 - F_2 + X_B = -1,4375$ kN

$F_A = 2,29$ kN $\qquad F_B = 2,292$ kN

Vertikalni štap AE

$M_A = 0$
$M_D = -X_A \cdot 3 = 4,3$ kNm,
$M_E = -X_A \cdot 4 - F_2 \cdot 1 = 2,75$ kNm

Vertikalni štap BF

$M_B = 0$
$M_H = -X_B \cdot 2 = 0,875$ kNm
$M_F = -X_B \cdot 4 - F_1 \cdot 2 = -2,25$ kNm

Horizontalni štap KF

$M_K = 0$
$M_E^{l} = -q \cdot 1 \ \frac{1}{2} = -0,5$ kNm
$M_E^{d} = -q \cdot 1 \ \frac{1}{2} - X_A \cdot 4 - F_2 \cdot 1 = 2,25$ kNm
$M_C = -q \cdot 2 \cdot 1 - X_A \cdot 4 - F_2 \cdot 1 + Y_A \cdot 1 = 2,5$ kNm
$M_G = 0$
$M_F = -F_q \cdot 3 - X_A \cdot 4 - F_2 \cdot 1 + Y_A \cdot 4 = -2,25$ kNm-provjera

Štap AE

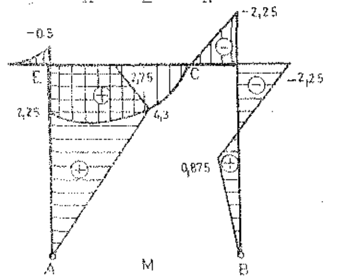
$F_{TA} = X_A = 1,4375$ kN
$F_{TD}^{e} = X_A = 1,4375$ kN
$F_{TD}^{d} = X_A - F_2 = -1,5625$ kN
$F_{TE} = X_A - F_2 = -1,5625$ kN

Štap KF

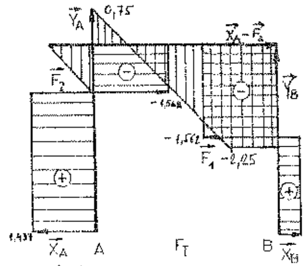
$F_{TK} = 0$
$F_{TE}^{e} = -q \cdot 1 = -1$ kN
$F_{TE}^{d} = -q \cdot 1 + Y_A = 0,75$ kN
$F_{TC} = -q \cdot 1 + Y_A - q \cdot 3 = -2,25$ kN
$F_{TF} = -q \cdot 1 + Y_A - q \cdot 3 = -2,25$ kN

Štap BF

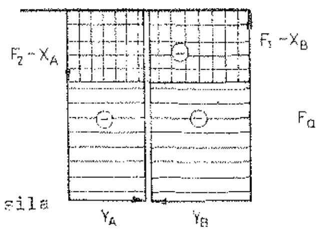
$F_{TB} = X_B = 0,4375$ kN
$F_{TH}^{d} = X_B = 0,4375$ kN
$F_{TH}^{e} = X_B - F_1 = -1,5625$ kN
provjera $F_{TF} = X_B - F_1 = -1,5625$ kN



Dijagrami momenata savijanja



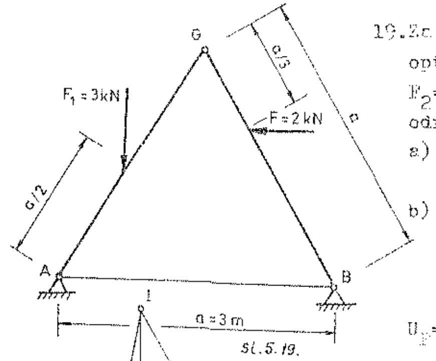
Dijagrami transverzalnih sila



Dijagrami aksijalnih sila

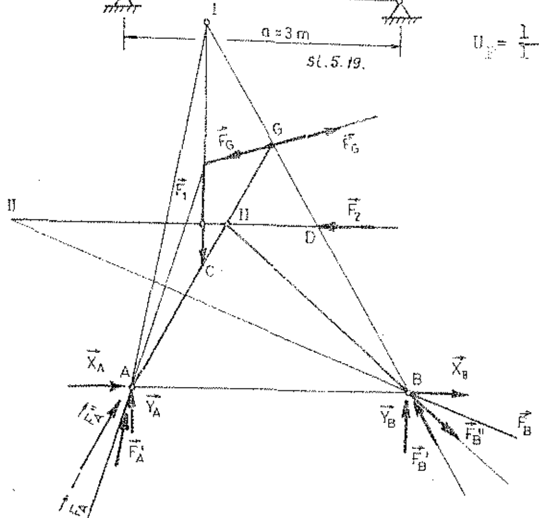
19. Za zadani trozglobni nosač, sl. 5.19, opterećen silama $F_1 = 3$ kN i $F_2 = 2$ kN i veličinom $a = 3$ m odrediti:

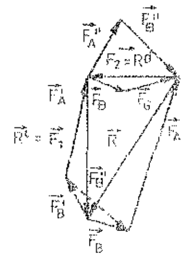
a) grafički i analitički otpore u osloncima A i B,
b) statičke dijagrame (momente uzdužne i poprečne sile).



Sl. 5.19.

$U_F = \frac{1 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$





$F_A = 3,55$ kN
$F_B = 0,98$

$$\sum X = X_A + X_B - F_2 = 0 \quad (1) \quad (1)$$
$$\sum Y = Y_A + Y_B - F_1 = 0 \quad (2) \quad (2)$$
$$\sum M_A = Y_B \cdot 3 + F_2 \frac{2}{3} \, 3 \sin 60^\circ - F_1 \frac{1}{2} \, 3 \cos 60^\circ = 0 \quad (3) \quad (3)$$
$$\sum M_G^{d} = Y_B \cdot 3 \cos 60^\circ + X_B \cdot 3 \sin 60^\circ - F_2 \frac{1}{3} \cdot 3 \sin 60^\circ = 0 \quad (4) \quad (4)$$

(3) $Y_B = -0,4$ kN
(4) $X_B = 0,898$ kN
(2) $Y_A = 3,4$ kN
(1) $X_A = 1,102$ kN

$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 3,57$ kN $\qquad F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 0,98$ kN

<u>Momenti savijanja</u>

$M_A = 0; \qquad M_B = 0$

$M_C = -X_A \frac{a}{2} \sin 60^{\circ} + Y_A \frac{a}{2} \cos 60^{\circ} = 1{,}118$ kNm

$M_D = X_B \frac{2}{3} a \sin 60^{\circ} + Y_B \frac{2}{3} a \cos 60^{\circ} = 0{,}577$ kNm

<u>Poprečne sile</u>

$F_{TA} = -X_A \sin 60^{\circ} + Y_A \cos 60^{\circ} = 0{,}745$ kN

$F_{TC} = -X_A \sin 60^{\circ} + Y_A \cos 60^{\circ} - F_1 \cos 60^{\circ} = -0{,}755$ kN

