



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
F A K U L T E T
E L E K T R O T E H N I K E
I R A Č U N A R S T V A

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo

Prof.dr.sc. Nedjeljko Perić

Prof.dr.sc. Ivan Petrović

IDENTIFIKACIJA PROCESA

Predavanja



Zagreb, 2005.

SADRŽAJ

| | |
|--|------------|
| 1. UVOD | 1 |
| 1.1. Teoretska i eksperimentalna analiza procesa | 1 |
| 1.2. Priprema eksperimenta identifikacije procesa | 5 |
| 1.3. Klasifikacija postupaka identifikacije | 8 |
| 1.3.1 Osnovne metode (postupci) identifikacije parametara linearnih procesa | 11 |
| 2. NEPARAMETARSKI POSTUPCI IDENTIFIKACIJE | 19 |
| 2.1. Identifikacija pomoću Fourierove analize | 19 |
| 2.1.1. Metoda jedne frekvencije u jednom trenutku (<i>one frequency at-a-time</i>) | 19 |
| 2.2. Identifikacija pomoću korelacijske analize | 32 |
| 2.2.1. Identifikacija pomoću korelacijske analize korištenje binarnog i ternarnog signala šuma | 39 |
| 2.2.2. Korelacijska analiza u zatvorenom regulacijskom krugu | 62 |
| 2.2.3. Korelacijska analiza za neposredno određivanje frekvencijske karakteristike | 64 |
| 2.2.4. Numeričko određivanje težinske funkcije pomoću korelacijskih funkcija | 66 |
| 2.2.5. Odnos između spektralne gustoće snage na ulazu i izlazu linearnog sustava | 67 |
| 3. IDENTIFIKACIJA POMOĆU POSTUPAKA PROCJENE PARAMETARA | 69 |
| 3.1. Procjena (estimacija) parametara linearnih sustava s jednim ulazom i jednim izlazom | 71 |
| 3.1.1. Struktura matematičkog modela | 71 |
| 3.1.2. Numeričko rješenje problema procjene | 78 |
| 3.1.2.1. Direktno rješenje | 78 |
| 3.1.2.2. Rekurzivno rješenje (RLS-metoda) | 84 |
| 3.1.2.3. Metoda pomoćnih varijabli | 89 |
| 3.1.2.4. Metoda maksimalne vjerojatnosti | 94 |
| 3.1.3. Procjena parametara uz korištenje težinskih faktora | 103 |
| 3.2. Postupci vrednovanja identificiranog matematičkog modela procesa | 107 |
| 3.2.1. Postupci na temelju <i>a-priori</i> određivanja reda matematičkog modela | 107 |
| 3.2.2. Postupci procjene reda modela na temelju procjene izlaznog signala | 109 |
| 3.2.3. Postupci procjene reda modela na temelju analize procijenjene prijenosne funkcije | 110 |
| 3.2.4. Usporedba modela | 110 |
| 3.3. Neki praktični aspekti pri identifikaciji procesa | 115 |
| 4. IDENTIFIKACIJA PROCESA I ADAPTIVNI SUSTAVI UPRAVLJANJA | 121 |
| 4.1 Osnovne strukture adaptivnih sustava | 123 |
| 5. UVOD U IDENTIFIKACIJU NELINEARNIH DINAMIČKIH PROCESA | 127 |
| 5.1. Postupci provjere linearnosti/nelinearnosti procesa | 127 |
| 5.2. Opći model nelinearnih dinamičkih procesa | 128 |
| 5.3. Ulazno-izlazni modeli nelinearnih dinamičkih procesa zasnovani na općem modelu | 133 |
| 5.4. Modeli nelinearnih dinamičkih procesa u prostoru stanja | 145 |
| DODATAK | 148 |

1. UVOD

1.1. Teoretska i eksperimentalna analiza procesa

- teoretska analiza $\hat{=}$ teoretska tvorba modela (sustavska dinamika)
- eksperimentalna analiza $\hat{=}$ identifikacija procesa (na osnovi mjerenja)

- **Koraci pri teoretskoj analizi:**
 1. postavljanje jednadžbi ravnoteže;
 2. postavljanje fizikalno-kemijskih jednadžbi stanja;
 3. postavljanje fenomenoloških jednadžbi za ireverzibilne procese (npr. jednadžbe za vođenje topline, jednadžbe difuzije ili kemijske reakcije);
 4. eventualno postavljanje jednadžbi ravnoteže entropija ako se događa više ireverzibilnih procesa.

Za teoretsku analizu procesa potrebno je znati:

- zakonitosti rada elemenata procesa;
- međudjelovanja elemenata procesa.

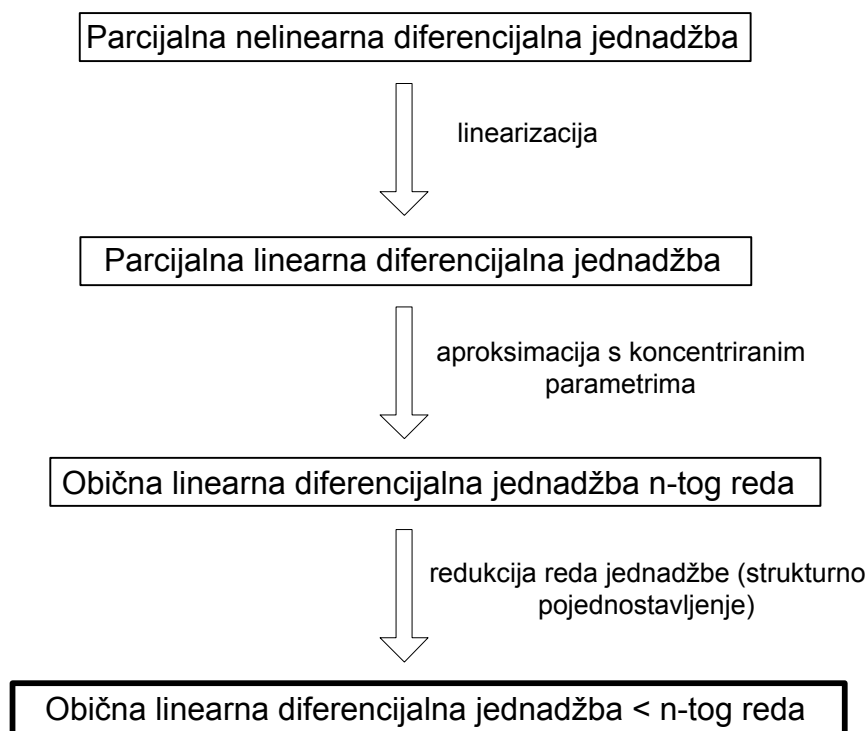
Prednosti teoretske analize:

- u fazi planiranja i projektiranja procesa i sustava automatizacije realni proces ne mora postojati;
- dobivena rješenja općenito su valjana za slične klase procesa (za druge dimenzije varijabli i parametara);
- dobar uvid u unutarnje odnose procesa (ovisnosti i odnosi među varijablama stanja).

Nedostaci teoretske analize:

- složeni matematički modeli često su neprikladni za daljnje primjene (npr. simulacija sustava upravljanja, projektiranje regulatora);
- nesigurnost određivanja parametara procesa i vanjskih poremećajnih djelovanja.

Pojednostavljenje matematičkog modela procesa dobivenog teoretskom analizom:



- **Eksperimentalna analiza (identifikacija procesa)**

Matematički model procesa dobiva se na temelju mjerenja ulazno/izlaznih signala procesa.

Pri identifikaciji procesa uvijek se polazi od a-priori znanja o procesu dobivenih:

- teoretskom analizom;
- prethodnim mjerenjima.

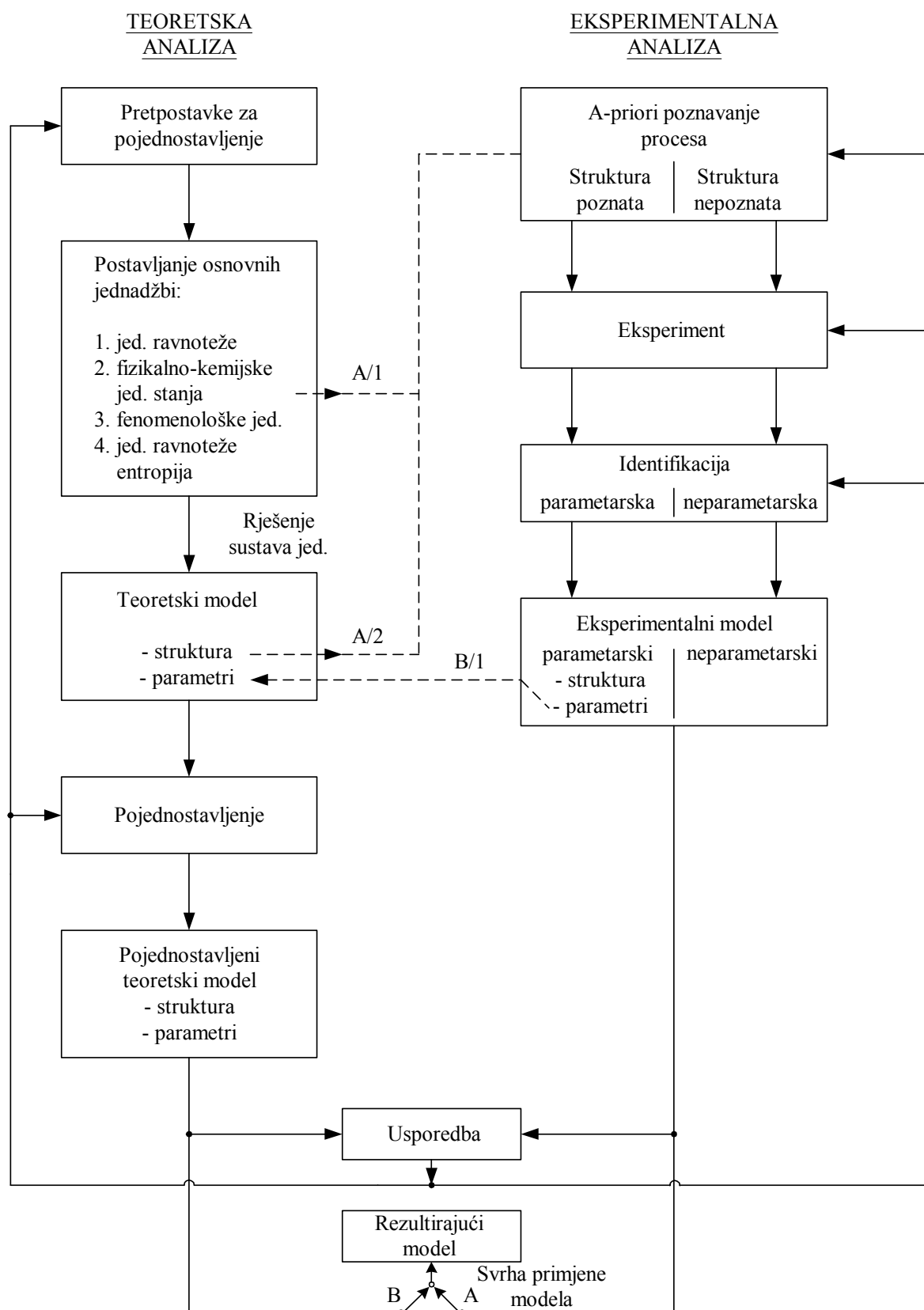
Prednosti eksperimentalne analize:

- nisu potrebna detaljna specijalistička znanja istraživnog procesa;
- dobivaju se jednostavniji matematički modeli koji zadovoljavajuće dobro opisuju proces.

Nedostaci eksperimentalne analize:

- mora postojati istraživni proces;
- dobiveni rezultati ograničeno su primjenljivi za slične procese.

Analiza procesa općenito je iterativni postupak kombiniran teoretskom i eksperimentalnom analizom.



Sl. 1.1. Principni tijek analize procesa.

Grane $A/1$ i $A/2$ (Sl. 1.1) služe za upotpunjenje a-priori znanja o procesu pri provedbi eksperimentalne analize.

U provedbi eksperimenta (Sl. 1.1) ulazni signal u proces je "pogonski" signal ili "umjetni" ispitni signal.

Ovisno o tome je li struktura modela poznata ili nije, mogu se primjeniti **parametarski** ili **neparametarski** postupci identifikacije. Kao rezultat identifikacije dobije se eksperimentalni model.

Ako je provedena teoretska i eksperimentalna analiza, može se usporedbom dobivenih modela zaključiti, na temelju vrste i veličine međusobnog odstupanja, što je potrebno korigirati u teoretskom ili eksperimentalnom modelu.

Odabir rezultujućeg matematičkog modela ovisi o namjeni modela.

Grana $B/1$ osigurava kroz eksperimentalnu analizu provjeru točnosti teoretskog modela ili određivanje parametara teoretskog modela.

Ako se obavlja teoretska analiza, tada se eksperimentalna analiza koristi za provjeru točnosti teoretskog modela ili za određivanje parametara.

Eksperimentalnom analizom procesa dobiveni matematički model može se koristiti za sljedeće svrhe:

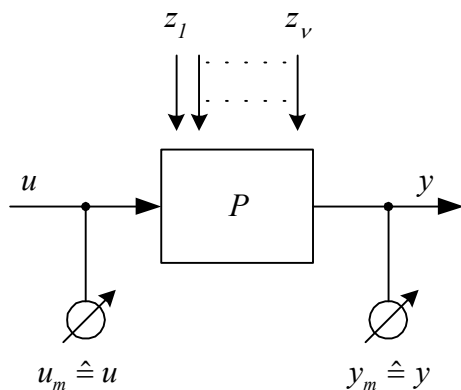
- izučavanje procesa;
- provjera teoretskog modela;
- projektiranje (sinteza) sustava upravljanja;
- optimiranje vladanja procesa u stacionarnim i dinamičkim režimima rada;
- adaptivno upravljanje;
- dijagnostika procesa;
- estimacija nemjerljivih varijabli procesa.

Eksperimentalna analiza značajno se afirmirala zbog primjene procesnih računala za regulaciju, nadzor i optimiranje procesa.

U eksperimentalnoj analizi procesa razlikuju se dvije cjeline problema:

- mjerenje relevantnih procesnih veličina;
- numerička (grafo-analitička) obrada mjernih rezultata s ciljem dobivanja matematičkog modela.

1.2 Priprema eksperimenta identifikacije procesa



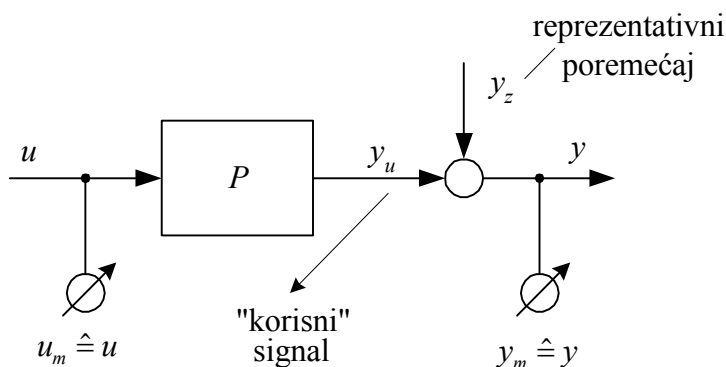
Sl. 1.2.

Pretpostavke:

- proces (P) je stabilan i linearan;
- ima jedan ulaz i jedan izlaz;
- ulazni i izlazni signal mjere se točno ($u_m \hat{=} u; y_m \hat{=} y$).

$z_1(t), \dots, z_v(t)$ - poremećaji koji djeluju na proces

Uz pretpostavke dane uz sliku 1.2. dobije se prikaz kao na slici 1.3.



Sl. 1.3.

$\frac{y_z}{y_u}$ - ovaj odnos bitno utječe na valjanost identifikacije

Zadaća identifikacije jest odrediti matematički model procesa na temelju mjerenih signala $u_m(t)$ i $y_m(t)$, i eventualno drugih mjerenih signala.

Pri identifikaciji većine procesa moraju se imati u vidu sljedeće činjenice:

1. Raspoloživo vrijeme T_M za eksperiment je ograničeno iz procesnih razloga ili zbog vremenske varijantnosti svojstava procesa:

$$T_M \leq T_{M\max} . \quad (1-1)$$

Ako je primijenjen deterministički ispitni signal, onda je vrijeme mjerenja određeno pojavom stacionarnog stanja izlazne veličine.

Pri pobudi procesa kontinuiranim ispitnim signalom i uz mjerenja u diskretnim (ekvidistantnim) vremenima nužno je poštivati Shannonov teorem.

2. Promjenu ispitnog signala potrebno je uvijek ograničiti na maksimalno dozvoljeni iznos što je uvjetovano procesnim razlozima ili održanjem linearnih svojstava procesa:

$$u_0 = u(t)_{\max} - u(t)_{\min} \leq u_{0\max} . \quad (1-2)$$

3. Promjenu izlaznog signala potrebno je imati ograničenu zbog istih razloga kao pod 2:

$$y_0 = y(t)_{\max} - y(t)_{\min} \leq y_{0\max} . \quad (1-3)$$

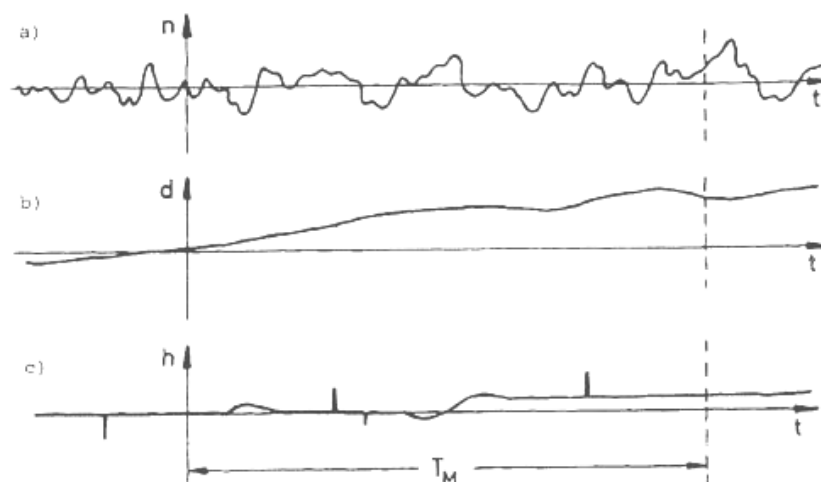
4. Poremećajni signal $y_z(t)$ općenito se sastoji od više različitih komponenata (Sl. 1.4):

- a) visokofrekvencijskih kvazistacionarnih stohastičkih komponenata signala smetnji $n(t)$ s matematičkim očekivanjem:

$$E\{n(t)\} = 0 ; \quad (1-4)$$

- signal $n(t)$ u vremenu mjerenja T_M je stacionarna veličina.
- b) niskofrekvencijskih nestacionarnih stohastičkih ili determinističkih komponenata signala smetnji $d(t)$;
 - signal $d(t)$ u vremenu mjerenja T_M je nestacionarna veličina.
- c) komponenata signala smetnji nepoznatog karaktera $h(t)$;
 - ovakvi neregularni signali nastaju iznenadnim promjenama parametara procesa ili smetnjama u mjernim uređajima.

$$y_z(t) = n(t) + d(t) + h(t) \quad (1-5)$$



Sl. 1.4.

Za dobivanje valjanih matematičkih modela identifikacijom procesa, potrebno je svesti utjecaje svih smetnji na najmanju moguću mjeru.

Za slučaj $n(t)$ u praksi se koristi usrednjavanje signala $y(t)$. Za slučaj $d(t)$ u praksi se koriste specijalni filtri koji su prilagođeni pojedinim tipovima (klasama) signala smetnji.

Za slučaj $h(t)$ općenito se ne može eliminirati utjecaj smetnji. Obično se “odbacuju nelogični rezultati” prouzročeni smetnjama $h(t)$.

Identifikacija procesa obavlja se općenito u sljedećim koracima:

1. Postavljanje zahtjeva na matematički model procesa koji se identificira, i to s obzirom na svrhu primjene (struktura, točnost).
2. Planiranje mjerenja:
 - prikupljanje a-priori znanja;
 - prilagođenje na mjerne i izvršne elemente;
 - procjena amplituda i frekvencijskog spektra poremećajnih veličina;
 - izbor postupka identifikacije;
 - izbor ispitnog signala;
 - izbor vremena uzorkovanja;
 - \vdots
3. Provedba mjerenja (eksperimenata).
4. Obradba izmjerenih signala (identifikacija, tj. određivanje parametara, određivanje reda modela).
5. Provjera identificiranog modela (verifikacija).
6. Eventualno ponavljanje od 3. ili 4. (iterativni postupak).

1.3. Klasifikacija postupaka identifikacije

Klasifikacija prema:

- klasi matematičkog modela;
- klasi primijenjenih signala;
- pogrešci između procesa i njegovog modela;

kao i prema:

- tijeku mjerenja i obradbe mjernih rezultata (on-line, off-line);
- algoritmima identifikacije.

a) Matematički modeli

- parametarski modeli (modeli sa strukturom);
- neparametarski modeli (modeli bez strukture).

Parametarski modeli predstavljaju se jednadžbama, koje eksplicitno sadrže parametre (npr. diferencijalne jednadžbe, prijenosne funkcije).

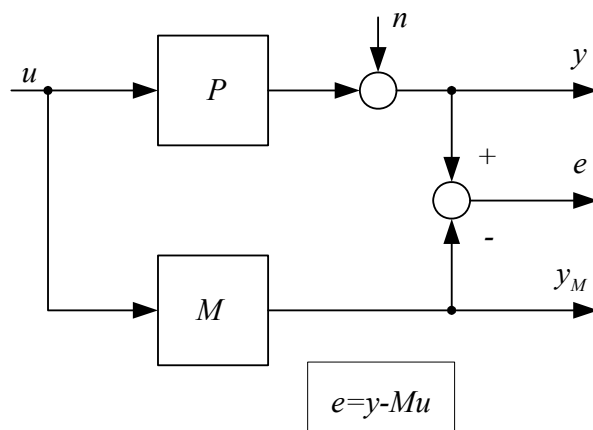
Neparametarski modeli prikazuju ovisnost ulazne i izlazne veličine procesa u obliku tablica vrijednosti ili krivulja (npr. težinske funkcije, prijelazne funkcije u tabličnom ili grafičkom obliku). Neparametarski modeli sadrže parametre implicitno.

b) Ulazni signali (ispitni signali)

- deterministički → mogu se analitički opisati;
- stohastički → ne mogu se analitički opisati;
- pseudostohastički → imaju svojstva kao stohastički signali, ali determinirano.

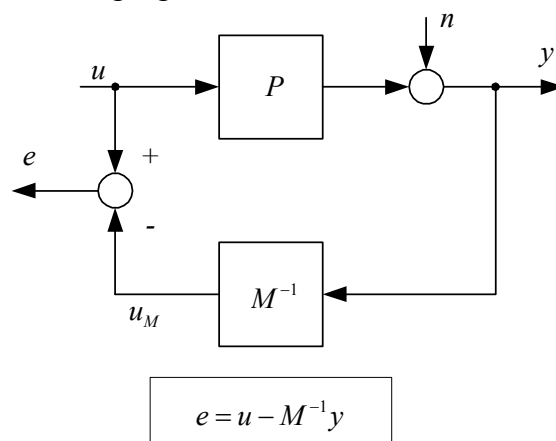
c) Pogreška između matematičkog modela i procesa (Sl. 1.5 – 1.7)

- pogreška izlaznog signala



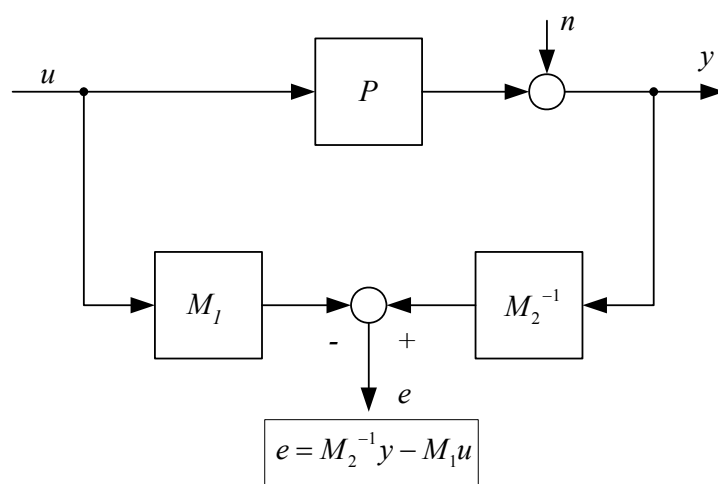
Sl. 1.5.

- pogreška ulaznog signala



Sl. 1.6.

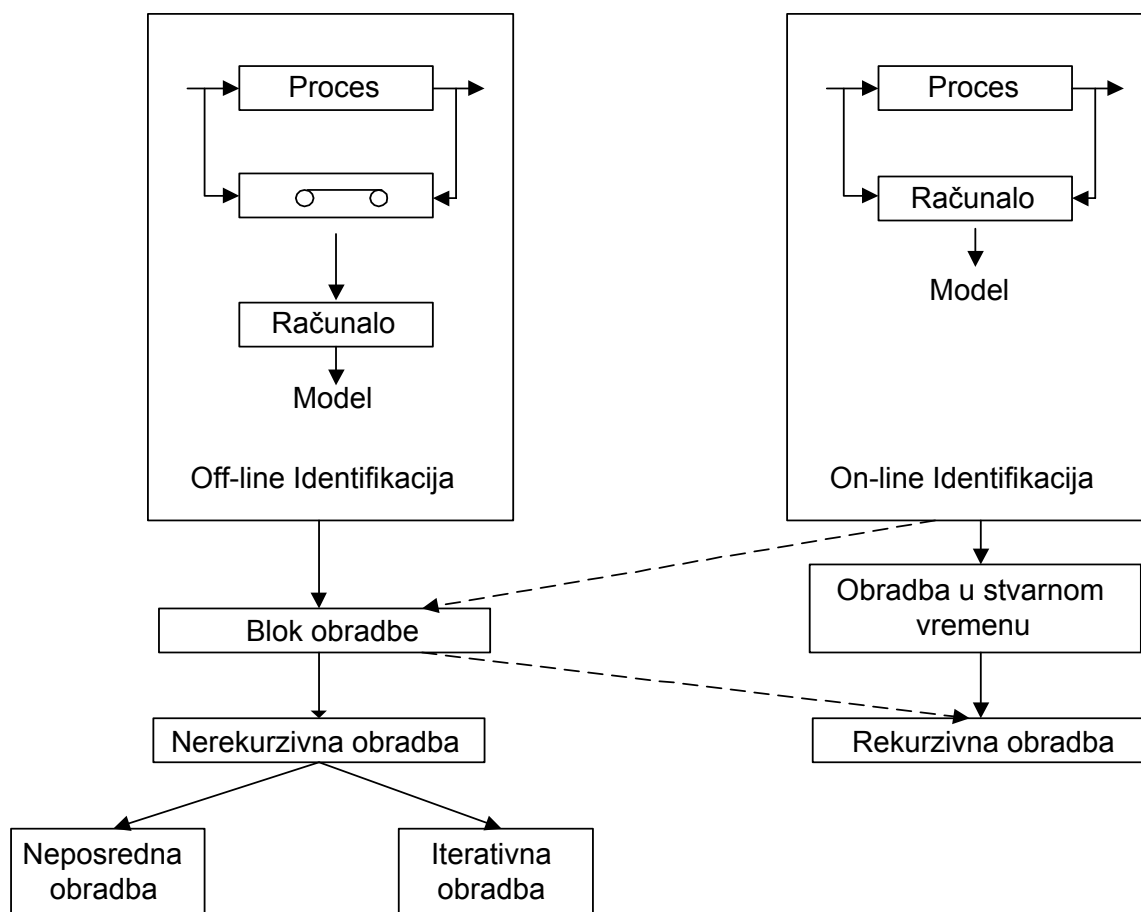
- poopćena pogreška



Sl. 1.7.

Iz matematičkih razloga općenito se preferira ona pogreška koja linearno ovisi o parametrima modela. Npr. ako se kao model koristi težinska funkcija, tada se koristi izlazna pogreška.

d) *Tijek mjerenja i obradbe mjernih rezultata (Sl. 1.8)*



Sl. 1.8.

- off-line (posredno povezivanje računala i procesa)

Kod off-line primjene podaci se prvo registriraju pomoću nekog memorijskog uređaja i naknadno obrade u računalu.

- on-line (neposredno povezivanje računala i procesa)

Kod on-line primjene računalu radi u stvarnom vremenu.

e) *Algoritmi obradbe mjernih podataka*

- obradba bloka (engl. batch processing);
- obradba u stvarnom vremenu.

U slučaju obradbe bloka prethodno memorirani mjerni podaci obrade se kao blok podataka. Ovo se poglavito koristi pri off-line identifikaciji.

U slučaju obradbe u stvarnom vremenu mjerni rezultat obrađuje se neposredno nakon mjerenja. Ovo podrazumijeva on-line povezivanje računala i procesa.

f) Algoritmi nadalje mogu biti:

- nerekurzivni algoritmi

Nerekurzivni algoritmi izračunavaju parametre iz skupa podataka koji su prethodno memorirani. Uobičajeno se koriste pri obradbi bloka mjernih podataka.

- rekurzivni algoritmi

Rekurzivni algoritmi računaju parametre na osnovi svakog novo izmjereneog para podataka. Najnoviji par podataka se uvijek koristi za poboljšanje procjene parametara prethodnog koraka. Uobičajeno se koriste pri obradbi mjernih podataka u stvarnom vremenu.

g) Nerekurzivni algoritmi identifikacije (procjene) parametara

- algoritmi za neposredno određivanje parametara

Algoritmi za neposredno određivanje parametara procjenjuju parametre u jednom koraku na temelju vrijednosti ulazno/izlaznih signala procesa.

- algoritmi za iterativno određivanje parametara

Algoritmi za iterativno određivanje parametara procjenjuju parametre u koracima, dakle iterativno. Ovdje se skup podataka višestruko obrađuje.

1.3.1 Osnovne metode (postupci) identifikacije parametara linearnih procesa

- Fourierova analiza
- Korelacijska analiza
- Spektralna analiza
- Referentni model
- Procjena parametara

Fourierova analiza:

Fourierova analiza koristi se uglavnom za linearne procese s kontinuiranim signalima za određivanje frekvencijske karakteristike procesa. Karakteristično je za ovu metodu:

- obrada rezultata računalom jednostavna;

- preporuča se za procese s relativno malim odnosom (signal smetnje)/(ispitni signal).

Korelacijska analiza:

Korelacijska analiza primjenjuje se u vremenskom području i prikladna je za linearne procese, kako s kontinuiranim, tako i s diskretnim signalima. Za ulazne ispitne signale koriste se stohastički ili periodički signali. Kao rezultat korelacijske analize dobiva se korelacijska funkcija, odnosno u posebnom slučaju težinska funkcija.

Karakteristično je za ovu metodu:

- obrada rezultata računalom jednostavna;
- prikladna je za procese s relativno velikim odnosom (signal smetnje)/(ispitni signal).

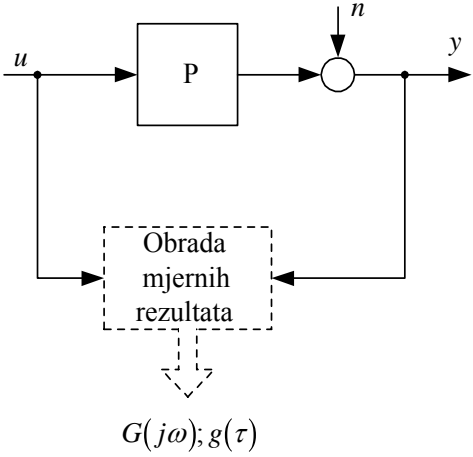
Spektralna analiza:

Spektralna analiza primjenjuje se pod istim uvjetima kao i korelacijska analiza. Obrada se obavlja u frekvencijskom području. Izračunava se spektralna gustoća signala.

Fourierovom analizom, korelacijskom analizom i spektralnom analizom (Tablica 1.1.) dobiju se neparametarski modeli procesa. Kao a-priori informacija mora biti poznato samo da se proces može linearizirati. Ne mora se pretpostaviti određena struktura modela. Stoga su ove neparametarske metode prikladne, kako za procese s koncentriranim parametrima, tako i za procese s raspodijeljenim parametrima s proizvoljno složenom strukturom.

Ove metode su prikladne za provjeru teoretski izvedenih modela procesa.

Tablica 1.1.

| Neparametarski postupci identifikacije | Blokovski prikaz | Model | A-priori znanja | Ulazni signali |
|--|--|--|--------------------|---|
| Fourierova analiza |  | $G(j\omega)$ za $0 \leq \omega_v \leq \omega_{\max}$ | Proces linearan | deterministički neperiodički |
| Spektralna analiza | | $\left. \begin{matrix} R_{uu}(\tau) \\ R_{uy}(\tau) \end{matrix} \right\} g(\tau)$ za $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$ | | periodički stohastički pseudostohastički deterministički |
| Korelacijska analiza | | | | |

Referentni model

Metoda zasnovana na referentnom modelu prikladna je za matematičke modele s kontinuiranim signalima. Uz pretpostavljenu strukturu modela dobiju se parametri diferencijalnih jednažbi ili jednažbi diferencija.

Pri tome je potrebno osigurati da ulazni signali pobude sve interesantne karakteristične frekvencije procesa.

Procjena parametara

Metode procjene parametara matematičkih modela procesa prikladne su, kako za diskretne, tako i za kontinuirane signale. Ispitni signali procesa mogu općenito imati proizvoljan oblik, ali takav da trajno pobuđuju interesantne karakteristične frekvencije procesa.

Kao signal pogreške između matematičkog modela i procesa koristi se poopćena pogreška (i izlazna pogreška).

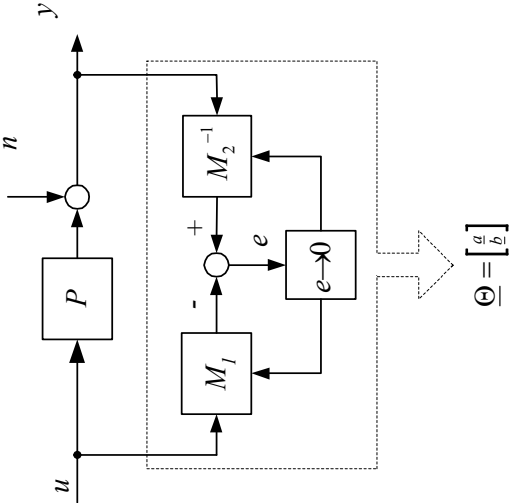
Algoritmi procjene parametara mogu biti nerekurzivni i rekurzivni.

Postupak procjene parametara, kojim se dobije diskretni parametarski model, posebno je prikladan za sintezu algoritama upravljanja (npr. adaptivno upravljanje) ili simulaciju procesa.

Metode zasnovane na referentnom modelu i na procjeni parametara (Tablica 1.2.) daju parametarske modele. Pri određivanju parametara ovih modela mora se pretpostaviti određena struktura modela.

Usporedbeni klasifikacija opisanih postupaka identifikacije prikazana je u tablici 1.3.

Tablica 1.2.

| Parametarski postupci identifikacije | | Blokovski prikaz | Model | A-priori znanja | Ulazni signali |
|--------------------------------------|---------------------|---|---|------------------|---|
| Referentni model | Procjena parametara |  | $y(t) + a_1 \dot{y}(t) + \dots + a_m y^{(m)}(t) = b_0 u(t) + b_1 \dot{u}(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t)$ | Struktura modela | stohastički pseudostohastički deterministički |
| | | | (analogni model) | | |
| | | | $y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_m y(k-m) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$ | | |

Tablica 1.3. Usporedbena klasifikacija postupaka identifikacije kontinuiranih procesa

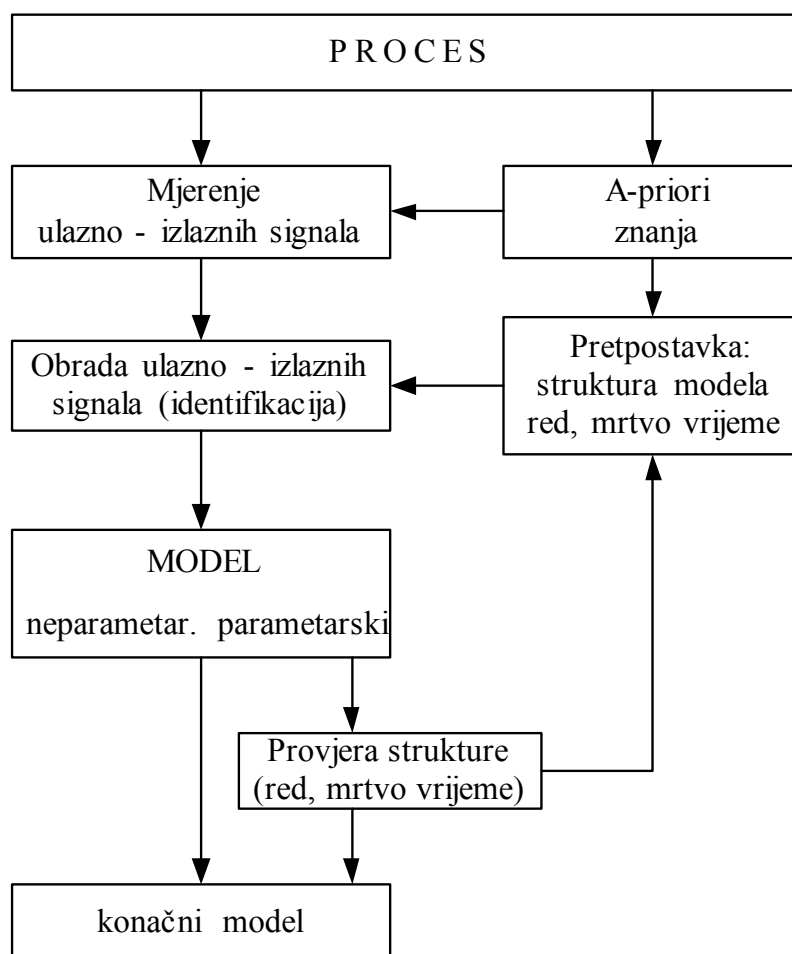
| Model | Postupci identifikacije | | | | Furierove analize | Korelacijska, spektralna analiza | Referentni model | Procjena parametara |
|----------------------------------|--------------------------------|----------------|----------------|---------------|----------------------|--|---------------------|------------------------|
| | Neparametar. | kont. signali | diskr. signali | kont. signali | | | | |
| Signali | Parametarski | kont. signali | diskr. signali | kont. signali | - | - | xx | - |
| | | diskr. signali | | | - | - | xx | - |
| | | determinist. | | | - | - | xx | x |
| | | periodički | | | - | - | - | xx |
| | Ispitni signali | determinist. | | | xx | xx | x | x |
| | | neperiodički | | | xx | - | x | x |
| Pogreška između modela i procesa | Dozvoljeni poremećajni signali | pseudostoh. | | | - | xx | x | xx |
| | | stohastički | | | - | xx | xx | xx |
| | | determinist. | | | x | x | x | x |
| | | stohastički | | | xx | xx | xx | xx |
| | Izlazna pogreška | | | | - | - | xx | x |
| | Ulazna pogreška | | | | - | - | - | - |
| Algoritmi | Poopćena pogreška | | | | - | - | x | xx |
| | Neposredna procjena | nerekurzivna | | | xx | xx | xx | xx |
| | Iterativna procjena | rekurzivna | | | x | x | x | xx |
| | | nerekurzivna | | | - | - | - | xx |
| | | rekurzivna | | | - | - | - | x |
| | on-line obrada | | | | - | x | xx | x |
| | off-line obrada | | | | xx | xx | - | xx |

Legenda: - : "neznatno", "nepoznato"

x : "malo", "rijetko"

xx : "veliko", "često"

Na temelju do sada izloženog može se postupak identifikacije parametara prikazati kao na slici 1.9.



