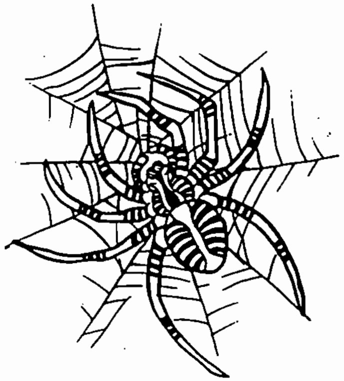
Ivana Kotić



MARIJAN J. KOLAR

NOSAČI

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ STATIKE

Daliborka Jurišić
I god. Građevinski fakultet
Mostar

Nekad bila

- Biljana Šimić -

Naučna knjiga
BEOGRAD, 1991.

Mr Marijan J. Kolar

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA
IZ STATIKE

Izdavač

IDP "Naučna knjiga",
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Recenzenti

Prof. dr Đorđe Đukić
Prof. dr Božidar Jovanović

Za izdavača

Dr Blažo Perović

Urednik

Dragana Sekulić

Tehnički urednik

Gradimir Savić

Tiraž 500 primeraka

ISBN 86-23-21094-8

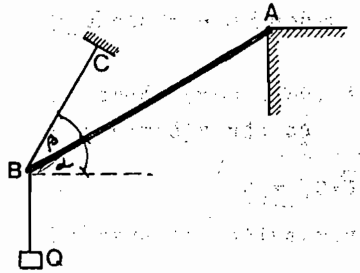
[illegible] Banjaluka 1991

SADRŽAJ

1. STATIKA U RAVNI

1.1 RAVNOTEŽA KRUTOG TELA U RAVNI

1. Homogena greda AB dužine ℓ i težine $G = 16$ daN zglobno je vezana krajem A i sa horizontalom gradi ugao $\alpha = 30^\circ$. U ravnotežnom položaju održava je uže BC koje je vezano za kraj B grede i sa njom zaklapa ugao $\beta = 30^\circ$. U tački B obešen je teret težine $Q = 4$ daN. Odrediti silu u užetu BC i reakciju zgloba A.



Slika 1.

Kao prvo, oslobodićemo se od veza. Ako to uradimo onda ćemo umesto zgloba A uvesti reakcije veza X_A i Y_A, dok ćemo dejstvo užeta BC zameniti silom F_u (sl. 2).

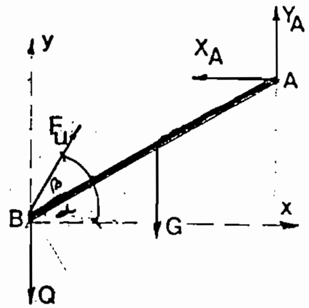
Napišimo sada uslove ravnoteže za sistem sila na slici 2:

$$\sum X_i = 0: \quad F_u \cos(\alpha + \beta) - X_A = 0,$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_u \sin(\alpha + \beta) - G - Q + Y_A = 0,$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$F_u \ell \sin\beta - Q \ell \cos\alpha - G \frac{\ell}{2} \cos\alpha = 0.$$



Slika 2.

Iz treće (momentne) jednačine, nakon skraćivanja sa   nalazimo silu u užetu F_u:

$$\boxed{F_u = 12\sqrt{3} \text{ daN.}}$$

Iz prve jednačine ravnoteže nalazimo komponentu X_A:

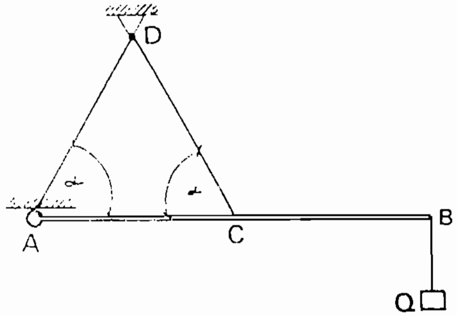
$$X_A = F_u \cos 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ daN.}$$

I konačno iz druge jednačine ravnoteže nalazimo Y_A:

$$Y_A = G + Q - F_u \sin 60^0 = 2 \text{ daN}.$$

2. Za desni kraj štapa AB dužine 2ℓ i težine G obešen je teret čija je težina jednaka težini štapa tj. $Q = G$. Na levom kraju štapa se nalazi točkić, koji mu omogućava da se kreće u horizontalnom pravcu. Štap je učvršćen pomoću dva užeta AD i CD za tačku D kako je pokazano na slici 3.

Odrediti sile u oba užeta i pritisak točkića u A, ako su dužine: $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{CD} = \overline{CB} = \ell$.



Slika 3.

Na osnovu datih podataka očigledno je da je trougao ACD ravnostran, tj. da je ugao $\alpha = 60^o$.

Nakon oslobadjanja od veza štap AB će biti opterećen kako je to pokazano na slici 4.

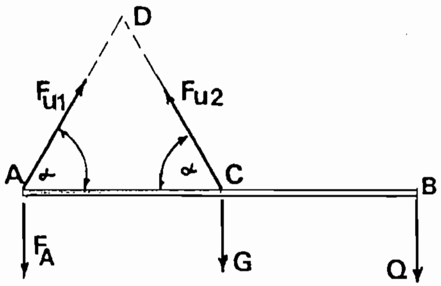
Napišimo jednačine ravnoteže za sistem sila na sl. 4:

$\sum X_i = 0$:

$$F_{u1}\cos\alpha - F_{u2}\cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_{u1}\sin\alpha + F_{u2}\sin\alpha - F_A - G - Q = 0, \qquad (2)$$



Slika 4.

$\sum M_A = 0$:

$$F_{u2}\sin\alpha \cdot \ell - G \cdot \ell - Q \cdot 2\ell = 0 \qquad (3)$$

Iz jednačine (1) nalazimo da je: $F_{u1} = F_{u2} = F_u$.

Sile u užadima sada nalazimo iz jednačine (3):

$$\boxed{F_u = 2\sqrt{3}\,G.}$$

I na kraju reakciju F_A dobijamo iz jednačine (2):

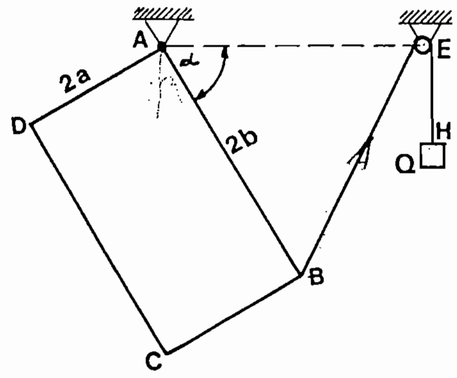
$$F_A = 2F_u \sin 60^o - G - Q,$$

tj.

$$F_A = 4G.$$

3. Homogena pravougaona ploča ABCD strana 2a i 2b, težine $G = 24$ daN, leži u vertikalnoj ravni i održava se u ravnotežnom položaju pod uglom $\alpha = 60^o$ prema horizontalnoj ravni, pomoću zgloba A i užeta BEH koje je prebačeno preko malog kotura E i za čiji je slobodan kraj H obešen teret težine Q. Pri tome je $\overline{AB} = \overline{AE} = 2b$.

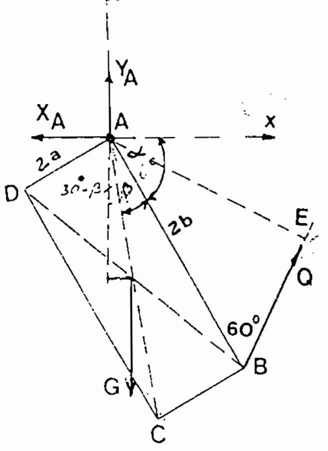
Odrediti reakciju zgloba A i potrebnu težinu tereta Q, ako je odnos strana $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Slika 5.

Lako je zaključiti da je trougao ABE ravnostran, odnosno da su uglovi u temenima A, B i E jednaki i iznose po 60^o.

Posmatrajući sliku (6) možemo napisati sledeće jednačine ravnoteže:



$\sum X_i = 0:$

$$Q \cdot \cos 60^\circ - X_A = 0, \tag{1}$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_A - G + Q \sin 60^\circ = 0, \tag{2}$$

$\sum M_A = 0:$

$$Q\,\frac{2b\sqrt{3}}{2} - G\,\frac{d}{2}\sin(30^\circ - \beta). \tag{3}$$

Slika 6.

U jednačini (3) $\frac{2b\sqrt{3}}{2}$ predstavlja visinu ravnostranog trougla ABE stranice 2b, a $\underline{d}$ je dijagonala pravougaonika ABCD.

Jednačinu (3) napišimo u obliku:

$$Q\,b\sqrt{3} = G\,\frac{d}{2}(\sin 30^\circ \cos\beta - \cos 30^\circ \sin\beta) = 0 \tag{4}$$

Iz trougla ABC (sl.6) nalazimo da je:

$$\sin\beta = \frac{2a}{d} = \frac{b\sqrt{3}}{3d}, \qquad \cos\beta = \frac{2b}{d},$$

tako da jednačina (4) sada postaje:

$$Q\,b\sqrt{3} = G\,\frac{d}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{2b}{d} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{b\sqrt{3}}{3d}\right).$$

Posle skraćivanja sa $\underline{b}$ i $\underline{d}$ iz poslednje jednačine nalazimo silu Q:

$$Q = 2\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (1) nalazimo komponentu X_A:

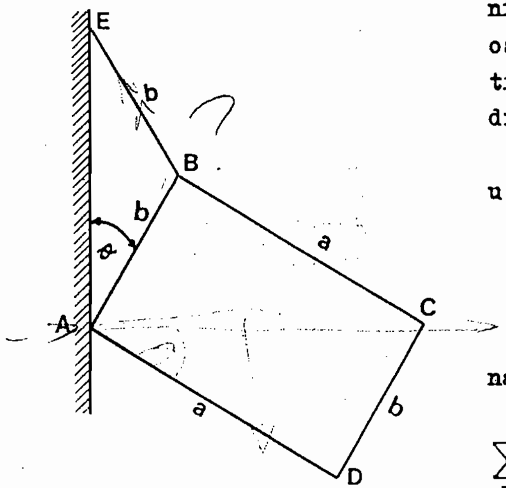
$$X_A = Q \cdot \cos 60^\circ = \sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz (2) je:

$$Y_A = G - Q \sin 60^\circ = 21\ \text{daN}.$$

4. Homogena pravougaona ploča ABCD, težine $G = \sqrt{3}$ daN, stranica $\underline{a}$ i $\underline{b}$, pri čemu je $a = b\sqrt{3}$, oslanja se temenom A o glatki vertikalni zid, dok je u temenu B pridržava uže BE čija je dužina b.

Odrediti reakciju zida F_A, silu u užetu BE i ravnotežni ugao ϑ.



Slika 7.

Posmatrajući sliku 8 možemo napisati sledeće jednačine ravnoteže:

$\sum X_i = 0:$

$$F_A - F_u \sin\vartheta = 0, \tag{1}$$

$\sum Y_i = 0:$

$$F_u \cos\vartheta - G = 0, \tag{2}$$

$\sum M_E = 0:$

$$F_A\,2b\cos\vartheta - G\,\frac{d}{2}\cos(\alpha - \vartheta). \tag{3}$$

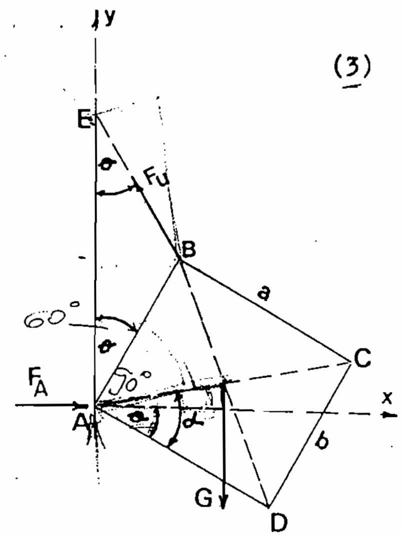
Iz jednačine (2) imamo da je:

$$F_u = \frac{G}{\cos\vartheta}, \tag{4}$$

dok iz (1) nalazimo reakciju zida u funkciju ugla ϑ:

$$F_A = G\,\mathrm{tg}\,\vartheta. \tag{5}$$

Jednačinu (3) sada možemo napisati u obliku:



Slika 8.

$$G\ tg\varphi\ 2b\ \cos\varphi - G\,\frac{d}{2}(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi) = 0. \qquad (6)$$

Ovde je d dijagonala pravougaonika ABCD, tj.

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3b^2 + b^2} = 2b.$$

Iz trougla ACD (sl.8) nalazimo da je:

$$\sin\alpha = \frac{b}{d} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}; \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Jednačina (6) nakon skraćivanja sa G postaje:

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\,2b\cos\varphi - b\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi + \frac{1}{2}\sin\varphi\right) = 0,$$

$$2\sin\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi = 0,$$

$$3\sin\varphi = \sqrt{3}\cos\varphi \quad \text{ili} \quad 3\,tg\varphi = \sqrt{3},$$

$$tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \varphi = 30^\circ.$$

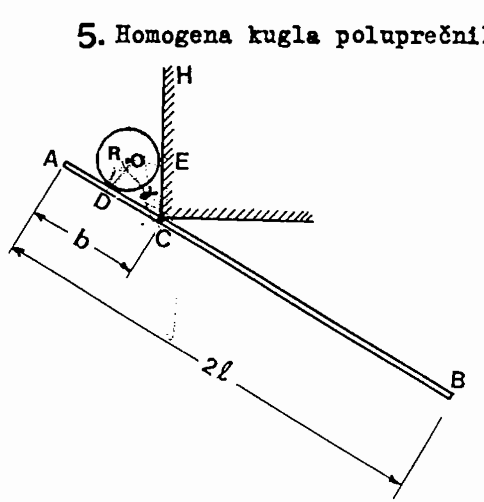
Iz jednačina (4), odnosno (5) nalazimo silu u užetu BE, odnosno reakciju zida F_A:

$$F_u = \frac{G}{\cos 30^\circ} = 2\ \text{daN},$$

$$F_A = G\ tg\ 30^\circ = 1\ \text{daN}.$$

5. Homogena kugla poluprečnika $R = \frac{\ell}{4}$ i težine Q oslanja se se u tački E na glatki vertikalni zid a u D na glatki homogeni štap AB dužine 2ℓ i težine $G = 16$ daN. Štap AB zaklapa sa vertikalom ugao α i zglobno je vezan u tački C za ivicu zida, kao što je pokazano na slici 9.

Ako je: $\overline{AC} = b = \frac{\ell}{2}$ i $Q = G\sin\alpha$, odrediti ravnotežni ugao α i reakciju zgloba C.



Slika 9.

Težinu kugle Q ćemo rastaviti na dve komponente (slika 10). Komponenta F_D je normalna na štap $\overline{AB}$, dok je komponenta F_E normalna na vertikalni zid $\overline{CH}$. Nas interesuje samo sila F_D i nju nalazimo iz trougla sila na slici 10 b.

$$F_D = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{G\sin\alpha}{\sin\alpha} = G.$$

Greda AB će sada biti opterećena kako je to pokazano na slici 11.

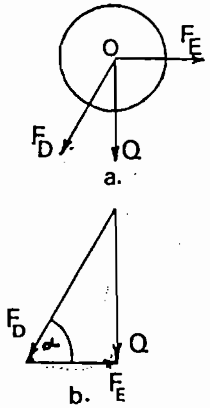
Jednačine ravnoteže grede AB će sada biti:

$\sum X_i = 0$:

$$X_o - F_D\cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

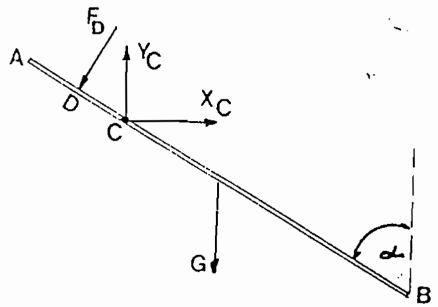
$$-F_D\sin\alpha + Y_c - G = 0 \qquad (2)$$



Slika 10.

$\sum M_c = 0:$

$$F_D \cdot \overline{CD} - G\frac{\ell}{2}\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$



Slika 11.

Krak sile F_D za tačku C (dužinu $\overline{CD}$) nalazimo iz trougla OCD (slika 9):

$$\overline{CD} = R\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2},$$

$$\overline{CD} = \frac{\ell}{4}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Jednačina (3) sada postaje:

$$G\frac{\ell}{4}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2} - G\frac{\ell}{2}\sin\alpha = 0$$

Posle skraćivanja sa G i ℓ gornja jednačina postaje:

$$\frac{1}{4}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\,2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \quad \text{ili} \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\alpha}{2} = 30^\circ, \qquad \alpha = 60^\circ.$$

Iz jednačine (1) nalazimo komponentu X_c:

$$X_c = F_D\cos 60^\circ = 8 \text{ daN}.$$

Iz (2) je:

$$Y_c = G + F_D\sin 60^\circ = 16 + 16\frac{\sqrt{3}}{2},$$

ili:

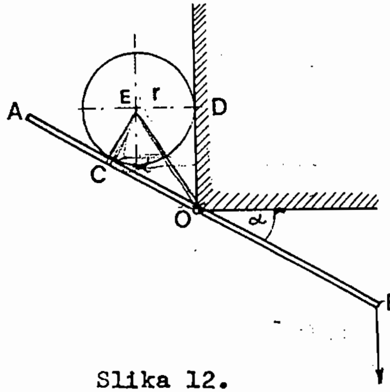
$$Y_c = 8(2 + \sqrt{3}) \text{ daN}.$$

6. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine $G = 10$ daN može da se obrće oko zgloba O postavljenog u njegovom težištu. Izmedju štapa i vertikalnog zida nalazi se kugla poluprečnika $r = \frac{\ell}{4}$ težine $Q = 15$ daN, dok na kraju B štapa deluje vertikalna sila P koja održava dati sistem u ravnoteži u vertikalnoj ravni, pri čemu štap AB zaklapa sa horizontalom ugao $\alpha = 30^\circ$.

Pod pretpostavkom da su sve veze bez trenja odrediti:

a) reakcije u datom sistemu,

b) veličinu sile potrebnu za ostvarenje gore navedena ravnoteže.



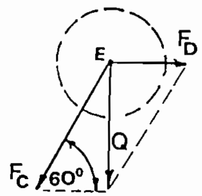
Slika 12.

Težinu kugle Q rastavimo na dve komponente: silu F_c koja je normalna na gredu AB i silu F_D normalnu na vertikalni zid.

Iz slike 13 se vidi da je:

$$F_c = \frac{Q}{\sin 60^\circ} = \frac{15}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30}{\sqrt{3}}$$

ili $\qquad F_c = 10\sqrt{3}$ daN .



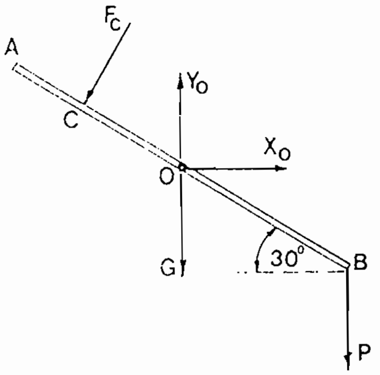
Slika 13.

Potražimo sada rastojanje $\overline{OC}$:

Iz trougla EOC (sl.12) imamo da je: $\overline{OC} = r.\mathrm{cotg}\,30^\circ$,

ili $\overline{OC} = \frac{\ell\sqrt{3}}{4}$.

Sada možemo zaključiti da je greda AB opterećena kako je to pokazano na slici 14.



Slika 14.

Jednačine ravnoteže za gredu AB će biti:

$\sum X_i = 0:$

$$X_0 - F_c \sin 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$-F_c \cos 30^\circ + Y_0 - G - P = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_0 = 0:$

$$P\,\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ - F_c \cdot \overline{OC} = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) nalazimo silu P:

$$P\,\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ = F_c\,\frac{\ell\sqrt{3}}{4}, \quad \text{ili} \quad P = F_c = 10\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (1) nalazimo X_0:

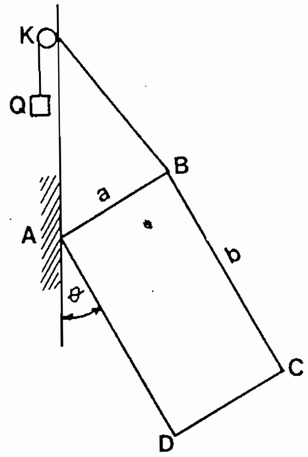
$$X_0 = F_c \sin 30^\circ = 5\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Komponentu Y_0 dobijamo iz (2):

$$Y_0 = F_c \cos 30^\circ + G + P = 10\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\sqrt{3} + 10,$$

$$Y_0 = 5(5 + 2\sqrt{3})\ \text{daN}.$$

7. Homogena pravougaona ploča ABCD strana: $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$, težine G stoji u ravnoteži u vertikalnoj ravni oslanjajući se temenom A o glatki vertikalni zid. Teme B ploče vezano je pomoću gipkog nerastegljivog užeta, prebačenog preko kotura K na čijem kraju visi teret $Q = G\sqrt{2}$ daN. Odrediti: a) reakciju oslonca ploče, b) ravnotežni ugao ϑ.



Slika 15.

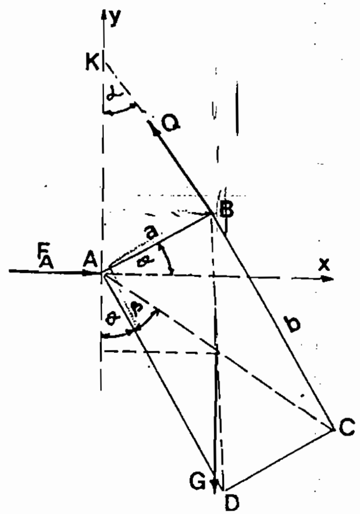
Posle oslobadjanja od veza ploča ABCD će biti opterećena silama kako je to pokazano na slici 16.

Jednačine ravnoteže ploče će sada biti:

$$\sum X_i = 0: \quad F_A - Q\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Q\cos\alpha - G = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad Q\cos\alpha\, a\cos\vartheta + Q\sin\alpha\, a\sin\vartheta - G\,\frac{d}{2}\sin(\beta + \vartheta) = 0. \qquad (3)$$



Slika 16.

Iz jednačine (2) nalazimo ugao α:

$$\cos\alpha = \frac{G}{Q} = \frac{G}{G\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

Reakciju zida F_A sada nalazimo iz jednačine (1):

$$F_A = Q\sin\alpha = G\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} = G\ \text{daN}.$$

Još je ostalo da se iz momentne jednačine (3) odredi ugao ϑ.

Jednačinu (3) napišimo sada u obliku:

$$Q\cos\alpha \; a\cos\theta + Q\sin\alpha \; a\sin\theta = G\,\frac{d}{2}(\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta)$$

Gde je d dijagonala pravougaonika ABCD, dok će $\sin\beta$ i $\cos\beta$ (slika 16) biti:

$$\sin\beta = \frac{a}{d}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{d} = \frac{3a}{d}.$$

Kada ovo uvrstimo u zadnju jednačinu i uzmemo u obzir da je $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ova jednačina postaje:

$$G\sqrt{2}\; a\,\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta + \sin\theta) = G\,\frac{d}{2}\left(\frac{a}{d}\cos\theta + \frac{3a}{d}\sin\theta\right).$$

Nakon izvršenih skraćivanja dobijamo:

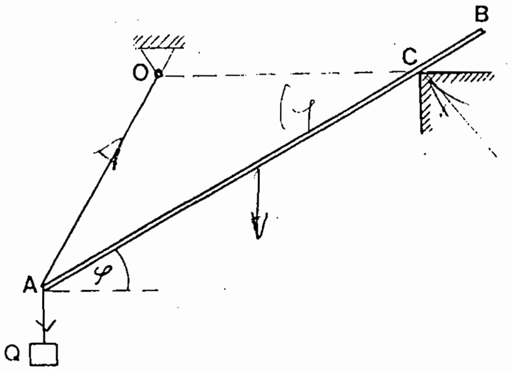
$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{3}{2}\sin\theta,$$

ili

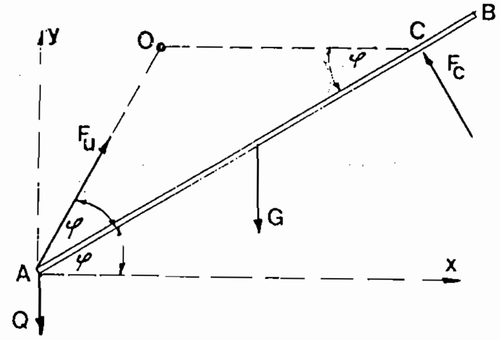
$\sin\theta = \cos\theta$, odnosno posle deljenja sa $\cos\theta$:

$$\mathrm{tg}\,\theta = 1, \qquad \text{ili} \qquad \theta = 45^\circ.$$

8. Homogeni štap AB dužine 2ℓ i težine G opire se o zid u tački C. Drugi kraj štapa o koji je obešen teret težine $Q = 2G$ učvršćen je konce m AO za tačku O. Dužina konca je ℓ. Naći silu u užetu AO, reakciju u tački C, kao i ugao φ koji obrazuje štap sa horizontalom u ravnotežnom položaju. Tačke O i C nalaze se na istoj horizontali. $\overline{OA} = \overline{OC} = \ell$.



Slika 17.



Slika 18.

Pošto smo uklonili veze, štap AB će biti opterećen silama kao što je prikazano na slici 18.

Iz uslova da je $\overline{AO} = \overline{OC} = \ell$ zaključujemo da je trougao AOC ravnokrak i da su uglovi na osnovici tog trougla jednaki φ.

Uslovi ravnoteže štapa AB će biti:

$$\sum X_i = 0: \qquad F_u\cos 2\varphi - F_c\sin\varphi = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \qquad F_u\sin 2\varphi - Q - G + F_c\cos\varphi = 0 \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \qquad F_c\, 2\ell\cos\varphi - G\ell\cos\varphi = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) nalazimo da je: $F_c = \frac{G}{2}$.

Kada ovo uvrstimo u jednačinu (1) i nju rešimo po F_u, dobijamo:

$$F_u = \frac{G}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi}. \qquad (4)$$

Ugao φ nalazimo iz jednačine (2). Ako u nju uvrstimo nadjene vrednosti za F_c i F_u, ona postaje:

$$\frac{G}{2}\,\frac{\sin\varphi}{\cos 2\varphi}\sin 2\varphi - Q - G + \frac{G}{2}\cos\varphi = 0.$$

Ako gornju jednačinu pomnožimo sa $2\cos 2\varphi$ i uzmemo u obzir da je $Q = 2G$, ona postaje:

$$\sin\varphi . \sin 2\varphi - 6\cos 2\varphi + \cos\varphi . \cos 2\varphi = 0.$$

Znajući da je $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ i $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, imaćemo dalje:

$$2\sin^2\varphi\cos\varphi - 6\cos^2\varphi + 6\sin^2\varphi + \cos^3\varphi - \cos\varphi\sin^2\varphi = 0,$$

ili

$$(1 - \cos^2\varphi)\cos\varphi - 6\cos^2\varphi + 6 + 6(1 - \cos^2\varphi) + \cos^3\varphi = 0.$$

Nakon sredjivanja gornjeg izraza dolazimo do sledeće kvadratne jednačine po $\cos\varphi$:

$$12\cos^2\varphi - \cos\varphi - 6 = 0. \qquad (5)$$

Pri rešavanju jednačine (5) uzimamo u obzir samo znak "+", pošto je ugao φ oštar, tj. imamo da je:

$$\cos\varphi = \frac{1 + \sqrt{1 + 288}}{24} = \frac{1 + 17}{24} = \frac{3}{4}.$$

Potrebno je još iz jednačine (4) izračunati silu u užetu F_u. Za to je potrebno da nadjemo $\sin\varphi$, odnosno $\cos 2\varphi$.

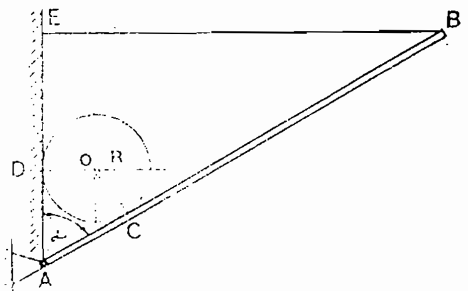
$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{7}}{4}; \quad \cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\cos 2\varphi = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{8}.$$

Kada ovo uvrstimo u izraz (4) za F_u, dobijamo:

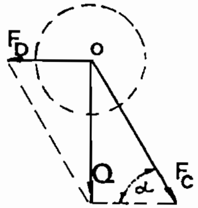
$$F_u = G\sqrt{7}.$$

9. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine G = 10 daN održava se u ravnotežnom položaju pod uglom $\alpha = 60^o$ prema vertikali pomoću zgloba A i horizontalnog užeta BE. Kugla O poluprečnika $R = \frac{\ell\sqrt{3}}{12}$ i težine Q = 12 daN postavljena je tako, da se u tački C oslanja na štap AB, a u tački D na glatki vertikalni zid, kako je pokazano na sl.19. Odrediti pritisak kugle na zid, reakciju zgloba A i silu u užetu BE.



Slika 19.

Težinu kugle Q rastavljamo na dve komponente F_c i F_D, koje su normalne na štap AB, odnosno na zid AE. Na slici 20 se vidi da je:



Slika 20.

$$F_c = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}\ \text{daN},$$

$$F_D = Q\,\text{cotg}\,\alpha = 12\frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

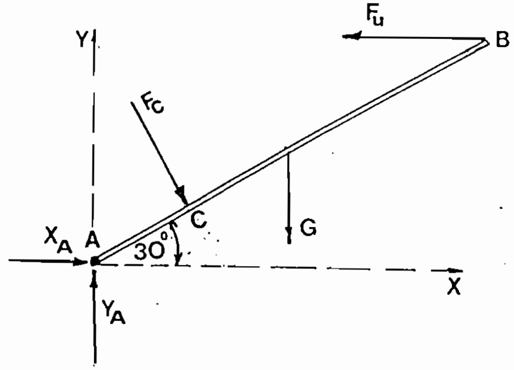
Potražimo sada krak sile F_c za tačku A tj. rastojanje $\overline{AC}$.

Iz trougla AOC (sl.19) imamo da je:

$$\overline{AC} = R\,\text{cotg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\ell\sqrt{3}}{12}\sqrt{3},$$

$$\overline{AC} = \frac{\ell}{4}.$$

Štap AB će sada biti opterećen kako je pokazano na slici 21.



Slika 21.

Uslovi ravnoteže štapa AB će biti:

$\sum X_i = 0$:

$$X_A + F_c\sin 30^o - F_u = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$Y_A - F_c\cos 30^o - G = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0$:

$$F_u\,\ell\sin 30^o - G\frac{\ell}{2}\cos 30^o - F_c\,\overline{AC} = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3), uzimajući u obzir da je $F_c = 8\sqrt{3}$ daN i $\overline{AC} = \frac{\ell}{4}$, možemo izračunati silu u užetu F_u:

$$F_u = 9\sqrt{3} \text{ daN.}$$

Komponentu X_A nalazimo iz jednačine (1):

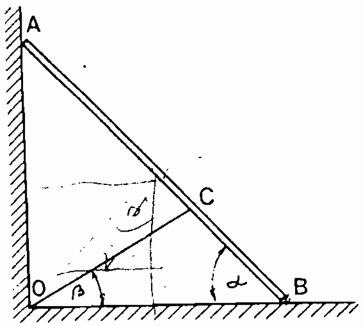
$$X_A = F_u - F_c \sin 30^\circ = 5\sqrt{3} \text{ daN,}$$

dok iz (2) možemo izračunati Y_A:

$$Y_A = F_c \cos 30^\circ + G = 22 \text{ daN.}$$

10. Homogena greda AB dužine ℓ i težine G = 30 daN oslanja se na glatki zid i pod u tačkama A i B, a u ravnoteži je održava uže OC, tako da su uglovi: $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 30^\circ$.

Odrediti silu u užetu i reakcije oslonaca.



Slika 22.

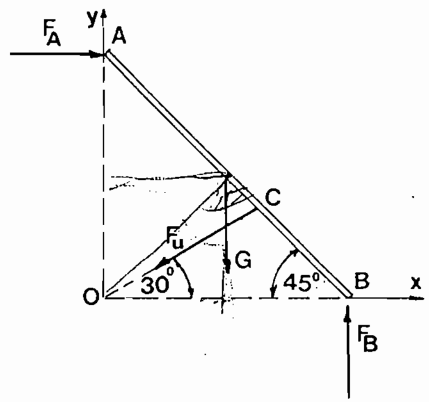
Veze su ovde uže OC, horizontalni pod i vertikalni zid. Ako ove veze uklonimo i njihovo dejstvo zamenimo odgovarajućim reakcijama veza, greda AB će biti opterećena silama kao što je prikazano na slici 23.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad F_A - F_u \cos 30^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_B - G - F_u \sin 30^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_o = 0: \quad F_B \ell \cos 45^\circ - G \frac{\ell}{2} \sin 45^\circ - F_A \ell \sin 45^\circ = 0 \tag{3}$$



Slika 23.

Nakon sredjivanja jednačina (3) postaje:

$$F_B - F_A = \frac{G}{2},$$

odakle je: $F_B = F_A + 15$.

Ovako nadjenu vrednost za F_B uvrstimo u jednačinu (2):

$$F_A - \frac{1}{2} F_u = 15. \tag{4}$$

Jednačinu (1) možemo napisati u obliku:

$$F_A - \frac{\sqrt{3}}{2} F_u = 0. \tag{5}$$

Jednačine (4) i (5) predstavljaju sistem od dve jednačine sa dve nepoznate F_u i F_A, čija su rešenja:

$$F_u = 15(\sqrt{3} + 1) \text{ daN;} \qquad F_A = \frac{15}{2}(3 + \sqrt{3}) \text{ daN.}$$

Reakciju F_B dobijamo iz uslova $F_B = F_A + 15$, tj.

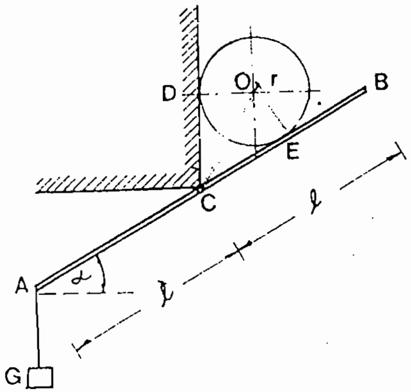
$$F_B = \frac{15}{2}(5 + \sqrt{3}) \text{ daN.}$$

11. Štap AB dužine 2ℓ čija se težina može zanemariti, zglobno je vezan u tački C za ivicu zida, pri čemu je $\overline{AC} = \overline{CB} = \ell$. U ravnotežnom položaju štap zaklapa sa horizontalom ugao $\alpha = 30^o$. Homogena kugla O težine Q= 12 daN i poluprečnika $r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}$ oslanja se u E na štap AB, dok se u tački D oslanja na glatki vertikalni zid. Za kraj A štapa AB obešen je teret težine G. Odrediti:

a) pritisak kugle na štap i zid u tačkama E i D,

b) potrebnu veličinu tereta G,

c) reakciju zgloba C.

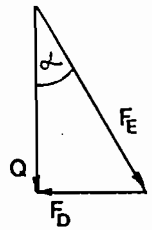


Slika 24.

Rastavimo silu Q na dve komponente: silu F_E normalnu na štap AB i silu F_D normalnu na zid. Iz trougla sila na slici 25 vidi se da je:

$$F_E = \frac{Q}{\cos\alpha} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3} \text{ daN},$$

$$F_D = Q\cdot tg\,\alpha = 12\,\frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ daN}.$$



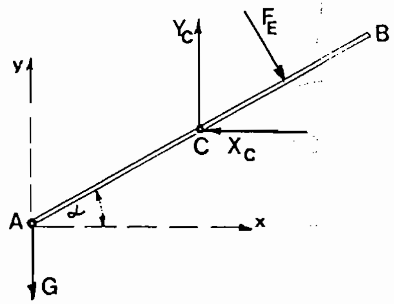
Slika 25.

Potražimo sada krak sile F_E za tačku C, tj rastojanje $\overline{CE}$:
Iz trougla OEC (slika 24), imamo da je:

$$\overline{CE} = r\cdot cotg\,30^o = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}\,\sqrt{3} = \frac{\ell}{2}\,.$$

Štap AB će sada biti opterećen silama , kako je to pokazano na slici 26.

Napišimo jednačine ravnoteže za ovaj sistem sila:



Slika 26.

$\sum X_i = 0$:

$$F_E \sin\alpha - X_c = 0, \tag{1}$$

$\sum Y_i = 0$:

$$Y_c - F_E\cos\alpha - G = 0, \tag{2}$$

$\sum M_c = 0$:

$$F_E\cdot\overline{CE} - G\ell\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Uzimajući u obzir nadjene vrednosti za silu F_E i krak CE, iz jednačine (3) možemo izračunati potrebnu veličinu tereta G:

$$F_E\,\frac{\ell}{2} - G\ell\cos 30^o = 0; \qquad 8\sqrt{3}\,\frac{\ell}{2} - G\ell\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

odakle posle skraćivanja sa ℓ nalazimo da je: $G = \underline{8}$ daN.

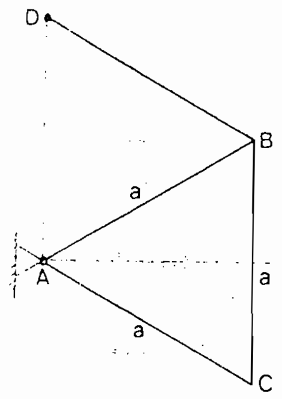
Iz jednačine (1) nalazimo komponentu X_c:

$$X_c = F_E\sin 30^o = 4\sqrt{3} \text{ daN}.$$

I na kraju komponentu Y_c dobijamo iz jednačine (2):

$$Y_c = F_E\cos 30^o + G = 8\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 8 = 20 \text{ daN}.$$

12. Homogena ploča ABC oblika ravnostranog trougla strane a i težine G, zglobno je vezana temenom A za vertikalni zid, dok je u temenu B vezano uže čiji je drugi kraj vezan za tačku D zida na rastojanju a od tačke A. Za ravnotežni položaj dat na slici 27 odrediti reakcije zgloba A i silu u užetu BD.



Slika 27.

Iz podatka da je $\overline{AD} = a$ lako je zaključiti da je trougao ABD podudaran sa trouglom ABC, tj. da je i on ravnostran.

Na slici 28 prikazana je ploča ABC oslobodjena od veza, gde je uticaj veza zamenjen sa odgovarajućim reakcijama veza.

Uslovi ravnoteže će ovde biti:

$\sum X_i = 0:$

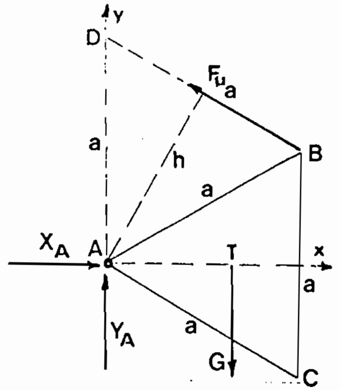
$$X_A - F_u \cos 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_A - G + F_u \sin 30^\circ = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$F_u \cdot h - G \cdot \overline{AT} = 0. \qquad (3)$$



Slika 28.