$F_{TB} = X_B \sin 60^{\circ} + Y_B \cos 60^{\circ} = 0{,}577$ kN

$F_{TD} = X_B \sin 60^{\circ} + Y_B \cos 60^{\circ} - F_2 \sin 60^{\circ} = -1{,}153$ kN

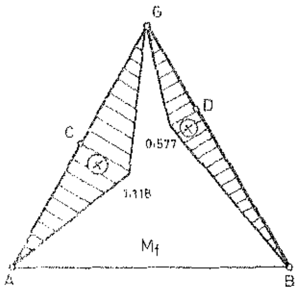
<u>Uzdužne sile</u>

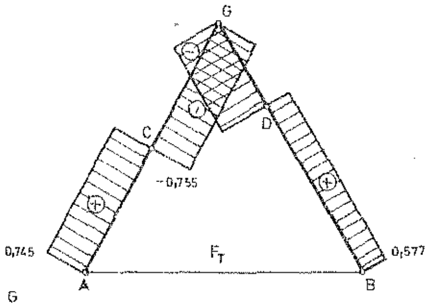
$F_{AA} = -X_A \cos 60^{\circ} - Y_A \sin 60^{\circ} = -3{,}5$ kN pritisak

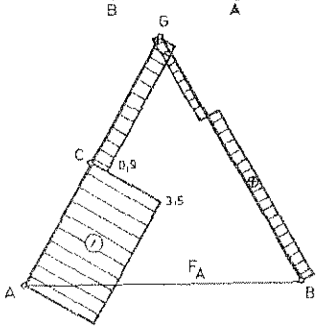
$F_{AC} = -X_A \cos 60^{\circ} - Y_A \sin 60^{\circ} + F_1 \sin 60^{\circ} = -0{,}9$ pritisak

$F_{AB} = X_B \cos 60^{\circ} - Y_B \sin 60^{\circ} = 0{,}7954$ kN istezanje

$F_{AD} = X_B \cos 60^{\circ} - Y_B \sin 60^{\circ} - F_2 \cos 60^{\circ} = -0{,}205$ pritisak







6. RAVNOTEŽA U PROSTORU

Ako na tijelo u prostoru djeluje sistem sila onda se djelovanje sila može svesti na glavni rektor i glavni moment.

6.1. Glavni vektor

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_i$$

Njegove projekcije na ose jednake su zbiru projekcija svih sila na te ose:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{ix}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{iy}$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{iz}$$

Ukupan intenzitet rezultante svih sila

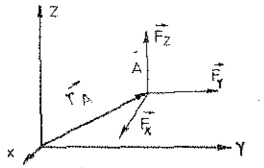
$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

a pravac vektora računa se na osnovu uglova koje rektor zaklapa sa osama koordinatnog sistema

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$$

6.2. Glavni moment

Glavni moment ili moment rezultante prostornog sistema sučeljnih sila za osu jednak je zbiru momenata komponentnih sila za tu osu



sl.6.4.

$$M_x = y_A F_z - z_A F_y$$

$$M_y = z_A F_x - x_A F_z$$

$$M_z = x_A F_y - y_A F_x$$

Moment neke sile za osu je umnožak sile i najkraćeg rastojanja te sile za osu. Moment sile nastoji da zarotira tijelo oko te ose. Uzimaće se da je moment pozitivan ako je suprotnog smjera od smjera kazaljke na satu.

Sila koja je paralelna osi ne pravi moment za tu osu, jer ne može izazvati rotaciju tijela oko ose nego samo translatorno pomjeranje. Sila čiji pravac siječe osu nema rastojanja u odnosu na osu, pa ni takva sila ne pravi moment za osu koju siječe.

6.3. Uslovi ravnoteže prostornog sistema sila

Da bi tijelo pod djelovanjem prostornog sistema sila bilo u ravnoteži mora biti ispunjeno 6 uslova ravnoteže

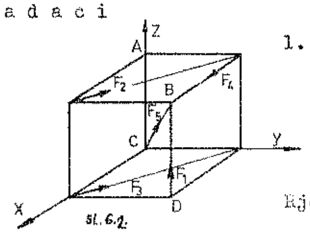
$\sum X = 0 \qquad \sum Y = 0 \qquad \sum Z = 0$ tj. da tijelo pod djelovanjem sila nema pomjeranja ni u jednom od 3 pravca u prostoru

$\sum M_x = 0 \qquad \sum M_y = 0 \qquad \sum M_z = 0$ tj. da tijelo pod djelovanjem sila nema rotacija ni oko jedne ose koordinatnog sistema.

6.4. Rješavanje zadataka

Od vezanog tijela u prostoru treba napraviti slobodno, tako da se veze uklone, a njihovo djelovanje zamijeni reakcijama veza. Koordinatni sistem treba postaviti tako da je pogodan za projektovanje sila. Pod djelovanjem aktivnih sila i reakcija veza tijelo je u ravnoteži i važe uslovi ravnoteže sistema sila u prostoru navedeni u tački 6.3. Postavljeni uslovi ravnoteže predstavljaju sistem jednačine sa nepoznatim reakcijama iz kojih se određuju nepoznate sile.

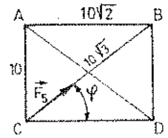
Z a d a c i



Sl. 6.2.

1. Na kocku, strane a=10 cm, djeluju sile prikazane na sl.6.2.. Veličine svih sila su jednake i iznose F=10 kN. Svesti ovaj sistem sila na prostiji oblik.

Rješenje:



$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Projekcije glavnog vektora na ose x, y, z, $F_x = -F_2\cos 45^\circ - F_3\cos 45^\circ + F_4 + F_5\cos 45^\circ\cos\varphi = -10\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\frac{\sqrt{2}}{2} + 10 + 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}67$ kN

$F_y = F_2\sin 45^\circ + F_3\sin 45^\circ + F_5\cos\varphi . \sin 45^\circ$

$F_y = 10\frac{\sqrt{2}}{2} + 10\frac{\sqrt{2}}{2} + 10\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2} = 10\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 19{,}87$ kN

$F_z = F_1 + F_5\sin\varphi$

$F_z = 10 + 10\frac{\sqrt{3}}{3} = 10\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 15{,}77$ kN

Intenzitet glavnog vektora

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(1{,}67)^2 + (19{,}87)^2 + (15{,}77)^2} = 25{,}43 \text{ kN}$$

Uglovi koje glavni vektor zaklapa sa pravcima ose x, y, z

$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{1{,}67}{25{,}43} = 0{,}0657 \qquad \alpha = 86{,}2^\circ$

$\cos\beta = \frac{F_y}{F} = \frac{19{,}87}{25{,}43} = 0{,}781 \qquad \beta = 38{,}6^\circ$

$\cos\gamma = \frac{F_z}{F} = \frac{15{,}77}{25{,}43} = 0{,}620 \qquad \gamma = 51{,}67^\circ$

