Prvi međuispit

30. travnja 2013.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (5 bodova)

Slučajni proces zadan je s

$$X(t) = cos(\omega t + \Phi),$$

pri čemu je Φ slučajna varijabla opisana uniformnom razdiobom $\Phi \sim U[0, 2\pi]$. Slučajna varijabla ne mijenja vrijednosti za $t > 0$.

a) Izračunajte očekivanje slučajnog procesa $E[X(t)]$.

b) Izračunajte autorelacijsku funkciju slučajnog procesa $R_{XX}(t_1, t_2)$.

c) Zadovoljava li slučajni proces uvjete stacionarnosti? Objasnite.
Napomena: $cos(x) \cdot cos(x + y) = \frac{1}{2}(cos(2x + y) + cos(y))$.

2. zadatak (4 boda)

Spektralna gustoća snage obojenog šuma x opisana je izrazom

$$S_{xx} = \begin{cases} 3 \text{ za } 0 < |\omega| < 2\pi, \\ 0 \text{ izvan pojasa.} \end{cases}$$

a) Izvedite autokorelacijsku funkciju obojenog šuma $R_{xx}(\tau)$.

b) Izračunajte srednju snagu obojenog šuma $\bar{P}_x$.

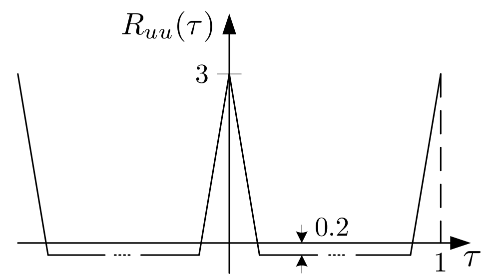
3. zadatak (7 bodova)

Autokorelacijska funkcija R_{uu} PRBS signala u prikazana je na slici 1.

a) Odredite parametre PRBS signala c, Δt, N.

b) Zadani PRBS signal realiziran je korištenjem posmačnog registra i logičke funkcije XOR nad 2 najniža bita registra. Uz početno stanje posmačnog registra 0101 skicirajte signal u za 3 uzastopna posmaka.

c) Uz pretpostavku dovoljno velikog iznosa N, dovoljno malog Δt te nekoreliranosti šuma procesa s upravljačkim signalom u izvedite izraz za međukorelacijsku funkciju $R_{uy}(\tau)$ korištenjem korelacijske analize, pri čemu je y izlazni signal procesa. Na temelju dobivenog izraza objasnite zašto je za identifikaciju važno da je period PRBS signala T dovoljno velik.



Slika 1: Autokorelacijska funkcija PRBS signala

4. zadatak (4 boda)

Proteklo vrijeme između dva uzastopna kvara komponente može se opisati eksponencijalnom razdiobom

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0,$$

pri čemu se s λ modelira učestalost kvara i s $t = 0$ je označen trenutak puštanja komponente u pogon. Ako su iz servisnih podataka poznata vremena ispravnog funkcioniranja komponente prije pojave kvara $\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$, koji su međusobno nezavisni, korištenjem ML metode odredite optimalan estimat parametra λ.

5. zadatak (8 bodova)

Izlaz iz procesa može se opisati dinamičkim modelom

$$y(k) = ay(k-1) + bu(k-1) + v(k), \tag{1}$$

pri čemu je u ulaz, y izlaz, a v pogreška modela. Poznato je da pogreška modela v korelira s ulaznim podacima

$$v(k) = 0.3u(k) + \varepsilon(k), \tag{2}$$

pri čemu je $\varepsilon(k)$ signal bijelog šuma. Prikupljeni identifikacijski podaci (u, y) prikazani su u tablici 1.

Tablica 1: Parovi (u, y) identifikacijskih podataka

k	u(k)	y(k)
0	-1	1
1	1	0.76
2	-1	0.86
3	-1	0.02
4	-1	-0.72
5	1	-0.85

a) Korištenjem metode najmanjih kvadrata i dostupnih identifikacijskih podataka estimirajte parametre modela $\hat{a}$ i $\hat{b}$.

b) Jesu li procijenjeni parametri iz a podzadatka konzistentni? Objasnite.

c) Razmatra se identifikacija procesa IV metodom pri čemu se ne koristi (2). Ako se za filtriranje mjernih podataka koristi model

$$y_H(k) = u(k-1),$$

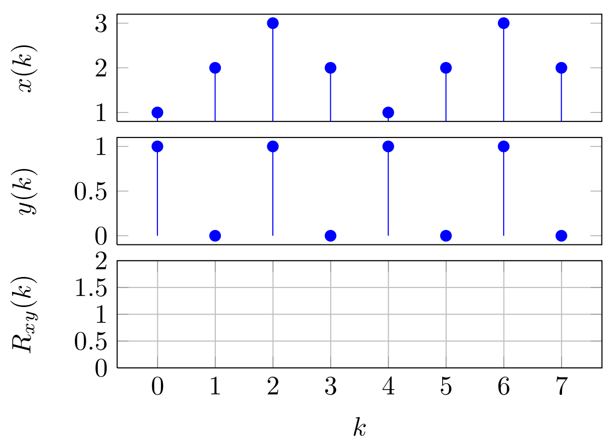
odredite matricu pomoćnih varijabli W, regresijsku matricu Φ i vektor izlaza Y. Napišite izraz za identifikaciju parametera procesa IV metodom.

6. zadatak (4 boda)

Na slici 2 su prikazani diskretni periodični signali $x(k)$ i $y(k)$.

a) Na slici 2 nacrtajte međukorelacijsku funkciju $R_{xy}(k)$.

b) Koliko iznosi $R_{yx}(-317)$?



Slika 2: Signali $x(k)$, $y(k)$ i njihova međukorelacijska funkcija $R_{xy}(k)$

7. zadatak (4 boda)

Identifikacijskim eksperimentom određene su spektralne gustoće snage ulaznog i izlaznog signala procesa

$$S_{uu}(\omega) = \frac{4 + 25\omega^2}{\omega^2 + 9} \text{ i } S_{yy}(\omega) = \frac{16}{\omega^2 + 9}.$$

a) Odredite amplitudnu frekvencijsku karakteristiku procesa.

b) Ako je poznato da je proces stabilan i pozitivnog pojačanja, odredite spektralnu gustoću snage S_{uy}.