U jednačini (3) h predstavlja visinu ravnostranog trougla i ona iznosi $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, dok je rastojanje $\overline{AT} = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

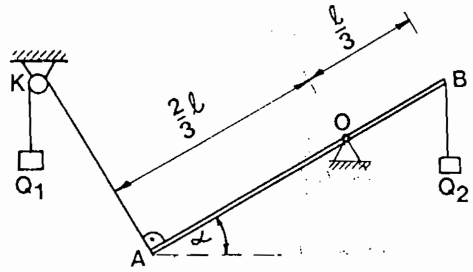
Jednačina (3) sada postaje: $F_u \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{3}G = 0.$

Odavde je: $F_u = \frac{2}{3}G.$

Iz jednačine (1) imamo da je: $X_A = F_u \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}G,$

dok iz jednačine (2) nalazimo Y_A: $Y_A = G - F_u \sin 30^\circ = \frac{2}{3}G.$

13. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine $G = 32$ daN može se obrtati oko tačke O. Za kraj A štapa AB vezano je uže, koje je prebačeno preko nepomičnog kotura K i za njegov slobodan kraj je obešen teret težine $Q_1 = 2\sqrt{3}$ daN. Za drugi kraj B štapa je obešen teret težine $Q_2 = 8$ daN. Odrediti ravnotežni položaj štapa (ugao α) i reakcije zgloba O. Ugao BAK $= 90^\circ$.



Slika 29.

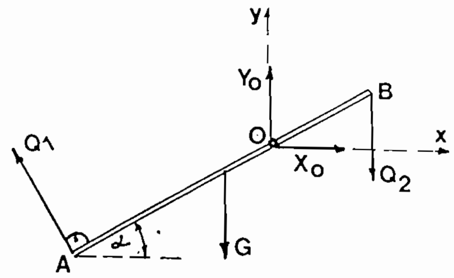
Na slici 30 prikazane su sile koje deluju na gredu AB. Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$\sum X_i = 0:$

$$X_o - Q_1 \sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Q_1 \cos\alpha - G + Y_o - Q_2 = 0, \qquad (2)$$



Slika 30.

$\sum M_o = 0:$

$$Q_1 \frac{2}{3}\ell - G\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3}\right)\cos\alpha + Q_2 \frac{\ell}{3}\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Ugao α odredjujemo iz jednačine (3). Posle skraćivanja sa ℓ i sredjivanja, ona postaje:

$$\frac{2}{3}Q_1 - \frac{G}{6}\cos\alpha + \frac{1}{3}Q_2\cos\alpha = 0, \quad \left(\frac{G}{6} - \frac{1}{3}Q_2\right)\cos\alpha = \frac{2}{3}Q_1,$$

ili

$$\left(\frac{32}{6} - \frac{8}{3}\right)\cos\alpha = \frac{2}{3}2\sqrt{3}, \qquad \frac{8}{3}\cos\alpha = \frac{4}{3}\sqrt{3},$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha = 30^\circ.$$

Iz jednačine (1) imamo da je:

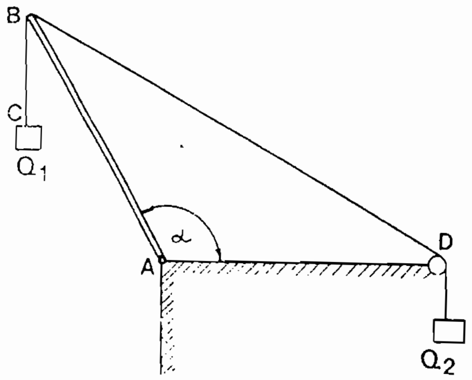
$$X_o = Q_1 \sin\alpha = 2\sqrt{3}\ \frac{1}{2} = \sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Y_o nalazimo iz jednačine (2):

$$Y_o = Q_2 + G - Q_1 \cos 30^\circ = 37\ \text{daN}.$$

14. O štap AB, koji se može obrtati oko zgloba A, obešen je u tački B, pomoću konca, teg težine $Q_1 = 1$ daN. Za kraj B štapa vezan je drugi konac koji je prebačen preko nepokretnog kotura D i zategnut tegom težine $Q_2 = 2$ daN. Dužine: $\overline{AB} = \overline{AD}$. Težina štapa jednaka je $G = 2$ daN.

Odrediti veličinu ugla DAB $= \alpha$ pri kojem će štap AB stajati u ravnoteži. Odrediti takodje reakciju zgloba A.



Slika 31.

Pre nego što napišemo jednačine ravnoteže sistema sila na slici 32, pronadjimo vezu izmedju oglova α i β. Iz uslova da je $\overline{AB} = \overline{AD}$ zaključujemo da je trougao ABD ravnokrak, odnosno da su uglovi u temenima B i D jednaki. Označimo ih sa β. Dalje imamo da je $2\beta + \alpha = 180^\circ$, odnosno $\beta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$.

Jednačine ravnoteže će sada biti:

$$\sum \underline{X_i = 0:} \quad Q_2 \cos\beta - X_A = 0,$$

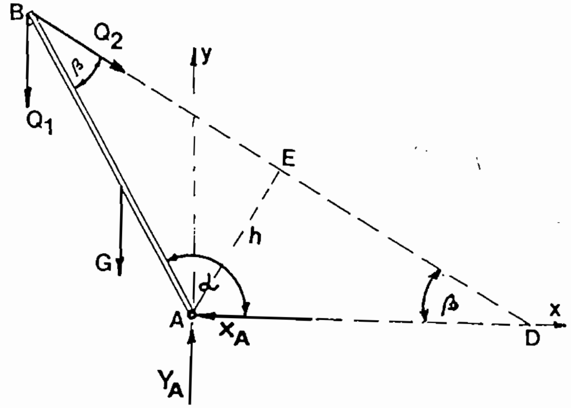
$$\sum \underline{Y_i = 0:} \quad Y_A - G - Q_1 - Q_2 \sin\beta = 0,$$

$$\sum \underline{M_A = 0:} \quad Q_2 \cdot h - Q_1\ \overline{AB}\ \cos(180 - \alpha) - G\ \frac{\overline{AB}}{2} \cos(180 - \alpha) = 0.$$

U poslednjoj jednačini h predstavlja krak sile Q_2 za tačku A. Ovaj krak se odredjuje iz pravouglog trougla AEB:

$$h = \overline{AB} \sin\beta = \overline{AB} \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Uzimajući u obzir da je $\beta = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$, jednačine ravnoteže možemo sada napisati u obliku:



Slika 32.

$$\sum \underline{X_i = 0:} \quad Q_2 \sin\frac{\alpha}{2} - X_A = 0, \tag{1}$$

$$\sum \underline{Y_i = 0:} \quad Y_A - G - Q_1 - Q_2 \cos\frac{\alpha}{2} = 0, \tag{2}$$

$$\sum \underline{M_A = 0:} \quad Q_2 \cos\frac{\alpha}{2} + Q_1 \cos\alpha + \frac{G}{2} \cos\alpha = 0. \tag{3}$$

U jednačini (3) koju smo prethodno skratili sa $\overline{AB}$, smo uzeli u obzir da je $\cos(180 - \alpha) = -\cos\alpha$.

Kada u jednačinu (3) uvrstimo vrednosti za Q_1, Q_2 i G, ona postaje:

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Znajući da je: $\cos\alpha = \cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2} = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 1,$

jednačina (4) postaje:

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} - 1 = 0. \tag{5}$$

Rešenje kvadratne jednačine (5) će biti:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}\,.$$

Uzmimo prvo u obzir znak $-$:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -1, \qquad \frac{\alpha}{2} = 180^\circ, \qquad \alpha = 360^\circ.$$

Ovo rešenje odbacujemo, pošto ono ne odgovara položaju štapa na slici.

Uzmimo sada u obzir znak $+$:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\alpha}{2} = 60^\circ, \qquad \alpha = 120^\circ.$$

Prema tome, ugao α u ravnotežnom položaju iznosi 120°.

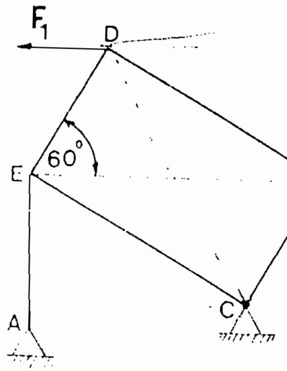
Komponentu X_A nalazimo iz jednačine (1):

$$X_A = Q_2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}\ \text{daN},$$

dok Y_A dobijamo iz jednačine (2):

$$Y_A = G + Q_1 + Q_2 \cos 60^\circ = 4\ \text{daN}.$$

15. Vrh C pravougaone ploče, koja se nalazi u vertikalnoj ravni, pričvršćen je zglobom a u vrhovima D i B dejstvuje horizontalna sila $F_1 = 10\sqrt{3}$ daN, odnosno vertikalna sila $F_2 = 120$ daN. Ploča se održava u ravnoteži pomoću vertikalnog užeta AE u položaju pri kome je njena dijagonala BE horizontalna. Zanemarujući težinu ploče, odrediti silu u užetu i reakciju zgloba C, ako je ugao BED = 60°.

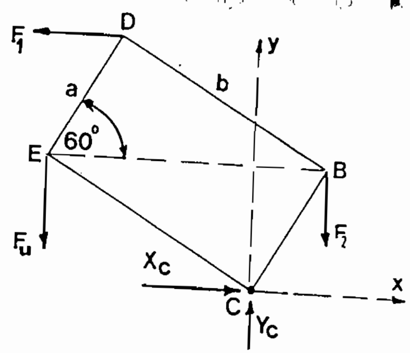


Slika 33.

Na slici 34 prikazana je ploča oslobodjena od veza. Ovde smo stranicu ED označili sa a a stranicu BD sa b.

Iz trougla EDB sledi veza:

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg} 60^\circ, \text{ ili } \quad b = a\sqrt{3}\,.$$



Slika 34.

Uslovi ravnoteže za sistem sila na slici 34 će biti:

$\sum X_i = 0:$

$$X_c - F_1 = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_c - F_u - F_2 = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_C = 0:$

$$F_u\, b \cos 30^\circ + F_1(a \sin 60^\circ + b \sin 30^\circ) - F_2\, a \cos 60^\circ = 0. \qquad (3)$$

Uzimajući u obzir da je $b = a\sqrt{3}$, jednačina (3) postaje:

$$F_u\, a\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + F_1\, a\,\frac{\sqrt{3}}{2} + F_1\, a\sqrt{3}\,\frac{1}{2} - F_2\, a\,\frac{1}{2} = 0,$$

$$\frac{3}{2} F_u = \frac{1}{2} F_2 - F_1\sqrt{3}, \quad \text{odavde je:} \quad F_u = 20\ \text{daN}.$$

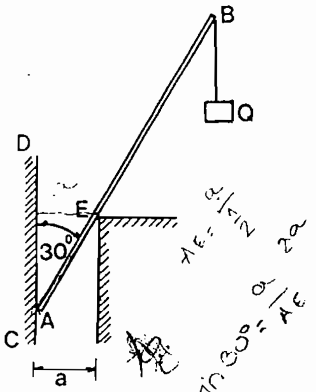
X_c i Y_c nalazimo iz jednačina (1) odnosno (2):

$$X_c = F_1 = 10\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

$$Y_c = F_u + F_2 = 140\ \text{daN}.$$

16. Homogeni štap AB dužine 2ℓ i težine G opire se svojim krajem A o vertikalni zid CD, i osim toga oslanja se u tački E o ivicu nepomičnog stola, koji se nalazi na rastojanju a od zida. Naći veličinu tereta Q koji treba da deluje u tački B da bi štap zatvarao ugao od 30° sa vertikalom. Naći reakcije veza u tom slučaju.

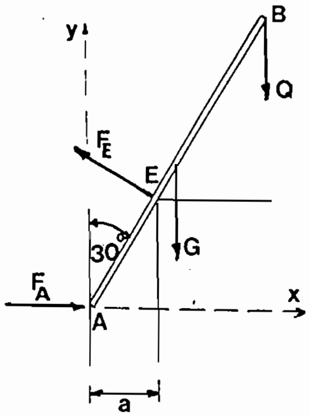
Dužine su: $\ell = 3$m, $a = 0,5$ m.



Slika 35.

Ako uklonimo veze, a to su vertikalni zid CD i sto, štap AB će se nalaziti u ravnoteži pod dejstvom sila prikazanih na slici 36.

Jednačine ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:



Slika 36.

$\sum X_i = 0$:

$$F_A - F_E \cos 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_E \sin 30^\circ - G - Q = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0$:

$$F_E \frac{a}{\sin 30^\circ} - G\,\ell \sin 30^\circ - Q\, 2\ell \sin 30^\circ. \qquad (3)$$

Jednačinu (2) možemo napisati u obliku:

$$\frac{1}{2} F_E - Q = G, \qquad (4)$$

dok jednačina (3) nakon sredjivanja postaje:

$$F_E - 3Q = \frac{3}{2} G. \qquad (5)$$

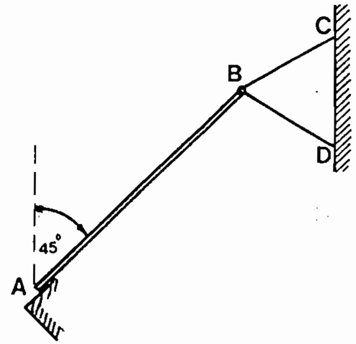
Jednačine (4) i (5) predstavljaju sistem jednačina sa nepoznatima F_E i Q. Rešavajući ovaj sistem jednačina, nalazimo da je:

$$Q = \frac{G}{2} \quad \text{i} \quad F_E = 3G.$$

Reakciju F_A nalazimo iz jednačine (1):

$$F_A = F_E \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} G.$$

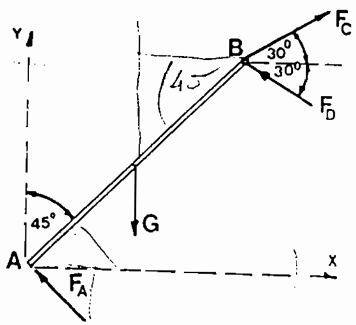
17. Homogena greda AB težine G = 100 daN slobodno se oslanja na strmu ravan u tački A i održava se u ravnotežnom položaju pomoću štapova BC i BD, kako je na slici 38 pokazano. Trougao BCD je ravnostran. Tačke C i D leže na istoj vertikali. Zanemarujući težine štapova BC i BD i smatrajući da su veze u tačkama B, C i D zglobne, odrediti reakciju zgloba A i sile u štapovima BC i BD.



Slika 37.

Veze su ovde: strma rava i štapovi BC i BD. Ako uklonimo ove veze, štap AB će biti opterećen silama kako je to pokazano na slici 38. Pri tome smo pretpostavili da je štap BC opterećen na istezanje a štap BD na pritisak.

Jednačine ravnoteže ovog sistema sila će biti:



Slika 38.

$\sum X_i = 0$:

$$F_C \cos 30^\circ - F_D \cos 30^\circ - F_A \cos 45^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$: $\quad F_A \cos 45^\circ - G + F_c \sin 30^\circ + F_D \sin 30^\circ = 0,$ (2)

$\sum M_B = 0$: $\quad F_A \cdot AB - G \frac{AB}{2} \cos 45^\circ = 0.$ (3)

Iz jednačine (3) nalazimo reakciju F_A:

$$F_A = G \frac{\sqrt{2}}{4} = 25\sqrt{2} \text{ daN}.$$

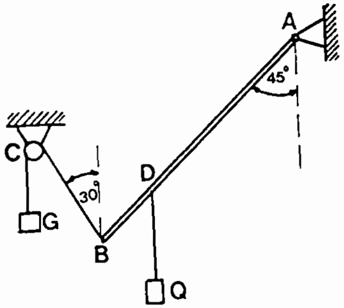
Jednačine (1) i (2) nakon sredjivanja postaju:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{2}(F_c - F_D) &= 25, \\ \frac{1}{2}(F_c + F_D) &= 75. \end{aligned}\right| \qquad (4)$$

Rešavanjem sistema jednačina (4), nalazimo sile u štapovima BC i BD:

$$F_c = \frac{25}{3}(\sqrt{3} + 9), \text{daN}, \qquad F_D = \frac{25}{3}(9 - \sqrt{3}) \text{ daN}.$$

18, Homogena greda AB težine P = 100 daN zglobno je vezana za zid krajem A i održava se u ravnotežnom položaju po uglom od 45° prema vertikali pomoću užeta koje je vezano za kraj B grede AB i prebačeno preko nepokretnog kotura C i za čiji je slobodan kraj obešen teret težine G. Deo užeta BC zaklapa sa vertikalom ugao od 30°. U tački D grede obešen je teret težine Q = 200 daN. Odrediti težinu tereta G i reakciju zgloba A, zanemarujući trenje izmedju užeta i kotura. $\overline{BD} = \frac{1}{4} \overline{AB}$.



Slika 39.

Posle oslobadjanja od veza, greda AB će biti opterećena silama kao što je to prikazano na slici 40.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

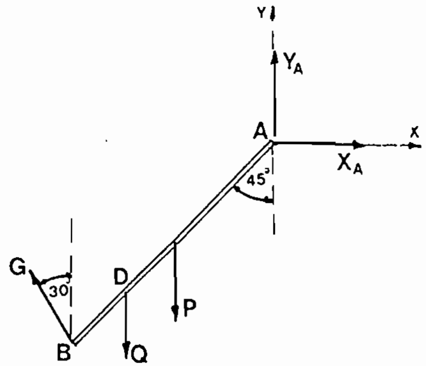
$\sum X_i = 0$:

$$X_A - G \sin 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$G \cos 30^\circ - Q - P + Y_A = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0$:



Slika 40.

$$G \cos 30^\circ \ell \cos 45^\circ + G \sin 30^\circ \ell \sin 45^\circ - Q \frac{3}{4} \ell \cos 45^\circ - P \frac{\ell}{2} \cos 45^\circ = 0. \qquad (3)$$

Posle skraćivanja sa ℓ i sredjivanja, jednačinu (3) možemo napisati u obliku:

$$G \cos(45^\circ - 30^\circ) = \frac{3}{4} Q \cos 45^\circ + \frac{P}{2} \cos 45^\circ,$$

ili

$$G \cos 15^\circ = \frac{3}{4} Q \cos 45^\circ + \frac{P}{2} \cos 45^\circ,$$

Uzimajući u obzir da je: $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$,

imamo da je:

$$G \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) = \frac{3}{4} 200 \frac{\sqrt{2}}{2} + 100 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Odavde je:

$$G = 200(\sqrt{3} - 1) \text{ daN}.$$

Iz jednačine (1) nalazimo X_A:

$$X_A = G \sin 30^\circ = \frac{G}{2} = 100(\sqrt{3} - 1) \text{ daN}.$$

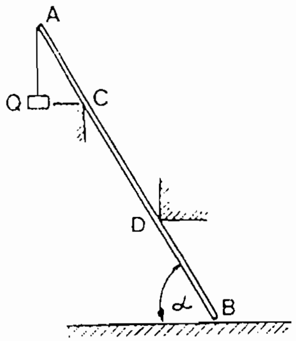
Iz jednačine (2) dobijamo za Y_A:

$$Y_A = Q + P - G\cos 30^\circ = 200 + 100 - 200(\sqrt{3} - 1),$$

$$Y_A = 100\sqrt{3} \ \text{daN}.$$

19. Homogena greda AB dužine ℓ postavljena je izmedju oslonaca C i D a oslanja se na horizontalni glatki pod, sa kojim gradi ugao $\alpha = 60^\circ$. Na levom kraju grede vezan je teret težine Q = 200 daN. Greda je težine G = 50 daN. Odrediti reakcije oslonaca. Dužine su:

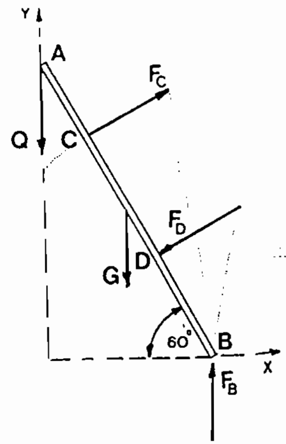
$$\overline{AC} = \frac{\ell}{4}, \qquad \overline{BD} = \frac{\ell}{3}.$$



Slika 41.

Posle oslobadjanja od veza greda će biti opterećena kao na slici 42.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:



Slika 42.

$\sum X_i = 0$:

$$F_C \sin 60^\circ - F_D \sin 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_B - F_D\cos 60^\circ + F_C \cos 60^\circ - G - Q = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0$:

$$F_B\,\ell\cos 60^\circ - F_D\,\frac{2}{3}\ell - G\,\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ + F_C\,\frac{\ell}{4} = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (1) zaključujemo da je $F_C = F_D$.

Iz jednačine (2) sada nalazimo da je:

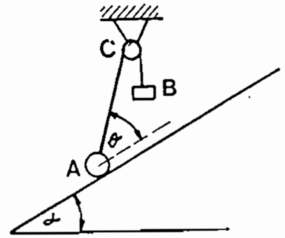
$$F_B = G + Q = 250 \ \text{daN}.$$

Iz (3), uzimajući u obzir da je $F_C = F_D$, dobijamo:

$$F_C = F_D = 270 \ \text{daN}.$$

20. Teret A težine $G = 20\sqrt{2}$ daN održava se u ravnotežnom položaju na glatkoj strmoj ravni nagibnog ugla $\alpha = 30^\circ$ pomoću užeta ACD koje je prebačeno preko nepokretnog kotura C i za čiji je slobodan kraj obešen teret B težine Q = 20 daN.

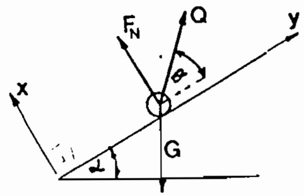
Odrediti: a) reakciju strme ravni,
b) ugao θ u ravnotežnom položaju.



Slika 43.

Pošto smo se oslobodili od veza tereta A će biti opterećen silama, kako je to prikazano na slici 44.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:



Slika 44.

$\sum X_i = 0$:

$$Q\cos\theta - G\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_N + Q\sin\theta - G\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

Iz jednačine (1) nalazimo ugao θ:

$$\cos\theta = \frac{G\sin\alpha}{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \theta = 45^\circ.$$

Reakciju strme ravni F_N sada nalazimo iz jednačine (2)

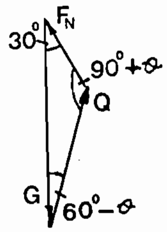
$$F_N = G\cos\alpha - Q\sin\theta = 20\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 20\,\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$F_N = 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)\ \text{daN}.$$

Pošto se ovde radi o sistemu sučeljnih sila, isti zadatak se može rešiti i grafoanalitički. Predhodno nacrtajmo trougao sila (slika 45).

Primenom sinusne teoreme na trougao sila (sl. 45) dolazimo do izraza:

$$\frac{G}{\sin(90-\theta)} = \frac{Q}{\sin 30^\circ} = \frac{F_N}{\sin(60^\circ - \theta)}$$



Slika 45.

Izjednačujući prvi i drugi član gornjeg izraza, dobijamo:

$$\frac{G}{\cos\theta} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}, \text{ odaklje je: } \cos\theta = \frac{G\sin 30^\circ}{Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 45^\circ.$$

Da bism dobili reakciju strme ravni F_N izjednačićemo drugi i treći član:

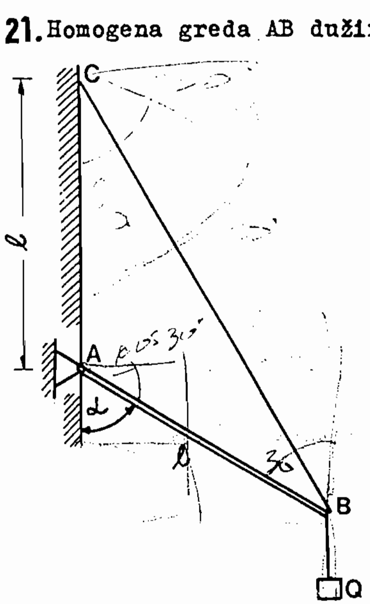
$$\frac{Q}{\sin 30^\circ} = \frac{F_n}{\sin 15^\circ}\ ; \qquad F_N = \frac{Q\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

Uzimajući u obzir da je: $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$,

dobijamo za F_N:

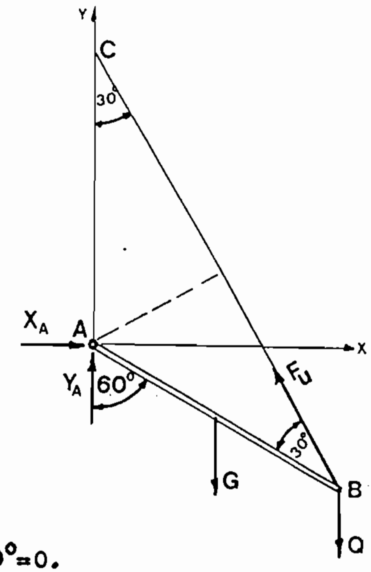
$$F_N = 10\sqrt{2}\,(\sqrt{3} - 1)\ \text{daN}.$$

21. Homogena greda AB dužine ℓ i težine G = 16 daN održava se u ravnotežnom položaju pod uglom $\alpha = 60^\circ$ prema vertikalnoj ravni pomoću zgloba A i užeta BC kako je na slici 46 prikazano. U tački B grede obešen je teret težine Q= 8 daN.
Dužina $\overline{AC} = \overline{AB} = \ell$.
Odrediti reakciju zgloba A i silu u užetu BC.



Slika 46.

Posle oslobadjanja od veza greda AB će biti opterećena silama kako je to pokazano na slici 47.



Slika 47.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$\sum X_i = 0$:

$$X_A - F_u\cos 60^\circ = 0,$$

$\sum Y_i = 0$:

$$Y_A + F_u\sin 60^\circ - G - Q = 0,$$

$\sum M_A = 0$:

$$F_u\,\ell\sin 30^\circ - Q\,\ell\sin 60^\circ - G\,\frac{\ell}{2}\sin 60^\circ = 0.$$

Iz treće (momentne) jednačine nalazimo silu u užetu:

$$F_u = (Q + \tfrac{G}{2})\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz prve jednačine sada nalazimo komponentu X_A:

$$X_A = F_u \cos 60^\circ = 8\sqrt{3} \text{ daN}.$$

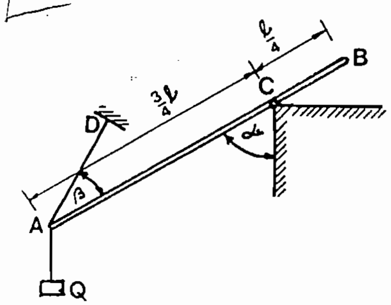
I konačno komponentu Y_A nalazimo iz druge jednačine:

$$Y_A = G + Q - F_u \sin 60^\circ = 0.$$

22. Homogena greda AB dužine ℓ i težine $G = 18$ daN održava se u ravnotežnom položaju pod uglom α prema vertikali pomoću zgloba C i užeta AD, kako je na slici 48 pokazano. Pri tome uže AD sa pravcem štapa zaklapa ugao β. Za kraj A štapa AB obešen je teret težine $Q = 6$ daN.

Odrediti silu u užetu AD i reakcije zgloba C.

Dato je: $\overline{CB} = \frac{\ell}{4}$, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Slika 48.

Na slici 49 prikazane su sile koje deluju na gredu AB. Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$\sum X_i = 0$:

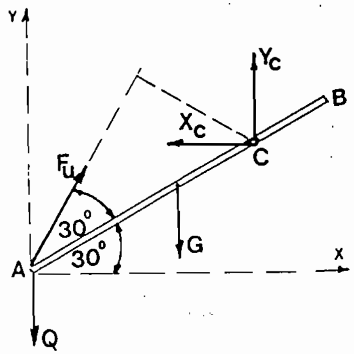
$$F_u \cos 60^\circ - X_c = 0,$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_u \sin 60^\circ - G - Q + Y_c = 0,$$

$\sum M_c = 0$:

$$F_u \frac{3}{4}\ell \sin 30^\circ - Q\frac{3}{4}\ell \cos 30^\circ - G\frac{\ell}{4} \cos 30^\circ = 0.$$



Slika 49.

Iz zadnje jednačine nalazimo silu u užetu F_u:

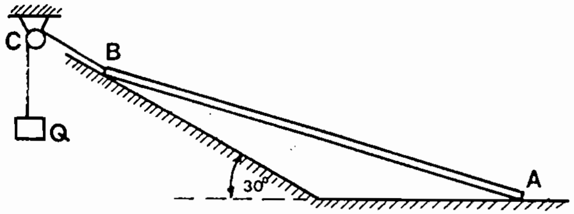
$$F_u = 12\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Reakcije zgloba C nalazimo iz prve, odnosno druge jednačine:

$$X_c = F_u \cos 60^\circ = 6\sqrt{3} \text{ daN},$$

$$Y_c = G + Q - F_u \sin 60^\circ = 6 \text{ daN}.$$

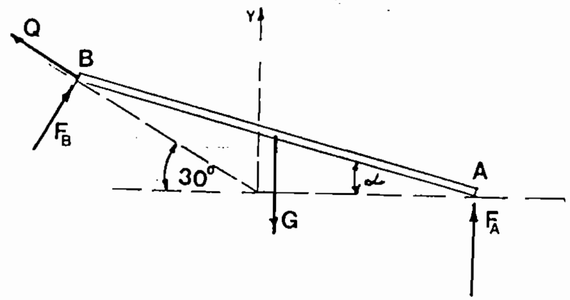
23. Homogena prizmatična greda AB, težine $G = 100$ daN, oslanja se jednim krajem na glatki horizontalni pod a drugim na glatku strmu ravan, koja je nagnuta pod uglom od 30° prema horizontali. Za kraj B grede vezano je uže koje je prebačeno preko nepomičnog kotura C a nosi teret težine Q. Deo BC užeta paralelan je strmoj ravni. Odrediti intenzitet tega Q, pritisak F_A grede na pod i pritisak F_B grede na strmu ravan. Trenje zanemariti.



Slika 50.

Na slici 51 prikazana je greda AB oslobodjena od veza.

Uslovi ravnoteže će sada biti:



Slika 51.

$$\sum X_i = 0: \quad F_B \cos 60^\circ - Q \cos 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_B \sin 60^\circ + Q \sin 30^\circ - G + F_A = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_A \ell \cos\alpha - G \frac{\ell}{2} \cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) nalazimo reakciju poda F_A:

$$F_A = \frac{G}{2} = 50 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (1) izrazimo reakciju F_B preko sile Q:

$$F_B = Q \cdot \text{tg } 60^\circ = Q\sqrt{3}.$$

Kada ovo zamenimo u jednačinu (2) dobijamo:

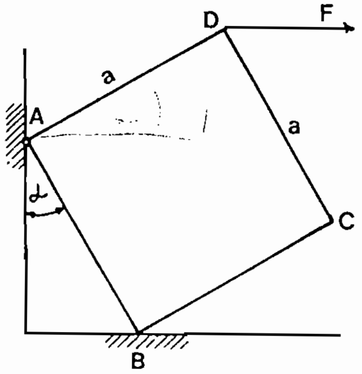
$$Q\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{Q}{2} - G + F_A = 0.$$

Sada je:

$$Q = 25 \text{ daN}, \qquad \text{odnosno} \qquad F_B = 25\sqrt{3} \text{ daN}.$$

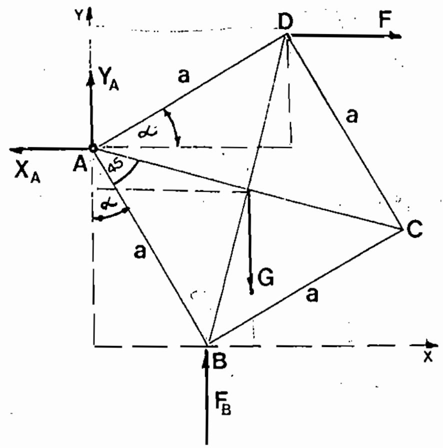
24. Tanka kvadratna ploča strane a i težine G stoji u vertikalnoj ravni. U temenu A je vezana pomoću zgloba, dok se temenom B oslanja o glatki horizontalni pod. U temenu D deluje horizontalna sila $F = \frac{G}{3}$. Odrediti ugao α izmedju strane AB ploče i vertikalnog zida, pod uslovom da reakcija u temenu B bude:

$$F_B = \frac{G}{6}(5 + 3\sqrt{3}).$$



Slika 52.

Ploča ABCD će posle oslobadjanja od veza biti opterećena kako je to pokazano na slici 53.



Slika 53.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0:$$

$$F - X_A = 0,$$

$$\sum Y_i = 0:$$

$$F_B + Y_A - G = 0,$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$F_B\, a \sin\alpha - G \frac{d}{2} \sin(45^\circ + \alpha) - F\, a \sin\alpha = 0.$$

Traženi ugao α nalazimo iz treće (momentne) jednačine ravnoteže. U ovoj jednačini d predstavlja dijagonalu kvadratne ploče, tj. $d = a\sqrt{2}$.

Ovu jednačinu možemo sada napisati u obliku:

$$\frac{G}{6}(5 + 3\sqrt{3})\, a \sin\alpha - G \frac{a\sqrt{2}}{2}(\sin 45^\circ \cos\alpha + \cos 45^\circ \sin\alpha) - \frac{G}{3}\, a \sin\alpha = 0.$$

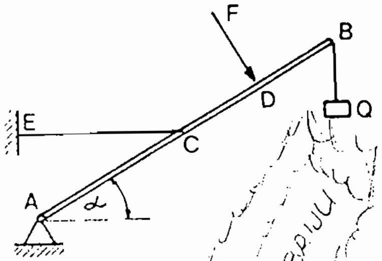
Nakon sredjivanja ova jednačina postaje:

$$\sqrt{3} \sin\alpha = \cos\alpha, \qquad \text{ili} \qquad \sqrt{3}\, \text{tg} = 1,$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{tj.} \qquad \alpha = 30^\circ.$$

25. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine $G = 12$ daN nalazi se u ravnotežnom položaju pod uglom $\alpha = 30^0$ prema horizontali. U tom položaju ga održavaju zglob A i horizontalno uže CE. U tački D štapa deluje sila $F = 4\sqrt{3}$ daN normalno na štap, dok je za slobodan kraj B štapa obešen teret težine $Q = 6$ daN. Odrediti reakcije zgloba A i silu u užetu CE.

Date su dužine: $\overline{AC} = \frac{\ell}{2}$, $\overline{CD} = \overline{DB} = \frac{\ell}{4}$.



Slika 54.

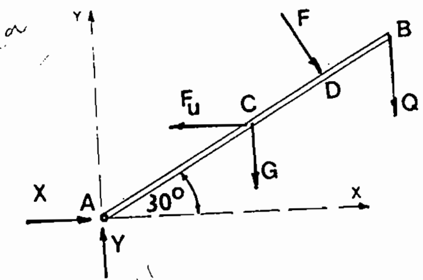
Na slici 55 prikazan je štap AB oslobodjen od veza. Uslovi ravnoteže štapa će biti:

$\sum X_i = 0:$

$$X_A - F_u + F \sin 30^0 = 0,$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_A - G - F \cos 30^0 - Q = 0,$$



Slika 55.

$\sum M_A = 0:$

$$F_u \frac{\ell}{2} \sin 30^0 - G \frac{\ell}{2} \cos 30^0 - F \frac{3}{4}\ell - Q\,\ell \cos 30^0 = 0.$$

Iz treće jednačine nalazimo silu u užetu F_u:

$$\frac{F_u}{4} = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}\, 4\sqrt{3} + 6\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{odavde je:}$$

$$F_u = 36\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Iz prve jednačine nalazimo X_A:

$$X_A = F_u - F \sin 30^0 = 34\sqrt{3} \text{ daN},$$

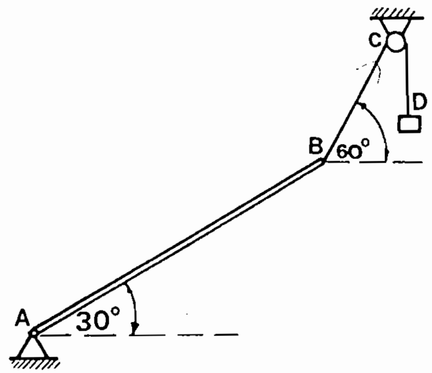
i iz druge jednačine:

$$Y_A = G + Q + F \cos 30^0 = 24 \text{ daN}.$$

26. Homogeni štap AB težine G zglobno je vezan krajem A za pod, a drugim krajem u tački B vezan je pomoću užeta BCD, prebačenog preko kotura u tački C. O drugi kraj užeta obešen je teret D težine Q.

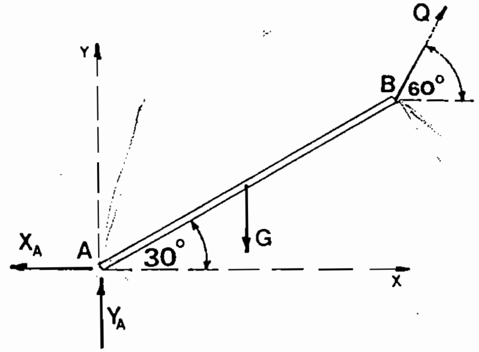
Kakav odnos treba da postoji izmedju G i Q ($\frac{G}{Q} = ?$), pa da štap AB zaklapa ugao od 30^0, a krak BC užeta ugao od 60^0 sa horizontalom.

Izračunati zatim reakciju zgloba A u funkciji težine štapa G.



Slika 56.

Štap AB oslobodjen od veza prikazan je na slici 57.



Slika 57.

Jednačine ravnoteže će ovde glasiti:

$\sum X_i = 0:$

$$Q \cos 60^0 - X_A = 0,$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_A - G + Q \sin 60^0 = 0,$$

$\sum M_A = 0:$

$$Q \sin 60^0 \ell \cos 30^0 - Q \cos 60^0 \cdot \ell \sin 30^0 - G \frac{\ell}{2} \cos 30^0 = 0$$

Treću (momentnu) jednačinu možemo napisati u obilu:

$$Q\ell(\sin 60^0 \cdot \cos 30^0 - \cos 60^0 \cdot \sin 30^0) = \frac{G \cdot \ell}{2} \cos 30^0,$$

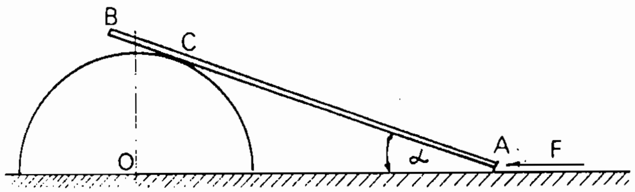
$$Q \sin(60^0 - 30^0) = \frac{G}{2} \cos 30^0,$$

$$Q \sin 30^0 = \frac{G}{2} \cos 30^0, \quad Q = \frac{G}{2} \operatorname{cotg} 30^0, \text{ ili } \quad \frac{G}{Q} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Reakcije X_A i Y_A nalazimo iz prve, odnosno druge jednačine:

$X_A = Q\cos 60^0 = \frac{G\sqrt{3}}{4}$, $Y_A = G - Q\sin 60^0 = \frac{G}{4}$.

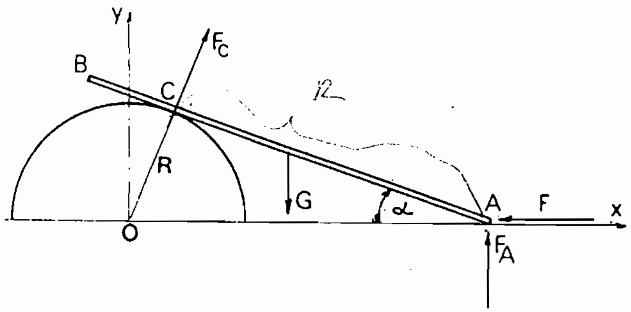
27 Homogena greda AB dužine 2ℓ i težine G oslanja se krajem A na glatku horizontalnu ravan, dok se u tački C oslanja na glatku polukružnu površinu, poluprečnika R, čiji je centar u O (slika 58). Ako je $\ell = 2R$ odrediti horizontalnu silu F, kojom treba delovati na kraj A štapa AB, kako bi štap zauzeo ravnotežni položaj pod uglom α prema horizontali.