Projekcije glavnog momenta na ose

$M_x = F_1 a - F_2 a \sin 45^\circ$

$M_x = 10\cdot 10 - 10\cdot 10\frac{\sqrt{2}}{2} = 100\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 29{,}29$ kNcm

$M_y = -F_1 a + F_4 a - F_2 a \cos 45^\circ$

$M_y = -10\cdot 10 + 10\cdot 10 - 10\cdot 10\frac{\sqrt{2}}{2} = -50\sqrt{2} = -70{,}7$ kNcm

$M_z = F_3 a \sin 45^\circ + F_2 a \sin 45^\circ - F_4 a$

$M_z = 10\cdot 10\frac{\sqrt{2}}{2} + 10\cdot 10\frac{\sqrt{2}}{2} - 10\cdot 10 = 100(\sqrt{2} - 1) = 41{,}42$ kNcm

Intenzitet glavnog momenta

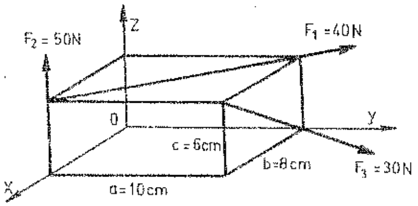
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(29,29)^2+(70,7)^2+(41,42)^2} = 87,01 \text{ kNcm}$$

Uglovi koje glavni moment zaklapa sa pravcima osa

$$\cos\alpha_1 = \frac{M_x}{M} = \frac{29,29}{87,01} = 0,3366 \qquad \alpha_1 = 70,33^\circ$$

$$\cos\beta_1 = \frac{M_y}{M} = -\frac{70,7}{87,01} = -0,8125 \qquad \beta_1 = 144,34^\circ$$

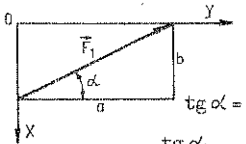
$$\cos\gamma_1 = \frac{M_z}{M} = \frac{41,42}{87,01} = 0,4760 \qquad \gamma_1 = 61,57^\circ$$



sl.6.3.

2. Tri sile djeluju na pravougaoni paralelepiped prema sl.6.3. Svesti zadani sistem sile na glavni vektor i glavni moment u tački O.

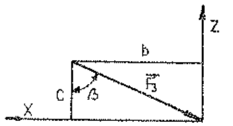
Rješenje:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{4}{\sqrt{41}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{5}{\sqrt{41}}$$



Projekcije glavnog vektora na ose

$$F_x = -F_1 \sin\alpha - F_3 \sin\beta$$

$$F_x = -40\frac{4}{\sqrt{41}} - 30\frac{4}{5} = -48,99 \text{ N}$$

$$F_y = F_1 \cos\alpha$$

$$F_y = 40\frac{5}{\sqrt{41}} = 31,23 \text{ N}$$

$$F_z = -F_3 \cos\beta + F_2$$

$$F_z = -30\frac{3}{5} + 50 = 32 \text{ N}$$

Intenzitet glavnog vektora

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{(-48,99)^2 + 31,23^2 + 32^2}$$

$$F = 66,33 \text{ N}$$

Uglovi koje glavni vektor zaklapa sa pravcima osa x, y, z

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{c} = \frac{4}{3} \qquad \sin\beta = \frac{4}{5} \qquad \cos\beta = \frac{3}{5}$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{F_x}{F} = -\frac{48,99}{66,33} = -0,7386 \qquad \alpha_1 = 137,6^\circ$$

$$\cos\beta_1 = \frac{F_y}{F} = \frac{31,23}{66,33} = 0,4718 \qquad \beta_1 = 61,8^\circ$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{F_z}{F} = \frac{32}{66,33} = 0,4824 \qquad \gamma_1 = 61,2^\circ$$

Projekcije glavnog momenta na ose

$$M_x = -F_1\, c \cos\alpha - F_3\, a \cos\beta$$

$$M_x = -40\frac{5}{\sqrt{41}}6 - 30\frac{3}{5}10 = -367,41 \text{ Ncm}$$

$$M_y = -F_1\, c \sin\alpha - F_2\, b$$

$$M_y = -40\cdot 6\frac{5}{\sqrt{41}} - 50\cdot 8 = -549,93 \text{ Ncm}$$

$$M_z = F_1\, b \cos\alpha + F_3\, a \sin\beta$$

$$M_z = 40\cdot 8\frac{4}{\sqrt{41}} + 30\cdot 10\frac{4}{5} = 489,88 \text{ Ncm}$$

Intenzitet glavnog momenta

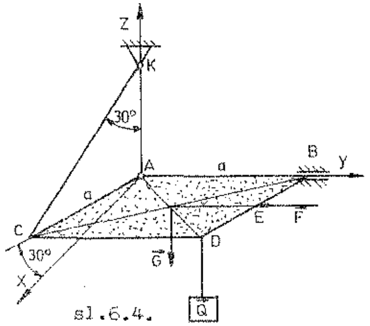
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(367,41)^2 + (549,93)^2 + (489,88)^2} = 823,04 \text{ Ncm}$$

Uglovi koje glavni moment zaklapa sa pravcima osa x, y, z

$$\cos\alpha_2 = \frac{M_x}{M} = -\frac{367,41}{823,04} = -0,4464 \qquad \alpha_2 = 116,5^\circ$$

$$\cos\beta_2 = \frac{M_y}{M} = -\frac{549,93}{823,04} = -0,6682 \qquad \beta_2 = 131,9^\circ$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{M_z}{M} = 0,5952 \qquad \gamma_2 = 53,5^\circ$$



sl.6.4.

3. Homogena kvadratna ploča, težine G i stranica a, vezana je sfernim zglobom A i cilindričnim B za postolje, a u datom položaju prema sl.6.4. održava je uže KC. Za ploču je, u tački D, okačen teret Q=2 G, a u tački E djeluje sila F=G. Odrediti reakcije u ležištima i silu u užetu KC.

Rješenje:

$$\sum X = X_A + X_B - S\cos 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