8. zadatak (4 boda)

Matematički model procesa zadan je rekurzivnom jednadžbom

$$y(k) = py(k-1) + (1-p)u(k-1) + \varepsilon(k) - 0.2\varepsilon(k-1).$$

a) Prepoznajte strukturu matematičkog modela i odredite njene polinome.

b) Parametar p se sporo mijenja u vremenu te se novopristigli podatci otežavaju konstantnim faktorom zaboravljanja ρ. Ako se 3. najnoviji uzorak otežava faktorom 0.9703 a najstariji uzorak faktorom 0.3, odredite broj prikupljenih uzoraka.

Međuispit

24. travnja 2012.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Pri neposrednom određivanju frekvencijske karakteristike procesa $G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = R(\omega) + jI(\omega)$ korelacijskom analizom:

a) Koji ispitni signal $u(t)$ se koristi i koja je njegova autokorelacijska funkcija?

b) Izvedite izraz za međukorelacijsku funkciju $R_{uy}(\tau)$.

c) Izrazite $R(\omega)$ i $I(\omega)$ u ovisnosti o $R_{uy}(\tau)$.

2. zadatak (6 bodova)

Diskretni slučajni binarni signal (DRBS) je određen intervalom uzorkovanja $\Delta t = 0.2[s]$ i amplitudom $c = 2$.

a) Nacrtajte jedan mogući odziv DRBS signala $u(t)$ u vremenu t $\in [0, 1]$. Jasno naznačite vrijednosti signala u točkama diskontinuiteta.

b) Nacrtajte autokorelacijsku funkciju DRBS signala $R_{uu}(t)$ kada trajanje signala teži u beskonačnost.

c) Uz ispitni signal definiran zadatkom mjerenjem je utvrđena međukorelacijska funkcija $R_{uy}(\tau) = e^{-2\tau}\cos(\tau)S(\tau)$, gdje je $S(\tau)$ jedinična skokovita funkcija. Odredite težinsku funkciju procesa.

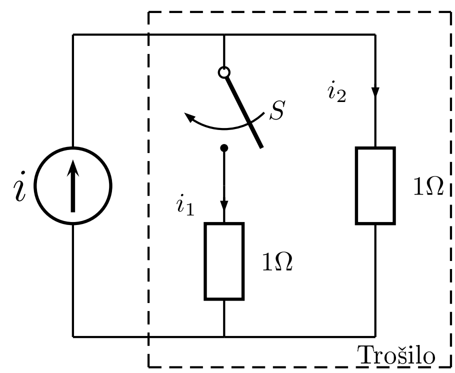
d) Zašto u praksi pseudoslučajni (deterministički) binarni signal ima prednost pred signalom sa stohastičkim svojstvima?

3. zadatak (5 bodova)

Zadan je električni krug na slici 1. Struja strujnog izvora je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 5]\,A$. Vjerojatnost da je sklopka uključena $P(S = 1)$ iznosi 0.4. Odredite:

a) očekivanje utroška snage $E[P_T]$ na trošilu.

b) kovarijancu utroška snage $E[(P_T - \mu_{P_T})^2]$, $\mu_{P_T} = E[P_T]$.



Slika 1: Električni krug

4. zadatak (2 boda)

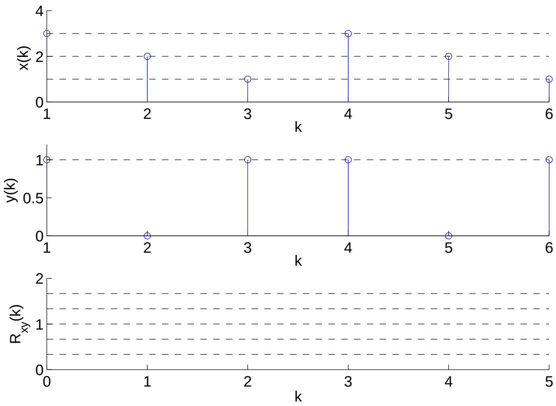
Izračunajte spektralnu gustoću snage $S_{xx}(\omega)$ signala $x(t)$ ako je njegova autokorelacijska funkcija $R_{xx}(\tau) = e^{-|\tau|}$.

5. zadatak (4 boda)

Na slici 2 su prikazani diskretni periodični signali $x(k)$ i $y(k)$.

a) Na slici 2 nacrtajte međukorelacijsku funkciju $R_{xy}(k)$.

b) Koliko iznosi $R_{yx}(-47)$?



Slika 2: Signali $x(k)$, $y(k)$ i njihova međukorelacijska funkcija $R_{xy}(k)$

6. zadatak (4 boda)

Identifikacijskim eksperimentom određene su spektralne gustoće snage ulaznog i izlaznog signala procesa:

$$S_{uu}(\omega) = \frac{1+9\omega^2}{\omega^2+16} \text{ i } S_{yy}(\omega) = \frac{25}{\omega^2+16}.$$

a) Odredite amplitudnu frekvencijsku karakteristiku procesa.

b) Ako je poznato da je proces stabilan i pozitivnog pojačanja, odredite njegovu faznu frekvencijsku karakteristiku.

7. zadatak (6 bodova)

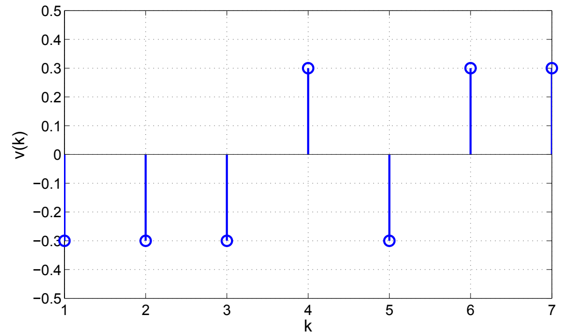
Korelacijskom analizom estimira se težinska funkcija nekog procesa. Pritom je uočeno da pogreška modela $v(k)$ nije bijeli šum te je potrebno projektirati filtar smetnje (slika 3):

$$G^*{}_r(z) = \frac{1}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}}.$$

Odredite koeficijente filtra minimizirajući $\sum_i \varepsilon_i^2$ na odsječku signala $v(k)$ danog slikom 4.

$$V(z) \longrightarrow \boxed{G^*{}_r^{-1}(z)} \longrightarrow \varepsilon(z)$$

Slika 3: Inverz filtra smetnje



Slika 4: Ulazni signal

8. zadatak (7 bodova)

Parametri sustava estimiraju se rekurzivnom metodom najmanjih kvadrata. Prijenosna funkcija determinističkog dijela modela $G_M(z)$ je prvog reda $(\frac{b_1}{z+a_1})$. U tablici su prikazana mjerenja $(u,\, y)$ parova podataka od iteracije k do $k+2$.