Slika 58.

Odrediti pritiske štapa u tačkama A i C.

Sile koje deluju na štap AB prikazane su na slici 59.



Slika 59.

Napišimo uslove ravnoteže za ovaj sistem sila:

$$\sum X_i = 0: \quad F_c \sin\alpha - F = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_c \cos\alpha - G + F_A = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_c R \operatorname{cotg}\alpha - G\ell\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Iz jednačine (3) uzimajući u obzir da je $\ell = 2R$ i da je $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, nalazimo reakciju u tački C:

$$F_c = 2G\sin\alpha .$$

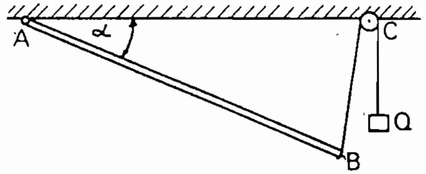
Iz jednačine (1) nalazimo potrebnu veličinu sile F:

$$F = 2G\sin^2\alpha .$$

I konačno iz drugog uslova ravnoteže dobijamo za reakciju u tački A:

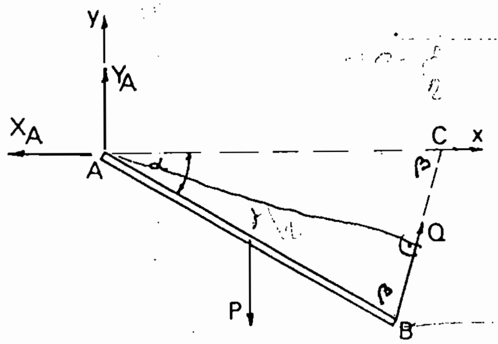
$$F_A = G(1 - \sin 2\alpha).$$

28. Homogeni štap AB dužine 2a i težine P pričvršćen je zglobom za nepomičnu tačku A. Za drugi kraj B štapa vezano je idealno savitljivo uže, koje je prebačeno preko malog kotura C, kako je na slici 60 pokazano. Za drugi kraj užeta privezan je teret težine Q. Odrediti ravnotežni položaj štapa AB (ugao α)i reakciju zgloba A, za slučaj da je AB = AC.



Slika 60.

Štap AB je opterećen silama kako je to pokazano na sl.61.



Slika 61.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila su:

$$\sum X_i = 0: \quad Q\cos\beta - X_A = 0,$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - P + Q\sin\beta = 0,$$

$$\sum Q.2a\cos\frac{\alpha}{2} - P\,a\cos\alpha = 0.$$

Gde je ugao $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Gornje jednačine ravnoteže sada postaju:

$$\sum X_i = 0: \quad Q\sin\frac{\alpha}{2} - X_A = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - P + Q\cos\frac{\alpha}{2} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad 2Q\cos\frac{\alpha}{2} - P\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Uzimajući u obzir da je:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1,$$

jednačinu (3) možemo napisati u obliku:

$$2P\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2Q\cos\frac{\alpha}{2} - P = 0.$$

Rešenje gornje kvadratne jednačine je:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 2P^2}}{2P} .$$

Ostaje još da se prodiskutuje da li ispred korena treba zadržati obadva znaka ili samo jedan. Pošto je podkorena veličina veća od Q, to znači da bi uzimanjem u obzir znaka −, dobili da je $\cos\frac{\alpha}{2} < 0$, a to odgovara tupom uglu. Pošto je prema položaju štapa AB na slici 60 ugao α oštar, u izrazu za $\cos\frac{\alpha}{2}$ zadržaćemo samo znak +.

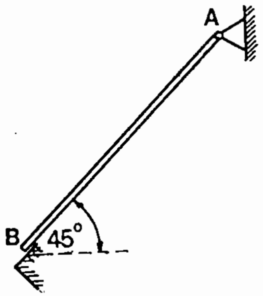
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{Q + \sqrt{Q^2 + 2P^2}}{2P} .$$

Iz jednačine (1), odnono (2) nalazimo reakcije zgloba A:

$$X_A = Q\sin\frac{\alpha}{2}, \qquad Y_A = P - Q\cos\frac{\alpha}{2}$$

29. Homogena greda AB dužine 2a i težine G može se obrtati oko zgloba A, a slobodno se oslanja u tački B. Greda sa horizontalom zaklapa ugao od 45°.

Odrediti reakcije u tačkama A i B.



Slika 62.

Uklanjanjem veza u tačkama A i B nalazimo sile koje deluju na gredu AB (sl.63).

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila su:

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - F_B\cos 45^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_B\cos 45^\circ - G + Y_A = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_B.2a - G.a.\cos 45^\circ = 0. \qquad (3)$$

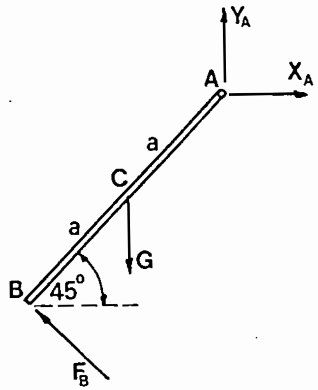
Iz jednačine (3) nalazimo F_B:

$$F_B = \frac{\sqrt{2}}{4}\,G.$$

Iz jednačine (1),odnosno (2) nalazimo X_A i Y_A:

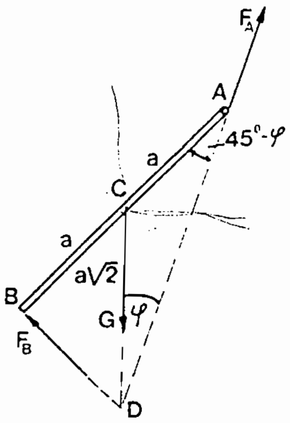
$$X_A = \frac{G}{4}, \qquad Y_A = \frac{3}{4}\,G.$$

Dok je: $$F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{\frac{G^2}{16} + \frac{9G^2}{16}} = \frac{\sqrt{10}}{4}\,G.$$



Slika 63.

Isti zadatak možemo rešiti pomoću uslova ravnoteže za tri sile. Tri sile su u ravnoteži ako se njihove napadne linije seku u jednoj tački i ako one obrazuju zatvoren trougao sila.



Slika 64.

Na slici 64 se vidi da se napadne linije sila G, F_A i F_B seku u tački D.

Ove tri sile obrazuju zatvoren trougao sila koji je prikazan na slici 65.

Iz slike 65 na osnovu sinusne teoreme sledi:

$$\frac{F_A}{\sin 45^\circ} = \frac{F_B}{\sin\varphi} = \frac{G}{\sin(135^\circ-\varphi)} .$$

Iz gornjeg izraza nalazimo reakcije F_A i F_B u funkciji ugla φ.

$$F_A = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(135^\circ-\varphi)}\, G; \qquad F_B = \frac{\sin\varphi}{\sin(135^\circ-\varphi)} .$$

Ugao φ nalazimo iz trougla ACD (slika 64). Koristeći se sinusnom teoremom, imamo da je:

$$\frac{AC}{\sin\varphi} = \frac{CD}{\sin(45^\circ-\varphi)}, \quad \text{ili}$$

$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{a\sqrt{2}}{\sin(45^\circ-\varphi)} .$$

Posle skraćivanja sa a imamo da je:

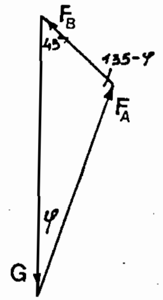
$$\sqrt{2}\sin\varphi = \sin(45^\circ-\varphi),$$

$$\sqrt{2}\sin\varphi = \sin 45^\circ\cos\varphi - \cos 45^\circ\sin\varphi ,$$

$$\sqrt{2}\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\varphi - \sin\varphi),$$

$$2\sin\varphi = \cos\varphi - \sin\varphi ,$$

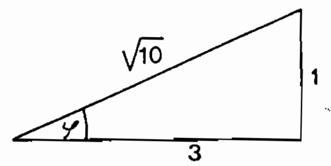
$$3\sin\varphi = \cos\varphi, \quad \text{ili konačno:} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3} .$$



Slika 65.

Medjutim, nama za izračunavanje reakcija F_A i F_B treba $\sin\varphi$ i $\sin(135^\circ-\varphi)$.

Mi znamo da je $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{1}{3}$, a tangens je odnos suprotne i nalegle katete. Prema tome, mi možemo konstruisati trougao čija je suprotna kateta 1, a nalegla 3 (slika 66). Hipotenuzu izračunavamo po Pitagorinoj teoremi i ona jednaka $\sqrt{10}$.



Slika 66.

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} ,$$

$$\cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10},$$

Sada je:

$$\sin(135^\circ-\varphi) = \sin 135^\circ\cos\varphi - \cos 135^\circ \sin\varphi .$$

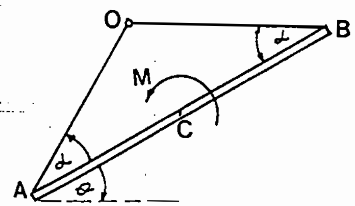
$$\sin(135^\circ-\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{3\sqrt{10}}{10} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5} .$$

Kada nadjene vrednosti za $\sin\varphi$ i $\sin(135^\circ-\varphi)$ uvrstimo u izraze za F_A i F_B, dobijamo:

$$F_A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\,G = \frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{5}}\,G = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}\,G,$$

$$F_B = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\,G = \frac{5\sqrt{10}}{20\sqrt{5}}\,G = \frac{\sqrt{2}}{4}\,G .$$

30. Homogena greda AB dužine $\ell = 2$ m i težine G = 20 daN, vezana je pomoću užadi OA i OB za prsten O. Na sredini grede (C) deluje obrtni moment M = 10 daN m. Za ugao $\alpha = 30^\circ$ odrediti: a) veličine sila u oba užeta, b) ravnotežni ugao θ grede sa pravcem horizontale.



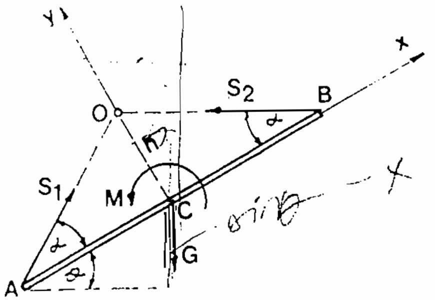
Slika 67.

Napišimo jednačine ravnoteže sila koje deluju na gredu AB u odnosu na koordinatni sistem prikazan na slici 68:

$$\sum X_i = 0: \quad S_1\cos 30^\circ - G\sin\theta - S_2\cos 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad S_1\sin 30^\circ - G\cos\theta + S_2\sin 30^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_O = 0: \quad M - G \sin\theta\, h = 0. \qquad (3)$$



Slika 68.

Iz jednačine (3) nalazimo $\sin\theta$:

$$\sin\theta = \frac{M}{Gh},$$

gde je h visina ravnokrakog trugla AOB:

$$h = \frac{\ell}{2}\,\mathrm{tg}\,30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \mathrm{m}.$$

Sada je:

$$\sin\theta = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

tj. $\theta = 60^\circ$.

Jednačine (1) i (2) sada postaju:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}S_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 = G \sin 60^\circ,$$

$$\frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{2}S_2 = G\cos 60^\circ.$$

Ili:

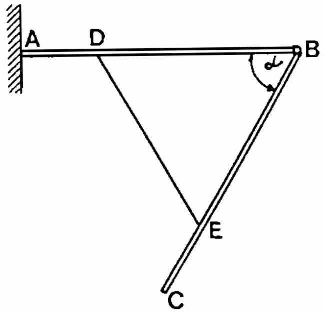
$$S_1 - S_2 = 20$$

$$S_1 + S_2 = 20.$$

Odavde je: $S_1 = 20$ daN, $S_2 = 0$.

1.2 RAVNOTEŽA SISTEMA KRUTIH TELA U RAVNI

31. Konstrukcija se sastoji od dve homogene grede AB i BC jednakih dužina $\ell = 0{,}8$ m i jednakih težina $G = 90$ daN i užeta DE, čija se težina zanemaruje. Greda AB je horizontalna i uklještena na kraju A, dok je zglobom B vezana za gredu BC koja stoji pod uglom $\alpha = 60^\circ$ u odnosu na nju. Izračunati reakcije spoljašnjih i unutrašnjih veza sistema. $\overline{AD} = \overline{CE} = \frac{\ell}{4}$.



Slika 69.

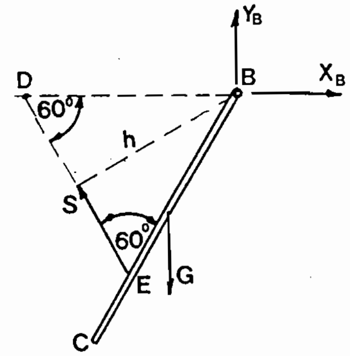
Posmatrajmo prvo ravnotežu grede BC. Nakon razdvajanja sistema greda BC će biti opterećena kako je to pokazano na s.70.

Napišimo jednačine ravnoteže za ovaj sistem sila:

$$\sum X_i = 0: \quad X_B - S\cos 60^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad S\sin 60^\circ - G + Y_B = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0: \quad S.h - G\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ = 0. \qquad (3)$$



Slika 70.

U jednačini (3) h je krak sile S (sile u užetu) za tačku B, a to je u stvari visina ravnostranog trougla BED i ona je jednaka:

$$h = \frac{\overline{BE}\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\ell.$$

Tako da jednačina (3) sada postaje:

$$S\,\frac{3\sqrt{3}}{8}\ell - G\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ = 0.$$

Nakon skraćivanja sa ℓ iz gornje jednačine nalazimo silu u užetu:

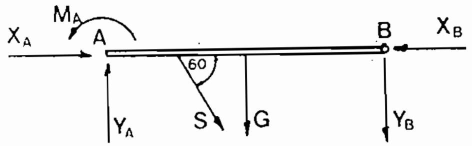
$$S = 20\sqrt{3}\ \mathrm{daN}.$$

Iz jednačine (1), odnosno (2) sada dobijamo:

$$X_B = S\cos 60^\circ = \frac{S}{2} = 10\sqrt{3}\ \text{daN},$$

$$Y_B = G - S\sin 60^\circ = 90 - 20\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 60\ \text{daN}.$$

Posmatrajmo sada ravnotežu grede AB. Ona je opterećena kako je to pokazano na slici 71.



Slika 71.

Uslovi ravnoteže za gredu AB će biti:

$$\sum X_i = 0: \qquad X_A + S\cos 60^\circ - X_B = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \qquad Y_A - S\sin 60^\circ - G - Y_B = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_A = 0: \qquad M_A - S\sin 60^\circ\,\frac{\ell}{4} - G\,\frac{\ell}{2} - Y_B\ell = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (4) nalazimo:

$$X_A = X_B - S\cos 60^\circ = 10\sqrt{3} - 10\sqrt{3} = 0\ \text{daN}.$$

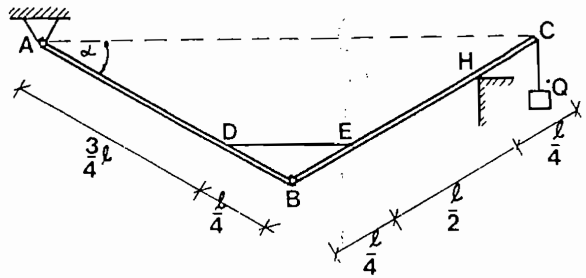
Komponentu Y_A dobijamo iz jednačine (5):

$$Y_A = G + Y_B + S\sin 60^\circ = 90 + 60 + 20\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 180\ \text{daN}.$$

I konačno, moment uklještenja M_A dobijamo iz jednačine (6):

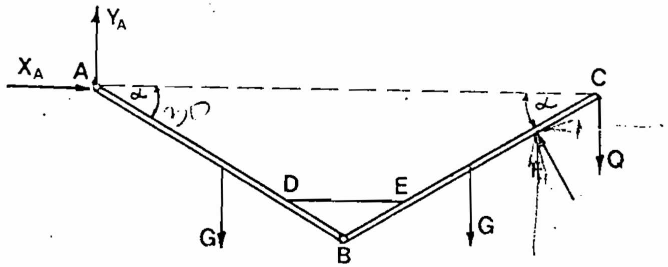
$$M_A = S\sin 60^\circ\,\frac{\ell}{4} + G\,\frac{\ell}{2} + Y_D\ell = 6 + 36 + 48 = 90\ \text{daNm}.$$

32. Na slici 72 je data konstrukcija koja se sastoji od dva jednaka homogena štapa svaki dužine ℓ i težine G= 40 daN, i tankog štapa DE čiju ćemo težinu zanemariti. U slučaju da je ugao $\alpha = 30^\circ$ a veličina tereta Q= 100 daN, odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije veza date konstrukcije.



Slika 72.

Posmatraćemo prvo konstrukciju kao celinu. Ona je opterećena silama kako je to pokazano na slici 73.



Slika 73.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \qquad X_A - F_H\sin 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \qquad Y_A - 2G + F_H\cos 30^\circ - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \qquad F_H\cos 30^\circ\left(\ell + \frac{3}{4}\ell\right)\cos 30^\circ - F_H\sin 30^\circ\,\frac{\ell}{4}\sin 30^\circ -$$

$$- Q\,2\ell\cos 30^\circ - G\left(\ell + \frac{\ell}{2}\right)\cos 30^\circ - G\,\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ = 0. \qquad (3)$$

U izrazu (3) je moment sile F_H za tačku A napisan na osnovu Varinjonove teoreme.

Iz jednačine (3) nalazimo reakciju oslonca H:

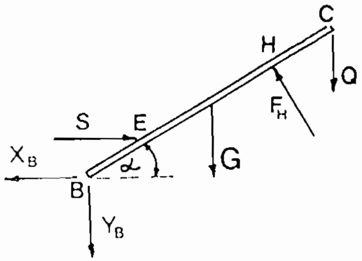
$$F_H = 112\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

X_A i Y_A nalazimo iz jednačina (1) i (2):

$$X_A = F_H \sin 30^\circ = 56\sqrt{3}\ \text{daN},$$

$$Y_A = 2G + Q - F_H \cos 30^\circ = 80 + 100 - 168 = 12\ \text{daN}.$$

Posmatrajmo sada ravnotežu štapa BC, koji je opterećen silama kako je to pokazano na slici 74.



Slika 74.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad -X_B + S - F_H \sin 30^\circ = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -Y_B - G + F_H \cos 30^\circ - Q = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_B = 0: \quad -Q\,\ell \cos 30^\circ + F_H \frac{3}{4}\ell - G\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ - S\frac{\ell}{4}\sin 30^\circ = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (6) nakon skraćivanja sa ℓ nalazimo silu u štapu DE.

$$S = 192\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačina (4) i (5) nalazimo komponente reakcije zgloba B.

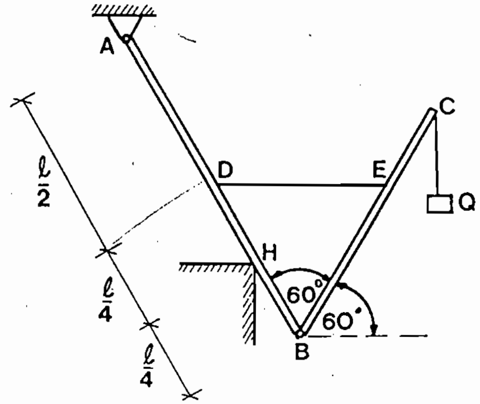
$$X_B = S - F_H \sin 30^\circ = S - \frac{F_H}{2} = 136\sqrt{3}\ \text{daN},$$

$$Y_B = -G + F_H \cos 30^\circ - Q = 28\ \text{daN}.$$

33. Konstrukcija se sastoji od dva homogena štapa: $AB = \ell$ i $BC = \frac{3}{4}\ell$, jednakih težina $G = 24$ daN, koji leže u vertikalnoj ravni.

Štapovi su, kao što se vidi na slici 75, medjusobno vezani pomoću zgloba B i horizontalnog užeta DE. Za kraj C štapa BC vezan je teret težine $Q = 12$ daN.

Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 75.

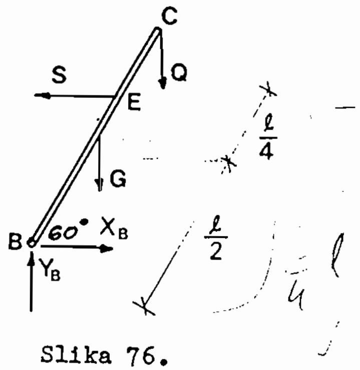
Rastavićemo gornji sistem štapova i prvo ćemo posmatrati ravnotežu štapa BC, koji je opterećen silama kako je to pokazano na slici 76.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad X_B - S = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_B - G - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_B = 0: \quad -Q\,\frac{3}{4}\ell \cos 60^\circ + S\,\frac{\ell}{2}\sin 60^\circ - G\,\frac{3}{8}\ell \cos 60^\circ = 0. \qquad (3)$$



Slika 76.

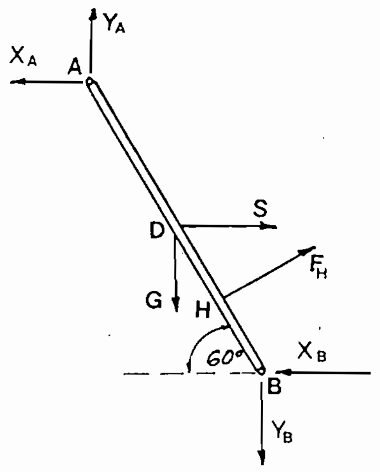
Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo silu u užetu DE:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} S = \frac{3}{8} Q + \frac{3}{16} G; \qquad S = 12\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačina (1) i (2) nalazimo X_B, odnosno Y_B.

$$X_B = S = 12\sqrt{3}\ \text{daN}, \qquad Y_B = G + Q = 36\ \text{daN}.$$

Štap AB će biti opterećen kako je to pokazano na slici 77.



Slika 77.

Uslovi ravnoteže će sada biti:

$$\sum X_i = 0: \quad -X_A + S + F_H \sin 60^o - X_B = 0, \tag{4}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - G + F_H \cos 60^o - Y_B = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_A = 0: \quad -X_B \ell \sin 60^o - Y_B \ell \cos 60^o + F_H \frac{3}{4}\ell + S \frac{\ell}{2} \sin 60^o - G \frac{\ell}{2} \cos 60^o = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo reakciju oslonca H:

$$F_H = 44 \text{ daN}.$$

Komponente reakcije zgloba A nalazimo iz jednačina (1) i (2):

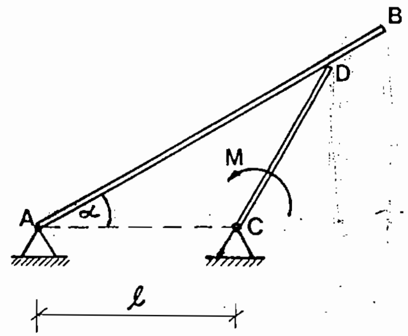
$$X_A = S + F_H \sin 60^o - X_B = 12\sqrt{3} + 44\,\frac{\sqrt{3}}{2} - 12\sqrt{3} = 22\sqrt{3} \text{ daN},$$

$$Y_A = G - F_H \cos 60^o + Y_B = 24 - 22 + 36 = 38 \text{ daN}.$$

34. Datu ravnu konstrukciju sačinjavaju: štapovi $\overline{AB} = 2\ell$, i $\overline{CD} = \ell$, čije su težine 2G i G respektivno i ležišta A i C na rastojanju $\overline{AC} = \ell$. Štapovi se bez trenja oslanjaju u D, tako da duži od njih gradi ugao $\alpha = 30^o$ sa horizontalom. Ravnotežu konstrukcije ostvaruje moment M koji deluje na kraći štap u datom smeru. Ako je težina G = 60 daN i dužina $\ell = 2$ m odrediti:

a) spoljašnje i unutrašnje reakcije konstrukcije,

b) veličinu momenta M.



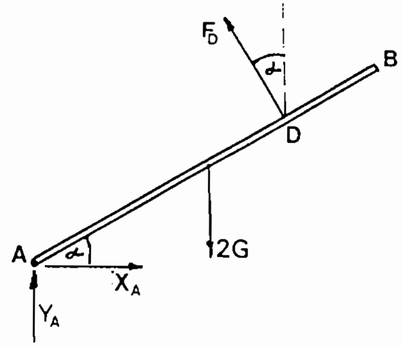
Slika 78.

Posmatrajmo prvo ravnotežu štapa AB, slika 79.

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - F_D \sin 30^o = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - 2G + F_D \cos 30^o = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_D \cdot \overline{AD} - 2G\ell \cos 30^o = 0. \tag{3}$$



Slika 79.

Gde je dužina $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = 2\ell \cos 30^o = \ell\sqrt{3} \text{ m}.$$

Iz jednačine (3) sada dobijamo:

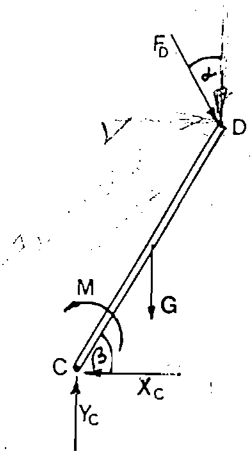
$$F_D \ell\sqrt{3} = 2G\ell\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ili} \quad F_D = 60 \text{ daN}.$$

Komponente reakcije zgloba A nalazimo iz jednačina (1) i (2):

$$X_A = F_D \sin 30^o = 30 \text{ daN},$$

$$Y_A = 2G - F_D \cos 30^o = 30(4 - \sqrt{3}) \text{ daN}.$$

Stap CD je opterećen, kako je to pokazano na slici 80.



Slika 80.

$$\sum X_i = 0: \quad F_D \sin 30^\circ - X_c = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_c - G - F_D \cos 30^\circ = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_C = 0: \quad M - G\,\frac{\ell}{2}\cos\beta - F_D \sin 30^\circ \ell \sin\beta -$$

$$- F_D \cos 30^\circ \ell \cos\beta = 0. \qquad (6)$$

Moment sile F_D za tačku C u izrazu (6) smo tražili pomoću Varinjonove teoreme, gde je ugao $\beta = 60^\circ$.

Komponentu X_c nalazimo iz jednačine (4):

$$X_C = F_D \sin 30^\circ = 30 \text{ daN}.$$

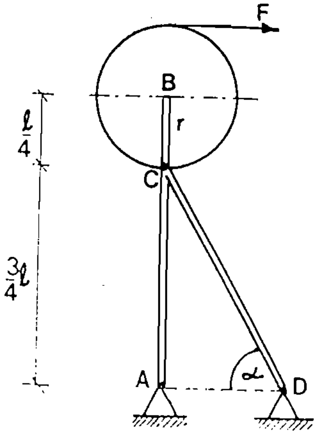
Iz jednačine (5) nalazmo:

$$Y_C = G + F_D \cos 30^\circ = 30(2 + \sqrt{3}) \text{ daN}.$$

Potrebnu veličinu momenta M dobijamo iz jednačine (6):

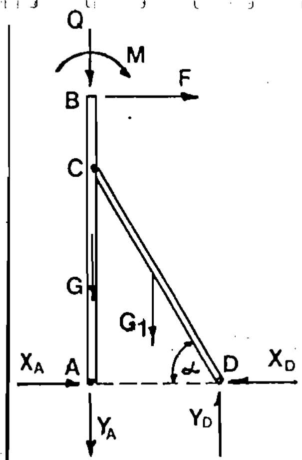
$$M = 30(1 + 2\sqrt{3}) \text{ daNm}.$$

35. Konstrukcija prikazana na slici 81 sastoji se od dva homogena štapa AB i CD čije su dužine i težine respektivno: ℓ, G= 30 daN i ℓ_1, G_1= 20 daN, kao i kotura poluprečnika $r = \frac{\ell}{4}$ i težine Q = 10 daN. Konstrukcija stoji u vertikalnoj ravni, a veze štapova su zglobne. Na obimu kotura deluje horizontalna sila F= $40\sqrt{3}$ daN, kako je pokazano. U ravnotežnom položaju kada je štap AB vertikalan i ugao $\alpha = 60^\circ$ odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije konstrukcije.



Slika 81.

Posmatrajmo prvo sistem kao celinu (slika 82).



Slika 82.

Ovde smo horizontalnu silu F koja deluje na obimu kotura, redukovali u tačku B. Kao rezultat ove redukcije u tački B će se javiti ta ista sila F i moment sprega intenziteta $M = F.r = F.\frac{\ell}{4} = 10\sqrt{3}\,\ell$ daNm.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \; X_A + F - X_D = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \; -Y_A + Y_D - G - G_1 - Q = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \; Y_D . \frac{3}{4}\ell \operatorname{cotg} 60^\circ - G_1 \frac{\ell_1}{2} \cos 60^\circ -$$

$$- F.\ell - M = 0. \qquad (3)$$

Gde je $\ell_1 = \dfrac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\frac{3}{4}\ell}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ell$.

Iz jednačine (3) nalazimo da je:

$$Y_D = 210 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (2) imamo da je:

$$Y_A = Y_D - G - G_1 - Q = 210 - 30 - 20 - 10 = 150 \text{ daN}.$$

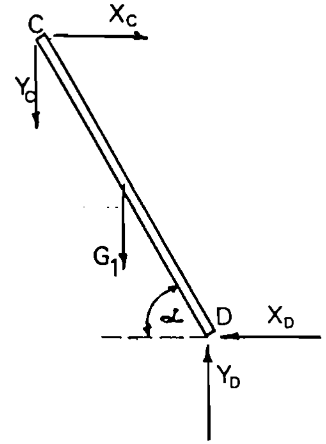
Posmatrjamo sada ravnotežu štapa CD, slika 83.

$$\sum X_i = 0: \quad X_c - X_D = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_D - G_1 - Y_C = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_c = 0: \quad Y_D \ell_1 \cos 60^\circ - X_D \ell_1 \sin 60^\circ -$$

$$G_1 \frac{\ell_1}{2} \cos 60^\circ = 0. \qquad (6)$$



Slika 83.

Iz jednačine (6) nalazimo da je:

$$X_D = \frac{200\sqrt{3}}{3} \text{ daN}.$$

Na osnovu (4) zaključujemo da je

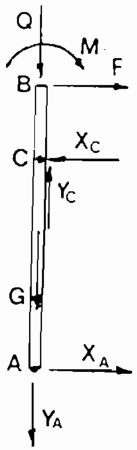
$$X_c = X_D = \frac{200\sqrt{3}}{3} \text{ daN}.$$

Iz jednačine (1) imamo sada da je:

$$X_A = X_D - F = \frac{200\sqrt{3}}{3} - 40\sqrt{3} = \frac{80\sqrt{3}}{3}\ \text{daN.}$$

Iz jednačine (5) je: $Y_C = Y_D - G_1 = 210 - 20 = 190$ daN.

Na ovaj način smo odredili sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema. Ostale su nam medjutim neiskorišćene još tri jednačine ravnoteže za štap AB. Ove tri jednačine nam mogu poslužiti za kontrolu.



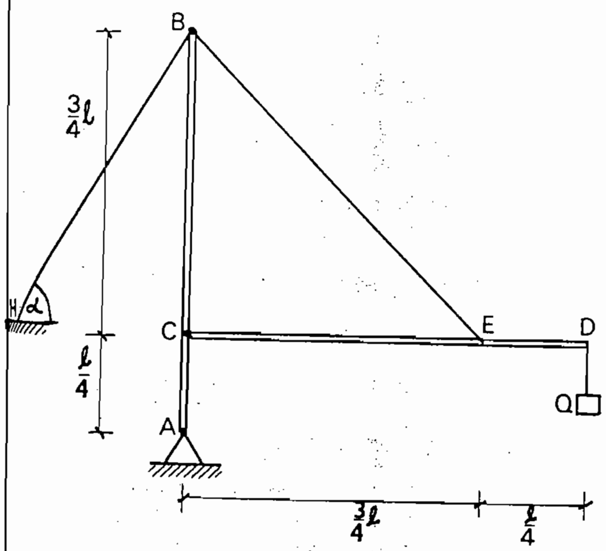
Slika 84.

$$\sum X_i = 0:\quad F - X_c + X_A = 40\sqrt{3} - \frac{200\sqrt{3}}{3} + \frac{80\sqrt{3}}{3} = 0,$$

$$\sum Y_i = 0:\quad -Q + Y_c - G - Y_A = -10 + 190 - 30 - 150 = 0.$$

$$\sum M_A = 0:\quad M + F.\ell - X_c\frac{3}{4}\ell = \ell(10\sqrt{3} + 40\sqrt{3} - 50\sqrt{3}) = 0.$$

36. Dva štapa AB i CD jednakih dužina ℓ i jednakih težina G = 20 daN vezana su pomoću zgloba C pod pravim uglom i čine konstrukciju koja stoji u ravnoteži pod dejstvom dva užeta: BE i BH i zgloba A. Na kraju štapa CD nalazi se teret težine Q = 50 daN. Ako je ugao $\alpha = 60°$, odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije u konstrukciji, kao i silu u užetu BH.



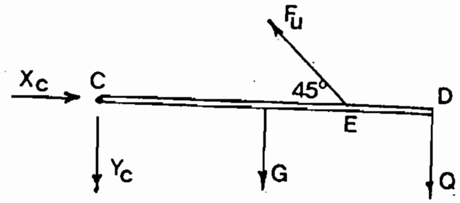
Slika 85.

Posmatrajmo prvo ravnotežu štapa CD, slika 86.

$$\sum X_i = 0:\quad X_c - F_u\cos 45° = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0:\quad -Y_c - G + F_u\sin 45° - Q = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_c = 0:\quad -Q.\ell + F_u\sin 45°\,\frac{3}{4}\ell - G\frac{\ell}{2} = 0. \quad (3)$$



Slika 86.

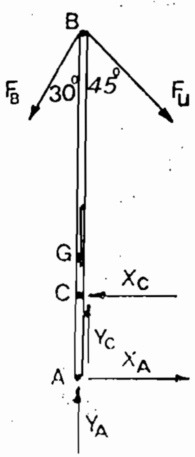
Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo silu u užetu BE:

$$F_u = 80\sqrt{2}\ \text{daN.}$$

Iz jednačina (1) i (2) sada nalazimo komponente reakcije zgloba C:

$$X_c = F_u\cos 45° = 80\ \text{daN,}$$

$Y_c = -G + F_u \sin 45^\circ - Q = -20 + 80 - 50 = 10$ daN.



Slika 87.

Štap AB: (slika 87)

$$\sum X_i = 0: \quad -F_B \sin 30^\circ + F_u \cos 45^\circ - X_c + X_A = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -F_B \cos 30^\circ - F_u \cos 45^\circ - G + Y_c + Y_A = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F_B \sin 30^\circ \ell + F_u \cos 45^\circ \ell - X_c \frac{\ell}{4} = 0. \quad (6)$$

Iz jednačine (6) nalazimo silu u užetu BH:

$$F_B = 120 \text{ daN}.$$

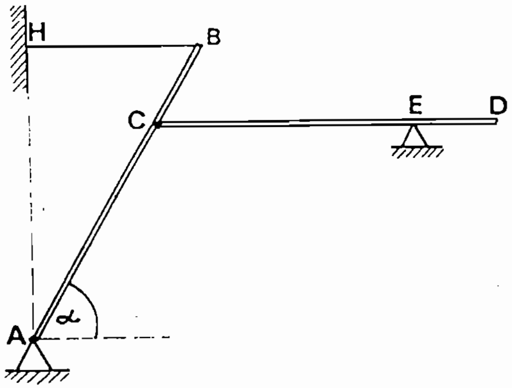
Reakcije X_A, odnosno Y_A nalazimo iz jednačina (4) i (5):

$$X_A = F_B \sin 30^\circ - F_u \cos 45^\circ + X_c, \quad \text{tj.}$$

$$X_A = 60 \text{ daN}.$$

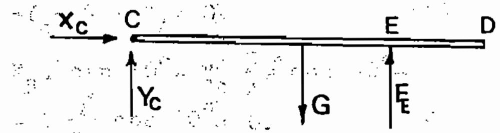
$$Y_A = F_B \cos 30^\circ + F_u \cos 45^\circ + G - Y_c = 30(2\sqrt{3} + 3) \text{ daN}.$$

37. Konstrukcija se sastoji od dva homogena štapa jednakih dužina ℓ i težina $G = 60$ daN. Štap AB vezan je pomoću zgloba A za pod sa kojim gradi ugao $\alpha = 60^\circ$, dok mu je kraj B vezan pomoću horizontalnog užeta BH za zid. Štap CD je vezan pomoću zgloba C za štap AB a oslanja se slobodno u E, tako da zauzima horizontalni ravnotežni položaj. Ako su dužine: $\overline{AC} = \overline{CE} = \frac{3}{4}\ell$ izračunati sve unutrašnje i spoljašnje reakcije konstrukcije.



Slika 88.

a) ŠTAP CD (slika 89):



Slika 89.

$$\sum X_i = 0: \quad X_c = 0, \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_c - G + F_E = 0, \quad (2)$$

$$\sum M_c = 0: \quad F_E \frac{3}{4}\ell - G \frac{\ell}{2} = 0. \quad (3)$$

Iz jednačine (3) nalazimo reakciju oslonca E:

$$F_E = 40 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (1) i (2) sledi:

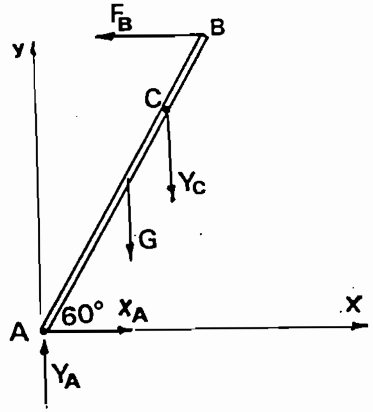
$$X_c = 0, \qquad Y_c = G - F_E = 20 \text{ daN}.$$

b) ŠTAP AB (slika 90):

$$\sum X_i = 0: \quad -F_B + X_A = 0, \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -Y_c - G + Y_A = 0, \quad (5)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_B \ell \sin 60^\circ - Y_c \frac{3}{4}\ell \cos 60^\circ - G \frac{\ell}{2} \cos 60^\circ = 0. \quad (6)$$



Slika 90.

Iz jednačine (6) nalazimo silu u užetu BH:

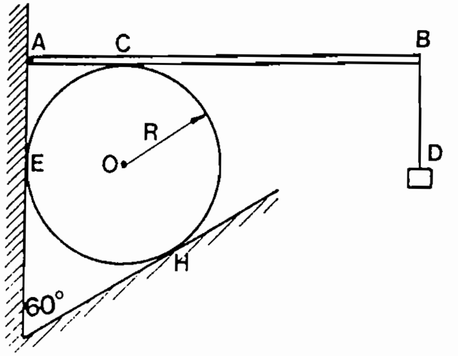
$$F_B = 15\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Komponente reakcije zgloba A nalazimo iz jednačina (4) i (5):

$$X_A = F_B = 15\sqrt{3} \text{ daN},$$

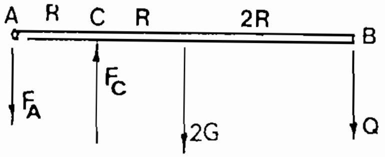
$$Y_A = Y_c + G = 80 \text{ daN}.$$

38. Valjak O težine G, poluprečnika R, leži izmedju vertikalne i kose ravni koje medju sobom zaklapaju ugao od 60^o. Horizontalni štap AB dužine $\ell = 4R$, težine 2G, zglobno je vezan za vertikalnu ravan i oslanja se na valjak. Na kraju B štapa obešen je teret D težine G. Odrediti reakciju zgloba A i pritiske valjka na vertikalnu i kosu ravan.



Slika 91.

Nakon rastavljanja sistema štap AB će biti opterećen kako je to pokazano na slici 92:



Slika 92.