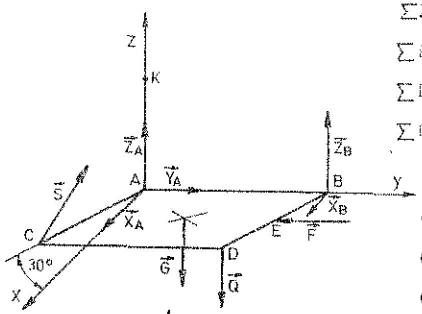
$$\sum Y = Y_A - F = 0 \qquad (2)$$

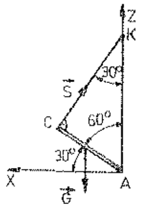
$$\sum Z = Z_A + Z_B + S\sin 60^\circ - G - Q = 0 \qquad (3)$$

$$\sum M_x = -G\frac{a}{2} - Qa + Z_B a + F\frac{a}{2}\sin 30^\circ = 0 \qquad (4)$$

$$\sum M_y = G\frac{a}{2}\cos 30^\circ + Q\,a\cos 30^\circ - S\,a = 0 \qquad (5)$$

$$\sum M_z = -X_B a + F\frac{a}{2}\cos 30^\circ = 0 \qquad (6)$$





(2) $Y_A = F = G$

(6) $X_B = \frac{-F}{2}\cos 30^\circ = -\frac{G\sqrt{3}}{4}$

(5) $S = Q\cos 30^\circ + \frac{G}{2}\cos 30^\circ = \frac{5}{4}\sqrt{3}G$

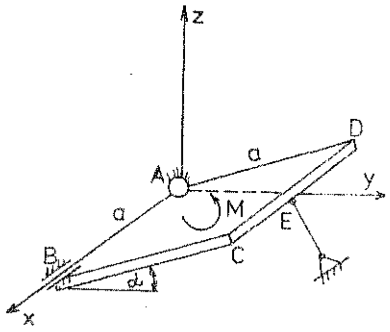
(4) $Z_B = \frac{G}{2} + Q - \frac{F}{2}\sin 30^\circ = \frac{9}{4}G$

(3) $Z_A = G + Q - S\sin 60^\circ - Z_B = -\frac{9}{8}G$

(1) $X_A = S\cos 60^\circ - X_B = \frac{7\sqrt{3}G}{8}$

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 2{,}136\ G$$

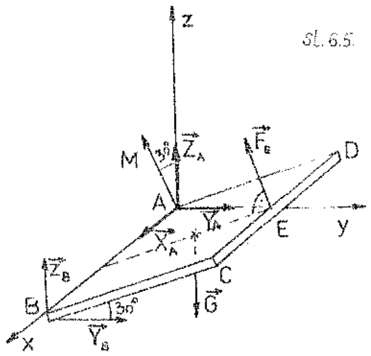
$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 2{,}29\ G$$



4. Homogena kvadratna ploča na sl. 6.5 stranice a i težine G vezana je sfernim i cilindričnim zglobom u tačkama A i B. U tački E na sredini strane CD ploča je za podlogu vezana pomoću štapa koji je okomit na ploču. Ploča sa horizontalnom ravni xy zatvara ugao $\alpha = 30^\circ$. U ravni ploče djeluje moment sprega M. Odrediti reakcije oslonaca.

sl. 6.5

Zadano je G = 10 kN, a = 1 m, M = 10 kNm.



Rješenje:

$$\sum X = X_A = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y = Y_A + Y_B - F_E\cos 60^\circ = 0 \qquad (2)$$

$$\sum Z = Z_A + Z_B + F_E\sin 60^\circ - G = 0 \qquad (3)$$

$$\sum M_x = F_E\,a - G\frac{a}{2}\cos 30^\circ = 0 \qquad (4)$$

$$\sum M_y = -Z_B\,a - F_E\frac{a}{2}\sin 60^\circ + G\frac{a}{2} - M\sin 30^\circ = 0 \qquad (5)$$

$$\sum M_z = Y_B\,a - F_E\frac{a}{2}\cos 60^\circ + M\cos 30^\circ = 0 \qquad (6)$$

(1) $X_A = 0$

(4) $F_E = \frac{G}{2}\cos 30^\circ = 2{,}5\sqrt{3} = 4{,}33$ kN

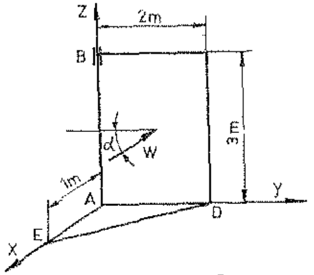
(5) $Z_B = \frac{G}{2} - \frac{F_E}{2}\sin 60^\circ - \frac{M}{a}\sin 30^\circ = -1{,}875$ kN

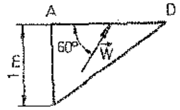
(6) $Y_B = \frac{F_E}{2}\cos 60^\circ - \frac{M}{a}\cos 30^\circ = -\frac{70\sqrt{3}}{16} = -7{,}58$ kN

(2) $Y_A = F_E\cos 60^\circ - Y_B = \frac{90\sqrt{3}}{16} = 9{,}74$ kN

(3) $Z_A = G - Z_B - F_E\sin 60^\circ = \frac{130}{16} = 8{,}125$ kN

$F_A = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} = 12{,}68$ kN $\quad F_B = \sqrt{Y_B^2 + Z_B^2} = 7{,}8$ kN





sl.6.6.

5. Pravougaona vrata ABCD težine $G=150$ N dimenzija 2x3 m mogu se okretati oko osovine AB. U tački A vrata su vezana sfernim zglobom a u tački B pomičnim osloncem. Vjetar jačine 100 N/m^2 djeluje na vrata paralelno ravnini x A y pod uglom od $\alpha=60^\circ$. U tački D vrata su vezana užetom za tačku E, gdje je AE=1 m. Odrediti veličine reakcija u osloncima i silu u užetu DE. (sl.6.6.)

Rješenje:

$$\sum X = X_A+X_B+S\sin\alpha-W\sin 60^\circ=0 \qquad (1)$$
$$\sum Y = Y_A+Y_B-S\cos\alpha+W\cos 60^\circ=0 \qquad (2)$$
$$\sum Z = Z_A-G=0 \qquad (3)$$
$$\sum M_x = -G\cdot 1-W\cdot 1{,}5\cos 60^\circ-Y_B\cdot 3=0 \qquad (4)$$
$$\sum M_y = X_B\cdot 3-W\cdot 1{,}5\sin 60^\circ=0 \qquad (5)$$
$$\sum M_z = -S\cdot 2\sin\alpha+W\sin 60^\circ\cdot 1=0 \qquad (6)$$

$$W=p\cdot A=100\cdot 6=600\ \mathrm{N}$$

(6) $S=\dfrac{W\cdot 1\sin 60^\circ}{2\sin\alpha}=580{,}96$ N

(5) $X_B=\dfrac{W\cdot 1{,}5\sin 60^\circ}{3}=259{,}8$ N

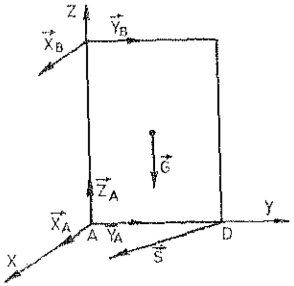
(4) $Y_B=\dfrac{-G\cdot 1+W\cdot 1{,}5\cos 60^\circ}{3}=-200$ N

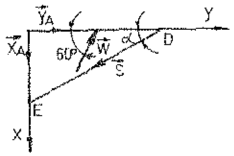
(3) $Z_A=G=150$ N

(2) $Y_A=S\cos\alpha-W\cos 60^\circ-Y_B=419{,}63$ N

(1) $X_A=W\sin 60^\circ-S\sin\alpha-X_B=0$

$$F_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=445{,}63\ \mathrm{N}$$
$$F_B=\sqrt{X_B^2+Y_B^2}=327{,}23\ \mathrm{N}$$



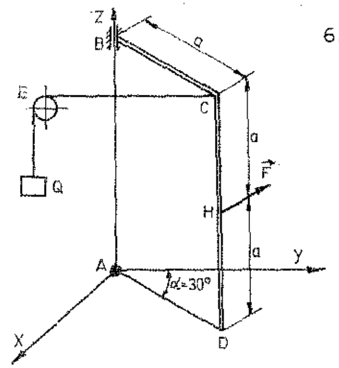


$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{2}$

$\sin\alpha=\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$

$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$



sl.6.7.