Iteracija	u	y
k	1	1.3
$k+1$	1.2	2.9
$k+2$	1.4	5.1

a) Uz ARX strukturu modela odredite estimat parametara $\hat{\Theta}(k+2)$ ako je $P(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\hat{\Theta}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 2.4 \end{bmatrix}^T$.

b) Pretpostavite da je prijenosna funkcija stohastičkog dijela modela opisana s $G_r(z) = \frac{V(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{z+c_1}{z+d_1}$. Napišite regresijski vektor u ovisnosti o ulazima u, izlazima y, poopćenoj pogrešci v i smetnji ε kao i vektor parametara za taj slučaj. (*Napomena:* $y(k) = \varphi^T(k)\Theta + \varepsilon(k)$)

c) Izvedite $v(k)$ kao funkciju ulaza, izlaza, te parametara.

d) Objasnite ulogu filtra smetnje.

Prvi međuispit

25. ožujka 2011.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

---

1. zadatak (6 bodova)

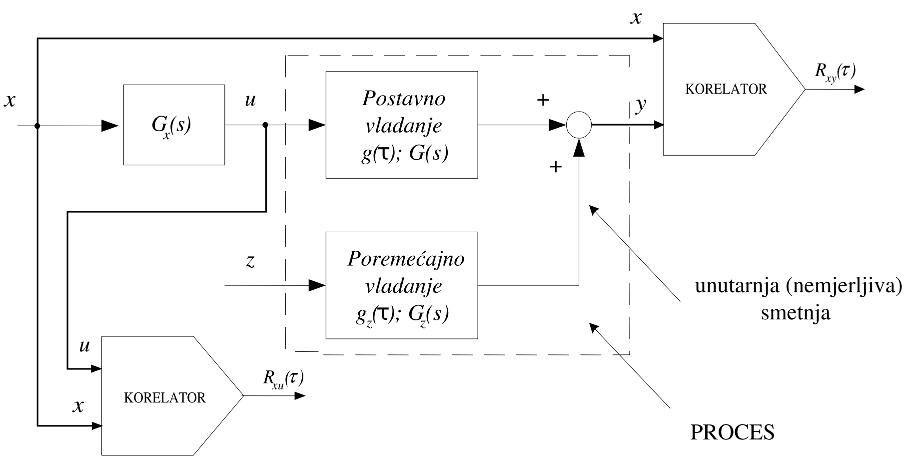
Proveden je identifikacijski eksperiment linearnog sustava prijenosne funkcije $G(s)$ kao što je prikazano na slici 1, te su snimljene međukorelacijske funkcije signala postavne veličine i izlaza sustava R_{xy} te između signala postavne veličine i ulaza sustava R_{xu}.

Izvedite frekvencijsku karakteristiku sustava $G(j\omega)$ iz minimalnog broja međukorelacijskih mjerenja uz sljedeće pretpostavke:

a) signali u i z koreliraju, a signali x i z ne koreliraju.

b) signali u i z ne koreliraju.

c) Ako se u slučaju b) na ulaz procesa u direktno dovodi postavna veličina x, tj. $G_x(s) = 1$, koja je bijeli šum spektralne gustoće snage $S_{xx}(\omega) = 2$, a $R_{xy}(\tau) = sin(\tau - 1)e^{-|\tau|+1}$, čemu je jednaka težinska funkcija procesa?



Slika 1: Identifikacijski eksperiment

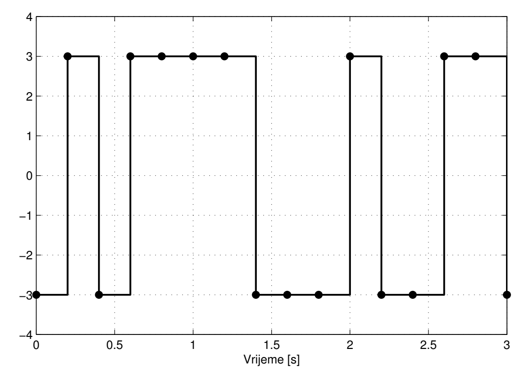
2. zadatak (3 boda)

Na slici 2 prikazan je jedan period PRBS signala (m-impulsni slijed).

a) Odredite parametre PRBS signala c i Δt.

b) Nacrtajte autokorelacijsku funkciju danog PRBS signala na intervalu $\tau \in [-4 \text{ s}, 4 \text{ s}]$.

c) Kako je moguće realizirati zadani PRBS signal korištenjem posmačnog registra i funkcije ISKLJUČIVO ILI? Nacrtajte prijedlog rješenja i odredite početne uvjete u posmačnom registru za realizaciju konkretnog PRBS signala sa slike 2 ako se funkcija ISKLJUČIVO ILI obavlja između 2 najniža bita u posmačnom registru.

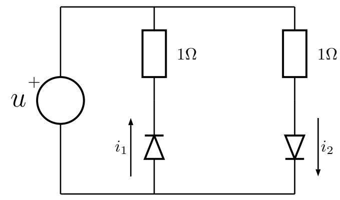


Slika 2: PRBS signal

3. zadatak (4 boda)

Zadan je električni krug na slici 3. Napon izvora u je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[-10\text{ V}, 10\text{ V}]$. Pad je napona na diodama zanemariv. Odredite:

a) očekivanje napona izvora u,
b) očekivanje struja i_1 i i_2.
c) očekivanje umnoška struja $i_1\ i_2$. Jesu li struje korelirane?

