Završni ispit

19. lipnja 2012.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Pomoću IV metode estimiraju se parametri procesa zadanog prijenosnom funkcijom

$$G_M(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}}. \qquad (1)$$

Na raspolaganju su mjerenja prikazana u Tablici 1.

a) *(2 boda)* Odredite matricu pomoćnih varijabli W ako se za filtriranje mjernih podataka koristi model

$$A_H(z^{-1})Y_H(z) = B_H(z^{-1})U(z),$$

$$A_H = 1, B_H = z^{-1}.$$

b) *(3 boda)* Odredite vektor mjerenja Y, matricu podataka Φ i vektor parametara modela.

c) *(1 bod)* Kako se izračunava optimalni estimat parametara na temelju W, Y i Φ?

k	$u(k)$	$y(k)$
0	-2	1.7
1	-2	-0.3
2	2	-1.1
3	-2	0.5
4	2	-0.8
5	2	0.6
6	2	1.4
7	-2	1.6

Tablica 1: Parovi (u, y) uz PRBS pobudu s periodom $N = 7$

2. zadatak (6 bodova)

Proces je opisan ARMAX strukturom

$$(1 + a_1 q^{-1})y(k) - b_1 q^{-1}u(k) = (1 + c_1 q^{-1})\varepsilon(k). \qquad (2)$$

a) *(4 boda)* Pretpostavite da je slučajna varijabla pogreške ε nekorelirana i ima Gaussovu razdiobu - $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$. Odredite izraz za $\ln L$, gdje je L funkcija vjerojatnosti ML metode, ako je poznato N podataka pogreške modela $\{\varepsilon(k+1), \ldots, \varepsilon(k+N)\}$. O kojim sve parametrima ovisi $\ln L$? *Napomena:* $\zeta \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \rightarrow f_\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$.

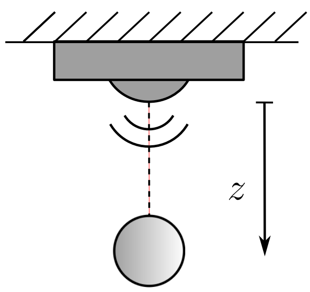
b) *(2 boda)* Odredite izraz za vektor gradijenta $\ln L$ po njegovim parametrima.

3. zadatak (11 bodova)

Slobodni pad objekta u konstantnom gravitacijskom polju opisan je zakonom

$$\ddot{z}(t) = g,$$

gdje je z položaj objekta, a g gravitacijsko ubrzanje. Ultrazvučnim senzorom postavljenim iznad objekta mjeri se vrijeme putovanja τ ultrazvučnog vala do objekta i nazad (Sl. 1). Pritom vrijedi $\tau = \frac{2z}{v_s}$, gdje je v_s brzina ultrazvuka i iznosi 330 m/s u danom sredstvu.



Slika 1: Sustav za određivanje položaja ultrazvučnim senzorom

Za navedeni sustav potrebno je:

a) *(2 boda)* odrediti opis u prostoru stanja uz varijable stanja z i $\dot{z}$ ako je izlaz sustava mjerenje ultrazvučnog senzora τ, a ulaz gravitacijsko ubrzanje g;

b) *(2 boda)* projektirati kontinuirani deterministički estimator stanja punog reda kojim će se oba pola dinamike pogreške estimacije postaviti u $s = -3$;

c) *(3 boda)* odrediti izraze za kontinuirani deterministički estimator stanja reduciranog reda te uz koja pojačanja k je estimator stabilan;

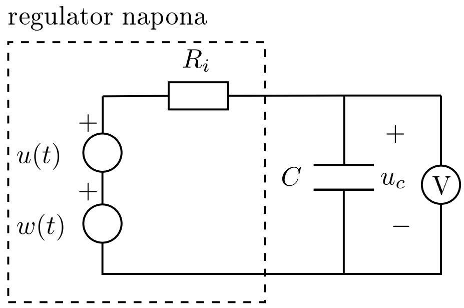
d) *(2 boda)* diskretizirati sustav uz dovoljno malo vrijeme diskretizacije $T = 10^{-2}$ s;

e) *(2 boda)* projektirati diskretni deterministički estimator stanja reduciranog reda kojim će se pol dinamike pogreške estimacije postaviti u $z = 0$.

4. zadatak (6 bodova)

Električni model neke baterije pojednostavljeno se opisuje kondenzatorom kapaciteta $C = 1$ mF. Neka je na bateriju spojen regulator napona nazivnog izlaza $u(t)$ (koji promatramo kao ulaz sustava) te izlaznog otpora $R_i = 200\ \Omega$. Oscilacije u naponu $u(t)$ modeliramo aditivnim bijelim šumom $w(t) \sim (0,\ 0.01\ \mathrm{V}^2)$. Shema sustava dana je na Sl. 2, a dinamiku sustava opisuje jednadžba (3).

$$\dot{u}_c(t) = -\frac{1}{R_i C} u_c(t) + \frac{1}{R_i C}\left[u(t) + w(t)\right] \quad (3)$$



Slika 2: Shema sustava

Napon baterije u_c mjeri se voltmetrom mjernog šuma $v(t) \sim \mathcal{N}(0,\ 0.001\ \mathrm{V}^2)$. Ako se za estimaciju napona baterije u_c koristi kontinuirani Kalmanov filtar, odredite Kalmanovo pojačanje i kovarijancu stanja sustava u ustaljenom stanju.

5. zadatak (11 bodova)

U nekom se procesu pn-dioda koristi za mjerenje temperature T na način da se napon na njoj drži konstantnim ($u_D = 0.5$ V) te se mjeri struja kroz diodu i_D ampermetrom. Ako je poznato da za odstupanje temperature $\Delta T(k) = T(k) - T_o$ od radne temperature okoline (T_o) vrijedi

$$\Delta T(k) = 10^{-2}\Delta T(k-1) + w(k-1),\ w(k-1) \sim (0,\ 1\ \mathrm{K}^2),$$

a model mjerenja je

$$i_D(k) = 10^{-9}\exp\left(\frac{11609\ u_D}{T(k)}\right) + v(k),\ v(k) \sim (0,\ 10^{-6}\ \mathrm{A}^2),$$

te da su mjerni i procesni šum nekorelirani potrebno je:

a) *(5 bodova)* projektirati diskretni prošireni Kalmanov filtar za estimaciju odstupanja temperature ΔT;

b) *(3 boda)* izračunati aposteriorno stanje sustava u koraku $k = 1$ ako je $T_o = 280$ K, $\hat{\Delta T}(0) = 10$ K, $P(0) = 6\ \mathrm{K}^2$ i $i_D(1) = 0.35$ A;

c) *(3 boda)* napisati jednadžbe Kalmanova filtra za slučaj da je procesni šum obojen i opisan s $w(k) = \frac{1}{3}w(k-1) + \xi(k-1)$, $\xi(k-1) \sim (0, 0.04\ \mathrm{V}^2)$ i $E\left[\xi(k-1)w(k-1)\right] = 0$.