Sl. 1.9.

Na temelju a-priori znanja o procesu odabire se ulazni signal.

Neparametarski postupci identifikacije daju neposredno konačni model.

Kod parametarskih postupaka identifikacije (kada nije unaprijed poznata struktura modela) iterativno se traži red modela i mrtvo vrijeme; procjena parametara s različitim redovima i mrtvim vremenima ponavlja se tako dugo dok se ne dobije slaganje između procesa i modela.

Identifikacija kontinuiranih procesa → diskretizacija signala

Tablica 1.4. Načelna analiza matematičkih modela s obzirom na svrhu primjene

| Svrha primjene mat. modela procesa | Tip modela procesa | Potrebna točnost modela | Metoda identifikacije |
|--|---|--|---|
| Verifikacija teoretskog modela procesa | linearan, vremenski konstantan, parametarski/neparametarski | srednja/visoka | off-line, prijelazna funkcija, frekvencijski odziv, procjena parametara |
| Izbor strukture i podešavanje parametara procesa | linearan, neparametarski, vremenski konst. | niska (opisana samo dominantna dinamika procesa) | off-line, prijelazna funkcija |
| CAD za projektiranje algoritma upravljanja | linearan, parametarski/neparametarski, vremenski diskretan | niska/srednja | off-line, procjena parametara |
| Samopodešavajući algoritmi upravljanja (adaptivni) | linearan, parametarski, vremenski diskretan | niska/srednja | on-line procjena parametara u zatvorenom krugu |
| Nadzor i dijagnostika procesa | linearan/nelinearan, parametarski | visoka | on-line procjena parametara |

2. NEPARAMETARSKI POSTUPCI IDENTIFIKACIJE

2.1. Identifikacija pomoću Fourierove analize

Ova metoda identifikacije je prikladna za postupke projektiranja regulatora pomoću frekvencijskih postupaka (npr. Bodeov dijagram). Metoda se sastoji od eksperimentalnog određivanja frekvencijske karakteristike procesa odnosno frekvencijskog odziva procesa.

Definicijska jednačba za određivanje frekvencijske karakteristike glasi:

$$G(j\omega) = \frac{y(j\omega)}{u(j\omega)} = \frac{F\{y(t)\}}{F\{u(t)\}} \quad (2-1)$$

Kao ispitni signali $u(t)$ koriste se neperiodički signali kao što su pravokutni impuls, trokutasti impuls, funkcija linearnog porasta, trapezni impuls i sl.

Da bi se dobila frekvencijska karakteristika procesa potrebno je odrediti Fourierove transformacije ulaznog i izlaznog signala procesa.

Proces koji ćemo razmatrati opisan je sljedećim izrazom:

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z) + H(z) \cdot W(z) \quad (2-2)$$

gdje je:

Y, U – odziv i pobuda procesa;
 W – nemjerljiva smetnja (šum), koji može, ali ne mora biti slučajan;
 G – prijenosna funkcija procesa s obzirom na U ;
 H – nepoznata prijenosna funkcija s obzirom na W .

2.1.1. Metoda jedne frekvencije u jednom trenutku (*one frequency at-a-time*)

Pretpostavljamo da je proces opisan s (2-2) te da nema djelovanja smetnje na proces ($W=0$).

Neka je ispitni signal sinusnog oblika:

$$u(kT) = U_m \sin(\omega_0 kT). \quad (2-3)$$

Za linearni ili linearizirani proces dobije se odziv:

$$y(kT) = Y_m \sin(\omega_0 kT + \varphi_0). \quad (2-4)$$

Ulazni i izlazni signali se uzorkuju (N uzoraka ulaza, N uzoraka izlaza). Na temelju tih uzoraka određuje se pojačanje procesa i fazni pomak prema izrazu:

$$\begin{aligned}\frac{Y_m}{U_m} &= |G(e^{j\omega_0 T})|, \\ \varphi_0 &= \arg[G(e^{j\omega_0 T})].\end{aligned}\quad (2-5)$$

Time je određena jedna točka na frekvencijskoj karakteristici (na frekvenciji $\omega = \omega_0$).

Potom se promjeni frekvencija ispitnog signala na $\omega = \omega_1$ i ponovi se prethodni postupak, te se dobije frekvencijska karakteristika pri frekvenciju ω_1 .

Postupak se ponavlja do frekvencije kojom je definiran interesantni opseg frekvencijskog područja istraživnog procesa, uvažavajući pri tome potrebnu rezoluciju frekvencije ispitnog signala.

Točnost određivanja frekvencijske karakteristike (točnost estimata, točnost procjene) određena je:

- brojem uzoraka N;
- odnosom šum/signal (relativni intenzitet šuma);
- utjecajem nedovoljnog postizanja stacionarnog stanja.

Na temelju mjerenja definira se estimat izlaza kao:

$$\hat{y}(kT) = Y_m \sin(\omega_0 kT + \varphi_0) = Y_c \cos(\omega_0 kT) + Y_s \sin(\omega_0 kT). \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned}Y_m &= \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2}, \\ \varphi_0 &= \arctg \frac{Y_c}{Y_s}.\end{aligned}\quad (2-7)$$

Za određivanje najboljeg estimata (najbolje procjene) \hat{y} koristi se kriterij minimuma kvadrata pogreške između y i \hat{y} , opisan izrazom:

$$I = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(kT) - \hat{y}(kT)]^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} [y(kT) - Y_c \cos(\omega_0 kT) - Y_s \sin(\omega_0 kT)]^2. \quad (2-8)$$

Potrebno je odrediti Y_c i Y_s tako da I bude čim manji!

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial Y_c} &= 0, \\ \frac{\partial I}{\partial Y_s} &= 0.\end{aligned}\quad (2-9)$$

$$\frac{\partial I}{\partial Y_c} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 2[y(kT) - Y_c \cos(\omega_0 kT) - Y_s \sin(\omega_0 kT)][-\cos(\omega_0 kT)] = 0. \quad (2-10)$$

Primjenom elementarnih trigonometrijskih transformacija na izraz (2-10) dobije se:

$$\frac{\partial I}{\partial Y_c} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} 2 \left[y(kT) \cos(\omega_0 kT) - \frac{Y_c}{2} (1 + \cos(2\omega_0 kT)) - \frac{Y_s}{2} \sin(2\omega_0 kT) \right] = 0. \quad (2-11)$$

↓

$$\frac{\partial I}{\partial Y_c} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) \cos(\omega_0 kT) - \frac{Y_c}{2} - \frac{Y_c}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2\omega_0 kT) - \frac{Y_s}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\omega_0 kT) = 0. \quad (2-12)$$

Za očekivati je da se dva posljednja člana izraza (2-12) mogu zanemariti (prosječna vrijednost približno nula). Pažljivim odabirom frekvencije ispitnog signala moguće je postići da ovi članovi budu egzaktno jednaki nuli. Ako odaberemo frekvencije ispitnog signala prema izrazu:

$$\omega_l = \frac{2\pi l}{NT}, \quad l = \begin{cases} 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \text{ za } N \text{ paran,} \\ 1, 2, \dots, \frac{N-1}{2} \text{ za } N \text{ neparan,} \end{cases} \quad (2-13)$$

tada je:

$$Y_c = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) \cos\left(\frac{2\pi lk}{N}\right). \quad (2-14)$$

Na sličan način dobije se:

$$Y_s = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) \sin\left(\frac{2\pi lk}{N}\right). \quad (2-15)$$

Iz izraza (2-14) i (2-15) dobije se:

$$Y_m = \sqrt{Y_c^2 + Y_s^2},$$

$$\varphi_0 = \arctg \frac{Y_c}{Y_s}.$$

Izrazi za Y_c i Y_s (2-14) i (2-15) usko su povezani s DFT-om izlaznog signala y .

$$y^*(j\omega) = DFT[y(kT)] = T \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) \cdot e^{-j\omega kT}. \quad (2-16)$$

Za numeričko izračunavanje $DFT[y(kT)]$ mora frekvencija ω poprimiti diskretne vrijednosti:

$$\begin{aligned} \omega &= n \cdot \omega_n, \\ \omega_n &= \frac{2\pi}{T_n} = \frac{2\pi}{NT} = \frac{\omega_s}{N}, \end{aligned} \quad (2-17)$$

gdje je:

n – cijeli broj,

T_n – vremensko trajanje signala $y(kT)$.

Iz izraza za $DFT[y(kT)]$ prema (2-17) slijedi:

$$\begin{aligned} DFT[y(kT)] &= y^*(jn\omega_n) = y^*\left(\frac{j2\pi n}{NT}\right) = T \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \\ DFT[y(kT)] &= T \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) \left[\cos \frac{2\pi nk}{N} - j \sin \frac{2\pi nk}{N} \right], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ DFT[y(kT)] &= T \frac{N}{2} [Y_c - jY_s] \quad (n \hat{=} l) \end{aligned} \quad (2-18)$$

DFT ispitnog signala je, uz $n \hat{=} l$, opisana izrazom:

$$\begin{aligned} DFT[u(kT)] &= T \sum_{k=0}^{N-1} U_m \sin\left(\frac{2\pi kl}{N}\right) e^{-j\frac{2\pi kl}{N}} = T \frac{U_m}{2j} \sum_{k=0}^{N-1} \left[e^{j\frac{2\pi kl}{N}} - e^{-j\frac{2\pi kl}{N}} \right] e^{-j\frac{2\pi kl}{N}} \\ &= T \frac{U_m}{2j} \sum_{k=0}^{N-1} \left[1 - e^{-j\frac{4\pi kl}{N}} \right] = T \frac{NU_m}{2j}. \end{aligned} \quad (2-19)$$

Iz (2-18) i (2-19) slijedi:

$$\frac{DFT[y(kT)]}{DFT[u(kT)]} = \frac{Y(e^{j\omega T})}{U(e^{j\omega T})} = G(e^{j\omega T}) = j \frac{Y_c - jY_s}{U_m} = \frac{Y_s + jY_c}{U_m}. \quad (2-20)$$

Korištenjem DFT ili FFT na ispitnom signalu $u(kT)$ i izlaznom signalu $y(kT)$ za odabranu frekvenciju dobije se vrijednost frekvencijske karakteristike u jednoj točki.

Postupak računanja je vrlo točan zbog metode najmanjih kvadrata, a primjenom FFT i vrlo brz.

FFT (Fast Fourier Transform)

U izrazu za DFT (2-16) obavlja se množenje signala $y(kT)$ s:

$$e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = W^{nk}, \quad (2-21)$$

gdje je:

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}} = \cos \frac{2\pi}{N} - j \sin \frac{2\pi}{N}.$$

Prema tome, izraz (2-16) poprima oblik

$$DFT[y(kT)] = T \sum_{k=0}^{N-1} y(kT) W^{nk}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (2-22)$$

Očito je da je za proračun jedne točke na frekvencijskoj karakteristici potrebno N operacija množenja i N operacija zbrajanja. Prema tome za N točaka na frekvencijskoj karakteristici bit će potrebno obaviti N^2 množenja i N^2 zbrajanja.

Za primjenu FFT važno je uočiti da W^{nk} posjeduje ciklička svojstva. Tako npr. za $N = 8$ vrijedi:

$$\begin{aligned} W^0 &= W^8 = W^{16} = \dots 1 \\ W^1 &= W^9 = W^{17} = \dots \sqrt{2}/2 - j\sqrt{2}/2 \\ W^2 &= W^{10} = W^{18} = \dots -j \\ W^4 &= W^{12} = W^{20} = \dots -1 \\ W^6 &= W^{14} = W^{22} = \dots j \end{aligned} \quad (2-23)$$

Ako je $N = 2^\gamma$, gdje je γ cijeli broj, onda se broj množenja N^2 može reducirati na $N \cdot \log_2 N$.

Primjer:

$$N = 1024$$

$$N^2 = 1024^2 \approx 1,049 \cdot 10^6$$

↓ redukcija

$$1,024 \cdot 10^4 \rightarrow 100 \text{ puta manje računskih operacija}$$

Računanje iznosa frekvencijske karakteristike pojedinačno za svaku frekvenciju prilično je neracionalno. Stoga se kao ispitni signal koristi signal koji sadrži više

frekvencija “odjednom”; kao ispitni signal obično se koristi sinusni signal kojem frekvencija raste od početne do krajnje vrijednosti unutar zadanog opsega.

Primjer takvog ispitnog signala je tzv. “chirp” signal opisan izrazima:

$$\begin{aligned} u(kT) &= U_0 + a(k) \sin(\omega_k kT); \quad 0 \leq k \leq N-1, \\ a(k) &= A_m f_z \left(\frac{k}{0,1N} \right) f_z \left(\frac{N-k}{0,1N} \right), \\ \omega_k &= \omega_{poc} + \frac{k}{N} (\omega_{zav} - \omega_{poc}), \end{aligned} \quad (2-24)$$

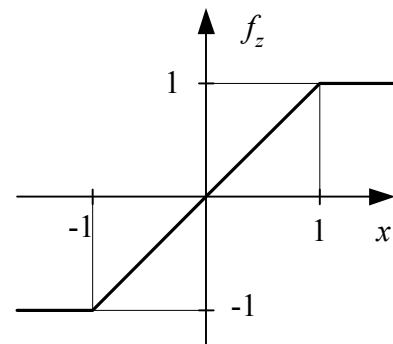
gdje je:

U_0 - konstanta koja se tako podešava da je srednja vrijednost signala $u(kT)$ jednaka nuli,

$\omega_{poc}, \omega_{zav}$ - frekvencije koje definiraju interesantni pojas frekvencija,

$a(k)$ - “težinska” funkcija (engl. window function) čija amplituda raste linearno do iznosa A_m i opada također linearno do nule,

$$f_z(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \in (-1,1), \\ 1 & \text{za } x \geq 1, \\ -1 & \text{za } x \leq -1. \end{cases}$$

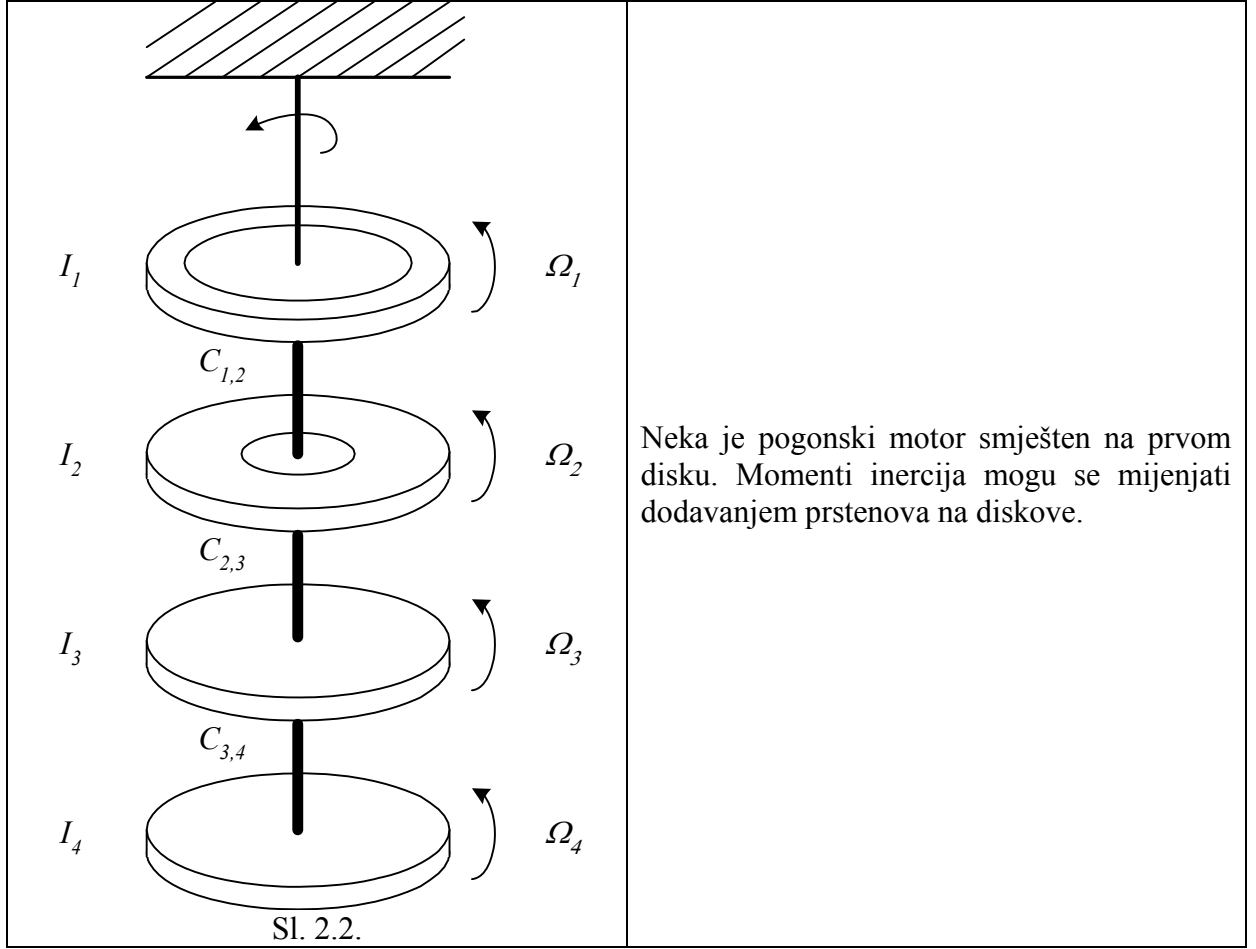


Sl. 2.1.

Važno svojstvo “chirp” signala je da posjeduje približno glatku amplitudno-frekvencijsku karakteristiku u zadanom pojasu frekvencija.

Dakle, potrebno je poznavati proces u tolikoj mjeri da se može procijeniti njegov frekvencijski pojas.

Primjer: Elektromehanički slog s četiri zamašne mase povezane s tri elastične osovine



Matematički model elektromehaničkog sloga opisan je sljedećim izrazima:

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + D_{1,2}(\Omega_1 - \Omega_2) + C_{1,2}(\Theta_1 - \Theta_2) + D_1\Omega_1 = M, \quad (2-25)$$

$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + D_{1,2}(\Omega_2 - \Omega_1) + C_{1,2}(\Theta_2 - \Theta_1) + D_2\Omega_2 + D_{2,3}(\Omega_2 - \Omega_3) + C_{2,3}(\Theta_2 - \Theta_3) = 0, \quad (2-26)$$

$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + D_{2,3}(\Omega_3 - \Omega_2) + C_{2,3}(\Theta_3 - \Theta_2) + D_3\Omega_3 + D_{3,4}(\Omega_3 - \Omega_4) + C_{3,4}(\Theta_3 - \Theta_4) = 0, \quad (2-27)$$

$$I_4 \frac{d\Omega_4}{dt} + D_{3,4}(\Omega_4 - \Omega_3) + C_{3,4}(\Theta_4 - \Theta_3) + D_4\Omega_4 = 0, \quad (2-28)$$

$$\frac{d\Theta_i}{dt} = \Omega_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2-29)$$

gdje su:

$C_{1,2}, \dots, C_{3,4}$ - konstante krutosti [Nm/rad];

$D_1, \dots, D_4; D_{1,2}, \dots, D_{3,4}$ - konstante mehaničkog prigušenja [Nms].

Zanemarujemo konstante prigušenja ($D_1 = D_2 = \dots = D_{1,2} = D_{3,4} = 0$).

Potrebno je identificirati matematički model u obliku:

$$\frac{\Omega_1(s)}{M(s)} = G(s). \quad (2-30)$$

Opći oblik prijenosne funkcije mehaničkog sloga dan je izrazom:

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\beta_0 s^6 + \beta_2 s^4 + \beta_4 s^2 + \beta_6}{s^7 + \alpha_2 s^5 + \alpha_4 s^3 + \alpha_6 s} = \frac{\beta_0 \prod_{i=1}^3 (s^2 + \omega_{fi}^2)}{s \prod_{j=1}^3 (s^2 + \omega_{ej}^2)}, \quad (2-31)$$

gdje je:

$$\alpha_2 = \frac{C_{1,2}}{I_1} + \frac{C_{1,2}}{I_2} + \frac{C_{2,3}}{I_2} + \frac{C_{2,3}}{I_3} + \frac{C_{3,4}}{I_3} + \frac{C_{3,4}}{I_4},$$

$$\alpha_4 = C_{1,2}C_{2,3} \left(\frac{1}{I_1 I_2} + \frac{1}{I_1 I_3} + \frac{1}{I_2 I_3} \right) + C_{1,2}C_{3,4} \left(\frac{1}{I_1 I_3} + \frac{1}{I_1 I_4} + \frac{1}{I_2 I_3} + \frac{1}{I_2 I_4} \right) + C_{2,3}C_{3,4} \left(\frac{1}{I_2 I_3} + \frac{1}{I_2 I_4} + \frac{1}{I_3 I_4} \right),$$

$$\alpha_6 = C_{1,2}C_{2,3}C_{3,4} \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4},$$

$$\beta_0 = \frac{1}{I_1},$$

$$\beta_2 = \frac{C_{1,2}}{I_2} + \frac{C_{2,3}}{I_2} + \frac{C_{2,3}}{I_3} + \frac{C_{3,4}}{I_3} + \frac{C_{3,4}}{I_4},$$

$$\beta_4 = C_{1,2}C_{2,3} \frac{1}{I_2 I_3} + C_{1,2}C_{3,4} \left(\frac{1}{I_2 I_3} + \frac{1}{I_2 I_4} \right) + C_{2,3}C_{3,4} \left(\frac{1}{I_2 I_3} + \frac{1}{I_2 I_4} + \frac{1}{I_3 I_4} \right),$$

$$\beta_6 = C_{1,2}C_{2,3}C_{3,4} \frac{I_1 + I_2 + I_3 + I_4}{I_1 I_2 I_3 I_4}.$$

Neka su parametri mehaničkog sloga:

$$C_{1,2} = 1000 [\text{Nm/rad}]$$

$$C_{2,3} = 1500 [\text{Nm/rad}]$$

$$C_{3,4} = 2000 [\text{Nm/rad}]$$

$$I_1 = 0,1 [\text{kgm}^2/\text{rad}]$$

$$I_2 = 0,15 [\text{kgm}^2/\text{rad}]$$

$$I_3 = 0,2 [\text{kgm}^2/\text{rad}]$$

$$I_4 = 0,25 [\text{kgm}^2/\text{rad}]$$

Za ove parametre (i konstante mehaničkog prigušenja = 0) dobije se:

$$G(s) = \frac{\Omega_1(s)}{M(s)} = \frac{10[s^6 + 42167s^4 + 4,10 \cdot 10^8 s^2 + 4 \cdot 10^{11}]}{s[s^6 + 52167s^4 + 7,65 \cdot 10^8 s^2 + 2,8 \cdot 10^{12}]} \quad (2-32)$$

Prema (2-32) vlastite frekvencije neprigušenih oscilacija iznose:

$$\omega_{f1} = 33,1 [\text{rad/s}]$$

$$\omega_{e1} = 74,3 [\text{rad/s}]$$

$$\omega_{f2} = 114,0 [\text{rad/s}]$$

$$\omega_{e2} = 131,5 [\text{rad/s}]$$

$$\omega_{f3} = 167,5 [\text{rad/s}]$$

$$\omega_{e3} = 171,3 [\text{rad/s}],$$

gdje je:

ω_e - vlastita frekvencija slobodno oscilirajućih zamašnih masa,

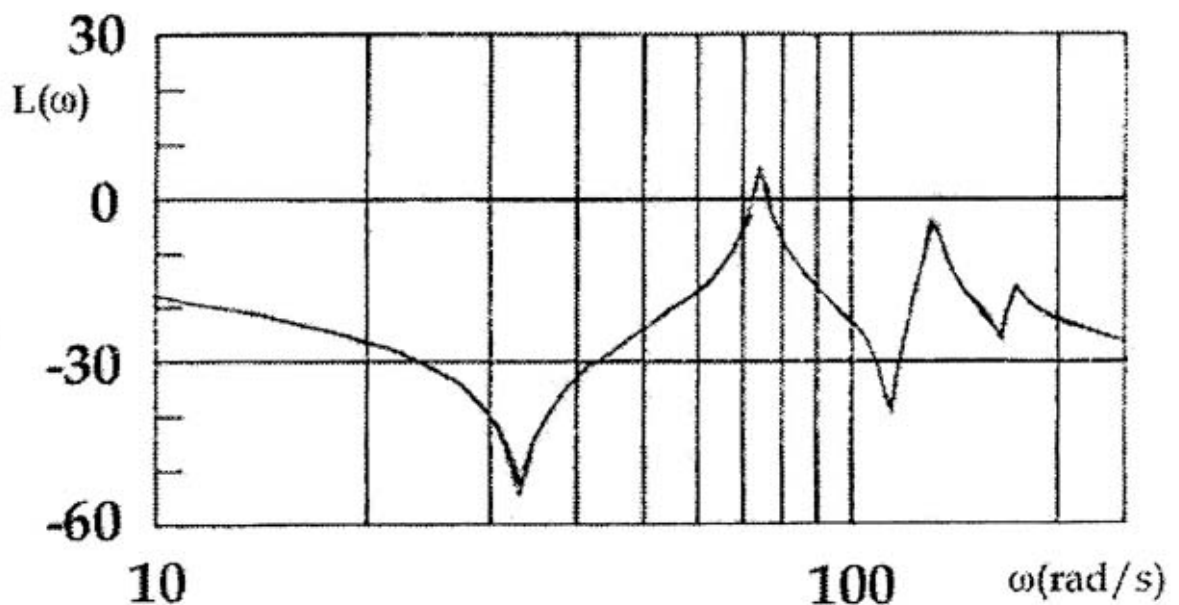
ω_f - vlastita frekvencija kojom radni mehanizam vibrira pri zakačenom motoru.

Za slučaj : $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_{1,2} = D_{2,3} = D_{3,4} = 0,2 [\text{Nms}]$ dobije se:

$$G(s) = \frac{\Omega_1(s)}{M(s)} = \frac{10[s^6 + 86s^5 + 42188s^4 + 1,95 \cdot 10^5 s^3 + 4,1 \cdot 10^8 s^2 + 5,60 \cdot 10^8 s + 4 \cdot 10^{11}]}{s^7 + 12,6s^6 + 52219s^5 + 4,23 \cdot 10^5 s^4 + 7,66 \cdot 10^8 s^3 + 3,16 \cdot 10^9 s^2 + 2,8 \cdot 10^{12} s + 3,2 \cdot 10^{12}} \quad (2-33)$$

Polovi i nule prijenosne funkcije (2-33) iznose:

| <u>Nule</u> | <u>Polovi</u> |
|-----------------------|-----------------------|
| $-0,5558 \pm j33,10$ | $-1,1252 \pm j74,25$ |
| $-1,4416 \pm j114,03$ | $-1,9923 \pm j131,50$ |
| $-2,3027 \pm j167,51$ | $-2,6110 \pm j171,31$ |
| | $-1,1429$ |



Sl. 2.3. Logaritamska amplitudno-frekvencijska karakteristika $\Omega_1(j\omega) / M(j\omega)$ prijenosne funkcije (2-33)

Frekvencijska karakteristika dobivena identifikacijom treba biti čim bliža frekvencijskoj karakteristici dobivenoj iz poznatog matematičkog modela (Sl. 2.3.).

Identifikacija mehaničkog sloga pomoću “chirp” signala

Odaberemo period uzorkovanja:

$$T = 12,5 \text{ ms}$$

↓

$$\omega_N = \frac{\pi}{T} \approx 250 [\text{rad/s}] - \text{Nyquistova frekvencija.}$$

Pri sintezi sustava obično je T 5-10 puta manje od najmanje dominantne vremenske konstante procesa, dok pri identifikaciji obično nije nužno uzimati tako veliku rezervu.

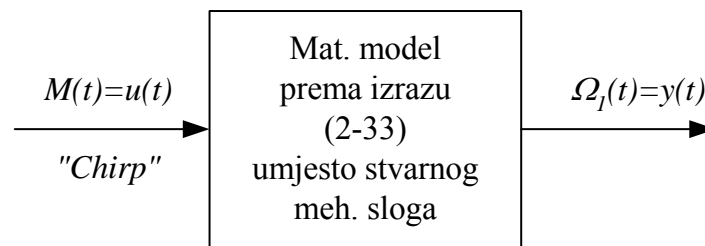
Frekvencijska karakteristika određuje se kao kvocijent diskretne Fourierove transformacije odziva i pobude sustava (*DFT* izvedena je kao *FFT*).

Odabrano je 256 uzoraka amplituda ulaznog i izlaznog signala.

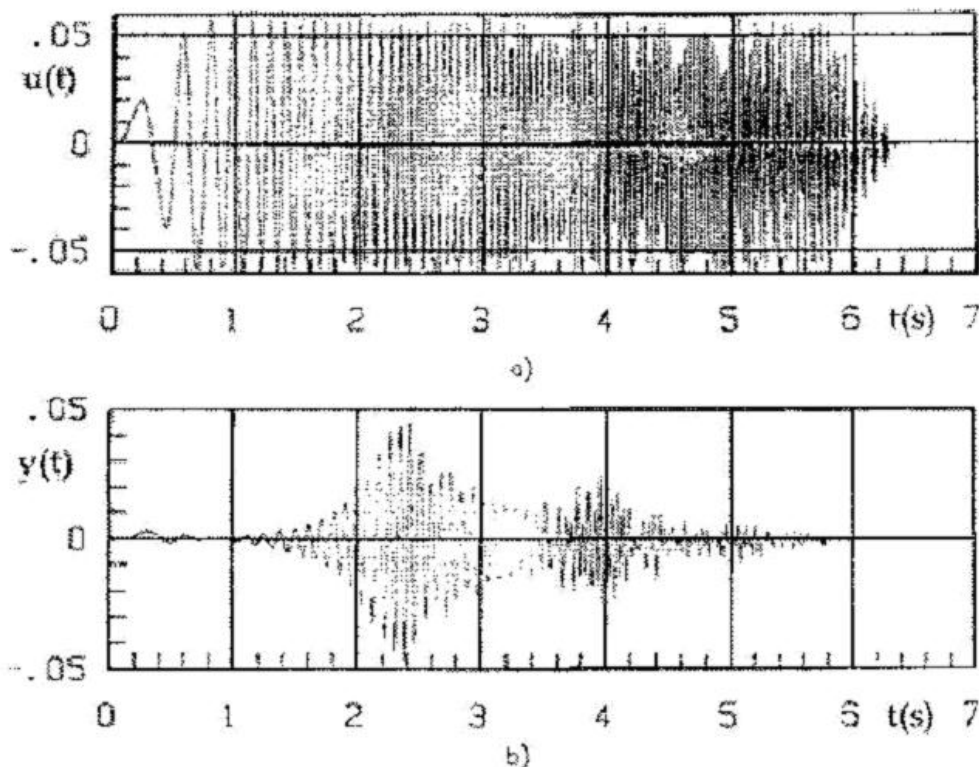
Procjena propusnog opsega sustava:

$$\omega_{poc} = \omega_d = 10 [\text{rad/s}],$$

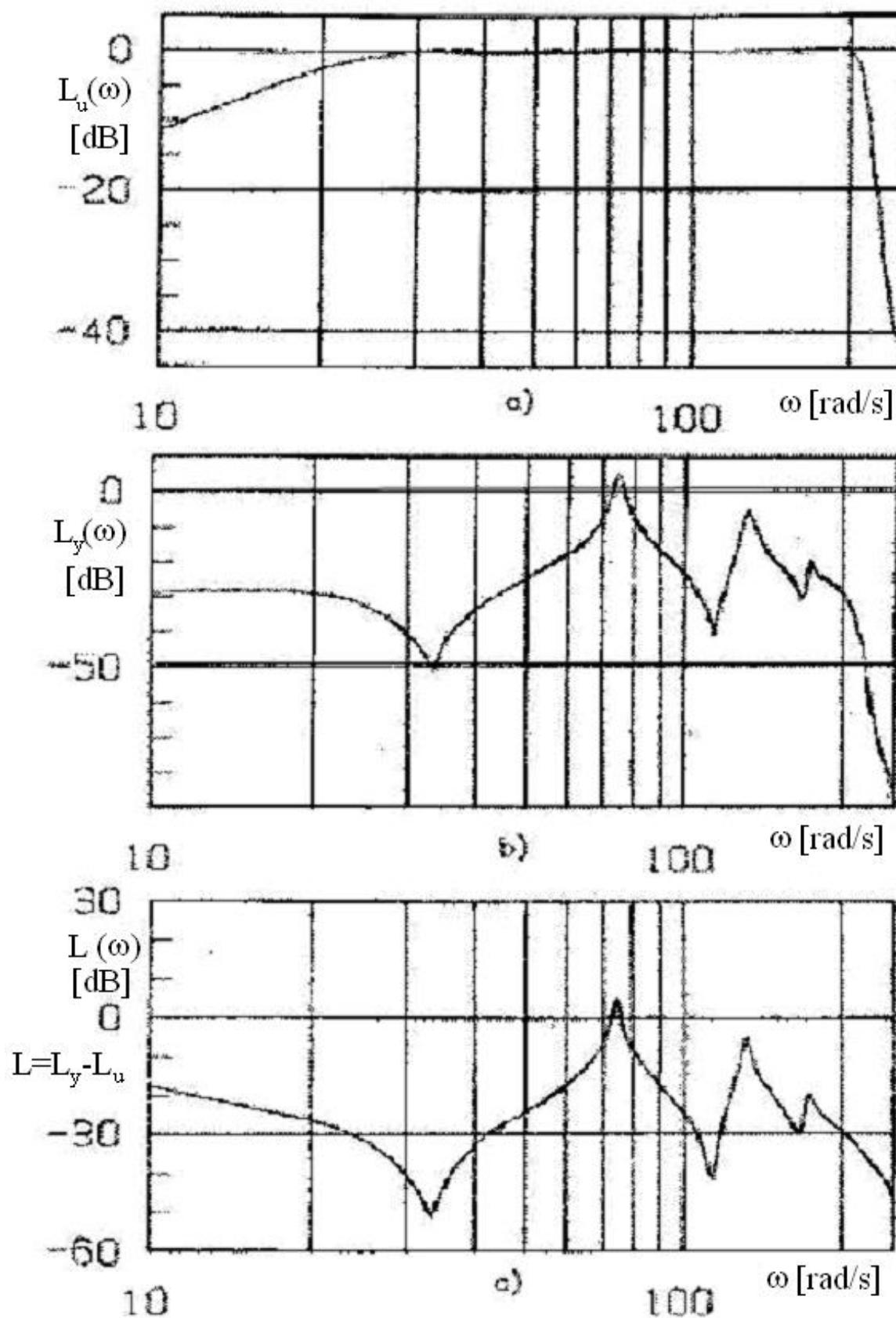
$$\omega_{zav} = \omega_g = 300 [\text{rad/s}].$$



Sl. 2.4.



Sl. 2.5. a) pobudni "chirp" signal (moment motora M),
b) odziv sustava (brzina vrtnje Ω_1) na "chirp" signal.



Sl. 2.6. a) Frekvencijska karakteristika pobudnog "chirp" signala (moment motora M), b) frekvencijska karakteristika odziva (brzina vrtnje Ω_1), c) estimirana frekvencijska karakteristika sustava.