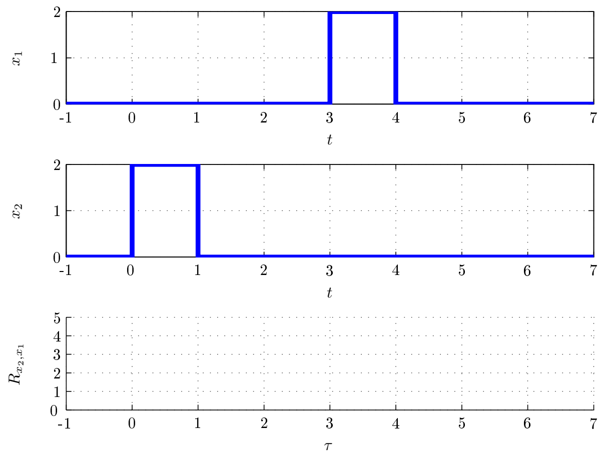


Slika 3: Električni krug

4. zadatak (2 boda)

Skicirajte na donjem grafu slike 4 međukorelacijsku funkciju R_{x_2,x_1} pravokutnih impulsa $x_1(t)$ i $x_2(t)$.

Napomena: $R_{x_2,x_1}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x_2(t)x_1(t+\tau)\mathrm{d}t$



Slika 4: Međukorelacija

5. zadatak (2 boda)

Neka je X slučajna varijabla, a $Y(t) = X cos(t)$ slučajni proces. Nađite očekivanje od $Y(t)$.

6. zadatak (2 boda)

Identifikacijskim eksperimentom određene su spektralne gustoće ulaznog i izlaznog signala sustava, $S_{uu} = \dfrac{1+4\omega^2}{\omega^2+25}$ i $S_{yy} = \dfrac{9}{\omega^2+25}$. Odredite amplitudno frekvencijsku karakteristiku sustava.

7. zadatak (2 boda)

Parametarskom metodom identifikacije dobiven je ARMAX model sustava opisan polinomima:

$$\begin{aligned} A\left(z^{-1}\right) &= 1-2z^{-1}+z^{-2} \\ B\left(z^{-1}\right) &= z^{-1}+5z^{-2} \\ C\left(z^{-1}\right) &= 1+z^{-2} \end{aligned}$$

a) Skicirajte blokovsku shemu ARMAX modelske strukture.
b) Napišite jednadžbu diferencija identificiranog modela.

8. zadatak (5 bodova)

Pretpostavimo da metodom najmanjih kvadrata želimo estimirati otpor R neoznačenog otpornika iz n neovisnih zašumljenih mjerenja pada napona na njemu u_k te struje kroz njega i_k:

$$u_k = Ri_k + \varepsilon_k, k = 1, 2, \ldots, n$$
$$E\left[\varepsilon_k \varepsilon_l\right] = \delta_{kl} \text{ za } \forall k, l.$$

a) Napišite sustav jednadžbi mjerenja u matričnom obliku: $\underline{u} = \underline{\varphi}\ \underline{R} + \underline{\varepsilon}$.
b) Koji kriterij $J(\underline{\varepsilon})$ minimiziramo u ovom slučaju?
c) Izvedite optimalni estimat otpora $\hat{R}$.

Napomena: $\dfrac{\partial(\underline{x}^T\underline{H}\ \underline{x})}{\partial \underline{x}} = 2\underline{x}^T\underline{H}$ i $\dfrac{\partial(\underline{x}^T\underline{H})}{\partial \underline{x}} = \underline{H}^T$.

Drugi međuispit

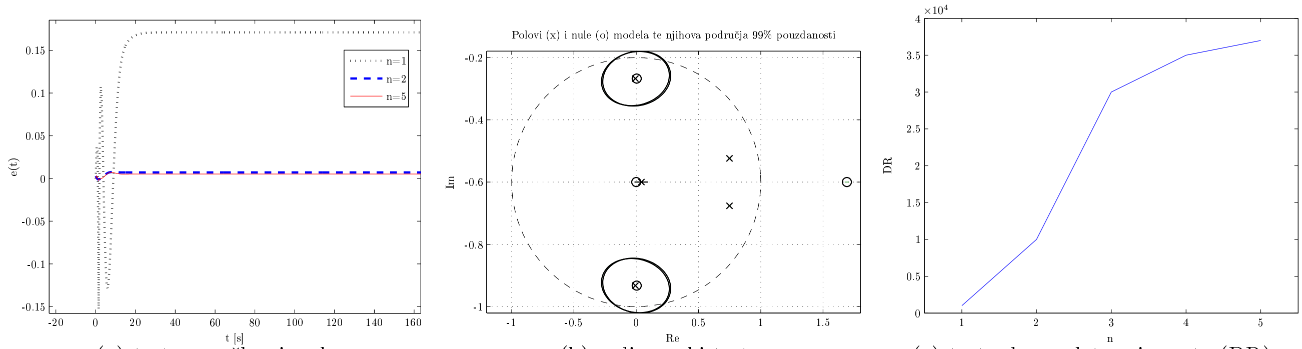
6. svibnja 2011.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (3 boda)

Koristeći testove navedene na Slici 1, procijenite red dobivenog modela n, posebno za svaki od slučajeva a), b) i c), te navedite obrazloženje za takvu procjenu.



(a) test pogreške signala (b) polinomski test (c) test odnosa determinanata (DR)

Slika 1: Procjena reda identificiranog modela.

2. zadatak (3 boda)

a) (*1 bod*) Koja je temeljna razlika između metode najmanjih kvadrata (LS) i metode pomoćnih varijabli (IV) s obzirom na pretpostavke o signalu pogreške modela?

b) (*1 bod*) Zbog čega je kod LS metode potrebno, a kod IV nije potrebno, identificirati stohastički dio modela procesa?

c) (*1 bod*) Koje uvjete mora zadovoljavati matrica pomoćnih varijabli?

3. zadatak (5 bodova)

Pretpostavimo da estimiramo sporo promijenjivi parametar b diskretnog procesa 1. reda prijenosne funkcije $G(z) = \dfrac{1-b}{z-b}$ otežanom LS metodom. Očekivano vrijeme u kojem se parametar procesa značajnije mijenja je 20 s, a vrijeme uzorkovanja $T = 200$ ms.

a) (*1 bod*) Ako koristimo konstantan faktor zaboravljanja ρ, a kao mjeru zaboravljanja asimptotsku duljinu uzorka, odredite iznos ρ.

b) (*1 bod*) Neka se identifikacija provodi na 10 uzoraka. Kojom će se vrijednošću otežavati uzorak u trenutku $n = 5$?

c) (*3 boda*) Optimalni estimat $\hat{b}$ prema otežanoj LS metodi zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$\Phi^T(N)Z^T(N)Z(N)\Phi(N)\hat{b} = \Phi^T(N)Z^T(N)Z(N)Y(N).$$

Čemu su pritom jednaki $\Phi(N)$, $Y(N)$ i $Z(N)$?