Ovde se očigledno radi o sistemu paralelnih sila, čiji su uslovi ravnoteže:

$$\sum Y_i = 0: \quad -F_A + F_c - 2G - Q = 0, \qquad (1)$$

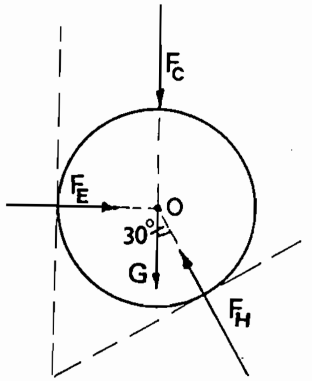
$$\sum M_A = 0: \quad -Q.4R - 2G.2R + F_c.R = 0. \qquad (2)$$

Iz jednačine (2) posle skraćivanja sa R nalazimo silu F_c:

$$F_c = 4Q + 4G = 8G.$$

Iz jednačine (1) dobijamo za reakciju zgloba A:

$$F_A = F_c - 2G - Q = 5G.$$



Slika 93.

Valjak O će sada biti opterećen, kako je to pokazano na slici 93.

Pošto se ovde radi o sistemu sučeljnih sila uslovi ravnoteže će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad F_E - F_H \sin 30^o = 0, \qquad (3)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_H \cos 30^o - F_c - G = 0. \qquad (4)$$

Iz jednačine (4) nalazimo:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_H = F_c + G = 9G,$$

$$F_H = 6\sqrt{3}\ G.$$

Dok je iz jednačine (3): $\quad F_E = F_H \sin 30^o = 3\sqrt{3}\ G.$

Do istih rezultata možemo doći i grafoanalitički. Pošto je sistem sučeljnih sila na slici 93 u ravnoteži, one obrazuju zatvoren poligon sila (slika 94).

Rešavajući trougao na slici 94, nalazimo da je:

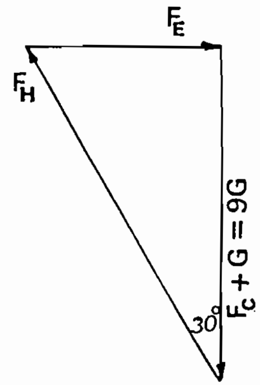
$$F_E = (F_c + G) \operatorname{tg} 30^o = 9G \operatorname{tg} 30^o,$$

$$F_E = 3\sqrt{3}\ G.$$

Silu F_H možemo odrediti pomoću Pitagorine teoreme:

$$F_H = \sqrt{(F_c + G)^2 + F_E^2} =$$

$$= \sqrt{(9G)^2 + (3\sqrt{3}G)^2}.$$



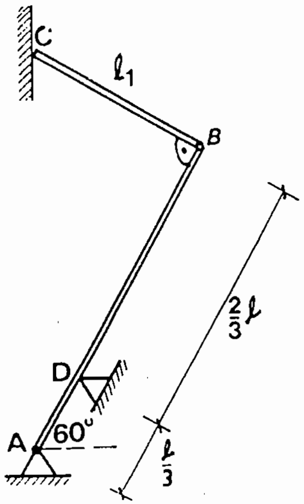
Slika 94.

$$F_H = \sqrt{(3.3.G)^2 + 3(3G)^2} = 3G\sqrt{9+3} = 3G\sqrt{12},$$

$$F_H = 6\sqrt{3}\ G.$$

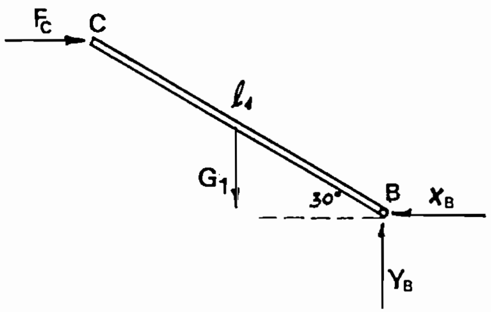
39. Konstrukcija prikaza na slici 95 sastoji se iz dva štapa AB i BC medjusobno vezanih zglobom B pod pravim uglom. Štap AB je dužine ℓ i težine G = 16 daN koji je krajem A zglobno vezan, a u D se oslanja na glatki oslonac ($\overline{AD} = \frac{\overline{AB}}{3}$) i sa horizontalom gradi ugao od 60^{o}.

Štap BC je dužine ℓ_1 i težine $G_1 = 8$ daN. On se krajem C slobodno oslanja o glatki vertikalni zid. Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije ovog sistema.



Slika 95.

Posmatrajmo prvo ravnotežu štapa BC (slika 96):



Slika 96.

$$\sum X_i = 0: \quad F_c - X_B = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_B - G_1 = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_c \ell_1 \sin 30^{o} - G_1 \frac{\ell_1}{2} \cos 30^{o} = 0. \tag{3}$$

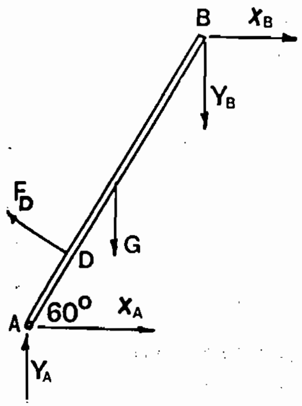
Iz jednačine (3) nalazimo reakciju F_c:

$$F_c = 4\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Komponente reakcije zgloba B nalazimo iz jednačina (1) i (2):

$$X_B = F_c = 4\sqrt{3} \text{ daN}, \qquad Y_B = G_1 = 8 \text{ daN}.$$

Štap AB (slika 97):



Slika 97.

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - F_D \sin 60^{o} + X_B = 0, \tag{4}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A + F_D \cos 60^{o} - G - Y_B = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_D \frac{\ell}{3} - G \frac{\ell}{2} \cos 60^{o} - Y_B \ell \cos 60^{o} -$$

$$- X_B \ell \sin 60^{o} = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo F_D:

$$F_D = 42 \text{ daN}.$$

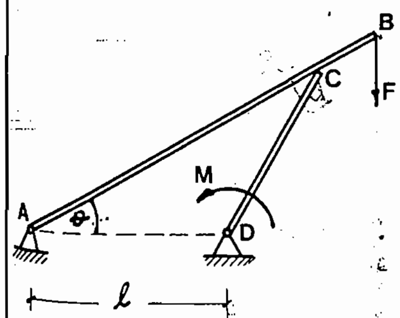
Komponente reakcije zgloba A nalazimo iz jednačine (4) i (5):

$$X_A = F_D \sin 60^{o} - X_B = 21\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 17\sqrt{3} \text{ daN}.$$

$$Y_A = G + Y_B - F_D \cos 60^{o} = 16 + 8 - 21 = 3 \text{ daN}.$$

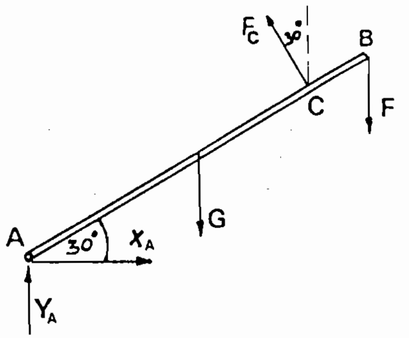
40. Štap AB dužine 2ℓ i težine $G = 24\sqrt{3}$ daN, na čijem kraju deluje vertikalna sila $F = 40\sqrt{3}$ daN, održava se u ravnoteži pod uglom $\theta = 30^{o}$ prema horizontali, pomoću momenta M, posredstvom štapa CD dužine $\ell = 0{,}5$ m i težine $G_1 = 16$ daN.

Odrediti veličinu momenta M, kao i reakcije zglobova A i D. $\overline{AD} = \ell$.



Slika 98.

Nakon razdvajanja sistema i oslobadjanja od veza, štap AB će biti opterećen, kako je to pokazano na slici 99:



Slika 99.

Uslovi ravnoteže za štap AB će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - F_c \sin 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - G + F_c \cos 30^\circ - F = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad -F.2\ell \cos 30^\circ + F_c.\overline{AC} - G\ell \cos 30^\circ = 0. \qquad (3)$$

Gde je $\overline{AC} = 2\ell \cos 30^\circ = \ell\sqrt{3}$ m.

Iz jednačine (3) nalazimo unutrašnju reakciju F_c:

$$F_c = 52\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Komponente reakcije zgloba A nalazimo iz jednačine (1) i (2):

$$X_A = F_c \sin 30^\circ = 26\sqrt{3} \text{ daN}.$$

$$Y_A = G - F_c \cos 30^\circ + F = 2(32\sqrt{3} - 39) \text{ daN}.$$

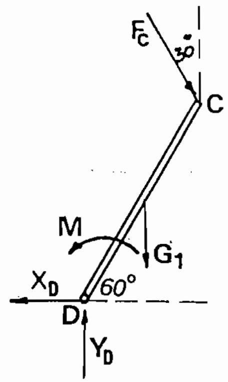
Štap CD će biti opterećen kako je to pokazano na slici 100.

Uslovi ravnoteže će ovde biti:

$$\sum X_i = 0: \quad -X_D + F_c \sin 30^\circ = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_D - G_1 - F_c \cos 30^\circ = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_D = 0: \quad M - G_1 \frac{\ell}{2} \cos 60^\circ - F_c \sin 30^\circ \ell \sin 60^\circ - F_c \cos 30^\circ \ell \cos 60^\circ = 0. \qquad (6)$$



Slika 100.

Iz jednačine (6) nalazimo potrebnu veličinu momenta M:

$$M = 41 \text{ daNm}.$$

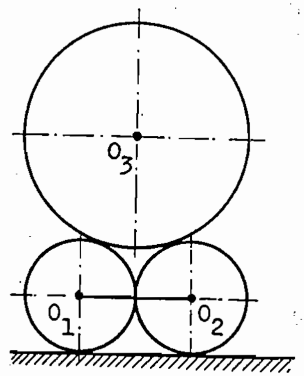
Reakcije X_D i Y_D dobijamo iz jednačina (4) i (5):

$$X_D = F_c \sin 30^\circ = 26\sqrt{3} \text{ daN}.$$

$$Y_D = G_1 + F_c \cos 30^\circ = 94 \text{ daN}.$$

41. Dva jednaka prava kružna cilindra svaki poluprečnika $r = 20$ cm i težine $G = 100$ daN, leže na horizontalnoj ravni. Njihova središta spojena su nerastegljivim koncem dužine 2r. Cilindri nose treći cilindar, poluprečnika osnove $R = 40$ cm i težine $Q = 200$ daN.

Odrediti silu u koncu, pritisak cilindara na horizontalnu ravan, kao i uzajamni pritisak cilindara.



Slika 101.

Napišimo prvo jednačine ravnoteže za celinu (slika 102):

$$\sum Y_i = 0: \quad F_A - 2G - Q + F_B = 0, \qquad (1)$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_A.2r - G.2r - Q.r = 0. \qquad (2)$$

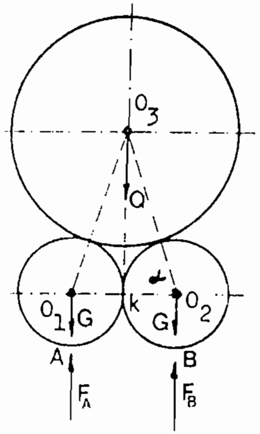
Iz jednačine (2) nakon skraćivanja sa r nalazimo reakciju F_A:

$$F_A = G + \frac{Q}{2} = 200 \text{ daN}.$$

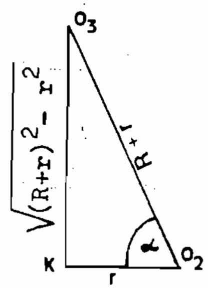
Iz jednačine (1) imamo da je: $F_A + F_B = 2G + Q$,

ili $\quad F_B = G + \frac{Q}{2} = 200$ daN.

Gornji cilindar O_3 svojom težinom Q deluje na donje cilindre O_1 i O_2 duž pravaca $\overline{O_3O_1}$, odnosno $\overline{O_3O_2}$, koji zaklapaju ugao α sa horizontalom. Odredimo ovaj ugao iz trougla kO_2O_3 (sl. 102) koji je predstavljen na slici 103:



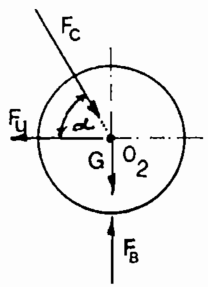
Slika 102.



Slika 103.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(r+R)^2 - r^2}}{r+R} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\ ; \qquad \cos\alpha = \frac{r}{r + R} = \frac{1}{3}\ .$$

Posmatrajmo sada ravnotežu cilindra O_2, koji je opterećen kako je to pokazano na slici 104.



Slika 104.

Ovde sila F_c predstavlja uzajamni pritisak izmedju cilindara O_2 i O_3.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sučeljnih sila su:

$$\sum X_i = 0: \quad F_c \cos\alpha - F_u = 0, \qquad (3)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_B - G - F_c \sin\alpha = 0. \qquad (4)$$

Iz jednačine (4) nalazimo silu F_c:

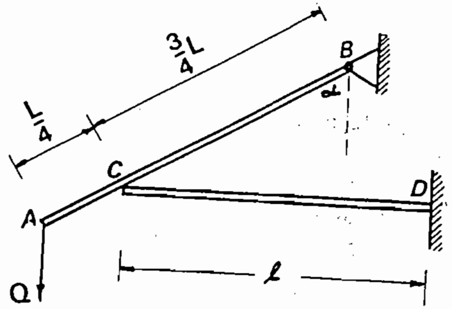
$$F_c = \frac{F_B - G}{\sin\alpha} = 75\sqrt{2}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (3) nalazimo silu u koncu:

$$F_u = F_c \cos\alpha = 25\sqrt{2}\ \text{daN}.$$

42. Homogena greda AB dužine L i težine G = 18 daN održava se u ravnotežnom položaju pomoću zgloba B. U tački C ona se oslanja na kraj horizontalne konzole CD dužine ℓ = 2 m i težine G_1 = 10 daN. U tački A grede AB obešen je teret težine Q = 12 daN.

Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema. $\overline{AC} = \frac{L}{4}$, $\alpha = 60^o$.



Slika 105.

G R E D A AB: (slika 106)

$\sum X_i = 0:$

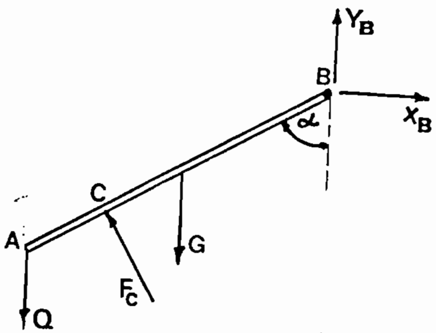
$$-F_c \sin 30^o + X_B = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$-Q + F_c \cos 30^o - G + Y_B = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_B = 0:$

$$-Q.L.\cos 30^o + F_c.\frac{3}{4}L - G.\frac{L}{2}\cos 30^o = 0. \qquad (3)$$



Slika 106.

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa L nalazimo da je:

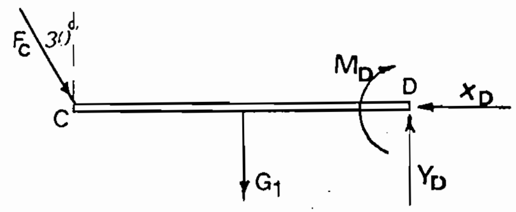
$$\frac{3}{4}F_c = \frac{\sqrt{3}}{2}Q + \frac{\sqrt{3}}{4}G, \quad \text{tj.} \quad F_c = 14\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (1) je: $X_B = F_c \sin 30^o = 7\sqrt{3}$ daN.

Komponentu Y_B nalazimo iz jednačine (2):

$$Y_B = Q + G - F_c \cos 30^o = 9\ \text{daN}.$$

G R E D A CD: (slika 107)



Slika 107.

$$\sum X_i = 0: \quad F_c \sin 30^\circ - X_D = 0, \tag{4}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -F_c \cos 30^\circ - G_1 + Y_D = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_D = 0: \quad M_D - G_1 \frac{\ell}{2} - F_c \cos 30^\circ . \ell = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo moment uklještenja M_D:

$$M_D = G_1 \frac{\ell}{2} + F_c \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = 52 \text{ dan m.}$$

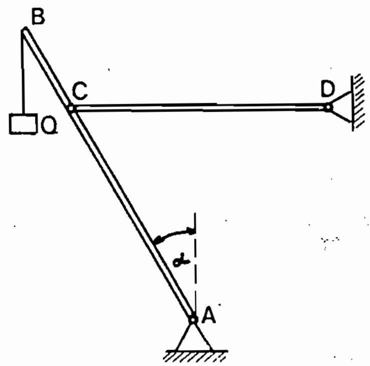
Iz jednačine (4) imamo da je:

$$X_D = F_c \sin 30^\circ = 7\sqrt{3} \text{ daN.}$$

Y_D dobijamo iz jednačine (5):

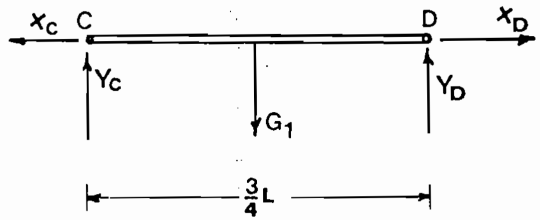
$$Y_D = G_1 + F_c \cos 30^\circ = 31 \text{ daN.}$$

43. Sistem krutih tela, sastavljen od dva homogena štapa AB i CD , stoji u ravnoteži u vertikalnoj ravni pri čemu je štap CD horizontalan, dok štap AB gradi ugao $\alpha = 30^\circ$ sa pravcem vertikale. Težina štapa AB je G = 64 daN, a štapa CD je G_1= 32 daN. Na kraju B štapa AB visi teret težine Q = 200 daN. Ako su date dužine: $\overline{AB} = L$, $\overline{AC} = \overline{CD} = \frac{3}{4} L$, odrediti reakcije zglobova A, C i D.



Slika 108.

Š T A P CD: (slika 109)



Slika 109.

$$\sum X_i = 0: \quad -X_c + X_D = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_c - G_1 + Y_D = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_D = 0: \quad Y_c \frac{3}{4} L - G_1 \frac{3}{8} L = 0. \tag{3}$$

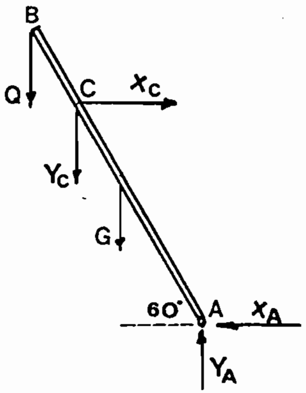
Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa L nalazimo Y_c:

$$Y_c = \frac{G_1}{2} = 16 \text{ daN.}$$

Iz jednačine (1) možemo zaključiti da je: $X_c = X_D$, dok komponentu Y_D nalazimo iz jednačine (2):

$Y_D = G_1 - Y_c = 16$ daN.

<u>Š T A P AB:</u> (slika 110)



Slika 110.

$$\sum X_i = 0:$$

$$X_c - X_A = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0:$$

$$Y_A - G - Y_c - Q = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_A = 0:$$

$$-Q.L.\cos 60^\circ - Y_c \frac{3}{4} L \cos 60^\circ + X_c \frac{3}{4} L \sin 60^\circ - G \frac{L}{2} \cos 60^\circ = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (6) nalazimo komponentu X_c:

$$\frac{3}{4} X_c \sin 60^\circ = Q \cos 60^\circ + \frac{3}{4} Y_c \cos 60^\circ + \frac{G}{2} \cos 60^\circ,$$

ili

$$X_c = \frac{976\sqrt{3}}{9} \text{ daN.}$$

Na osnovu jednačina (1) i (4) imamo da je:

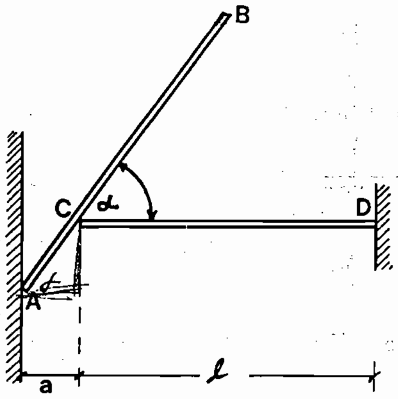
$$X_A = X_D = X_c = \frac{976\sqrt{3}}{9} \text{ daN.}$$

I konačno iz jednačine (5) imamo da je:

$$Y_A = G + Y_c + Q = 280 \text{ daN.}$$

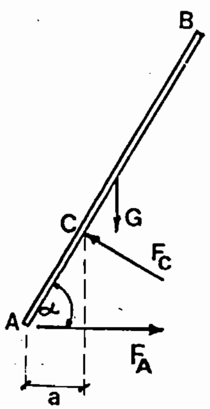
44. Homogeni prizmatični štap AB dužine $\ell = 480$ cm i težine $G = 80$ daN, oslanja se slobodno na glatki vertikalni zid, a u tački C na horizontalni štap CD, iste dužine i težine kao štap AB. Štap CD je na drugom kraju uklješten. Rastojanje tačke C od vertikalnog zida je $a = 30$ cm.

Odrediti ugao α što ga štap AB u ravnotežnom položaju zaklapa sa horizontalom, kao i sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 111.

<u>Š T A P AB:</u> (slika 112)



Slika 112.

$$\sum X_i = 0: \quad F_A - F_c \sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_c \cos\alpha - G = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_c . \overline{AC} - G \frac{\ell}{2} \cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

$$\overline{AC} = \frac{a}{\cos\alpha}.$$

Jednačina (3) sada postaje:

$$F_c \frac{a}{\cos\alpha} - G \frac{\ell}{2} \cos\alpha = 0. \qquad (3')$$

Iz jednačine (2) imamo da je: $F_c = \dfrac{G}{\cos\alpha}$,

tako da jednačine (3') postaje:

$$\frac{G.a}{\cos^2\alpha} - \frac{G.\ell}{2} \cos\alpha = 0.$$

Ili posle skraćivanja sa G: $\quad a - \dfrac{\ell}{2} \cos^3\alpha = 0.$

$$\cos^3\alpha = \frac{2a}{\ell}, \qquad \cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{2a}{\ell}} = \sqrt[3]{\frac{2.30}{480}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}.$$

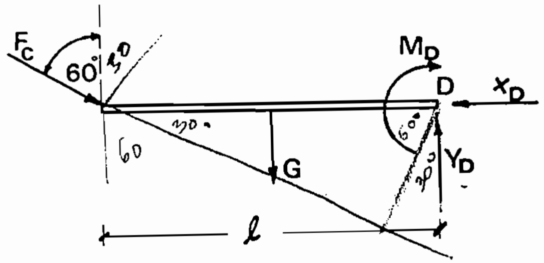
$$\alpha = 60^\circ.$$

Sada je: $F_c = \dfrac{G}{\cos 60^\circ} = 2G = 160$ daN.

Iz jednačine (1) je:

$$F_A = F_c \sin 60^\circ = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3} \text{ daN.}$$

<u>Š T A P CD:</u> (slika 113)



Slika 113.

$$\sum X_i = 0: \quad F_c \sin 60^\circ - X_D = 0, \tag{4}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -F_c \cos 60^\circ - G + Y_D = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_D = 0: \quad -F_c \cos 60^\circ \cdot \ell - G\frac{\ell}{2} + M_D = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo moment uklještenja M_D:

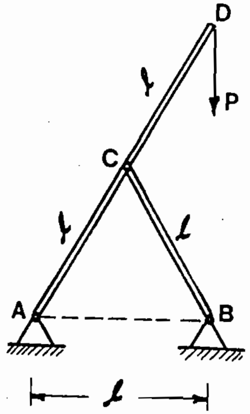
$$M_D = F_c \cos 60^\circ \cdot \ell + G\frac{\ell}{2} = 160\,\frac{1}{2}\cdot 4,8 + 80\,\frac{4,8}{2}.$$

$$M_D = 576 \text{ daN m.}$$

Iz jednačine (4) je: $X_D = F_c \sin 60^\circ = 80\sqrt{3}$ daN,

dok je iz (5): $Y_D = G + F_c \cos 60^\circ = 160$ daN.

45. Konstrukcija prikazana na slici 114 sastoji se iz dva štapa AD i BC koji su medjusobno spojeni zglobom C ($\overline{AC} = \overline{CD}$). Štap AD je dužine 2ℓ i težine 2G. U tački D štapa AD deluje sila P vertikalno naniže. Štap BC je dužine ℓ i težine G. Ako je G = 24 daN, P = 12 daN i $\overline{AB} = \ell$, odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 114.

<u>C E L I N A:</u> (slika 115)

$$\sum X_i = 0:$$

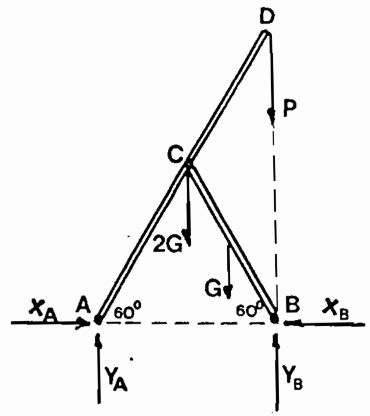
$$X_A - X_B = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0:$$

$$Y_A - 2G - P - G + Y_B = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_B = 0:$$

$$Y_A \cdot \ell - 2G\frac{\ell}{2} - G\frac{\ell}{4} = 0. \tag{3}$$



Slika 115.

Iz je načine (3) nalazimo reakciju Y_A:

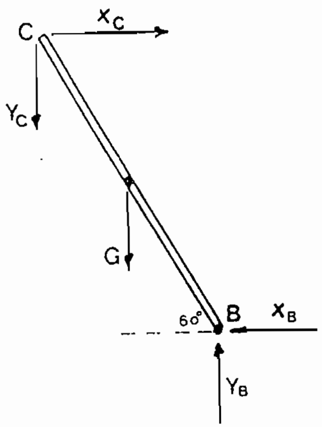
$$Y_A = G + \frac{G}{4} = 30 \text{ daN.}$$

$Y_A =$

Iz jednačine (2) nalazimo da je:

$$Y_B = 3G + P - Y_A = 54 \text{ daN.}$$

Š T A P BC: (slika 116)



Slika 116.

$\sum X_i = 0$:

$X_c - X_B = 0,$ (4)

$\sum Y_i = 0$:

$Y_B - G - Y_c = 0,$ (5)

$\sum M_B = 0$:

$X_c \cdot \ell \cdot \sin 60^\circ - Y_c \cdot \ell \cdot \cos 60^\circ - G\,\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ = 0.$ (6)

Iz jednačine (5) nalazimo Y_c:

$Y_c = Y_B - G = 54 - 24 = 30$ daN.

Posle skraćivanja sa ℓ iz jednačine (6) nalazimo X_c:

$\frac{\sqrt{3}}{2} X_c = \frac{1}{2} Y_c + \frac{G}{4}$, $X_c = 14\sqrt{3}$ daN.

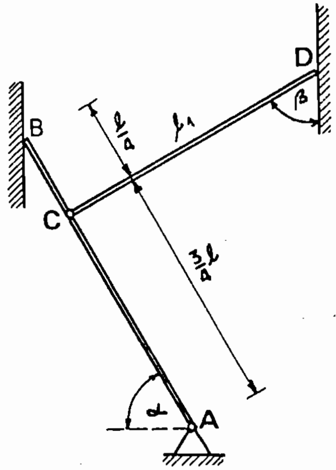
Sada je na osnovu jednačina (1) i (4):

$X_A = X_B = X_c = 14\sqrt{3}$ daN.

46. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine $G = 6$ daN zglobno je vezan za pod u tački A, dok se krajem B oslanja na glatki vertikalni zid. U tački C štapa AB zglobno je vezan kraj štapa CD dužine ℓ_1 i težine $G_1 = 8$ daN, koji se svojim drugim krajem D oslanja o glatki vertikalni zid. U ravnotežnom položaju štap AB zaklapa sa horizontalom ugao $\alpha = 60^\circ$, dok štap CD zaklapa sa vertikalom ugao $\beta = 60^\circ$.

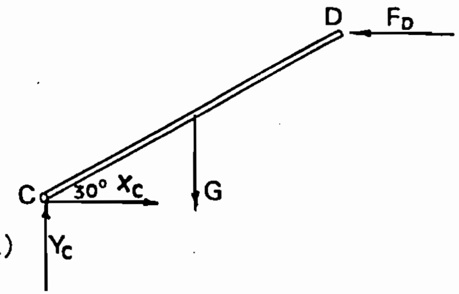
Date su dužine: $\overline{AC} = \frac{3}{4}\ell$, $\overline{CB} = \frac{\ell}{4}$.

Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 117.

Š T A P CD: (slika 118)



Slika 118.

$\sum X_i = 0$:

$X_c - F_D = 0,$ (1)

$\sum Y_i = 0$:

$Y_c - G_1 = 0,$ (2)

$\sum M_c = 0$:

$F_D\,\ell_1 \sin 30^\circ - G_1\,\frac{\ell_1}{2}\cos 30^\circ = 0.$ (3)

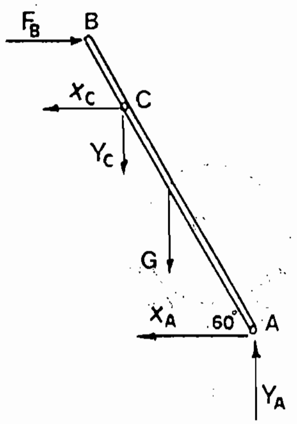
Iz momentne jednačine (3) nalazimo reakciju F_D:

$$F_D = \frac{G_1}{2}\,\mathrm{cotg}\,30^\circ = 4\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (1) je: $X_c = F_D = 4\sqrt{3}$ daN,

dok iz (2) dobijamo: $Y_c = G_1 = 8$ daN.

Š T A P   AB: (slika 119)



Slika 119.

$\sum X_i = 0:$

$$F_B - X_c - X_A = 0, \tag{4}$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_A - G - Y_c = 0, \tag{5}$$

$\sum M_A = 0:$

$$F_B\,\ell \sin 60^\circ - X_c\,\frac{3}{4}\ell \sin 60^\circ - Y_c\,\frac{3}{4}\ell\cos 60^\circ - G\,\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ = 0. \tag{6}$$

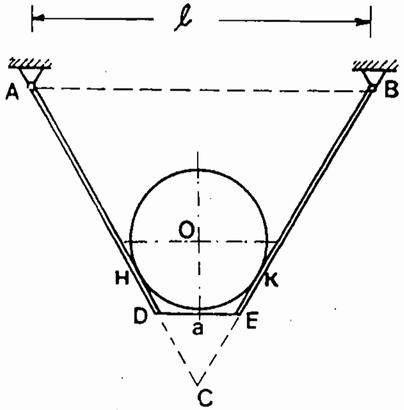
Iz jednačine (6) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo reakciju F_B:

$$F_B = 6\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (4), odnosno (5) nalazimo:

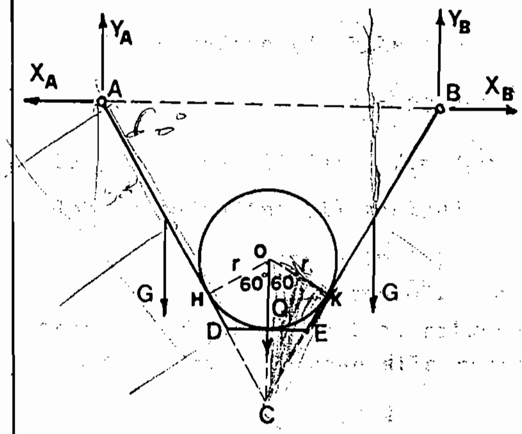
$$X_A = F_B - X_c = 2\sqrt{3}\ \text{daN}, \qquad Y_A = G + Y_c = 14\ \text{daN}.$$

47. Dva jednaka homogena štapa AD i BE, svaki težine G= 16 daN, zglobno su vezana u tačkama A i B za plafon. U tačkama D i E štapovi su spojeni pomoću horizontalne zatege DE dužine a. U tačkama H i K na štapove se oslanja homogena kugla težine Q = 12 daN i poluprečnika r. Trougao ABC je ravnostran strane ℓ. Ako je $\ell = 2r\sqrt{3}$ i $a = \frac{\ell}{4}$ izračunati reakcije zglobova A i B, kao i silu u zategi DE.



Slika 120.

Posmatrajmo prvo sistem kao celinu (slika 121):



Slika 121.

Iz sličnosti ravnostranih trouglova ABC i DEC možemo zaključiti da je $\overline{EC} = \overline{DC} = \overline{DE} = a = \frac{\ell}{4}$. To znači da su dužine štapova $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$:

$$\overline{AD} = \overline{BE} = \frac{3}{4}\ell.$$

Dalje, iz trougla OKC sledi da je:

$$\overline{KC} = r\cdot \text{tg}\,60^\circ = \frac{\ell}{2\sqrt{3}}\sqrt{3} = \frac{\ell}{2}$$

što znači da je $\overline{KE} = \frac{\ell}{4}$.

Uslovi ravnoteže za sistem na slici 121 će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - X_B = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - 2G - Q + Y_B = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A = 0: \quad Y_B\,\ell - G\left(\ell - \frac{3}{8}\ell\cos 60^\circ\right) - Q\,\frac{\ell}{2} - G\,\frac{3}{8}\ell\cos 60^\circ = 0. \tag{3}$$

Iz jednačine (3) nalazimo komponentu Y_B:

$$Y_B = 22\ \text{daN}.$$

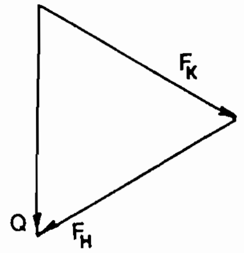
Iz jednačine (2) je: $Y_A = Y_B = 22$ daN,

dok iz jednačine (1) zaključujemo da je $X_A = X_B$.

Rastavimo sada silu Q (slika 121) na dve komponente koje imaju pravce $\overline{OH}$, odnosno $\overline{OK}$. Ovo rastavljanje ćemo izvršiti pomoću trougla sila koji je prikazan na slici 122.

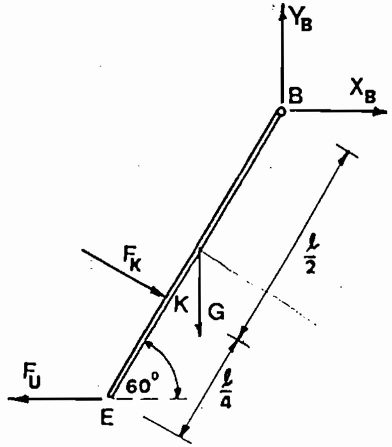
Pošto je ovaj trougao sila ravnostran zaključujemo da je:

$$F_H = F_K = Q = 12\ \text{daN}.$$



Slika 122.

Posmatrajmo ravnotežu štapa BE. Posle rastavljanja sistema ovaj štap će biti opterećen silama kako je to pokazano na slici 123.



Slika 123.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad -F_u + F_k \sin 60^0 + X_B = 0, \tag{4}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -F_k \cos 60^0 - G + Y_B = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_B = 0: \quad F_u \frac{3}{4}\ell \sin 60^0 - F_k \frac{\ell}{2} - G \frac{3}{8}\ell \cos 60^0 = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo da je:

$$F_u = 8\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačine (5) dobijamo isto kao iz (2) da je:

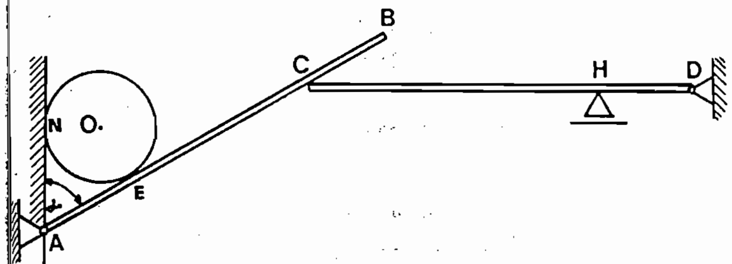
$$Y_B = 22\ \text{daN}.$$

I konačno iz jednačine (4) sledi:

$$X_B = F_u - F_k \sin 60^0 = 2\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Sada je na osnovu (1): $\quad X_A = X_B = 2\sqrt{3}$ daN.

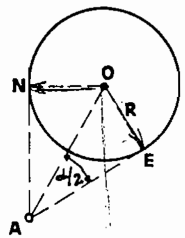
48. Izmedju glatkog vertikalnog zida i homogenog štapa AB dužine L i težine G = 10 daN postavljena je kugla poluprečnika $R = \frac{\sqrt{3}}{12}L$, težine Q = 3G = = 30 daN. Da bi se štap održao u ravnoteži oslonjen je u tački C na homogeni horizontalni štap CD dužine L i težine G = 10 daN. Štap CD vezan je pomoću zgloba za zid, a poduprt je u tački H.



Slika 124.

Ako su date dužine: $\overline{AE} = \overline{CB} = \overline{HD} = \frac{L}{4}$ odrediti:
a) pritisak kugle na zid i na štap, b) medjusobni pritisak štapova, c) reakcije zglobova A i D i oslonca H.

Potražimo prvo ugao α što ga štap AB zaklapa sa vertikalom u ravnotežnom položaju.



Slika 125.

Iz trougla AOE (slika 125) sledi da je:

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{OE}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{12}L}{\frac{L}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

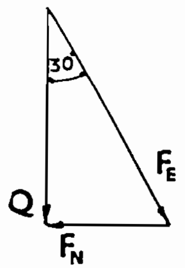
što znači da je $\quad \frac{\alpha}{2} = 30^0$, ili $\alpha = 60^0$.

Sada ćemo težinu kugle Q rastaviti na dve komponente u pravcima $\overline{ON}$ i $\overline{OE}$. Ovo rastavljanje ćemo izvršiti pomoću trougla sila, koji je prikazan na sl.126. Iz tog trougla sledi da je:

$$F_E = \frac{Q}{\cos 30^0} = 20\sqrt{3}\ \text{daN},$$

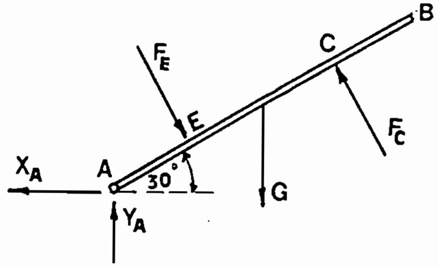
cos 30°

$$F_N = Q\cdot\text{tg}\,30^0 = 10\sqrt{3}\ \text{daN}.$$



Slika 126.

Posmatrajmo sada ravnotežu štapa AB. Ovaj štap je opterećn silama kako je to pokazano na slici 127.



Slika 127.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\underline{\sum X_i = 0:} \quad -X_A + F_E \sin 30^\circ - F_c \sin 30^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\underline{\sum Y_i = 0:} \quad Y_A - F_E \cos 30^\circ - G + F_c \cos 30^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\underline{\sum M_A = 0:} \quad F_c \frac{3}{4} L - G \frac{L}{2} \cos 30^\circ - F_E \frac{L}{4} = 0. \tag{3}$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa L nalazimo reakciju F_c:

$$F_c = 10\sqrt{3} \text{ daN.}$$

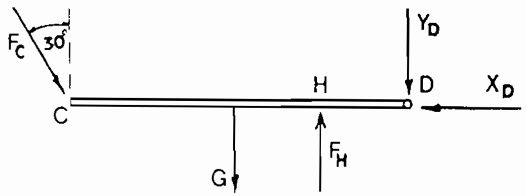
Iz jednačine (1) nalazimo da je:

$$X_A = (F_E - F_c) \sin 30^\circ = 5\sqrt{3} \text{ daN,}$$

dok je iz (2):

$$Y_A = G + (F_E - F_c) \cos 30^\circ = 25 \text{ daN.}$$

<u>Š T A P CD:</u> (slika 128)



Slika 128.