Estimirane vlastite frekvencije iznose:

$$\hat{\omega}_{f1} = 33,5 [\text{rad/s}]$$

$$\hat{\omega}_{e1} = 74,9 [\text{rad/s}]$$

$$\hat{\omega}_{f2} = 114,3 [\text{rad/s}]$$

$$\hat{\omega}_{e2} = 132,1 [\text{rad/s}]$$

$$\hat{\omega}_{f3} = 166,6 [\text{rad/s}]$$

$$\hat{\omega}_{e3} = 173,5 [\text{rad/s}]$$

Iz estimiranih vlastitih frekvencija može se odrediti prijenosna funkcija $G(s)$ u obliku danom izrazom (2-31).

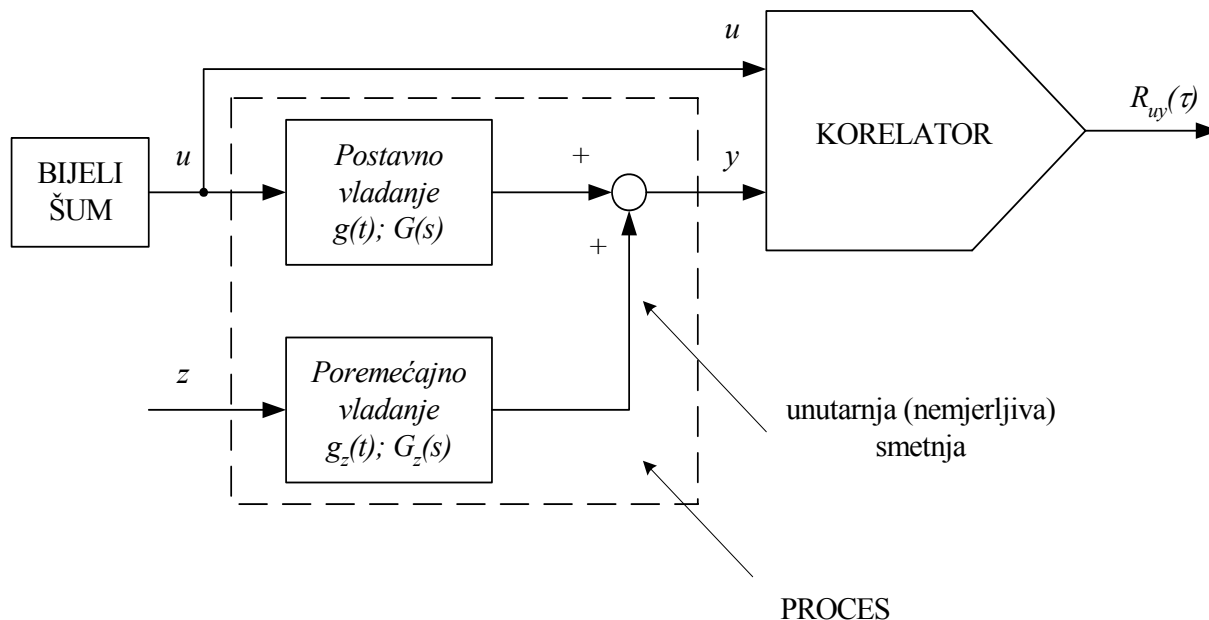
Pretvorba kontinuiranog matematičkog modela procesa u diskretni ekvivalent:

- ekvivalencija na temelju jednakog impulsnog odziva;
- ekvivalencija na temelju jednakog odziva na skokovitu pobudnu funkciju;
- Tustinova aproksimacija;
- ekvivalencija uz ekstrapolator nultog reda na ulazu kontinuiranog sustava.

Neparametarskom identifikacijom došlo se do parametarskog modela.

2.2. Identifikacija procesa pomoću korelacijske analize

Cilj primjene korelacijske analize u identifikaciji je određivanje impulsnog odziva procesa odnosno težinske funkcije procesa (prema shemi na slici 2.7.).



Sl. 2.7.

- z – stohastički signal (slučajni signal).
U svakom trenutku moguće je da vrijednost signala z poprimi slučajni iznos iz određenog skupa vrijednosti.
Dakle, slučajni stohastički signali ne vladaju se većinom prema definiranim zakonitostima, tako da poznavanje ukupne prošlosti signala (u nekom trenutku) ne omogućuje točno predviđanje signala u budućnosti.
Stoga se stohastički signali, ili općenito stohastički procesi, opisuju metodama računa vjerojatnosti (statistike).

Opis stohastičkih procesa

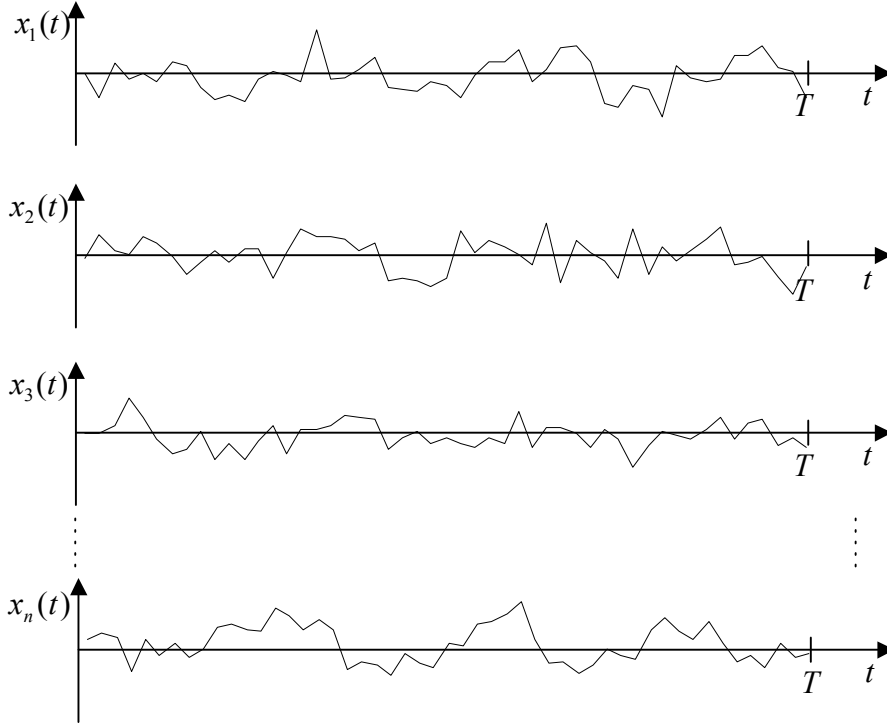
Funkcija $x_i(t)$ označava se stohastičkom funkcijom, ako su vrijednosti x_i u trenutku t određene samo u statističkom smislu. Time je $x_i(t)$ također i slučajna varijabla.

Primjeri stohastičkih funkcija (varijabli) su:

- variranje napona u električnim mrežama;
- smetnje, koje nastaju pri regulaciji letećih objekata uslijed utjecaja parametara zraka;
- toplinski šum u elektroničkim komponentama.

Ako se, npr. provede i registrira neko mjerenje pod istim uvjetima više puta u trajanju T , dobije se skup mjerenja $x_i(t)$, odnosno skup stohastičkih vremenskih funkcija (Sl. 2.8.).

Takav skup stohastičkih vremenskih funkcija (ansamble) označava se stohastičkim procesom $X(t)$.



Sl. 2.8.

Uz stohastičke procese obično se definiraju sljedeći pojmovi:

a) *Stacionarnost (stacionarni stohastički procesi)*

Stohastički proces $X(t)$ označava se stacionarnim ako su njegova statistička svojstva neovisna o vremenskom pomaku τ što ima za posljedicu da je srednja vrijednost neovisna o vremenu:

$$E[X(t)] = \bar{X}(t) = \bar{X} = konst. \quad (2-34)$$

Osim toga, ovo svojstvo implicira da $X(t)$ i $X(t+\tau)$ za proizvoljni τ imaju istu funkciju razdiobe i funkciju gustoće razdiobe:

$$f(x, t) = f(x, t + \tau). \quad (2-35)$$

Izraz (2-34) predstavlja definiciju stacionarnosti u širem smislu.

b) *Ergodičnost (ergodički stacionarni stohastički procesi)*

Ergodički proces $X(t)$ predstavlja onaj stacionarni stohastički proces za kojeg vrijedi:

$$E[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_i(t) dt = \bar{x}_i, \quad (2-36)$$

$$\bar{X} = \bar{x}_i.$$

Izraz (2-36) predstavlja definiciju ergodičnosti u strogom smislu.

Vrijednost očekivanja slučajnih funkcija $x_1(t), \dots, x_n(t)$ jednaka je srednjoj vrijednosti jedne (bilo koje) odabrane slučajne funkcije $x_i(t)$ (reprezentant), gdje se srednja vrijednost promatra u dovoljno dugom vremenu (teoretski beskonačno).

Ergodički proces u širem smislu je onaj stohastički proces za koji vrijedi:

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t) \cdot X(t + \tau)]. \quad (2-37)$$

Matematičko očekivanje slučajnog procesa je definirano izrazom:

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \bar{X}, \quad (2-38)$$

gdje je $f(x)$ - funkcija gustoće razdiobe.

Veza između funkcije gustoće razdiobe i funkcije razdiobe dana je izrazom:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad (2-39)$$

gdje je $F(x)$ - funkcija razdiobe.

Funkcija razdiobe $F_{\xi}(x)$ se definira kao vjerojatnost da slučajna varijabla ξ poprimi vrijednost manju ili jednaku x .

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x). \quad (2-40)$$

Svojstva funkcije razdiobe:

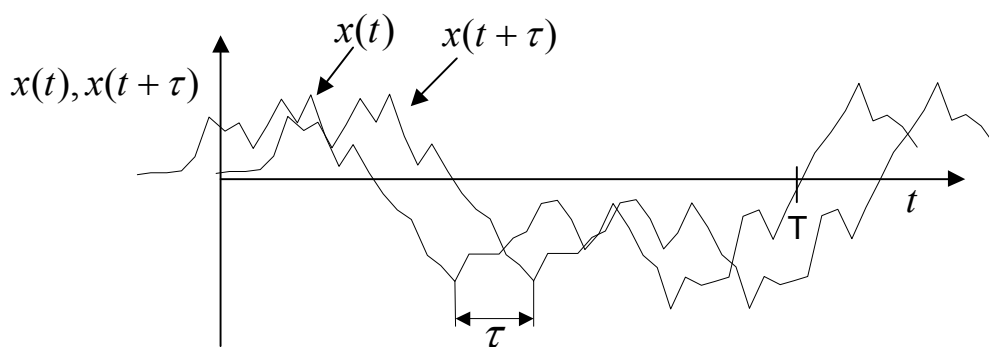
- 1) $0 \leq F_{\xi} \leq 1$;
- 2) $F_{\xi}(-\infty) = 0, F_{\xi}(\infty) = 1$
- 3) F_{ξ} je monotonno rastuća funkcija, jer za $x_1 > x_2$ vrijedi:
 $F_{\xi}(x_2) - F_{\xi}(x_1) = P(x_1 < \xi \leq x_2) > 0$;
- 4) F_{ξ} može biti kontinuirana ili stepeničasta.

Iz $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ slijedi:

$$\left. \begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(v)dv = P(\xi \leq x) \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{za slučaj kontinuirane slučajne varijable}$$

Za praktično istraživanje stohastičkih procesa nisu prikladne funkcije gustoće razdiobe, gdje se operira skupom slučajnih funkcija $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Zato se za daljnje razmatranje pretpostavlja ergodičnost procesa i uzima jedna slučajna funkcija kao reprezentant cijelog stohastičkog procesa te se u daljnjem tekstu indeks i izostavlja:

$$x_i(t) = x(t). \quad (2-41)$$



Sl. 2.9.

Promatra se slučajna funkcija $x(t)$ i vremenski pomaknuta funkcija $x(t + \tau)$ (Sl. 2.9.) i definira se autokorelacijska funkcija (AKF) kao:

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t + \tau) dt. \quad (2-42)$$

AKF predstavlja mjeru unutarnje povezanosti funkcije $x(t)$ odnosno stohastičkog procesa $X(t)$.

Za diskretne sustave AKF je definirana izrazom:

$$R_{xx} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) \cdot x(k + \tau). \quad (2-43)$$

Vrijednosti funkcija $x(t)$ i $x(t + \tau)$ obično se razlikuju. Ova razlika je utoliko manja, ukoliko je τ manji, odnosno vrijedi:

$$R_{xx}(\tau = 0) \geq |R_{xx}(\tau)|. \quad (2-44)$$

Dokaz:

$$[x(t) \pm x(t + \tau)]^2 \geq 0. \quad (2-45)$$

Slijedi:

$$x^2(t) + x^2(t + \tau) \geq \pm 2x(t) \cdot x(t + \tau). \quad (2-46)$$

Integracijom i množenjem s $\frac{1}{2T}$ dobije se:

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt + \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t + \tau) dt \geq \pm \frac{1}{2T} \int_{-T}^T 2x(t)x(t + \tau) dt. \quad (2-47)$$

Za $T \rightarrow \infty$, uz pretpostavku stacionarnosti funkcije $x(t)$, dobije se:

$$R_{xx}(0) + R_{xx}(0) \geq \pm 2R_{xx}(\tau) \quad (2-48)$$

odakle slijedi:

$$R_{xx}(0) \geq \pm R_{xx}(\tau). \quad (2-49)$$

Za $\tau = 0$, iz izraza (2-42) slijedi:

$$R_{xx}(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (2-50)$$

Relacija (2-50) predstavlja izraz za srednju snagu signala $x(t)$.

Za $\tau \rightarrow \infty$, $x(t)$ i $x(t + \tau)$ su statistički neovisni signali, tj. oni ne koreliraju.

Ako se želi ispitati međusobna povezanost dvaju ergodičkih stohastičkih procesa $X(t)$ i $Y(t)$, onda se iz skupa slučajnih funkcija mogu izdvojiti funkcije

$$\begin{aligned} x_i(t) &\rightarrow x(t), \\ y_i(t) &\rightarrow y(t) \end{aligned} \quad (2-51)$$

i promatrati njihova međusobna ovisnost pomoću međukorelacijske (kroskorelacijske) funkcije (MKF), dane izrazima:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t + \tau) dt, \quad (2-52)$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t - \tau)y(t) dt = R_{yx}(-\tau). \quad (2-53)$$

Za diskretne stohastičke procese MKF se definira kao:

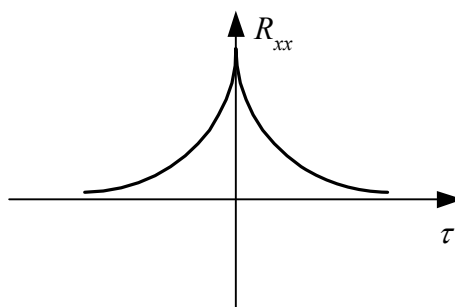
$$R_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)y(k+\tau). \quad (2-54)$$

Dosadašnje razmatranje odnosilo se na skalarne procese. Za razliku od njih, vektorski procesi se opisuju pomoću korelacijske matrice.

Važnija svojstva korelacijskih funkcija

a) AKF je parna funkcija:

$$R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau). \quad (2-55)$$



Sl. 2.10.

Dokaz:

$$\begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t+\tau) dt, \\ R_{xx}(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \cdot x(t-\tau) dt, \\ \sigma &= t - \tau \rightarrow t = \sigma + \tau \\ &\Downarrow \\ R_{xx}(-\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(\sigma + \tau) \cdot x(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Zbog stacionarnosti, granice integriranja u prethodnom izrazu nemaju nikakav utjecaj.

b) $R_{xx}(0) \geq R_{xx}(\tau)$ ($R_{xx}(0)$ predstavlja srednju snagu stohastičkog signala).

c) $x(t)$ i $x(t+\tau)$ su statistički neovisni za $\tau \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0 \quad \text{za } \bar{x} = 0. \quad (2-56)$$

d) MKF nije parna funkcija, ali vrijedi:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau). \quad (2-57)$$

$$e) \quad |R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_{xx}(0) + R_{yy}(0)]. \quad (2-58)$$

$$f) \quad \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} R_{xy}(\tau) = 0. \quad (2-59)$$

Svojstvo f) vrijedi ako barem jedan signal ima srednju vrijednost nula i ako signali ne sadrže periodičke komponente.

Na temelju dosadašnjih razmatranja provodi se korelacijska analiza prema slici 2.7.

Duhamelov konvolucijski integral glasi:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\sigma)u(t-\sigma)d\sigma + \int_0^{\infty} g_z(\sigma)z(t-\sigma)d\sigma. \quad (2-60)$$

Međukorelacijska funkcija R_{yu} prema (2-52) glasi:

$$R_{yu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)u(t+\tau)dt.$$

Prema (2-60) može se pisati:

$$R_{yu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} g(\sigma)u(t-\sigma)u(t+\tau)d\sigma dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_0^{\infty} g_z(\sigma)z(t-\sigma)u(t+\tau)d\sigma dt. \quad (2-61)$$

Preuređenjem slijedi:

$$R_{yu}(\tau) = \int_0^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t-\sigma)u(t+\tau)dt + \right] g(\sigma)d\sigma + \int_0^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t-\sigma)u(t+\tau)dt \right] g_z(\sigma)d\sigma, \quad (2-62)$$

$$t - \sigma = v \rightarrow t = v + \sigma, \\ R_{yu}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uv}(\tau + \sigma)g(\sigma)d\sigma + \int_0^{\infty} R_{zu}(\tau + \sigma)g_z(\sigma)d\sigma. \quad (2-63)$$

Ako su signali $z(t)$ i $u(t)$ nekorelirani (statistički neovisni), te barem jedan od signala sa srednjom vrijednošću jednakom 0, tada je:

$$R_{zu}(\tau) = 0 \quad \text{za svaki } \tau. \quad (2-64)$$

Iz (2-63) i (2-64) slijedi:

$$R_{uy}(\tau) = R_{yu}(-\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma. \quad (2-65)$$

Ako je ispitni signal bijeli šum (spektralne gustoće snage $S_{uu}(\omega) = c$), njegova je AKF:

$$R_{uu}(\tau) = c\delta(\tau), \quad (2-66)$$

pa prema (2-65) i (2-66) slijedi MKF ispitnog (bijelog šuma) i izlaznog signala:

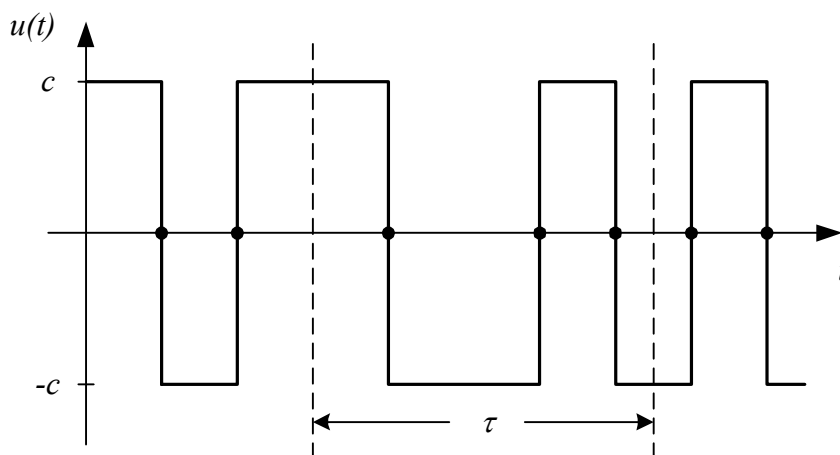
$$R_{uy}(\tau) = cg(\tau). \quad (2-67)$$

U primjenama je zadovoljavajuće da je spektralna gustoća snage $S_{uu}(\omega)$ približno konstantna u frekencijskom području u kojem $|G(j\omega)|$ ispitivanog procesa ne isčezava.

Stoga se u praksi, umjesto bijelog šuma, koriste ispitni signali koji imaju svojstva bijelog šuma u interesantnim frekencijskim područjima.

2.2.1. Identifikacija pomoću korelacijske analize korištenjem binarnog i ternarnog signala šuma

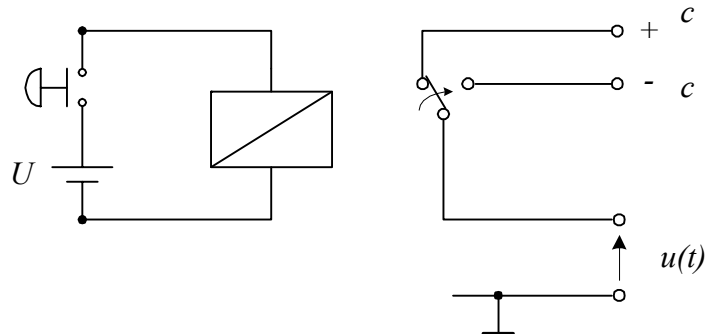
Kao ispitni signal $u(t)$ koristi se stohastički “telegrafski” signal koji mijenja stanja u slučajnim vremenskim trenucima, sa stanja $+c$, na $-c$ i obrnuto, kao što je prikazano slikom 2.11.



Sl. 2.11.

Praktične strane “telegrafskih” signala su:

- a) jednostavno generiranje, upravljanjem releja (Sl. 2.12.);



Sl. 2.12.

- b) jednostavno određivanje međukorelacijske funkcije ovakvog signala $u(t)$ i izlaznog signala procesa;
- c) gustoća snage velika.

Svojstva “telegrafskog” signala

- Vjerojatnost da se u intervalu τ dogodi n promjena predznaka određena je Poissonovom raspodjelom:

$$P(n) = \frac{(\nu|\tau|)^n}{n!} e^{-\nu|\tau|}, \quad (2-68)$$

pri čemu se s ν označava srednji broj promjena predznaka signala $u(t)$ u vremenskoj jedinici.

Vjerojatnost opada s n , kako slijedi:

$$0 \text{ promjena} \rightarrow P(0) = e^{-\nu|\tau|},$$

$$1 \text{ promjena} \rightarrow P(1) = \nu|\tau| e^{-\nu|\tau|},$$

$$2 \text{ promjene} \rightarrow P(2) = \left[\frac{(\nu|\tau|)^2}{2!} \right] e^{-\nu|\tau|},$$

$$\vdots$$

- Umnožak $u(t) \cdot u(t + \tau)$ “telegrafskog” signala ima vrijednost $+c^2$ ili $-c^2$, ovisno o tome imaju li oba signala u umnošku isti ili različit predznak:

$$E\{u(t)u(t + \tau)\} = c^2 \quad \text{za } \tau = 0;$$

$$E\{u(t)u(t + \tau)\} = -c^2 \quad \text{za } \tau > 0,$$

ako kroz vremenski posmak τ (u odnosu na $\tau = 0$) nastupi neparan broj promjena predznaka (1,3,5...);

$$E\{u(t)u(t + \tau)\} = +c^2 \quad \text{za } \tau > 0,$$

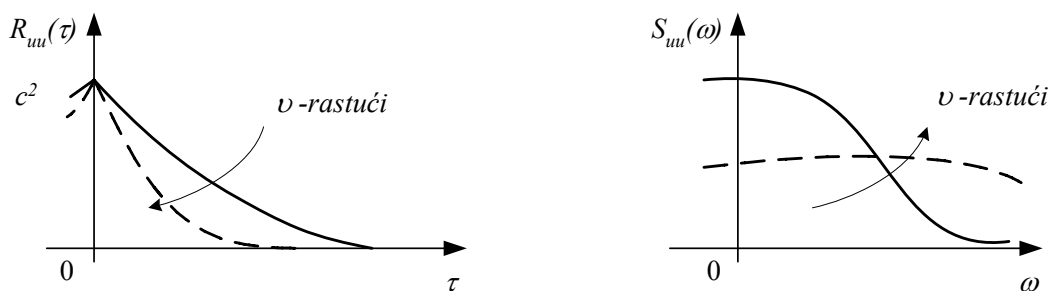
ako je paran broj promjena predznaka (2,4,6,...).

Promjene predznaka nastupaju slučajno, te vrijedi:

$$\begin{aligned} E\{u(t)u(t+\tau)\} &= \overline{u(t)u(t+\tau)} = R_{uu}(\tau) = \\ &= c^2 [P(0) + P(2) + \dots] - c^2 [P(1) + P(3) + \dots] = c^2 e^{-\nu|\tau|} \left[1 - \frac{\nu|\tau|}{1!} + \frac{(\nu|\tau|)^2}{2!} - \dots \right]. \end{aligned} \quad (2-69)$$

Iz (2-73) slijedi pripadajuća AKF (Sl. 2.13.):

$$R_{uu}(\tau) = c^2 \cdot e^{-2\nu|\tau|}. \quad (2-70)$$



Sl. 2.13.

Spektralna gustoća snage (Digresija)

Deterministički procesi u linearnim dinamičkim sustavima mogu se opisati:

- u vremenskom području (diferencijalne jednadžbe);
- u frekvencijskom području (frekvencijski hodografi, frekvencijski spektri, prijenosne funkcije).

Ideja je da se Fourierova transformacija primijeni i na stohastičke procese.

Ako je poznata AKF stohastičkog signala $x(t)$, tada se formalno pomoću Fourierove transformacije dobiva spektralna gustoća snage (spektar snage) signala $x(t)$:

$$S_{xx}(\omega) = F\{R_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2-71)$$

Izraz (2-71) predstavlja realnu funkciju od ω (posljedica parnosti funkcije $R_{xx}(\tau)$).

Spektralna gustoća snage za diskretne signale dana je izrazom:

$$S_{xx}(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot z^{-\tau}. \quad (2-72)$$

Iz poznate spektralne gustoće snage, primjenom inverzne Fourierove transformacije dobije se AKF stohastičkog signala:

$$R_{xx}(\tau) = F^{-1}\{S_{xx}(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2-73)$$

Za diskretne signale dobije se:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_{xx}(z) z^{\tau-1} dz. \quad (2-74)$$

Obje veličine (S_{xx} i R_{xx}) sadrže iste informacije o $X(t)$.

Budući da je $R_{xx}(\tau)$ parna funkcija, vrijedi:

$$S_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos \omega\tau d\tau \quad (2-75)$$

kao i

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos \omega\tau d\omega. \quad (2-76)$$

Srednja snaga (kontinuiranog odnosno diskretnog) signala definirana je izrazima:

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega, \quad (2-77)$$

$$R_{xx}(0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} S_{xx}(z) \frac{dz}{z}. \quad (2-78)$$

Analogno se za međukorelacijsku funkciju dvaju stohastičkih signala $x(t)$ i $y(t)$ dobije međukorelacijski spektar snage:

$$S_{xy}(j\omega) = F\{R_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2-79)$$

Međukorelacijski spektar snage je općenito neparna funkcija kompleksne varijable.

Inverznom Fourierovom transformacijom se iz međukorelacijskog spektra snage dobije međukorelacijska funkcija dvaju stohastičkih signala:

$$R_{xy}(\tau) = F^{-1}\{S_{xy}(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(j\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (2-80)$$

Parsevalova formula i energija signala (Digresija)

Ako su $f_1(t)$ i $f_2(t)$ realne kvadratično integrabilne neprekinute funkcije $\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_i^2(t) dt < \infty; \text{ za } i = 1, 2 \right)$, tada vrijedi:

$$F \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right\} = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega), \quad (2-81)$$

$$F \{ f_1(t) f_2(t) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\nu) F_2[j(\omega - \nu)] d\nu. \quad (2-82)$$

Za $\omega = 0$ i $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$, iz prethodne jednadžbe slijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\nu) \cdot F(-j\nu) d\nu. \quad (2-83)$$

Formalnom zamjenom ν sa ω , dobije se *Parsevalova formula*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega, \quad (2-84)$$

gdje je:

$|F(j\omega)|^2$ - spektar gustoće energije.

Površina ispod krivulje $|F(j\omega)|^2$ u frekvencijskom području $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |F(j\omega)|^2 d\omega$$

proporcionalna je *energiji signala* u tom frekvencijskom području.

Spektralna gustoća snage binarnog “telegrafskog” signala $u(t)$ dobije se prema izrazima (2-70) i (2-75):

$$S_{uu}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} c^2 e^{-2\nu|\tau|} \cos \omega \tau d\tau. \quad (2-85)$$

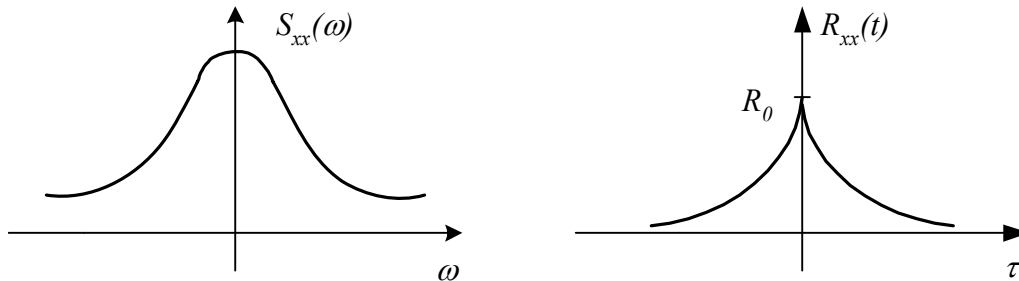
Rješenje integrala (2-85) glasi:

$$S_{uu}(\omega) = \frac{4c^2\nu}{\omega^2 + 4\nu^2}. \quad (2-86)$$

Dobiveni izraz za spektralnu gustoću snage odgovora Markovljevom procesu (Sl. 2.14.):

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2} \cdot R_0;$$

$$R_{xx}(\tau) = R_0 e^{-a|\tau|}.$$



Sl. 2.14.

Za $a \gg 1$, Markovljev proces teži bijelom šumu.

Bijeli šum (Digresija)

Spektralna gustoća snage bijelog šuma dana je izrazom:

$$S_{xx}(\omega) = c, \quad (2-87)$$

a njegova AKF izrazom:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi} c \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau d\omega = c \cdot \delta(\tau)^1. \quad (2-88)$$

Bijeli šum se fizikalno ne može realizirati budući da je srednja snaga takvog signala beskonačna:

$$R_{xx}(0) \rightarrow \infty. \quad (2-89)$$

Obojeni šum (Digresija)

Spektralna gustoća snage obojenog šuma dana je izrazom:

$$S_{xx}(\omega) = \begin{cases} c & \text{za } \omega_1 < |\omega| < \omega_2, \\ 0 & \text{izvan pojasa,} \end{cases} \quad (2-90)$$

a njegova AKF izrazom:

$$R_{xx}(\tau) = \frac{c}{\pi} \left[\frac{\sin \omega_2 \tau}{\tau} - \frac{\sin \omega_1 \tau}{\tau} \right]. \quad (2-91)$$

¹ $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega \tau) d\omega = 2\pi \delta(\tau)$

Za $\nu \gg$ binarni “telegrafski” signal poprima približno statistička svojstva bijelog šuma. Tada se $R_{uu}(\tau)$ može približno opisati pomoću δ -funkcije:

$$R_{uu}(\tau) \approx \frac{c^2}{\nu} \delta(\tau). \quad (2-92)$$

Uvrštenjem (2-92) u izraz za međukorelacijsku funkciju ispitnog i izlaznog signala (2-65) dobije se:

$$g(\tau) \approx \frac{\nu}{c^2} R_{uy}(\tau). \quad (2-93)$$

Iz relacije (2-93) razvidno je da je $g(\tau)$ direktno proporcionalna $R_{uy}(\tau)$.

Zbog oblika ispitnog “telegrafskog” signala, za izračunavanje MKF $R_{uy}(\tau)$ prikladno je koristiti definicijsku jednadžbu (2-53):

$$R_{uy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t-\tau)y(t)dt,$$

jer je za $\tau = \tau_k$:

$$u(t-\tau_k) \equiv c \cdot \text{sgn } u(t-\tau_k), \quad (2-94)$$

gdje je: sgn – funkcija predznaka,

τ_k - diskretna vrijednost pomaka.

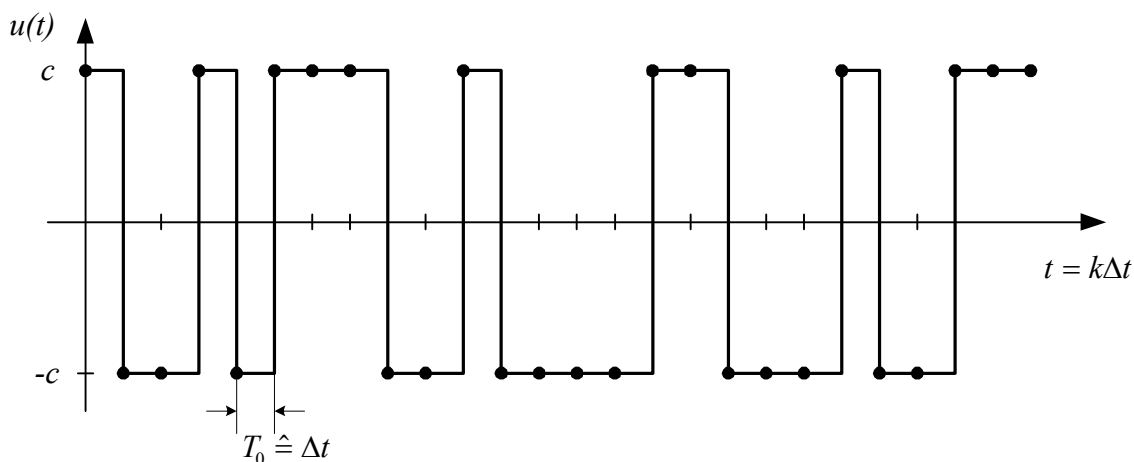
Ako je vrijeme integracije dovoljno veliko, tada iz (2-94), (2-53) i (2-93) slijedi:

$$R_{uy}(\tau_k) \approx \frac{c}{T} \int_0^T y(t) \text{sgn } u(t-\tau_k) dt, \quad (2-95)$$

$$g(\tau_k) \approx \frac{\nu}{cT} \int_0^T y(t) \text{sgn } u(t-\tau_k) dt. \quad (2-96)$$

Kvantizirani (diskretni) binarni signal šuma kao ispitni signal (Discrete Random Binary Signal - DRBS)

Ovaj signal poprima u ekvidistantnim vremenskim intervalima Δt vrijednosti $+c$ ili $-c$ (Sl. 2.15.). Promjene vrijednosti signala događaju se sasvim slučajno, ali samo na krajevima intervala Δt .



Sl. 2.15.

AKF ispitnog signala općenito je dana izrazom (2-42):

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t)u(t-\tau) d\tau.$$

Za $\tau = 0$, vrijednost integrala u prethodnom izrazu jednaka je $2c^2T$, pa srednja snaga signala iznosi:

$$R_{uu}(0) = c^2. \quad (2-97)$$

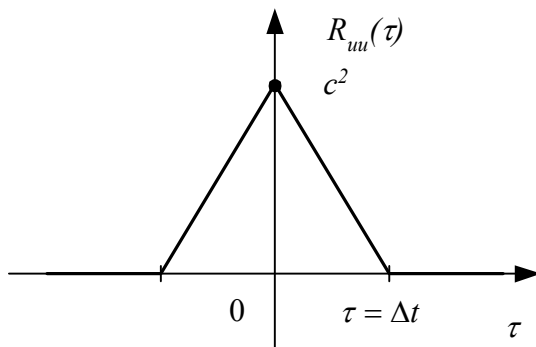
Za $|\tau| < \Delta t$ tvore se također i negativni umnošci tako da je $R_{uu}(\tau) < c^2$. Ovi negativni doprinosi proporcionalni su pomaku τ .

Za $|\tau| \geq \Delta t$ nastupaju jednako često pozitivni i negativni umnošci te je $R_{uu}(\tau) = 0$.

Na osnovi prethodnog razmatranja, dobije se autokorelacijska funkcija DRBS-a (Sl. 2.16.):

$$R_{uu}(\tau) = \begin{cases} c^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{\Delta t} \right) & \text{za } |\tau| \leq \Delta t, \\ 0 & \text{za } |\tau| > \Delta t. \end{cases} \quad (2-98)$$

Za $\tau = \Delta t$ signali $u(t)$ i $u(t-\tau)$ mogu se smatrati nekoreliranim.



Sl. 2.16.

$$R_{uu}(\tau) \approx c^2 \Delta t \delta(\tau)$$

Za dovoljno mali Δt AKF se može nadomjestiti δ -funkcijom (Sl. 2.16.).

Kvantizirani binarni pseudoslučajni signal šuma kao ispitni signal

Pseudoslučajni signali, za razliku od slučajnih signala, posjeduju periodičnost, a samim time poprimaju svojstva determinističkih signala.

Kao takvi, oni su:

- reproducibilni,
 - izborom njihovih parametara prilagodljivi procesu kojeg se identificira.
- Idealna AKF (δ -funkcija) u praksi se ne može realizirati;
 - Da bi se postigla statistička sigurnost pri određivanju MKF potrebno je veliko vrijeme mjerenja T (korelacijsko vrijeme).

Stoga se u praksi koriste specijalni periodički binarni (i ternarni) ispitni signali. Primjenom ovih signala određuje se potpuno točno MKF integriranjem tijekom periode ispitnog signala (uz pretpostavku da na proces ne djeluju smetnje).

Za praksu su važni sljedeći ispitni signali u obliku binarnih ili ternarnih slijedova impulsa:

a) binarni slijedovi impulsa – PRBS (Pseudo Random Binary Sequences):

- m-impulsni slijed;
- modificirani m-impulsni slijed;
- maksimalno ortogonalni impulsni slijed.

b) ternarni slijedovi impulsa

Svi ovi pseudoslučajni signali imaju AKF koje su slične onima dobivenim uz djelovanje bijelog šuma.