4. zadatak (5 bodova)

Mali Ivica želi estimirati vjerojatnost p da njegova šnita kruha pri ispadanju padne na namazanu stranu te izvodi N pokusa bacanja kruha. Metodom najveće vjerojatnosti, odredite optimalni estimat p za dani proces, ako Ivica zna da je razdioba kojoj proces podliježe Bernoullijeva opisana gustoćom razdiobe:

$$f(x, p) = p^x(1-p)^{1-x},$$

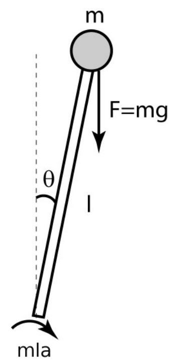
gdje x može poprimiti vrijednosti 0 ili 1.

5. zadatak (10 bodova)

Za sustav inverznog njihala (Slika 2) opisan sljedećom linearnom diferencijalnom jednadžbom ($sin\Theta \approx \Theta$)

$$J\frac{d^2\Theta}{dt^2} = mgl\Theta + mla,$$

gdje je Θ otklon njihala od vertikalne osi, m masa njihala, a l duljina njihala, J moment tromosti njihala oko osi rotacije, g gravitacijsko ubrzanje te a akceleracija inercijske sile na njihalo,



Slika 2: Inverzno njihalo

potrebno je:

a) (*1 bod*) prikazati sustav u prostoru stanja ako su varijable stanja otklon njihala od ravnotežne točke Θ te brzina njegove promjene $\dot{\Theta}$, a upravljački ulaz je akceleracija njihala a i izlaz njegov otklon Θ,

b) (*1 bod*) ispitati osmotrivost danog sustava,

c) (*1 bod*) diskretizirati sustav uz vrijeme diskretizacije $T = 0.1$ s koje možemo smatrati dovoljno malim za razmatrani sustav,

d) (*3 boda*) projektirati diskretni neprediktivni estimator stanja punog reda tako da u prvom slučaju polovi dinamike pogreške estimacije budu u nuli ($z_p = 0$), a u drugom u 0.4 ($z_p = 0.4$),

e) (*2 boda*) obrazložiti koji bi od dvaju projektrianih estimatora imao veću osjetljivost na šum uz pretpostavku da u mjerenju otklona njihala Θ postoji Gaussov bijeli šum $v \sim \mathcal{N}(0, R)$, te napisati izraz za dinamiku pogreške estimacije u tom slučaju,

f) (*2 boda*) projektirati diskretni estimator stanja reducirnog reda tako da polovi dinamike pogreške estimacije budu u 0.4 ($z_p = 0.4$).

Prvi međuispit

6. travnja 2010.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (3 boda)

a) *(1 bod)* Zašto je za primjenu identifikacije zasnovane na Fourierovoj analizi prikladan chirp pobudni signal?

b) *(1 bod)* Što dobivamo kao rezultat identifikacije zasnovane na Fourierovoj analizi?

c) *(1 bod)* Skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku chirp signala s početnom frekvencijom $\omega_{poc} = 0.01$ rad/s i završnom frekvencijom $\omega_{zav} = 10$ rad/s.

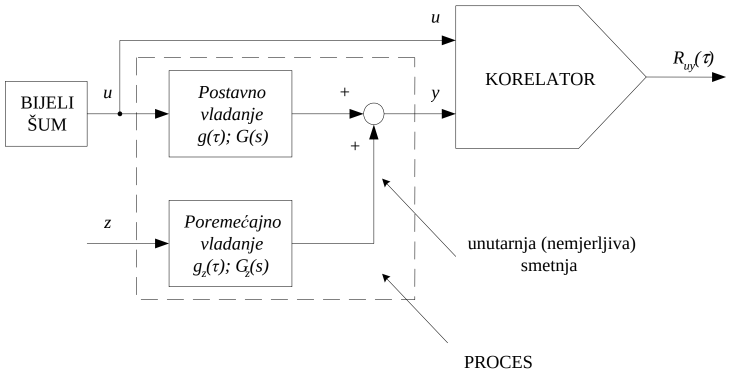
2. zadatak (3 boda)

Na ulazu sustava, prikazanog na slici 1, doveden je ulazni signal $u(t)$ koji ima svojstva obojenog šuma.

a *(2 boda)* Potrebno je pokazati da se težinska funkcija sustava u ovom slučaju može aproksimirati s:

$$g(\tau) = \frac{1}{c} R_{uy}(\tau)$$

b *(1 bod)* Koje pretpostavke je pritom potrebno uzeti u obzir i što predstavlja parametar c?



Slika 1: Zatvoreni sustav upravljanja.

3. zadatak (3 boda)

U identifikacijskom eksperimentu sustav je doveden u radnu točku i zatim je u toj radnoj točki snimljena prijelazna funkcija tog sustava. Iz prijelazne funkcije određeno je da je $t_{95} = 18$ s.

a) *(2 boda)* Odredite parametre PRBS signala koji se može koristiti za identifikaciju tog sustava ako je poznato da je $\Delta t = 4$.

b) *(1 bod)* Kako se sklopovski može generirati takav PRBS signal?

4. zadatak (3 boda)

Neka je dan sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{2}{4s+1}$$

Spektralna gustoća dobivenog izlaznog signala je:

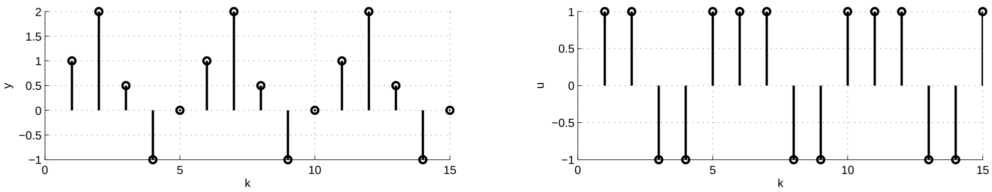
$$S_{yy}(\omega) = \frac{4}{\omega^2+16}$$

a) *(2 bodova)* Odredite spektralnu gustoću ulaznog signala $S_{uu}(\omega)$.

b) *(1 bod)* Što predstavlja $R_{uu}(0)$?