Uslovi ravnoteže za štap CD će biti:

$$\underline{\sum X_i = 0:} \quad F_c \sin 30^\circ - X_D = 0, \tag{4}$$

$$\underline{\sum Y_i = 0:} \quad -F_c \cos 30^\circ - G + F_H - Y_D = 0, \tag{5}$$

$$\underline{\sum M_D = 0:} \quad -F_c \cos 30^\circ . L - G \frac{L}{2} + F_H \frac{L}{4} = 0. \tag{6}$$

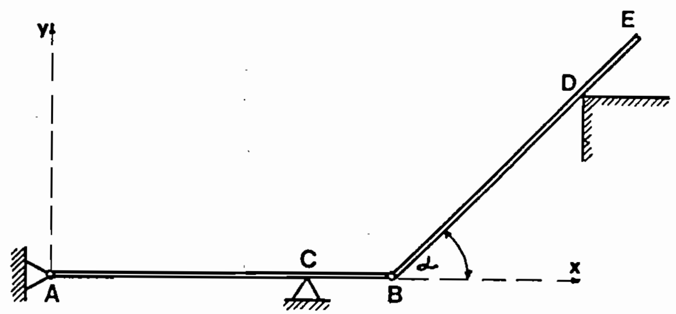
Iz jednačine (6) posle skraćivanja sa L nalazimo da je:

$$F_H = 80 \text{ daN.}$$

Iz jednačina (4), odnosno (5) dobijamo:

$$X_D = F_c \sin 30^\circ = 5\sqrt{3} \text{ daN,} \quad Y_D = F_H - F_c \cos 30^\circ - G = 55 \text{ daN.}$$

49. Horizontalna greda AB težine G = 20 daN pričvršćena je za

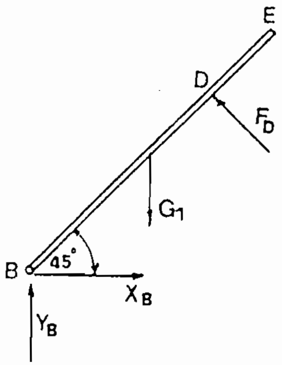


Slika 129.

vertikalni zid zglobom A i oslanja se na oslonac C. Za kraj B grede zglobom je pričvršćena greda BE, težine $G_1 = 40$ daN, koja se oslanja na ispust D. Pri tome je: $\overline{CB} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ i $\overline{DE} = \frac{1}{3}\overline{BE}$. Ugao $\alpha = 45^\circ$.

Odrediti spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.

G R E D A BE: (slika 130)



Slika 130.

$\sum X_i = 0:$

$X_B - F_D \sin 45^{\circ} = 0,$ (1)

$\sum Y_i = 0:$

$Y_B - G_1 + F_D \cos 45^{\circ} = 0,$ (2)

$\sum M_B = 0: \quad F_D \frac{2}{3}\overline{BE} - G_1 \frac{\overline{BE}}{2} \cos 45^{\circ} = 0.$ (3)

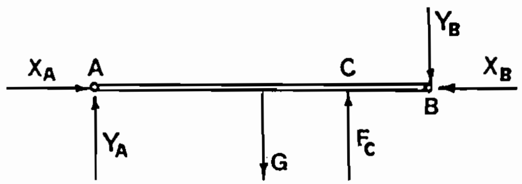
Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa $\overline{BE}$ nalazimo da je:

$$F_D = 15\sqrt{2} \text{ daN}.$$

Iz jednačina (1) i (2) nalazimo komponente X_B i Y_B:

$$X_B = F_D \sin 45^{\circ} = 15 \text{ daN}, \qquad Y_B = G_1 - F_D \cos 45^{\circ} = 25 \text{ daN}.$$

G R E D A AB: (slika 131)



Slika 131.

$\sum X_i = 0: \quad X_A - X_B = 0,$ (4)

$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - G + F_c - Y_B = 0,$ (5)

$\sum M_A = 0: \quad -Y_B \cdot \overline{AB} + F_c \frac{2}{3}\overline{AB} - G\frac{\overline{AB}}{2} = 0.$ (6)

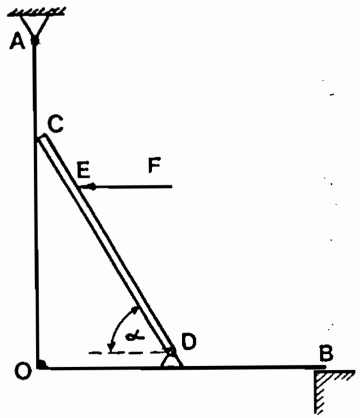
Iz jednačine (6) nalazimo reakciju F_c:

$$F_c = \frac{105}{2} \text{ daN}.$$

Iz (4), odnosno (5) je:

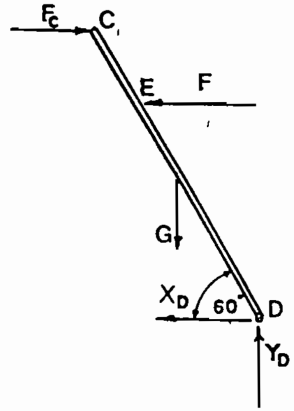
$$X_A = X_B = 15 \text{ daN}, \qquad Y_A = G + Y_B - F_c = -\frac{15}{2} \text{ daN}.$$

50. Ugaonik AOB čiji su kraci kruto vezani pod pravim uglom zglobno je vezan u A, a slobodno se oslanja u B. Na njemu se nalazi štap CD dužine ℓ i težine $G = 60\sqrt{3}$ daN, na koji deluje horizontalna sila $F = 40$ daN. Štap je vezan za krak OB zglobom u D, a oslanja se o krak OA u C. Ugao štapa je $\alpha = 60^{\circ}$. $\overline{OB} = \ell$, $\overline{OA} = \ell\sqrt{3}$, $\overline{CE} = \frac{\ell}{4}$.
Težine krakova OA i OB se zanemaruju. Odrediti sve reakcije sistema.



Slika 132.

Š T A P CD: (slika 133)



Slika 133.

$\sum X_i = 0:$

$F_c - F - X_D = 0,$ (1)

$\sum Y_i = 0:$

$Y_D - G = 0,$ (2)

$\sum M_D = 0: \quad F_c \ell \sin 60^{\circ} - F\frac{3}{4}\ell \sin 60^{\circ} - G\frac{\ell}{2}\cos 60^{\circ} = 0.$ (3)

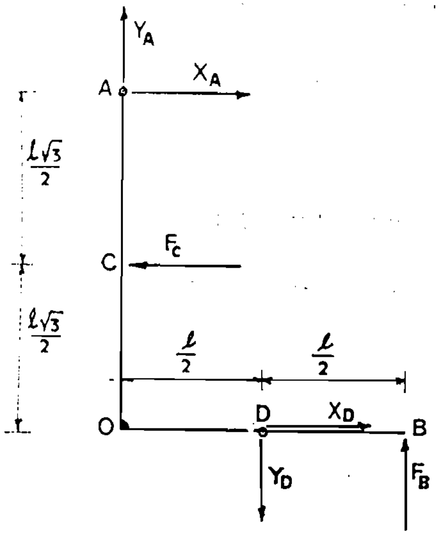
Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo silu F_c:

$$F_c = 60 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (1) i (2) nalazimo reakcije X_D i Y_D:

$X_D = F_c - F = 20$ daN, $\quad Y_D = G = 60\sqrt{3}$ daN.

U G A O N I K AOB: (slika 134)



Slika 134.

Pre svega, lako je zaključiti da se tačka C nalazi na polovini dužine kraka $\overline{AO}$, dok se tačka D nalazi na polovini dužine kraka $\overline{OB}$.

Ako odbacimo štap CD i njegov uticaj na okvir zamenimo odgovarajućim reakcijama veza, ugaonik AOB će biti opterećen kako je to pokazano na slici 134.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$\underline{\sum X_i = 0:}\quad X_A - F_c + X_D = 0, \qquad (4)$

$\underline{\sum Y_i = 0:}\quad Y_A - Y_D + F_B = 0, \qquad (5)$

$\underline{\sum M_A = 0:}\quad F_B\,\ell - Y_D\,\frac{\ell}{2} + X_D\,\ell\sqrt{3} - F_c\,\frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 0. \qquad (6)$

Iz jednačine (6) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo reakciju u tački B:

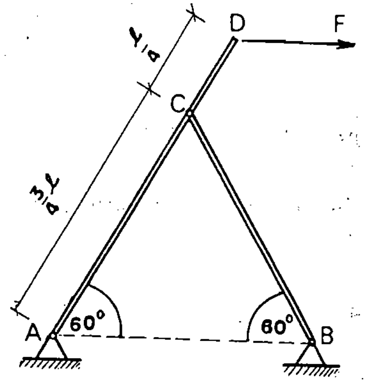
$$F_B = 40\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Komponente X_A i Y_A nalazimo iz jednačina (4) i (5):

$X_A = F_c - X_D = 40$ daN, $\quad Y_A = Y_D - F_B = 20\sqrt{3}$ daN.

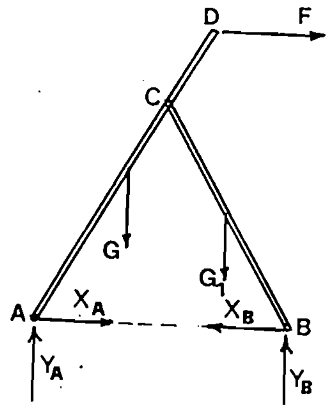
51. Sistem se sastoji od dva štapa AD i BC, koji su zglobno spojeni kako je pokazano na slici 135. Štap AD je dužine ℓ i težine $G = 18$ daN i zaklapa sa horizontalom ugao od 60°. Težina štapa BC je $G_1 = 12$ daN i on takodje zaklapa sa horizontalom ugao od 60°. Na kraju D štapa AD deluje horizontalna sila $F = 6\sqrt{3}$ daN.

Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 135.

CELINA: (slika 136)



Slika 136.

$\underline{\sum X_i = 0:}$

$X_A + F - X_B = 0, \qquad (1)$

$\underline{\sum Y_i = 0:}$

$Y_A - G - G_1 + Y_B = 0, \qquad (2)$

$\underline{\sum M_A = 0:}$

$Y_B\,\frac{3}{4}\ell - G_1\left(\frac{3}{8}\ell + \frac{3}{4}\ell\right)\cos 60^\circ - G\,\frac{\ell}{2}\cos 60^\circ - F\,\ell\sin 60^\circ = 0. \qquad (3)$

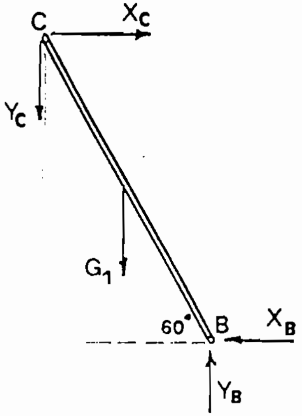
Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo Y_B:

$$Y_B = 27\ \text{daN}.$$

Sada iz jednačine (2) možemo naći Y_A:

$$Y_A = G + G_1 - Y_B = 18 + 12 - 27 = 3\ \text{daN}.$$

ŠTAP BC: (slika 137)



$\sum X_i = 0:$

$$X_C - X_B = 0, \qquad (4)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_B - G_1 - Y_C = 0, \qquad (5)$$

$\sum M_C = 0:$

$$X_B \frac{3}{4} \ell \sin 60^\circ - Y_B \frac{3}{4} \ell \cos 60^\circ +$$

$$+ G_1 \frac{3}{8} \ell \cos 60^\circ = 0. \qquad (6)$$

Slika 137.

Iz jednačine (6) nalazimo komponentu X_B:

$$X_B = 7\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Iz jednačine (4) je: $X_C = X_B = 7\sqrt{3}$ daN.

Iz (5) dobijamo Y_C:

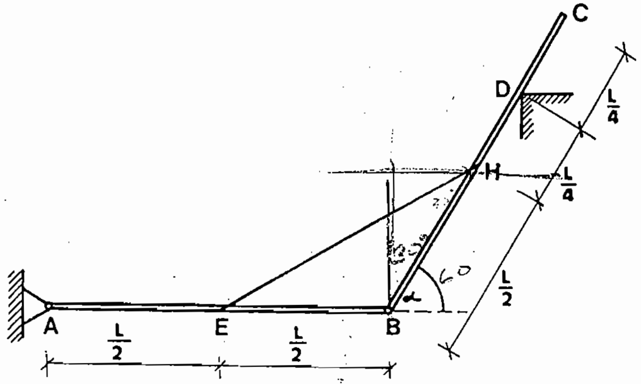
$$Y_C = Y_B - G_1 = 27 - 12 = 15 \text{ daN}.$$

I na kraju iz jednačine (1) nalazimo X_A:

$$X_A = X_B - F = 7\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ daN}.$$

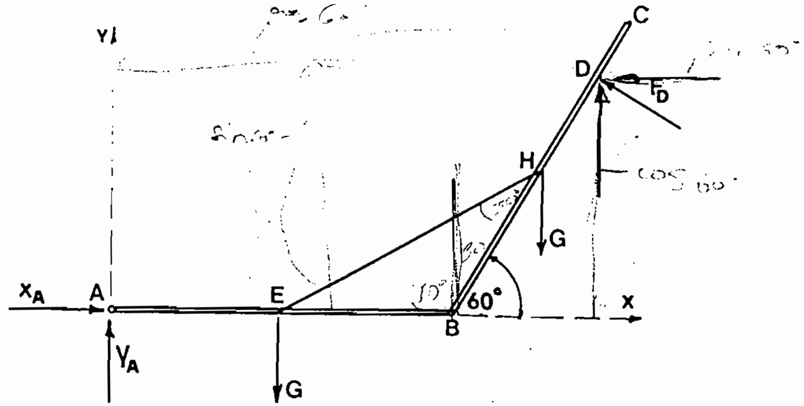
52. Konstrukcija predstavljena na slici sastoji se od dva štapa jednakih dužina L i jednakih težina G = 10 daN. Štap AB je horizontalan, dok štap BC gradi sa pravcem horizontale ugao $\alpha = 60^\circ$. Veze su: zglobovi A i B, oslonac u D i tanak štap EH.

Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 138.

C E L I N A: (slika 139)



Slika 139.

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - F_D \sin 60^\circ = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - 2G + F_D \cos 60^\circ = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_D \sin 60^\circ \frac{3}{4} L \sin 60^\circ + F_D \cos 60^\circ \left(L + \frac{3}{4} L \cos 60^\circ\right) -$$

$$- G\left(L + \frac{L}{2} \cos 60^\circ\right) - G \frac{L}{2} = 0. \qquad (3)$$

Moment sile F_D za tačku A u jednačini (3) napisan je pomoću Varinjonove teoreme.

Iz jednačine (3) nalazimo reakciju oslonca D:

$$F_D = 14 \text{ daN.}$$

Iz jednačine (1) je sada:

$$X_A = F_D \sin 60^\circ = 7\sqrt{3} \text{ daN,}$$

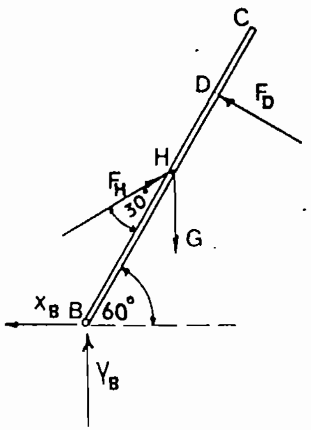
...Ja sam...

dok iz jednačine (2) dobijamo da je:

$$Y_A = 2G - F_D \cos 60^\circ = 13 \text{ daN.}$$

...komplicirana glupača...

Š T A P BC: (Slika 140)



Slika 140.

$\sum X_i = 0$:

$$-X_B + F_H \cos 30^\circ - F_D \cos 30^\circ = 0, \tag{4}$$

$\sum Y_i = 0$:

$$-Y_B + F_H \sin 30^\circ - G + F_D \sin 30^\circ = 0, \tag{5}$$

$\sum M_B = 0$:

$$F_D \frac{3}{4} L - F_H \frac{L}{2} \sin 30^\circ - G \frac{L}{2} \cos 60^\circ = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo silu F_H:

$$F_H = 32 \text{ daN.}$$

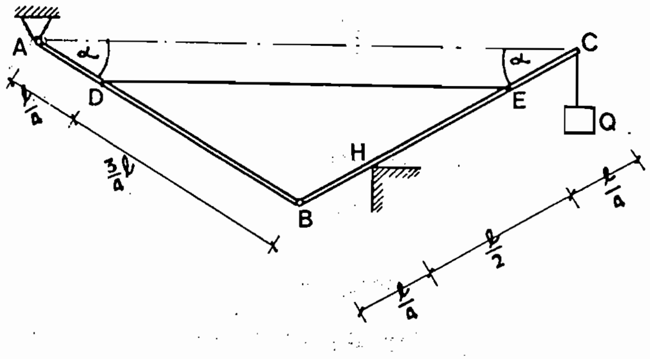
Iz jednačina (4) i (5) nalazimo X_B, odnosno Y_B:

$$X_B = (F_H - F_D) \cos 30^\circ = (32 - 14)\frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3} \text{ daN.}$$

$$Y_B = (F_H + F_D) \sin 30^\circ = 13 \text{ daN.}$$

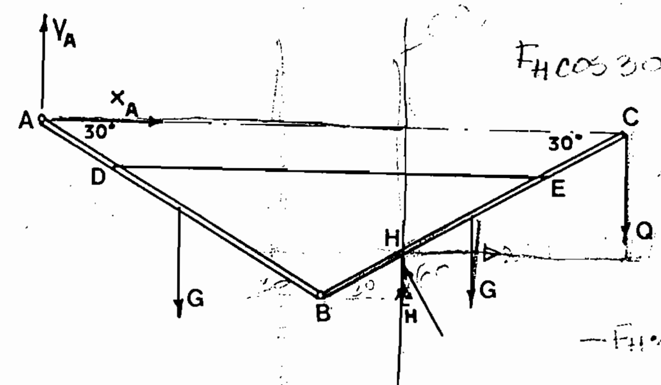
o je oje

53. Na slici 141 je data konstrukcija koja se sastoji od dva jednaka homogena štapa dužine ℓ i težine G = 30 daN i nerastegljivog užeta DE. U slučaju da je ugao $\alpha = 30^\circ$ i veličina tereta Q = 60 daN, odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije veza date konstrukcije.



Slika 141.

C E L I N A: (slika 142)



Slika 142.

$F_H \cos 30^\circ \left(\frac{\ell}{4} \cos 30^\circ + \ell \cos 30^\circ\right)$

$-F_H \sin 30 \frac{3}{4}\ell$

$-\cancel{G\cos 30^\circ} - G\left(\frac{\ell}{2}\right.$

$$\sum X_i = 0: \quad X_A - F_H \sin 30^\circ = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad Y_A - 2G - Q + F_H \cos 30^\circ = 0, \tag{2}$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_H \cos 30^\circ\left(\ell \cos 30^\circ + \frac{\ell}{4} \cos 30^\circ\right) - F_H \sin 30^\circ \frac{3}{4}\ell \sin 30^\circ -$$

$$- G\left(\ell \cos 30^\circ + \frac{\ell}{2} \cos 30^\circ\right) - Q\, 2\ell \cos 30^\circ - G\frac{\ell}{2} \cos 30^\circ = 0. \tag{3}$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo reakciju F_H:

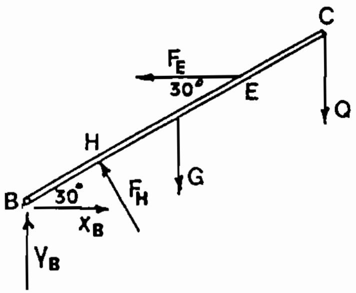
$$F_H = 120\sqrt{3} \text{ daN.}$$

Iz jednačine (1), odnosno (2) nalazimo komponente reakcije zgloba A:

$$X_A = F_H \sin 30^\circ = 60\sqrt{3}\ \text{daN},$$

$$Y_A = 2G + Q - F_H \cos 30^\circ = -60\ \text{daN}.$$

Š T A P BC: (slika 143)



Slika 143.

$\sum X_i = 0:$

$$X_B - F_H \sin 30^\circ - F_E = 0, \qquad (4)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_B + F_H \cos 30^\circ - G - Q = 0, \qquad (5)$$

$\sum M_B = 0:$

$$-Q\ell \cos 30^\circ + F_E \frac{3}{4}\ell \sin 30^\circ - G\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + F_H \frac{\ell}{4} = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (6) dobijamo za reakciju F_E:

$$F_E = 20\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

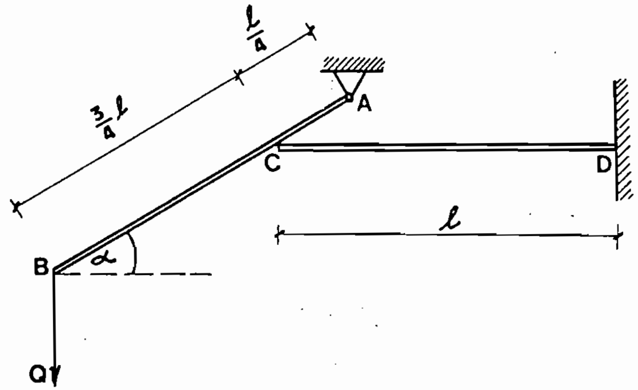
Iz jednačine (4) i (5) nalazimo komponente reakcije zgloba B:

$$X_B = F_H \sin 30^\circ + F_E = 80\sqrt{3}\ \text{daN},$$

$$Y_B = G + Q - F_H \cos 30^\circ = -90\ \text{daN}.$$

54. Homogeni štap AB dužine $\ell = 2$ m i težine G = 10 daN zglobno je vezan u A, dok se u tački C oslanja na kraj horizontalnog štapa CD dužine ℓ i težine G = 10 daN, koji je na svom desnom kraju D uklješten u vertikalni zid. U tački B štapa AB obešen je teret težine Q = 6 daN. U ravnotežnom položaju štap AB zaklapa sa horizontalom ugao $\alpha = 30^\circ$, $\overline{AC} = \frac{\ell}{4}$.

Odrediti sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema.



Slika 144.

Š T A P AB: (slika 145)

$\sum X_i = 0:$

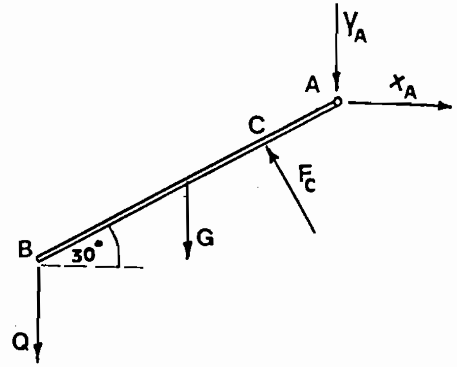
$$-F_c \sin 30^\circ + X_A = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$-Q - G + F_c \cos 30^\circ - Y_A = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$-Q\ell \cos 30^\circ - G\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ + F_c \frac{\ell}{4} = 0. \qquad (3)$$



Slika 145

Iz jednačine (3) nalazimo reakciju F_c:

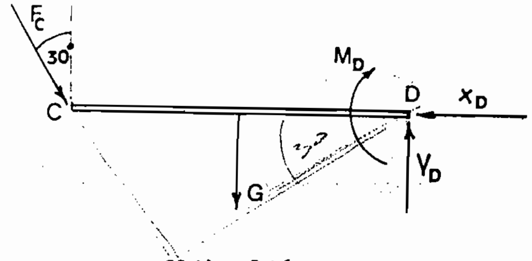
$$F_c = 22\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Iz jednačina (1) i (2) dibijamo X_A, odnosno Y_A:

$X_A = F_c \sin 30^\circ = 11\sqrt{3}$ daN,

$Y_A = F_c \cos 30^\circ - (G + Q) = 17$ daN.

Š T A P CD: (slika 146)



Slika 146.

$\sum X_i = 0$: $F_c \sin 30^\circ - X_D = 0$, (4)

$\sum Y_i = 0$: $-F_c \cos 30^\circ - G + Y_D = 0$, (5)

$\sum M_D = 0$: $-F_c \cos 30^\circ \ell - G \frac{\ell}{2} + M_D = 0$. (6)

Iz jednačine (4) i (5) nalazimo reakciju uklještenja, dok iz jednačine (6) nalazimo moment uklještenja M_D:

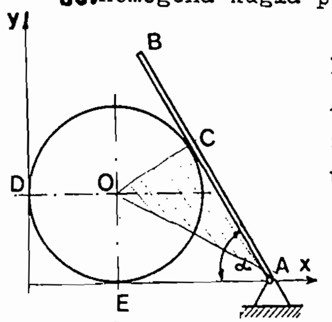
$X_D = F_c \sin 30^\circ = 11\sqrt{3}$ daN,

$Y_D = G + F_c \cos 30^\circ = 43$ daN,

$M_D = F_c \cos 30^\circ \ell + G \frac{\ell}{2} = 76$ daNm.

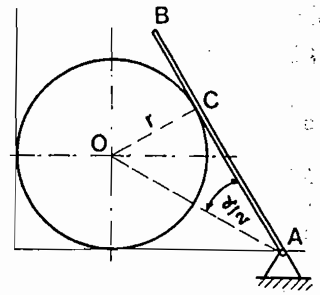
55. Homogena kugla poluprečnika r i težine Q = 20 daN oslonjena je na pod u tački E i na zid u tački D. Na kuglu se u tački C oslanja homogeni štap AB = 2r = ℓ, težine G = $16\sqrt{3}$ daN, koji je zglobno vezan za pod u A i gradi sa njim ugao $\alpha = 60^\circ$.

Izračunati sve reakcije datog sistema.



Slika 147.

Odredimo prvo rastojanje AC (slika 148):



Slika 148.

Iz trougla AOC sledi:

$\overline{AC} = r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{cotg} 30^\circ = r\sqrt{3}$.

Pri čemu je $\ell = 2r$.

Posmatrajmo sada ravnotežu štapa AB (slika 149).

$\sum X_i = 0$:

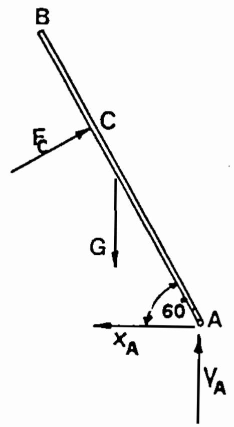
$F_c \cos 30^\circ - X_A = 0$, (1)

$\sum Y_i = 0$:

$F_c \cos 60^\circ - G + Y_A = 0$, (2)

$\sum M_A = 0$:

$F_c \cdot \overline{AC} - G \frac{\ell}{2} \cos 60^\circ = 0$. (3)



Slika 149.

Uzimajući u obzir da je $\overline{AC} = r\sqrt{3}$ i $\ell = 2r$, iz jednačine (3) nalazimo reakciju F_c:

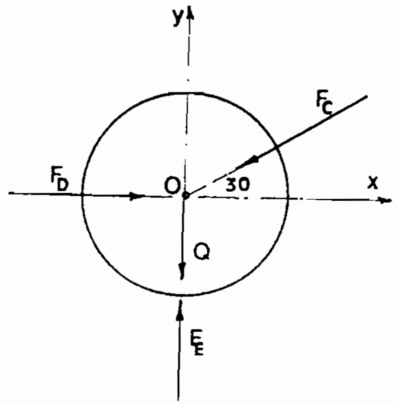
$F_c = 8$ daN.

Iz (1) i (2) dobijamo:

$X_A = F_c \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}$ daN,

$Y_A = G - F_c \cos 60^\circ = 4(4\sqrt{3} - 1)$ daN.

I na kraju ćemo posmatrati ravnotežu kugle O: (slika 150)



Slika 150.

$\sum X_1 = 0:$

$$F_D - F_c \cos 30^\circ = 0, \qquad (4)$$

$\sum Y_1 = 0:$

$$F_E - Q - F_c \sin 30^\circ = 0. \qquad (5)$$

Iz jednačine (4) imamo da je:

$$F_D = F_c \cos 30^\circ = 4\sqrt{3}\ \text{daN},$$

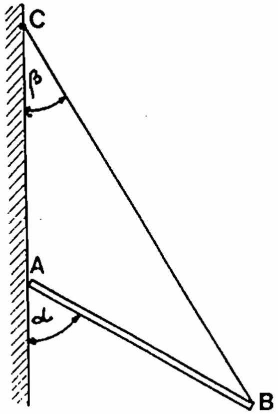
dok je iz jednačine (5)

$$F_E = Q + F_c \sin 30^\circ = 24\ \text{daN}.$$

1.3 RAVNOTEŽA KRUTOG TELA POD DEJSTVOM SILE TRENJA

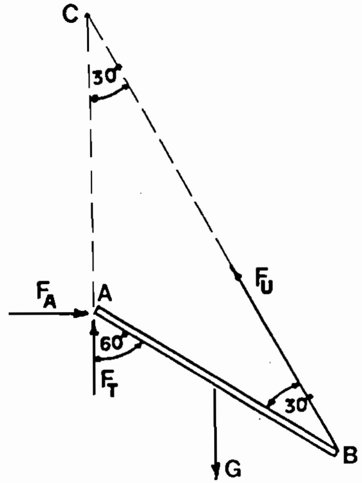
56. Homogeni prizmatični štap AB težine G i dužine 2ℓ oslanja se svojim krajem A o vertikalni hrapavi zid gradeći sa njim ugao α. Kraj B štapa vezan je za zid koncem BC. Konac gradi ugao β sa zidom.

Odrediti reakciju zida na pritisak štapa, silu u koncu i koeficjent trenja μ za slučaj ravnoteže. Težinu konca zanemariti. Dati su uglovi: $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.



Slika 151.

Posle oslobadjanja od veza štap AB će biti opterećen silama kako je to pokazano na slici 152.



Slika 152.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$\sum X_1 = 0:$

$$F_A - F_u \sin 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_1 = 0:$

$$F_T - G + F_u \cos 30^\circ = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$F_u 2\ell \sin 30^\circ - G\ell \sin 60^\circ = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ, nalazimo silu u užetu BC:

$$F_u = \frac{\sqrt{3}}{2} G.$$

Iz jednačine (1) dobijamo reakciju zida F_A, dok iz (2) nalazimo silu trenja F_T:

$$F_A = F_u \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} G,$$

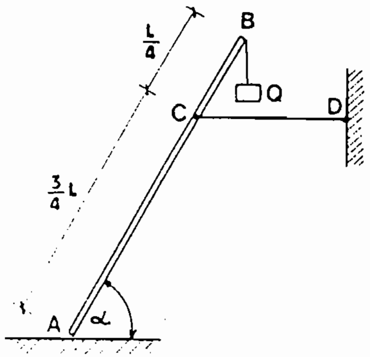
$$F_T = G - F_u \cos 30^\circ = \frac{G}{4} .$$

Na osnovu drugog zakona trenja, znamo da je $F_T = \mu F_A$, odakle je:

$$\mu = \frac{F_T}{F_A} = \frac{\frac{G}{4}}{\frac{G\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} .$$

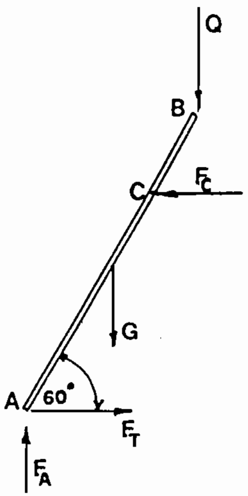
57. Homogeni štap AB dužine L, težine G = 30 daN, na čijem kraju B visi teret Q = 120 daN, održava se u ravnoteži u vertikalnoj ravni (α=60°) pod dejstvom horizontalnog tankog štapa CD oslanjajući se krajem A o hrapavi pod. Odrediti:

a) reakciju oslonca A i silu u štapu CD,
b) koeficjent trenja μ štapa i poda.



Slika 153.

Štap AB će biti opterećen silama, kako je to pokazano na slici 154:



Slika 154.

$\sum X_i = 0:$

$$F_T - F_c = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$F_A - G - Q = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$-Q.L.\cos 60^\circ + F_c \frac{3}{4} L \sin 60^\circ - G \frac{L}{2} \cos 60^\circ . (3)$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa L nalazimo silu u štapu:

$$F_c = 60\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Iz jednačina (1), odnosno (2) imamo da je:

$$F_T = F_c = 60\sqrt{3} \text{ daN},$$

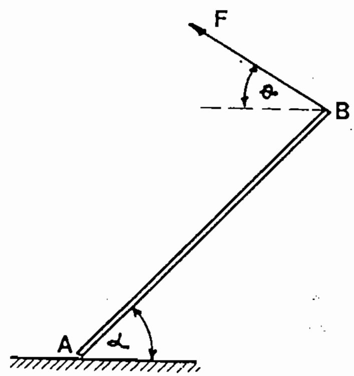
$$F_A = G + Q = 150 \text{ daN}.$$

Prema tome, traženi koeficent trenja će biti:

$$\mu = \frac{F_T}{F_A} = \frac{60\sqrt{3}}{150} = \frac{2\sqrt{3}}{5} .$$

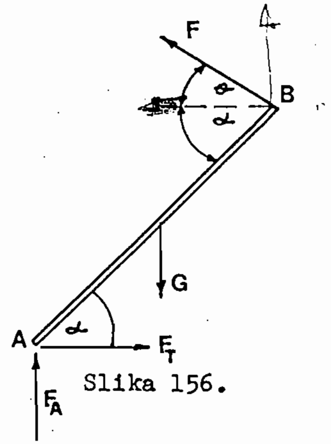
58. Homogeni štap AB težine G = 30 daN, dužine ℓ oslanja se o hrapavu horizontalnu podlogu koja gradi sa osom štapa ugao α i ima koeficjent trenja $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Na drugom kraju (B) štapa deluje sila F pod uglom θ = 30° u odnosu na horizontalu.

Odrediti veličinu reakcije štapa u tački A, ugao α i potrebnu veličinu sile F da bi taj ugao bio ravnotežni.



Slika 155.

Opterećenje štapa AB prikazano je na slici 156.



Slika 156.

$\sum X_i = 0:$

$$F_T - F \cos \theta = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$F_A - G + F \sin \theta = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$F\cos\theta \cdot \ell\sin\alpha + F\sin\theta \cdot \ell\cos\alpha - G\frac{\ell}{2}\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Gde smo moment sile F za tačku A odredili pomoću Varinjonove teoreme.

Iz jednačine (1) imamo da je: $\mu F_A - F\cos\theta = 0$,

$$\mu F_A - F\cos 30^o = 0, \quad \text{ili} \quad \frac{\sqrt{3}}{2}F_A - F\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,$$

odakle sledi da je: $F_A = F$.

Iz jednačine (2) je sada: $F + F\sin\theta = G$, ili

$F(1 + \sin 30^o) = G$, pa je $F = F_A = 20$ daN.

Kada jednačinu (3) skratimo sa ℓ i podelimo sa $\cos\alpha$, ona postaje:

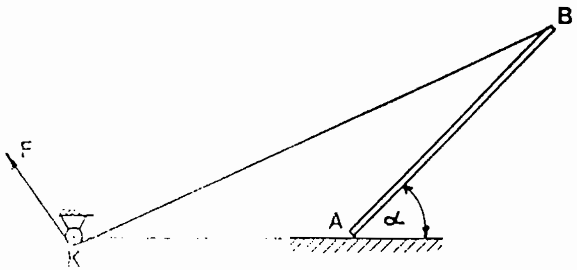
$$F\,tg\alpha\cos\theta + F\sin\theta = \frac{G}{2}, \qquad 20.tg\alpha\frac{\sqrt{3}}{2} + 20\frac{1}{2} = 15,$$

ili $10\sqrt{3}\,tg\alpha = 5$, $\quad tg\alpha = \frac{5}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$,

ili konačno:

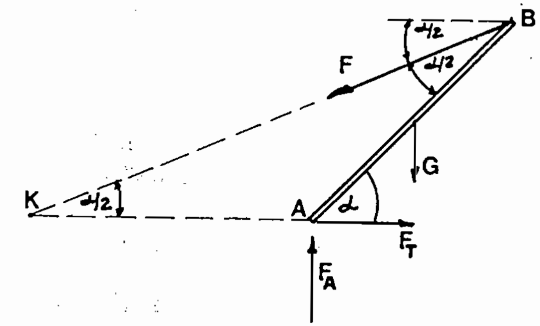
$$tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

59. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine G oslanja se krajem A o hrapavu horizontalnu ravan čiji je koeficjent trenja μ. Štap je u vertikalnoj ravni u ravnoteži pod dejstvom gipkog nerastegljivog užeta BK. Ako je $\overline{AK} = \overline{AB} = \ell$ izraziti reakciju u tački A, koeficjent trenja μ i veličinu sile F u zavisnosti od veličina G i α.



Slika 157.

Šema opterećenja štapa AB prikazana je na slici 158.



Slika 158.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad F_T - F\cos\frac{\alpha}{2} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_A - G - F\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F\ell\sin\frac{\alpha}{2} - G\frac{\ell}{2}\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo potrebnu veličinu sile F:

$$F = \frac{G}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

BILJANA

Iz jednačine (1) je:

$$F_T = F\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{G}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{G}{2}\cos\alpha\cdot cotg\frac{\alpha}{2}.$$

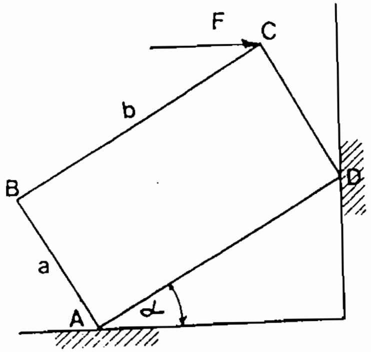
I konačno iz jednačine (2) je:

$$F_A = G + F\sin\frac{\alpha}{2} = G + \frac{G}{2}\cos\alpha, \qquad F_A = G(1 + \frac{\cos\alpha}{2}).$$

Sada je koeficjent trenja μ:

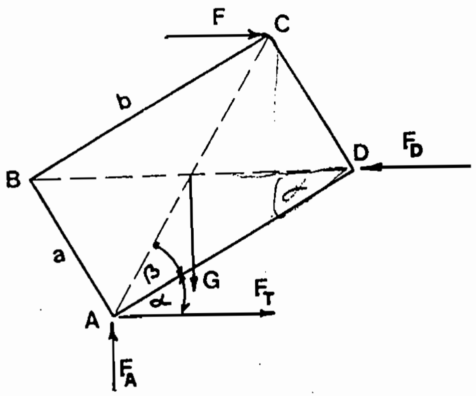
$$\mu = \frac{F_T}{F_A} = \frac{\frac{G}{2}\cos\alpha\cdot cotg\frac{\alpha}{2}}{G(1 + \frac{\cos\alpha}{2})} = \frac{\cos\alpha\; cotg\frac{\alpha}{2}}{2 + \cos\alpha}.$$

60. Homogena pravougaona ploča ABCD strana a i $b = a\sqrt{3}$, težine $G = 10\sqrt{3}$ daN, oslanja se temenom A na hrapavu horizontalnu podlogu, a temenom D o glatki vertikalni zid. U temenu C na ploču deluje horizontalna sila $F = 10$ daN. U ravnotežnom položaju strana AD ploče zaklapa sa horizontalom ugao $\alpha = 30^o$. Odrediti reakcije u tačkama A i D, kao i potrebnu veličinu koeficjenta trenja μ u tački A.



Slika 159.

Nakon oslobadjanja od veza ploča ABCD će biti opterećena silama, kako je to pokazano na slici 160.



Slika 160.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$$\sum X_i = 0: \quad F_T + F - F_D = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_A - G = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_D \cdot b \cdot \sin 30^o - G\,\frac{d}{2}\cos(30^o + \beta) - F \cdot d \cdot \sin(30^o + \beta) = 0. \qquad (3)$$

Gde je $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ dijagonala ploče.