Zbog periodičnosti isptnog signala

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t+T) \\ \text{i} \\ u(t) &= 0 \text{ za } t < 0, \end{aligned} \quad (2-99)$$

vrijede sljedeći izrazi za korelacijske funkcije:

$$R_{uu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)u(t+\tau)dt, \quad (2-100)$$

$$R_{yu}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)y(t+\tau)dt, \quad (2-101)$$

$$R_{uy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T u(t-\tau)y(t)dt. \quad (2-102)$$

Iz izraza (2-65) slijedi:

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^\infty g(\sigma)R_{uu}(\tau-\sigma)d\sigma = \int_0^T g(\sigma)R_{uu}(\tau-\sigma)d\sigma + \int_T^{2T} g(\sigma)R_{uu}(\tau-\sigma)d\sigma + \dots \quad (2-103)$$

Uzimajući u obzir da se $R_{uu}(\tau)$ može približno nadomjestiti periodičnom sekvencom δ -funkcija, dobije se:

$$R_{uy}(\tau) = A[g(\tau) + g(\tau+T) + \dots] \quad \text{za } \tau > 0, \quad (2-104)$$

gdje je A – težinski faktor procjene koji uzima u obzir neidealni oblik AKF i koji predstavlja površinu ispod trokutastog impulsa ($R_{uu}(\tau)$) (Sl. 2.16.).

1. m – impulsni slijed

Broj jediničnih impulsa po periodu T je:

$$N = 2^n - 1 \quad (\text{npr.: } 15, 31, 63, 127), \quad (2-105)$$

a vrijednost amplitude $+c$ i $-c$.

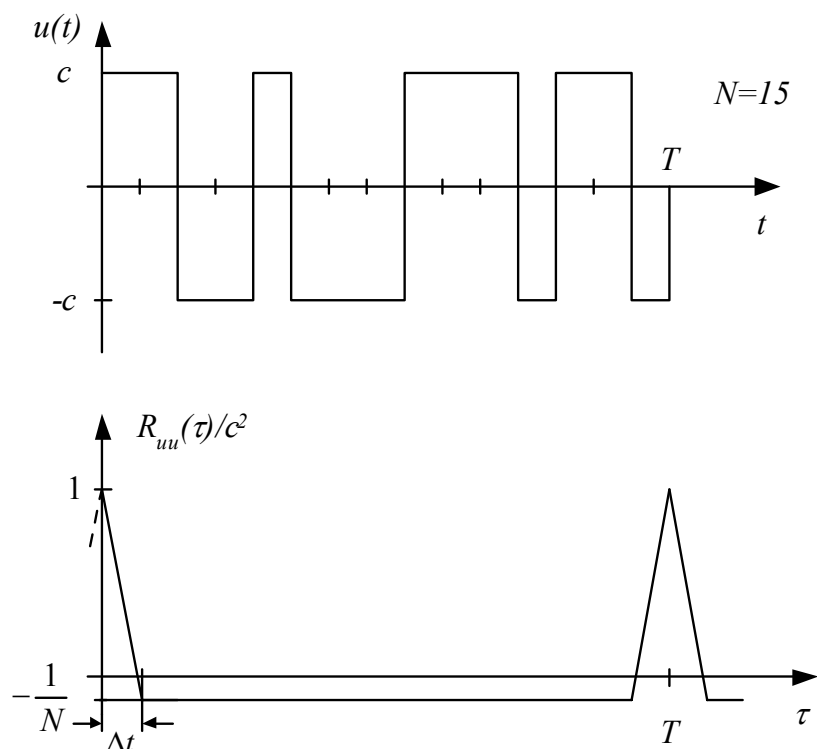
Linearna srednja vrijednost signala dana je sljedećim izrazom:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \Rightarrow |\bar{u}| = \frac{c}{N}. \quad (2-106)$$

Zbog periodičnosti signala vrijedi:

$$u(t) = u(t+T); \quad T = N \cdot \Delta t. \quad (2-107)$$

Na slici 2.17. prikazan je primjer m-impulsnog slijeda za $N=15$ i njegova autokorelacijska funkcija. Zbog periodičnosti pseudoslučajnog signala i njegova autokorelacijska funkcija je periodična.



Sl. 2.17.

Autokorelacijska funkcija m-impulsnog slijeda prema slici 2.17. prikazana je izrazima:

$$\frac{R_{uu}(\tau)}{c^2} = \begin{cases} 1 - \frac{N+1}{N} \frac{\tau}{\Delta t} \rightarrow \text{za } 0 \leq \tau \leq \Delta t, \\ -1/N \rightarrow \text{za } \Delta t < \tau \leq (N-1)\Delta t, \\ \frac{\tau}{\Delta t} \frac{N+1}{N} - N \rightarrow \text{za } (N-1)\Delta t \leq \tau \leq N\Delta t. \end{cases} \quad (2-108)$$

Međukorelacijska funkcija za računanje $g(\tau)$

Period T se procjenjuje tako da bude nešto veći od vremena smirivanja težinske funkcije:

$$g(\tau) \approx 0 \quad \text{za } \tau > T. \quad (2-109)$$

Tada je:

$$R_{uy}(\tau) \approx \begin{cases} Ag(\tau) & \text{za } 0 < \tau < T, \\ \frac{A}{2}g(0) & \text{za } \tau = 0. \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{A}R_{uy}(\tau) & \text{za } 0 < \tau < T, \\ \frac{2}{A}R_{uy}(0) & \text{za } \tau = 0. \end{cases} \quad (2-110)$$

Izračunata MKF približno je proporcionalna traženoj težinskoj funkciji.

AKF periodičkih impulsnih slijedova približno se predstavlja pomoću δ -funkcija.

Iz trokutaste površine AKF određuje se faktor procjene A (Sl. 2.17.):

$$R_{uu}(\tau) \approx c^2 \underbrace{\frac{N+1}{N} \Delta t}_{\text{Površina} \triangleq A} \delta(\tau). \quad (2-111)$$

Iz (2-110) i (2-111) slijedi:

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) \dots \text{za } 0 < \tau \leq (N-1)\Delta t, \\ \frac{2}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(0) \dots \text{za } \tau = 0. \end{cases} \quad (2-112)$$

Prethodna relacija za $g(\tau)$ dobivena je uz pretpostavku dovoljno velikog broja impulsa N (zanemarena površina ispod AKF u intervalu Δt do $(N-1)\Delta t$).

Ako je broj impulsa N manjeg iznosa, dobije se prema (2-108):

$$R_{uu}(\tau) = c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t \cdot \delta(\tau) - \frac{c^2}{N}; \quad |\tau| \leq (N-1)\Delta t, \quad (2-113)$$

odnosno prema (2-103):

$$R_{uy}(\tau) = c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t \cdot g(\tau) - \frac{c^2}{N} \int_0^T g(\vartheta) d\vartheta. \quad (2-114)$$

Ako je ispunjen uvjet (2-109) i ako se razmatra linearni statički proces, onda je

$\int_0^T g(\vartheta) d\vartheta = 1$ pa slijedi:

$$g(\tau) = \frac{1}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} \left[R_{uy}(\tau) + \frac{c^2}{N} \right]. \quad (2-115)$$

m-impulsni slijed ima diskretni spektar snage. On se računa pomoću AKF m-impulsnog slijeda (vidi relaciju (2-71)):

$$S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (2-116)$$

Razvojem $R_{uu}(\tau)$ u Fourierov red dobije se:

$$R_{uu}(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} c_{\nu} e^{j\nu\omega_0\tau}; \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}, \quad (2-117)$$

s Fourierovim koeficijentima:

$$c_{\nu}(j\omega_0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{uu}(\tau) e^{-j\nu\omega_0\tau} d\tau = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} R_{uu}(\tau) \cdot \cos \nu\omega_0\tau d\tau. \quad (2-118)$$

Uvrštenjem izraza za $R_{uu}(\tau)$ (2-108) u izraz (2-118) dobije se:

$$c_{\nu}(j\omega_0) = \frac{c^2(N+1)}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{\nu\omega_0\Delta t}{2}}{\frac{\nu\omega_0\Delta t}{2}} \right)^2 = \frac{c^2(N+1)}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{\nu\pi}{N}}{\frac{\nu\pi}{N}} \right)^2. \quad (2-119)$$

Fourierovi koeficijenti su, dakle, realni brojevi. Uvrštenjem (2-119) u (2-117) dobije se:

$$R_{uu}(\tau) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{c^2(N+1)}{N^2} \left(\frac{\sin \frac{\nu\omega_0\Delta t}{2}}{\frac{\nu\omega_0\Delta t}{2}} \right)^2 \cdot \cos \nu\omega_0\tau. \quad (2-120)$$

Nadalje, uvrštenjem (2-120) u (2-116) slijedi²:

$$S_{uu}(\omega) = \frac{c^2(N+1)}{N^2} \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \frac{v\omega_0\Delta t}{2}}{\frac{v\omega_0\Delta t}{2}} \right)^2 \delta(\omega - v\omega_0). \quad (2-121)$$

Za $v=0$, slijedi:

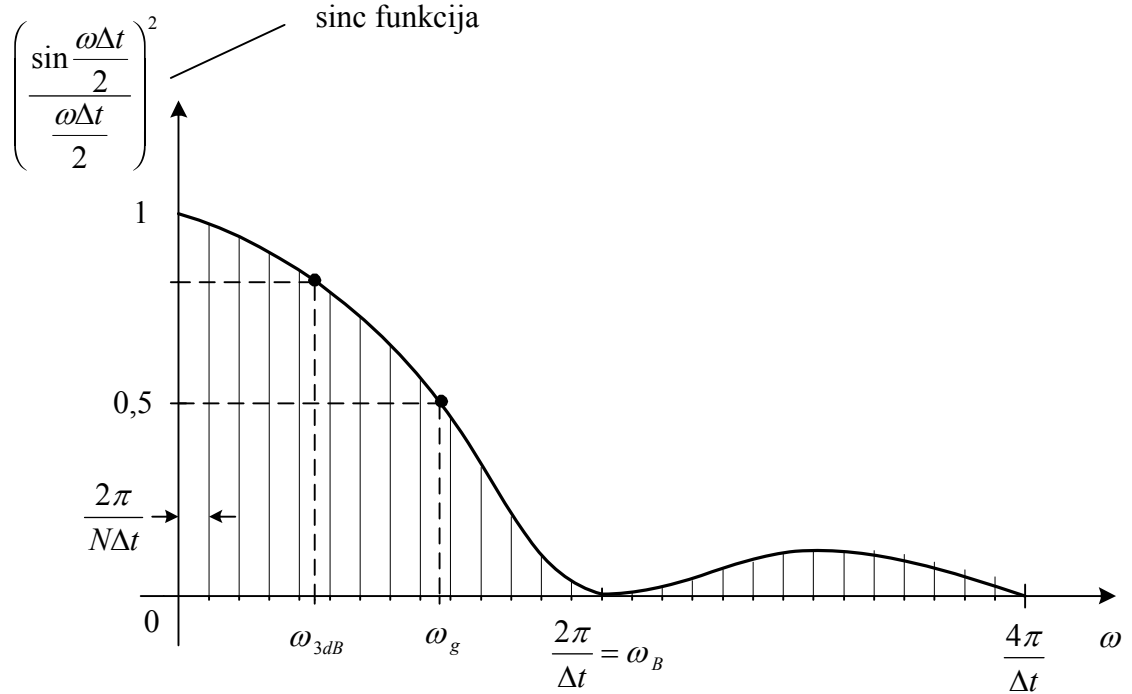
$$S_{uu}(0) = \frac{c^2(N+1)}{N^2} \delta(0). \quad (2-122)$$

Iz izraza (2-121) slijedi izraz za faktor oblika:

$$Q(v\omega_0) = \frac{c^2}{N} \left(1 + \frac{1}{N} \right) \left(\frac{\sin \frac{v\omega_0\Delta t}{2}}{\frac{v\omega_0\Delta t}{2}} \right)^2, \quad (2-123)$$

gdje je: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{N\Delta t}$.

Na slici 2.18. prikazan je faktor oblika za $N=15$.



Sl. 2.18. Faktor oblika diskretnog spektra snage PRBS signala ($N=15$).

² $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega \pm \omega_k) \tau d\tau = 2\pi \delta(\omega \pm \omega_k)$

Spektar ima sljedeća svojstva:

- Linije u diskretnom spektru imaju razmak $\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{N\Delta t}$;
- Linije postaju manje s rastućom frekvencijom $\omega = \nu\omega_0$, s nultočkama kod $\nu\omega_0 = k\left(\frac{2\pi}{\Delta t}\right) = k(N\omega_0)$, $k = 1, 2, \dots$;
- Kao širina pojasa signala označava se $\omega_B = \frac{2\pi}{\Delta t}$;
- Pri $\nu \approx \frac{N}{3}$ je $Q(\nu\omega_0)$ za oko 3 dB manji od $Q(0)$. Pri tome je:

$$\omega_{3dB} = \frac{\omega_B}{3} = \frac{2\pi}{3\Delta t}. \quad (2-124)$$

Uobičajeno je da se do ω_{3dB} gustoća snage smatra konstantnom.

- Granična frekvencija se dobije iz:

$$\begin{aligned} S_{uu}(\omega_g) &= \frac{S_{uu}(0)}{2}, \\ &\Downarrow \\ \omega_g &\approx \frac{2,77}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (2-125)$$

Izbor slobodnih parametara u PRBS-u: $c, \Delta t, N$.

- Amplituda c se odabire u skladu s prirodom procesa i smetnjama koje djeluju na proces (paziti na nelinearne efekte i odnos signal/šum).
- Vrijeme Δt (vrijeme takta) treba odabrati čim većim, kako bi se uz odabranu amplitudu signala c dobila čim veća gustoća snage $S_{uu}(\omega)$ (Vidi sliku 2.18).

Preporuča se:

$\Delta t \leq \frac{T_i}{5}$, gdje je T_i najmanja vremenska konstanta procesa koja još značajnije utječe na vladanje procesa (najmanja dominantna vremenska konstanta procesa).

- Korelacijsko vrijeme $T = N \cdot \Delta t$ odabire se tako da ne bude manje od t_{95} težinske funkcije.

Orijentacijska vrijednost:

$$T \approx 1,5 \cdot t_{95}. \quad (2-126)$$

Broj M perioda PRBS-a proizlazi iz dozvoljenog vremena mjerenja.

$$T_M = M \cdot T = MN\Delta t. \quad (2-127)$$

Za veći odnos šum/korisni signal potrebno je odabrati veći M .

2. modificirani m-impulsni slijed

Broj impulsa po periodu T je:

$$N = 2(2^n - 1) \quad (\text{npr. } 30, 62, 126), \quad (2-128)$$

a vrijednosti amplitude $+c$ i $-c$:

Linearna srednja vrijednost signala iznosi:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt, \quad (2-129)$$

$$\bar{u} = 0.$$

Zbog periodičnosti signala vrijedi:

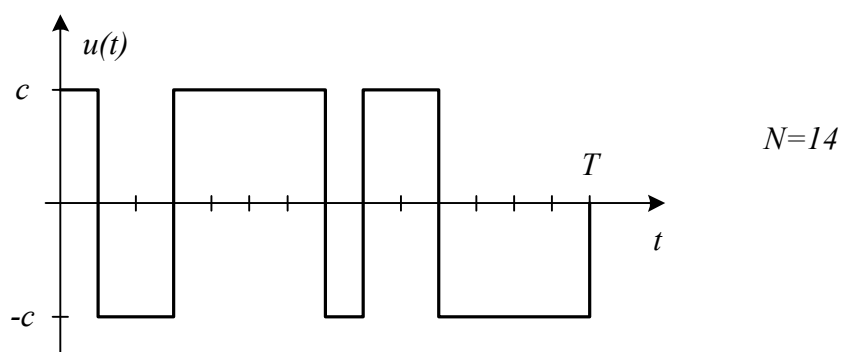
$$u(t) = u(t + T),$$

te je dodatno kod modificiranog m-impulsnog slijeda:

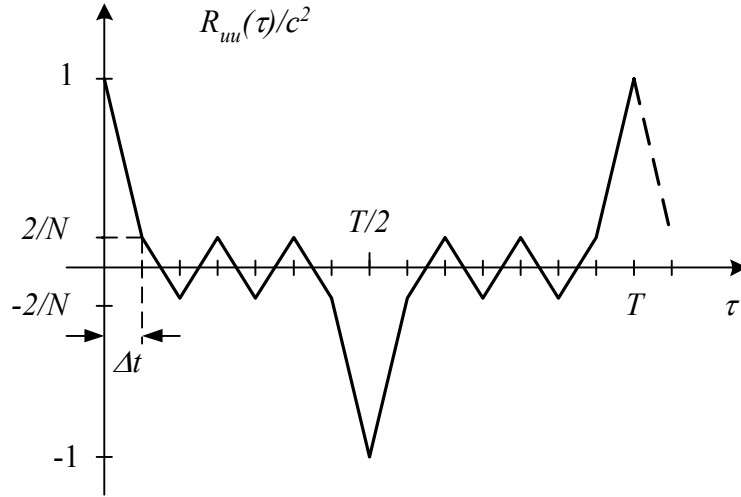
$$u(t) = -u(t + T/2), \quad (2-135)$$

gdje je $T = N\Delta t$.

Na slikama 2.19. i 2.20. prikazani su modificirani m-impulsni slijed za $N=14$ i njegova autokorelacijska funkcija.



Sl. 2.19.



Sl. 2.20.

Autokorelacijska funkcija modificiranog m-impulsnog slijeda prema slici 2.20. dana je izrazom:

$$\frac{R_{uu}(\tau)}{c^2} = \begin{cases} 1 - \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} & \text{za } 0 \leq \tau \leq \Delta t, \\ \frac{N-4}{2} - \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} & \text{za } \frac{N-2}{2} \Delta t \leq \tau \leq \frac{N}{2} \Delta t, \\ \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} - \frac{N}{2} & \text{za } \frac{N}{2} \Delta t \leq \tau \leq \frac{N+2}{2} \Delta t, \\ \frac{N-2}{N} \frac{\tau}{\Delta t} - N + 3 & \text{za } (N-1)\Delta t \leq \tau \leq N\Delta t, \\ \frac{4\tau}{N\Delta t} - \frac{4i+2}{N} & \text{za } i\Delta t \leq \tau \leq (i+1)\Delta t, \quad i = 2, 4, \dots, \frac{N}{2} + 1, \dots, N-2, \\ -\frac{4\tau}{N\Delta t} + \frac{4i+2}{N} & \text{za } i\Delta t \leq \tau \leq (i+1)\Delta t, \quad i = 1, 3, \dots, \frac{N}{2} - 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N-3. \end{cases} \quad (2-131)$$

Međukorelacijska funkcija za računanje $g(\tau)$

Iz slike 2.20. proizlazi:

$$R_{uy}(\tau) \approx c^2 \frac{N+2}{N} \Delta t \cdot g(\tau), \quad (2-132)$$

pa je:

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{c^2 \frac{N+2}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) & \text{za } 0 < \tau \leq \frac{N-2}{2} \Delta t, \\ \frac{2}{c^2 \frac{N+2}{N} \Delta t} R_{uy}(0) & \text{za } \tau = 0. \end{cases} \quad (2-133)$$

Pri primjeni modificiranog m-impulsnog slijeda $g(\tau)$ treba istitrati za

$$\tau = \frac{N-2}{2} \Delta t.$$

3. Ternarni impulsni slijed

Broj impulsa po periodu T iznosi:

$$N = 3^n - 1 \quad (\text{npr. } 26, 80, 242), \quad (2-134)$$

a vrijednost amplitude $+c, 0$ i $-c$.

Linearna srednja vrijednost signala iznosi:

$$\bar{u} = 0. \quad (2-135)$$

Zbog periodičnosti signala vrijedi:

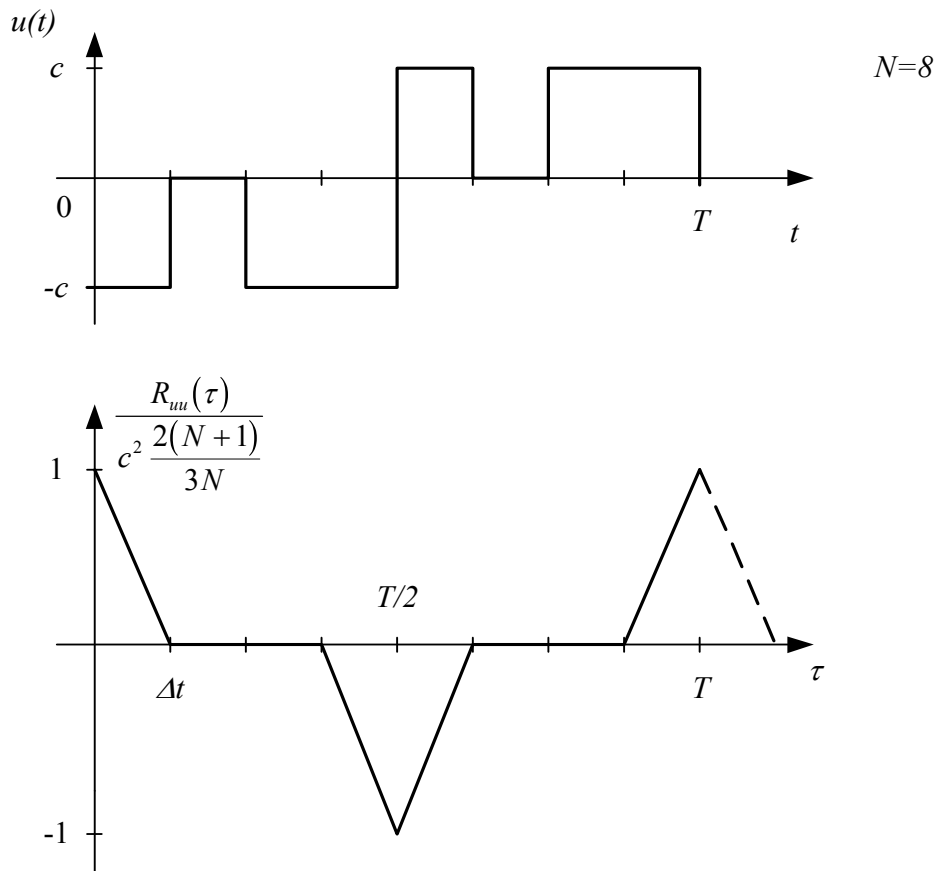
$$u(t) = u(t + T),$$

te je dodatno kod ternarnog impulsnog slijeda:

$$u(t) = -u(t + T/2), \quad (2-136)$$

gdje je $T = N\Delta t$.

Primjer ternarnog slijeda impulsa za $N=8$ i njegova autokorelacijska funkcija prikazani su na slici 2.21.



Sl. 2.21.

Autokorelacijska funkcija ternarnog impulsnog slijeda prema slici 2.21. prikazana je izrazom:

$$\frac{R_{uu}(\tau)}{c^2} = \left(\frac{2}{3} \frac{N+1}{N} \right) \cdot \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\Delta t} & \text{za } 0 \leq \tau \leq \Delta t, \\ \frac{N-2}{2} - \frac{\tau}{\Delta t} & \text{za } \frac{N-2}{2} \Delta t \leq \tau \leq \frac{N}{2} \Delta t, \\ \frac{\tau}{\Delta t} - \frac{N+2}{2} & \text{za } \frac{N}{2} \Delta t \leq \tau \leq \frac{N+2}{2} \Delta t, \\ \frac{\tau}{\Delta t} - N + 1 & \text{za } (N-1)\Delta t \leq \tau \leq N\Delta t. \end{cases} \quad (2-137)$$

Međukorelacijska funkcija za računanje $g(\tau)$:

Prema (2-103) i (2-137) se dobije

$$R_{uy}(\tau) \approx \frac{2}{3} c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t g(\tau), \quad (2-138)$$

pa je:

$$g(\tau) \approx \begin{cases} \frac{1}{\frac{2}{3}c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(\tau) & \text{za } 0 \leq \tau \leq \frac{N-2}{2} \Delta t, \\ \frac{1}{\frac{1}{3}c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} R_{uy}(0) & \text{za } \tau = 0. \end{cases} \quad (2-139)$$

Pri primjeni ternarnog impulsnog slijeda $g(\tau)$ mora istitrati za $\tau = \frac{N-2}{2} \Delta t$.

Praktična provedba korelacijske analize za određivanje težinske funkcije $g(\tau)$ obavlja se u diskretnim vremenima $\tau_i = i\Delta t$:

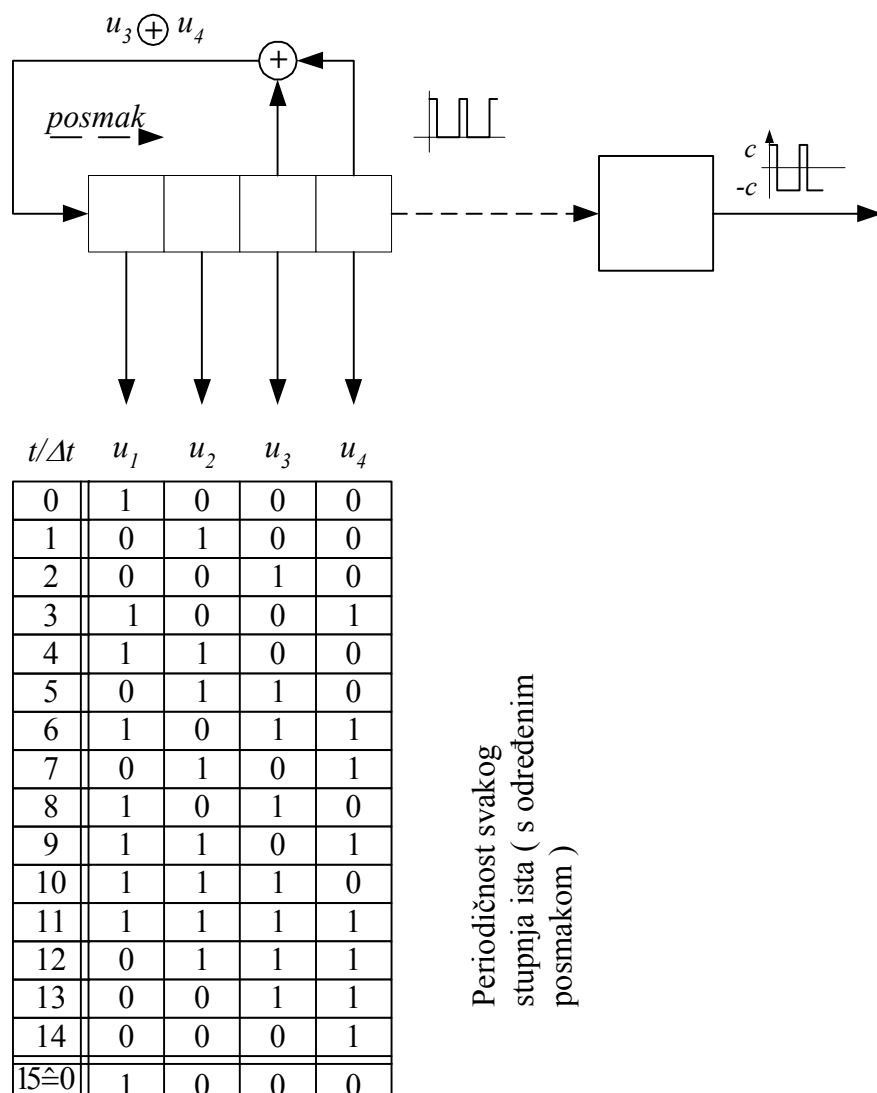
$$g_i = g(i\Delta t) \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, w. \quad (2-140)$$

Izraz (2-140) predstavlja diskretni težinski slijed iz kojeg se odgovarajućim numeričkim postupkom može odrediti prijenosna funkcija procesa.

Realizacija PRBS-a pomoću generatora impulsa

Za realizaciju pseudoslučajnog binarnog signala (m-impulsnog slijeda) koristi se posmačni registar s n stupnjeva i sklop “suma po modulu 2” (funkcija isključivo ILI).

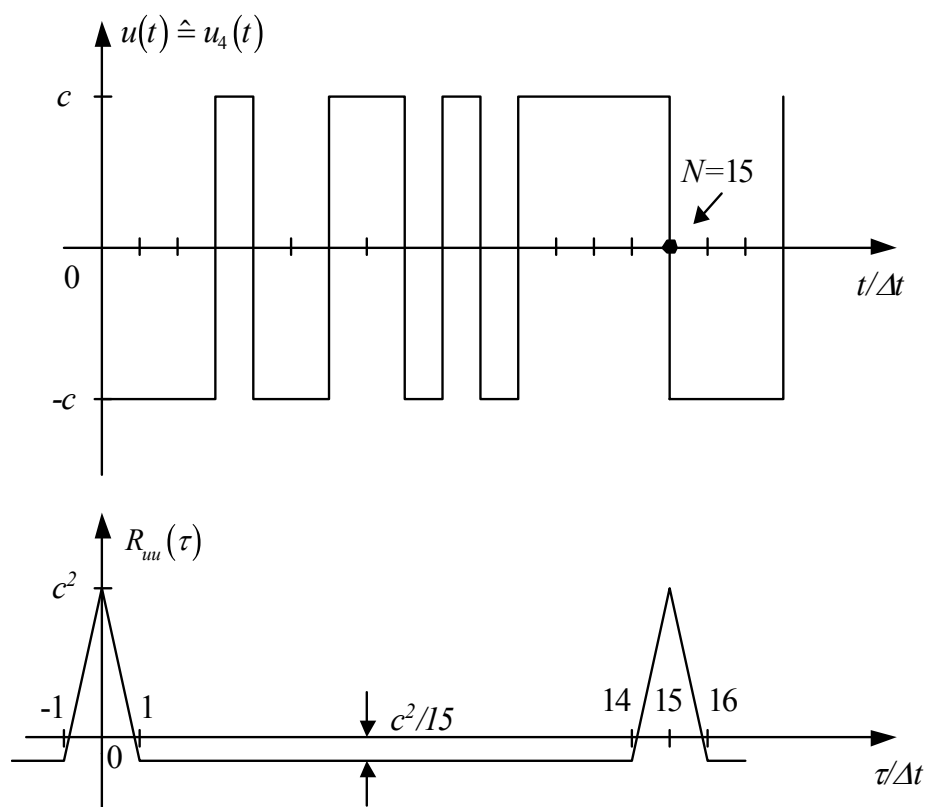
Primjer (Sl. 2.22.): $n = 4$



Sl. 2.22.

- Binarni sadržaj registra posmiče se u desno za jedno binarno mjesto nakon svakog intervala Δt .
- Dobije se 15 različitih kombinacija ($N = 15$), koje se periodički ponavljaju s periodom $N = 15$ (Sl. 2.23.).
- Isključena je kombinacija da su sva stanja registra nula.

Generirani PRBS za $N=15$ i njegova AKF prikazani su na slici 2.23.



Sl. 2.23.

U tablici 2.1. prikazani su detalji realizacije m-impulsnog slijeda za različiti n .

Tablica 2.1.

| Broj stupnjeva posmačnog registra (n) | Stupnjevi koji se koriste u pov. vezi registra | Trajanje perioda (N) |
|---|--|--------------------------|
| 2 | 1 i 2 | 3 |
| 3 | 1 i 3 ili 2 i 3 | 7 |
| 4 | 3 i 4 ili 1 i 4 | 15 |
| 5 | 3 i 5 ili 2 i 5 | 31 |
| 6 | 5 i 6 | 63 |
| 7 | 4 i 7 | 127 |
| 8 | 1 i 2 ili 7 i 8 | 255 |
| 9 | 5 i 9 | 511 |
| 10 | 7 i 10 | 1023 |
| 11 | 9 i 11 | 2047 |

Primjer:

Dana je prijenosna funkcija procesa

$$G(s) = \frac{1}{(1 + T_p s)^3},$$

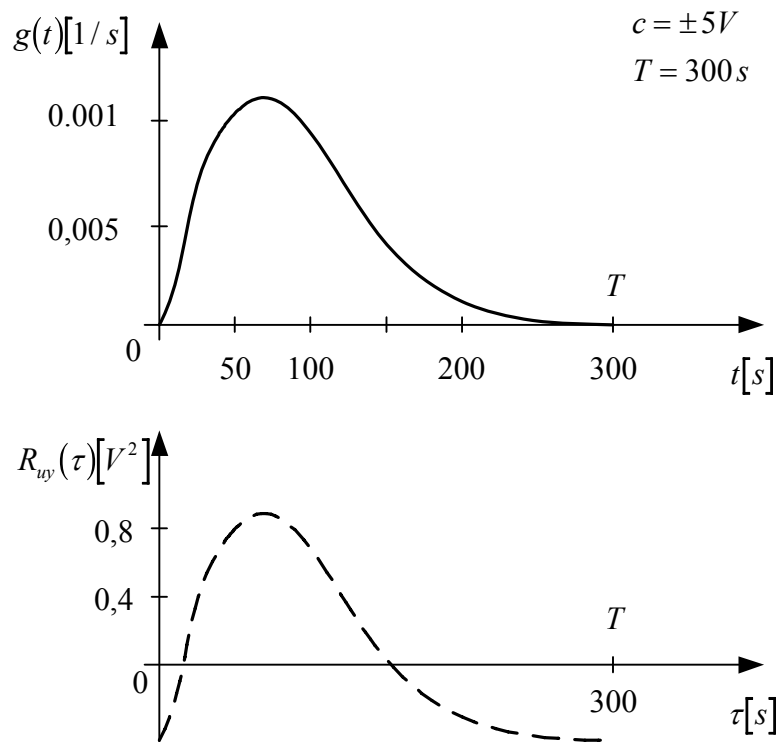
$$T_p = 25s.$$

Opisanim postupkom potrebno je odrediti težinsku funkciju $g(t)$ pomoću m -impulsnog slijeda kao ispitnog signala uz $N = 63$.

Prema (2-115) slijedi:

$$g(\tau) = \frac{1}{c^2 \frac{N+1}{N} \Delta t} \left[R_{wy}(\tau) + \frac{c^2}{N} \right].$$

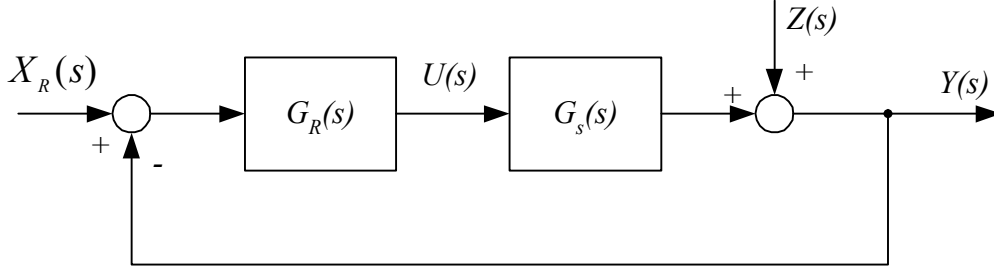
Na slici 2.24. prikazana je MKF i odgovarajuća joj težinska funkcija procesa dobivena korelacijskim postupkom. Pokazuje se da je tako dobivena težinska funkcija identična težinskoj funkciji stvarnog procesa (u ovom primjeru stvarni je proces nadomješten njegovom prijenosnom funkcijom).



Sl. 2.24.

2.2.2. Korelacijska analiza u zatvorenom regulacijskom krugu

U ovom razmatranju potrebno je odrediti $G_s(s)$ u zatvorenom regulacijskom krugu (Sl. 2.25.).



Sl. 2.25.

Signal $u(t)$ prema slici 2.25. uvijek korelira sa signalom smetnje $z(t)$ preko povratne veze. Zbog toga se ne može odrediti $G_s(s)$ pomoću jednog korelacijskog mjerenja $R_{uy}(\tau)$, jer je $R_{uz}(\tau) \neq 0$:

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} R_{uz}(\tau - \sigma) g_z(\sigma) d\sigma. \quad (2-141)$$

Ako ispitni signal, koji se dovodi preko vodeće veličine $x_R(t)$, ne korelira sa smetnjom $z(t)$, tada se $G_s(j\omega)$ može odrediti iz dva korelacijska mjerenja:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Za slučaj } z(t) \equiv 0 \\ \text{neka je } y(t) = y_x(t) \\ u(t) = u_x(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{superpozicijom dobijemo:} \\ \Rightarrow \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{Za slučaj } x_R(t) \equiv 0 \\ \text{neka je } y(t) = y_z(t) \\ u(t) = u_z(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} y(t) = y_x(t) + y_z(t), \\ u(t) = u_x(t) + u_z(t). \end{array} \quad (2-142)$$

Uz pretpostavku da $x_R(t)$ ne korelira s $y_z(t)$ i $u_z(t)$, provodi se sljedeća korelacijska analiza:

$$\begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_R(t) y(t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_R(t) y_x(t + \tau) dt + \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_R(t) y_z(t + \tau) dt}_{=0} = R_{xy_x}(\tau), \end{aligned} \quad (2-143)$$

$$\begin{aligned}
R_{xu}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_R(t) u(t+\tau) dt = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_R(t) u_x(t+\tau) dt + \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_R(t) u_z(t+\tau) dt}_{=0} = R_{xu_x}(\tau). \quad (2-144)
\end{aligned}$$

S druge strane, za međukorelacijske funkcije vrijedi prema (2-65):

$$\begin{aligned}
R_{xy}(\tau) &= \int_0^\infty g_{xy}(\sigma) R_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma, \\
R_{xu}(\tau) &= \int_0^\infty g_{xu}(\sigma) R_{xx}(\tau - \sigma) d\sigma. \quad (2-145)
\end{aligned}$$

Primjenom Fourierove transformacije prema (2-79) na izraze (2-145), te uzimajući u obzir (2-81), dobiju se međukorelacijski spektri snage:

$$\begin{aligned}
S_{xy}(j\omega) &= G_{xy}(j\omega) \cdot S_{xx}(\omega), \\
S_{xu}(j\omega) &= G_{xu}(j\omega) \cdot S_{xx}(\omega). \quad (2-146)
\end{aligned}$$

Iz izraza (2-146) slijedi:

$$\frac{S_{xy}(j\omega)}{S_{xu}(j\omega)} = \frac{G_{xy}(j\omega)}{G_{xu}(j\omega)}. \quad (2-147)$$

Iz sheme regulacijskog kruga, prikazanog na slici 2.25, slijedi:

$$\left. \begin{aligned} G_{xy}(j\omega) &= \frac{y(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{G_R(j\omega)G_s(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_s(j\omega)} \\ G_{xu}(j\omega) &= \frac{u(j\omega)}{x(j\omega)} = \frac{G_R(j\omega)}{1 + G_R(j\omega)G_s(j\omega)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{G_{xy}(j\omega)}{G_{xu}(j\omega)} = G_s(j\omega). \quad (2-148)$$

Izjednačenjem (2-147) i (2-148) dobije se:

$$G_s(j\omega) = \frac{G_{xy}(j\omega)}{G_{xu}(j\omega)} = \frac{S_{xy}(j\omega)}{S_{xu}(j\omega)} \quad (2-149)$$

Dakle, na temelju dvaju međukorelacijskih spektara, dobivenih iz pripadajućih međukorelacijskih funkcija, može se odrediti $G_s(j\omega)$ u zatvorenoj petlji.