6. Vertikalno postavljena homogena vrata ABCD težine G i strana a i 2a nalaze se u ravnotežnom položaju. U tački C vezano je uže CE prebačeno preko kotura E, na čijem je kraju vezan teret Q. Dio CE užeta paralelan je osi y. Vrata su u ravnoteži pod uglom $\alpha=30^\circ$ u odnosu na vertikalnu ravan Axz. Odrediti veličinu sile F koja djeluje upravno na vrata u tački H (DH=CH=AD=BC=a) kao i sve reakcije veza. Uzeti Q=2 G. (sl.6.7.)

Rješenje:

$$\sum X = X_A+X_B-F\sin 60^\circ=0 \qquad (1)$$
$$\sum Y = Y_A+Y_B+F\cos 60^\circ-Q=0 \qquad (2)$$
$$\sum Z = Z_A-G=0 \qquad (3)$$
$$\sum M_x = -G\,\frac{a}{2}\cos 30^\circ-F\,a\cos 60^\circ - {}+Q\cdot 2a-Y_B\cdot 2a=0 \qquad (4)$$
$$\sum M_y = G\,\frac{a}{2}\sin 30^\circ-F\,a\sin 60^\circ+X_B\,2a=0 \qquad (5)$$
$$\sum M_z = F\,a-Q\,a\sin 30^\circ=0 \qquad (6)$$

(6) $F=Q\sin 30^\circ=G$

(3) $Z_A=G$

(4) $Y_B=\dfrac{Q2a-Fa\cos 60^\circ-\frac{G}{2}a\cos 30^\circ}{2a}$

$Y_B=\dfrac{G}{8}(14-\sqrt{3})$

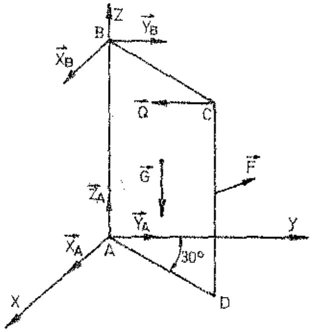
(2) $Y_A=Q-F\cos 60^\circ-Y_B=-\dfrac{G}{8}(2-\sqrt{3})$

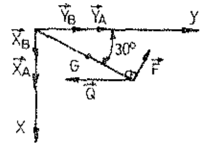
(5) $X_B=\dfrac{Fa\sin 60^\circ-G\frac{a}{2}\sin 30^\circ}{2a}$

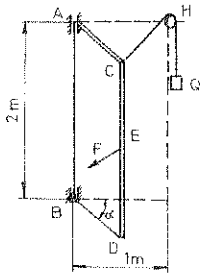
$X_B=\dfrac{G}{8}(2\sqrt{3}-1)$

(1) $X_A=F\sin 60^\circ-X_B=\dfrac{G}{8}(2\sqrt{3}+1)$

$$F_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+Z_A^2}=1{,}145\ G$$
$$F_B=\sqrt{X_B^2+Y_B^2}=1{,}564\ G$$







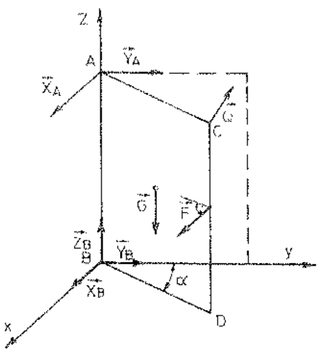
sl.6.8.

7. Vrata težine G=1oo N visine 2 i širine 1 m učvršćena su u tačkama A i B. U tački C privezano je uže koje je prebačeno preko koloture H koji odgovara položaju zatvorenih vrata. Na drugom kraju užeta obješen je teret Q=1o N. Trenje se zanemaruje. Odredi:

a) silu F koja djeluje okomito na vrata koja je potrebna da vrata ostanu otvorena pod uglom $\alpha=30^\circ$ (CE=ED),

b) reakcije u ležištima vrata A i B. (sl.6.8.)

Rješenje:



$$\Sigma X = X_A + X_B + F\cos 30^\circ - Q\cos 15^\circ = 0 \quad (1)$$

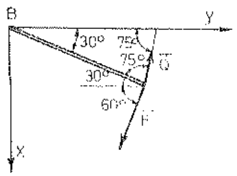
$$\Sigma Y = Y_A + Y_B + Q\sin 15^\circ - F\sin 30^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma Z = Z_B - G = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_x = -Q\cdot 2\sin 15^\circ - G\frac{1}{2}\cos 30^\circ + F\cos 60^\circ\cdot 1 - Y_A\cdot 2 = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_y = -Q\cdot 2\cos 15^\circ + F\cdot 1\cos 30^\circ + G\frac{1}{2}\sin 30^\circ + X_A\cdot 2 = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_z = Q\cos 15^\circ\cdot 1 - F\cdot 1 = 0 \quad (6)$$



(6) $F = Q\cos 15^\circ = 9{,}66$ N

(3) $Z_B = G = 100$ N

(5) $X_A = \dfrac{-\frac{G}{2}\sin 30^\circ - F\cos 30^\circ + 2Q\cos 15^\circ}{2}$

$X_A = -7{,}022$ N

(1) $X_B = 8{,}317$ N

(4) $Y_A = \dfrac{F\cos 60^\circ - \frac{G}{2}\cos 30^\circ - 2Q\sin 15^\circ}{2}$

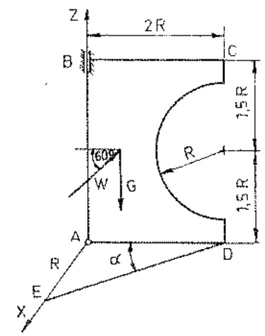
$Y_A = -21{,}825$ N

(2) $Y_B = F\sin 30^\circ - Q\sin 15^\circ - Y_A$

$Y_B = 24{,}065$ N

$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 22{,}93$ N

$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2 + Z_B^2} = 103{,}2$ N



sl.6.9.

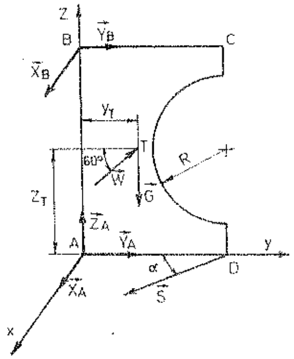
8. Homogena ploča oblika i dimenzija kao na sl.6.9. vezana je za vertikalnu osovinu u tački A pomoću sfernog, a u tački B pomoću cilindričnog zgloba. U tački D vezano je uže čiji je drugi krja vezan za podlogu u tački E. Težina ploče je G=5o kN, a na ploču djeluje vjetar $w=10\ \frac{kN}{m^2}$. Odrediti sve reakcije veza. Zadano je:
AC=AD=2R, AB=3R, EA=R, R=1 m.