No.13

Iz jednačine (2) nalazimo reakciju poda F_A:

$$F_A = G = 10\sqrt{3}\ \text{daN}.$$

Jednačinu (3) ćemo napisati u obliku:

$$F_D \cdot b \cdot \sin 30^o - G\,\frac{d}{2}(\cos 30^o \cos\beta - \sin 30^o \sin\beta) - F \cdot d \cdot (\sin 30^o \cos\beta + \cos 30^o \sin\beta) = 0.$$

Iz trougla ABC (slika 160) sledi da je:

$$\sin\beta = \frac{a}{d}, \qquad \cos\beta = \frac{b}{d}.$$

Kada ovo uvrstimo u gornju jednačinu, ona postaje:

$$\frac{b}{2} F_D = G\,\frac{d}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{b}{d} - \frac{a}{2d}\right) + F\,\frac{d}{2}\left(\frac{b}{2d} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{a}{d}\right).$$

Posle skraćivanja sa d i uzimajući u obzir da je $b = a\sqrt{3}$, iz poslednjeg izraza nalazimo reakciju zida F_D:

$$F_D = 30\ \text{daN}.$$

Koeficjent trenja μ nalazimo iz jednačine (1). Ovu jednačinu možemo napisati u obliku:

$$\mu F_A + F - F_D = 0, \quad \text{ili}$$

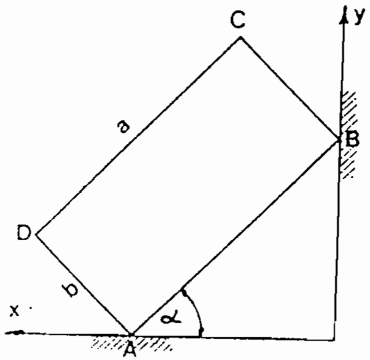
$$\mu\, 10\sqrt{3} + 10 - 30 = 0, \qquad \mu = \frac{20}{10\sqrt{3}},$$

ili konačno:

$$\mu = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

30.01.2002

61. Homogena ploča ABCD čije su strane b i $a = 2b$, stoji u ravnoteži u vertikalnoj ravni oslonjena temenima A i B o hrapavu horizontalnu podlogu i hrapavi vertikalni zid, kako je na slici 161 pokazano. Koeficjenti trenja u tačkama A i B su μ. Težina ploče je G. Za ravnotežni ugao $\alpha = 45^\circ$ odrediti: a) reakcije u tačkama A i B,
b) veličinu koeficjenta trenja μ.



Slika 161.

Ploča će biti opterećena silama kako je to pokazano na slici 162.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila su:

$\sum X_i = 0:$

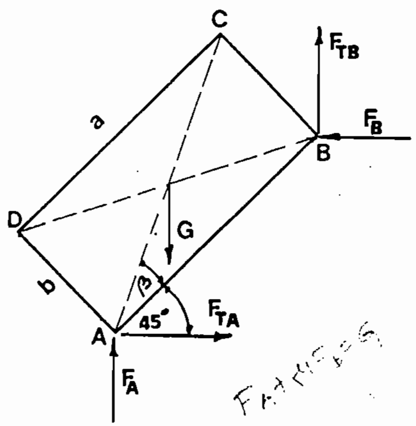
$$F_{TA} - F_B = 0. \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$F_A - G + F_{TB} = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$F_B a \sin 45^\circ + F_{TB} a \cos 45^\circ - G\,\frac{d}{2}\cos(45^\circ + \beta) = 0. \qquad (3)$$



Slika 162.

Iz jednačine (1) imamo da je: $F_{TA} = F_B$, ili $\mu F_A = F_B$.

Iz jednačine (2) sledi: $F_A + \mu F_B = G$; ili

$F_A + \mu^2 F_A = G$, $\quad F_A(1 + \mu^2) = G$, $\quad$ pa je:

$$F_A = \frac{G}{1 + \mu^2} \qquad \text{i} \qquad F_B = \frac{\mu G}{1 + \mu^2}.$$

FA+μFB=G

Jednačinu (3) možemo napisati u obliku:

$$F_B a \sin 45^\circ + \mu F_B a \cos 45^\circ - G\,\frac{d}{2}(\cos 45^\circ \cos\beta - \sin 45^\circ \sin\beta) = 0.$$

Pošto je $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, celu jednačinu možemo kratiti sa $\sin 45^\circ$, odnosno $\cos 45^\circ$.

U gornjoj jednačiji je $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ dijagonala pravougaone ploče.

Iz trougla ABC (slika 162) je: $\sin\beta = \frac{b}{d}$, $\quad \cos\beta = \frac{a}{d}$.

Uzimajući sve ovo u obzir, gornja jednačina postaje:

$$F_B \cdot a + \mu F_B \cdot a - G\,\frac{d}{2}\left(\frac{a}{d} - \frac{b}{d}\right) = 0.$$

Kada u ovaj izraz uvrstimo vrednost za F_B i u poslednjem članu izvršimo skraćivanje sa d, dobijamo:

$$\frac{\mu G}{1 + \mu^2}\,a + \frac{\mu^2 G}{1 + \mu^2}\,a - \frac{G}{2}\left(a - \frac{a}{a}\right) = 0,$$

gde smo uzeli da je $b = \frac{a}{2}$.

Gornji izraz skratimo sa G i posle sredjivanja dobijamo:

$$\frac{3\mu^2 + 4\mu - 1}{4(1 + \mu^2)} = 0, \quad \text{ili} \qquad 3\mu^2 + 4\mu - 1 = 0.$$

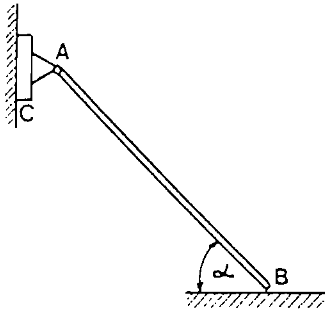
Rešenje gornje kvadratne jednačine je:

$\mu = \dfrac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6}$. Uzimamo u obzir samo pozitivnu vrednost koeficjenta trenja μ, tj.

$$\mu = \frac{\sqrt{7} - 2}{3}.$$

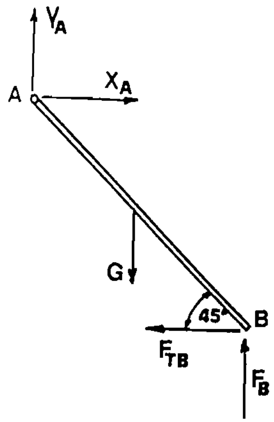
b = a/2

62. Homogeni prizmatični štap AB dužine 2ℓ i težine G oslanja se svojim krajem B na hrapavi horizontalni pod. Svojim krajem A zglobno je vezan za ploču C, koju nagnut pod uglom $\alpha = 45^\circ$, pritiskuje o hrapavi vertikalni zid. Koeficjenti trenja izmedju štapa i poda, kao i izmedju ploče C i zida su isti i iznose μ. Odrediti težinu ploče C Q i sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema. Koliki treba da je koeficjent trenja μ da bi težinu ploče C mogli zanemariti ? Debljinu ploče i dimenzije zgloba A zanemariti.



Slika 163.

Posmatrajmo prvo ravnotežu štapa AB: (slika 164)



Slika 164.

$\underline{\sum X_i = 0:}$

$$X_A - F_{TB} = 0, \qquad (1)$$

$\underline{\sum Y_i = 0:}$

$$F_B - G + Y_A = 0, \qquad (2)$$

$\underline{\sum M_A = 0:}$

$$F_B \cdot 2\ell \cos 45^\circ - F_{TB} \cdot 2\ell \sin 45^\circ - G\ell \cos 45^\circ = 0. \qquad (3)$$

Jednačinu (3) možemo kratiti sa $\sin 45^\circ$, tako da ona sada postaje:

$$2F_B - 2\mu F_B = G, \quad 2F_B(1-\mu) = G, \quad \text{ili}$$

$$F_B = \frac{G}{2(1-\mu)}.$$

Iz jednačine (1) je sada:

$$X_A = \mu F_B = \frac{\mu G}{2(1-\mu)},$$

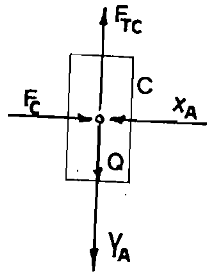
dok je iz jednačine (2):

$$Y_A = G - F_B = G - \frac{G}{2(1-\mu)}.$$

Posle sredjivanja, gornji izraz postaje:

$$Y_A = \frac{G(1-2\mu)}{2(1-\mu)}.$$

Posmatrajmo sada ravnotežu ploče C: (slika 165)



Slika 165.

$$\sum X_i = 0: \quad F_c - X_A = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_{Tc} - Q - Y_A = 0. \qquad (5)$$

Iz jednačine (4) imamo da je:

$$F_c = X_A = \frac{\mu G}{2(1-\mu)},$$

tako da je sila trenja u tački C:

$$F_{Tc} = \mu F_c = \frac{\mu^2 G}{2(1-\mu)}.$$

Iz jednačine (5) imamo da je:

$$Q = F_{Tc} - Y_A = \frac{\mu^2 G}{2(1-\mu)} - \frac{G(1-2\mu)}{2(1-\mu)}.$$

Ili posle sredjivanja:

$$Q = \frac{\mu^2 + 2\mu - 1}{2(1-\mu)} G.$$

Da bi težina ploče Q bila jednaka nuli, mora biti ispunjen uslov:

$$\mu^2 + 2\mu - 1 = 0.$$

Rešenje gornje jednačine je: $\mu = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}.$

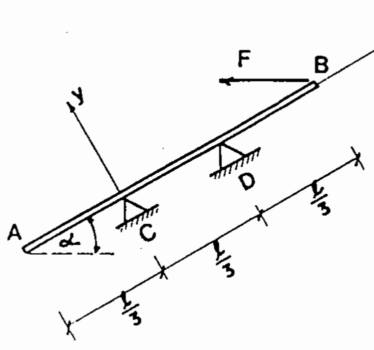
Uzimajući u obzir samo znak +, za traženi koeficjent trenja dobijamo:

$$\mu = \sqrt{2} - 1.$$

63. Homogeni štap AB dužine ℓ i težine G = 4 daN na čijem kraju B deluje horizontalna sila $F = 2\sqrt{3}$ daN, postavljen je na hrapave oslonce C i D, tako da sa pravcem horizontale gradi ugao $\alpha = 30^o$.

Odrediti: a) potrebni koeficjent trenja μ u osloncima, da bi štap stajao u ravnoteži u datom položaju,

b) reakcije oslonaca.



Slika 166.

Štap AB je opterećen silama kako je to pokazano na slici 167. Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila su:

$\sum X_i = 0$:

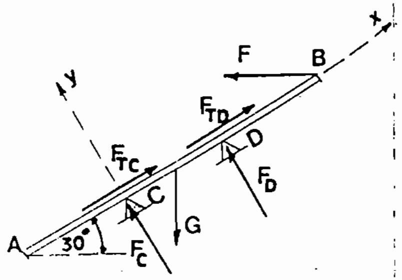
$$F_{Tc} - G \sin\alpha + F_{TD} - F \cos\alpha = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_c - G \cos\alpha + F_D + F \sin\alpha = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_D = 0$:

$$F_c \frac{\ell}{3} - G \cos\alpha \frac{\ell}{6} - F \sin \frac{\ell}{3} = 0. \qquad (3)$$



Slika 167.

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ i uzimajući u obzir da je $\alpha = 30^o$, nalazimo reakciju F_c:

$$F_c = 2\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Iz jednačine (2) sada nalazimo reakciju F_D:

$$F_D = G \cos\alpha - F \sin\alpha - F_c.$$

Ako u zadnji izraz uvrstimo nadjenu vrednost za F_c, dobijamo da je reakcija F_D:

$$F_D = -\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Koeficjent trenja μ nalazimo iz jednačine (1), koju možemo napisati u obliku:

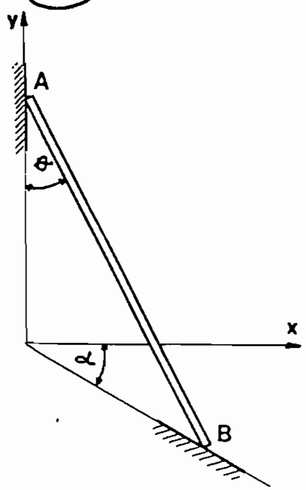
$$\mu F_c - G \sin\alpha + \mu F_D - F \cos\alpha = 0,$$

ili

$$\mu 2\sqrt{3} - 4 \frac{1}{2} + \mu\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 .$$

$$3\mu\sqrt{3} = 5, \quad \mu = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9} .$$

64. Homogeni štap AB dužine L i težine $G = 21\sqrt{3}$ daN stoji u vertikalnoj ravni oslonjen o hrapavi zid i hrapavu podlogu, kako je to na slici 168 pokazano. Ako je ugao $\alpha = 30^o$, a koeficjent trenja na oba mesta oslanjanja štapa, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ odrediti: a) reakcije na krajevima štapa, b) ravnotežni ugao θ.



Slika 168.

Štap AB je opterećen silama kako je to pokazano na slici 169.

Uslovi ravnoteže za ovaj sistem sila će biti:

$\sum X_i = 0$:

$$F_A + F_B \sin 30^o - F_{TB} \cos 30^o = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad F_{TA} - G + F_{TB} \sin 30^o + F_B \cos 30^o = 0, \qquad (2)$$

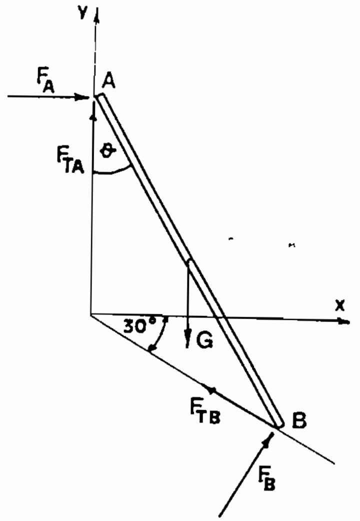
$$\sum M_B = 0: \quad F_A \cdot L \cos\theta + F_{TA} \cdot L \sin\theta - G \frac{L}{2} \sin\theta = 0. \qquad (3)$$

Jednačinu (1) možemo napisati u obliku:

$$F_A + F_B \sin 30^o - \mu F_B \cos 30^o = 0,$$

Ili:

$$F_A + \frac{F_B}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_B\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \text{tj.} \quad F_A = \frac{F_B}{4}.$$



Slika 169.

Jednačinu (2) možemo napisati u obliku:

$$\mu F_A + \mu F_B \sin 30^0 + F_B \cos 30^0 = G.$$

Uzimajući u obzir da je $F_A = \frac{F_B}{4}$ i da je $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$, gornji izraz postaje:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F_B}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F_B}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}F_B = 21\sqrt{3}.$$

Odavde je: $F_B = 24$ daN.

Sada je $F_A = \frac{F_B}{4} = 6$ daN.

Ugao θ nalazimo iz jednačine (3):

Ako ovu jednačinu podelimo sa $L.\cos\theta$, ona postaje:

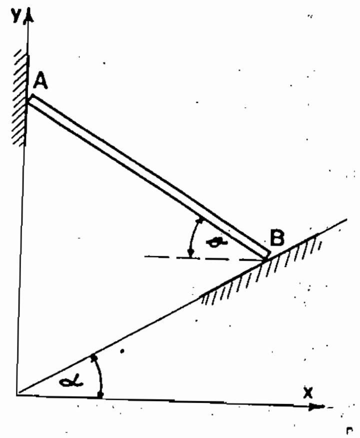
$$F_A + \mu F_A.\text{tg}\,\theta - \frac{G}{2}\,\text{tg}\,\theta = 0, \qquad \left(\frac{G}{2} - \mu F_A\right)\text{tg}\,\theta = F_A,$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{F_A}{\frac{G}{2} - \mu F_A} = \frac{6}{\frac{21\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}6}.$$

Posle sredjivanja gornjeg izraza, nalazimo da je:

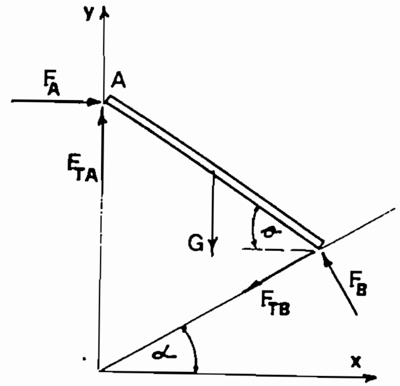
$$\text{tg}\,\theta = \frac{4\sqrt{3}}{15}.$$ = 0,46   24°

65. Homogeni štap AB dužine L i težine G stoji u vertikalnoj ravni u ravnoteži oslonjen o hrapavi zid i hrapavu strmu ravan istog koeficjenta trenja μ. Nagibni ugao ravni je α. Odrediti reakcije štapa u tačkama oslanjanja A i B, kao i ravnotežni ugao θ u funkciji zadatih veličina: G, μ i α.



Slika 170.

Štap AB je opterećen silama kako je pokazano na slici 171.



Slika 171.

$\sum X_i = 0:$

$$F_A - F_{TB}\cos\alpha - F_B \sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$F_{TA} - G - F_{TB}\sin\alpha + F_B\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_B = 0:$

$$F_A.L\sin\theta + F_{TA}.L\cos\theta - G\frac{L}{2}\cos\theta = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (1) imamo da je: $F_A - \mu F_B\cos\alpha - F_B\sin\alpha = 0$,

tj. $F_A = (\mu\cos\alpha + \sin\alpha)F_B$.

Iz jednačine (2) je: $\mu F_A - \mu F_B \sin\alpha + F_B\cos\alpha = G$

Ako u ovaj izraz uvrstimo nadjenu vrednost za F_A dobijamo:

$$\mu(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)F_B - \mu F_B\sin\alpha + F_B\cos\alpha = G,$$

$$\mu^2\cos F_B + \mu\sin\alpha F_B - \mu\sin\alpha F_B + \cos\alpha F_B = G,$$

$F_B \cos\alpha (1+\mu^2) = G.$ Odavde je:

$$F_B = \frac{G}{(1+\mu^2)\cos\alpha}.$$

Iz izraza $F_A = (\mu\cos\alpha + \sin\alpha)F_B$, nalazimo reakciju F_A:

$$F_A = \frac{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)\,G}{(1+\mu^2)\cos\alpha}.$$

Ugao θ nalazimo iz jednačine (3).

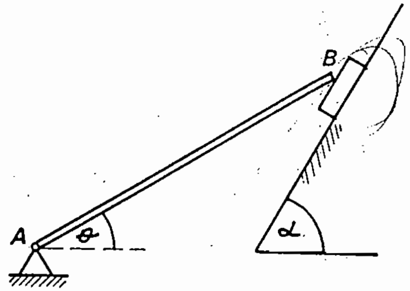
Ako celu jednačinu podelimo sa $L\cos\theta$ i u nju uvrstimo nadjenu vrednost za F_A, dobijamo:

$$\frac{(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)G}{(1+\mu^2)\cos\alpha}\,\mathrm{tg}\,\theta = \frac{G}{2} - \frac{\mu(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)G}{(1+\mu^2)\cos\alpha}.$$

Posle skraćivanja sa G i rešavanjem po $\mathrm{tg}\,\theta$, dobijamo:

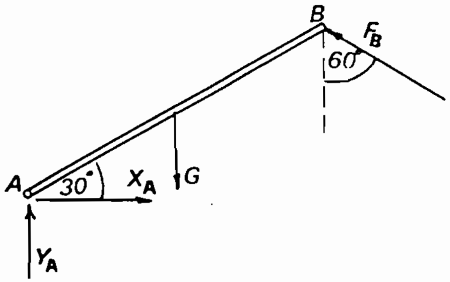
$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\cos\alpha(1-\mu^2) - 2\mu\sin}{2(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}.$$

66. Po hrapavoj strmoj ravni nagibnog ugla $\alpha = 60^\circ$ i koeficjenta trenja $\mu = 0{,}4\sqrt{3}$ može da se kreće teret težine Q na koji se slobodno bez trenja oslanja štap AB (reakcija prolazi krpz težište tereta) dužine ℓ. Štap je zglobno vezan u A i zaklapa ugao $\theta = 30^\circ$ sa horizontalom. Odrediti: a) težine tereta Q i štapa G da bi sistem stajao u ravnoteži, ako znamo da je $Y_A = 4{,}5$ daN, b) reakcije sistema.



Slika 172.

RAVNOTEŽA ŠTAPA AB: (slika 173)



Slika 173.

$\underline{\sum X_i = 0:}$

$$X_A - F_B\sin 60^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\underline{\sum Y_i = 0:}$

$$Y_A - G + F_B\cos 60^\circ = 0, \qquad (2)$$

$\underline{\sum M_A = 0:}$

$$F_B\cos 60^\circ \ell\cos 30^\circ + F_B\sin 60^\circ \ell\sin 30^\circ - G\frac{\ell}{2}\cos 30^\circ = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) možemo uspostaviti vezu izmedju reakcije F_B i težine štapa G:

$$\boxed{G} = 2F_B. \qquad (4)$$

Iz jednačine (2) sada sledi:

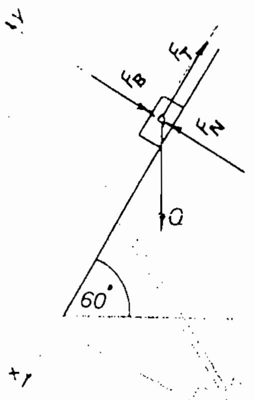
$$Y_A - 2F_B + \frac{1}{2}F_B = 0, \qquad \frac{3}{2}F_B = Y_A, \qquad F_B = \frac{2}{3}Y_A = 3 \text{ daN}.$$

Sada je: $G = 2F_B = 6$ daN.

Iz jednačine (1) imamo da je:

$$X_A = F_B\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ daN}.$$

Posmatrajmo sada ravnotežu tereta Q (slika 174):



Slika 174.

$\sum X_i = 0$:

$$Q \sin 60^\circ - F_T = 0, \qquad (5)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_N - F_B - Q \cos 60^\circ = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (5) je:

$$Q\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \mu F_N; \quad F_N = \frac{Q\sqrt{3}}{2\mu} = \frac{Q\sqrt{3}}{0{,}8\sqrt{3}} = \frac{Q}{0{,}8}.$$

Kada ovu vrednost za F_N uvrstimo u jednačinu (6), dobijamo:

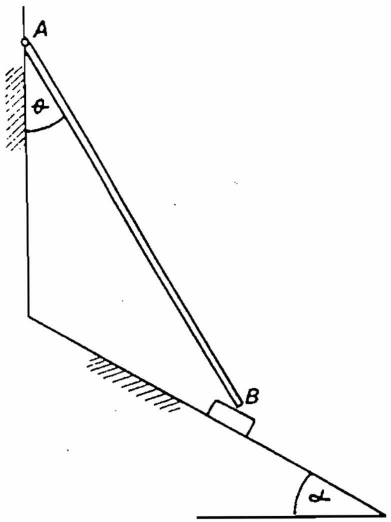
$$\frac{Q}{0{,}8} - 3 - \frac{1}{2}Q = 0, \quad \text{Odavde je: } Q = 4 \text{ daN}.$$

I konačno, za reakciju F_N dobijamo:

$$F_N = \frac{Q}{0{,}8} = 5 \text{ daN}.$$

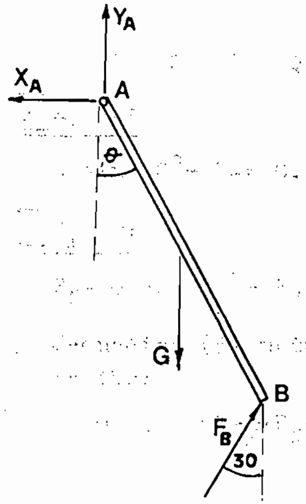
67. Po hrapavoj strmoj ravni nagibnog ugla $\alpha = 30^\circ$ i koeficjenta trenja $\mu = 0{,}3\sqrt{3}$ može da se kreće teret težine Q na koji se slobodno oslanja bez trenja štap AB (reakcija prolazi kroz težište tereta) dužine ℓ.

Štap je zglobno vezan u A i zaklapa ugao $\theta = 30^\circ$ sa vertikalom. Odrediti: a) reakcije sistema, b) veličinu tereta Q i težinu štapa G da bi sistem stajao u ravnoteži, ako znamo da je $Y_A = 4{,}5$ daN.



Slika 175.

ŠTAP AB: (slika 176)



Slika 176.

$\sum X_i = 0$:

$$-X_A + F_B \sin 30^\circ = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$Y_A - G + F_B \cos 30^\circ = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0$:

$$F_B \sin 30^\circ \ell \cos 30^\circ - F_B \cos 30^\circ \ell \sin 30^\circ - G\,\frac{\ell}{2} \sin 30^\circ = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa $\sin 30^\circ$ nalazimo vezu izmedju težine štapa G i reakcije F_B:

$$G = 2\sqrt{3}\, F_B. \qquad (4)$$

Iz jednačine (2) imamo da je: $G - F_B \cos 30^\circ = Y_A$, ili

$$2\sqrt{3}\, F_B - F_B\,\frac{\sqrt{3}}{2} = Y_A, \quad F_B = \frac{2Y_A}{3\sqrt{3}} = \sqrt{3} \text{ daN}.$$

Sada je na osnovu (4): $G = 2\sqrt{3}\, F_B = 6$ daN.

Iz jednačine (1) je: $X_A = F_B \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ daN.

TERET Q: (slika 177)

$\sum X_i = 0$:

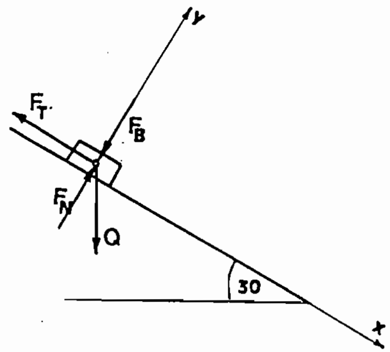
$$Q \sin 30^\circ - F_T = 0, \qquad (5)$$

$\sum Y_i = 0$:

$$F_N - Q \cos 30^\circ - F_B = 0. \qquad (6)$$

Jednačinu (5) možemo napisati u obliku:

$$Q \sin 30^\circ - \mu F_N = 0.$$



Slika 177.

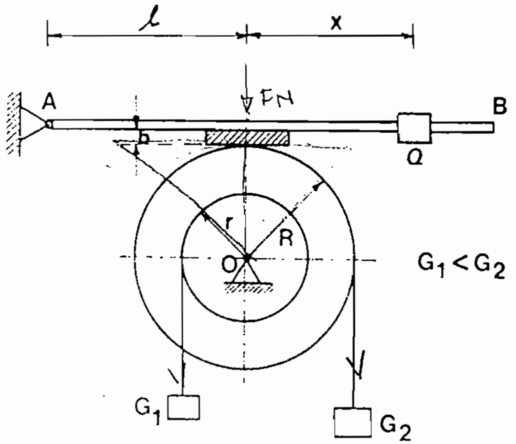
Iz zadnje jednačine je: $F_N = \dfrac{Q \sin 30^o}{\mu} = \dfrac{Q\sqrt{3}}{1{,}8}$.

Kada ovo zamenimo u jednačinu (6) dobijamo:

$$\frac{Q\sqrt{3}}{1{,}8} - \sqrt{3} - Q\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \text{ odavde je: } \quad Q = 18 \text{ daN}.$$

Sada je: $F_N = \dfrac{Q\sqrt{3}}{1{,}8} = 10\sqrt{3}$ daN.

68. Na dva koaksijalna doboša poluprečnika r i R namotana su užad na čijim krajevima vise tereti: G_1 i $G_2 > G_1$. Sistem doboša može da se obrće oko tačke O, ali ga u tome sprečava kočnica AB sa koeficjentom trenja μ. Teret Q je pomičan. Napisati opšte izraze za: a) potrebnu dužinu x za ostvarenje ravnoteže, b) otpore zgloba A kočnice, pod pretpostavkom da su: r, R, Q, G_1, G_2, ℓ, b i μ zadate veličine.



Slika 178.

Posmatrajmo prvo ravnotežu doboša (slika 179).

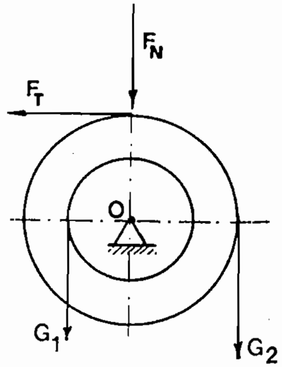
$\sum M_o = 0$:

$$F_T \cdot R - G_2 \cdot R + G_1 \cdot r = 0, \qquad (1)$$

Pošto je: $F_T = \mu F_N$, tj. $F_N = \dfrac{F_T}{\mu}$,

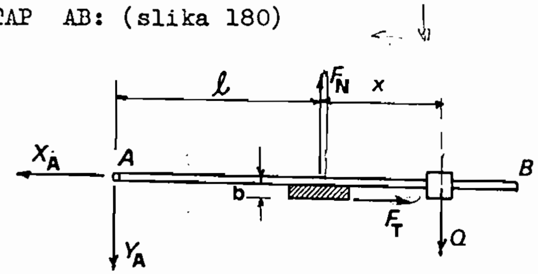
iz jednačine (1) dobijamo:

$$F_N = \frac{G_2 \cdot R - G_1 \cdot r}{\mu R} .$$



Slika 179.

ŠTAP AB: (slika 180)



Slika 180.

$$\sum X_i = 0: \quad -X_A + F_T = 0, \qquad (2)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -Y_A + F_N - Q = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_A = 0: \quad F_N \cdot \ell \;\; F_T \cdot b - Q(\ell + x) = 0. \qquad (4)$$

Iz jednačine (2) nalazimo komponentu X_A:

$$X_A = F_T = \mu F_N = \frac{G_2 R - G_1 r}{R}$$

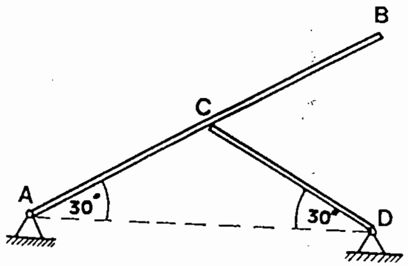
Iz jednačine (3) je:

$$Y_A = F_N - Q = \frac{G_2 R - G_1 r}{\mu R} - Q.$$

Iz jednačine (4) nalazimo dužinu x, i ona je jednaka:

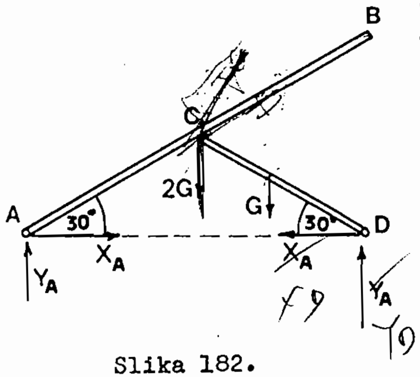
$$x = \frac{G_2 R - G_1 r}{Q \mu R}(\ell + \mu b) - \ell .$$

69. Dva štapa, AB dužine 4ℓ i težine 2G i štap CD dužine 2ℓ i težine G vezani su krajevima A i D zglobno za nepokretne oslonce (slika 181). Štap AB oslanja se o štap CD tako da oba grade sa horizontalom ugao od 30^o. Odrediti reakcije u zglobovima, uzajamni pritisak štapova, kao i koeficjent trenja μ medju štapovima za dati ravnotežni položaj.



Slika 181.

C E L I N A: (slika 182)



Slika 182.

$\sum X_i = 0$:

$$X_A - X_D = 0, \tag{1}$$

$\sum Y_i = 0$:

$$Y_A - 2G - G + Y_D = 0, \tag{2}$$

$\sum M_A =$:

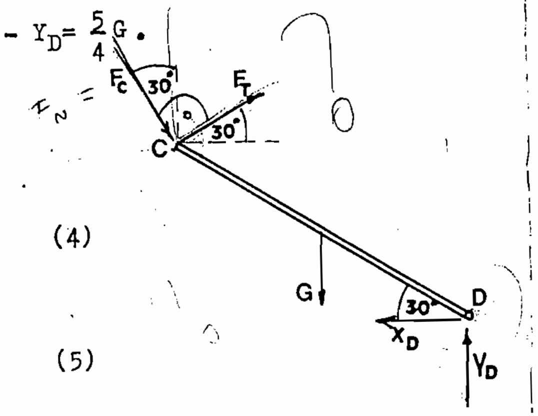
$$Y_D\, 4\ell\cos 30^\circ - G\, 3\ell\cos 30^\circ - 2G\, 2\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{3}$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa $\ell\cos 30^\circ$ nalazmo Y_D:

$$Y_D = \frac{7}{4}G .$$

Iz jednačine (2) je: $Y_A = 3G - Y_D = \frac{5}{4}G$.

ŠTAP CD: (slika 183)



Slika 183.

$\sum X_i = 0$:

$$F_T \cos 30^\circ + F_c \cos 60^\circ - X_D = 0, \tag{4}$$

$\sum Y_i = 0$:

$$Y_D - G + F_T \cos 60^\circ - F_c \cos 30^\circ = 0 \tag{5}$$

$\sum M_C$ ~~$\sum M_D = 0$:~~

$$Y_D 2\ell\cos 30^\circ - X_D 2\ell\sin 30^\circ - G\ell\cos 30^\circ = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo da je:

$X_D = \frac{5\sqrt{3}}{4}G$. Iz (1) je sada: $X_A = X_D = \frac{5\sqrt{3}}{4}G$.

KOJI JE OVO SAD KURAC?! AM' PAK ZNIEVEM?

Iz jednačina (4) i (5) nalazimo F_T i F_c.

Posle sredjivanja ove jednačine možemo napisati u obliku:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F_T + \frac{F_C}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}G$$

$$\frac{1}{2}F_T - \frac{\sqrt{3}}{2}F_C = -\frac{3}{4}G .$$

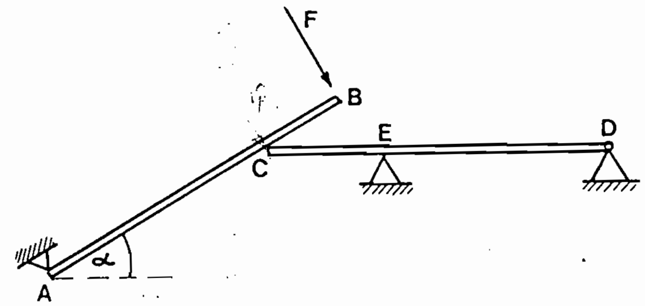
Rešavajem ovih jednačina nalazimo da je:

$$F_T = \frac{3}{2}G, \qquad F_C = \sqrt{3}\,G .$$

Za koeficjent trenja sada dobijamo:

$$\mu = \frac{F_T}{F_C} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

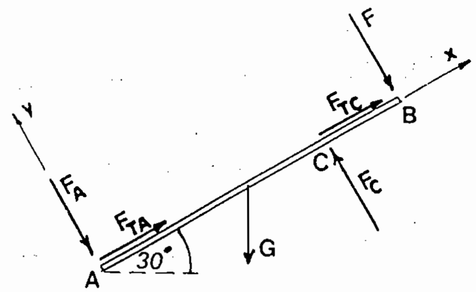
70. Homogeni štap AB dužine 2ℓ i težine $G = 6\sqrt{3}$ daN oslanja se



Slika 184.

u tački A na tačkasti oslonac, a u tački C ($\overline{BC} = \frac{\ell}{2}$) o horizontalni štap CD dužine $\overline{CD} = 2\ell$ i težine $G = 6\sqrt{3}$ daN. Štap AB u ravnotežnom položaju zaklapa sa horizontalom ugao $\alpha = 30^\circ$ i na kraju B ga napada sila $F = 9$ daN pod pravim uglom u odnosu na štap. Štap CD je krajem D zglobno vezan, dok se u E oslanja na pokretni oslonac ($\overline{CE} = \frac{\ell}{2}$). Ako je dodir u tačkama A i C hrapav sa istim koeficjentom trenja μ, odrediti: a) sve spoljašnje i unutrašnje reakcije sistema, b) koeficjent trenja μ izmedju štapa AB i oslonca A i izmedju dva štapa u tački C.

Š T A P   AB: (slika 185)



Slika 185.

$$\sum X_i = 0: \; F_{TA} - G \sin 30^\circ + F_{TC} = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \; -F_A - G \cos 30^\circ + F_C - F = 0, \qquad (2)$$

$$\sum M_A = 0: \; F_C \frac{3}{2}\ell - F\,2\ell - G\,\ell \cos 30^\circ = 0. \qquad (3)$$

Iz jednačine (3) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo unutrašnju reakciju F_C:

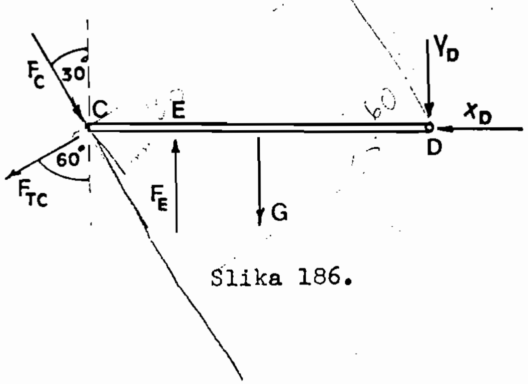
$$F_C = 18 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (2) je: $F_A = F_C - G \cos 30^\circ - F = 0$ daN.

Jednačina (1) sada postaje:

$$\mu F_C - G \sin 30^\circ = 0; \qquad \mu = \frac{G \sin 30^\circ}{F_C} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Š T A P   CD: (slika 186)



Slika 186.

$$\sum X_i = 0: \; F_C \sin 30^\circ - F_{TC} \cos 30^\circ - X_D = 0, \qquad (4)$$

$$\sum Y_i = 0: \; -F_C \cos 30^\circ - F_{TC} \sin 30^\circ + F_E - G - Y_D = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_D = 0: \; -F_C \cos 30^\circ . 2\ell - F_{TC} \cos 60^\circ . 2\ell + F_E \frac{3}{2}\ell - Q\ell = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (6) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo reakciju F_E:

$$F_E = 18\sqrt{3} \text{ daN}.$$

Iz jednačine (4) je:

$$X_D = F_C \sin 30^\circ - \mu F_C \cos 30^\circ = \frac{9}{2} \text{ daN}.$$

I konačno iz jednačine (5) je:

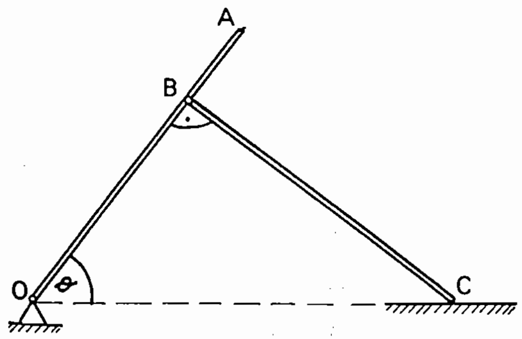
$$Y_D = F_E - F_C \cos 30^\circ - \mu F_C \sin 30^\circ - G = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ daN}.$$

71. Konstrukcija sastavljena od dva homogena štapa jednakih dužina ℓ i težina $G = 50$ daN, predstavljena na slici, stoji u vertikalnoj ravni u ravnoteži pod uglovima θ i $\sphericalangle OBC = 90^\circ$. Odrediti:

a) reakcije zglobova O i B,

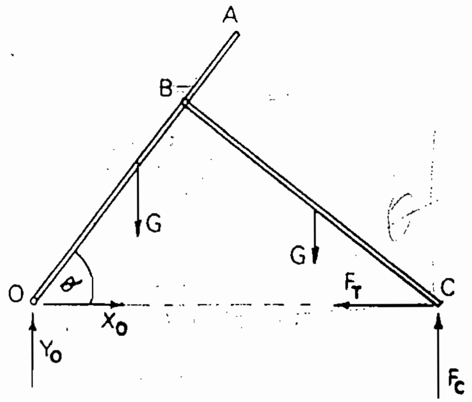
b) reakciju oslonca štapa BC o hrapavi pod u tački C, kao i odgovarajući koeficijent trenja μ.