Završni ispit

21. lipnja 2011.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (4 boda)

Neka je prijelazna matrica vremenski diskretnog linearnog sustava $\Phi = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, gdje je T vrijeme diskretizacije sustava. Na sustav djeluje diskretni poremećaj nultog očekivanja i varijance $Q = \texttt{diag(1,0)}$. Ako je varijanca početnog stanja sustava $P(0) = \texttt{diag(1, 0)}$, odredite:

a) *(2 boda)* sve moguće ustaljene vrijednosti očekivanja stanja sustava,

b) *(2 boda)* eksplicitno rješenje vremenske ovisnosti varijance stanja sustava, $P(k)$.

2. zadatak (9 boda)

Upravljanje kutnom brzinom motora ω pomoću napona njegove armature u moguće je pojednostvljeno opisati na način:

$$\dot{\omega} = k\ u,\ \ k = \text{konst.}$$

Zakret motora Θ mjerimo enkoderom. Za navedeni sustav, uz $k = 1$, potrebno je:

a) *(1 bod)* odrediti opis u prostoru stanja uz varijable stanja Θ i ω ako je izlaz sustava zakret motora Θ.

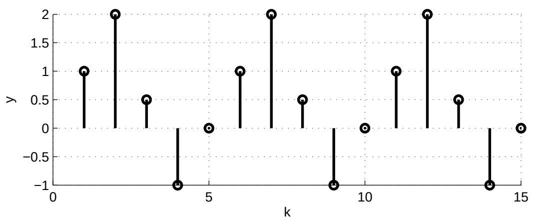
b) *(2 boda)* projektirati kontinuirani estimator stanja punog reda kojim će se polovi dinamike greške estimacije postaviti u $s = -5$.

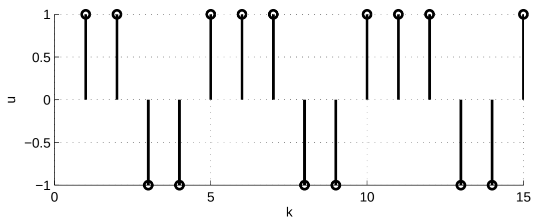
c) *(2 boda)* projektirati kontinuirani estimator stanja reduciranog reda kojim će se polovi dinamike greške estimacije postaviti u $s = -5$.

d) *(4 boda)* projektirati kontinuirani Kalmanov filtar za estimaciju kutne brzine motora, ali uz stohastički model sustava. Neka na akceleraciju motora djeluje aditivni procesni šum $w \sim (0, 1/100)$ uzrokovan nesigurnošću u upravljačkom naponu, ekscentricitetom osovine i poremećajima u opterećenju motora. Mjerenje filtra y je izlaz enkodera koji je zašumljen aditivinim bijelim šumom $v \sim (0, 1/10)$. Odredite kovarijancu estimacije u ustaljenom stanju.

3. zadatak (3 boda)

Izračunajte vrijednost međukorelacijske funkcije $R_{uy}(10)$ periodičkih signala $u(k)$ i $y(k)$.





4. zadatak (5 bodova)

Pretpostavimo da estimiramo konstantu x na temelju zašumljenih mjerenja $y_k = \sqrt{x}(1 + v_k)$ $v_k \sim N(0, 1)$.

a) *(2 boda)* Napišite jednadžbe proširenog Kalmanova filtra za estimaciju x. Ako je $x_0 = 3$, $P_0 = 1$ te $y_1 = 1$ i $y_2 = 3$, odredite *a-posteriori* estimate $\hat{x}_2^+$ te P_2^+.

b) *(1 bod)* Čemu je pritom jednaka informacijska matrica $\mathcal{I}_2^+$?

c) *(2 boda)* Pretpostavimo da je narušena pretpostavka o nekoreliranosti mjernog šuma te vrijedi:

$$v_k = \frac{1}{2}v_{k-1} + \xi_{k-1},\ \xi_k \sim (0, Q_\xi).$$

Transformirajte sustav u oblik pogodan za Kalmanov filtar pri čemu se uzima u obzir obojenost šuma.

5. zadatak (3 boda)

U identifikacijskom eksperimentu sustav je doveden u radnu točku i zatim je u toj radnoj točki snimljena prijelazna funkcija tog sustava. Iz prijelazne funkcije određeno je da je $t_{95\%} = 30$ s.

a) *(2 boda)* Odredite parametre PRBS signala koji se može koristiti za identifikaciju tog sustava i kojega je moguće realizirati posmačnim registrom s $n = 4$ stupnja.

b) *(1 bod)* Skicirajte autokorelacijsku funkciju PRBS-a s tako odabranim parametrima.

6. zadatak (3 boda)

Neka je dan sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{2}{4s+1}$$

koji je pobuđen signalom šuma spektralne gustoće snage:

$$S_{uu}(\omega) = \frac{16}{\omega^2+64}$$

a) *(2 bodova)* Odredite spektralnu gustoću dobivenog izlaznog signala $S_{yy}(\omega)$.

b) *(1 bod)* Iz $S_{yy}(\omega)$ odredite $R_{yy}(\tau)$.

7. zadatak (3 boda)

Parametarskom metodom identifikacije dobiven je ARX model sustava opisan kao:

$$A(z^{-1}) = 1 + z^{-2}$$
$$B(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1}$$

a) *(1 bod)* Skicirajte blokovsku shemu ARX modelske strukture.

b) *(2 boda)* Napišite jednadžbu diferencija identificiranog modela.