5. zadatak (3 boda)

Izračunajte vrijednost međukorelacijske funkcije $R_{uy}(12)$ ako je poznato da je $R_{uy}(0) = 0.7$.

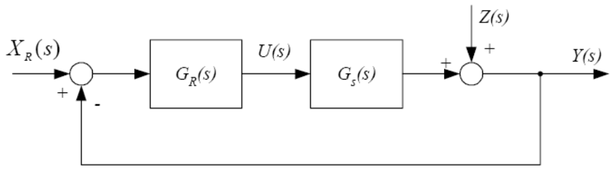


6. zadatak (4 boda)

Zadan je zatvoreni regulacijski krug kao na slici 2. Pretpostavimo da signali $x_R(t)$ i $z(t)$ ne koreliraju.

a) *(2 boda)* Koliko korelacijskih mjerenja treba provesti da bi se mogla odrediti prijenosna funkcija sustava $G_s(s)$? Kako se provode ta mjerenja?

b) *(2 boda)* Izvedite relaciju iz koje se može izračunati $G_s(s)$.



Slika 2: Zatvoreni regulacijski krug.

7. zadatak (3 boda)

a) *(1 bod)* Skicirajte načelnu shemu parametarskog postupka identifikacije.

b) *(2 boda)* Kako se definira vektor regresora i vektor parametara za ARMAX model?

8. zadatak (4 boda)

Parametarskom metodom identifikacije dobiven je OE model sustava opisan kao:

$$B(z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$
$$F(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1} + 2z^{-2}$$

a) *(1 bod)* Skicirajte blokovsku shemu OE modelske strukture.

b) *(2 boda)* Napišite jednadžbu diferencija identificiranog modela.

c) *(1 bod)* Izračunajte vrijednost izlaznog signala sustava y(3) ako je pobuda sustava $u(k)$ jedinična odskočna funkcija i ako su diskretne vrijednosti šuma $\epsilon(k)$ dane u tablici 1.

Tablica 1: Iznos šuma

k	$\epsilon(k)$
1	0.5
2	0.1
3	-0.3

Drugi međuispit

10. svibnja 2010.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

Antena za praćenje satelita opisana je sljedećim matematičkim modelom:

$$J\ddot{\Theta} + B\dot{\Theta} = M_m + M_v \ ,$$

gdje je J moment inercije antene, B faktor prigušenja (usred trenja), M_m moment motora i M_v moment smetnje (usred naleta vjetra).

a) *(1 bod)* Zadani sustav prikažite u prostoru stanja. U sustavu se mjeri kut Θ. Koristite oznake $a = \frac{B}{J}$ i $u = \frac{M_m}{B}$. Diskretizirajte sustav uz vrijeme diskretizacije $T = 0.1s$, koje je dovoljno malo za razmatrani sustav ($a = 0.02$).

b) *(3 boda)* Projektirajte diskretni neprediktivni estimator stanja tako da u prvom slučaju svi polovi dinamike pogreške estimacije budu u nuli ($z_p = 0$), a u drugom u 0.6 ($z_p = 0.6$).

c) *(2 boda)* Pretpostavimo da u sustavu postoji mjerni šum v_k očekivane vrijednosti nula i varijance R ($v_k \sim N(0, R)$). Obrazložite koji bi od dvaju projektiranih regulatora imao bolje vladanje s obzirom na šum. Napišite izraz za dinamiku pogreške estimacije uz postojanje mjernog šuma u sustavu.

2. zadatak (6 bodova)

U akvariju se nalaz x_p pirana i x_g akvarijskih ribica. Ribice hranite jednom tjedno hranom u. Također, svaki tjedan pirane pojedu nekoliko ribica. Natalitet pirana proporcionalan je populaciji ribica, a mortalitet je proporcionalan njihovoj vlastitoj populaciji (zbog prenapučenosti). Natalitet ribica proporcionalan je količini hrane u (uz konstantu proporcionalnosti 1), a mortalitet je proporcionalan populaciji pirana.

a) *(2 boda)* Napišite model zadanog sustava u prostoru stanja. Uzmite da konstante proporcionalnosti (za koje nije drugačije rečeno) iznose $\frac{1}{2}$, a nesigurnost modela izrazite bijelim šumom jedinične varijance uz očekivanu vrijednost 0 ($w \sim N(0, 1)$). Pirane zbog veličine možete točno prebrojiti, dok za ribice pretpostavljate mjerni šum jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti.

b) *(2 boda)* U početnom trenutku imamo točan broj pirana i ribica (x_{p0} i x_{g0}). Kalmanovim filtrom estimiramo populaciju ribica. Koliko iznosi varijanca estimiranog broja ribica nakon 2 tjedna?

c) *(2 boda)* Koliko iznosi omjer populacija pirana i ribica u ustaljenom stanju? Za ovaj dio zadatka pretpostavite da nema procesnog šuma.

Drugi međuispit

26. svibnja 2010.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obvezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (6 bodova)

a) *(2 boda)* Objasnite pojam djelotvornosti procjene te objasnite kako se određuje relativna djelotvornost.

b) *(2 boda)* Kako se definira kriterij kakvoće kod metode pomoćnih varijabli? Na koji način se dobivaju najbolji procijenjeni parametri?

c) *(2 bod)* Kako se u metodi maksimalne vjerojatnosti definira funkcija vjerojatnosti?

2. zadatak (4 boda)

a) *(2 boda)* Objasnite i matematički opišite kako se provodi test funkcije pogreške.

b) *(2 boda)*Postupkom identifikacije ARMAX modela dobiveni su polinomi:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2} \\ B(z^{-1}) &= z^{-2} - 10^{-5}z^{-3} \\ C(z^{-1}) &= z^{-1} - 2.998z^{-2} \\ D(z^{-1}) &= 1 - 4z^{-1} + 3z^{-2} \end{aligned}$$

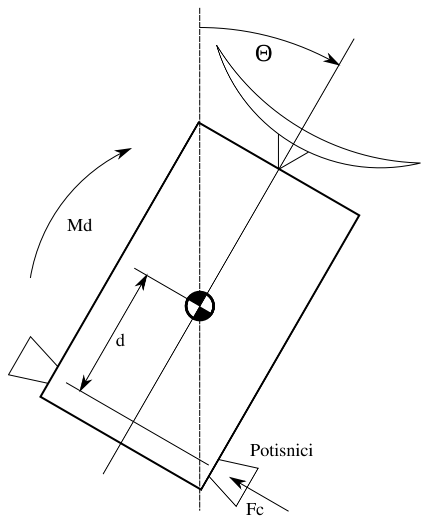
Koristeći polinomski test procijenite red dobivenog modela.

