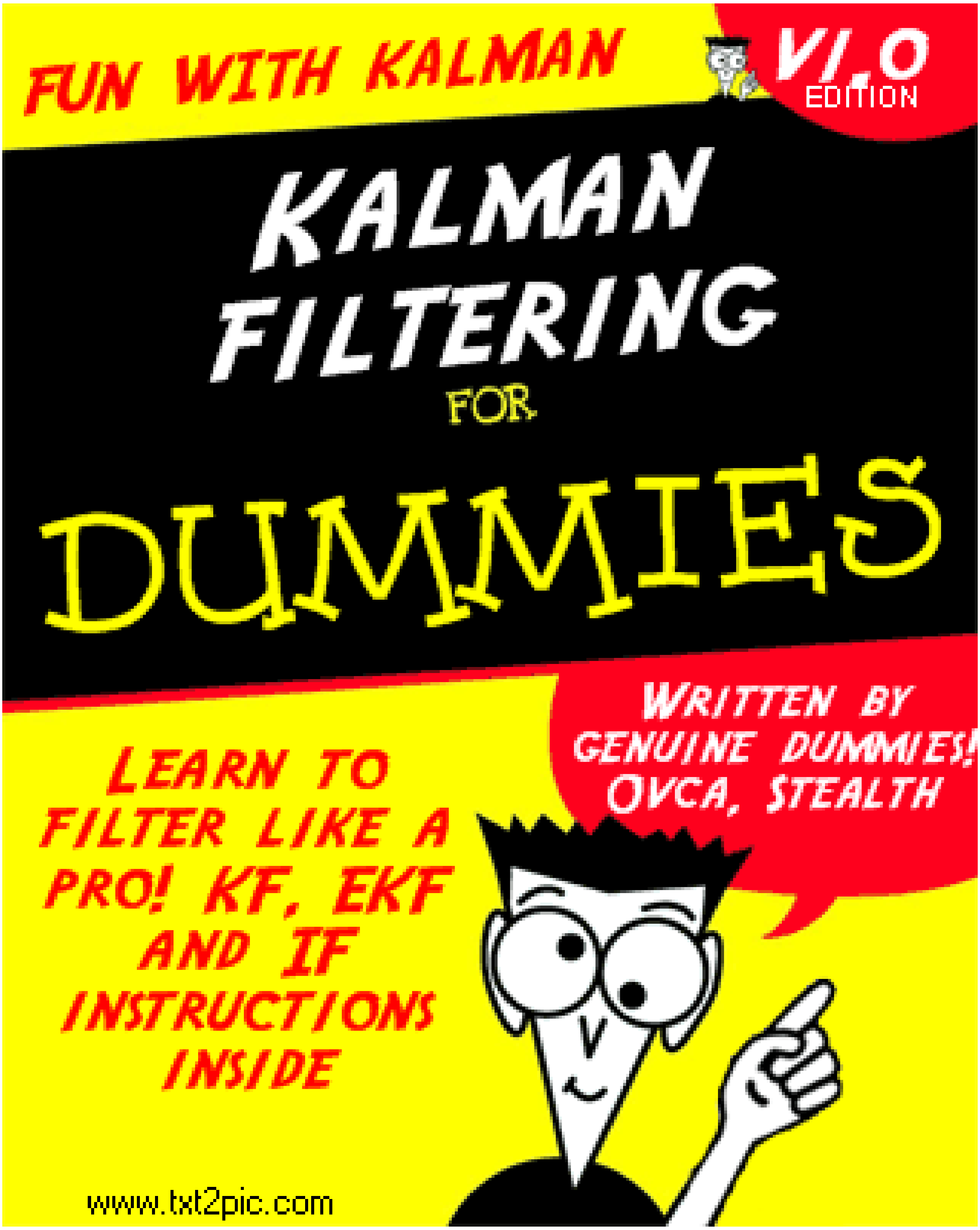
FUN WITH KALMAN
V1.0
EDITION
KALMAN
FILTERING
FOR
DUMMIES
WRITTEN BY
GENUINE DUMMIES!
OVCA, STEALTH
LEARN TO
FILTER LIKE A
PRO! KF, EKF
AND IF
INSTRUCTIONS
INSIDE
www.txt2pic.com

Sadržaj

1a. Poanta računanja EKFa

EKF je proširena verzija Kalmanovog Filtera za slučaj da imamo nelinearne odnose u bilo kojoj od početnih jednadžbi sustava. U tom slučaju moramo koristiti malo drukčije jednadžbe i računati dvije posebne matrice (koje lineariziraju taj sustav).