2.2.3. Korelacijska analiza za neposredno određivanje frekvencijske karakteristike

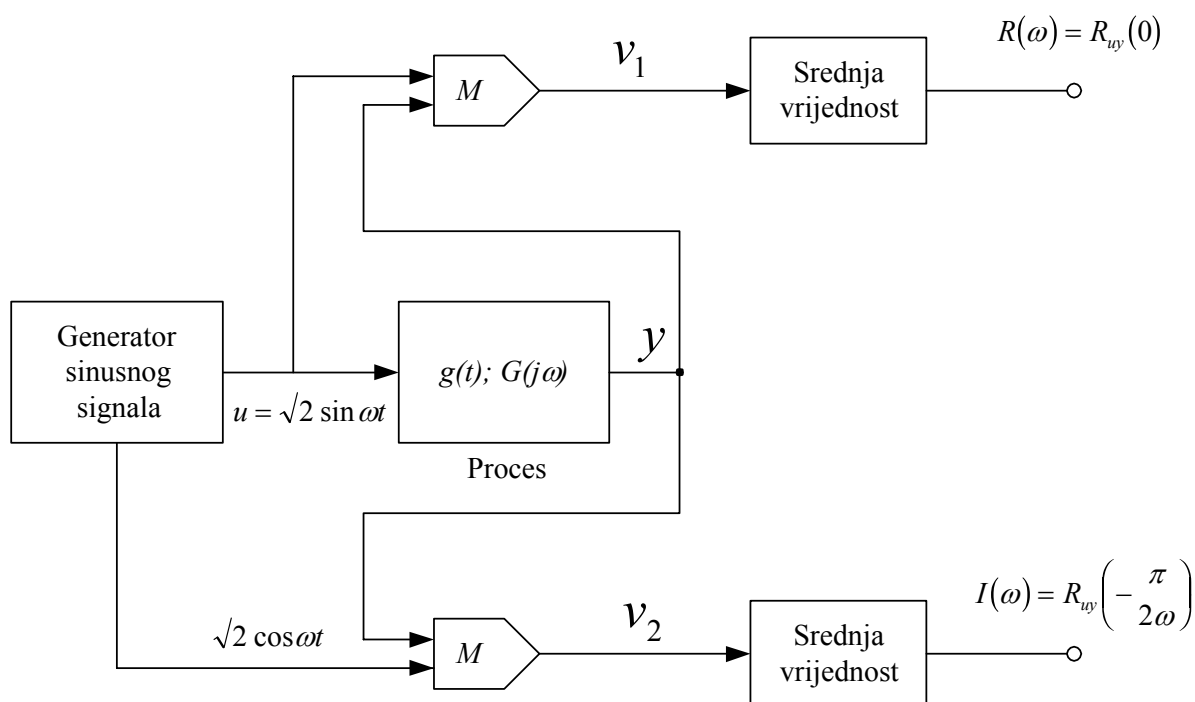
Frekvencijska karakteristika $G(j\omega)$ može se prikazati kako slijedi:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$R(\omega) = \int_0^{\infty} g(t) \cos \omega t dt, \quad (2-150)$$

$$I(\omega) = -\int_0^{\infty} g(t) \sin \omega t dt, \quad (g(t) = 0 \text{ za } t < 0).$$

Određivanje $R(\omega)$ i $I(\omega)$ obavlja se prema shemi prikazanoj na slici 2.26.



Sl.2.26.

Za

$$u = A \sin \omega t = \sqrt{2} \sin \omega t \quad (2-151)$$

dobije se AKF:

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \sin \omega t \cdot A \sin \omega(t + \tau) dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \cos \omega \tau = \cos \omega \tau. \quad (2-152)$$

Iz (2-152) prema (2-65) slijedi:

$$\begin{aligned} R_{uy}(\tau) &= \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma = \int_0^{\infty} \cos \omega(\tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma = \\ &= \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \cos \omega \sigma g(\sigma) d\sigma + \int_0^{\infty} \sin \omega \tau \sin \omega \sigma g(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (2-153)$$

Za $\tau = 0$, uzimajući u obzir (2-150), dobije se:

$$R_{uy}(0) = \int_0^{\infty} g(\sigma) \cos \omega \sigma d\sigma = R(\omega). \quad (2-154)$$

Za $\tau = -\frac{\pi}{2\omega}$, uzimajući u obzir (2-150), dobije se:

$$R_{uy}\left(-\frac{\pi}{2\omega}\right) = -\int_0^{\infty} g(\sigma) \sin \omega \sigma d\sigma = I(\omega). \quad (2-155)$$

Pomoću ovoga korelacijskog mjerenja može se neposredno odrediti realna i imaginarna komponenta funkcije $G(j\omega)$. Vremenski posmak $\tau = -\frac{\pi}{2\omega}$ jednostavno se postiže preko faznog posmaka na generatoru sinusnog signala.

Signali v_1 i v_2 (Sl. 2.26.) dobiju se na sljedeći način:

$$v_1 = u \cdot y = \sqrt{2} \sin \omega t \cdot y_m \sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{\sqrt{2} y_m \cos \varphi_0}{2} - \frac{\sqrt{2} y_m \cos(2\omega t + \varphi_0)}{2}, \quad (2-156)$$

$$v_1 = \bar{v}_1 - \tilde{v}_1, \quad (2-157)$$

gdje:

$$\bar{v}_1 = \frac{\sqrt{2} y_m \cos \varphi_0}{2} - \text{odgovara realnoj komponenti } R(\omega).$$

Izmjenična komponenta $\tilde{v}_1 = \frac{\sqrt{2} y_m \cos(2\omega t + \varphi_0)}{2}$ s frekvencijom 2ω filtrira se

niskopropusnim filtrom (srednja vrijednost ove komponente jednaka je nuli).

Isto tako:

$$\begin{aligned} v_2 &= -u(t - \tau) \cdot y = \sqrt{2} y_m \cos(\omega t) \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} y_m \sin \varphi_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} y_m \sin(2\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \quad (2-158)$$

$$v_2 = \bar{v}_2 + \tilde{v}_2, \quad (2-159)$$

gdje $\bar{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_m \sin \varphi_0$ - odgovara imaginarnoj komponenti $I(\omega)$.

Izmjenična komponenta $\tilde{v}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_m \sin(2\omega t + \varphi_0)$ s frekvencijom 2ω također se filtrira.

Ovim postupkom uspješno se potiskuju stohastički signali koji mogu biti superponirani izlaznom signalu procesa y .

2.2.4. Numeričko određivanje težinske funkcije pomoću korelacijskih funkcija

Integralna relacija

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \sigma) g(\sigma) d\sigma \quad (2-160)$$

može se aproksimirati sljedećim izrazom:

$$R_{uy}(\tau) \approx \sum_{n=0}^N R_{uu}(\tau - n\Delta t) g(n\Delta t) \Delta t. \quad (2-161)$$

Ako se i vrijeme τ diskretizira,

$$\tau = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t, \quad (2-162)$$

dobije se sustav linearnih algebarskih jednačbi s $(N+1)$ nepoznanica:

$$\begin{cases} R_{uy}(0) = R_{uu}(0-0)g(0)\Delta t + R_{uu}(0-\Delta t)g(\Delta t)\Delta t + \dots + R_{uu}(0-N\Delta t)g(N\Delta t)\Delta t, \\ R_{uy}(\Delta t) = R_{uu}(\Delta t-0)g(0)\Delta t + R_{uu}(\Delta t-\Delta t)g(\Delta t)\Delta t + \dots + R_{uu}(\Delta t-N\Delta t)g(N\Delta t)\Delta t, \\ \vdots \\ R_{uy}(N\Delta t) = R_{uu}(N\Delta t-0)g(0)\Delta t + R_{uu}(N\Delta t-\Delta t)g(\Delta t)\Delta t + \dots + R_{uu}(N\Delta t-N\Delta t)g(N\Delta t)\Delta t. \end{cases} \quad (2-163)$$

Uzimajući u obzir svojstvo parnosti:

$$R_{uu}(\tau - \sigma) = R_{uu}(\sigma - \tau), \quad (2-164)$$

te uvodeći skraćeni zapis:

$$g_i = g(i\Delta t) \quad \text{za } i = 0, 1, \dots, N, \quad (2-165)$$

izraz (2-168) može se zapisati na sljedeći način:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_{uy}(0)}{\Delta t} \\ \frac{R_{uy}(\Delta t)}{\Delta t} \\ \vdots \\ \frac{R_{uy}(N\Delta t)}{\Delta t} \end{bmatrix}}_{\underline{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(\Delta t) & R_{uu}(2\Delta t) & \cdots & R_{uu}(N\Delta t) \\ R_{uu}(\Delta t) & R_{uu}(0) & R_{uu}(\Delta t) & \cdots & R_{uu}[(N-1)\Delta t] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(N\Delta t) & R_{uu}[(N-1)\Delta t] & R_{uu}[(N-2)\Delta t] & \cdots & R_{uu}(0) \end{bmatrix}}_{\underline{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}}_{\underline{g}}, \quad (2-166)$$

odnosno:

$$\underline{r} = \underline{R} \cdot \underline{g}. \quad (2-167)$$

Rješenje jednadžbe (2-171) dobije se pomoću inverzije matrice \underline{R} :

$$\underline{g} = \underline{R}^{-1} \cdot \underline{r}. \quad (2-168)$$

U slučaju da je matrica \underline{R} loše kondicionirana, potrebno je koristiti druge numeričke postupke (npr. iteracijske postupke).

Iz izraza (2-166) proizilazi da bi najprikladnije bilo da je matrica \underline{R} dijagonalna matrica, tj:

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= 0 & \text{za} & \tau \neq 0 \\ & & \text{i} & \\ R_{uu}(0) &\neq 0, \end{aligned} \quad (2-169)$$

odnosno da je ispitni signal bijeli šum.

2.2.5. Odnos između spektralne gustoće snage na ulazu i izlazu linearnog sustava

Primjenom Fourierove transformacije na izraz (2-160) dobije se:

$$F\{R_{uy}(\tau)\} = F\{R_{uu}(\sigma)\} \cdot F\{g(\sigma)\}, \quad (2-170)$$

odnosno

$$S_{uy}(j\omega) = S_{uu}(\omega) \cdot G(j\omega). \quad (2-171)$$

Iz (2-171) slijedi:

$$G(j\omega) = \frac{S_{uy}(j\omega)}{S_{uu}(\omega)}. \quad (2-172)$$

Prema tome, ako su poznate spektralne gustoće snage $S_{uy}(j\omega)$ i $S_{uu}(\omega)$, onda se može neposredno odrediti $G(j\omega)$, odnosno amplitudno-frekvencijska i fazno-frekvencijska karakteristika.

Međutim, ako nije poznata spektralna gustoća snage $S_{uy}(j\omega)$ onda se do frekvencijske karakteristike dolazi na sljedeći način.

Iz relacija $u(t)$ i $y(t)$ su stohastički signali):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)u(t-\sigma)d\sigma,$$

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t)y(t+\tau)dt$$

slijedi:

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)u(t-\sigma)d\sigma \right\} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)u(t+\tau-\eta)d\eta \right\} dt. \quad (2-173)$$

Iz (2-173) dobije se³:

$$R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)g(\eta)R_{uu}(\tau+\sigma-\eta)d\sigma d\eta. \quad (2-174)$$

Primjenom Fourierove transformacije na (2-174) slijedi:

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)g(\eta)R_{uu}(\tau+\sigma-\eta) \cdot e^{-j\omega\tau} d\sigma d\eta d\tau. \quad (2-175)$$

Supstitucijom $\nu = \tau + \sigma - \eta$ slijedi iz (2-175):

$$S_{yy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)e^{j\omega\sigma} g(\eta)e^{-j\omega\eta} R_{uu}(\nu) \cdot e^{-j\omega\nu} d\sigma d\eta d\nu, \quad (2-176)$$

odnosno:

$$S_{yy}(\omega) = G(-j\omega) \cdot G(j\omega) \cdot S_{uu}(j\omega) = |G(j\omega)|^2 S_{uu}(\omega). \quad (2-177)$$

Prema tome, ako su poznate spektralne gustoće snage ulaznog i izlaznog signala, može se odrediti samo amplitudno-frekvencijska karakteristika sustava.

Za minimalnofazne sustave se iz amplitudno-frekvencijske karakteristike može odrediti fazno-frekvencijska karakteristika.

³ $R_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\sigma)g(\eta) \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u(t-\sigma)u(t+\tau-\eta)dt \right\} d\sigma d\eta$

$\nu = t - \sigma \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T-\sigma}^{T-\sigma} u(\nu)u(\nu+\sigma+\tau-\eta)d\nu = R_{uu}(\tau+\sigma-\eta)$

3. IDENTIFIKACIJA POMOĆU POSTUPAKA PROCJENE PARAMETARA

Modeli dinamičkih sustava:

- tehnički procesi;
- ekonomski procesi;
- biološki procesi;
- ekološki procesi.

Ovi se modeli koriste za:

- ispitivanje ili predviđanje specijalnih situacija u sustavima;
- projektiranje složenih sustava upravljanja;
- istraživanje unutarnjeg vladanja složenih procesa i sustava;
- izobrazbu opslužnog osoblja za složene sustave na simulatoru (simulator leta, simulator elektrane...)

Oblici prikaza matematičkog modela:

- diferencijalne jednačbe;
- jednačbe diferencija;
- prikaz u prostoru stanja;
- prijenosne funkcije;
- prijenosne matrice.

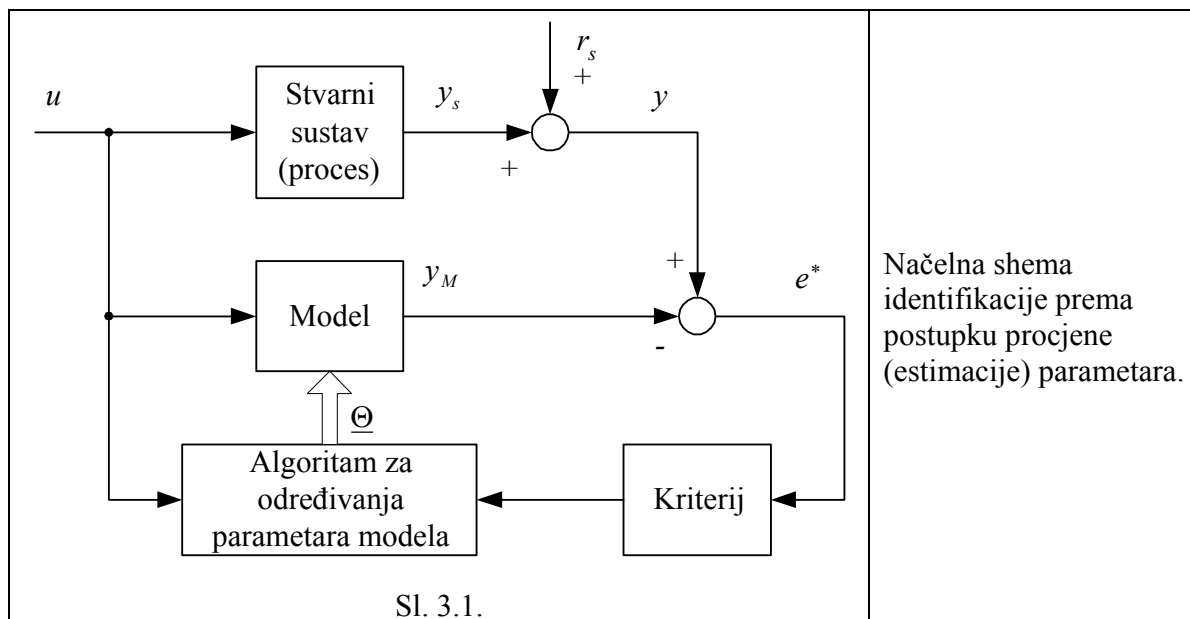
Izbor oblika matematičkog modela ovisi o:

- svrsi modela;
- pomoćnim sredstvima (opremi) za identifikaciju.

Cilj identifikacije:

Na temelju združenih skupova podataka ili mjernih rezultata vremenskih tijekova ulaznih i izlaznih signala dinamičkog procesa traži se struktura i parametri odgovarajućeg matematičkog modela.

Pri tome se polazi od opće sheme prikazane na slici 3.1.



Pretpostavlja se da je pretpostavljena struktura matematičkog modela čim bliža strukturi stvarnog sustava.

U postupku identifikacije potrebno je odrediti vektor parametara $\underline{\Theta}$ matematičkog modela tako da odstupanja matematičkog modela od stvarnog procesa budu čim manja u stacionarnim i dinamičkim režimima rada. Izlazna mjerljiva veličina y sastoji se od dviju nemjerljivih komponenata (y_s i r_s):

$$y = y_s + r_s. \quad (3-1)$$

Odstupanje izlaznog signala matematičkog modela y_M od izlaznog signala stvarnog procesa y je:

$$e^* = y - y_M. \quad (3-2)$$

Pomoću kriterija kakvoće i algoritma za određivanje parametara matematičkog modela minimizira se e^* (ili funkcija od e^*).

Ako ne postoje a-priori znanja o procesu kojeg se identificira, tada je potrebno, nakon pripreme mjernih podataka ulaznog i izlaznog signala, obaviti sljedeće korake:

1. Izbor oblika modela (npr. izbor strukture diferencijalne jednačbe ili jednačbe diferencija modela);
2. Određivanje kriterija kakvoće (s ciljem minimizacije odstupanja e^*);
3. Izbor numeričkog postupka za određivanje parametara modela u smislu minimizacije postavljenog kriterija kakvoće i izračunavanje parametara matematičkog modela;

4. Provjera strukture modela.

Postupak od 1. do 4. obavlja se u pravilu u više koraka.

Struktura matematičkog modela definira se pomoću strukturnih parametara (koeficijenata):

- n-red modela;
- d-mrtvo vrijeme (ako postoji) $(T_t = dT + m)$.

Parametarski oblici modela:

- opis u prostoru stanja \rightarrow preferira se u sintezi regulatora;
- ulazno/izlazni opis u obliku prijenosne funkcije ili prijenosne matrice \rightarrow preferira se u identifikaciji sustava.

Najvažniji postupci procjene parametara:

- Metoda najmanjih kvadrata-LS (“Least Squares”-metoda); (Eyckoff, Åström);
- Poopćena metoda najmanjih kvadrata-GLS (Clark, Hastings-James, Talmon);
- Metoda pomoćnih varijabli-IV (“Instrumental Variable”-metoda) (Wong/Polak, Young);
- Metoda maksimalne sličnosti-ML (“Maximum-Likelihood”-metoda) (Bohlin, Åström).

3.1. Procjena (estimacija) parametara linearnih sustava s jednim ulazom i jednim izlazom

3.1.1 Struktura matematičkog modela

U daljnjim razmatranjima pretpostavlja se da su kontinuirani signali diskretizirani:

$$e^*(k) = y(k) - y_M(k) \quad (3-3)$$

-pogreška izlaznog signala u diskretnom obliku;

$$y(k) = y_s(k) + r_s(k) \quad (3-4)$$

$r_s(k)$ – stohastički signal smetnje.

Zašto matematički model u diskretnom obliku? Zbog:

- simulacije na digitalnom računalu;
- sinteze i implementacije algoritama upravljanja na digitalnom računalu.

Matematički model procesa prikazan u diskretnom obliku pomoću opće jednačbe diferencija glasi:

$$\begin{aligned} y_M(k) + a_1 y_M(k-1) + a_2 y_M(k-2) + \dots + a_n y_M(k-n) = \\ = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_n u(k-n), \end{aligned}$$

odnosno u rekurzivnom zapisu:

$$y_M(k) = -\sum_{v=1}^n a_v y_M(k-v) + \sum_{v=0}^n b_v u(k-v), \quad (3-5)$$

gdje su:

a_v, b_v – parametri matematičkog modela koje treba identificirati (procijeniti).

Rekurzivna jednačba diferencija (3-5) prikladna je za obradbu pomoću digitalnog računala. Vrijednosti $y_M(k-v)$ i $u(k-v)$ za $v=1, 2, \dots, n$ pohranjuju se u računalu.

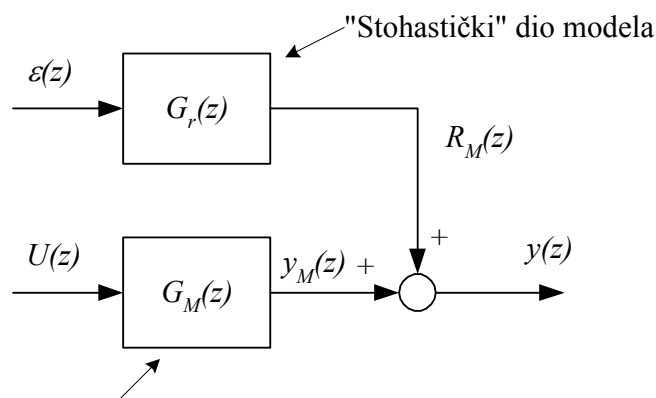
Primjenom z-transformacije na (3-5) dobije se:

$$Y_M(z) \underbrace{[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n}]}_{A(z^{-1})} = U(z) \underbrace{[b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}]}_{B(z^{-1})}, \quad (3-6)$$

odnosno:

$$G_M(z) = \frac{Y_M(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}. \quad (3-7)$$

Pogreška izlaznog signala e^* poprima minimalnu vrijednost samo onda ako matematički model uključuje u sebe i dio za tvorbu stohastičkog signala smetnje $r_s(k)$. Stoga se definira cjeloviti (potpuni) matematički model (Sl. 3.2.).



"Deterministički" dio modela

Sl. 3.2.

Signal $r_M(k)$ (Sl. 3.2.) nadomješta stvarni signal smetnje $r_s(k)$.

Uz prikladno odabrani model smetnje može se očekivati minimalna vrijednost e^* .
 “Stohastički” dio modela ostvaruje se pomoću filtra smetnje (model smetnje) $G_r(z)$:

$$G_r(z) = \frac{R_M(z)}{\varepsilon(z)}, \quad (3-8)$$

gdje je:

$\varepsilon(k)$ – diskretni signal bijelog šuma.

Za $\varepsilon(k)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon(k)\} &= 0 \\ \text{var}\{\varepsilon(k)\} &= \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad 1 \quad (3-9)$$

Pomoću $G_r^{-1}(z)$ stohastički signal smetnje $r_M(k)$ svodi se na diskretni signal bijelog šuma $\varepsilon(k)$.

U tom slučaju, ako model $G_M(z)$ potpuno odgovara stvarnom procesu i ako je dobro modelirana smetnja, izlaz iz modela odgovara izlazu stvarnog procesa:

$$y(k) = y_M(k) + r_M(k), \quad (3-10)$$

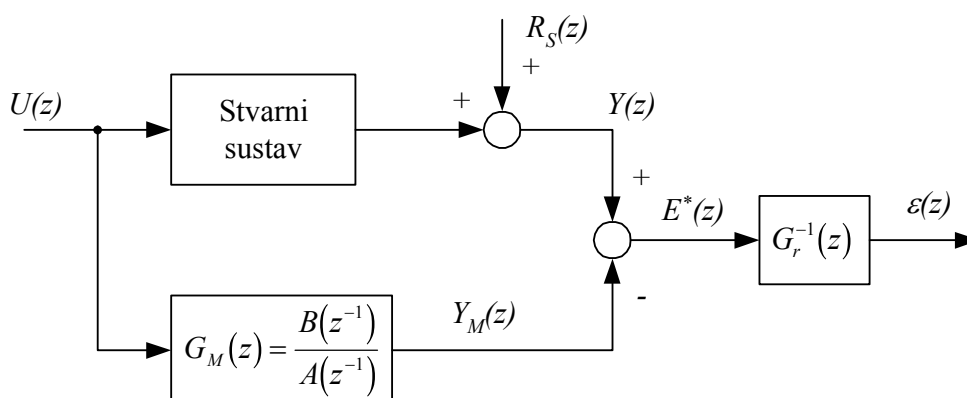
$$y(z) = y_M(z) + G_r(z)\varepsilon(z), \quad (3-11)$$

$$\varepsilon(z) = G_r^{-1}(z)[y(z) - y_M(z)] - \text{izlazna pogreška modela.} \quad (3-12)$$

Dakle, nekorelirani signal bijelog šuma $\varepsilon(k)$ može se interpretirati kao izlazna pogreška modela, uvođenjem inverzne prijenosne funkcije filtra smetnje $G_r^{-1}(z)$ (Sl. 3.3.).

¹ Neka je dana slučajna varijabla $\varepsilon(k)$ i za tu slučajnu varijablu uzorci x_1, x_2, \dots, x_N , tada vrijedi:

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon(k)\} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = m \\ \sigma_\varepsilon^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \text{ (varijanca)} \end{aligned}$$



Sl. 3.3.

Za prikaz “stohastičkog” dijela modela postoje različite mogućnosti.

Za $G_r(z)$ uobičajeno se odabire:

$$G_r(z) = \frac{1}{A(z^{-1})} G_r^*(z). \quad (3-13)$$

Iz (3-11), (3-7) i (3-13) slijedi:

$$Y(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} U(z) + \frac{1}{A(z^{-1})} G_r^*(z) \varepsilon(z), \quad (3-14)$$

ili u uobičajenijem obliku:

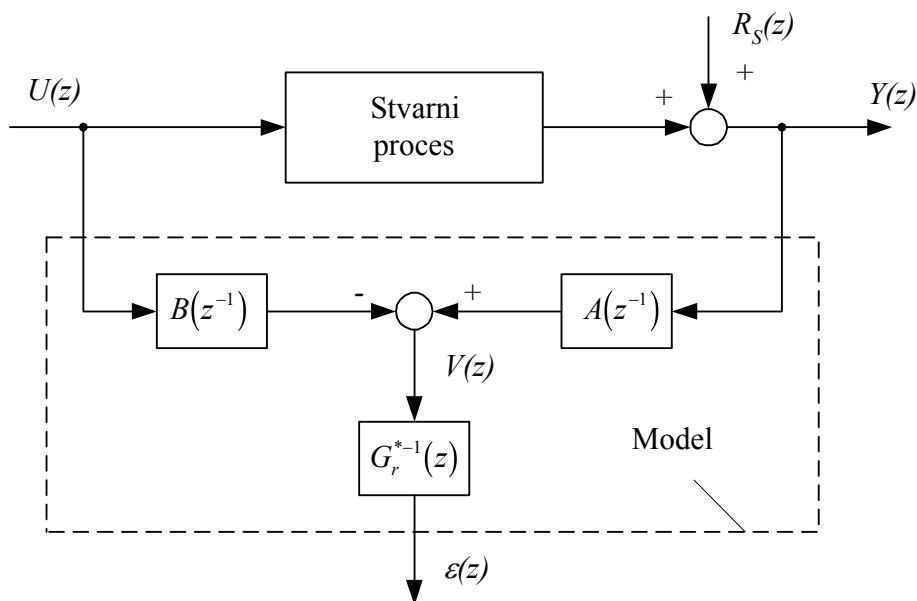
$$A(z^{-1})Y(z) - B(z^{-1})U(z) = G_r^*(z)\varepsilon(z) = V(z), \quad (3-15)$$

gdje je:

$v(k) = Z^{-1}\{V(z)\}$ -autokorelirani (obojeni) signal šuma.

Jednadžba (3-15) predstavlja cjelovit matematički model procesa.

Blokovski prikaz jednadžbe (3-15) dan je na slici 3.4.



Sl. 3.4.

Pogreška $v(k)$ predstavlja poopćenu pogrešku modela, dok $\varepsilon(z)$ predstavlja tzv. pogrešku jednadžbe, a koja je identična izlaznoj pogrešci modela.

Različite strukture modela, koje će biti opisane, a koje se koriste za identifikaciju procesa pomoću postupaka procjene parametara, temelje se na jednadžbi (3-15).

Ako bi desna strana jednadžbe (3-15) bila jednaka nuli, tada bi se radilo o procesu na koji ne djeluju smetnje; tada bi se proces u cijelosti mogao opisati determinističkim dijelom modela.

Desna strana jednadžbe (3-15) opisuje, dakle, odstupanje modela u odnosu na slučaj kada na proces ne djeluju smetnje. Stoga se $v(k)$ definira kao poopćena pogreška modela. Ova pogreška modela može se zamisliti da nastaje iz bijelog šuma $\varepsilon(k)$ koji se vodi preko filtra smetnje $G_r^*(z)$.

Izbor $G_r^*(z)$

U općem slučaju je:

$$G_r^*(z) = \frac{V(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}, \quad (3-16)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}, \quad (3-17)$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n}. \quad (3-18)$$

Cjeloviti model dan jednađbom (3-15) označava se ARMAX modelom (Auto Regressive Moving Average with eXogenous² variable).

ARMAX model predstavlja najvažniji oblik matematičkog modela za praktičnu primjenu postupaka procjene parametara u identifikaciji procesa.

Drugi oblik prikaza jednađbe (3-15) je pomoću operatora posmaka (engl. backward shift operator):

$$q^{-1}f(t) = f(t-1), \quad (3-19)$$

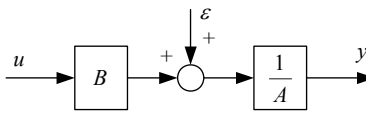
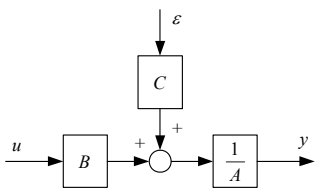
$$A(q^{-1})y(t) - B(q^{-1})u(t) = G_r^*(q^{-1})\varepsilon(t) = v(t). \quad (3-20)$$

Iako se ARMAX model često koristi, postoje i drugi oblici matematičkog modela koji se mogu izvesti iz poopćene strukture modela:

$$A(z^{-1})y(z) = \frac{B(z^{-1})}{F(z^{-1})}u(z) + \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}\varepsilon(z). \quad (3-21)$$

Iz poopćene strukture modela (3-21) moguće je izvesti 32 inačice modela (jer je 5 različitih polinoma).

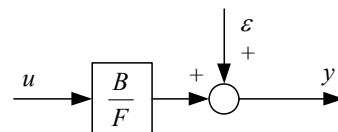
Specijalni slučajevi poopćene strukture modela koji se češće koriste u praksi dani su kako slijedi:

| <u>Koriste se polinomi</u> | <u>Naziv strukture modela</u> | <u>Blokovska shema</u> |
|----------------------------|-------------------------------|---|
| B | FIR (Finite Impulse Response) | |
| AB | ARX |  |
| ABC | ARMAX |  |
| AC ABD ABCD | ARMA ARARX ARARMAX | |

² eXternal input

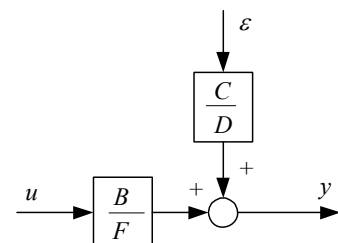
BF

OE (Output Error model)



BFCD

BJ (Box-Jenkins)



Razmotrimo ponovo jednadžbu (3-15). Njenim vraćanjem u diskretno vremensko područje dobije se (za $k \geq n$):

$$y(k) + \sum_{v=1}^n a_v y(k-v) - \sum_{v=0}^n b_v u(k-v) = v(k), \quad (3-22)$$

gdje je (prema (3-16), (3-17) i (3-18)):

$$v(k) = -\sum_{v=1}^n d_v v(k-v) + \sum_{v=1}^n c_v \varepsilon(k-v) + \varepsilon(k). \quad (3-23)$$

Ako se definira **vektor podataka** (vektor regresora, regresijski vektor):

$$\underline{\varphi}(k) = [-y(k-1) \dots -y(k-n) : u(k-1) \dots u(k-n) : \varepsilon(k-1) \dots \varepsilon(k-n) : -v(k-1) \dots -v(k-n)]^T \quad (3-24)$$

i **vektor parametara**:

$$\underline{\Theta} = [a_1 \dots a_n : b_1 \dots b_n : c_1 \dots c_n : d_1 \dots d_n]^T \quad (3-25)$$

dobije se iz (3-22) i (3-23) izraz za **linearnu regresiju**³:

³ Koncept linearne regresije vrlo je uobičajen u statistici. Ovaj koncept potječe od Gaussa (1809), koji je koristio ovu tehniku u proračunu putanja planeta.

$$y(k) = \underline{\varphi}^T(k)\underline{\Theta} + \varepsilon(k). \quad (3-26)$$

U jednađbama (3-22) i (3-25) pretpostavljeno je da je $b_0 = 0$ (nema skoka u prijelaznoj funkciji pri $t = 0$)

Vektor podataka prema (3-24) može se prikazati i kao vektor regresijskih varijabli:

$$\underline{\varphi}(k) = [-x_1(k) - x_2(k) \dots - x_n(k); x_{n+1}(k) \dots x_{2n}(k); x_{2n+1}(k) \dots x_{3n}(k); -x_{3n+1}(k) \dots -x_{4n}(k)]^T. \quad (3-27)$$

Ako se jednađba (3-26) postavi za N uzastopnih trenutaka ($k = n+1, n+2, \dots, n+N$), dobije se sustav linearnih algebarskih jednađbi.

Uvedimo veličine:

$$\underline{Y}(N) = [y(n+1)y(n+2)\dots y(n+N)]^T - \text{vektor izlaznog signala}, \quad (3-28)$$

$$\underline{\varepsilon}(N) = [\varepsilon(n+1)\varepsilon(n+2)\dots \varepsilon(n+N)]^T - \text{vektor pogreške}, \quad (3-29)$$

$$\underline{\Phi}(N) = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{\varphi}^T(n+N) \end{bmatrix} = [\underline{\Phi}_y : \underline{\Phi}_u : \underline{\Phi}_\varepsilon : \underline{\Phi}_v] - \text{matrica podataka}, \quad (3-30)$$

gdje je:

$$\underline{\Phi}(N) = \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & | & u(n) & \cdots & u(1) & | & \varepsilon(n) & \cdots & \varepsilon(1) & | & -v(n) & \cdots & -v(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & | & u(n+1) & \cdots & u(2) & | & \varepsilon(n+1) & \cdots & \varepsilon(2) & | & -v(n+1) & \cdots & -v(2) \\ \vdots & & & | & \vdots & & & | & \vdots & & & | & \vdots & & \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & | & u(n+N-1) & \cdots & u(N) & | & \varepsilon(n+N-1) & \cdots & \varepsilon(N) & | & -v(n+N-1) & \cdots & -v(N) \end{bmatrix}.$$

$\underline{\Phi}_y$
 $\underline{\Phi}_u$
 $\underline{\Phi}_\varepsilon$
 $\underline{\Phi}_v$

Prema (3-28), (3-29) i (3-30) jednađba (3-26) pretvara se u oblik:

$$\underline{Y}(N) = \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta} + \underline{\varepsilon}(N). \quad (3-31)$$

3.1.2. Numeričko rješenje problema procjene

3.1.2.1 Direktno rješenje

Pretpostavimo da je u (3-15) $G_r^*(z) = 1$ (ARX model).

U ovom je slučaju vektor parametara (dim: $2n \times 1$):

$$\underline{\Theta} = \underline{\Theta}_{ab} = [a_1 \dots a_n; b_1 \dots b_n]^T \quad (3-32)$$

i vektor podataka (dim: $2n \times 1$)

$$\underline{\varphi}(k) = \underline{\varphi}_{yu} = [-y(k-1) \dots -y(k-n); u(k-1) \dots u(k-n)]^T. \quad (3-33)$$

Ako je $\underline{\varepsilon}(N) = \underline{0}$ radi se o identifikaciji determinističkog dijela modela. Određivanje vektora parametara $\underline{\Theta}$ u tom se slučaju svodi na neposredno rješenje jednačbe (3-31).

Ako na sustav djeluje stohastička smetnja, jednačba (3-31) se rješava uz uvjet da zbroj kvadrata pogreške modela $\varepsilon(k)$ bude minimalan.