TEORIJA

1. zadatak (1 bod)

Koji ispitni signal je pogodan za identifikaciju frekvencijske karakteristike sustava na temelju jednog identifikacijskog eksperimenta. Matematički zapišite taj signal i odgovorite na koji se način odabiru ključni parametri tog signala?

2. zadatak (1 bod)

Koji je idealni pobudni signal sustava za provođenje korelacijske analize i zbog čega on nije ostvariv? Objasnite osnovni postupak korelacijske analize i pokažite čemu je jednaka težinska funkcija sustava uz idealni ulazni signal. Koja pretpostavka na moguće ostale (poremećajne) ulaze u sustav pritom mora vrijediti?

3. zadatak (1 bod)

Pokažite da je autokorelacijska funkcija PRBS signala periodična. Je li i međukorelacijska funkcija PRBS signala i odziva sustava na takav signal periodična? Pokažite. Ako pretpostavimo da se autokorelacijska funkcija PRBS signala može približno nadomjestiti sekvencom delta-impulsa površine A, napišite izraz za međukorelacijsku funkciju. Na temelju toga objasnite kako je potrebno odabrati period PRBS-a.

4. zadatak (1 bod)

Kakva će biti procjena parametara ARX modela dobivena metodom najmanjih kvadrata ako postoji korelacija između poopćene pogreške modela, te izlaza i ulaza sustava? Navedite koju metodu identifikacije bi trebalo upotrijebiti ili koji bi model trebalo upotrijebiti da se dobije bolja procjena parametara determinističkog dijela modela.

5. zadatak (1 bod)

Objasnite nepraktičnost direktne procjene parametara za on-line primjene identifikacije pomoću metode najmanjih kvadrata (tj. neprestano osvježavanje procjene parametara kako nailaze novi uzorci ulaznog i izlaznog signala sustava). Napišite jednadžbu osvježavanja parametara kod rekurzivne metode najmanjih kvadrata, zapisanu pomoću Kalmanova vektora pojačanja.

6. zadatak (1 bod)

Objasnite sukob pomaka i varijance kod odabira reda matematičkog modela čije se parametre određuje nekom od metoda parametarske identifikacije.

7. zadatak (1 bod)

Navedite prednosti i nedostatke sekvencijalnog Kalmanova filtra naspram osnovnog (*batch*).

8. zadatak (1 bod)

Navedite prednosti i nedostatke informacijskog Kalmanova filtra naspram osnovnog.

9. zadatak (1 bod)

Navedite prednosti i nedostatke korijenskog Kalmanova filtra naspram osnovnog.

10. zadatak (1 bod)

Kakva statitstička svojstva ima inovacija optimalnog Kalmanova filtra? Navedite barem jedan uzrok odstupanja od toga te kako se ono *on-line* može detektirati i ispraviti (skicirati shemu).

Ponovljeni završni ispit

4. srpnja 2011.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa. **Studenti koji ponavljaju 1. međuispit rješavaju zadatke 1-5, 2. međuispit 6-8, a završni ispit sve zadatke.**

1. zadatak (3 boda)

a) *(1 bod)* Zašto je za primjenu identifikacije zasnovane na Fourierovoj analizi prikladan chirp pobudni signal?

b) *(1 bod)* Kako odabiremo početnu i završnu frekvenciju chirp signala?

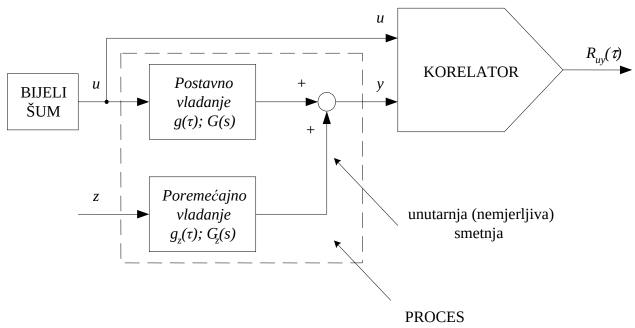
c) *(1 bod)* Skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku chirp signala s početnom frekvencijom $\omega_{poc} = 0.1$ rad/s i završnom frekvencijom $\omega_{zav} = 10$ rad/s.

2. zadatak (3 boda)

Izračunajte vrijednost međukorelacijske funkcije $R_{uy}(\pi/2)$ signala $u(t) = sin(t)$ i $y(t) = cos(t)$.

3. zadatak (2 boda)

Proveden je identifikacijski eksperiment kao što je prikazano na slici 1, te je na izlazu snimljen signal y. Odredite i komentirajte izraz za težinsku funkciju $g(\tau)$ uz pretpostavku da signali u i z ne koreliraju i da je spektralna snaga bijelog šuma $S_{uu}(\omega) = 2$.



Slika 1: Sustav upravljanja.

4. zadatak (4 boda)

Stohastički proces ima autokorelacijsku funkciju $R_{xx} = Ae^{-k|\tau|}$, gdje su A i k pozitivne konstante.

a) *(2 boda)* Odredite spektralnu gustoću tog procesa $S_{xx}(\omega)$.

b) *(2 boda)* Kolika je ukupna spektralna snaga tog procesa?

5. zadatak (2 boda)

Parametarskom metodom identifikacije dobiven je OE model sustava opisan kao:

$$F(z^{-1}) = 1 + z^{-2}$$
$$B(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1}$$

a) *(1 bod)* Skicirajte blokovsku shemu OE modelske strukture.

b) *(1 bod)* Napišite jednadžbu diferencija identificiranog modela.

6. zadatak (4 boda)

Broj vozila k koja u određenom vremenskom periodu prođu pored kontrolne točke na nekoj dionici puta mjeri se pomoću mjerača prometa. Pokazuje se da se broj vozila k može u statističkom smislu opisati Poissonovom razdiobom:

$$f(k, \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \lambda > 0$$

pri čemu $f(k,\lambda)$ označava vjerojatnost da u određenom vremenskom intervalu preko kontrolne točke prođe upravo k vozila. Potrebno je na temelju poznatih rezultata mjerenja broja vozila k_i odrediti optimalni iznos parametra razdiobe λ korištenjem ML metode (*eng.* Maximum Likelihood Method).