1b. Rješavanje EKF za skalarni sustav

Početne jednadžbe koje koristimo:
jednadžba sustava: $x_k = x_{k-1}$
jednadžba mjerenja $y_k = \sqrt{x_k} \cdot (1 + v_k)$ $v_k \sim \mathbb{N}(0, R)$

ovdje je x_{k-1} prošlo stanje, x_k trenutno stanje, a v_k mjerni šum.

Opće jednažbe sustava su:

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + \Gamma u_{k-1} + w_{k-1}$$
$$y = H_k x_k + v_k$$

gdje je w_k procesni šum, v_k mjerni šum.

Ako usporedimo opću i našu jednadžbu sustava, vidimo da nam je $\Phi = 1$, a da procesnog šuma nema, pa je $\Gamma = 0$, dakle i $Q = 0$ jer je Q standardna devijacija procesnog šuma.

Za rješavanje EKF potrebno nam je 5 izraza: za P_k^- , x_k^- , x_k^+ , K_k i P_k^+

$$1.)\ P_k^- = \Phi P_{k-1}^+ \Phi^T + Q_{k-1} \qquad \textit{(9-32)}$$

Ovo je *osvježavanje kovarijance* estimacije stanja u *vremenu* (između trenutaka $(k-1)^+$ i k^-)
Za naš slučaj smo rekli da je $\Phi = 1$ i $Q = 0$ i po tom dobivamo:
$P_k^- = P_{k-1}^+$

$$2.)\ \hat{x}_k^- = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}^+ + \Gamma_{k-1} u_{k-1} \qquad \textit{(9-32)}$$

Ovo je *osvježavanje estimacije stanja u vremenu* (između trenutaka $(k-1)^+$ i k^-)
Za naš slučaj smo rekli da je $\Phi = 1$ i $\Gamma = 0$ pa je zbog tog
$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1}^+$

$$3.)\ K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + M_k R_k M_k^T)^{-1} \qquad (10\text{-}78)$$

Ovo je *Kalmanovo pojačanje* koje određuje koliki udio u estimaciji trebamo dati *inovaciji. Inovacija* je razlika između pravog mjerenja i procijenjene vrijednosti mjerenja:

$\tilde{y} = y_k - H_k \hat{x}_k^-$ gdje je y_k pravi izlaz, $\hat{x}_k^-$ je procjena u kojem stanju ćemo biti (prije nego smo izmjerili izlaz, dakle apriorno!), a H_k je objašnjen dolje. Kalmanovo pojačanje će nam koristiti za daljnje izračune.
Ovdje nam trebaju dvije pomoćne matrice (u ovom slučaju, skalari jer su 1×1 dimenzija).

$$H_k = \frac{\partial y_k}{\partial x_k}$$
$$M_k = \frac{\partial y_k}{\partial v_k}$$

Po jednadžbama koje imamo dobijemo:

$H_k = \frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^-}}$ i s time sad idemo u jednadžbu K_k . Posao nam je malo lakši jer su sve
$M_k = \sqrt{\hat{x}_k^-}$
vrijednosti skalari (transponiranje i inverzi nisu komplicirani) pa dobivamo:

$$K_k = P_k^- \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^-}}\right)^T \left[\left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^-}}\right) P_k^- \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^-}}\right)^T + \left(\sqrt{\hat{x}_k^-}\right) \cdot R \cdot \left(\sqrt{\hat{x}_k^-}\right)^T\right]^{-1}$$