Za određivanje vektora procjene $\hat{\underline{\Theta}}$ vektora parametara $\underline{\Theta}$ uobičajeno se koristi sljedeći kriterij kakvoće:

$$I_1 = I_1(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon^2(k) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T(N) \underline{\varepsilon}(N) \stackrel{!}{=} \min^4. \quad (3-34)$$

U postupku identifikacije parametara ne možemo uspoređivati procjenjene parametre $\hat{\underline{\Theta}}$ sa stvarnim parametrima $\underline{\Theta}$ (jer ih ne poznajemo). Isto tako, ne znamo iznos $\underline{\varepsilon}(k)$, ali ga možemo odrediti iz (3-31):

$$\underline{\varepsilon}(N) = \underline{Y}(N) - \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta}. \quad (3-35)$$

Iz (3-34) i (3-35) slijedi:

$$I_1(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} [\underline{Y}(N) - \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta}]^T [\underline{Y}(N) - \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta}], \quad (3-36)$$

$$\left. \frac{\partial I_1(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} \right|_{\underline{\Theta}=\hat{\underline{\Theta}}} = -\underline{\Phi}^T(N) \underline{Y}(N) + \underline{\Phi}^T(N) \underline{\Phi}(N) \hat{\underline{\Theta}} = \underline{0}^5. \quad (3-37)$$

Iz (3-37) slijedi tzv. normalna jednačba:

⁴ funkcija gubitaka (engl. loss function, njem. Verlustfunktion): $I = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T(N) \underline{\varepsilon}(N) = \frac{1}{2} \|\underline{\varepsilon}(N)\|^2$ -

Euklidska vektorska norma

⁵ $\frac{\partial(\underline{a}^T \underline{Q} \underline{a})}{\partial \underline{a}} = 2 \underline{a}^T \underline{Q}$

$$\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)\hat{\underline{\Theta}} = \underline{\Phi}^T(N)\underline{Y}(N). \quad (3-38)$$

Kao neposredno analitičko rješenje jednadžbe (3-38) dobije se vektor procjene za traženi vektor parametara:

$$\hat{\underline{\Theta}} \equiv \hat{\underline{\Theta}}(N) = \left[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N) \right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N)\underline{Y}(N). \quad (3-39)$$

Uvođenjem skraćenog zapisa:

$$\underline{\Phi}^*(N) = \underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N) \quad \text{dim}(2n \times 2n) \quad (3-40)$$

$$\underline{Y}^*(N) = \underline{\Phi}^T(N)\underline{Y}(N) \quad (3-41)$$

(3-39) prelazi u :

$$\hat{\underline{\Theta}}(N) = \underline{\Phi}^{*-1}(N)\underline{Y}^*(N). \quad (3-42)$$

U specijalnom slučaju, ako je matrica $\underline{\Phi}(N)$ dimenzije:

$$N = 2n$$

jednadžba (3-39) se pojednostavljuje (jer $\underline{\Phi}(N)$ postaje kvadratna matrica):

$$\hat{\underline{\Theta}} = \hat{\underline{\Theta}}(N) = \left[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N) \right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N)\underline{Y}(N) = \underline{\Phi}(N)^{-1} \underbrace{\left(\underline{\Phi}^T(N) \right)^{-1} \underline{\Phi}^T(N)}_{\underline{I}} \underline{Y}(N), \quad (3-43)$$

odakle slijedi:

$$\hat{\underline{\Theta}}(N) = \underline{\Phi}^{-1}(N)\underline{Y}(N). \quad (3-44)$$

Računanje prema (3-39) zahtijeva inverziju sljedeće matrice:

$$\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N) = \begin{bmatrix} -y(n) & -y(n+1) & \cdots & -y(n+N-1) \\ -y(n-1) & \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \\ -y(1) & \vdots & \cdots & -y(N) \\ \hline u(n) & \vdots & \cdots & u(n+N-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(1) & \vdots & \cdots & u(N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y(n) & \cdots & -y(1) & | & u(n) & \cdots & u(1) \\ -y(n+1) & \cdots & -y(2) & | & \vdots & & \\ \vdots & & & | & & & \\ \vdots & & & | & & & \\ \vdots & & & | & & & \\ \vdots & & & | & & & \\ -y(n+N-1) & \cdots & -y(N) & | & u(n+N-1) & \cdots & u(N) \end{bmatrix}. \quad (3-45)$$

Matrica (3-45) postaje nesingularna, a time i invertibilna, ako ulazni slijed $u(k)$ neprestano pobuđuje proces, tj. ako je pobuda perzistentna.

Perzistentna pobuda:

- Signal u ima perzistentnost reda n ako je njegov diskretni spektar $S_{uu}(\omega)$ različit od nule na najmanje n točaka u području frekvencija $0 \leq \omega < \frac{\pi}{T}$.

ili

- Perzistentna pobuda reda n dobije se onda ako je u izrazu (3-45) u matrici $\Phi^T(N)$ “donja” komponenta matrice $(n \times n)$ nesingularna.

(Signal $u(k) = S(k)$ nema perzistentnu pobudu!)

U tom smislu govori se o:

- konceptu informativnih podataka
odnosno
- “dovoljno generalnim” ulazima.

Elementi matrice $\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)$ mogu se za dovoljno veliki N aproksimirati pomoću odgovarajućih autokorelacijskih i međukorelacijskih funkcija.

Prema (2-43) i (2-54):

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)x(k+\tau),$$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k-\tau)y(k),$$

izraz (3-45) poprima oblik:

$$\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N) \equiv \underline{\Phi}^*(N) \approx N \begin{bmatrix} R_{yy}(0) & \cdots & R_{yy}(n-1) & | & -R_{uy}(0) & \cdots & -R_{uy}(n-1) \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ R_{yy}(n-1) & \cdots & R_{yy}(0) & | & -R_{uy}(n-1) & \cdots & -R_{uy}(0) \\ - - - - - & - - - - - & - - - - - & | & - - - - - & - - - - - & - - - - - \\ -R_{uy}(0) & \cdots & -R_{uy}(n-1) & | & R_{uu}(0) & \cdots & R_{uu}(n-1) \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ -R_{uy}(n-1) & \cdots & -R_{uy}(0) & | & R_{uu}(n-1) & \cdots & R_{uu}(0) \end{bmatrix}. \quad (3-46)$$

Ovo je simetrična matrica.

Slično je:

$$\underline{\Phi}^T(N)\underline{Y}(N) \equiv \underline{Y}^*(N) \approx N \begin{bmatrix} -R_{yy}(1) & \cdots & -R_{yy}(n) & | & R_{uy}(1) & \cdots & R_{uy}(n) \end{bmatrix}^T. \quad (3-47)$$

Za inverziju matrice (3-45), a time i za određivanje $\hat{\underline{\Theta}}$, koriste se različiti numerički postupci.

Ako je:

- matrica $\underline{\Phi}^*(N)$ nesingularna i simetrična, koristi se
 - postupak prema Cholesky-ju
- matrica $\underline{\Phi}^*(N)$ singularna ili slabo kondicionirana, tada se rješava jednačba

$$\underline{\Phi}^*(N)\hat{\underline{\Theta}}(N) = \underline{Y}^*(N) \quad (3-48)$$

prema jednom od postupaka:

- Gaussov postupak;
- Gauss-Banachiewiczjev postupak;
- Gauss-Jordanov postupak.

U pretpostavljenom modelu procesa, ARX modelu, pogreška modela $v(k) = \varepsilon(k)$ ne korelira s ulaznim i izlaznim signalima $u(k)$ i $y(k)$ procesa koji se identificira.

Signal $\varepsilon(k)$ predstavlja bijeli šum.

Nekoreliranost (statistička neovisnost) $\varepsilon(k)$ i ulazno/izlaznih signala izražava se na sljedeći način:

$$\begin{aligned} E\{\varepsilon(k)u(k)\} &= E\{\varepsilon(k)\}E\{u(k)\}, \\ E\{\varepsilon(k)y(k)\} &= E\{\varepsilon(k)\}E\{y(k)\}. \end{aligned} \quad (3-49)$$

Uz navedene pretpostavke vrijedi za graničnu vrijednost očekivanja procijenjenog vektora parametara $\hat{\underline{\Theta}}$, za $N \rightarrow \infty$, gdje je N broj parova mjernih podataka $u(k)$ i $y(k)$ ($k = n+1, \dots, n+N$):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\underline{\Theta}}(N)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\left[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)\right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N)\underline{Y}(N)\right\}. \quad (3-50)$$

Uvrštenjem jednačbe (3-31) u (3-50) slijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\underline{\Theta}}(N)\} &= \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\left[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)\right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N)[\underline{\Phi}(N)\underline{\Theta} + \underline{\varepsilon}(N)]\right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E\left\{\underbrace{\left[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)\right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)}_I \underline{\Theta} + \left[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)\right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N)\underline{\varepsilon}(N)\right\}, \end{aligned}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \underbrace{\left[\underline{\Phi}^T(N) \underline{\Phi}(N) \right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N) \underline{\varepsilon}(N)}_{\equiv 0 \rightarrow \text{nekoreliranost } \varepsilon \text{ s y i u u (3-49)}} \right\} + E \{ \underline{\Theta} \}. \quad (3-51)$$

Prema tome je:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) \} = E \{ \underline{\Theta} \} \equiv \underline{\Theta}. \quad (3-52)$$

Procijenjena vrijednost vektora $\hat{\underline{\Theta}}$ prema (3-52) je konzistentna (potpuno se slaže s vektorom parametara $\underline{\Theta}$).

Konzistentnost (engl. consistency)

Procjena se naziva konzistentnom ako procijenjena vrijednost postaje utoliko bolja ukoliko je veći broj N mjernih podataka.

a) Za $N \rightarrow \infty$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left[\left(\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} \right) = 0 \right] = 1. \quad (3-53)$$

Konzistentna procjena uvijek je asimptotski vjerodostojna, tako da vrijedi

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) \} = \underline{\Theta}.$$

b) Za proizvoljnu konačnu vrijednost N konzistentna procjena može imati sustavnu pogrešku (engl. bias).

$$E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} \} = E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) \} - \underline{\Theta} = \underline{b} \neq \underline{0}. \quad (3-54)$$

c) Konzistentnost u kvadratičnom smislu ima ona procjena za koju, uz izraz (3-52), vrijedi za varijancu procijenjene vrijednosti:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left(\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} \right) \left(\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} \right)^T \right\} = \underline{0}. \quad (3-55)$$

Prema tome, u ovom slučaju teže nuli i “bias” i varijanca.

U svrhu daljnjeg razmatranja, uvrštenje (3-31) u (3-39) daje:

$$\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} = \left[\underline{\Phi}^T(N) \underline{\Phi}(N) \right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N) \underline{\varepsilon}(N). \quad (3-56)$$

Iz izraza (3-56) slijedi varijanca:

$$E \left\{ \left[\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} \right] \left[\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta} \right]^T \right\} = E \left\{ \left[\underline{\Phi}^T(N) \underline{\Phi}(N) \right]^{-1} \underline{\Phi}^T(N) \underline{\varepsilon}(N) \cdot \underline{\varepsilon}^T(N) \underline{\Phi}(N) \underbrace{\left[\underline{\Phi}^T(N) \underline{\Phi}(N) \right]^{-1}}_{\underline{\Phi}^{*-1}(N)} \right\}. \quad (3-57)$$

Ako $[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)]^{-1}\underline{\Phi}^T(N)$ ne korelira s $\underline{\varepsilon}(N)$, onda (3-57) poprima oblik:

$$E\left\{\left[\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta}\right]\left[\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta}\right]^T\right\} = \underline{\Phi}^{*-1}(N)\underline{\Phi}^T(N)E\left\{\underline{\varepsilon}(N)\underline{\varepsilon}^T(N)\right\}\underline{\Phi}(N)\underline{\Phi}^{*-1}(N). \quad (3-58)$$

U izrazu (3-58) je:

$$E\left\{\underline{\varepsilon}(N)\underline{\varepsilon}^T(N)\right\} = \sigma_{\varepsilon}^2 \underline{I}. \quad (3-59)$$

i predstavlja varijancu pogreške.

Konačno, iz (3-58) i (3-59) slijedi izraz za varijancu vektora procjene parametara, nakon provedenih matricnih operacija:

$$E\left\{\left[\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta}\right]\left[\hat{\underline{\Theta}}(N) - \underline{\Theta}\right]^T\right\} = \sigma_{\varepsilon}^2 \underline{\Phi}^{*-1}(N). \quad (3-60)$$

Često se u literaturi susreće i matrica:

$$\underline{P}^*(N) = \sigma_{\varepsilon}^2 \underline{\Phi}^{*-1}(N) = \sigma_{\varepsilon}^2 \underline{P}(N) \quad (3-61)$$

koja se naziva **matricom kovarijance procjene parametara**.

Izloženi postupak direktne (engl. batch) procjene parametara za ARX-model obavlja se prema (3-39), odnosno (3-41), u jednom računskom koraku. Za slučajeve kada $G_r^*(z) \neq 1$ procjena parametara obavlja se u više koraka, što može biti programski i numerički zahtjevno. Stoga se koriste rekurzivni postupci.

3.1.2.2 Rekurzivno rješenje (RLS-metoda)

Prethodno opisana direktna LS procjena parametara zasniva se na rješavanju jednadžbe (3-39), odnosno (3-41), u kojoj se koristi N izmjerenih parova $u(k)$ i $y(k)$.

Ako mjerni podaci nanovo pristižu, te ako te podatke valja koristiti za procjenu parametara, tada bi za svaku novoprispjelu vrijednost para $u(k)$ i $y(k)$ trebalo nanovo računati matricu podataka $\underline{\Phi}^*(N)$ (odnosno $[\underline{\Phi}^T(N)\underline{\Phi}(N)]^{-1}$) i vektor podataka $\underline{Y}^*(N)$.

Ovo se računanje daje zaobići primjenom rekurzivne LS metode (RLS).

Zbog računskog postupka rekurzivna se metoda naziva i sekvencijalnom metodom.

Najčešće se koristi u on-line identifikaciji.

Pri prijelazu s direktnog rješenja na rekurzivno formalno se polazi od jednadžbe (3-39).

Pri tome se umjesto argumenta N stavlja argument k .

Osnovna zamisao rekurzivnog rješenja sastoji se u tome da se:

- vektor-stupac $\underline{y}(k)$ proširi $(k+1)$ -im elementom;
- matrica podataka $\underline{\Phi}(k)$ proširi $(k+1)$ -im retkom.

Prema (3-39) ($N \rightarrow k$) slijedi:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k) = [\underline{\Phi}^T(k)\underline{\Phi}(k)]^{-1} \underline{\Phi}^T(k)\underline{y}(k). \quad (3-62)$$

Prošireno novim parom mjernog podatka $\{u(k+1), y(k+1)\}$ slijedi prema (3-30):

$$\underline{\Phi}(k) = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{\varphi}^T(k) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\Phi}(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{\varphi}^T(k) \\ - \quad - \quad - \\ \underline{\varphi}^T(k+1) \end{bmatrix}, \quad (3-63)$$

gdje je:

$$\underline{\varphi}^T(k+1) = \begin{bmatrix} -y(k) & \cdots & -y(k-n+1) & | & u(k) & \cdots & u(k-n+1) \end{bmatrix}.$$

Isto tako:

$$\underline{y}(k) = [y(n+1) \quad \cdots \quad y(k)]^T \Rightarrow \underline{y}(k+1) = \begin{bmatrix} y(n+1) & \cdots & y(k) & | & y(k+1) \end{bmatrix}^T. \quad (3-64)$$

Za novi vektor parametara u $(k+1)$ -om koraku uzorkovanja dobije se:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = [\underline{\Phi}^T(k+1)\underline{\Phi}(k+1)]^{-1} \underline{\Phi}^T(k+1)\underline{y}(k+1). \quad (3-65)$$

Uvrštenjem skraćenog zapisa prema (3-40), te uvrštenjem (3-63) i (3-64) u (3-65) slijedi:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \Phi^{*-1}(k+1) \begin{bmatrix} \underline{\Phi}(k) \\ - \quad - \quad - \\ \underline{\varphi}^T(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{y}(k) \\ - \quad - \quad - \\ y(k+1) \end{bmatrix}. \quad (3-66)$$

Nakon množenja dobije se:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \underline{\Phi}^{*-1}(k+1) [\underline{\Phi}(k)^T \underline{y}(k) + \underline{\varphi}(k+1)y(k+1)]. \quad (3-67)$$

Kako je prema (3-62):

$$\underline{\Phi}^T(k)\underline{y}(k) = \underline{\Phi}^T(k)\underline{\Phi}(k)\hat{\underline{\Theta}}(k) = \underline{\Phi}^*(k)\hat{\underline{\Theta}}(k), \quad (3-68)$$

izraz (3-67) prelazi u oblik:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \underline{\Phi}^{*-1}(k+1) \left[\underline{\Phi}^*(k)\hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{\varphi}(k+1)y(k+1) \right]. \quad (3-69)$$

Matrica $\underline{\Phi}^*(k)$ u (3-69) može se izraziti pomoću $\underline{\Phi}^*(k+1)$:

$$\underline{\Phi}^*(k+1) = \begin{bmatrix} \underline{\Phi}(k) \\ - & - & - \\ \underline{\varphi}^T(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \underline{\Phi}(k) \\ - & - & - \\ \underline{\varphi}^T(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\underline{\Phi}^T(k)\underline{\Phi}(k)}_{\underline{\Phi}^*(k)} + \underline{\varphi}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1),$$

odakle slijedi:

$$\underline{\Phi}^*(k) = \underline{\Phi}^*(k+1) - \underline{\varphi}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1). \quad (3-70)$$

Uvrštenjem (3-70) u (3-69) dobije se:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \underline{\Phi}^{*-1}(k+1) \left[\underline{\Phi}^*(k+1)\hat{\underline{\Theta}}(k) - \underline{\varphi}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1)\hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{\varphi}(k+1)y(k+1) \right],$$

odnosno:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \hat{\underline{\Theta}}(k) + \underbrace{\underline{\Phi}^{*-1}(k+1)\underline{\varphi}(k+1)}_{\underline{q}(k+1)} \left[y(k+1) - \underline{\varphi}^T(k+1)\hat{\underline{\Theta}}(k) \right], \quad (3-71)$$

gdje je:

$$\underline{q}(k+1) = \underline{\Phi}^{*-1}(k+1)\underline{\varphi}(k+1) \text{ - Kalmanov vektor pojačanja.}$$

Kalmanov vektor pojačanja izražen pomoću (3-61) glasi:

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k+1)\underline{\varphi}(k+1). \quad (3-72)$$

Izraz u zagradi u (3-71) odgovara, prema (3-26), procijenjenoj vrijednosti pogreške modela:

$$\hat{\varepsilon}(k+1) = y(k+1) - \underline{\varphi}^T(k+1)\hat{\underline{\Theta}}(k). \quad (3-73)$$

Procijenjena pogreška modela odnosi se na trenutak (korak, uzorak) koji slijedi procijenjenom vektoru parametara $\hat{\underline{\Theta}}(k)$. Stoga se ova pogreška naziva **predikcijskom pogreškom**.

Iz (3-71) – (3-73) slijedi:

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{q}(k+1)\hat{\varepsilon}(k+1). \quad (3-74)$$

Novi vektor procijenjenih parametara $\hat{\underline{\Theta}}(k+1)$ dobije se iz prethodne procjene $\hat{\underline{\Theta}}(k)$ korekcijom pomoću otežane predikcijske pogreške.

Predikcijsku pogrešku prema (3-73) možemo shvatiti kao razliku između nove mjerne vrijednosti $y(k+1)$ i njene predikcije u trenutku k (na osnovi vektora parametara $\hat{\underline{\Theta}}(k)$ u prethodnom trenutku):

$$\hat{y}(k+1)|_k = \underline{\varphi}^T(k+1)\hat{\underline{\Theta}}(k), \quad (3-75)$$

$$\hat{\varepsilon}(k+1) = y(k+1) - \hat{y}(k+1)|_k. \quad (3-76)$$

Računanje Kalmanovog vektora pojačanja prema jednažbi (3-72) numerički je zahtjevno. Stoga koristimo sljedeći postupak. Iz (3-61) i (3-70) slijedi:

$$\underline{P}(k+1) = \underline{\Phi}^{*-1}(k+1) = \left[\underline{\Phi}^*(k) + \underline{\varphi}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1) \right]^{-1}. \quad (3-77)$$

Primjenom leme o inverziji matrica na izraz (3-77) dobije se prikladan izraz za određivanje $\underline{P}(k+1)$.

*Lema o inverziji matrice*⁶

Lema:

Za nesusingularne matrice $\underline{A}, \underline{B}$ i \underline{C} vrijedi:

$$[\underline{A} + \underline{B}\underline{C}]^{-1} = \underline{A}^{-1} - \underline{A}^{-1}\underline{B}[\underline{C}^{-1} + \underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}\underline{A}^{-1} = \underline{A}^{-1} - \underline{A}^{-1}\underline{B}[\underline{I} + \underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}\underline{C}\underline{A}^{-1} \quad (3-78)$$

Dokaz:

Množenjem obje strane izraza (3-78) s $(\underline{A} + \underline{B}\underline{C})$ dobije se:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= (\underline{A} + \underline{B}\underline{C})\underline{A}^{-1} - (\underline{A} + \underline{B}\underline{C})\underline{A}^{-1}\underline{B}[\underline{C}^{-1} + \underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}\underline{A}^{-1}, \\ \underline{I} &= \underline{I} + \underline{B}\underline{C}\underline{A}^{-1} - (\underline{B} + \underline{B}\underline{C}\underline{A}^{-1}\underline{B})[\underline{C}^{-1} + \underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}\underline{A}^{-1}, \\ \underline{0} &= \underline{B}\underline{C}\underline{A}^{-1} - \underline{B}\underline{C} \underbrace{[\underline{C}^{-1} + \underline{A}^{-1}\underline{B}][\underline{C}^{-1} + \underline{A}^{-1}\underline{B}]^{-1}}_{\underline{I}} \underline{A}^{-1}. \\ &\quad \Downarrow \\ \underline{0} &= \underline{B}\underline{C}\underline{A}^{-1} - \underline{B}\underline{C}\underline{A}^{-1} = \underline{0}. \end{aligned}$$

Primjenom leme (3-78) na izraz (3-77) dobije se:

⁶ Housholder (1984)

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)\left[1 + \underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)\right]^{-1}\underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k). \quad (3-79)$$

S obzirom da je član u uglatoj zagradi izraza (3-79) skalarna veličina, (3-79) se može pisati i na sljedeći način:

$$\underline{P}(k+1) = \frac{\underline{P}(k)\left[1 + \underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)\right] - \underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)}{1 + \underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)}. \quad (3-80)$$

Množenjem objiju strana izraza (3-80) s $\underline{\varphi}(k+1)$ dobije se:

$$\underline{P}(k+1)\underline{\varphi}(k+1) = \frac{\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)}{1 + \underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)} = \underline{q}(k+1), \quad (3-81)$$

što prema (3-71) odgovara Kalmanovom vektoru pojačanja:

$$\underline{q}(k+1) = \underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)\left[1 + \underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{\varphi}(k+1)\right]^{-1}. \quad (3-82)$$

Iz (3-79) i (3-82) slijedi:

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k). \quad (3-83)$$

Jednadžbe (3-73), (3-74), (3-82) i (3-83) predstavljaju izraze za RLS procjenu.

Prednost RLS metode u odnosu na direktno rješenje jest u tome što se novi, stalno nadolazeći, parovi mjernih vrijednosti preko vektora podataka $\underline{\varphi}(k+1)$ mogu neposredno primijeniti za procjenu parametara. Stoga je metoda posebno prikladna za on-line identifikaciju. Pri tome nije potrebno memorirati matricu podataka (zbog trenutačne obradbe).

Uz iste uvjete kao za direktnu LS metodu, i RLS metoda daje konzistentnu procjenu parametara.

RLS metoda je u prednosti u odnosu na LS metodu jer u rekurzivnim relacijama (3-74) i (3-83) otpada inverzija matrice $\underline{\Phi}^*$. Međutim, u RLS metodi pojavljuje se problem slobodnog izbora početnih vrijednosti $\hat{\underline{\Theta}}(0)$ i $\underline{P}(0)$.

Opisano rekurzivno rješenje neposredno je primjenjivo samo za strukturu modela gdje je, prema (3-15), $G_r^*(z) = 1 \Rightarrow v(k) = \varepsilon(k)$. Za druge modelske strukture, gdje je $G_r^*(z) \neq 1$, matrica podataka $\underline{\Phi}(k)$, odnosno vektor podataka $\underline{\varphi}(k)$ sadrže, kao elemente, pogreške $\varepsilon(k)$ i $v(k)$. Budući da ove pogreške nisu mjerljive u trenutku k , potrebno ih je procijeniti:

$$\underline{\varphi}^T(k) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -y(k-1) \dots -y(k-n) & u(k-1) \dots u(k-n) & \hat{\varepsilon}(k-1) \dots \hat{\varepsilon}(k-n) & -\hat{v}(k-1) \dots -\hat{v}(k-n) \end{array} \right]. \quad (3-84)$$

Prema (3-73) slijedi:

$$\hat{\varepsilon}(k) = y(k) - \underline{\varphi}^T(k) \hat{\underline{\Theta}}(k-1), \quad (3-85)$$

a prema (3-22) je:

$$\hat{v}(k) = y(k) - \underline{\varphi}_{yu}^T(k) \hat{\underline{\Theta}}_{ab}(k-1), \quad (3-86)$$

gdje se $\underline{\varphi}_{yu}^T(k)$ određuje prema izrazu (3-33), a $\hat{\underline{\Theta}}_{ab}$ i $\hat{\underline{\Theta}}$ prema sljedećim izrazima:

$$\hat{\underline{\Theta}}_{ab}(k) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n & \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n \end{array} \right]^T, \quad (3-87)$$

$$\hat{\underline{\Theta}}(k) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \hat{a}_1 \dots \hat{a}_n & \hat{b}_1 \dots \hat{b}_n & \hat{c}_1 \dots \hat{c}_n & \hat{d}_1 \dots \hat{d}_n \end{array} \right]^T. \quad (3-88)$$

Budući da je u prethodnim razmatranjima potrebno procijeniti $\hat{\varepsilon}(k)$ i $\hat{v}(k)$, moraju se odrediti početne vrijednosti $\hat{\varepsilon}(0)$ i $\hat{v}(0)$.

3.1.2.3 Metoda pomoćnih varijabli

U razmatranju metode pomoćnih varijabli (metoda instrumentalnih varijabli – IV) ponovo polazimo od jednadžbe procesa (3-15):

$$A(z^{-1})Y(z) - B(z^{-1})U(z) = V(z).$$

Problem korelirane pogreške modela $v(k)$ do sada je rješavan svodenjem $v(k)$ na bijeli šum $\varepsilon(k)$ preko filtra $G_r^{*-1}(z) = \varepsilon(z)/V(z)$.

Ponovo ćemo pretpostaviti, kao i za LS metodu, da je $v(k) = \varepsilon(k)$, ali bez ikakvih specijalnih pretpostavki na $\varepsilon(k)$.

U analogiji s (3-31) daje se jednadžba (3-15) prikazati i u vektorskom obliku:

$$\underline{Y}(N) = \underline{\Phi}(N) \underline{\Theta} + \underline{v}(N). \quad (3-89)$$

Sušтина je IV metode konzistentno procijeniti vrijednosti parametara, kao i kod LS-metode. Međutim, kod IV metode ne postavljaju se zahtjevi na nekoreliranost pogreške modela $\varepsilon(k)$.

Formalni numerički pristup pri procjeni parametara pomoću IV metode je kako slijedi. Transponirana matrica podataka, $\underline{\Phi}^T(N)$, u (3-39) se formalno nadomjesti transponiranom matricom pomoćnih varijabli (instrumentalnom matricom podataka) $\underline{W}^T(N)$:

$$\underline{W}(N) = \begin{bmatrix} \underline{w}^T(n+1) \\ \vdots \\ \underline{w}^T(n+N) \end{bmatrix}. \quad (3-90)$$

Kako bi matrica $\underline{W}(N)$ bila matrica pomoćnih varijabli, trebaju biti ispunjeni sljedeći uvjeti:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \underline{W}^T(N) \underline{v}(N) \} = \underline{0}, \quad (3-91)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \underline{W}^T(N) \underline{\Phi}(N) \} \text{ pozitivno definitna}. \quad (3-92)$$

Ako su ispunjeni uvjeti prema (3-91) i (3-92), onda će procjena parametara biti konzistentna, kao za slučaj LS-metode s nekoreliranom pogreškom modela $\varepsilon(k)$.

Na temelju vektora pogreške $\underline{v}(N) = \underline{\varepsilon}(N)$ definira se kriterij kakvoće:

$$I_2 = I_2(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T(N) \underline{W}(N) \underline{W}^T(N) \underline{\varepsilon}(N) \stackrel{!}{=} \min. \quad (3-93)$$

Uvrštenjem (3-89) u (3-93) dobije se:

$$I_2(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} [\underline{Y}(N) - \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta}]^T \underline{W}(N) \underline{W}^T(N) [\underline{Y}(N) - \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta}]. \quad (3-94)$$

Iz (3-94) slijedi:

$$\frac{\partial I_2(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} = \underline{0} \Rightarrow \hat{\underline{\Theta}}(N) = [\underline{W}^T(N) \underline{\Phi}(N)]^{-1} \underline{W}^T(N) \underline{Y}(N). \quad (3-95)$$

Jednadžba (3-95) predstavlja jednadžbu za direktno određivanje parametara.

Analogno prema (3-51) (zamjenom matrice podataka $\underline{\Phi}(N)$ matricom pomoćnih varijabli $\underline{W}^T(N)$) dobije se:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) \} = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \left[\underline{W}^T(N) \underline{\Phi}(N) \right]^{-1} \underline{W}^T(N) \underline{v}(N) \right\} + E \{ \underline{\Theta} \}. \quad (3-96)$$

Zbog uvjeta (3-91) prvi sumand u (3-96) iščezava, pa je:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \{ \hat{\underline{\Theta}}(N) \} = E \{ \hat{\underline{\Theta}} \} = \underline{\Theta}. \quad (3-97)$$

Dakle, IV metodom dobiva se konzistentna procjena i za koreliranu pogrešku modela. Čisto formalno mogu se dobiti i rekurzivne jednačbe za IV metodu (RIV metodu) na temelju jednačbi (3-73), (3-74), (3-82) i (3-83):

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\Theta}}(k+1) &= \hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{v}(k+1), \\ \underline{q}(k+1) &= \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) \left[1 + \underline{\varphi}^T(k+1) \underline{P}(k) \underline{w}(k+1) \right]^{-1}, \\ \underline{P}(k+1) &= \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1) \underline{\varphi}^T(k+1) \underline{P}(k), \\ \hat{v}(k+1) &= y(k+1) - \underline{\varphi}^T(k+1) \hat{\underline{\Theta}}(k). \end{aligned} \quad (3-98)$$

Brzina konvergencije RIV metode bitno ovisi o izboru matrice pomoćnih varijabli \underline{W} . Za ispunjenje uvjeta (3-91) i (3-92) moraju se elementi matrice \underline{W} tako odabrati da oni jako koreliraju s “korisnim” signalima u matrici $\underline{\Phi}$, a da ne koreliraju sa signalima smetnje. Najpovoljniji slučaj bi bio ako bi matrica \underline{W} direktno sadržavala signale matrice $\underline{\Phi}$ koji ne sadrže smetnje. Pri tome je ulazni signal $u(k)$ poznat (smatra se bez smetnje), a izlazni signal iz procesa (koji ne bi sadržavao smetnju) $y_s(k)$ nije mjerljiv. Stoga se vrijednosti izlaznog signala $y_s(k)$ procjenjuju i te se procijenjene vrijednosti koriste kao pomoćne varijable y_H . Dakle, redak matrice \underline{W} ima oblik:

$$\underline{w}^T(k) = \left[\begin{array}{c|c} & \\ -y_H(k-1) \dots -y_H(k-n) & u(k-1) \dots u(k-n) \end{array} \right]. \quad (3-99)$$

Iz (3-99) slijedi regresijska relacija:

$$y_H(k) = \underline{w}^T(k) \underline{\Theta}_H(k), \quad (3-100)$$

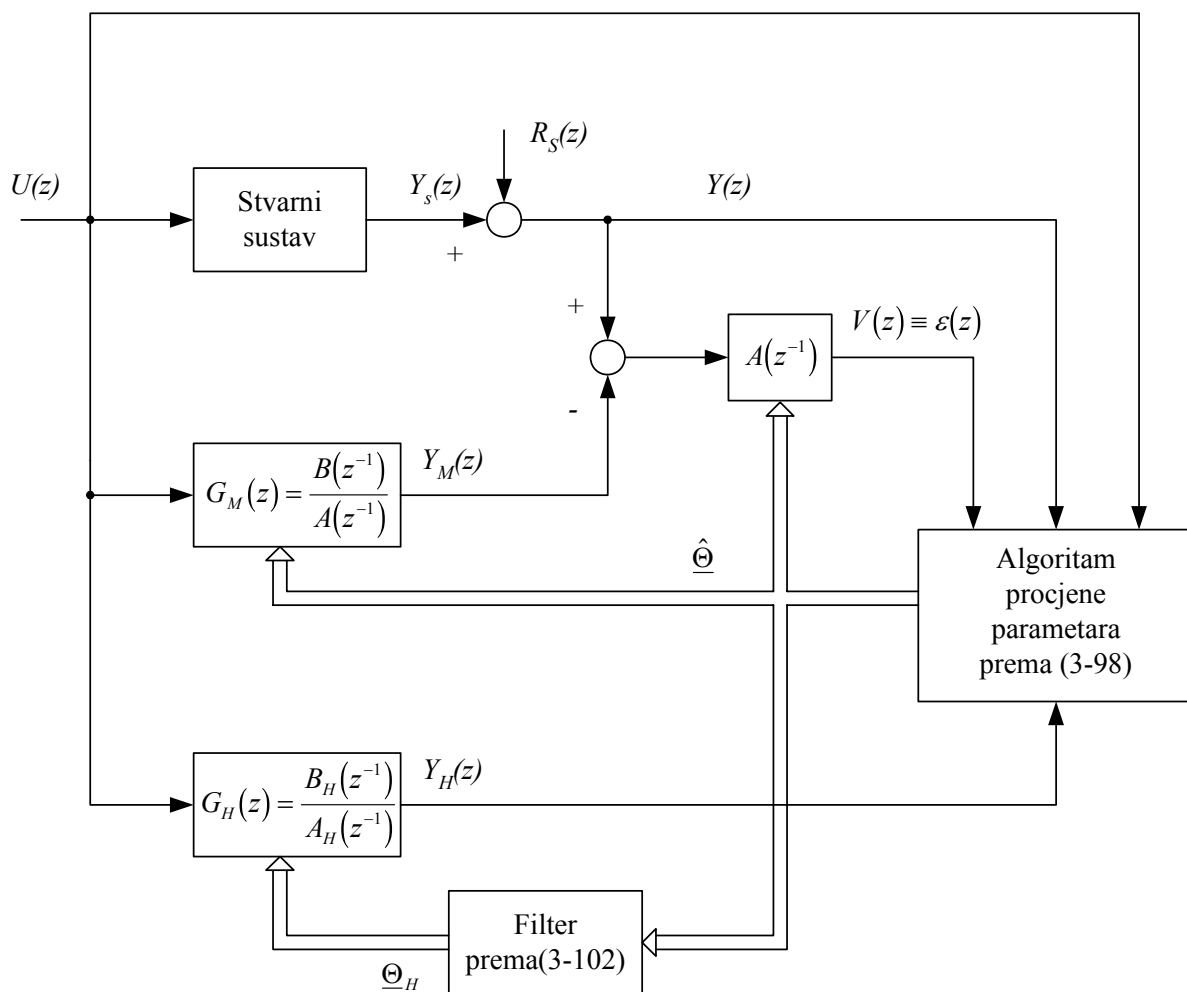
gdje je:

$\underline{\Theta}_H$ - vektor parametara pomoćnog modela definiranog kao:

$$G_H(z) = \frac{Y_H(z)}{U(z)} = \frac{B_H(z^{-1})}{A_H(z^{-1})}. \quad (3-101)$$

Procjena vektora parametara $\hat{\underline{\Theta}}$ obavlja se prema shemi na slici 3.5, koja predstavlja bazičnu shemu RIV metode procjene parametara.

Vektor parametara $\underline{\Theta}_H$ pomoćnog modela određuje se iz procijenjenih parametara $\hat{\underline{\Theta}}$, kako se u nastavku pokazuje.



Sl. 3.5. Model RIV metode.

Budući da signal smetnje $r_s(k)$ utječe na određivanje parametara $\hat{\underline{\Theta}}(k)$, pomoćne varijable $y_H(k)$ koreliraju sa signalom smetnje $r_s(k)$ za $\underline{\Theta}_H = \hat{\underline{\Theta}}$, a time i s pogreškom modela $v(k)$.

U tom slučaju nije više ispunjen uvjet (3-91), te se ne može očekivati da će $\hat{\underline{\Theta}}(k)$ predstavljati konzistentnu procjenu; $\hat{\underline{\Theta}}(k)$ će sadržavati sustavnu pogrešku procjene. Kako bi se to izbjeglo, vektor parametara $\underline{\Theta}_H(k)$ određuje se iz vektora parametara $\hat{\underline{\Theta}}(k)$ pomoću sljedeće relacije, koja opisuje niskopropusni filter s kašnjenjem:

$$\underline{\Theta}_H(k) = (1 - \gamma)\underline{\Theta}_H(k-1) + \gamma\hat{\underline{\Theta}}(k-d). \quad (3-102)$$

U izrazu (3-102) kašnjenje d odabire se tako da signali $v(k+d)$ i $v(k)$ ne koreliraju, a koeficijentom γ ($0,01 \leq \gamma \leq 0,1$) određuje se brzina filtra.