Uzeti da je $\overline{OB} = \frac{3}{4}\ell$.



Slika 187.

Posmatraćemo prvo ravnotežu sistema kao celinu (slika 188). Uslovi ravnoteže će u ovom slučaju biti:



Slika 188.

$\sum X_i = 0:$

$$X_o - F_T = 0, \qquad (1)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$Y_o - G - G + F_c = 0, \qquad (2)$$

$\sum M_A = 0:$

$$F_c(\ell \sin \theta + \frac{3}{4}\ell \cos \theta) - G(\frac{\ell}{2} \sin \theta + \frac{3}{4}\ell \cos \theta) - G\frac{\ell}{2} \cos \theta = 0. \qquad (3)$$

Ugao θ odredjujemo iz trougla OBC (slika 188).

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\ell}{\frac{3}{4}\ell} = \frac{4}{3}.$$

Lako je sada dokazati da je:

$$\sin \theta = \frac{4}{5}; \qquad \cos \theta = \frac{3}{5}.$$

Iz jednačine (3) sada nalazimo reakciju F_C:

$$F_C = 46 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (2) je sada: $Y_o = 2G - F_c = 54$ daN.

Š T A P BC: (slika 189)

$\sum X_i = 0:$

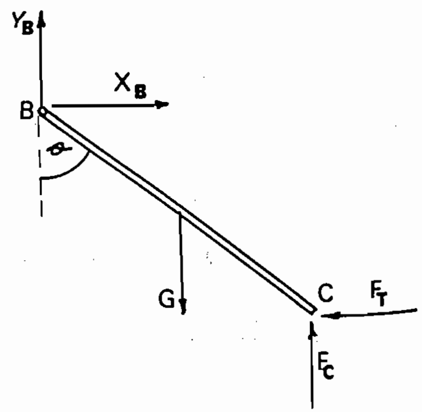
$$X_B - F_T = 0, \qquad (4)$$

$\sum Y_i = 0:$

$$F_C - G + Y_B = 0, \qquad (5)$$

$\sum M_B = 0:$

$$F_C \ell \sin \theta - F_T \ell \cos \theta - G\frac{\ell}{2} \sin \theta = 0. \qquad (6)$$



Slika 189.

Iz jednačine (6) posle skraćivanja sa ℓ nalazimo silu trenja F_T:

$$F_T = 28 \text{ daN}.$$

Na osnovu jednačine (4), odnosno (1) imamo da je:

$$X_o = X_B = F_T = 28 \text{ daN}.$$

Iz jednačine (5) je:

$$Y_B = G - F_C = 4 \text{ daN}.$$

Koeficjent trenja μ je sada:

$$\mu = \frac{F_T}{F_c} = \frac{28}{46} = \frac{14}{23} = 0{,}687.$$

2. S T A T I K A U P R O S T O R U

2.1 SVODJENJE PROSTORNOG SISTEMA PROIZVOLJNIH SILA NA PROSTIJI OBLIK

72. Dat je sistem od šest sila u prostoru i koordinate njihovih napadnih tačaka (sile u kilonjutnima, rastojanja u metrima).
Svesti sistem na prostiji oblik i to predstaviti grafički.

$\vec{F}_1 = 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $A_1(1;\ 2;\ 1)$

$\vec{F}_2 = 2\vec{i} - \vec{k}$, $A_2(1;\ 2;\ 3)$

$\vec{F}_3 = \vec{i} + \vec{j}$, $A_3(-1;\ -1;\ 0)$

$\vec{F}_4 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $A_4(0;\ 2;\ -1)$

$\vec{F}_5 = -\vec{j} + 2\vec{k}$, $A_5(0;\ 0;\ 2)$

$\vec{F}_6 = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $A_6(-1;\ 1;\ 0)$

Prvo ćemo dati sistem sila svesti na torzer, što znači da moramo odrediti gravni vektor F_r i glavni moment M_o sistema.

Najlakše i najpreglednije je ovaj račun sprovesti tabelarno.

U koloni 1 u tablici na strani 123 upisuju se sile datog sistema. U kolone 2, 3 i 4 upisuju se koordinate napadnih tačaka sila, dok se u kolone 5, 6 i 7 unose projekcije sila na ose Dekartovog koordinatnog sistema. U kolone 8, 9 i 10 unose se momenti sila sa koordinatne ose izraženi preko proizvoda koordinata napadnih tačaka sila i projekcija sila na koordinatne ose.

Projekcije glavnog vektora će prema tome biti:

$$X_r = \sum X_i = 6 \text{ kN}, \qquad Y_r = \sum Y_i = 2 \text{ kN}, \qquad Z_r = \sum Z_i = -3 \text{ kN}.$$

Intenzitet glavnog vektora je prema tome:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2} = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ kN}.$$

Projekcije glavnog momenta na koordinatne ose su:

$$M_{ox} = \sum M_x = -7 \text{ kNm}, \qquad M_{oy} = \sum M_y = 6 \text{ kNm}, \qquad M_{oz} = \sum M_z = -6 \text{ kNm}$$

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1	1	2	1	0	2	-3	-8	3	2
F_2	1	2	3	2	0	-1	-2	7	-4
F_3	-1	-1	0	1	1	0	0	0	0
F_4	0	2	-1	2	1	1	3	-2	-4
F_5	0	0	2	0	-1	2	2	0	0
F_6	-1	1	0	1	-1	-2	-2	-2	0
			$\sum$	6	2	-3	-7	6	-6

Intenzitet glavnog momenta je:

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{(-7)^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{121} = 11 \text{ kNm}.$$

Potražimo sada skalarni proizvod izmedju glavnog vektora i glavnog momenta:

$$\vec{F}_r \cdot \vec{M}_o = X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz} = -42 + 12 + 18 = -12.$$

Pošto je ovaj skalarni proizvod različit od nule, zaključujemo da se sistem sila svodi na dinamu.

Moment diname je:

$$M_c = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r} = -\frac{12}{7} \text{ kNm}.$$

Da bismo ovo predstavili grafički napisaćemo jednačinu centralne ose sistema:

$$\frac{M_{ox} - (yZ_r - zY_r)}{X_r} = \frac{M_{oy} - (zX_r - xZ_r)}{Y_r} = \frac{M_{oz} - (xY_r - yX_r)}{Z_r} = p. \qquad (1)$$

Ovde je p parametar diname i on iznosi:

$$p = \frac{M_c}{F_r} = -\frac{12}{49}\ \mathrm{m},$$

dok su x, y i z tekuće koordinate centralne ose sistema proizvoljnih sila u prostoru.

Jednačina centralne ose će u našem slučaju imati oblik:

$$\frac{-7-(-3y-2z)}{6} = \frac{6-(6z+3x)}{2} = \frac{-6-(2x-6y)}{-3} = -\frac{12}{49}. \qquad (2)$$

Izjednačavanjem svakog člana izraza (2) sa parametrom $p = -\frac{12}{49}$, dolazimo do jednačina:

$$3y + 2z = \frac{271}{49}, \quad 3x + 2z = \frac{318}{49}, \quad -2x + 6y = \frac{330}{49}. \qquad (3)$$

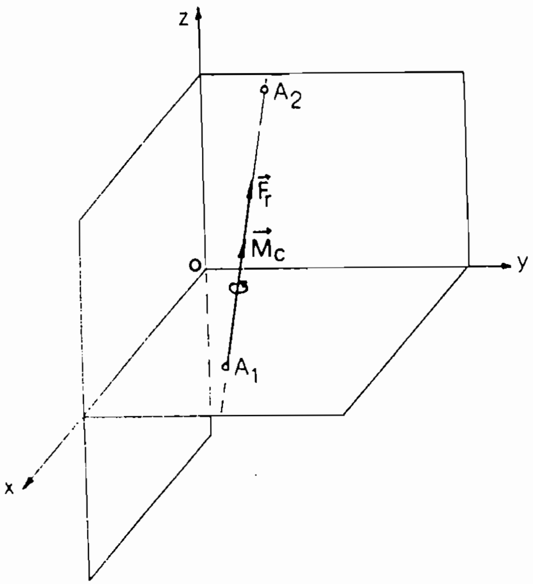
Centralna osa se predstavlja grafički tako što se odredjuju prodorne tačke centralne ose kroz najmanje dve koordinatne ravni. Pri tome uvek jednu od tekućih koordinata izjednačujemo sa nulom u izrazima (3). Tako na pr. u tački A_1 prodora centralne ose kroz ravan Oxy biće $z_1 = 0$. Sada iz prve i druge jednačine izraza (3) nalazimo apscisu i ordinatu prodorne tačke A_1:

$$y_1 = \frac{271}{147} = 1{,}84\ \mathrm{m},$$

$$x_1 = \frac{318}{147} = 2{,}16\ \mathrm{m}.$$

Prema tome koordinate prodorne tačke A_1 centralne ose kroz koordinatnu ravan Oxy su:

$A_1(2{,}16;\ 1{,}84;\ 0)$



Slika 190.

Potražimo sada koordinate tačke A_2, prodora centralne ose kroz koordinatnu ravan Oyz. U izraze (3) stavimo da je $x_2 = 0$. Iz druge i treće jednačine (3) nalazimo sada i ostale dve koordinate tačke A_2:

$$z_2 = \frac{318}{98} = 3{,}24\ \mathrm{m}, \qquad y_2 = \frac{330}{294} = 1{,}12\ \mathrm{m}.$$

Prema tome, tačka A_2 će imati koordinate: $A_2(0;\ 1{,}12;\ 3{,}24)$

Na slici 190 je prikazana konstrukcija centralne ose datog sistema proizvoljnih sila.

73. Dat je sistem proizvoljnih sila u prostoru i koordinate njihovih napadnih tačaka (sile u kilonjutnima, rastojanja u metrima).

$\vec{F}_1 = \vec{j} + 2\vec{k}$, $\quad N_1(1;\ -1;\ 0)$

$\vec{F}_2 = \vec{i} - \vec{k}$, $\quad N_2(2;\ 0;\ 1)$

$\vec{F}_3 = -\vec{i} + \vec{j}$, $\quad N_3(0;\ 1;\ 2)$

$\vec{F}_4 = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ $\quad N_4(-2;\ -1;\ 0)$

Odrediti statičke invarijante sistema sila. Svesti sistem na prostiji oblik.

Odredićemo prvo glavni vektor i glavni moment ovog sistema sila. Račun ćemo i ovde sprovesti tabelarno.

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
F_1	1	-1	0	0	1	2	-2	-2	1
F_2	2	0	1	1	0	-1	0	3	0
F_3	0	1	2	-1	1	0	-2	-2	1
F_4	-2	-1	0	-2	-1	1	-1	2	0
			$\sum$	-2	1	2	-5	1	2

Prema tome, projekcije glavnog vektora i glavnog momenta na ose Dekartovog koordinatnog sistema će biti:

$$X_r = -2\ \text{kN},\qquad Y_r = 1\ \text{kN},\qquad Z_r = 2\ \text{kN},$$

$$M_{ox} = -5\ \text{kNm},\qquad M_{oy} = 1\ \text{kNm},\qquad M_{oz} = 2\ \text{kNm}.$$

Glavni vektor i glavni moment se sada mogu napisati u obliku:

$$\vec{F}_r = -2\vec{i} + \vec{j}\ 2\vec{k},\qquad \vec{M}_o = -5\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k},$$

dok su njihovi intenziteti:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3\ \text{kN},$$

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{30} = 5{,}47\ \text{kNm}.$$

Potražimo sada skalarni proizvod izmedju glavnog vektora i glavnog momenta:

$$\vec{F}_r \cdot \vec{M}_o = X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz} = 10 + 1 + 4 = 15\ \text{kN}^2\text{m}.$$

Pri promeni redukcione tačke glavni vektor zadržava svoj intenzitet i pravac (prva statička invarijanta), a glavni moment se menja, ali tako da skalarni proizvod $\vec{F}_r \cdot \vec{M}_o$ zadržava jednu istu brojnu vrednost za sve redukcione tačke (druga statička inavrijanta).

Prema tome, statičke invarijante u našem slučaju će biti:

$$F_r = 3\ \text{kN},\qquad \vec{F}_r \cdot \vec{M}_o = 15\ \text{kN}^2\text{m}. \tag{1}$$

Pošto je $\vec{F}_r \cdot \vec{M}_o \neq 0$, gornji sistem sila se svodi na dinamu. Moment diname je:

$$M_c = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r} = \frac{15}{3} = 5\ \text{kNm},$$

dok je parametar diname:

$$p = \frac{M_c}{F_r} = \frac{5}{3}\ \text{m}.$$

Napišimo sada jednačinu centralne ose sistema:

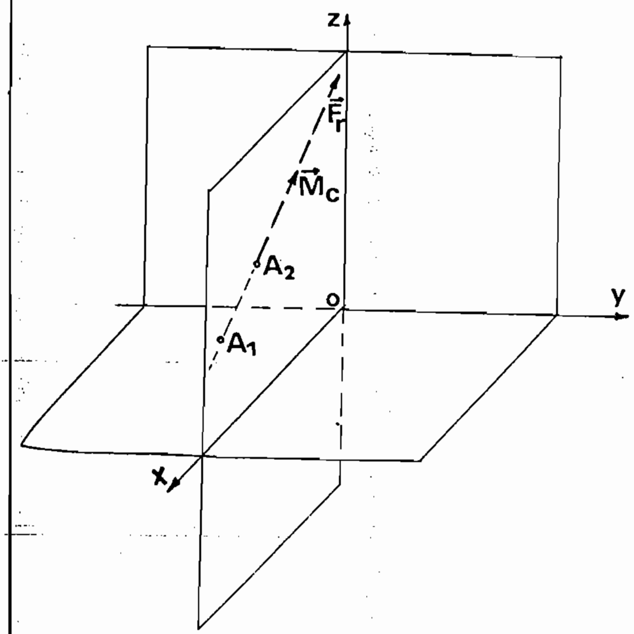
$$\frac{M_{ox} - (yZ_r - zY_r)}{X_r} = \frac{M_{oy} - (zX_r - xZ_r)}{Y_r} = \frac{M_{oz} - (xY_r - yX_r)}{Z_r} = p.$$

U našem slučaju ona će imati oblik:

$$\frac{-5 - (2y - z)}{-2} = \frac{1 - (-2z - 2x)}{1} = \frac{2 - (x + 2y)}{2} = \frac{5}{3} \tag{2}$$

Izjednačujući članove jednačine (2) sa $p = \frac{5}{3}$, dobijamo jednačine centralne ose u obliku:

$$-2y + z = \frac{5}{3},\qquad x + z = \frac{1}{3},\qquad -x - 2y = \frac{4}{3}. \tag{3}$$



Slika 191.

Da bismo dobili koordinate tačke A_1 prodora centralne ose kroz ravan Oxy, stavljamo u jednačine (3) da je $z_1 = 0$. Iz prve i druge jednačine (3) nalazimo sada da je:

$$y_1 = -\frac{5}{6} = -0{,}83\ \text{m}$$

$$x_1 = \frac{1}{3}\ \text{m}.$$

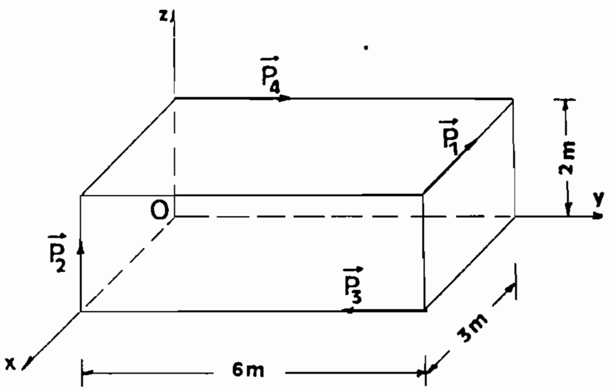
Tačka A_1 prema tome ima koordinate:

$$A_1\left(\tfrac{1}{3};\ -\tfrac{5}{6};\ 0\right).$$

Potražimo sada koordinate tačke A_2, prodora centralne ose kroz ravan Oyz. Sada u jednačine (3) stavljamo da je $x_2 = 0$. Iz druge i treće jednačine (3) nalazimo preostale dve koordinate: $z_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{2}{3}$. Tj. $A_2(0;\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3})$.

Konstrukcija centralne ose sistema prikazana je na slici 191.

74. Duž ivica pravouglog paralelopipeda dejstvuju četiri sile: $P_1 = 2$ daN, $P_2 = 3$ daN, $P_3 = 4$ daN, $P_4 = 5$ daN. Odrediti statičke invarijante ovog sistema. Na koji se prostiji oblik može svesti ovaj sistem? Dimenzije su prikazane na slici 192.



Slika 192.

Potražimo prvo projekcije glavnog vektora i glavnog momenta sistema. Sa slike 192 se vidi da je:

$$X_r = -P_1 = -2 \text{ daN}, \qquad Y_r = -P_3 + P_4 = 1 \text{ daN}, \qquad Z_r = P_2 = 3 \text{ daN},$$

$$M_{ox} = -P_4 \cdot 2 = -10 \text{ daNm}, \qquad M_{oy} = -P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 3 = -13 \text{ daNm},$$

$$M_{oz} = P_1 \cdot 6 - P_3 \cdot 3 = 12 - 12 = 0.$$

Prema tome, glavni vektor i glavni moment mogu se napisati u obliku:

$$\vec{F}_r = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \qquad \vec{M}_o = -10\vec{i} - 13\vec{j},$$

dok su njihovi intenziteti:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} = 3,74 \text{ daN},$$

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{(-10)^2 + (-13)^2 + 0^2} = \sqrt{269} = 16,4 \text{ daNm}.$$

Statičke invarijante će prema tome biti:

$$F_r = 3,74 \text{ daN}, \qquad \vec{F}_r \cdot \vec{M}_o = X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz} = 7 \text{ daN}^2\text{m}.$$

Pošto je skalarni proizvod $\vec{F}_r \cdot \vec{M}_o$ različit od nule, sistem sila se svodi na dinamu. Moment diname je:

$$M_c = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r} = \frac{7}{3,74} = 1,87 \text{ daNm}.$$

Parametar diname je:

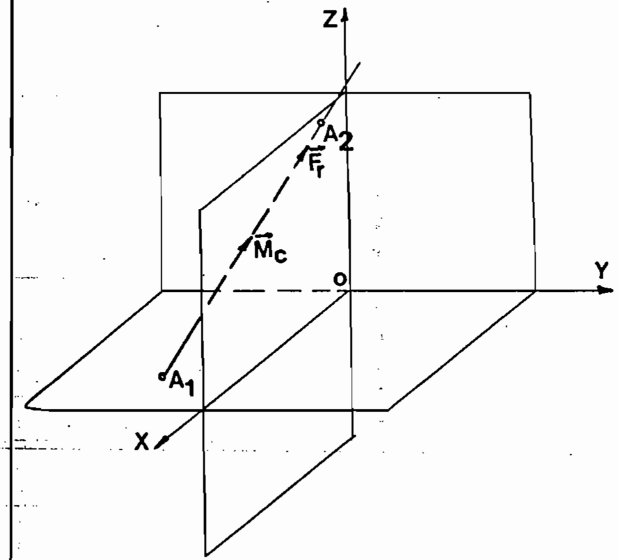
$$p = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r^2} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \text{ m}.$$

Odredimo sada centralnu osu sistema

$$\frac{M_{ox} - (yZ_r - zY_r)}{X_r} = \frac{M_{oy} - (zX_r - xZ_r)}{Y_r} = \frac{M_{oz} - (xY_r - yX_r)}{Z_r} = p.$$

Ili:

$$\frac{-10 - (3y - z)}{-2} = \frac{-13 - (-2z - 3x)}{1} = \frac{0 - (x + 2y)}{3} = \frac{1}{2}. \qquad (1)$$



Slika 193.

Izjednačujući članove izraza (1) sa $p = \frac{1}{2}$, dolazimo do jednačina centralne ose u obliku:

$$\left.\begin{aligned} 3y - z &= -9, \\ 6x + 4z &= 27, \\ 2x + 4y &= -3. \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

Stavljajući u jednačine (2) da je $z_1 = 0$, iz prvog i drugog izraza jednačina (2) nalazimo koordinate tačke A_1, prodora centralne ose kroz ravan Oxy.

$$A_1(4,5;\ -3;\ 0)$$

Potražimo još koordinate tačke A_2 prodora centralne ose kroz koordinatnu ravan Oyz. Stavimo u jednačine (2) da je $x_2 = 0$.

Sada iz drugog i trećeg izraza jednačina (2) nalazimo ostale dve koordinate y_2 i z_2 tačke A_2:

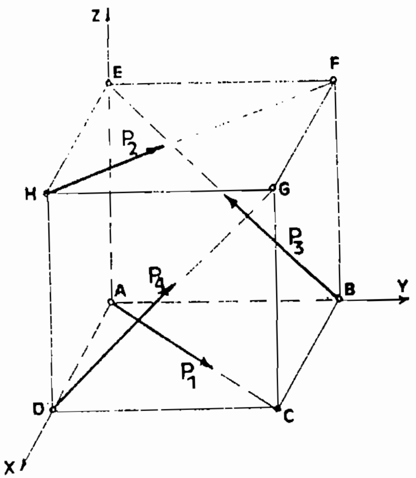
$$z_2 = \frac{27}{4} = 6{,}75 \text{ m}, \qquad y_2 = -\frac{3}{4} \text{ m}.$$

Prema tome tačka A_2 će imati koordinate: $A_2(0; -\frac{3}{4}; \frac{27}{4})$.

Konstrukcija centralne ose datog sistema sila prikazana je na slici 193.

75. Četiri sile P_1, P_2, P_3 i P_4 istih intenziteta, deluju u temenima A, H, B i D kocke. Sila P_1 deluje duž dijagonale AC, sila P_2 duž dijagonale HF, sila P_3 duž dijagonale BE a sila P_4 duž dijagonale DG.

Redukovati dati sistem sila na jednostavniji.



Slika 194.

Potražimo prvo glavni vektor i glavni moment ovog sistema sila.

$$X_r = \sum X_i = P_1 \cos 45^\circ - P_2 \cos 45^\circ = 0,$$

$$Y_r = \sum Y_i = P_1 \cos 45^\circ + P_2 \cos 45^\circ - P_3 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ = P\sqrt{2},$$

$$Z_r = \sum Z_i = P_3 \cos 45^\circ + P_4 \cos 45^\circ = P\sqrt{2}.$$

Prema tome, glavni vektor će biti: $\vec{F}_r = P\sqrt{2}\vec{j} + P\sqrt{2}\vec{k}$, dok je intenzitet glavnog vektora:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2} = \sqrt{0^2 + (P\sqrt{2})^2 + (P\sqrt{2})^2} = 2P.$$

Odavde se vidi da glavni vektor leži u ravni Ayz. Odredimo pravac glavnog vektora.

$$\cos\alpha_r = \frac{X_r}{F_r} = \frac{0}{2P} = 0, \qquad \cos\beta_r = \frac{Y_r}{F_r} = \frac{P\sqrt{2}}{2P} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\gamma_r = \frac{Z_r}{F_r} = \frac{P\sqrt{2}}{2P} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Prema tome je: $\alpha_r = 90^\circ$, $\beta_r = 45^\circ$, $\gamma_r = 45^\circ$.

To znači da glavni vektor deluje duž dijagonale prvog kvadranta ravni Ayz. (slika 195).

Potražimo sada glavni moment datog sistema sila:

$$M_{Ax} = \sum M_x = -P_2 \cos 45^\circ . a + P_3 \cos 45^\circ . a = 0,$$

$$M_{Ay} = \sum M_y = -P_2 \cos 45^\circ . a - P_4 \cos 45^\circ . a = -Pa\sqrt{2},$$

$$M_{Az} = \sum M_z = P_2 \cos 45^\circ . a + P_4 \cos 45^\circ . a = Pa\sqrt{2}.$$

$$\vec{M}_A = -Pa\sqrt{2}\vec{j} + Pa\sqrt{2}\vec{k}.$$

Intenzitet glavnog momenta je:

$$M_A = \sqrt{M_{Ax}^2 + M_{Ay}^2 + M_{Az}^2} = \sqrt{0^2 + (-Pa\sqrt{2})^2 + (Pa\sqrt{2})^2} = 2aP.$$

Vidimo da i glavni moment leži u ravni Ayz. Odredimo sada i njegov pravac:

$$\cos\alpha_M = \frac{M_{Ax}}{M_A} = \frac{0}{2aP} = 0, \qquad \cos\beta_M = \frac{-Pa\sqrt{2}}{2aP} = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\gamma_M = \frac{M_{Az}}{M_A} = \frac{Pa\sqrt{2}}{2aP} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

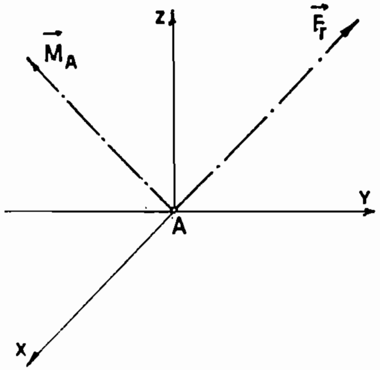
Prema tome je:

$$\alpha_M = 90^\circ, \qquad \beta_M = 135^\circ, \qquad \gamma_M = 45^\circ.$$

To znači da glavni vektor ima pravac dijagonale drugog kvadranta ravni Ayz. (slika 195).

To znači da glavni vektor i glavni moment zaklapaju medjusobno ugao od 90°. Isto možemo proveriti i pomoću skalarnog proizvoda izmedju glavnog vektora i glavnog momenta.

$$F_r\cdot M_A = X_r M_{Ax} + Y_r M_{Ay} + Z_r M_{Az} = 0.0 - 2aP^2 + 2aP^2 = 0.$$



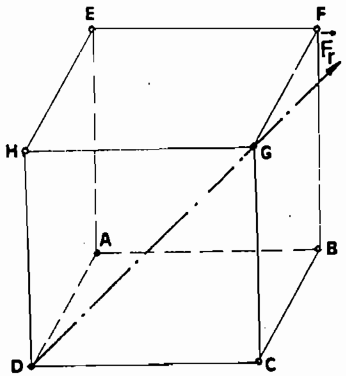
Slika 195.

Pošto je ovaj skalarni proizvod jednak nuli, znači da su glavni vektor i glavni moment normalni i da se naš sistem sila svodi na jednu silu, rezultantu sistema koja prolazi van redukcione tačke, na rastojanju:

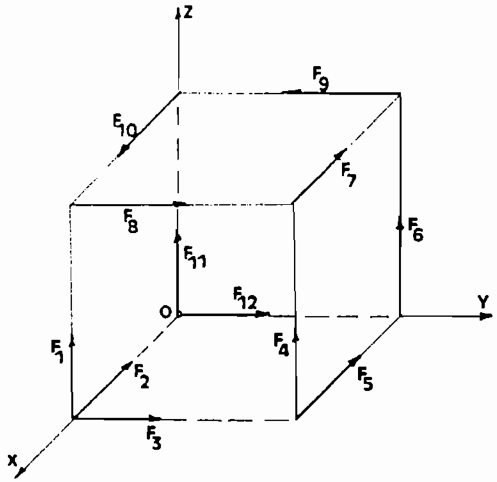
$$r = \frac{M_A}{F_r} = \frac{2aP}{2P} = a.$$

To znači da napadnu liniju glavnog vektora treba pomeriti paralelno za dužinu a, tj. za dužinu stranice kocke.

To znači da se naš sistem sila svodi na jednu silu, rezultantu sistema intenziteta 2P, koja deluje duž dijagonale DG kocke (slika 196).



Slika 196.



Slika 197.

76. Duž ivica kocke dejstvuju dvanaest sila istih veličina F. Smerovi sila su dati na slici 197. Dužina ivica kocke jednaka je a.

Redukovati ovaj sistem na prostiji oblik i dobijeni rezultat predstaviti grafički.

Svedimo prvo dati sistem sila na torzer, tj. potražimo glavni vektor i glavni moment:

$$X_r = \sum X_i = -F_5 - F_2 - F_7 + F_{10} = -2F,$$

$$Y_r = \sum Y_i = F_3 + F_{12} + F_8 - F_9 = 2F,$$

$$Z_r = \sum Z_i = F_1 + F_4 + F_6 + F_{11} = 4F.$$

$$M_{ox} = \sum M_x = F_4\cdot a + F_6\cdot a + F_9\cdot a - F_8\cdot a = 2aF,$$

$$M_{oy} = \sum M_y = -F_1\cdot a - F_4\cdot a - F_7\cdot a + F_{10}\cdot a = -2aF,$$

$$M_{oz} = \sum M_z = F_3\cdot a + F_5\cdot a + F_8\cdot a + F_7\cdot a = 4aF.$$

Prema tome, glavni vektor i glavni moment sistema su:

$$\vec{F}_r = -2F\vec{i} + 2F\vec{j} + 4F\vec{k}, \qquad \vec{M}_o = 2aF\vec{i} - 2aF\vec{j} + 4aF\vec{k},$$

dok su njihovi intenziteti:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2} = \sqrt{(-2F)^2 + (2F)^2 + (4F)^2} = 2F\sqrt{6},$$

$$M_o = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} = \sqrt{(2aF)^2 + (-2aF)^2 + (4aF)^2} = 2aF\sqrt{6}.$$

Potražimo skalarni proizvod $\vec{F}_r\cdot\vec{M}_o$.

$$\vec{F}_r\cdot\vec{M}_o = X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz} = -4aF^2 - 4aF^2 + 16aF^2 = 8aF^2.$$

Pošto je $\vec{F}_r\cdot\vec{M}_o \neq 0$, sistem se svodi na dinamu.

Potražimo prvo ugao φ izmedju glavnog momenta i glavnog vektora:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{F}_r\cdot\vec{M}_o}{F_r\, M_o} = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r\cdot M_o} = \frac{8aF^2}{2F\sqrt{6}\; 2aF\sqrt{6}} = \frac{1}{3}.$$

Parametar diname je: $$p = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r^2} = \frac{8aF^2}{24F^2} = \frac{a}{3}$$

Moment diname je:

$$M_c = \frac{X_r M_{ox} + Y_r M_{oy} + Z_r M_{oz}}{F_r} = \frac{8aF^2}{2F\sqrt{6}} = \frac{2}{3}\,aF\sqrt{6}.$$

Jednačina centrale ose je:

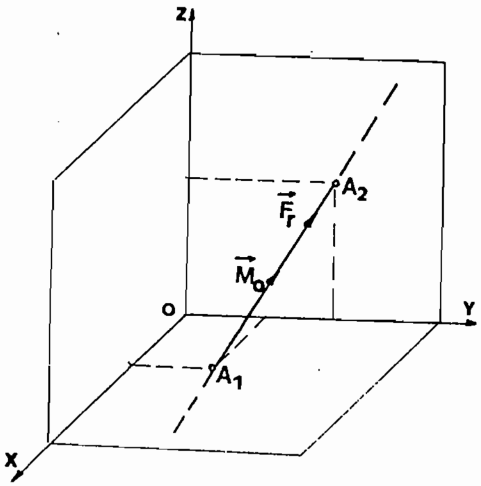
$$\frac{M_{ox}-(yZ_r-zY_r)}{X_r}=\frac{M_{oy}-(zX_r-xZ_r)}{Y_r}=\frac{M_{oz}-(xY_r-yX_r)}{Z_r}=p,$$

ili:

$$\frac{2aF-(4Fy-2Fz)}{-2F}=\frac{-2aF-(-2Fz-4Fx)}{2F}=\frac{4aF-(2Fx+2Fy)}{4F}=\frac{a}{3}.$$

Ovo možemo napisati u obliku:

$$\left.\begin{aligned} 6y-3z&=4a,\\ 6x+3z&=4a,\\ 3x+3y&=4a. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$



Slika 198.

Stavljajući u jednačine (1) da je $z_1=0$, dobijamo koordinate prodorne tačke centralne ose kroz ravan Oxy.

Iz prvog, odnosno drugog izraza jednačina (1) dobijamo:

$$y_1=\frac{2}{3}a, \quad x_1=\frac{2}{3}a,$$

Prema tome, koordinate tačke A_1 su:

$$A_1\left(\frac{2}{3}a,\ \frac{2}{3}a,\ 0\right).$$

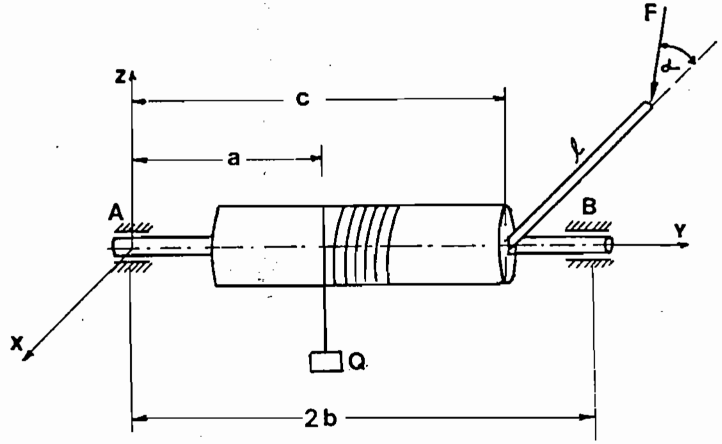
Potražimo sada koordinate tačke A_2, prodora centralne ose kroz ravan Oyz. U jednačine (1) stavimo da je $x_2=0$. Sada iz drugog i trećeg izraza jednačina (1) dobijamo ostale dve koordinate tačke A_2. $y_2=\frac{4}{3}a$, $z_2=\frac{4}{3}a$.

$$A_2\left(0,\ \frac{4}{3}a,\ \frac{4}{3}a\right).$$

Konstrukcija centralne ose sistema prikazana je na slici 198.

2.2 RAVNOTEŽA KRUTOG TELA U PROSTORU.

77. Na doboš dizalice koji ima težinu $G = 20$ daN, a poluprečnik



Slika 199.

$r = 10$ cm, namotava se uže ne čijem je kraju privezan teret težine $Q = 120$ daN. Teret se održava u datom ravnotežnom položaju pomoću sile F koja dejstvuje na polugu dužine $\ell = 40$ cm u vertikalnoj ravni, a pod uglom $\alpha = 30^\circ$ prema horizontali.

Odrediti: a) otpore oslonaca A i B, b) veličinu sile F.

Date su dužine: $a = 30$ cm, $b = 40$ cm, $c = 60$ cm.

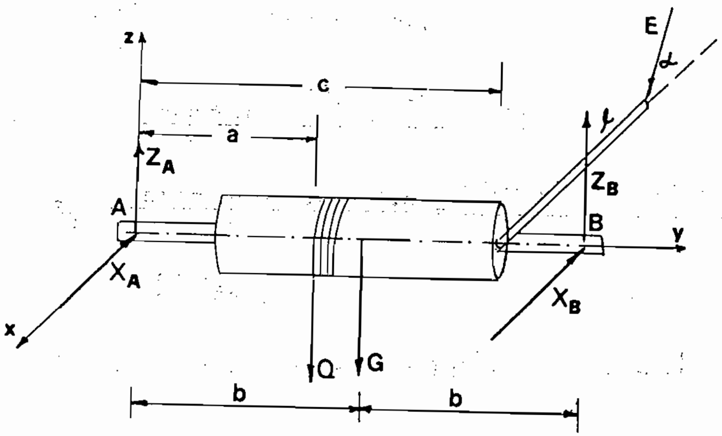
Posle oslobadjana od veza dizalica će biti opterećena silama kako je to pokazano na slici 200.

Napišimo uslove ravnoteže za ovaj sistem prostornih sila:

$$\sum X_i = 0: \qquad -X_A + F\cos\alpha - X_B = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \qquad - \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0: \qquad Z_A - Q - G - F\sin\alpha + Z_B = 0, \qquad (3)$$



Slika 200.

$$\sum M_x = 0: \quad Z_B . 2b - F \sin\alpha . c - G . b - Q . a = 0 \qquad (4)$$

$$\sum M_y = 0: \quad F \sin\alpha . \ell - Q . r = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_z = 0: \quad X_B . 2b - F \cos\alpha . c = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (5) nalazimo silu F:

$$F = \frac{Q . r}{\ell \cdot \sin\alpha} = \frac{120.10}{40. \frac{1}{2}} = 60 \text{ daN},$$

Iz (6): $X_B = \dfrac{F \cos\alpha . c}{2b} = \dfrac{60. \frac{\sqrt{3}}{2} .60}{80} = \dfrac{45\sqrt{3}}{2}$ daN,

iz (4): $Z_B = \dfrac{F \sin\alpha . c + G . b + Q . a}{2b} = \dfrac{60. \frac{1}{2} .60 + 20.40 + 120.30}{80}$,

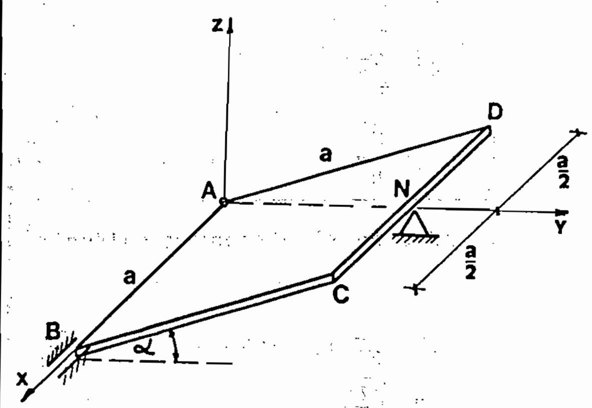
$$Z_B = \frac{155}{2} \text{ daN},$$

Iz (3): $Z_A = Q + G + F \sin\alpha - Z_B = 120 + 20 + 30 - \dfrac{155}{2} = \dfrac{185}{2}$ daN,

Iz (1): $X_A = F \cos\alpha - X_B = 60\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{45\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ daN.

78. Homogena kvadratna ploča strane a i težine $G = 16$ daN vezana je u tački A sfernim, a u tački B cilindričnim zglobom, dok se u tački N slobodno oslanja i sa horizontalnom ravni gradi ugao $\alpha = 30^\circ$.

Odrediti reakcije zglobova i oslonca.



Slika 201.

Posle uklanjanja veza ploča će biti opterećena silama, kako je to pokazano na slici 202.