Kako ovo nisu vektori nego skalari, sve što je transponirano je zapravo identično samom sebi pa jke konačni račun za K_k jednak:

$$K_k = P_k^- \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\hat{x}_k^-}}\right) \cdot \left[\frac{1}{4\hat{x}_k^-} P_k^- + \hat{x}_k^- \cdot R\right]^{-1}$$

4.) $\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (y_k - H_k \hat{x}_k^-)$ (9-33)

Ovo je *osvježena estimacija stanja nakon mjerenja (aposteriorno)* i ovdje se vidi kako mi zapravo koristimo *inovaciju:* gledamo u kojem smo stanju nakon mjerenja ovisno o tome što smo predvidjeli (to je $\hat{x}_k^-$), ovisno o inovaciji ($\tilde{y} = y_k - H_k x_k^-$) te Kalmanovom pojačanju kao mjeri koliko inovaciji vjerujemo.

5.) $P_k^+ = (1 - K_k H_k) P_k^-$ (9-47 zadnja)

Ovo je *naknadna kovarijanca estimacije sustava* i ovo je treći i računski najjednostavniji oblik.

Da bismo ovakav zadatak izračunali do kraja, morali bismo imati zadano stanje sustava u trenutku k=0 i njegovu početnu kovarijancu. Kako to nemamo, zadatku je tu kraj.

2a. Poanta računanja IFa

Kod standardnog ili proširenog Kalmana koristi je matrica P koja pokazuje nepovjerenje (nesigurnost) estimacije stanja. U slučaju da broj mjerenih veličina (*r*) prelazi broj varijabli stanja (*n*) tj. ako

r >> n

bolje nam je koristiti Informacijski Filter (IF) kod kojeg koristimo matricu I. U trenutku kad je potrebno računati inverz matrice, ta matrica će biti reda n×n umjesto r×r (a upravo smo rekli da je r >> n, dakle postoji velika ušteda pri računanju).

2b. Rješavanje Ifa

U zadatku nam je zadan sustav idućim jednadžbama:

$$x_k = \frac{1}{2} x_{k-1} + w_{k-1} \qquad w_k \sim \mathbb{N}(0, Q)$$
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_k + v_k \qquad v_k \sim \mathbb{N}(0, I)$$

Trebamo izračunati informacijsku matricu do 2. koraka ako znamo da se varijanca šuma mijenja sa ovim vrijednostima:

$$Q_0 = 1, Q_1 = \frac{5}{4}$$

Informacijska matrica inače funkcionira kao inverz matrice kovarijance stanja, tj.
$I = P^{-1}$
Dodatne stvari koje znamo su $\Phi = 1/2$ i $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$
Apriorna matrica I_k^- računa se kao

$$I_k^- = Q_{k-1}^{-1} - Q_{k-1}^{-1} \Phi_{k-1} (I_{k-1}^+ + \Phi_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} \Phi_{k-1})^{-1} \Phi_{k-1}^T Q_{k-1}^{-1} \qquad (11\text{-}27)$$

Dakle, za početak računamo I_1^- koji glasi:

$$\begin{aligned} I_1^- &= Q_0^{-1} - Q_0^{-1} \Phi_0 (I_0^+ + \Phi_0^T Q_0^{-1} \Phi_0)^{-1} \Phi_0^T Q_0^{-1} \\ &= 1 - 1 \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \\ &= 4/5 \end{aligned}$$

I sad tu vrijednost trebamo osvježiti u vremenu. Aposteriorni I_k^+ računa se kao

$I_k^+ = I_k^- + H_k^T R_k^- H_k$, a kako imamo matrice uvrštavamo ovako:

$$I_1^+ = \frac{4}{5} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{4}{5} + 2 = \frac{14}{5}$$

Po istoj logici dobivamo i vrijednosti za korak 2 (apriornu i aposteriornu).

$$I_2^- = \frac{56}{75}$$

$$I_2^+ = \frac{56}{75} + 2 = \frac{206}{75}$$