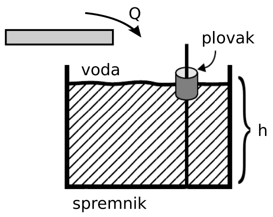
7. zadatak (2 boda)

Koristeći polinomski test procijenite red ARMAX modela ako su postupkom identifikacije dobiveni polinomi:

$$A(z^{-1}) = 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}$$
$$B(z^{-1}) = z^{-2} - 10^{-5}z^{-3}$$
$$C(z^{-1}) = z^{-1} - 2.998z^{-2}$$

8. zadatak (7 bodova)

Proces punjenja spremnika vode konstantnim dotokom Q, prikazan je slikom 2 pri čemu je mjerenje y naponski signal proporcionalan visini vode u spremniku h, odnosno položaju plovka na vertikalnom nosaču.



Slika 2: Proces

Matematički model sustava je:

$$\begin{aligned} 3\frac{dh}{dt} &= Q \\ y &= 0.01\ h \end{aligned}$$

Cilj je estimirati visinu vode h u spremniku i dotok vode Q.

a) *(1 bod)* Odredite opis sustava u prostoru stanja.

b) *(1 bod)* Ispitajte osmotrivost danog sustava.

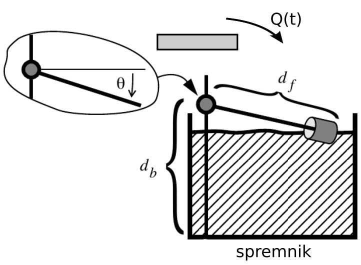
c) *(2 boda)* Projektirajte kontinuirani estimator stanja punog reda kojim će se polovi sustava postaviti u $s = -8$.

d) *(1 bod)* Ako u mjerenju visine postoji Gaussov bijeli šum $v \sim \mathcal{N}(0, R)$, napišite izraz za dinamiku pogreške estimacije.

e) *(2 boda)* Projektirajte kontinuirani estimator stanja reduciranog reda kojim će se polovi sustava postaviti u $s = -8$.

9. zadatak (6 bodova)

Proces punjenja spremnika vode vremenski promijenjivim dotokom $Q(t) = 1 + c\ sin(t/20), c < 1$, prikazan je slikom 3 pri čemu je mjerenje y naponski signal proporcionalan kutu između nosača plovka i vertikalnog nosača.



Slika 3: Proces

Amplituda sinusoidalne komponente dotoka c je Gaussov bijeli šum očekivanja $\bar{c}$ i varijance 0.01, a nesigurnost mjerenja modeliramo aditivnim Gaussovim bijeli šumom v očekivanja 0 i varijance 0.001. Matematički model sustava je:

$$\begin{aligned} 3\frac{dh}{dt} &= Q(t) \\ y &= \arcsin\frac{d_b - h}{d_f} + v, \end{aligned}$$

Duljine nosača su $d_b = 2$ te $d_f = 3$. Cilj je estimirati visinu vode h u spremniku i srednju vrijednost amplitude dotoka $\bar{c}$.

a) *(2 boda)* Odredite diskretni linearizirani model sustava u prostoru stanja uz vrijeme diskretizacije $T = 1$ s koje je dovoljno malo za taj sustav.

b) *(2 boda)* Ako je $h_0 = 1, \bar{c}_0 = 0.5$ i $P_0 = diag(1, 0.1)$, odredite *a-posteriori* estimate $\hat{x}_1^+$ te P_1^+ diskretnog proširenog Kalmanova filtra sustava ako je $y_1 = 0.5$.

c) *(2 boda)* Pretpostavimo da dinamiku sustava pratimo kontinuirano, dok mjerenja dolaze u diskretnim vremenskim trenucima s razmakom $T = 10$ s. Napišite jednadžbe hibridnog proširenog Kalmanova filtra za estimaciju sustava. Pritom eksplicitno izrazite *a-priori* estimat stanja $\hat{x}(t)$.

TEORIJA

1. zadatak (2 boda)

Izvedite formulu za direktnu procjenu parametara ARX modela metodom najmanjih kvadrata. Objasnite važnost perzistentnosti pobude na toj formuli.

2. zadatak (1 bod)

Kako je definirana spektralna gustoća snage signala? Koji odnos vrijedi između spektralne gustoće snage signala na izlazu i ulazu sustava?

3. zadatak (2 boda)

Objasnite koja svojstva moraju imati pomoćne varijable kod identifikacije metodom pomoćnih varijabli, te potom nacrtajte izvedbenu blokovsku strukturu ovog načina identifikacije parametara. Objasnite prednosti korištenja ove metode za identifikaciju parametara determinističkog dijela modela sustava u on-line primjenama.

4. zadatak (1 bod)

Napišite izraz za određivanje matrice $H(\hat{n})$ kod testa za određivanje reda modela temeljenog na odnosu determinanata. Objasnite zašto ova matrica postaje približno singularna kada se red modela $\hat{n}$ procijeni većim od reda stvarnog modela sustava n. Kako se procijeni najvjerojatniji red modela metodom odnosa determinanata?

5. zadatak (1 bod)

Objasnite što se provjerava autokorelacijskom funkcijom signala pogreške modela, te nacrtajte oblik te funkcije za pozitivan autokorelacijski test.

6. zadatak (1 bod)

Pod kojim uvjetima vrijedi optimalnost Kalmanova filtra?

7. zadatak (1 bod)

Kakva statitstička svojstva ima inovacija optimalnog Kalmanova filtra? Navedite barem jedan uzrok odstupanja od toga te kako se ono *on-line* može detektirati i ispraviti (skicirati shemu).

8. zadatak (1 bod)

Objasnite princip rada ustaljenog Kalmanova filtra i pod kojim uvjetima ga je opravdano koristiti.

Završni ispit

2. srpnja 2010.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obvezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

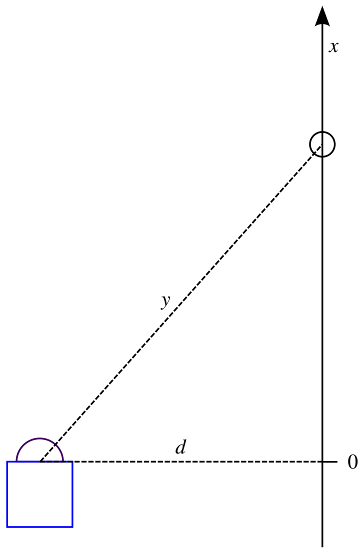
1. zadatak (9 bodova)

Laserskim senzorom mjerimo udaljenost do objekta u slobodnom padu. Dana je jednadžba mjerenja:

$$y_k = h_k(x_k, v_k) = \sqrt{x_k^2 + d^2} + v_k \ ,$$

gdje je $d = 4$ horizontalna udaljenost senzora od vertikalnog pravca po kojem objekt pada, a $v_k \sim N(0, \frac{1}{400})$ mjerni šum (laserski senzor je jako precizan). U koraku k, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $\hat{x}_k^- = 6$. Stvarno stanje je $x_k = 3$, a mjerenje iznosi $y_k = 5$. Unaprijedna (*a priori*) varijanca pogreške estimacije iznosi $P_k^- = 1$.