3. zadatak (9 bodova)

Satelit prikazan na slici desno opisan je sljedećim matematičkim modelom:

$$J\ddot{\Theta} = F_c d + M_d \ ,$$

gdje je J moment inercije satelita, F_c sila potiska, d udaljenost potisnika od centra mase satelita i M_d moment prenesen sa fotovoltaičnih panela (smetnja).



Slika 1: Shematski prikaz satelita

a) *(2 boda)* Zadani sustav prikažite u prostoru stanja. U sustavu se mjeri kut Θ. Koristite oznake $a = \frac{d}{J}$ i $u = F_c$. Diskretizirajte sustav uz vrijeme diskretizacije $T = 0.1s$, koje je dovoljno malo za razmatrani sustav ($a = 0.05$).

b) *(1 bod)* Nacrtajte strukturnu shemu diskretnog prediktivnog estimatora stanja.

c) *(2 boda)* Projektirajte diskretni prediktivni estimator stanja tako da u prvom slučaju svi polovi dinamike pogreške estimacije budu u 0.4 ($z_p = 0.4$).

d) *(1 bod)* Koliko pojačanje (naspram dobivenog u prethodnom zadatku) očekujete u slučaju da su polovi postavljeni u nulu ($z_p = 0$).

e) *(1 bod)* Moment fotovoltaičnih panela modelirajte procesnim šumom jedinične varijance i očekivane vrijednosti nula (odredite Q).

f) *(2 boda)* U početnom trenutku imamo točno mjerenje kuta otklona, a iznos kutne brzine možemo opisati slučajnom varijablom normalne razdiobe s varijancom 2. Kalmanovim filtrom estimiramo varijable stanja. Koliko iznosi varijanca kutne brzine nakon 2 perioda uzorkovanja, ako mjerni instrument unosi šum jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti?

Prvi međuispit

6. travnja 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (3 boda)

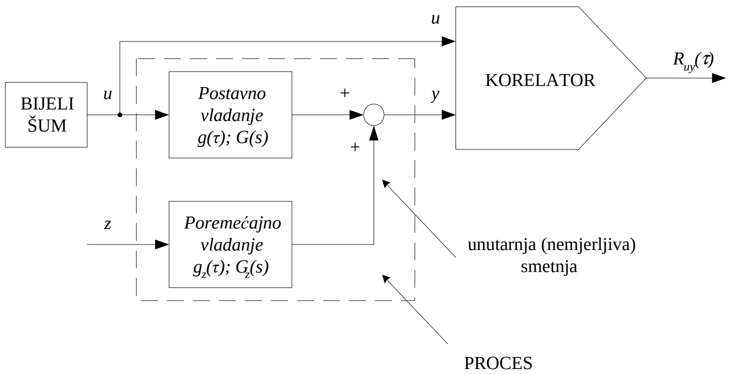
a) *(1 bod)* Zašto je za primjenu identifikacije zasnovane na Fourierovoj analizi prikladan chirp pobudni signal?

b) *(1 bod)* Kako odabiremo početnu i završnu frekvenciju chirp signala?

c) *(1 bod)* Skicirajte amplitudno-frekvencijsku karakteristiku chirp signala s početnom frekvencijom $\omega_{poc} = 0.1$ rad/s i završnom frekvencijom $\omega_{zav} = 10$ rad/s.

2. zadatak (3 boda)

Proveden je identifikacijski eksperiment kao što je prikazano na slici 1, te je na izlazu snimljen signal y. Odredite i komentirajte izraz za težinsku funkciju $g(\tau)$ uz pretpostavku da signali u i z ne koreliraju i da je spektralna snaga bijelog šuma $S_{uu}(\omega) = 2$.



Slika 1: Zatvoreni sustav upravljanja.

3. zadatak (3 boda)

U identifikacijskom eksperimentu sustav je doveden u radnu točku i zatim je u toj radnoj točki snimljena prijelazna funkcija tog sustava. Iz prijelazne funkcije određeno je da je $t_{95} = 30$ s.

a) *(2 boda)* Odredite parametre PRBS signala koji se može koristiti za identifikaciju tog sustava i kojega je moguće realizirati posmačnim registrom s n=4 stupnja.

b) *(1 bod)* Skicirajte autokorelacijsku funkciju PRBS-a s tako odabranim parametrima.

4. zadatak (3 boda)

Neka je dan sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{2}{4s+1}$$

koji je pobuđen signalom šuma spektralne gustoće snage:

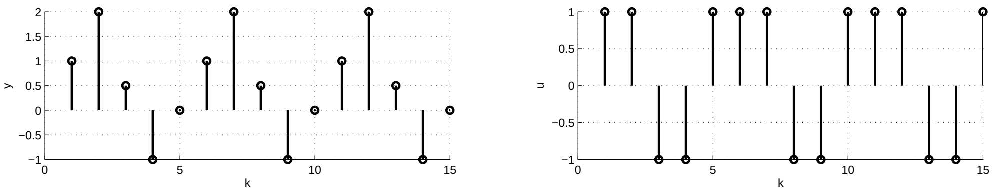
$$S_{uu}(\omega) = \frac{16}{\omega^2+64}$$

a) *(2 bodova)* Odredite spektralnu gustoću dobivenog izlaznog signala $S_{yy}(\omega)$.

b) *(1 bod)* Iz $S_{yy}(\omega)$ odredite $R_{yy}(\tau)$.

5. zadatak (3 boda)

Izračunajte vrijednost međukorelacijske funkcije $R_{uy}(10)$ ako je poznato da je $R_{uy}(0) = 0.7$.