Rješenje:

Težište ploče ABCD

$$Z_T = \frac{\Sigma A_i Z_i}{\Sigma A_i} = 1{,}5\ \text{m}$$

$$y_T = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{2R\cdot 3R\cdot R - \frac{R^2\pi}{2}\left(2R - \frac{4R}{3\pi}\right)}{2R\cdot 3R - \frac{R^2\pi}{2}}$$



$y_T = 0{,}797$ m

$W = A\,w = \left(6R^2 - \frac{R^2\pi}{2}\right)10 = 44{,}3$ kN

$$\Sigma X = X_A + X_B + S\sin\alpha - W\sin 60^\circ = 0 \quad (1)$$

$$\Sigma Y = Y_A + Y_B - S\cos\alpha + W\cos 60^\circ = 0 \quad (2)$$

$$\Sigma Z = Z_A - G = 0 \quad (3)$$

$$\Sigma M_x = G\,y_T + W\,Z_T\cos 60^\circ + Y_B\cdot 3R = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma M_y = X_B 3R - W\,Z_T\sin 60^\circ = 0 \quad (5)$$

$$\Sigma M_z = S\,2R\sin\alpha - W\,y_T\sin 60^\circ = 0 \quad (6)$$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{EA}{AD} = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2}$

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

(3) $Z_A = G = 50$ kN

(4) $Y_B = -\dfrac{G\,y_T + W\,Z_T\cos 60^\circ}{3R} = -24{,}36$ kN

(5) $X_B = \dfrac{W\,Z_T\sin 60^\circ}{3R} = 19{,}18$ kN

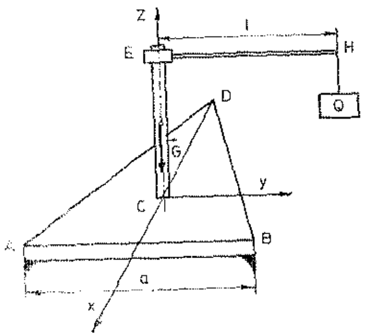
(6) $S = \dfrac{W\,y_T\sin 60^\circ}{2R\sin\alpha} = 34{,}19$ kN

(2) $Y_A = S\cos\alpha - W\cos 60^\circ - Y_B = 32{,}79$ kN

(1) $X_A = W\sin 60^\circ - S\sin\alpha - X_B = 3{,}85$ kN

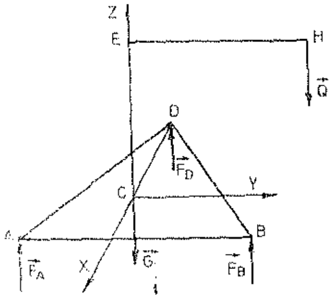
$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2} = 59{,}92$ kN

$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 31$ kN



sl.6.1o.

9. Stativ ima osnovu ravnostranog trougla sa stranicama a=4o cm. Težina stuba stativa koji je učvršćen u težištu osnove je G=12o N. Dužina pokretnog dijela EH=l=6o cm u ravnotežnom položaju je paralelna sa stranicom AB osnove. (sl.6.1o)
Odredi: a) najveću vrijednost tereta Q u tački H, a da ne dodje do preturanja;
b) za zadani Q=3o N izračunati veličinu reakcije u tačkama A, B i D. Oslonci AB i D oslanjaju se na glatku površinu.



Rješenje:

$\sum X = 0$ (1)

$\sum Y = 0$ (2)

$\sum Z = F_A + F_B + F_D - Q - G = 0$ (3)

$\sum M_x = F_B \frac{a}{2} - F_A \frac{a}{2} - Q\,L = 0$ (4)

$\sum M_y = F_D \frac{2}{3} - (F_A + F_B)\frac{1}{3} = 0$ (5)

$\sum M_z = 0$

$F_A + F_B + F_D - Q - 12o = 0$ (3)

$2\,F_D - F_A - F_B = 0$ (5)

(3)+(5) $3F_D = G + Q \qquad F_D = \frac{G+Q}{3}$

(4)+(5) $F_B - F_A = \frac{2L}{a}\,Q$

$F_B + F_A = 2\,\frac{G+Q}{3}$

$F_B = \frac{1}{3}\,(G+Q) + \frac{L}{a}\,Q$

$F_A = \frac{1}{3}\,(G+Q) - \frac{L}{a}\,Q$

Reakcija F_A ne može biti negativna pa postoji uslov

$\frac{1}{3}\,(G+Q) - \frac{L}{a}\,Q \quad 0$

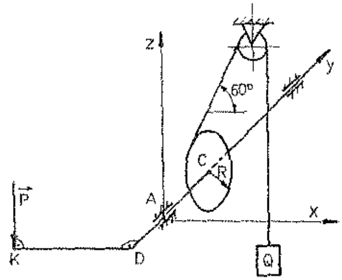
$Q < 34,3$ N

b) Za Q = 3o N

$F_D = \frac{1}{3}\,(G+Q) = 5o$ N

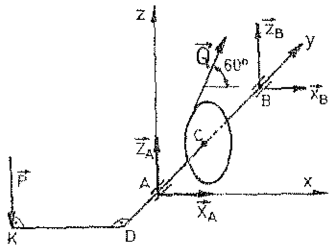
$F_A = \frac{1}{3}\,(G+Q) - \frac{L}{a}\,Q = 5$ N

$F_B = \frac{1}{3}\,(G+Q) + \frac{L}{a}Q = 95$ N



sl.6.11.

1o. Pomoću čekrka prikazanog na sl.6.11. podiže se ravnomjerno teret Q=1oo kN. Poluprečnik doboša R=5 cm, dužina ručice KD=4o cm, dužina DA=3o cm, AC=4o cm, CB=6o cm. Uže se odvija sa doboša u pravcu tangente nagnute pod uglom od 6o° prema horizontali. Odrediti pritisak P na ručicu DK kao i otpore oslonaca A i B za položaj čekrka kad je ručica DK horizontalna.