RIV metoda predstavlja brz i djelotvoran postupak (zbog korištenja $G_r^*(z) = 1$) pa je posebno prikladna za “on-line” primjene.

Djelotvornost (engl. efficiency) procjene

Djelotvornost je dodatno statističko svojstvo procjene parametara (uz konzistentnost). Procjena je asimptotski djelotvorna, ako se između svih vjerodostojnih procjena dobije najmanja moguća varijanca pogreške procjene.

Neka su $\hat{\underline{\Theta}}_1(N)$ i $\hat{\underline{\Theta}}_2(N)$ dva procijenjena vektora parametara $\underline{\Theta}$, dobivena na temelju N mjernih vrijednosti ulazno/izlaznih signala procesa.

Djelotvornost procijenjene vrijednosti $\hat{\underline{\Theta}}_1(N)$ u odnosu na $\hat{\underline{\Theta}}_2(N)$ definira se kao odnos:

$$\eta = \frac{E\left\{\left(\hat{\underline{\Theta}}_1(N) - \underline{\Theta}\right) \cdot \left(\hat{\underline{\Theta}}_1(N) - \underline{\Theta}\right)^T\right\}}{E\left\{\left(\hat{\underline{\Theta}}_2(N) - \underline{\Theta}\right) \cdot \left(\hat{\underline{\Theta}}_2(N) - \underline{\Theta}\right)^T\right\}} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (3-103)$$

gdje izrazi u brojniku i nazivniku predstavljaju varijance pogreške procjene.

Ako je $\eta < 1$ tada je procjena $\hat{\underline{\Theta}}_1$ djelotvornija od procjene $\hat{\underline{\Theta}}_2$.

3.1.2.4 Metoda maksimalne vjerojatnosti (ML metoda)

ML metoda (Maximum Likelihood method)⁷ polazi od stohastičkog načina promatranja, pri čemu se tvori funkcija gustoće razdiobe promatranih stohastičkih signala i nepoznatih parametara.

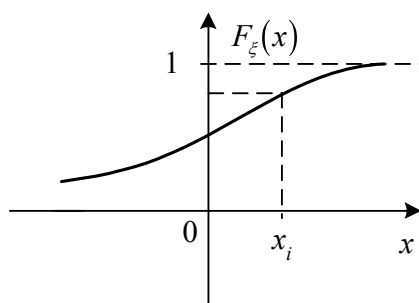
Kratki opis principa metode

Neka je za kontinuiranu slučajnu varijablu ξ dano N mjernih vrijednosti (uzoraka): x_1, x_2, \dots, x_N . Neka su mjerne vrijednosti međusobno statistički neovisne:

$$E\{x_i x_j\} = E\{x_i\}E\{x_j\}, \quad i \neq j. \quad (3-104)$$

Funkcija razdiobe $F_\xi(x)$ (Sl. 3.6.) predstavlja vjerojatnost P da slučajna varijabla ξ poprimi vrijednost manju od x :

$$F_\xi(x) = P(\xi \leq x). \quad (3-105)$$



Sl. 3.6.

Funkcija razdiobe ima sljedeća svojstva:

$$0 \leq F_\xi(x) \leq 1, \quad (3-106)$$

$$F_\xi(-\infty) = 0, \quad (3-107)$$

$$F_\xi(\infty) = 1, \quad (3-108)$$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(v) dv = P(\xi \leq x) \quad ; \quad f_\xi(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx}, \quad (3-109)$$

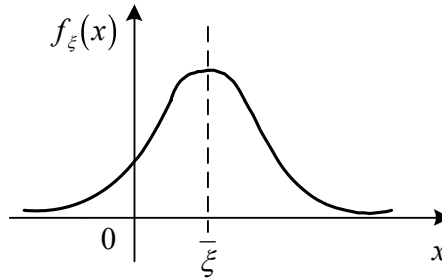
gdje je :

$f_\xi(x)$ - funkcija gustoće razdiobe (Sl. 3.7.).

⁷ Gauss (1809)

Za funkciju gustoće razdiobe vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1. \quad (3-110)$$



Sl. 3.7.

Neka je funkcija gustoće razdiobe ovisna o jednom ili više nepoznatih parametara $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ i neka je na mjestu $\xi = x_i$ opisana pomoću:

$$f_{\xi}(x_i) = f_{\xi}(x_i, \Theta_1, \dots, \Theta_n), \text{ za } i = 1, \dots, N. \quad (3-111)$$

Za procjenu parametara $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ na osnovi mjernih uzoraka x_i definira se funkcija vjerojatnosti (engl. likelihood function), skraćeno L funkcija:

$$L = L(x_1, \dots, x_N; \Theta_1, \dots, \Theta_n) = f_{\xi}(x_1, \dots, x_N; \Theta_1, \dots, \Theta_n) = \prod_{i=1}^N f_{\xi}(x_i; \Theta_1, \dots, \Theta_n). \quad (3-112)$$

Ako je funkcija gustoće razdiobe poznata (npr. Gaussova razdioba, Poissonova razdioba), tada se L funkcija može promatrati kao funkcija nepoznatih parametara Θ_i .

Osnovna zamisao ML metode sadržana je u tome da se iz mogućih procijenjenih vrijednosti parametara $\hat{\Theta}_i$ nepoznatih parametara Θ_i odrede one vrijednosti za koje mjerni uzorci x_1, \dots, x_N imaju najveću vjerojatnost. U tom slučaju L funkcija ima maksimalnu vrijednost.

Kako bi se odredila ML procjena, moraju se riješiti jednadžbe (ML jednadžbe):

$$\frac{\partial L}{\partial \Theta_i} = 0, \text{ za } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3-113)$$

iz kojih se dobiju parametri $\Theta_i \equiv \hat{\Theta}_i$, što osigurava maksimum L funkcije.

Radi lakšeg računanja uvodi se funkcija $\ln L$ (koja ima maksimum na istom mjestu kao i L funkcija):

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_i} \ln L = 0, \text{ za } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3-114)$$

Iz jednadžbi (3-114) dobiju se tražene procijenjene vrijednosti $\hat{\Theta}_i$ za nepoznate parametre Θ_i kao funkcije mjernih vrijednosti x_1, \dots, x_N .

Pokazuje se da ova procjena (za dovoljno veliki broj mjernih vrijednosti) konvergira, i u statističkom smislu je:

- konzistentna;
- djelotvorna;
- iscrpna.

Iscrpna (engl. sufficient) procjena

Procjena se naziva iscrpnom (dovoljnom, dostatnom), ako ona sadrži sve informacije o promatranim vrijednostima, iz kojih se procjenjuju parametri.

Može se pokazati da je “informatičnost” pri procjeni obrnuto proporcionalna varijanci. Iz toga slijedi da iscrpna procjena mora imati najmanju moguću varijancu. Stoga je iscrpna procjena najdjelotvornija među svim procjenama.

Primjena ML metode ilustrirana je na sljedećem primjeru.

Neka su za slučajnu varijablu ξ dane mjerne vrijednosti x_1, x_2, \dots, x_N i neka je funkcija gustoće razdiobe f_ξ određena Gaussovom razdiobom (normalnom razdiobom) (Sl. 3.8.).

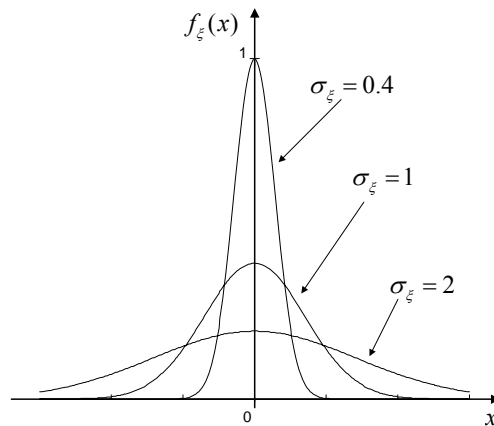
$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma_\xi^2}}, \quad (3-115)$$

gdje je:

$$m = E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx \quad - \text{vrijednost očekivanja (srednja vrijednost) slučajne varijable } \xi,$$

$$\sigma_\xi^2 = E[(\xi - m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f_\xi(x) dx \quad - \text{varijanca od } \xi.$$

Ovdje se pretpostavlja da su m i σ_ξ^2 nepoznati parametri.

Sl. 3.8. Funkcija gustoće razdiobe (za slučaj $m=0$).

U promatranom slučaju L funkcija glasi:

$$L = f_{\xi}(x_1; m, \sigma_{\xi}^2) f_{\xi}(x_2; m, \sigma_{\xi}^2) \dots f_{\xi}(x_N; m, \sigma_{\xi}^2), \quad (3-116)$$

gdje je $f_{\xi}(x_i; m, \sigma_{\xi}^2)$ - funkcija gustoće Gaussove razdiobe na mjestu $\xi = x_i$.

Iz (3-115) i (3-116) slijedi:

$$L(m, \sigma_{\xi}^2) = \prod_{i=1}^N f_{\xi}(x_i; m, \sigma_{\xi}^2) = \frac{1}{[\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}]^N} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma_{\xi}^2}},$$

odnosno:

$$L(m, \sigma_{\xi}^2) = \frac{1}{[\sqrt{2\pi\sigma_{\xi}^2}]^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_{\xi}^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2}, \quad (3-117)$$

Iz (3-117) vidljivo je da je L funkcija za mjerne vrijednosti x_1, \dots, x_N funkcija nepoznatih parametara m i σ_{ξ}^2 , čije se procijenjene vrijednosti traže.

Prema (3-114) slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial m} \ln L = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_{\xi}^2} \ln L = 0. \quad (3-118)$$

Iz (3-117) slijede ML jednadžbe:

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma_{\xi}^2 - \frac{1}{2\sigma_{\xi}^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2, \quad (3-119)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \ln L = \frac{1}{\sigma_\xi^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m) = 0, \quad (3-120)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\xi^2} \ln L = -\frac{N}{2\sigma_\xi^2} + \frac{1}{2\sigma_\xi^4} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 = 0. \quad (3-121)$$

Rješenjem (3-120) i (3-121) dobije se:

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (3-122)$$

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m})^2. \quad (3-123)$$

Iz izraza (3-122) i (3-123) vidljivo je da \hat{m} predstavlja vjerodostojnu procjenu, ali to nije slučaj sa $\hat{\sigma}_\xi^2$ jer bi moralo biti:

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{m})^2. \quad (3-124)$$

ML procjena uobičajeno ima sustavnu pogrešku procjene. Ako broj mjernih podataka $N \rightarrow \infty$, procijenjene vrijednosti konvergiraju pravim vrijednostima.

Dokaz

- Procjena srednje vrijednosti \hat{m} :

$$\hat{m} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$E(\hat{m}) = E\left\{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\{x_i\} = \frac{1}{N} NE\{x_i\} = \bar{x} = m \quad (3-125)$$

Procjena je, prema tome, vjerodostojna.

- Procjena varijance procijenjene srednje vrijednosti \hat{m} :
Za varijancu pogreške procjene vrijednosti vrijedi (uz pretpostavku da su x_i statistički neovisni):

$$E\{(\hat{m} - m)^2\} = E\left\{\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)\right]^2\right\} = \frac{1}{N^2} E\left\{\left[\sum_{i=1}^N (x_i - m)\right]^2\right\} = \frac{1}{N^2} N\sigma_\xi^2 = \frac{1}{N} \sigma_\xi^2 \quad (3-126)$$

Iz (3-126) slijedi da je za $N \rightarrow \infty$ procijenjena vrijednost \hat{m} konzistentna i u kvadratičnom smislu.

- Varijanca $\hat{\sigma}_\xi^2$
Prema (3-123) je:

$$E\{\hat{\sigma}_\xi^2\} = E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N(x_i - \hat{m})^2\right\}. \quad (3-127)$$

Sumarni izraz u (3-127) može se transformirati kako slijedi:

$$\begin{aligned}\sum(x_i - \hat{m})^2 &= \sum[(x_i - m) - (\hat{m} - m)]^2 \\ &= \sum(x_i - m)^2 + \sum(\hat{m} - m)^2 - 2(\hat{m} - m)\sum(x_i - m) \\ &= \sum(x_i - m)^2 + N(\hat{m} - m)^2 - 2(\hat{m} - m)N(\hat{m} - m) \\ &= \sum(x_i - m)^2 - N(\hat{m} - m)^2.\end{aligned}$$

Iz toga slijedi:

$$\begin{aligned}E\{\hat{\sigma}_\xi^2\} &= E\left\{\frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^N(x_i - m)^2 - N(\hat{m} - m)^2\right]\right\} \\ &= \frac{1}{N}E\left\{\sum_{i=1}^N(x_i - m)^2 - N(\hat{m} - m)^2\right\} \\ &= \frac{1}{N}\left\{E\left\{\sum_{i=1}^N(x_i - m)^2\right\} - E\{N(\hat{m} - m)^2\}\right\} \\ &= \frac{1}{N}\left\{N\sigma_\xi^2 - N\frac{1}{N}\sigma_\xi^2\right\}, \\ E\{\hat{\sigma}_\xi^2\} &= \frac{1}{N}(N\sigma_\xi^2 - \sigma_\xi^2) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\sigma_\xi^2 = \frac{N-1}{N}\sigma_\xi^2.\end{aligned} \quad (3-128)$$

Procijenjena vrijednost varijance ima za konačni N bias, koji je tim manji ukoliko je N veći. Za $N \rightarrow \infty$ bias iščezava; procijenjena vrijednost je asimptotski vjerodostojna. Procijenjena vrijednost je, dakle, konzistentna.

Da bi procijenjena vrijednost varijance bila vjerodostojna i u slučaju konačnog N , morala bi se primijeniti jednadžba procjene:

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N(x_i - \hat{m})^2. \quad (3-129)$$

U tom slučaju bi bilo $E\{\hat{\sigma}_\xi^2\} = \sigma_\xi^2$.

Na temelju općenitog opisa ML procjene provodi se procjena parametara pri identifikaciji procesa na način kako slijedi.

Pretpostavimo da je u (3-15):

$$G_r^*(z) = C(z^{-1}). \quad (3-130)$$

Prema tome, radi se o modelskoj strukturi tipa ARMAX:

$$A(z^{-1})y(z) - B(z^{-1})u(z) = C(z^{-1})\varepsilon(z) = V(z) \quad (3-131)$$

U jednadžbi (3-131) potrebno je odrediti koeficijente polinoma $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ i $C(z^{-1})$ iz ulazno/izlaznih signala $u(k)$ i $y(k)$.

Pretpostavimo da je pogreška modela $\varepsilon(k)$ bijeli šum s Gaussovom razdiobom $(0, \sigma_\varepsilon)$ ($E\{\varepsilon(k)\} = 0$).

Vektor parametara koje treba procijeniti je:

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ a_1 \dots a_n & b_1 \dots b_n & c_1 \dots c_n \\ | & | & | \end{bmatrix}^T. \quad (3-132)$$

Dodatni parametar kojega treba procijeniti je σ_ε .

Prema (3-115) Gaussova razdioba pogreške modela $\varepsilon(k)$ za trenutak k glasi:

$$f(\varepsilon(k); \underline{\Theta}, \sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} e^{-\frac{\varepsilon^2(k)}{2\sigma_\varepsilon^2}}. \quad (3-133)$$

Budući da $\varepsilon(k)$ nije koreliran, jer je bijeli šum, dobije se za N vrijednosti signala $\varepsilon(n+1)$, $\varepsilon(n+2)$, ... $\varepsilon(n+N)$ L funkcija (prema (3-117)):

$$L = L[\varepsilon(k); \underline{\Theta}, \sigma_\varepsilon^2] = \frac{1}{\left[\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right]^N} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon^2(k)}. \quad (3-134)$$

Uz kriterij kakvoće:

$$I(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon^2(k), \quad (3-135)$$

dobije se iz (3-134) (prema (3-119)):

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{N}{2} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} I(\underline{\Theta}). \quad (3-136)$$

Iz (3-114) i (3-136) slijede jednadžbe:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} \ln L = 0 = \frac{\partial I(\underline{\Theta})}{\partial a_i} \\ \frac{\partial}{\partial b_i} \ln L = 0 = \frac{\partial I(\underline{\Theta})}{\partial b_i} \\ \frac{\partial}{\partial c_i} \ln L = 0 = \frac{\partial I(\underline{\Theta})}{\partial c_i} \end{aligned} \right\} \text{ za } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3-137)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_\varepsilon^2} \ln L = -\frac{N}{2\sigma_\varepsilon^2} + \frac{1}{\sigma_\varepsilon^4} I(\underline{\Theta}) = 0. \quad (3-138)$$

Iz (3-138) dobije se procijenjena vrijednost varijance pogreške modela:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{2}{N} I(\hat{\underline{\Theta}}). \quad (3-139)$$

Za određivanje traženih parametara a_i , b_i , c_i na raspolaganju su jednadžbe (3-137).

Pri tome je potrebno tvoriti derivacije funkcionala pogreške, prema (3-135).

Za izračunavanje parcijalnih derivacija prema (3-137) izrazimo jednadžbu (3-131), na sljedeći način (prema (3-22) i (3-23)):

$$\varepsilon(k) = y(k) + \sum_{i=1}^n a_i y(k-i) - \sum_{i=1}^n b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^n c_i \varepsilon(k-i); \quad \text{za } k \geq n. \quad (3-140)$$

Iz (3-140) je vidljivo da je $\varepsilon(k)$ linearno ovisna o a_i i b_i , a nelinearno o c_i .

Zbog ove nelinearne ovisnosti $\varepsilon(k)$ o parametru c_i ne može se minimum funkcionala kakvoće prema (3-135) riješiti direktno analitički nego samo primjenom numeričkih postupaka optimiranja.

Ovisno o numeričkom postupku optimiranja koristi se gradijent \underline{I}_Θ :

$$\underline{I}_\Theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial I}{\partial \Theta_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial I}{\partial \Theta_n} \end{bmatrix}, \quad (3-141)$$

ili zajedno s (3-141) i Hesseova matrica $\underline{I}_{\Theta\Theta}$:

$$\underline{I}_{\Theta\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I}{\partial \Theta_1 \partial \Theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 I}{\partial \Theta_1 \partial \Theta_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 I}{\partial \Theta_n \partial \Theta_1} & \dots & \frac{\partial^2 I}{\partial \Theta_n \partial \Theta_n} \end{bmatrix}. \quad (3-142)$$

Prema tome, moraju se izračunati sljedeće parcijalne derivacije funkcionala pogreške:

$$\frac{\partial I}{\partial \Theta_i} = \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon(k) \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial \Theta_i}, \quad (3-143)$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} = \sum_{k=n+1}^{n+N} \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial \Theta_i} \frac{\partial \varepsilon(k)}{\partial \Theta_j} + \sum_{k=n+1}^{n+N} \varepsilon(k) \frac{\partial^2 \varepsilon(k)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j}, \quad (3-144)$$

gdje je $\varepsilon(k)$ određeno prema jednadžbi (3-140).

Ako se za optimiranje koristi **gradijentni postupak**, tada se iterativnim računanjem dobiju procijenjene vrijednosti parametara prema relaciji:

$$\hat{\underline{\Theta}}(i+1) = \hat{\underline{\Theta}}(i) + \delta \underline{\Theta}(i), \quad (3-145)$$

gdje $\delta \underline{\Theta}(i)$ predstavlja promjenu $\hat{\underline{\Theta}}$ u iteraciji i .

Član $\delta \underline{\Theta}(i)$ iščezava pri postizanju minimuma funkcionala $I(\underline{\Theta})$ (prema relaciji (3-135)).

Gradijentni se postupci razlikuju s obzirom na način izračunavanja prirasta $\delta \underline{\Theta}(i)$.

U **Newton-Raphsonovom algoritmu** koristi se:

$$\hat{\underline{\Theta}}(i+1) = \hat{\underline{\Theta}}(i) - \beta \left\{ \underline{I}_{\Theta\Theta} \left[\hat{\underline{\Theta}}(i) \right] \right\}^{-1} \underline{I}_{\Theta} \left[\hat{\underline{\Theta}}(i) \right], \quad (3-146)$$

gdje je β skalarni težinski faktor.

Pri tome se \underline{I}_{Θ} i $\underline{I}_{\Theta\Theta}$ se računaju prema (3-141) i (3-142).

Iterativni proračun $\hat{\underline{\Theta}}$ (3-146) obavlja se prema sljedećim koracima:

1. Izbor najpovoljnijih vrijednosti $\hat{\underline{\Theta}}(0)$, (za $i = 0$) i β ;
 2. Izračunavanje \underline{I}_{Θ} i $\underline{I}_{\Theta\Theta}$ za $i = 0$ sa svim vrijednostima signala za $k = n+1, \dots, n+N$ (jednadžbe (3-141) i (3-142));
 3. Izračunavanje nove procijenjene vrijednosti $\hat{\underline{\Theta}}(i+1)$ (jednadžba (3-146));
 4. Za $i = 1, 2, \dots$ ponavljanje od koraka 2.;
- Približno optimalne vrijednosti procjene postignute su nakon dostizanja prikladnog unaprijed zadanog kriterija prekida.

Razvidno je iz prethodno provedene analize da ML metoda zahtjeva mnogo računanja. Međutim, pokazuje se da se izračunavanjem inverzije matrice $I_{\Theta\Theta}$ istovremeno određuje i standardno odstupanje σ_{Θ_i} procijenjenog parametra $\hat{\Theta}_i$.

Naime, vrijedi sljedeća relacija:

$$\sigma_{\Theta_i}^2 = \sigma_\varepsilon^2 [I_{\Theta\Theta}]_{ii}^{-1} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3-147)$$

gdje se σ_ε^2 određuje prema jednadžbi (3-139).

Iako se ML metoda koristila kao “off-line” metoda identifikacije, u zadnje vrijeme se koristi i u on-line identifikaciji procesa, zahvaljujući velikim mogućnostima današnjih računala.

3.1.3. Procjena parametara uz korištenje težinskih faktora

Ovaj postupak se zasniva na modifikaciji dosad razmatranih algoritama procjene parametara. Pri tome se pridaje veća težina (važnost) novoprispjelim mjernim podacima. Rekursivni algoritmi na taj način sadrže “opadajuće pamćenje”, odnosno “strategiju zaboravljanja”. Ova se strategija može realizirati npr. eksponencijalnim otežavanjem mjernih podataka, tj. starijim mjernim podacima pridružuje se manja težina po eksponencijalnom zakonu.

Važnost procjene parametara uz korištenje težinskih faktora posebno dolazi do izražaja kod onih vremenski promjenjivih procesa kod kojih se parametri sporo mijenjaju u odnosu na vlastitu dinamiku procesa.

Pri izvođenju algoritma otežane rekursivne procjene parametara polazi se od (3-35):

$$\underline{\varepsilon}(N) = \underline{Y}(N) - \underline{\Phi}(N)\underline{\Theta}.$$

Svaka od jednadžbi iz vektorskog zapisa (3-35) množi se težinskim faktorom (engl. forgetting factor) $\rho(k) < 1$ ($k = n+1, \dots, n+N$) na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (\rho(n+N) \dots \rho(n+1)) \varepsilon(n+1) &= (\rho(n+N) \dots \rho(n+1)) [\underline{y}(n+1) - \underline{\varphi}^T(n+1)\underline{\Theta}], \\ (\rho(n+N) \dots \rho(n+2)) \varepsilon(n+2) &= (\rho(n+N) \dots \rho(n+2)) [\underline{y}(n+2) - \underline{\varphi}^T(n+2)\underline{\Theta}], \\ &\vdots \\ \rho(n+N) \varepsilon(n+N) &= \rho(n+N) [\underline{y}(n+N) - \underline{\varphi}^T(n+N)\underline{\Theta}]. \end{aligned} \quad (3-148)$$

Razvidno je iz (3-148) da se novijim podacima daje veća težina, tj. onim podacima koji nastupaju bliže trenutku $k = n+N$.

Uvođenjem težinske matrice:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} \prod_{j=n+1}^{n+N} \rho(j) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \prod_{j=n+2}^{n+N} \rho(j) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \rho(n+N) \end{bmatrix} \quad (3-149)$$

sustav jednadžbi (3-148) poprima oblik:

$$\underline{Z}\underline{\varepsilon} = \underline{Z}[y - \underline{\Phi}\underline{\Theta}]. \quad (3-150)$$

Ako se otežana procjena parametara primijeni na IV metodu, u kojoj se koristio kriterij kakvoće prema (3-93):

$$I_2(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{\varepsilon} = \min,$$

dobije se sljedeći kriterij kakvoće, modificiran težinskom matricom \underline{Z} :

$$I_3(\underline{\Theta}) = \frac{1}{2} \underline{\varepsilon}^T \underline{Z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{Z} \underline{\varepsilon} = \min. \quad (3-151)$$

Iz (3-150) i (3-151) slijedi:

$$\left. \frac{\partial I_3(\underline{\Theta})}{\partial \underline{\Theta}} \right|_{\underline{\Theta}=\hat{\underline{\Theta}}} = -\underline{\Phi}^T \underline{Z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{Z} \underline{Y} + \underline{\Phi}^T \underline{Z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{Z} \underline{\Phi} \hat{\underline{\Theta}} = \underline{0}. \quad (3-152)$$

Iz (3-152) dobije se direktno rješenje procijenjenog vektora parametara:

$$\hat{\underline{\Theta}} = [\underline{\Phi}^T \underline{Z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{Z} \underline{\Phi}]^{-1} \underline{\Phi}^T \underline{Z}^T \underline{W} \underline{W}^T \underline{Z} \underline{Y} \equiv [\underline{W}^T \underline{Z} \underline{\Phi}]^{-1} \underline{W}^T \underline{Z} \underline{Y} \quad (3-153)$$

Jednadžba (3-153) dobivena je uzimajući u obzir matično pravilo $(\underline{AB})^{-1} = B^{-1} A^{-1}$,

kao i uvjet (3-92) pozitivne definitnosti izraza $\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\underline{W}^T(N) \underline{\Phi}(N)\}$.

Za $\underline{Z} = \underline{I}$ nema otežanja mjernih podataka, tj. jednadžba (3-153) prelazi u (3-95).

Analogno relacijama (3-98) dobiju se relacije za rekursivni algoritam otežane IV metode (otežana RIV metoda):

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{\Theta}}(k+1) &= \hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{q}(k+1)\hat{\underline{\varepsilon}}(k+1), \\
\underline{q}(k+1) &= \underline{P}(k)\underline{w}(k+1) \left[1 + \underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k)\underline{w}(k+1) \right]^{-1}, \\
\underline{P}(k+1) &= \frac{1}{\rho(k+1)} \left[\underline{P}(k) - \underline{q}(k+1)\underline{\varphi}^T(k+1)\underline{P}(k) \right], \\
\hat{\underline{\varepsilon}}(k+1) &= y(k+1) - \underline{\varphi}^T(k+1)\hat{\underline{\Theta}}(k).
\end{aligned} \tag{3-154}$$

Ovakvim se uvođenjem težinskih faktora sprječava preveliko smanjenje elemenata matrice \underline{P} , što doprinosi stabilnosti numeričkog postupka procjene parametara. Isto tako, na vrijednosti procjene u većoj se mjeri utječe pomoću novoprispjelih mjernih podataka što je vrlo prikladno za sustave sa sporopromjenljivim parametrima.

Nedostatak je metode procjene parametara uz korištenje težinskih faktora da na vrijednosti procijenjenih parametara izraženije utječu smetnje. Stoga, optimalni izbor težinskih faktora predstavlja kompromis između dobrog praćenja parametara i potiskivanja utjecaja smetnji na procjenu parametara.

U praksi se često koristi jednostavno konstantno “otežanje”. Zadovoljavajuća procjena za većinu slučajeva dobije se uz “otežanje”⁸:

$$0,95 \leq \rho \leq 0,99. \tag{3-155}$$

Kao mjeru brzine zaboravljanja starih podataka prikladno je uvesti pojam “asimptotska duljina uzorka” (engl. asymptotic sample length, ASL):

$$ASL = \frac{1}{1 - \rho}. \tag{3-156}$$

Primjer:

Neka je vrijeme uzorkovanja $T = 100$ ms i očekivano vrijeme u kojem se parametri procesa značajnije mijenjaju $T_p = 1$ min.

Iz asimptotske duljine uzorka promatrane kao normirano vrijeme u kojem se parametri značajnije mijenjaju dobije se:

$$ASL = \frac{T_p}{T} = \frac{60 \cdot 1000 \text{ ms}}{100 \text{ ms}} = 600.$$

Iz (3-156) u tom slučaju slijedi:

$$\rho = 1 - \frac{1}{ASL} = 1 - \frac{1}{600} = 0,998.$$

⁸ U kategoriju konstantnog otežanja ubraja se i postupak temeljen na algoritmu u kojem se postiže da trag matrice \underline{P} , tj. $tr \underline{P}$, ima konstantnu vrijednost, iz čega prizlazi vrijednost za ρ .

Ako se koristi vremenski promjenljivi faktor zaboravljanja, njegovo se određivanje može zasnivati na raznim preporukama, ovisno o primjenama.

Često se u praksi koristi eksponencijalno zaboravljanje i zaboravljanje temeljeno na filtru prvog reda.

Eksponencijalno zaboravljanje

U ovom se slučaju elementi težinske matrice (3-149) određuju prema izrazu:

$$z(k) = a\rho^{N-k} \quad ; \quad \rho < 1. \quad (3-157)$$

Prema (3-157) više se otežavaju novoprispjeli podaci, tj. podaci bliže $k=n+N$.

Zaboravljanje zasnovano na filtru prvog reda

Faktor zaboravljanja u k -tom trenutku određuje se prema izrazu:

$$\rho(k) = \rho(k-1)a_\lambda + (1-a_\lambda)\rho_f, \quad (3-158)$$

gdje je:

a_λ – parametar koji određuje dinamiku promjene faktora zaboravljanja,

ρ_f – konačna vrijednost faktora zaboravljanja.

Iz (3-158) slijedi prijenosna funkcija filtra prvog reda:

$$\frac{\rho(z)}{\rho_f(z)} = \frac{(1-a_\lambda)}{1-z^{-1}a_\lambda}. \quad (3-159)$$

Za slučaj da je $a_\lambda = 0,97$ i $\rho_f = 0,98$ faktor zaboravljanja ρ svoju konačnu vrijednost ρ_f poprими za oko 100 koraka.

Filtarski postupak zaboravljanja koristi se u slučajevima kada parametre određene u početku eksperimenta identifikacije želimo uzeti s malom težinom ρ (npr. pri dovođenju sustava u radnu točku). U početku je, dakle, proces identifikacije brz, a kasnije slijede spore promjene parametara procesa s faktorom zaboravljanja ρ_f .

3.2. Postupci vrednovanja identificiranog matematičkog modela procesa

Za identifikaciju determinističkog dijela modela definira se model u obliku diskretne prijenosne funkcije:

$$G_M(z) = \frac{Y_M(z)}{U(z)} = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} \cdot z^{-d}, \quad (3-160)$$

gdje je:

n – red modela,

d – mrtvo vrijeme.

Za određivanje mrtvog vremena d najprikladnije je koristiti neparametarske modele (npr. prijelaznu funkciju ili težinsku funkciju). U daljnjim razmatranjima pretpostavlja se da je $d = 0$.

Red modela n određuju fizikalna svojstva identificiranog procesa. Stoga je često moguće odrediti red modela pomoću teoretske identifikacije. Ako to nije moguće, tada se n procjenjuje pomoću postupaka provjere (ispitivanja) strukture (engl. validation). Cilj je ovih postupaka određivanje minimalnog reda modela uz koji se postiže zadovoljavajući matematički opis svih bitnih svojstava procesa. S minimalnim redom modela povezana je i redukcija modela (strukturno pojednostavljenje) kod sustava višeg reda.

Postupci ispitivanja strukture modela mogu se razvrstati u tri skupine:

- postupci na temelju a-priori određivanja reda matematičkog modela;
- postupci na temelju procjene izlaznog signala;
- postupci na temelju analize procijenjene prijenosne funkcije.

3.2.1. Postupci na temelju a-priori određivanja reda matematičkog modela

Na temelju mjernih podataka ulaznog i izlaznog signala procesa kojeg treba identificirati tvori se specijalna matrica podataka za različite redove modela. U ovisnosti o redu matematičkog modela n ispituje se singularitet ove matrice.

Test odnosa determinanata (engl. determinant ratio, DR)

Kod ovog postupka ideja je da se utvrdi statistička ovisnost ulazno/izlaznih signala na temelju matrice podataka. Pri tome se pretpostavlja da je signal šuma $r_s = 0$.

Iz vrijednosti uzoraka ulaznog i izlaznog signala formira se sljedeća matrica:

$$\underline{H}(\hat{n}) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=\hat{n}+1}^{\hat{n}+N} \underline{h}(k, \hat{n}) \underline{h}^T(k, \hat{n}) \right], \quad \dim(2\hat{n} \times 2\hat{n}), \quad (3-161)$$

gdje je:

$$\underline{h}(k, \hat{n}) = [u(k-1)y(k-1) \dots u(k-\hat{n})y(k-\hat{n})]^T, \quad \dim(2\hat{n} \times 1), \quad (3-162)$$

\hat{n} - procijenjeni red modela.

Lako se pokazuje da su elementi matrice (3-161) autokorelacijske i međukorelacijske funkcije ulazno/izlaznih signala:

$$\left. \begin{array}{l} R_{uu}(i) \\ R_{yy}(i) \\ R_{uy}(i) \end{array} \right\} \text{ za } i = 0, 1, \dots, (\hat{n}-1).$$

U ovom se postupku određuje matrica \underline{H} za različite pretpostavljene redove modela:

$$\hat{n} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}.$$

Ako je $\hat{n} > n$, tada će $(\hat{n} - n)$ stupaca matrice $\underline{H}(\hat{n})$ biti linearna kombinacija preostalih stupaca, tj. matrica $\underline{H}(\hat{n})$ bit će približno singularna.

Time determinanta matrice $\underline{H}(\hat{n})$ poprima svojstva:

$$\det \underline{H}(\hat{n}) = \begin{cases} \gamma > 0 & \text{za } \hat{n} \leq n, \\ \delta \ll \gamma & \text{za } \hat{n} > n, \end{cases} \quad (3-163)$$

gdje γ i δ mogu poprimiti proizvoljne vrijednosti u ovisnosti o \hat{n} .

Za prethodno određene matrice $\underline{H}(\hat{n})$ računaju se sljedeći omjeri:

$$DR(\hat{n}) = \frac{\det \underline{H}(\hat{n})}{\det \underline{H}(\hat{n}+1)}, \quad \hat{n} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}. \quad (3-164)$$

Procijenjeni red modela \hat{n} najtočnije odgovara stvarnom redu modela n ako $DR(\hat{n})$ pokazuje znatno povećanje u odnosu na $DR(\hat{n}-1)$.

Ovim postupkom dobije se gruba procjena reda (pretprocjena).

Za slučaj $r_s \neq 0$ koristi se “prošireni” DR-test (EDR-test).

Kod tvorbe matrice podataka \underline{H} potrebno je uzeti u obzir i r_s . Iz N vrijednosti signala modeliranog vektora smetnje $\underline{r}_s(N)$ tvori se matrica kovarijance:

$$E\{\underline{r}_s(N)\underline{r}_s^T(N)\} = \underline{R}(\hat{n}), \quad (3-165)$$

gdje je:

$$\underline{r}_s(N) = [r_s(n+1) \ r_s(n+2) \ \dots \ r_s(n+N)]^T.$$

U specijalnom slučaju, ako je $r_s(k) = \varepsilon(k)$ bijeli šum, onda dijagonala matrice $\underline{R}(\hat{n})$ sadrži σ_ε^2 , dok su ostali elementi matrice nula.

Za EDR-test definira se sljedeća matrica podataka ($r_s(k) \neq 0$):

$$\underline{H}^*(\hat{n}) = \underline{H}(\hat{n}) - \underline{R}(\hat{n}), \quad (3-166)$$

te odnos determinanata:

$$EDR(\hat{n}) = \frac{\det \underline{H}^*(\hat{n})}{\det \underline{H}^*(\hat{n}+1)}. \quad (3-167)$$

“Instrumentalni” test odnosa determinanata (IDR-test)

Ovaj postupak također uzima u obzir smetnju r_s u matrici podataka \underline{H} . Matrica \underline{H} se računa slično kao i za DR test, s tim da se umjesto vektora \underline{h} uzima vektor pomoćnih varijabli \underline{w} , a umjesto vektora \underline{h}^T regresijski vektor $\underline{\varphi}^T$:

$$\underline{H}^{**}(\hat{n}) = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=\hat{n}+1}^{\hat{n}+N} \underline{w}(k, \hat{n}) \underline{\varphi}^T(k, \hat{n}) \right], \quad (3-168)$$

a odnos determinanata računa se analogno s prethodnim testovima:

$$IDR(\hat{n}) = \frac{\det \underline{H}^{**}(\hat{n})}{\det \underline{H}^{**}(\hat{n}+1)} \quad (3-169)$$

Budući da tvorba matrice podataka sa “zašumljenim” izlaznim signalima može dovesti do pogrešaka, koristi se pomoćni model pri tvorbi matrice podataka, koji sadrži informacije o procijenjenom “nezašumljenom” izlaznom signalu.

3.2.2. Postupci procjene reda modela na temelju procjene izlaznog signala

Test pogreške signala

Ovaj se postupak temelji na usporedbi odziva pretpostavljenog modela procesa i stvarnog procesa, uz korištenje karakterističnih pobudnih signala. U tom se smislu pretpostave mogući modeli s različitim procijenjenim redom \hat{n} , te se procijene njihovi parametri. Kao sljedeći korak u ovom postupku radi se usporedba vremenskih odziva procijenjenih modela $\hat{y}(k, \hat{n})$ s mjernim odzivima $y(k)$ stvarnog sustava, te se tako dobije pogreška modela:

$$\varepsilon_y(k, \hat{n}) = y(k) - \hat{y}(k, \hat{n}). \quad (3-170)$$

Od svih pretpostavljenih modela odabire se onaj koji ima najmanju pogrešku $\varepsilon_y(k, \hat{n})_{\min}$.