Obavite dvije iteracije IEKF-a ($N = 1$).



Slika 1: Shematski prikaz laserskog mjerenja udaljenosti

(1 bod) $H_k = \frac{\partial h_k}{\partial x}\big|_{\hat{x}_k} =$ a) $\frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^2+d^2}}$, b) $\frac{\hat{x}_k^2}{2\sqrt{\hat{x}_k^2+d^2}}$, c) $\frac{\hat{x}_k}{2\sqrt{\hat{x}_k^2+d^2}}$, d) $\frac{\hat{x}_k}{\sqrt{\hat{x}_k^2+d^2}}$, e) $\frac{1}{\hat{x}_k}$.

(2 boda) $\hat{x}_{k,1}^+ =$ a) 2.32, b) 3.35, c) 3.87, d) 7.61, e) 6.13 .

(2 boda) $\hat{x}_{k,2}^+ =$ a) 5.66, b) 4.33, c) 2.95, d) 1.89, e) 3.03 .

(1 bod) Poboljšava li se naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja? a) Da. b) Ne.

(1 bod) $P_{k,1}^+ =$ a) 0.0521, b) 0.3267, c) 0.0036, d) 0.0090, e) 0.0060 .

(1 bod) $P_{k,2}^+ =$ a) 0.0060, b) 0.0018, c) 0.0036, d) 0.0120, e) 0.0217 .

(1 bod) Uz pretpostavku kojeg *a priori* stanja mjerenje neće moći popraviti *a posteriori* estimaciju i matricu kovarijance? $\hat{x}_k^- =$ a) 5, b) 3, c) 2, d) -1, e) 0 .

2. zadatak (6 bodova)

Zadan je skalarni sustav:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi varijanci ($Q = \frac{1}{2}$ i $R = \frac{1}{3}$).

Stanje u početnom koraku dano je slučajnom varijablom $x_0^+ \sim N(2, 3)$.

Kalmanovim filtrom izračunajte *a priori* i *a posteriori* matricu kovarijance u koracima $k = 1$ i $k = 2$.

(2 boda) $P_1^- =$ a) 1.25, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{3}$. $P_1^+ =$ a) $\frac{16}{9}$, b) $\frac{7}{3}$, c) $\frac{5}{19}$.

(2 boda) $P_2^- =$ a) $\frac{43}{76}$, b) $\frac{36}{56}$, c) $\frac{36}{53}$. $P_2^+ =$ a) 0.25, b) $\frac{148}{225}$, c) $\frac{43}{205}$.

(2 boda) Izračunajte ustaljenu vrijednost varijance estimacije $P_\infty^+ \approx$ a) 0.21, b) -3.21, c) 1 .

Zadaci: Trekkie, rješenja: lycan

1. Zadatak

Laserskim senzorom mjerimo udaljenost do objekta u slobodnom padu.
(Ima i slika al je nepotrebna :D)
Jednadžba $y_k = h_k(x_k, v_k) = \sqrt{x_k^2 + d^2} + v_k$
d = 4 - horizontalna udaljenost senzora od vertikalnog pravca po kojem objekt pada,
v_k $N(0, \frac{1}{400})$ - mjerni šum (senzor je jako precizan)

U koraku K, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $x_k^- = 6$. Stvarno stanje za $x_k = 3$, mjerenje je $y_k = 5$. Unaprijedna varijanca pogreške iznosi $P_k^- = 1$.
Obaviti dvije iteracije IEKF-a (N=1)

H_k, $x_{k,1}^+$, $x_{k,2}^+$, $P_{k,1}^+$, $P_{k,2}^+$, $x_k^- = ?$

Rješenje:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{400} \\ \hat{x}_{k,0}^+ &= \hat{x}_k^- = 6 \\ P_{k,0}^+ &= P_k^- = 1 \end{aligned}$$

Iz IEKF formula slijedi:

$$\begin{aligned} H_{k,i} &= \frac{\hat{x}_k}{\sqrt{\hat{x}_k^2 + d^2}},\ \hat{x}_k = \hat{x}_{k,i}^+ \\ K_{k,i} &= P_k^- H_{k,i}^T \left(H_{k,i}^2 P_k^- + R\right)^{-1} \\ &= H_{k,i}^T \left(H_{k,i}^2 + \frac{1}{400}\right)^{-1} \\ P_{k,i}^+ &= (1 - K_{k,i}) P_k^- \\ x_{k,i+1}^+ &= \hat{x}_k^- + K_{k,i}\left(y_k - h(x_{k,i}^+ - H_{k,i}(\hat{x}_k^- - \hat{x}_{k,i}^+)\right) \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formule za $i = 0$ i zatim $i = 1$ slijedi

$$\begin{aligned} i &= 0 \\ H_{k,0} &= 0.832 \\ K_{k,0} &= 1.19745 \\ P_{k,0}^+ &= 0.00372 \\ x_{k,1}^+ &= 3.3688 \\ i &= 1 \\ H_{k,1} &= 0.6444 \\ K_{k,1} &= 1.543 \\ P_{k,1}^+ &= 0.00569 \\ x_{k,2}^+ &= 3.03 \end{aligned}$$

Još su bila pitanja (IIRC) da li a posteriori estimacija dobro estimira (očito, pošto teži k 3), te za koju vrijednost $\hat{x}_k^-$ estimacija nema smisla - rješenje je 0, pošto za nula u stvari ništa ne računa (H=0, K=0 itd).