Rješenje:

$\sum X = X_A + X_B + Q \cos 6o^o = 0$ (1)

$\sum Y = 0$ (2)

$\sum Z = Z_A + Z_B + Q \sin 6o^o - P = 0$ (3)

$\sum M_x = Z_B \overline{AB} + Q\,\overline{AC} \sin 6o^o + P\,\overline{AD} = 0$ (4)

$\sum M_y = Q\,R - P\,\overline{KD} = 0$ (5)

$\sum M_z = Q\,\overline{AC} \cos 6o^o + X_B\,\overline{AB} = 0$ (6)

(6) $X_B = \frac{Q\,AC \cos 6o^o}{AB} = -\,2o$ kN

(5) $P = \frac{Q\,R}{KD} = 12,5$ kN

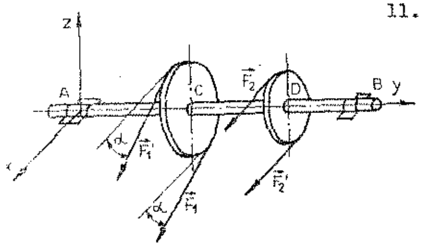
(4) $Z_B = -\,\frac{P\,\overline{AD} + Q\,\overline{AC} \sin 6o^o}{AB} = -\,38,4$ kN

(3) $Z_A = P - Q \sin 6o^o - Z_B = -\,35,7$ kN

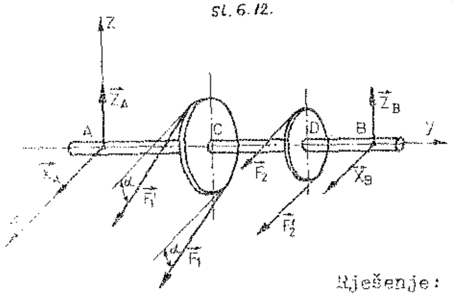
(1) $X_A = -\,Q \cos 6o^o - X_B = -\,3o$ kN

$F_A = \sqrt{X_A^{\,2} + Z_A^{\,2}} = 46,63$ kN

$F_B = \sqrt{X_B^{\,2} + Z_B^{\,2}} = 43,29$ kN



sl. 6.12.



11. Na vratilu AB dužine L=1,5 m i težine G=1oo N nalaze se dvije remenice poluprečnika r_1=2o mm i r_2=15 mm i težina Q_1=3oo N, Q_2=25o N. Remenice su raspoređene na dužinama AC=o,5 m AD=1 m od lijevog ležišta A. Remen na prvoj remenici C gradi sa pravcem horizontale ugao α= 3o°, a sile su F_1'=2 F_1. Obje grane remena na drugoj remenici su horizontalne, a sile u njima su F_2' = 2F_2=24oo N. Odrediti veličine sila u granama remena na prvoj remenici, kao i otpore cilindričnih ležišta A i B (sl.6.12).

Rješenje:

$$\Sigma X = 0 \quad X_A+X_B+F_2+F_2'+F_1 \cos 3o^\circ+F_1'\cos 3o^\circ= 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = 0 \qquad (2)$$

$$\Sigma Z = Z_A+Z_B-F_1 \sin 3o^\circ-F_1' \sin 3o^\circ-G-Q_1-Q_2= 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma M_x= Z_B\cdot\overline{AB}-F_1 \sin 3o\ \overline{AC}-F_1' \sin 3o\ \overline{AC}-G\ \frac{\overline{AB}}{2}-Q_1\ \overline{AC}-Q_2\ \overline{AD} = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma M_y = F_1' r_1-F_1 r_1-F_2 r_2 + F_2' r_2 = 0 \qquad (5)$$

$$\Sigma M_z = X_B\ \overline{AB}+F_2\ \overline{AD}+F_2'\ \overline{AD}+F_1 \cos 3o^\circ\ \overline{AC}+F_1' \cos 3o^\circ\ \overline{AC} = 0 \qquad (6)$$

pošto je $F_2' = 2\ F_2$ = 24oo N tj. F_2 = 12oo N i $F_1' = 2\ F_1$ iz

$$(5)\quad 2\ F_1\ r_1-F_1\ r_1-F_2\ r_2+ 2\ F_2\ r_2 = 0$$

$$F_1\ r_1=F_2\ r_2$$

$$F_1= \frac{F_2\ r_2}{r_1} = \frac{12oo\cdot15}{2o} = 9oo\ N$$

$$F_1' = 2\ F_1 = 18oo\ N$$

$$(6)\ X_B= -\frac{3F_2 1+3F_1\cos 3o^\circ\cdot o,5}{1,5} = -(24oo+9oo\sqrt{3}) = -3958,8\ N$$

$$(1)\ X_A= -(X_B+3F_2+3F_1 \cos 3o^\circ) = -(12oo+45o\sqrt{3}) = -1979,4\ N$$

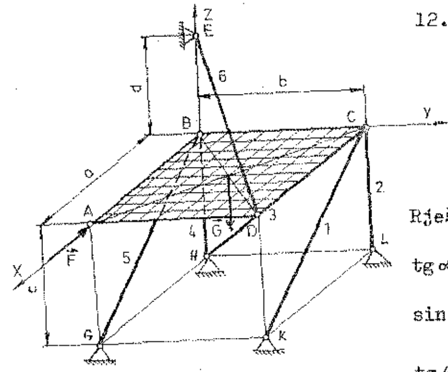
$$(4)\ Z_A= \frac{3F_1 \sin 3o^\circ\cdot o,5+G\cdot o,75+Q_1\ o,5+Q_2\ 1}{1,5} = 766,7\ N$$

$$(3)\ Z_A = 3F_1 \sin 3o^\circ+G+Q_1+Q_2-Z_B = 1233,3\ N$$

$$F_A = \sqrt{X_A^2 + Z_A^2} = 2332,2\ N$$

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Z_B^2} = 4o32,3\ N$$

126 126



sl.6.13.

12. Ploča axb, težine G=6 kN oslanja se na štapove prema sl.6.13. Duž stranice AB djeluje sila F=9 kN. Odrediti sile u štapovima ako je a=b=5 m, c=4 m, d=2 m.

Rješenje:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}, \quad \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

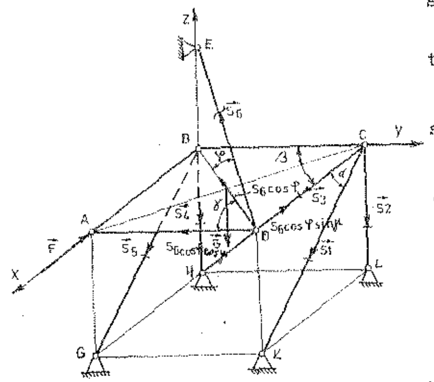
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{4}{5}$$

$$\sin\beta = \frac{4}{\sqrt{41}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}}, \quad \cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{27}}$$

$$\gamma = 45^\circ$$



KC-štap 1	∢ HCB = β
LC-štap 2	∢ BDE = φ
HC-štap 3	∢ ADB = γ
HB-štap 4	∢ DCK = α
GB-štap 5	
DE-štap 6	

$$\Sigma X = S_1 \cos\alpha + S_5 \cos\alpha - S_6 \cos\varphi \sin\gamma - F = 0 \qquad (1)$$

