

Međuispit

20. travnja 2017.

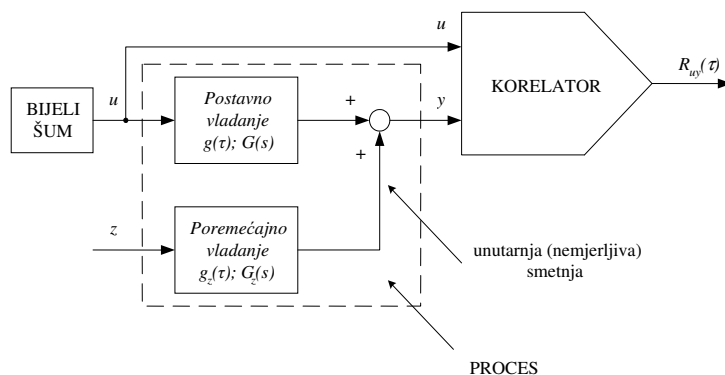
Ime i Prezime:

Matični broj:

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (4 boda)

Proveden je identifikacijski eksperiment kao što je prikazano na Slici 1, te je na izlazu snimljen signal y . Odredite i komentirajte izraz za težinsku funkciju $g(\tau)$ uz pretpostavku da signali u i z ne koreliraju i da je spektralna gustoća snage bijelog šuma $S_{uu}(\omega) = 2$. (Napomena: $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega\tau) d\omega = 2\pi\delta(\tau)$).



Slika 1: Identifikacija procesa pomoću korelacijske analize.

2. zadatak (5 bodova)

Identifikacijskim eksperimentom uz nepostojanje signala smetnje određene su spektralne gustoće snage ulaznog i izlaznog signala sustava

$$S_{uu}(\omega) = \frac{1 + 4\omega^2}{\omega^2 + 25} \text{ i } S_{yy}(\omega) = \frac{25}{\omega^2 + 25}.$$

- (2 boda) Odredite amplitudno-frekvencijsku karakteristiku sustava.
- (3 boda) Odredite vezu između spektralne gustoće snage ulaza i mjerenog izlaza y_m ako se mjereni izlaz dobiva superpozicijom signala y i signala mjernog šuma h koji je bijeli šum spektralne gustoće snage $S_{hh} = 3$.

3. zadatak (4 boda)

- (2 boda) Skicirajte načelnu shemu parametarskog postupka identifikacije.
- (2 boda) Na koji način se u matematičkom modelu nadomješta signal smetnje koji se pojavljuje u sustavu?

4. zadatak (7 bodova)

Parametri sustava estimiraju se rekurzivnom metodom najmanjih kvadrata. Prijenosna funkcija determinističkog dijela modela $G_M(z)$ je prvog reda ($\frac{b_1}{z+a_1}$). U tablici su prikazana mjerenja (u , y) parova podataka od iteracije k do $k+2$.

Iteracija	u	y
k	0.4	1.5
$k+1$	0.9	3.1
$k+2$	1.2	5.6

- a) (2 boda) Uz ARX strukturu modela odredite estimat parametara $\hat{\Theta}(k+2)$ ako je $P(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\hat{\Theta}(k) = \begin{bmatrix} -0.9 & 2.5 \end{bmatrix}^T$.
- b) (2 boda) Pretpostavite sada da je prijenosna funkcija stohastičkog dijela modela opisana s $G_r(z) = \frac{V(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{z+c_1}{z+d_1}$. Napišite regresijski vektor u ovisnosti o ulazima u , izlazima y , poopćenoj pogrešci v i smetnji ε kao i vektor parametara za taj slučaj. (Napomena: $y(k) = \varphi^T(k)\Theta + \varepsilon(k)$)
- c) (2 boda) Za slučaj pod b) izvedite $v(k)$ i $\varepsilon(k)$ kao funkciju ulaza, izlaza, parametara i vlastitih prošlih vrijednosti.
- d) (1 boda) Objasnite ulogu filtra smetnje.

5. zadatak (6 bodova)

Uz pretpostavku da se izmjerene brzine vjetra x_i na nekoj lokaciji ravnaju po Weibullovoj razdiobi:

$$f(x_i; \lambda, k) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-(x_i/\lambda)^k} & x_i \geq 0, \\ 0 & x_i < 0, \end{cases} \quad (1)$$

i uz dana mjerenja $x_i, i = 1, \dots, N$, metodom najveće vjerojatnosti odredite optimalni estimat parametra λ . Pretpostavite da je parametar k poznat.

6. zadatak (4 boda)

- a) (2 boda) Objasnite i matematički opišite kako se red modela procjenjuje testom odnosa determinanata za slučaj kada je djelovanje signala smetnje zanemarivo.
- b) (1 bod) Postupkom identifikacije ARX modela dobiveni su polinomi:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2} \\ B(z^{-1}) &= z^{-1} - 2z^{-2} \end{aligned}$$

Koristeći polinomski test procijenite red dobivenog modela.