2. Zadatak

Zadan je skalarni sustav: $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + w_k$
$y_k = x_k + v_k$
Gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi varijanci ($Q = 1/2$ i $R = 1/3$).
Stanje u početnom koraku dano je slučajnom varijablom $x_0^+ \ N(2, 3)$.
Kalmanovim izračunajte a priori i a posteriori matricu kovarijance u koracima $K = 1$ i $K = 2$, te P_∞^+.

Rješenje:

$$\phi = \frac{1}{2}$$
$$H = 1$$

Iz $x_0^+ \ N(2, 3)$ slijedi:

$$P_0^+ = 3$$
$$x_0^+ = 2$$

Iz DKF jednadžbi:

$$P_k^- = \frac{P_{k-1}^+}{4} + \frac{1}{2}$$
$$K_k = P_k^-(P_k^- + \frac{1}{3})^{-1}$$
$$P_k^+ = (1 - K_k)P_k^-$$

Dobivamo rješenja:

$$P_1^- = \frac{5}{4}$$
$$K_1 = \frac{15}{19}$$
$$P_1^+ = \frac{5}{19}$$
$$P_2^- = \frac{43}{76}$$
$$K_2 = \frac{129}{205}$$
$$P_2^+ = \frac{43}{205}$$

Za P_∞^+ imamo P_∞^+ i P_∞^-, te K.

$$P^+ = (1-K)P^- \tag{1}$$

$$P^- = \frac{P^+ + 2}{4} \tag{2}$$

$$K = P^-(P^- + R)^{-1} \tag{3}$$

Uvrštavanjem (2) → (3) → (1)

$$3(P^+)^2 + 9P^+ - 2 = 0$$
$$P_1^+ = -3.21$$
$$P_2^+ = 0.21$$

Kovarijanca ne može biti negativna pa se uzima pozitivno rješenje, dakle $P_\infty^+ = 0.21$.

Ponovljeni završni ispit

13. srpnja 2010.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obvezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (8 bodova)

Zadan je skalarni sustav:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + w_k,$$
$$y_k = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi određeni matricama kovarijanci $Q = \frac{1}{2}$ i $R = \begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 0\\ 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$. Stanje u početnom koraku dano je slučajnom varijablom $x_0^+ \sim N(3, \frac{1}{2})$.

(2 boda) Kako se dvama različitim (neovisnim) instrumentima mjeri ista veličina, izračunajte varijancu usrednjenog mjerenja $E\left\{\left[\frac{1}{2}(y_{k_1} + y_{k_2}) - x\right]^2\right\}$ = a) $\frac{32}{15}$, b) $\frac{4}{3}$, c) $\frac{16}{15}$, d) $\frac{8}{15}$, e) $\frac{4}{5}$.

Koristeći informacijski filtar izračunajte *a priori* i *a posteriori* informacijsku matricu u koracima $k = 1$ i $k = 2$.

(3 boda) $\mathcal{I}_1^-$ = a) $\frac{8}{9}$, b) $\frac{3}{5}$, c) $\frac{8}{5}$ $\mathcal{I}_1^+$ = a) $\frac{5}{9}$, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{18}{5}$

(2 boda) $\mathcal{I}_2^-$ = a) $\frac{72}{41}$, b) $\frac{89}{36}$, c) $\frac{43}{51}$ $\mathcal{I}_2^+$ = a) $\frac{113}{41}$, b) $\frac{308}{82}$, c) $\frac{185}{72}$

(1 bod) Izračunajte $\mathcal{I}_1^+$ koristeći usrednjeno mjerenje. Bi li time izgubili dio informacija? a) Da. b) Ne.

2. zadatak (7 bodova)

Laserskim senzorom mjerimo kut φ između lasera i objekta u slobodnom padu. Dana je jednadžba mjerenja:

$$y_k = h_k(x_k, v_k) = \arctan\frac{x_k}{d} + v_k\ ,$$

gdje je $d = 4$ horizontalna udaljenost senzora od vertikalnog pravca po kojem objekt pada, a $v_k \sim N(0, \frac{1}{800})$ mjerni šum (laserski senzor je jako precizan). U koraku k, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $\hat{x}_k^- = 6$. Stvarno stanje je $x_k = 3$, a mjerenje iznosi $y_k = \arctan\frac{3}{4}$. Unaprijedna (*a priori*) varijanca pogreške estimacije iznosi $P_k^- = 1$.

Obavite dvije iteracije IEKF-a ($N = 1$).

(1 bod) $H_k = \frac{\partial h_k}{\partial x}\Big|_{\hat{x}_k}$ = a) $\frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^2+d^2}}$, b) $\frac{\hat{x}_k^2}{\hat{x}_k^2+d^2}$, c) $\frac{d^2}{\hat{x}_k^2+d^2}$, d) $\frac{\hat{x}_k}{\sqrt{\hat{x}_k^2+d^2}}$, e) $\frac{d}{\hat{x}_k^2+d^2}$.

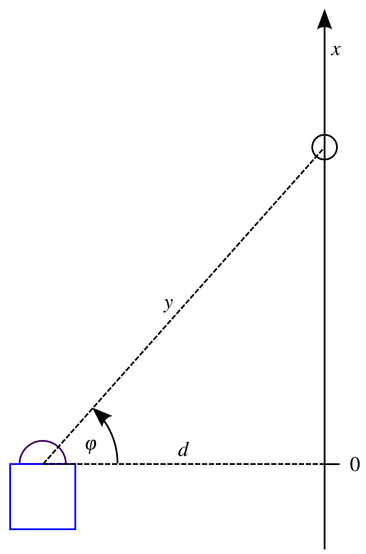
(1 bod) $\hat{x}_{k,1}^+$ = a) 2.32, b) 3.35, c) 2.36, d) 4.61, e) 2.13 .

(2 boda) $\hat{x}_{k,2}^+$ = a) 5.46, b) 3.06, c) 2.95, d) 1.89, e) 6.58 .

(1 bod) Poboljšava li se naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja? a) Da. b) Ne.

(1 bod) $P_{k,1}^+$ = a) 0.1744, b) 0.3267, c) 0.0036, d) 0.2090, e) 0.0060 .

(1 bod) $P_{k,2}^+$ = a) 0.0060, b) 0.0351, c) 0.0036, d) 0.0127, e) 0.1038 .



Slika 1: Shematski prikaz laserskog mjerenja udaljenosti

Završni ispit

1. srpnja 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (4 boda)

Zadan je skalarni sustav:

$$x_{k+1} = x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi nepoznatih varijanci (Q i R). Stoga je za estimaciju stanja korišteno ustaljeno (podoptimalno) pojačanje K_∞.