Zadatak ćemo rešiti pomoću tabele:

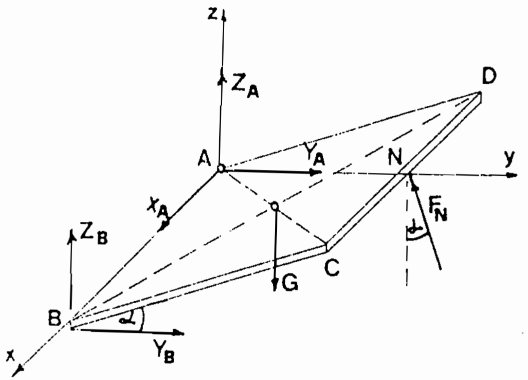
F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a}{4}$	0	0	-16	$-4a\sqrt{3}$	$8a$	0
F_N	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	$-\frac{F_N}{2}$	$F_N \frac{\sqrt{3}}{2}$	aF_N	$-\frac{a\sqrt{3}}{4} F_N$	$-\frac{a}{4} F_N$
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0
F_B	a	0	0	0	Y_B	Z_B	0	$-aZ_B$	aY_B

Jednačine ravnoteže će sada biti:

$$\sum X_i = 0: \quad X_A = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -\frac{F_N}{2} + Y_A + Y_B = 0, \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0: \quad -16 + F_N \frac{\sqrt{3}}{2} + Z_A + Z_B = 0, \qquad (3)$$



Slika 202.

$$\underline{\sum M_x = 0:}$$

$$-4\sqrt{3} + F_N = 0, \qquad (4)$$

$$\underline{\sum M_y = 0:}$$

$$8 - \frac{\sqrt{3}}{4} F_N - Z_B = 0, \qquad (5)$$

$$\underline{\sum M_z = 0:}$$

$$-\frac{1}{4} F_N + Y_B = 0. \qquad (6)$$

Iz jednačine (4) nalazimo da je: $F_N = 4\sqrt{3}$ daN,

Iz (5): $Z_B = 8 - \frac{\sqrt{3}}{4} F_N = 5$ daN,

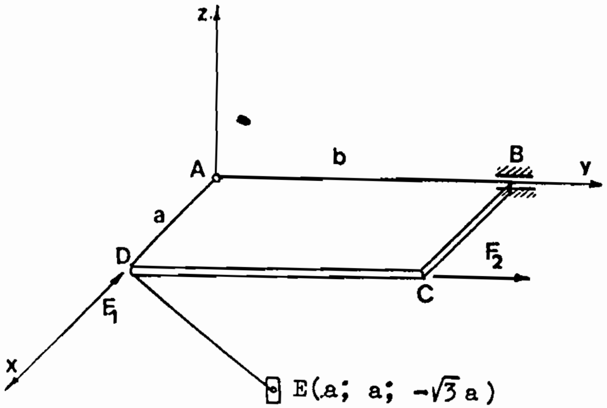
Iz (6): $Y_B = \frac{1}{4} F_N = \sqrt{3}$ daN,

Iz (3): $Z_A = 16 - \frac{\sqrt{3}}{2} F_N - Z_B = 5$ daN,

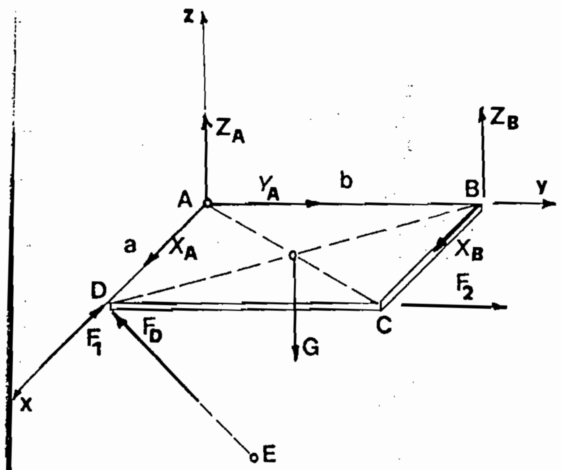
Iz (2): $Y_A = \frac{1}{2} F_N - Y_B = \sqrt{3}$ daN,

Iz (1): $X_A = 0$.

79. Homogena ploča strana $\underline{a}$ i $b = 2a$, težine $G = 30$ daN stoji u ravnoteži u horizontalnoj ravni pod dejstvom sfernog (A) i cilindričnog (B) zgloba, kao i tankog štapa DE. gde je $E(a;\ a;\ -\sqrt{3}a)$. Na ploču u tački D deluje sila $F_1 = 10\sqrt{3}$ daN u pravcu Ax ose, a u tački C sila $F_2 = 15\sqrt{3}$ daN paralelno Ay osi, kako je na slici 203 pokazano. Odrediti reakcije sistema.



Slika 203.



Slika 204.

Opterećenje ploče prikazano je na slici 204.

Pre nego što predjemo na sastavljanje tabele, odnosno pisanje jednačina ravnoteže, nadjimo projekcije sile u štapu DE na ose koordinatnog sistema. Prvo ćemo pretpostaviti da je štap DE opterećen na pritisak, tako da ćemo silu F_D usmeriti ka ploči. Projekcije sile F_D će biti:

$$X_D = F_D \cos\alpha, \quad Y_D = F_D \cos\beta,$$

$$Z_D = F_D \cos\gamma .$$

Gde su α, β i γ uglovi koje napadna linija sile F_D zaklapa sa koordinatnim osama. Kosinuse ovih uglova odredjujemo pomoću koordinata tačaka D i E, tj:

$$\cos\alpha = \frac{x_D - x_E}{\overline{DE}}, \qquad \cos\beta = \frac{y_D - y_E}{\overline{DE}}, \qquad \cos\gamma = \frac{z_D - z_E}{\overline{DE}} .$$

Prilikom pisanja ovih izraza za kosinuse uglova treba voditi računa kako je sila usmerena, jer se pri formiranju gornjih izraza uvek prvo pišu koordinate one tačke ka kojoj je sila usmerena, pa se od tih koordinata oduzimaju koordinate druge tačke.

Dužinu DE tražimo kao rastojanje tačaka D i E.

$D(a;\ 0;\ 0;)$, $\qquad E(a;\ a;\ -\sqrt{3}\,a)$.

$$\overline{DE} = \sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 + (z_D - z_E)^2} = \sqrt{0^2 + a^2 + 3a^2} = 2a.$$

Sada su kosinusi uglova:

$$\cos\alpha = \frac{x_D - x_E}{\overline{DE}} = \frac{a - a}{2a} = 0, \qquad \cos\beta = \frac{y_D - y_E}{\overline{DE}} = \frac{0 - a}{2a} = -\frac{1}{2},$$

$$\cos\gamma = \frac{z_D - z_E}{\overline{DE}} = \frac{0 + 3a}{\overline{DE}} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Prema tome, projekcije sile F_D će biti:

$$X_D = 0, \qquad Y_D = -\frac{1}{2}F_D, \qquad Z_D = \frac{\sqrt{3}}{2}F_D.$$

Sada možemo preći na tabelarno rešavanje zadatka.

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{a}{2}$	$\frac{b}{2}$	0	0	0	-30	$-15b$	$15a$	0
F_1	a	0	0	$-10\sqrt{3}$	0	0	0	0	0
F_2	a	b	0	0	$15\sqrt{3}$	0	0	0	$15a\sqrt{3}$
F_D	a	0	0	0	$-\frac{1}{2}F_D$	$\frac{\sqrt{3}}{2}F_D$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}a\,F_D$	$-\frac{a}{2}F_D$
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0
F_B	0	b	0	X_B	0	Z_B	bZ_B	0	$-bX_B$

Jednačine ravnoteže će sada biti:

$$\sum X_i = 0: \quad -10\sqrt{3} + X_A + X_B = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad 15\sqrt{3} - \frac{1}{2}F_D + Y_A = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: \quad -30 + \frac{\sqrt{3}}{2}F_D + Z_A + Z_B = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_x = 0: \quad -15 + Z_B = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_y = 0: \quad 15 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_D = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_z = 0: \quad 15\sqrt{3} - \frac{1}{2}F_D - 2X_B = 0. \tag{6}$$

Prilikom pisanja jednačine (6) koristili smo podatak da je $b = 2a$.

Iz jednačine (4) je: $Z_B = 15$ daN,

iz (5): $F_D = 10\sqrt{3}$ daN,

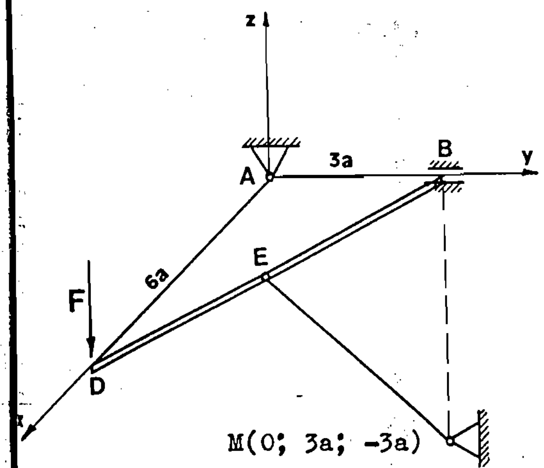
iz (6): $X_B = 5\sqrt{3}$ daN,

iz (3): $Z_A = 30 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_D - Z_B = 0$ daN

iz (2): $Y_A = \frac{1}{2}F_D - 15\sqrt{3} = -10\sqrt{3}$ daN,

iz (1): $X_A = 10\sqrt{3} - X_B = 5\sqrt{3}$ daN.

80. Homogena ploča ABD, oblika pravouglog trougla čije su katete $\overline{AB} = 3a$ i $\overline{AD} = 6a$, težine $G = 12$ daN, nalazi se u horizontalnoj ravni u ravnoteži pomoću sfernog zgloba A, cilindričnog zgloba B i štapa EM, pri čemu je $\overline{ED} = \overline{EB}$. U temenu D ploču napada vertikalna sila $F = 10$ daN sa smerom naniže. Odrediti reakcije zglobova A i B i silu u štapu ME.
Tačka M ima koordinate: M(0; 3a; $-3a$).



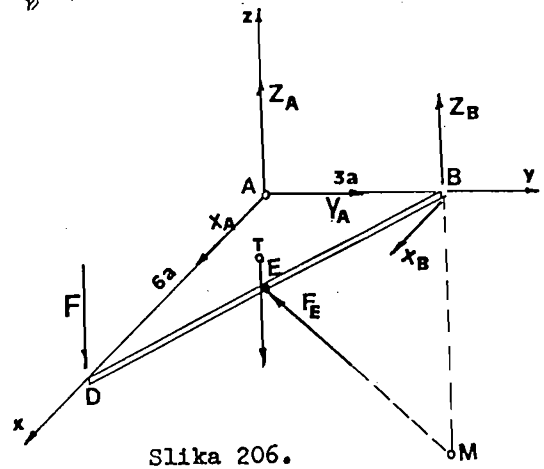
Slika 205.

Ploča će biti opterećena kako je to pokazano na slici 206.

Potražimo prvo projekcije sile u štapu F_E na koordinatne ose:

$$X_E = F_E\cos\alpha, \quad Y_E = F_E\cos\beta,$$

$$Z_E = F_E\cos\gamma.$$



Slika 206.

Koordinate tačaka E i M su: $E(3a;\ \frac{3a}{2};\ 0)$, $M(0;\ 3a;\ -3a)$

$$\overline{EM} = \sqrt{(x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2 + (z_E - z_D)^2} = \sqrt{9a^2 + \frac{9a^2}{4} + 9a^2} = \frac{9}{2}a\,.$$

$$\cos\alpha = \frac{3a - 0}{\frac{9a}{2}} = \frac{2}{3}\,, \qquad \cos\beta = \frac{\frac{3a}{2} - 3a}{\frac{9a}{2}} = -\frac{1}{3}\,,$$

$$\cos\gamma = \frac{0 + 3a}{\frac{9a}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

Sada je: $X_E = \frac{2}{3}F_E$, $Y_E = -\frac{1}{3}F_E$, $Z_E = \frac{2}{3}F_E$.

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	2a	a	0	0	0	-12	-12a	24a	0
F	6a	0	0	0	0	-10	0	60a	0
F_E	3a	$\frac{3}{2}a$	0	$\frac{2}{3}F_E$	$-\frac{1}{3}F_E$	$\frac{2}{3}F_E$	aF_E	$-2aF_E$	$-2aF_E$
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0
F_B	0	3a	0	X_B	0	Z_B	$3aZ_B$	0	$-3aX_B$

Jednačine ravnoteže će biti:

$$\sum X_i = 0:\quad \frac{2}{3}F_E + X_A + X_B = 0, \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0:\quad -\frac{1}{3}F_E + Y_A = 0, \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0:\quad -22 + \frac{2}{3}F_E + Z_A + Z_B = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_x = 0:\quad -12 + F_E + 3Z_B = 0, \qquad (4)$$

$$\sum M_y = 0:\quad 84 - 2F_E = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_z = 0:\quad -2F_E - 3X_B = 0. \qquad (6)$$

Iz (5): $F_E = 42$ daN,

Iz (6): $X_B = -\frac{2F_E}{3} = -28$ daN,

iz (4): $Z_B = \frac{12 - F_E}{3} = -10$ daN,

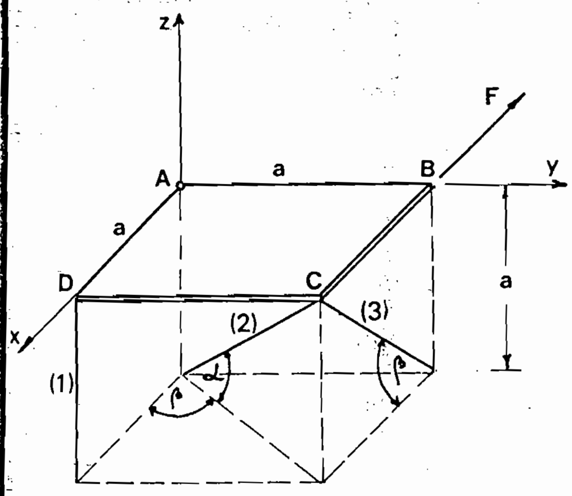
iz (3): $Z_A = 22 - \frac{2}{3}F_E - Z_B = 4$ daN,

iz (2): $Y_A = \frac{1}{3}F_E = 14$ daN,

iz (1): $X_A = -\frac{2}{3}F_E - X_B = 0$ daN.

81. Horizontalna homogena ploča težine $G = 60$ daN, oblika kvadrata strane a stoji u ravnoteži pomoću sfernog zgloba A i tri štapa čiji su pravci dati na slici 207. U temenu B ploče dejstvuje sila $F = 20$ daN paralelno osi Ax.

Odrediti reakcije zgloba A i sile u štapovima.



Slika 207.

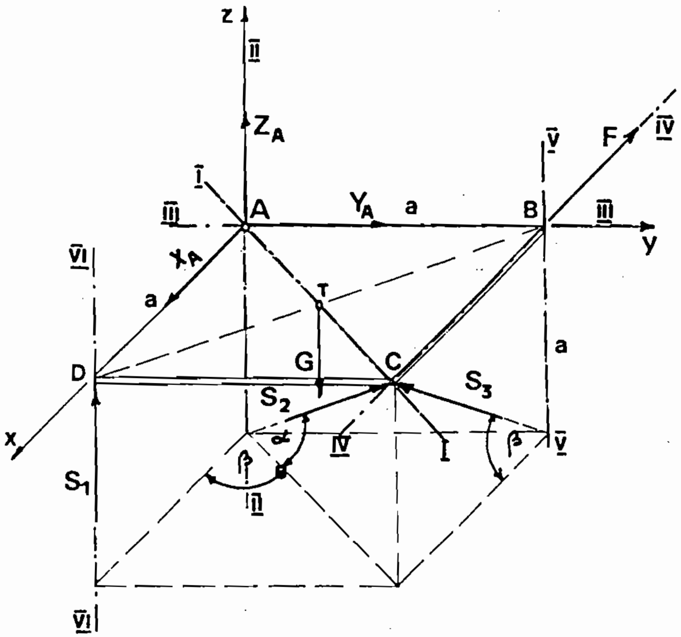
Ploča ABCD je opterećena silama kako je to pokazano na slici 208. Sila u štapovima (1), (2) i (3) smo usmerili ka ploči, što znači da smo pretpostavili da su štapovi opterećeni na pritisak.

Pre nego što predjemo na popunjavanje tabele, potražimo projekcije sile S_2 na ose koordinatnog sistema:

$$X_2 = S_2\cos\alpha\cdot\cos\beta\,, \qquad Y_2 = S_2\cos\alpha\cdot\sin\beta\,, \qquad Z_2 = S_2\sin\alpha\,.$$

Očigledno je da ugao $\beta = 45^\circ$, dok je:

$$\cos\alpha = \frac{d}{D} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\,, \qquad \sin\alpha = \frac{a}{D} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$



Slika 208.

Gde su a, d i D stranica kocke, dijagonala osnove kocke i telesna dijagonala kocke. Sada je:

$$X_2 = S_2\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}S_2, \quad Y_2 = S_2\frac{\sqrt{6}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}S_2, \quad Z_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}S_2.$$

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	0	0	-60	$-30a$	$30a$	0
F	0	a	0	-20	0	0	0	0	$20a$
S_1	a	0	0	0	0	S_1	0	$-aS_1$	0
S_2	a	a	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$a\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$-a\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	0
S_3	a	a	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0

Jednačine ravnoteže će sada biti:

$$\sum X_i = 0: \quad -20 + \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + X_A = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + Y_A = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: \quad -60 + S_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + Z_A = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_x = 0: \quad -30 + \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_y = 0: \quad 30 - S_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_z = 0: \quad 20 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (6) nalazimo silu u štapu (3):

$S_3 = 20\sqrt{2}$ daN,

iz (4): $S_2 = 10\sqrt{3}$ daN,

iz (5): $S_1 = 0$ daN,

iz (3): $Z_A = 30$ daN,

iz (2): $Y_A = -10$ daN,

iz (1): $X_A = -10$ daN.

Isti zadatak možemo rešiti pomoću uslova ravnoteže da je suma momenata za šest osa koje se ne mogu preseći jednom pravom, jednaka nuli. Ove ose, koje su označene rimskim brojevima od I do VI, prikazane su na slici 208:

$$\sum M_{I-I} = 0: \quad S_1 . a\, 2 = 0, \qquad S_1 = 0 \text{ daN},$$

$$\sum M_{II-II} = 0: \quad -S_3\cos\beta . a + F . a = 0, \qquad S_3 = 20\sqrt{2} \text{ daN},$$

$$\sum M_{III-III} = 0: \quad S_2\cos\alpha . \cos\beta . a + S_3\cos\beta . a - G\frac{a}{2} = 0,$$

$$S_2 = 10\sqrt{3} \text{ daN},$$

$$\sum M_{IV-IV} = 0: \qquad Z_A.a - G\frac{a}{2} = 0, \qquad Z_A = 30 \text{ daN},$$

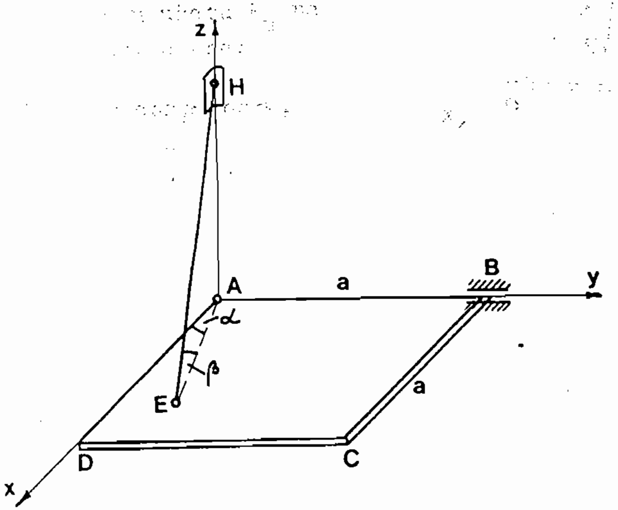
$$\sum M_{V-V} = 0: \qquad X_A.a + S_2\cos\alpha.\cos\beta.a = 0, \qquad X_A = -10 \text{ daN},$$

$$\sum M_{VI-VI} = 0: \qquad Y_A.a - F.a + S_3\cos\beta.a + S_2\cos\alpha\sin\beta.a = 0,$$

$$Y_A = -10 \text{ daN}.$$

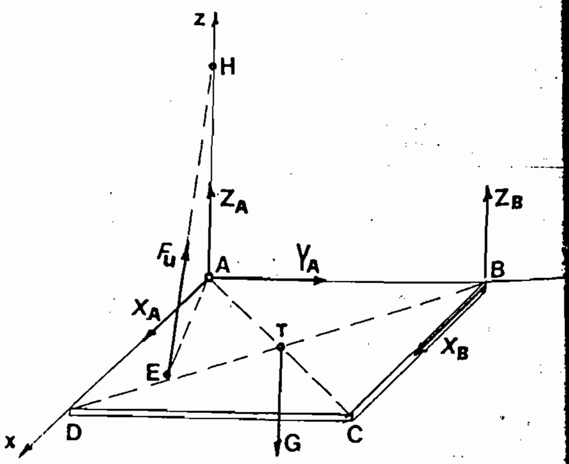
82. Homogena kvadratna ploča strane a, težine $G = 60$ daN stoji u ravnoteži u ravni Axy pomoću sfernog (A) i cilindričnog (B) ležišta, kao i užeta EH, kako je na slici 209 pokazano. Ako je: $E(\frac{\sqrt{3}}{3}a; \frac{1}{3}a; 0)$ i $\alpha = \beta = 30^\circ$, odrediti:

a) reakcije ležišta,
b) silu u užetu EH.



Slika 209.

Posle oslobadjanja od veza ploča će biti opterećena kako je to pokazano na slici 210.



Slika 210.

Potražimo projekcije sile u užetu F_u na koordinatne ose:

$$X_u = -F_u\cos\beta\cos\alpha,$$

$$X_u = -\frac{3}{4}F_u,$$

$$Y_u = -F_u\cos\beta\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}F_u, \qquad Z_u = F_u\sin\alpha = \frac{1}{2}F_u$$

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	0	0	-60	$-30a$	$30a$	0
F_u	$\frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\frac{a}{3}$	0	$-\frac{3}{4}F_u$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}F_u$	$\frac{F_u}{2}$	$\frac{a}{6}F_u$	$-\frac{\sqrt{3}}{6}aF_u$	0
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0
F_B	0	a	0	X_B	0	Z_B	aZ_B	0	$-aX_B$

Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X_i = 0: \qquad -\frac{3}{4}F_u + X_A + X_B = 0 \qquad (1)$$

$$\sum Y_i = 0: \qquad -\frac{\sqrt{3}}{4}F_u + Y_A = 0, \qquad (2)$$

$$\sum Z_i = 0: \qquad -60 + \frac{1}{2}F_u + Z_A + Z_B = 0, \qquad (3)$$

$$\sum M_x = 0: \qquad -30 + \frac{1}{6}F_u + Z_B = 0, \qquad (4)$$

$$\sum M_y = 0: \qquad 30 - \frac{\sqrt{3}}{6}F_u = 0, \qquad (5)$$

$$\sum M_z = 0: \qquad -X_B = 0. \qquad (6)$$

Iz (6): $X_B = 0$ daN,

Iz (5): $F_u = 60\sqrt{3}$ daN,

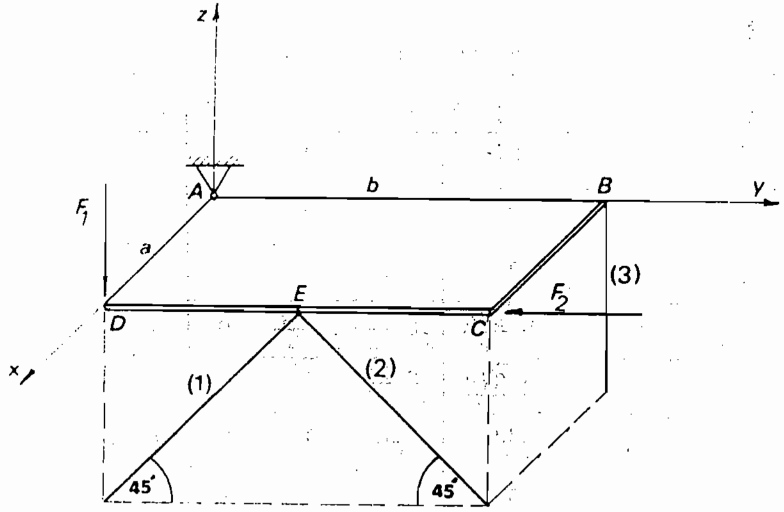
iz (4): $Z_B = 10(3 - \sqrt{3})$ daN,

iz (3): $Z_A = 10(3 - 2\sqrt{3})$ daN,

iz (2): $Y_A = 45$ daN,

iz (1): $X_A = 45\sqrt{3}$ daN.

83. Homogena pravougaona ploča dimenzija: a x b i težine

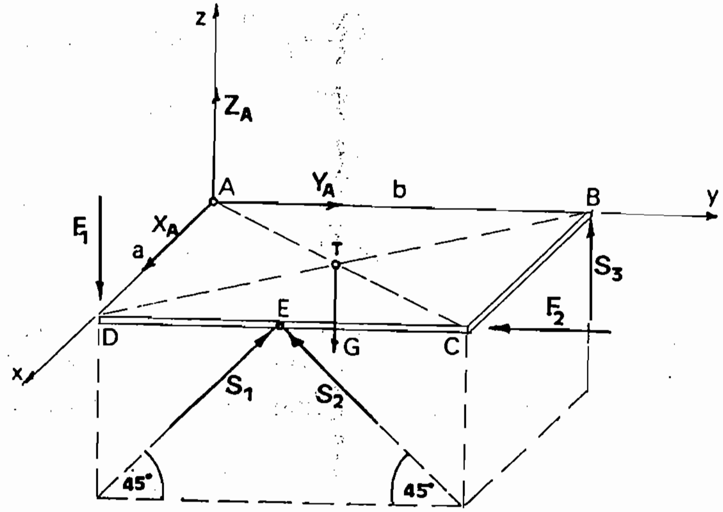


Slika 211.

G = 24 daN održava se u horizontalnom ravnotežnom položaju pomoću sfernog zgloba A i tri tanka štapa kako je na slici 211 pokazano. U temenima D i C deluju sile jednakih intenziteta $F_1 = F_2 = 6$ daN, datih pravaca i smerova. Izračunati reakcije zgloba A i sila u štapovima.

Na slici 212 prikazane su sile koje deluju na ploču.

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	0	0	−24	−12b	12a	0
F_1	a	0	0	0	0	−6	0	6a	0
F_2	a	b	0	0	−6	0	0	0	−6a
S_1	a	$\frac{b}{2}$	0	0	$\frac{\sqrt{2}}{2} S_1$	$\frac{\sqrt{2}}{2} S_1$	$\frac{b\sqrt{2}}{4} S_1$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2} S_1$	$\frac{a\sqrt{2}}{2} S_1$
S_2	a	$\frac{b}{2}$	0	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2} S_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2} S_2$	$\frac{b\sqrt{2}}{4} S_2$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2} S_2$	$-\frac{a\sqrt{2}}{2} S_2$
S_3	0	b	0	0	0	S_3	bS_3	0	0
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0



Slika 212.

Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X_i = 0: \quad X_A = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -6 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + Y_A = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: \quad -30 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 + S_3 + Z_A = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_x = 0: \quad -12 + \frac{\sqrt{2}}{4} S_1 + \frac{\sqrt{2}}{4} S_2 + S_3 = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_y = 0: \quad 18 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_z = 0: \quad -6 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_2 = 0. \tag{6}$$

Sabiranjem jednačina (5) i (6) dobijamo: $12 - \sqrt{2}\, S_2 = 0$,

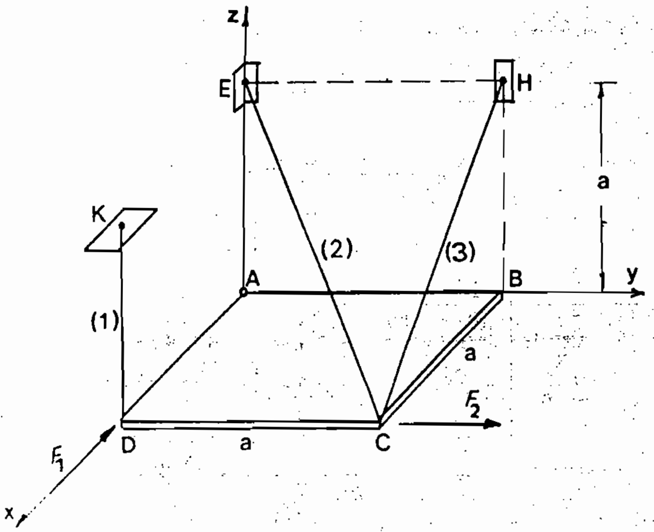
odakle je: $S_2 = 6\sqrt{2}$ daN,

Iz (6): $S_1 = 12\sqrt{2}$ daN, iz (4): $S_3 = 3$ daN,

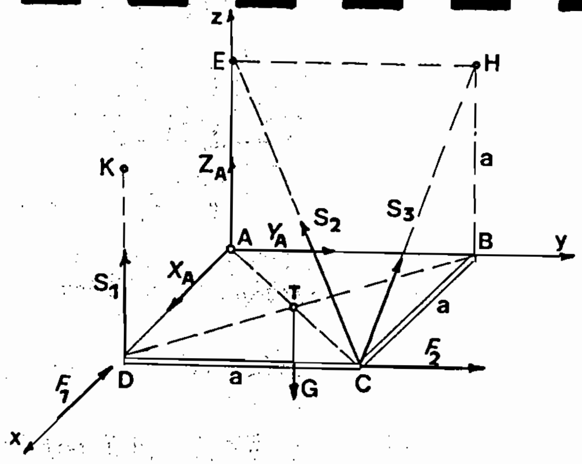
iz (3): $Z_A = 9$ daN, iz (2): $Y_A = 0$,

iz (1): $X_A = 0$.

84. Homogena ploča kvadratnog oblika strane a težine $G = 200$ daN održava se u ravnoteži u horizontalnoj ravni pod dejstvom sfernog ležišta (A) i tri zatege, kako je pokazano na slici 213. Na ploču u temenu D dejstvuje sila $F_1 = 100$ daN duž Ax ose, a u temenu C sila $F_2 = 100$ daN paralelno Ay osi. Odrediti reakciju ležišta (A) i sile u zategama: DK, CE i CH.



Slika 213.



Slika 214.

Opterećenje ploče prikazano je na slici 214. Na slici se vidi da smo u zategama pretpostavili naprezanje na istezanje.

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	0	0	0	−200	−100a	100a	0
F_1	a	0	0	−100	0	0	0	0	0
F_2	a	a	0	0	100	0	0	0	100a
S_1	a	0	0	0	0	S_1	0	$-aS_1$	0
S_2	a	a	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$a\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	$-a\frac{\sqrt{3}}{3}S_2$	0
S_3	a	a	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}S_3$
F_A	0	0	0	X_A	Y_A	Z_A	0	0	0

Jednačine ravnoteže su:

$$\sum X_i = 0: \quad -100 - \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + X_A = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad 100 - \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + Y_A = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: \quad -200 + S_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 + Z_A = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_x = 0: \quad -100 + \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_y = 0: \quad 100 - S_1 - \frac{\sqrt{3}}{3}S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_z = 0: \quad 100 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_3 = 0. \tag{6}$$

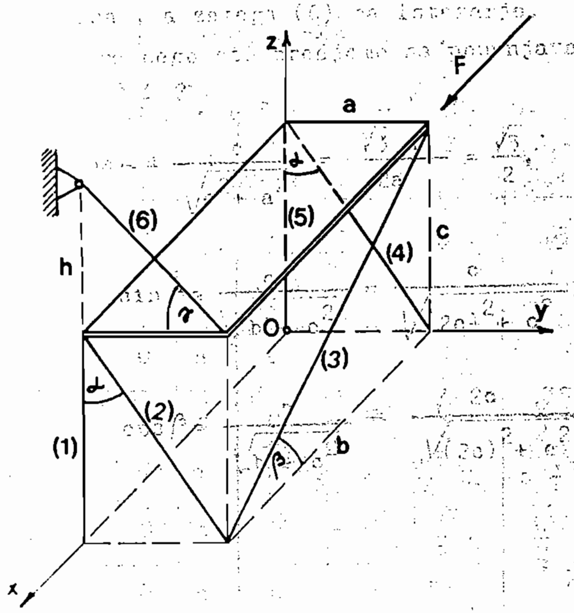
Iz (6): $S_3 = -100\sqrt{2}$ daN (pritisak), iz (4): $S_2 = 200\sqrt{3}$ daN,

iz (5): $S_1 = 0$, iz (3): $Z_A = 100$ daN,

iz (2): $Y_A = 100$ daN, iz (1): $X_A = 200$ daN.

85. Homogenu ploču oblika pravougaonika strana: a i $b = 2\sqrt{3}$ a (u cm), težine $G = 80\sqrt{5}$ daN napada sila $F = 40\sqrt{5}$ daN, kako je na slici 215 pokazano. Ploču održavaju u ravnotežnom položaju paralelno ravni Oxy, a na visini $c = \frac{b}{2} = \sqrt{3}$ a od nje, pet štapova i zatega (6) kod koje je $h = \frac{c}{3}$.

Odrediti veličine i karaktere sila u štapovima i zategi.



Slika 215.

Na slici 215 data je šema opterećenja ploče. Prilikom oslobadjanja od veza pretpostavljeno je da su štapovi opterećeni na pritisak, a zatega (6) na istezanje.

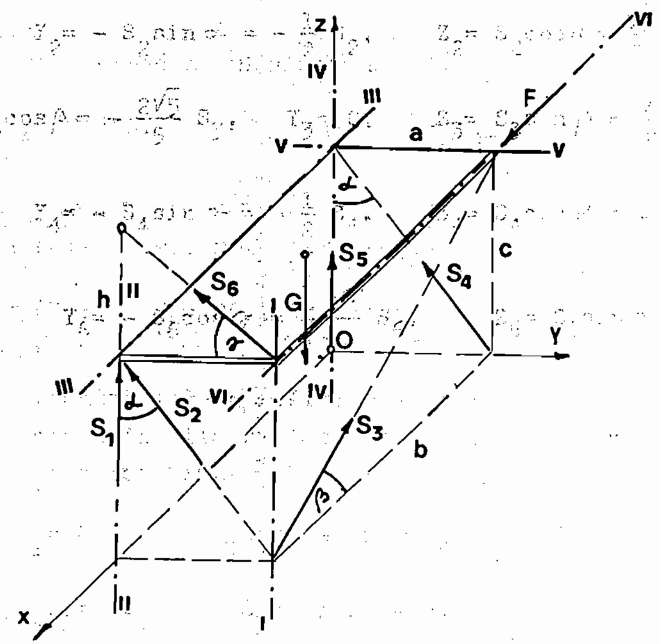
Pre nego što predjemo na popunjavanje tabele odredimo uglove α, β i γ.

$$\cos\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \alpha = 30^\circ$$

$$\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{c}{\sqrt{(2c)^2+c^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad \text{Pošto je } b = 2c$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{2c}{\sqrt{(2c)^2+c^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin\gamma = \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}} = \frac{\frac{c}{3}}{\sqrt{\frac{c^2}{9}+\frac{c^2}{3}}} = \frac{1}{2}. \qquad \gamma = 30^\circ. \ (h = \frac{c}{3}, \ a = \frac{c}{\sqrt{3}}).$$



Slika 216.

Projekcije sila S_2, S_3, S_4 i S_6 će sada biti:

$$X_2 = 0, \qquad Y_2 = -S_2\sin\alpha = -\frac{1}{2}S_2, \qquad Z_2 = S_2\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}S_2,$$

$$X_3 = -S_3\cos\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}S_3, \qquad Y_3 = 0, \qquad Z_3 = S_3\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}S_3,$$

$$X_4 = 0, \qquad Y_4 = -S_4\sin\alpha = -\frac{1}{2}S_4, \qquad Z_4 = S_4\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}S_4$$

$$X_6 = 0, \qquad Y_6 = -S_6\cos\gamma = -\frac{\sqrt{3}}{2}S_6, \qquad Z_6 = S_6\sin\gamma = \frac{1}{2}S_6.$$

F_i	x_i	y_i	z_i	X_i	Y_i	Z_i	$y_iZ_i - z_iY_i$	$z_iX_i - x_iZ_i$	$x_iY_i - y_iX_i$
G	$\frac{b}{2}$	$\frac{a}{2}$	c	0	0	$-80\sqrt{5}$	$-40a\sqrt{5}$	$40b\sqrt{5}$	0
F	0	a	c	$40\sqrt{5}$	0	0	0	$40c\sqrt{5}$	$-40a\sqrt{5}$
S_1	b	0	c	0	0	S_1	0	$-bS_1$	0
S_2	b	0	c	0	$-\frac{1}{2}S_2$	$\frac{\sqrt{3}}{2}S_2$	$\frac{c}{2}S_2$	$-\frac{b\sqrt{3}}{2}S_2$	$-\frac{b}{2}S_2$
S_3	0	a	c	$-\frac{2\sqrt{5}}{5}S_3$	0	$\frac{\sqrt{5}}{5}S_3$	$a\frac{\sqrt{5}}{5}S_3$	$-c\frac{2\sqrt{5}}{5}S_3$	$a\frac{2\sqrt{5}}{5}S_3$
S_4	0	0	c	0	$-\frac{1}{2}S_4$	$\frac{\sqrt{3}}{2}S_4$	$\frac{c}{2}S_4$	0	0
S_5	0	0	c	0	0	S_5	0	0	0
S_6	b	a	c	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}S_6$	$\frac{1}{2}S_6$	$(\frac{a}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2})S_6$	$-\frac{b}{2}S_6$	$-\frac{b\sqrt{3}}{2}S_6$

Jednačine ravnoteže su sada:

$$\sum X_i = 0: \quad 40\sqrt{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}S_3 = 0, \tag{1}$$

$$\sum Y_i = 0: \quad -\frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{2}S_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}S_6 = 0, \tag{2}$$

$$\sum Z_i = 0: \quad -80\sqrt{5} + S_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}S_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_4 + S_5 + \frac{1}{2}S_6 = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_x = 0: \quad -40\sqrt{5} + \frac{\sqrt{3}}{2}S_2 + \frac{\sqrt{5}}{5}S_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}S_4 + 2S_6 = 0, \tag{4}$$

$$\sum M_y = 0: \quad 120\sqrt{5} - 2S_1 - \sqrt{3}S_2 - \frac{2\sqrt{5}}{5}S_3 - S_6 = 0, \tag{5}$$

$$\sum M_z = 0: \quad -40\sqrt{5} - \sqrt{3}S_2 + \frac{2\sqrt{5}}{5}S_3 - 3S_6 = 0. \tag{6}$$

Iz jednačine (1) je: $S_3 = 100$ daN (pritisak).

Jednačine (2), (4) i (6) sada postaju:

$$S_2 + S_4 + \sqrt{3}S_6 = 0,$$

$$\sqrt{3}S_2 + \sqrt{3}S_4 + 4S_6 = 40\sqrt{5},$$

$$\sqrt{3}S_2 + 3S_6 = 0.$$

Iz ovih jednačina nalazimo da je:

$S_4 = 0$ daN, $\quad S_2 = -40\sqrt{15}$ daN (istezanje),

$S_6 = 40\sqrt{5}$ daN (istezanje).

Iz (5): $\quad S_1 = 80\sqrt{5}$ daN (pritisak),

iz (3): $\quad S_5 = 20\sqrt{5}$ daN (pritisak).

Isti zadatak možemo rešiti pomoću uslova ravnoteže da je suma momenata svih sila za šest osa jednaka nuli. Ove ose su prikazane na slici 216.

$\sum M_{I-I} = 0: \quad S_4 \sin\alpha . b = 0, \quad S_4 = 0$ daN.

$\sum M_{II-II} = 0: \quad S_3 \cos\beta . a - F . a = 0,$

$$S_3 \frac{2\sqrt{5}}{5} - 40\sqrt{5} = 0,$$

$S_3 = 100$ daN (pritisak),

$\sum M_{III-III} = 0: \quad S_3 \sin\beta . a + S_6 \sin\gamma . a - G\frac{a}{2} = 0,$

$S_6 = 40\sqrt{5}$ daN (istezanje),

$\sum M_{IV-IV} = 0: \quad S_2 \sin\alpha . b - S_3 \cos\beta . a + S_6 \cos\gamma . b + F . a = 0$

$S_2 = -40\sqrt{15}$ daN (istezanje)

$\sum M_{V-V} = 0: \quad S_1 . b + S_2 \cos\beta . b + S_6 \sin\gamma . b - G\frac{b}{2} = 0,$

$S_1 = 80\sqrt{5}$ daN (pritisak),

$\sum M_{VI-VI} = 0: \quad S_1 . a + S_2 \sin\alpha . c + S_5 . a - G\frac{a}{2} = 0,$

$S_5 = 20\sqrt{5}$ daN (pritisak).