- c) (1 bod) Za općeniti ARX model prvog reda $G_M = \frac{b_1 z^{-1}}{1+a_1 z^{-1}}$ odredite $R_{yy}(0)$ pomoću uzoraka autokorelacijske funkcije $R_{yy}(k)$ i međukorelacijske funkcije $R_{uy}(k)$ pri čemu je $k \neq 0$.

7. zadatak (5 bodova)

Snimljeni podaci za estimaciju modela prvog reda pomoću metode pomoćnih varijabli dani su u tablici.

Indeks mjerenja	u	y
1	1	0.1
2	1	0.2
3	-1	0.09
4	1	0.17

Potrebno je odrediti matrice Φ , \mathbf{W} i \mathbf{Y} . Pretpostavljeni oblik modela jest:

$$y(k) = a \cdot y(k-1) + (1-a) \cdot u(k-1).$$

Za formiranje matrice \mathbf{W} koristite model:

$$y_h(k) = c \cdot y_h(k-1) + (1-c) \cdot u(k-1),$$

s parametrom $c = 0.9$. Izlaz pomoćnog modela u trenutku $k = 1$ iznosi 0.

8. zadatak (5 bodova)

Parametarskom metodom identifikacije dobiven je OE model sustava opisan kao:

$$\begin{aligned} B(z^{-1}) &= 1.5z^{-1} + z^{-2} \\ F(z^{-1}) &= 1 - 1.8z^{-1} + 0.81z^{-2} \end{aligned}$$

- a) Skicirajte blokovsku shemu OE modelske strukture.
- b) Napišite jednađbu diferencija identificiranog modela.
- c) Izračunajte vrijednost izlaznog signala modela $y(3)$ ako je pobuda sustava $u(k)$ jedinična odskočna funkcija, svi izlazi za $k \leq 0$ su 0 i ako je vrijednosti šuma u trenutku $\epsilon(3) = -0.2$.

RJEŠENJA:**ZADATAK 1**

$$g(\tau) = \frac{1}{2}R_{uy}(\tau)$$

ZADATAK 2

a)

$$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{1+4\omega^2}}$$

b) Nije moguće jednoznačno odrediti fazno-frekvencijsku karakteristiku sustava. Za utvrđivanje prijenosne funkcije trebali bismo poznavati fizikalna svojstva sustava (npr. je li sustav minimalno fazni).

$$G(s) = \frac{\pm 5}{1 \pm 2s}$$

ZADATAK 3

Pogledaj predavanja.

ZADATAK 4

a) $\hat{\theta}(k+2) = \begin{bmatrix} -1.1103 \\ 2.5463 \end{bmatrix}$

b) $\varphi = [-y(k-1) \quad u(k-1) \quad \varepsilon(k-1) \quad -v(k-1)]^\top, \theta = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1]^\top$

c) $v(k) = y(k) + a_1 y(k-1) - b_1 u(k-1)$
 $\varepsilon(k) = -c_1 \varepsilon(k-1) + y(k) + a_1 y(k-1) - b_1 u(k-1) + d_1 (y(k-1) + a_1 y(k-2) - b_1 u(k-2))$

d) Filtar smetnje koristi se kako bi se poopćena pogreška modela $v(k)$ svela na bijeli šum $\varepsilon(k)$.

ZADATAK 5

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^k \right)^{\frac{1}{k}}$$

ZADATAK 6

a) Pogledaj predavanja.

b) Transformacijom modela na determinističku i stohastičku komponentu postaje očito kako nije moguće umanjiti red modela. Prema tome, red modela ostaje 2.

c) Korištenjem definicije autokorelacijske funkcije i rekurzivne jednadžbe zadanog ARX modela proizlazi

$$R_{yy}(0) = -a_1 R_{yy}(1) + b_1 R_{uy}(1).$$

ZADATAK 7

$$Y = \begin{bmatrix} 0.2 & -1 \\ 0.09 & -1 \\ 0.17 & +1 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ 0.2 & -1 \\ 0.09 & +1 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0.1 & -1 \\ 0.19 & +1 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 8

- a) Pogledaj predavanja.
- b) $y(k) = 1.8y(k-1) - 0.81y(k-2) + 1.5u(k-1) + u(k-2) + \varepsilon(k)$
- c) Za OE strukturu vrijedi $y(k) = y_M(k) + \varepsilon(k)$, gdje je y_M odziv determinističkog dijela modela. Možemo jednostavno izračunati $y_M(3) = 10.6$, iz čega slijedi $y(3) = 10.4$.