Izrazite ustaljenu vrijednost P_∞^- kao funkciju ustaljenog Kalmanova pojačanja K_∞ i stvarnih vrijednosti Q i R.

Naputak: Koristite prvi oblik izraza za P_k^+ diskretnog Kalmanova filtra.

$P_\infty^- =$ a) $\frac{RK_\infty^2+Q}{2K_\infty-K_\infty^2}$, b) $\frac{QK_\infty^2+R}{2K_\infty-K_\infty^2}$, c) $\frac{RK_\infty^2+Q}{2-K_\infty}$, d) $\frac{RK_\infty^2-Q}{2K_\infty+K_\infty^2}$, e) $\frac{RK_\infty+Q}{2-K_\infty}$.

2. zadatak (6 bodova)

Razmotrimo skalarni sustav sa sljedećom jednadžbom mjerenja:

$$y_k = x_k^2 + v_k.$$

U koraku k, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $x_k^- = 1$. Stvarno stanje je $x_k = 5$, a mjerenje iznosi $y_k = 25$. Unaprijedna (*a priori*) varijanca pogreške estimacije iznosi $P_k^- = 1$, a varijanca mjernog šuma iznosi $R_k = 4$.

Iterativnim EKF algoritmom odredite $\hat{x}_{k,1}^+$ i $\hat{x}_{k,2}^+$.

(3 boda) $\hat{x}_{k,1}^+ =$ a) 2.3, b) 4.8, c) 3.4, d) 7, e) 6.1 .

(2 boda) $\hat{x}_{k,2}^+ =$ a) 1.2, b) 4.3, c) 3.6, d) 5.2, e) 7.2 .

(1 bod) Poboljšava li se naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja? a) Da. b) Ne.

3. zadatak (5 bodova)

Radioaktivna masa ima vrijeme poluraspada τ sekundi. U svakom koraku uzorkovanja, broj emitiranih čestica x jednak je polovici broja čestica emitiranih u prethodnom koraku. Međutim, u tom procesu postoji određena pogreška uzrokovana pozadinskom radijacijom, koju možemo modelirati šumom w_k nulte očekivane vrijednosti i varijance Q_k ($w_k \sim N(0, Q_k)$). U svakom koraku uzorkovanja, dvama različitim instrumentima je određen broj emitiranih čestica y. Pogreška koju instrumenti prilikom mjerenja rade može se opisati slučajnom varijablom srednje vrijednosti nula i jedinične varijance.

Početna je nesigurnost broja radioaktivnih čestica slučajna varijabla varijance 4 i srednje vrijednosti nula.

Koristeći informacijski filtar izračunajte *a priori* i *a posteriori* informacijsku matricu u koracima $k = 1$ i $k = 2$. Uzmite da je $Q_0 = Q_1 = 2$.

(2 boda) $\mathcal{I}_1^- =$ a) 0.2, b) $\frac{1}{2}$, c) $\frac{1}{3}$. $\mathcal{I}_1^+ =$ a) $\frac{1}{6}$, b) $\frac{7}{3}$, c) $\frac{4}{3}$.

(3 boda) $\mathcal{I}_2^- =$ a) $\frac{28}{59}$, b) $\frac{36}{56}$, c) $\frac{36}{53}$. $\mathcal{I}_2^+ =$ a) 2, b) $\frac{146}{59}$, c) $\frac{171}{56}$.

Završni ispit

1. srpnja 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

---

1. zadatak (4 boda)

Zadan je skalarni sustav:

$$x_{k+1} = x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi nepoznatih varijanci (Q i R). Stoga je za estimaciju stanja korišteno ustaljeno (podoptimalno) pojačanje K_∞.

Izrazite ustaljenu vrijednost P_∞^- kao funkciju ustaljenog Kalmanova pojačanja K_∞ i stvarnih vrijednosti Q i R.

Naputak: Koristite prvi oblik izraza za P_k^+ diskretnog Kalmanova filtra.

$P_\infty^- =$ (a) $\frac{RK_\infty^2+Q}{2K_\infty-K_\infty^2}$, b) $\frac{QK_\infty^2+R}{2K_\infty-K_\infty^2}$, c) $\frac{RK_\infty^2+Q}{2-K_\infty}$, d) $\frac{RK_\infty^2-Q}{2K_\infty+K_\infty^2}$, e) $\frac{RK_\infty+Q}{2-K_\infty}$.

2. zadatak (6 bodova)

Razmotrimo skalarni sustav sa sljedećom jednadžbom mjerenja:

$$y_k = x_k^2 + v_k.$$

U koraku k, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $\hat{x}_k^- = 1$. Stvarno stanje je $x_k = 5$, a mjerenje iznosi $y_k = 25$. Unaprijedna (*a priori*) varijanca pogreške estimacije iznosi $P_k^- = 1$, a varijanca mjernog šuma iznosi $R_k = 4$.

Iterativnim EKF algoritmom odredite $\hat{x}_{k,1}^+$ i $\hat{x}_{k,2}^+$.

(3 boda) $\hat{x}_{k,1}^+ =$ a) 2.3, b) 4.8, c) 3.4, (d) 7, e) 6.1 .

(2 boda) $\hat{x}_{k,2}^+ =$ a) 1.2, b) 4.3, c) 3.6, (d) 5.2, e) 7.2 .

(1 bod) Poboljšava li se naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja? (a) Da. b) Ne.

3. zadatak (5 bodova)

Radioaktivna masa ima vrijeme poluraspada τ sekundi. U svakom koraku uzorkovanja, broj emitiranih čestica x jednak je polovici broja čestica emitiranih u prethodnom koraku. Međutim, u tom procesu postoji određena pogreška uzrokovana pozadinskom radijacijom, koju možemo modelirati šumom w_k nulte očekivane vrijednosti i varijance Q_k ($w_k \sim N(0, Q_k)$). U svakom koraku uzorkovanja, dvama različitim instrumentima je određen broj emitiranih čestica y. Pogreška koju instrumenti prilikom mjerenja rade može se opisati slučajnom varijablom srednje vrijednosti nula i jedinične varijance.

Početna je nesigurnost broja radioaktivnih čestica slučajna varijabla varijance 4 i srednje vrijednosti nula.