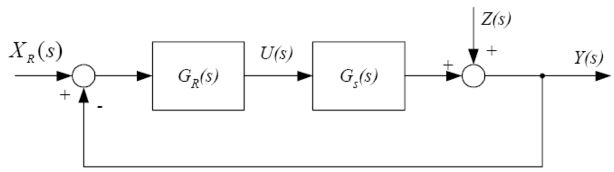


6. zadatak (4 boda)

Zadan je zatvoreni regulacijski krug kao na slici 2. Pretpostavimo da signali $x_R(t)$ i $z(t)$ ne koreliraju.

a) *(2 boda)* Koliko korelacijskih mjerenja treba provesti da bi se mogla odrediti prijenosna funkcija sustava $G_s(s)$? Kako se provode ta mjerenja?

b) *(2 boda)* Izvedite relaciju iz koje se može izračunati $G_s(s)$.



Slika 2: Zatvoreni regulacijski krug.

7. zadatak (3 boda)

a) *(2 bodova)* Skicirajte načelnu shemu parametarskog postupka identifikacije.

b) *(1 bod)* Na koji način se u matematičkom modelu nadomješta signal smetnje koji se pojavljuje u sustavu?

8. zadatak (4 boda)

Parametarskom metodom identifikacije dobiven je ARMAX model sustava opisan kao:

$$A(z^{-1}) = 1 + 2z^{-1}$$
$$B(z^{-1}) = 1 + 0.5z^{-1}$$
$$C(z^{-1}) = -1 + 0.2z^{-1}$$

a) *(1 bod)* Skicirajte blokovsku shemu ARMAX modelske strukture.

b) *(2 boda)* Napišite jednadžbu diferencija identificiranog modela.

c) *(1 bod)* Izračunajte vrijednost izlaznog signala sustava y(3) ako je pobuda sustava $u(k)$ jedinična odskočna funkcija i ako su diskretne vrijednosti šuma $\epsilon(k)$ dane u tablici 1.

Tablica 1: Iznos šuma

k	$\epsilon(k)$
1	0.5
2	0.1
3	-0.3

Drugi međuispit

18. svibnja 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (5 bodova)

a) *(2 bod)* Kako se kod LS metode estimiraju parametri modela? Koji se kriterij koristi? Napišite matematički izraz i komentirajte.

b) *(2 boda)* Koji je razlog uvođenja instrumentalnih varijabli u postupak estimacije parametara? Koje uvjete instrumentalne varijable moraju zadovoljiti da bi procjena parametara bila konzistentna?

c) *(1 bod)* Navedite prednosti odnosno nedostatke RLS metode procjene parametara u odnosu na LS metodu.

2. zadatak (4 boda)

Broj vozila k koja u i-tom vremenskom intervalu prođu pored kontrolne točke na nekoj dionici puta mjeri se pomoću brojila prometa. Pokazuje se da se broj vozila k može u statističkom smislu opisati s Poissonovom razdiobom:

$$f(k,\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \lambda > 0$$

pri čemu $f(k,\lambda)$ označava vjerojatnost da u vremenskom intervalu i preko kontrolne točke prođe upravo k_i vozila. Potrebno je na temelju poznatih rezultata mjerenja broja vozila k_i odrediti optimalni iznos parametra razdiobe λ korištenjem ML metode (*engl.* Maximum Likelihood Method).

3. zadatak (3 boda)

Za identifikaciju tromasenog elektromehaničkog sustava koristi se RLS metoda uz faktor zaboravljanja zasnovan na filtru prvog reda koji je zadan prijenosnom funkcijom:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_f(z)} = \frac{1-a_\lambda}{1-a_\lambda z^{-1}}$$

Konačna vrijednost faktora zaboravljanja je 0.98, a a_λ iznosi 0.97.

a) *(1 bod)* Koja je vrijednost faktora zaboravljanja u 10. koraku, ako u 8. koraku iznosi $\rho(8) = 0.975$?

b) *(2 boda)* Koje prednosti u odnosu na standardnu metodu ima metoda kod koje se koriste faktori zaboravljanja?

4. zadatak (4 boda)

a) *(2 boda)* Objasnite i matematički opišite kako se provodi test odnosa determinanata.

b) *(2 boda)* Postupkom identifikacije ARMAX modela dobiveni su polinomi:

$$A(z^{-1}) = 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}$$
$$B(z^{-1}) = z^{-2} - 10^{-5}z^{-3}$$
$$C(z^{-1}) = z^{-1} - 1.998z^{-2}$$

Koristeći polinomski test procijenite minimalni red dobivenog modela.

5. zadatak (5 bodova)

Zadan je diskretni matematički model sustava dvostrukog integratora:

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u_k,$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k,$$

gdje je $T = 0.5[s]$.

a) *(3 boda)* Projektirajte diskretni prediktivni estimator stanja tako da u prvom slučaju svi polovi sustava budu u nuli ($z_p = 0$), a u drugom u 0.6 ($z_p = 0.6$).

b) *(2 boda)* Pretpostavimo da u sustavu postoji mjerni šum v_k očekivane vrijednosti nula i varijance R ($v_k \sim N(0, R)$). Obrazložite koji bi od dvaju projektiranih regulatora imao bolje vladanje s obzirom na šum. Napišite izraz za dinamiku pogreške estimacije uz postojanje mjernog šuma u sustavu.

6. zadatak (5 bodova)

Radioaktivna masa ima vrijeme poluraspada τ sekundi. U svakom koraku uzorkovanja, broj emitiranih čestica x jednak je polovici broja čestica emitiranih u prethodnom koraku. Međutim, u tom procesu postoji određena pogreška uzrokovana pozadinskom radijacijom, koju možemo modelirati šumom w_k nulte očekivane vrijednosti i varijance Q ($w_k \sim N(0, Q)$). U svakom koraku uzorkovanja, instrumentom je određen broj emitiranih čestica y. Instrument u koraku k ima šum mjerenja v_k koji se može opisati Gaussovom slučajnom varijablom očekivane vrijednosti nula i varijance R ($v_k \sim N(0, R)$). Pretpostavite da su w_k i v_k nekorelirani.

a) *(1 bod)* Postavite matematički model zadanog linearnog sustava.

b) *(2 boda)* Napišite jednadžbe Kalmanova filtra za naknadnu (*a posteriori*) estimaciju broja emitiranih čestica.

c) *(1 bod)* Odredite *a posteriori* varijancu pogreške estimacije Kalmanova filtra u ustaljenom stanju.

d) *(1 bod)* Koliko iznosi Kalmanovo pojačanje u ustaljenom stanju kada je $Q = R$, a koliko kada je $Q = 2R$? Objasnite ovisnost ustaljenog Kalmanova pojačanja o omjeru Q naprama R.