$$\Sigma Y = -S_3 \cos\beta - S_6 \cos\varphi \cos\gamma = 0 \qquad (2)$$

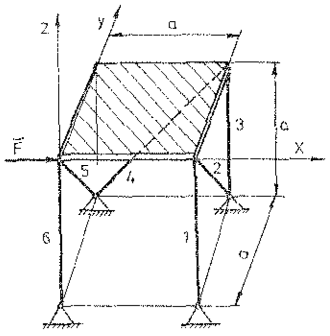
$$\Sigma Z = -S_2 - S_1 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha - S_3 \sin\beta - G + S_6 \sin\varphi - S_4 = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma M_x = S_2 b+S_1 \sin\alpha\, b+S_3 \sin\beta\cdot b+G\ \frac{b}{2} - S_6 \sin\varphi\cdot b = 0 \qquad (4)$$

$$\Sigma M_y = G\ \frac{a}{2} - S_6 \sin\varphi\cdot a = 0 \qquad (5)$$

$$\Sigma M_z = S_1 \cos\alpha\cdot b = 0 \qquad (6)$$

(6) S_1 = 0	(3) S_4 = - 16,2 kN
(4) S_2 = 6 kN	(1) S_5 = 21,1 kN
(2) S_3 = - 9,62 kN	(5) S_6 = 11,o3 kN



sl.6.14.

13. Kvadratna ploča prikazana na sl.6.14, čiju težinu zanemarujemo opterećena je silom F. Odredi veličinu i karakter sila u štapovima kojima je ploča poduprta.
Zadano: $F=2.10^4$ N, $a = 1$ m

Rješenje:

$\Sigma X=F-S_4 \cos 45^o = 0$ (1)

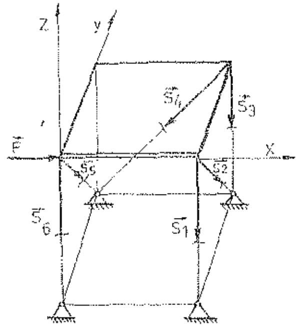
$\Sigma Y=S_2 \cos 45^o+S_5 \cos 45^o= 0$ (2)

$\Sigma Z=-S_1-S_2 \sin 45^o-S_3-S_4 \sin 45^o-S_5 \sin 45^o-S_6=0$ (3)

$\Sigma M_x=S_3 a+S_4 \cos 45^o a = 0$ (4)

$\Sigma M_y=S_3 a+S_4 \cos 45^o a+S_2 \cos 45^o a+S_1 a = 0$ (5)

$\Sigma M_z=S_4 \cos 45^o a+S_2 \cos 45^o a = 0$ (6)



(1) $S_4= \dfrac{F}{\cos 45^o} = 2\sqrt{2} \cdot 10^4$ N zatezanje

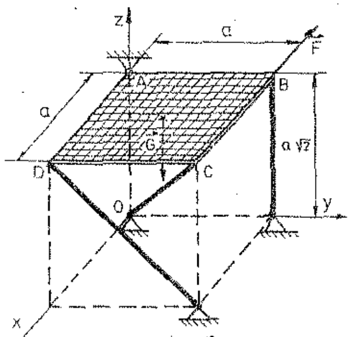
(6) $S_2= - S_4 = - 2\sqrt{2}\cdot 10^4$ N pritisak

(4) $S_3= - S_4 \cos 45^o = - 2\cdot 10^4$ N pritisak

(5) $S_1= -S_3-S_4 \cos 45^o-S_2 \cos 45^o$
$S_1= 2\cdot 10^4$ N zatezanje

(2) $S_5= - S_2 = 2\sqrt{2}\cdot 10^4$ N zatezanje

(3) $S_6= - S_1-S_2 \sin 45^o-S_3-S_4 \sin 45^o-S_5 \sin 45^o$
$S_6= - 2\sqrt{2} \cdot 10^4$ N pritisak



sl.6.15.

14. Homogena kvadratna ploča sa stranicama a i težine G=2oo N, učvršćena je sfernim zglobom u tački A i poduprta sa 3 štapa u tačkama B, C i D. U tački D djeluje sila F=2 G. (sl.6.15)
Odredi reakcije zgloba A i sile u štapovima 1, 2 i 3 ($h=a\sqrt{2}$).

Rješenje:

$\Sigma X=X_A-F-S_2 \cos\alpha \cos 45^o= 0$ (1)

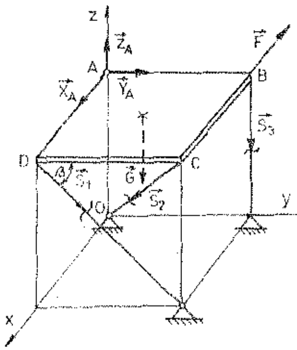
$\Sigma Y=Y_A+S_1 \cos\beta -S_2 \cos\alpha \sin 45^o=0$ (2)

$\Sigma Z=Z_A-G-S_2 \sin\alpha-S_1 \sin\beta-S_3=0$ (3)

$\Sigma M_x=G \frac{a}{2} +S_1 \cos\beta\cdot a\sqrt{2}+S_3 a +Y_A a\sqrt{2}=0$ (4)

$\Sigma M_y=F \frac{a}{2}+X_A a\sqrt{2}+S_1 \sin\beta a-F a= 0$ (5)

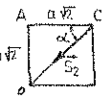
$\Sigma M_z=S_1 \cos \beta a+F a = 0$ (6)



$\text{tg}\,\alpha= \dfrac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1$

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\text{tg}\,\beta = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} =\sqrt{2}$

$\sin\beta = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos \beta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(6) $S_1= \dfrac{F}{\cos\beta} = 4oo\sqrt{3}$
$S_1= 692,82$ N

(5) $X_A= \dfrac{F-S_1 \sin\beta- \dfrac{G}{2}}{2} = 15o\sqrt{2} -4oo$
$X_A= - 187,87$ N

(1) $S_2= \dfrac{X_A- F}{\cos\alpha \cos 45^o} = 3oo\sqrt{2} - 16oo$
$S_2= - 1175,74$ N

(2) $Y_A=S_2 \cos\alpha \sin 45^o-S_1 \cos\beta=15o\sqrt{2}-12oo$
$Y_A= -987,87$ N

(4) $S_3= \dfrac{-G}{2} -S_1 \sqrt{2} \cos\beta -Y_A\sqrt{2}=8oo\sqrt{2}-4oo$
$S_3= 731,37$ N

(3) $Z_A= G+S_2 \sin\alpha +S_1 \sin\beta+S_3= 1oo+4oo\sqrt{2}$
$Z_A= 565,69$ N

LITERATURA

1. D.Rašković: Mehanika I, Statika, Naučna knjiga, Beograd, 1978.
2. L. Rusov: Mehanika, Statika, Naučna knjiga, Beograd, 1978.
3. M.Kojić: Statika, Naučna knjiga, Beograd, 1979.
4. H.Pašić: Statika, Svjetlost, Sarajevo, 1985.
5. I.V.Meščerski: Zbirka zadataka iz teorijske mehanike, gradjevinska knjiga, Beograd, 1975.
6. S.Djurić: Zbirka zadataka iz grafostatike, Naučna knjiga, Beograd, 1979.