Koristeći informacijski filtar izračunajte *a priori* i *a posteriori* informacijsku matricu u koracima $k = 1$ i $k = 2$. Uzmite da je $Q_0 = Q_1 = 2$.

(2 boda) $\mathcal{I}_1^- =$ a) 0.2, b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{3}$. $\mathcal{I}_1^+ =$ a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{7}{3}$, c) $\frac{4}{3}$.

(3 boda) $\mathcal{I}_2^- =$ (a) $\frac{28}{59}$, b) $\frac{36}{56}$, c) $\frac{36}{53}$. $\mathcal{I}_2^+ =$ a) 2, (b) $\frac{146}{59}$, c) $\frac{171}{56}$.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Pri rješavanju zadatka koriste se izrazi diskretnog Kalmanova filtra. Izraz (9-47) iz predavanja.

$$P_k^- = \Phi_{k-1} P_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}.$$

Koristi se prvi oblik izraza za P_k^+:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k.$$

Za ustaljeno stanje i za zadani skalarni sustav:

$$x_{k+1} = x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

izrazi prelaze u:

$$P_\infty^- = P_\infty^+ + Q,$$
$$P_\infty^+ = (1 - K_\infty)^2 P_\infty^- + K_\infty^2 R.$$

Uvrštavanjem drugog izraza u prvi dobivamo:

$$P_\infty^- = (1 - K_\infty)^2 P_\infty^- + K_\infty^2 R + Q,$$
$$P_\infty^- = \frac{K_\infty^2 R + Q}{2K_\infty - K_\infty^2}.$$

Zadatak 2

U prvoj iteraciji izvršimo standardne jednadžbe D-EKF-a. Izrazi od (10-89) do (10-94) predavanja.

$$H_{k,0} = 2\hat{x}_k^- = 2$$
$$K_{k,0} = \frac{P_k^- H_{k,0}}{P_k^- H_{k,0}^2 + R_k} = \frac{1}{4}$$
$$P_{k,1}^+ = P_k^- - K_{k,0} H_{k,0} P_k^- = \frac{1}{2}$$
$$\hat{x}_{k,1}^+ = \hat{x}_k^- + K_{k,0}\left[y_k - (\hat{x}_k^-)^2\right] = 7$$

Slijedi druga iteracija (IDEKF). Izrazi od (10-104) do (10-110) predavanja.

$$H_{k,1} = 2\hat{x}_{k,1}^+ = 14$$
$$K_{k,1} = \frac{P_k^- H_{k,1}}{P_k^- H_{k,1}^2 + R_k} = \frac{7}{100}$$
$$P_{k,2}^+ = P_k^- - K_{k,1} H_{k,1} P_k^- = \frac{1}{50}$$
$$\hat{x}_{k,2}^+ = \hat{x}_k^- + K_{k,1}\left[y_k - (\hat{x}_{k,1}^+)^2 - K_{k,1}(\hat{x}_k^- - \hat{x}_{k,1}^+)\right] = 5.2$$

Očito je da se u ovom slučaju poboljšava naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja.

Zadatak 3

Tekstom opisan sustav glasi:

$$\Phi = \frac{1}{2}$$
$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{I}_0^+ = (P_0^+)^{-1} = \frac{1}{4}$$

Uvrštavanjem u jednadžbe informacijskog filtra (11-25) i (11-26) iz predavanja

$$\mathcal{I}_k^- = \left[\Phi_{k-1}(\mathcal{I}_{k-1}^+)^-1\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}\right]^{-1},$$
$$\mathcal{I}_k^+ = \mathcal{I}_k^- + H^T R^{-1} H,$$

dobiva se:

$$\mathcal{I}_1^- = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 2\right]^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$\mathcal{I}_1^+ = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$
$$\mathcal{I}_2^- = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} + 2\right]^{-1} = \frac{28}{59}$$
$$\mathcal{I}_2^+ = \frac{28}{59} + 2 = \frac{146}{59}$$

Ponovljeni završni ispit

9. srpnja 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (5 bodova)

Zadan je skalarni sustav:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi varijanci (Q i R).
Izračunajte ustaljenu vrijednost varijance estimacije P_∞^+ ako je $Q = \frac{1}{2}$ i $R = \frac{1}{3}$.

2. zadatak (4 boda)

Razmotrimo skalarni sustav sa sljedećom jednadžbom mjerenja:

$$y_k = x_k^3 + v_k.$$

U koraku k, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $\hat{x}_k^- = 1$. Stvarno stanje je $x_k = 3$, a mjerenje iznosi $y_k = 26$. Unaprijedna (*a priori*) varijanca pogreške estimacije iznosi $P_k^- = 4$, a varijanca mjernog šuma iznosi $R_k = 1$.
Iterativnim EKF algoritmom odredite $\hat{x}_{k,1}^+$ i $\hat{x}_{k,2}^+$.
Poboljšava li se naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja?

3. zadatak (6 bodova)

Radioaktivna masa ima vrijeme poluraspada τ sekundi. U svakom koraku uzorkovanja, broj emitiranih čestica x jednak je polovici broja čestica emitiranih u prethodnom koraku. Međutim, u tom procesu postoji određena pogreška uzrokovana pozadinskom radijacijom, koju možemo modelirati šumom w_k nulte očekivane vrijednosti i varijance Q_k ($w_k \sim N(0, Q_k)$). Također, u svakom koraku uzorkovanja dodajemo određenu količinu radioaktivne mase u proces. Kako nismo u mogućnosti precizno dozirati količinu dodane tvari, možemo ju modelirati šumom u_k očekivane vrijednosti u_0 i varijance $\frac{1}{2}$. U svakom koraku uzorkovanja, dvama različitim instrumentima je određen broj emitiranih čestica y. Pogreška koju instrumenti prilikom mjerenja rade može se opisati slučajnom varijablom srednje vrijednosti nula i varijance 4.

Početna je nesigurnost broja radioaktivnih čestica slučajna varijabla varijance 4 i srednje vrijednosti nula.

Koristeći informacijski filtar izračunajte *a priori* i *a posteriori* informacijsku matricu u koracima $k = 1$ i $k = 2$. Uzmite da je $Q_0 = \frac{1}{2}$ i $Q_1 = 1\frac{1}{2}$.