Ako izlazni signal $y(k)$ ne sadrži preveliku komponentu signala šuma, onda se može odrediti najvjerojatniji red modela \hat{n} iz $\varepsilon_y(k, \hat{n})_{\min}$.

Radi se, dakle, o subjektivnoj (“optičkoj”) procjeni.

Test funkcije pogreške

Ovdje se uvodi funkcija pogreške (engl. cost function), koja predstavlja kvantitativnu mjeru pogreške modela:

$$I_v(\hat{n}) = \frac{1}{N} \sum_{k=\hat{n}+1}^{\hat{n}+N} \varepsilon_y^2(k, \hat{n}). \quad (3-171)$$

Minimalna vrijednost $I_v(\hat{n})$ dobije se za \hat{n} koji je najbliži redu n stvarnog modela.

3.2.3. Postupci procjene reda modela na temelju analize procijenjene prijenosne funkcije

Polinomski test

Osnovna zamisao ovog postupka je da se provjeri imaju li polinomi $A(z^{-1})$ i $B(z^{-1})$, odnosno $C(z^{-1})$ i $D(z^{-1})$ zajedničke korjene, tj. mogu li se reducirati prijenosne funkcije:

$$G_M(z) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}, \quad G_r^*(z) = \frac{C(z^{-1})}{D(z^{-1})}.$$

Postupak se sastoji od sljedećih koraka:

- Identifikacija modela s redom $\hat{n} = 1, 2, \dots, \hat{n}_{\max}$;
- Određivanje polova i nula za procijenjenu prijenosnu funkciju i njihovo nanošenje u jediničnu kružnicu z -ravnine. Za preveliko odabrani red modela $\hat{n} > n$ dodatni polovi $z_{p,i}$ za $i > n$ kompenziraju se približno pomoću nula modela;
- Najvjerojatniji red modela $\hat{n} = n$ dobije se kada se postupnim smanjenjem procijenjenog reda modela prvi put više ne pojavljuje kompenzacija polova i nula.

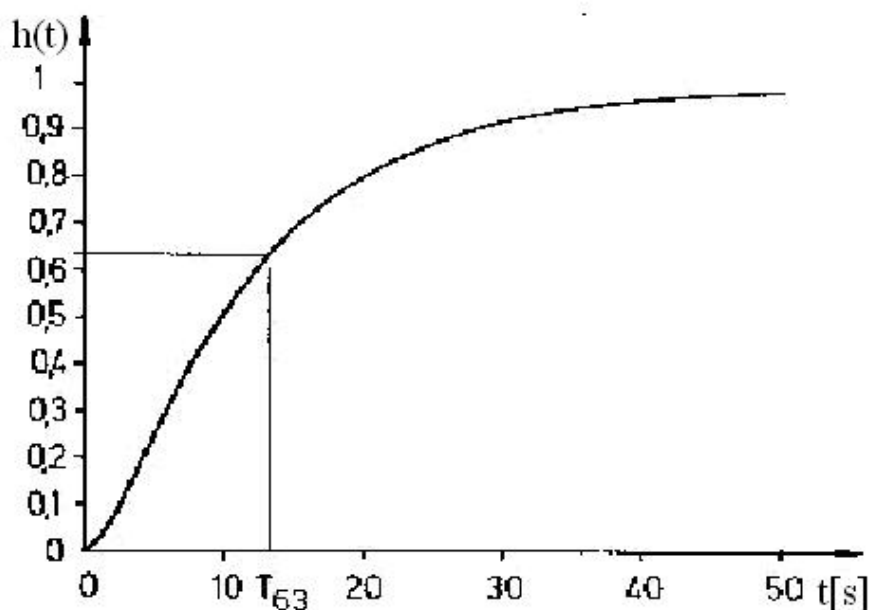
3.2.4. Usporedba postupaka

Učinkovitost validacijskih postupaka ilustrirana je sljedećim primjerom.

Promatra se proces opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{1}{(1+2s)(1+11s)}.$$

Prijelazna funkcija koja odgovara ovoj prijenosnoj funkciji prikazana je na slici 3.9.

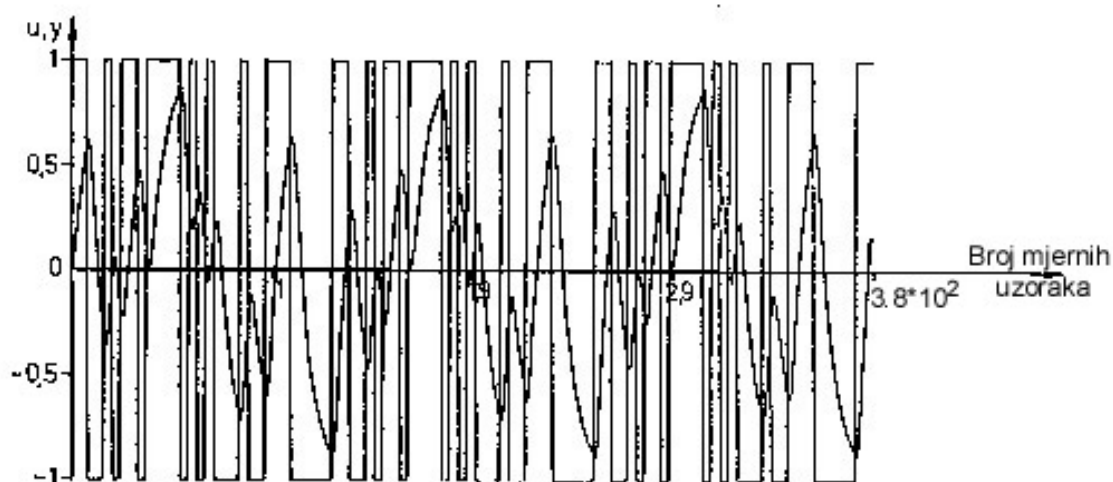


Sl. 3.9. Prijelazna funkcija procesa kojeg se identificira.

Njen diskretni ekvivalent uz pretpostavku ekstrapolatora nultog reda na ulazu $G(s)$ i vremena uzorkovanja $T = 1,6$ s dan je sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(z) = \frac{0,04308z^{-1} + 0,0315z^{-2}}{1 - 1,314z^{-1} + 0,3886z^{-2}}.$$

Sustav opisan prethodnom prijenosnom funkcijom $G(z)$ digitalno je simuliran, pri čemu je za ulazni signal $u(k)$ odabran PRBS amplitude $c = \pm 1$. Izlaznom signalu nije superponiran nikakav signal smetnje. Ulazni i izlazni signal prikazani su na slici 3.10. (predstavljani s 380 mjernih vrijednosti).



Sl.3.10. Ulazno/izlazni signali identificiranog procesa.

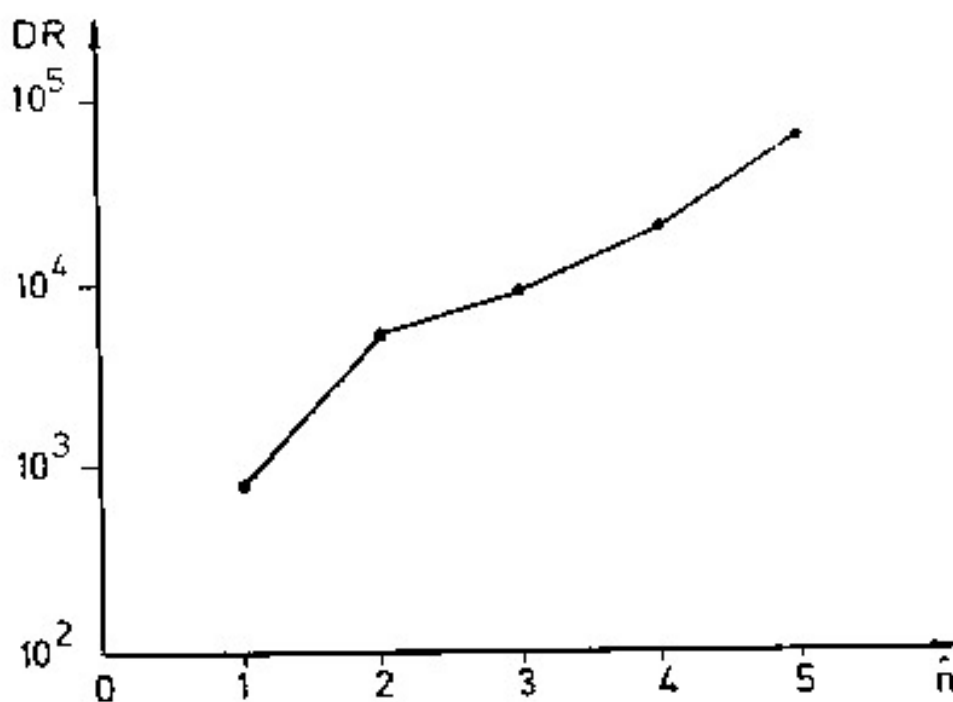
Na temelju provedene simulacije, kod koje se pretpostavlja da je vladanje sustava nepoznato, treba provesti procjenu parametara te postupak ispitivanja strukture. Rezultati identifikacije mogu se na ovaj način direktno usporediti sa stvarnim vrijednostima.

Test odnosa determinanti

Određen je $DR(\hat{n})$ za $\hat{n} = 1, 2, 3, 4$ (Tablica 3.1. i Sl. 3.11.) uz pretpostavku da nema djelovanja signala smetnje ($r_s = 0$).

| \hat{n} | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------------|-----|------|------|-------|-------|
| $DR(\hat{n})$ | 522 | 5431 | 8920 | 19913 | 61584 |

Tablica 3.1.



Sl. 3.11. Grafički prikaz odnosa determinanata.

Prvi značajniji porast $DR(\hat{n})$ je između $DR(\hat{n} = 1)$ i $DR(\hat{n} = 2)$.

Determinanta $\det \underline{H}(\hat{n} = 3) \ll \det \underline{H}(\hat{n} = 2)$.

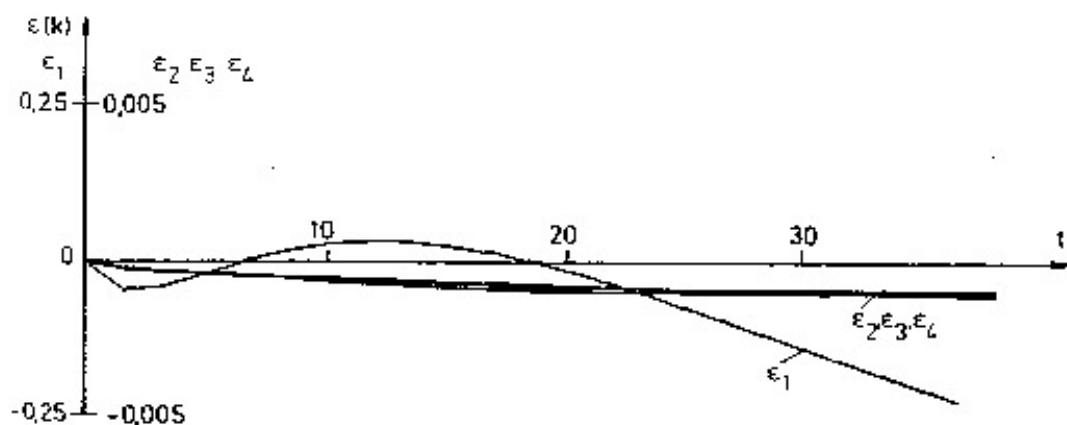
Ovo je gruba procjena, tj. najvjerojatniji red modela je $\hat{n} = 2$

Test pogreške signala

Određuju se pogreške modela na skokovitu pobudu:

$$\varepsilon_{\hat{n}}(k, \hat{n}) = h(k) - \hat{h}(k, \hat{n}).$$

Uz pretpostavljeni red modela $\hat{n} = 1, 2, 3, 4$, dobiju se vremenske funkcije prikazane na slici 3.12.:



Sl. 3.12. Pogreška signala.

Iz slike je vidljivo da je $\varepsilon_1(k) \gg \varepsilon_2(k) \approx \varepsilon_3(k) \approx \varepsilon_4(k)$, pa se zaključuje da je najvjerojatniji red modela $\hat{n} = 2$.

Polinomski test

Za procijenjene prijenosne funkcije modela s redovima $\hat{n} = 1, 2, 3, 4$ odrede se parametri i izračunaju diskretni polovi i nule (Sl. 3.13.).

Počnimo s $\hat{n} = 4$ i dobiju se:

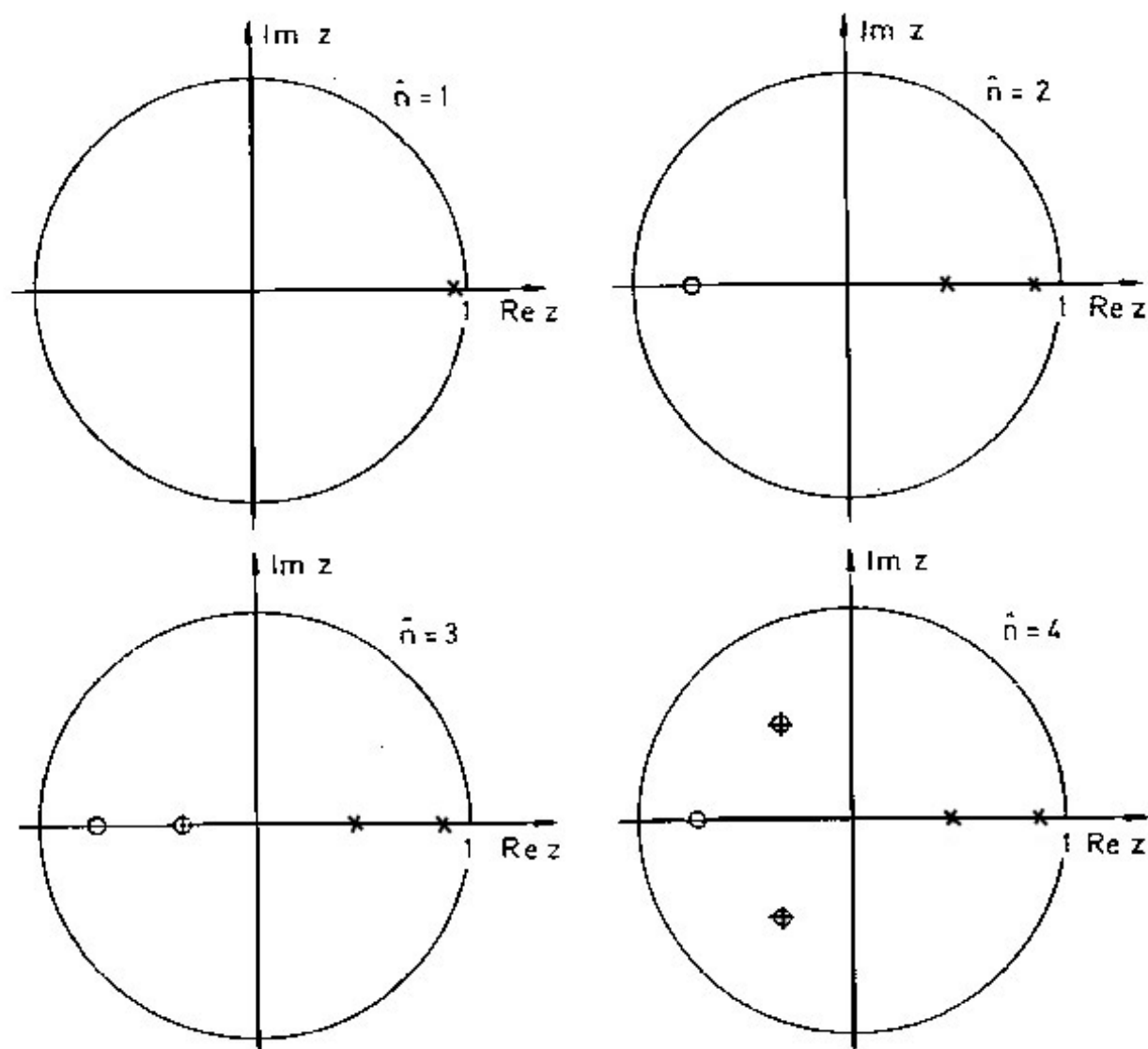
$$\left. \begin{array}{l} \text{-polovi} \quad z_{p3,4} = -0,3326 \pm j0,4455 \\ \text{-nule} \quad z_{N3,4} = -0,3323 \pm j0,4466 \end{array} \right\} \text{kompenziraju se.}$$

Kao rezultat slijedi da je najvjerojatniji red $\hat{n} = 2$.

Ako se počne s $\hat{n} = 3$ (provjera prethodnog rezultata) dobije se:

$$\left. \begin{array}{l} \text{-pol} \quad z_{p3} = -0,3486 \\ \text{-nula} \quad z_{N3} = -0,3421 \end{array} \right\} \text{kompenziraju se.}$$

Prema tome, minimalni red modela je $\hat{n} = 2$.



Sl. 3.13. Polinomski test za redove modela $\hat{n} = 1, 2, 3, 4$.

3.3. Neki praktični aspekti pri identifikaciji procesa

Identifikacija procesa pomoću postupaka procjene parametara zasniva se na obradbi mjernih ulazno/izlaznih signala promatranog procesa. Valjanost identifikacije na taj način jako ovisi o informacijama koje sadrže mjerni signali. Stoga su izbor i obradba ulazno/izlaznih mjernih signala iznimno važni.

Izbor ovih mjernih signala treba podlijegati sljedećim kriterijima:

- Proces kojeg se identificira mora biti u radnom (pogonskom) stanju tijekom mjerenja;
- Sva bitna svojstva (modovi, vlastite frekvencije) procesa za ova radna stanja moraju biti pobuđena tijekom mjerenja;
- Mjerenja se moraju tako provesti da se besprijekorno obuhvate (identificiraju) ta bitna svojstva procesa;
- Početak i kraj serije mjerenja treba se tako odabrati, da se na temelju matematičkog postupka procjene parametara mogu brzo i točno odrediti parametri matematičkog modela procesa.

Kod industrijskih postrojenja moraju se uvijek uzimati u obzir i ograničavajući uvjeti pod kojima se obavlja identifikacija, a to onda ima za posljedicu da se dolazi do matematičkog modela koji je valjan samo za određena radna područja (određene režime rada).

Provedba identifikacije procesa može se načelno prikazati kroz 5 sljedećih koraka.

I. korak

Prvi korak obuhvaća teoretsku analizu istraživanog procesa odnosno pridobivanje a-priori znanja o procesu. Ovaj korak u postupku identifikacije još se naziva i predidentifikacija. Ovdje je značajna uloga korisnika procesa (postrojenja) kojega se želi identificirati, budući da korisnik može dati detaljan opis procesa, kao i njegovih radnih stanja (dozvoljenih i nedozvoljenih).

Osim toga, u ovom je koraku važno znati i svrhu matematičkog modela (npr. koristi li se model za simulaciju procesa ili za projektiranje sustava upravljanja).

U ovom koraku mora se razjasniti:

- Koje se fizikalne međuovisnosti trebaju opisati pomoću matematičkog modela?
- Pomoću kojeg oblika matematičkog opisa predstaviti fizikalna svojstva procesa?
- Je li struktura modela već poznata pa se trebaju samo odrediti parametri procesa?
- Može li se specificirati (u grubo) dinamičko vladanje procesa (npr. pomoću prijelaznih funkcija)?
- Kakve smetnje djeluju na proces i mogu li se one statistički opisati?

Ova teoretska razmatranja trebalo bi tako provoditi da se mogu koristiti i za vrednovanje matematičkog modela.

II. korak

Drugi korak predstavlja određivanje prikladnog vremena uzorkovanja i ulaznog ispitnog signala.

Procesni signali se uzorkuju u ekvidistantnim vremenskim trenucima te se dobiju diskretni slijedovi brojeva.

Pri A/D pretvorbi ne smije doći do gubitka informacija koje su sadržane u procesnom signalu, tj. nužno mora biti zadovoljen Shannonov teorem. Kako bi se ovo osiguralo, potrebno je odabrati čim manje vrijeme uzorkovanja. S druge strane, za mala vremena uzorkovanja uzastopne vrijednosti uzoraka razlikuju se neznatno i to predstavlja veliki nedostatak za postupak procjene parametara, što se može zaključiti iz sljedećeg razmatranja.

Matrica $\underline{\Phi}^*(N)$ u jednadžbi za direktnu procjenu parametara (3-41):

$$\hat{\underline{\Theta}}(N) = \underline{\Phi}^{*-1}(N) \underline{y}^*(N)$$

za premala vremena uzorkovanja može postati singularna, a time i neinvertibilna jer se može dogoditi da se uz takva vremena uzorkovanja ne osigura perzistentnost pobudnog signala procesa.

Slično vrijedi i za rekurzivni algoritam (prema jednadžbama (3-73) i (3-74)):

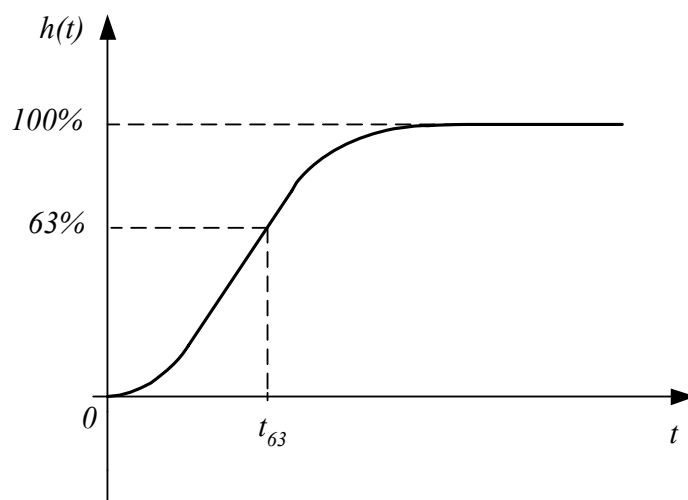
$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}(k+1) &= y(k+1) - \underbrace{\varphi^T(k+1) \hat{\underline{\Theta}}(k)}_{\hat{y}(k+1)|_k}, \\ \hat{\underline{\Theta}}(k+1) &= \hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{q}(k+1) \hat{\varepsilon}(k+1). \end{aligned}$$

Procijenjena vrijednost pogreške modela $\hat{\varepsilon}$ postaje jako mala za mala vremena uzorkovanja, a time, prema jednadžbi (3-74) nije moguće daljnje poboljšanje procijene parametara $\hat{\underline{\Theta}}$.

U praksi se postupa na sljedeći način:

- Približno se, prije procesa identifikacije, odredi prijelazno vladanje procesa (npr. pomoću determinističkog ispitnog signala ili teoretskim razmatranjem).

Primjerice, iz prijelazne funkcije procesa (Sl. 3.14.) odredi se vrijeme t_{63} koje odgovara vremenu pri kojem prijelazna funkcija procesa postigne 63% stacionarne vrijednosti prijelazne funkcije.



Sl. 3.14.

Iz informacije o vremenu t_{63} određuje se vrijeme uzorkovanja T prema sljedećoj iskustvenoj relaciji:

$$T = \left(\frac{1}{6} \text{ do } \frac{1}{10} \right) t_{63}. \quad (3-172)$$

Ova se preporuka za izbor vremena uzorkovanja u postupcima identifikacije razlikuje od postupaka za izbor vremena uzorkovanja pri sintezi digitalnih sustava upravljanja.

Izbor ispitnog signala

Pri izboru ispitnog signala razlikuju se dva slučaja:

- 1) Ulazno/izlazni signali procesa mjere se za vrijeme normalnog rada procesa (u zatvorenoj petlji), uz korištenje “prirodnih” ispitnih signala; ne koristi se dodatni, “umjetni”, ispitni signali.
- 2) Koriste se dodatni, umjetni, ispitni signali za postizanje željenog (ciljanog) djelovanja na dinamiku procesa.

Prvi se slučaj koristi uglavnom pri identifikaciji procesa tehničkih proizvodnih postrojenja kako se ne bi utjecalo na kakvoću i količinu proizvoda. Ovdje se javlja i ograničenje, ako “prirodni” ispitni signal korelira sa smetnjama koje djeluju na proces. U tom je slučaju potrebno obaviti više serija mjerenja.

Zbog toga je mnogo povoljnije koristiti umjetne ispitne signale, ako je to moguće. Za to su posebno prikladni PRBS signali, jer posjeduju povoljna statistička svojstva. Izborom duljine posmačnog registra m i perioda Δt moguće je pobuditi sve karakteristične frekvencije sustava.

III. korak

Treći korak u postupku identifikacije obuhvaća određivanje strukture modela i početnih vrijednosti rekursivnog algoritma (ako se takav koristi).

Ako se radi o off-line identifikaciji, uz primjenu direktnog postupka rješenja, tada se red modela može odrediti korištenjem postupaka odnosa determinanata.

Puno je veći računski izdatak ako se koriste postupci određivanja strukture modela zasnovani na izlaznim signalima ili prijenosnoj funkciji.

Pri on-line identifikaciji, uz primjenu rekursivnog postupka, potrebno je odrediti početne vrijednosti za $(k = 0)$ u relacijama (3-74) i (3-83):

$$\hat{\underline{\Theta}}(k+1) = \hat{\underline{\Theta}}(k) + \underline{q}(k+1)\hat{\underline{\varepsilon}}(k+1),$$

$$\underline{P}(k+1) = \underline{P}(k) - \underline{q}(k+1)\underline{\varphi}^T(k)\underline{P}(k).$$

Izborom $\hat{\underline{\Theta}}(0)$ i $\underline{P}(0)$ bitno se utječe na konvergenciju procjene parametara. Za određivanje početnih vrijednosti preporuča se jedna od dviju sljedećih mogućnosti:

1. Grubo određivanje $\hat{\underline{\Theta}}$ i \underline{P} pomoću direktnog postupka, a na temelju manjeg broja mjernih podataka (prije stvarnog rekursivnog postupka);
2. Za početne vrijednosti rekursivnog postupka koriste se iskustvene vrijednosti.

U praksi se pokazalo da su za LS i IV metodu dobre sljedeće početne vrijednosti:

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\Theta}}(0) &= \underline{0}, \\ \underline{P}(0) &= \alpha \underline{I}, \quad \text{za } \alpha = 10^4. \end{aligned} \tag{3-173}$$

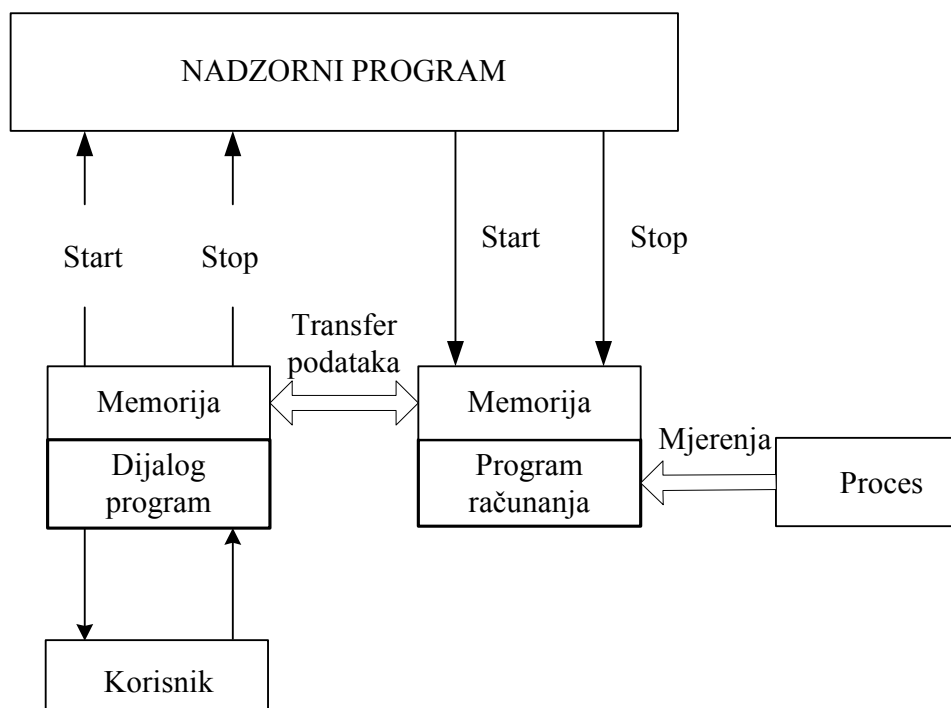
IV. korak

U ovom koraku identifikacije obavlja se promatranje i utjecanje na vrijednosti procjene parametara.

Kod direktne metode procjene parametara kompletna se procjena obavlja u jednom koraku. Pri tome nije potrebno promatrati međurezultate i nema smisla utjecati na tekući proračun parametara.

Kod rekursivne metode dobiva se nakon svakog računskog koraka rezultat procjene. Na temelju ocjene tog rezultata može se utjecati na sljedeći računski korak. Time se može upravljati tokom identifikacije. To podrazumijeva i odgovarajuću strukturu interaktivnog računalskog programa za identifikaciju.

Načelna struktura interaktivnog programa za procjenu parametara prikazana je na slici 3.15.



Sl.3.15. Struktura programa za interaktivnu rekurzivnu procjenu parametara.

Preko *dijalog programa* unose se svi podaci potrebni za procjenu parametara (npr. red modela, broj mjernih točaka, težinski faktori,...). Ovi podaci pohranjuju se u *zajedničku memoriju*. Kroz upravljačku instrukciju u *dijalog-programu*, aktivira se *nadzorni program*, koji starta *program računanja*. Pri tome se ne prekida *dijalog-program*. Dakle, *dijalog-program* i *program računanja* rade paralelno. *Korisnik* nema komunikaciju s *programom računanja*, u kojem se obavlja akvizicija podataka i procjena parametara. Međutim, svi relevantni podaci vezani za identifikaciju, dobiveni u *programu za računanje*, mogu se prebaciti u *memoriju dijalog-programa* i tako biti na dispoziciji *korisniku*.

U slučaju ocjene da su procijenjeni parametri nelogični identifikacija se može prekinuti (upravljanje identifikacijom).

Tijekom postupka identifikacije mogu se mijenjati, primjerice, sljedeći parametri:

- težinski faktor ρ (ne i težinski postupak);
- elementi matrice \underline{P} ;
- procijenjene vrijednosti vektora parametara $\hat{\underline{\Theta}}$;
- broj mjernih vrijednosti.

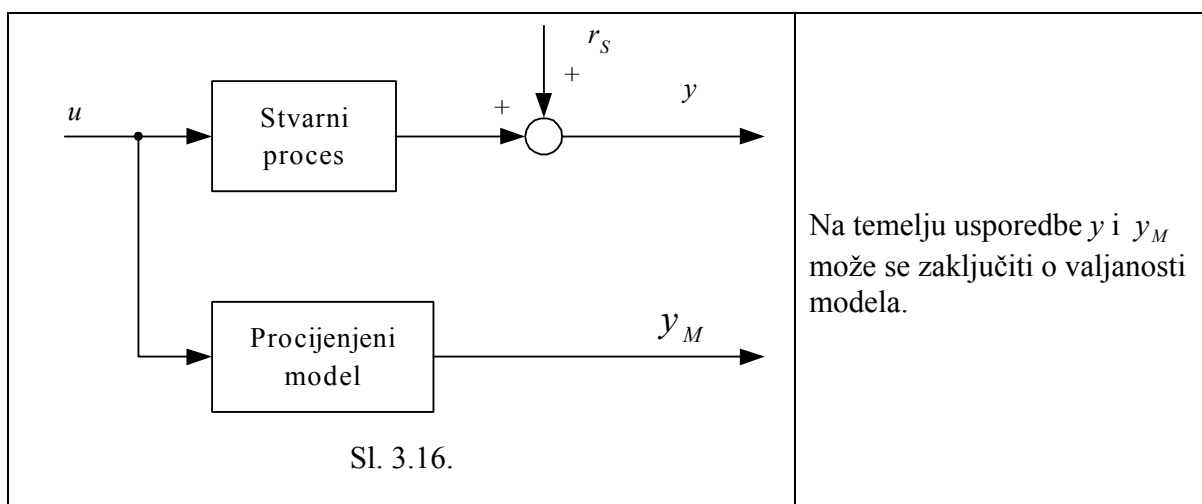
Nasuprot tome:

- mrtvo vrijeme modela;
- red modela

se ne smiju mijenjati jer se time utječe na dimenzije vektora i matrica.

V. korak

Vrednovanje modela predstavlja posljednji korak u postupku identifikacije. U ovom koraku potrebno je provjeriti odgovara li matematički model dobiven procjenom parametara statičkom i dinamičkom vladanju stvarnog procesa unutar pretpostavljenih radnih uvjeta (Sl. 3.16.).



Za svaki od 5 navedenih koraka koji se koriste u identifikaciji procesa potrebno je raditi iscrpnu dokumentaciju.

Napomena:

Iz ulazno/izlaznih signala mogu se identificirati samo oni dijelovi procesa koji su upravljivi i osmotrivi. Drugim riječima, samo se za upravljive i osmotrive dijelove procesa mogu procijeniti parametri.

4. IDENTIFIKACIJA PROCESA I ADAPTIVNI SUSTAVI UPRAVLJANJA

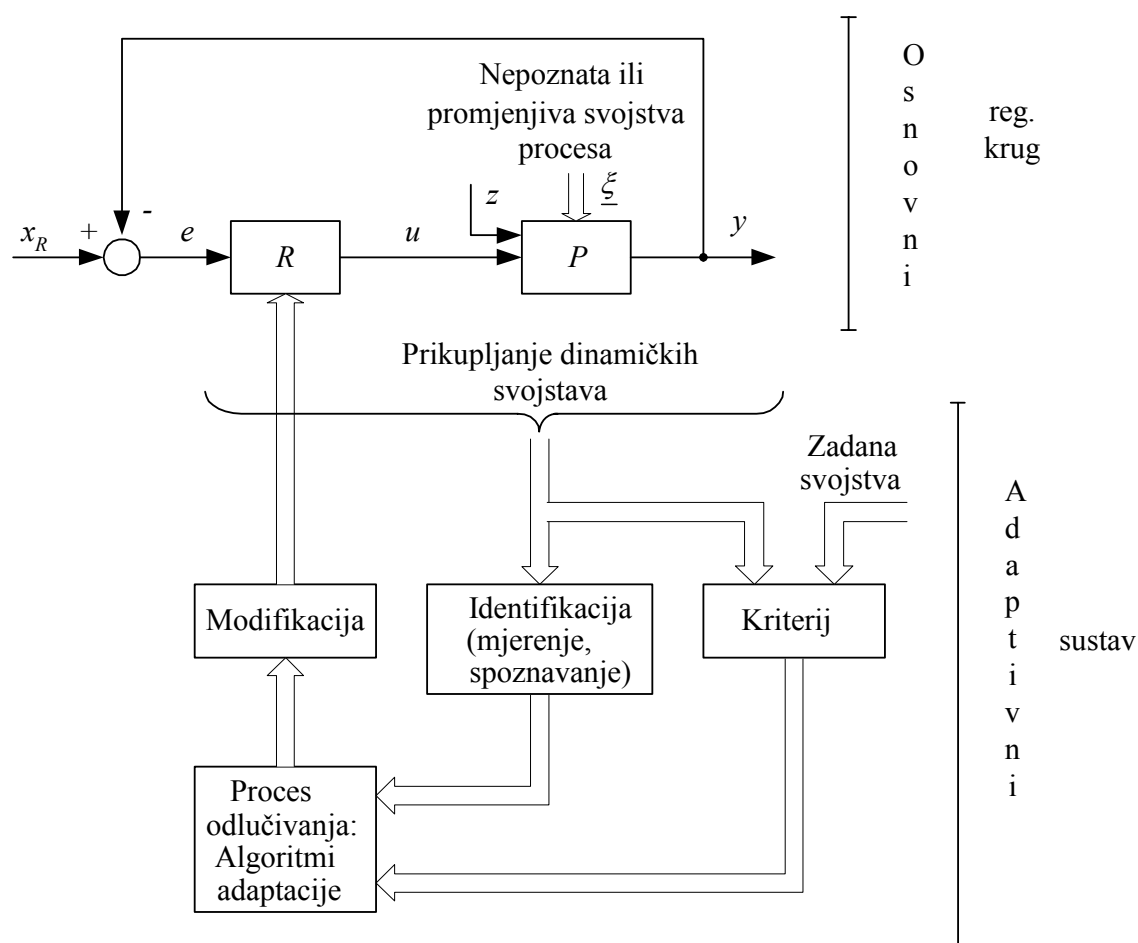
Većina metoda sinteze sustava upravljanja zasniva se na pretpostavci da su procesi vremenski nepromjenljivi. Međutim, često se tijekom rada procesa mijenjaju parametri procesa ili je vladanje procesa a-priori nepoznato. I u takvim se slučajevima nastoji postići i održati vladanje sustava upravljanja nepromijenjenim u smislu zadržavanja kakvoće upravljanja prema postavljenom kriteriju. Kako bi se to postiglo, koriste se:

- Robusni (neosjetljivi) sustavi upravljanja,
- Adaptivni (prilagodljivi) sustavi upravljanja.

Adaptivni sustavi predstavljaju prirodno proširenje klasičnih načela upravljanja. Osnovnom regulacijskom krugu nadređen je adaptivni sustav upravljanja (Sl. 4.1.)

Kod adaptivnih sustava bitna su tri sljedeća stupnja:

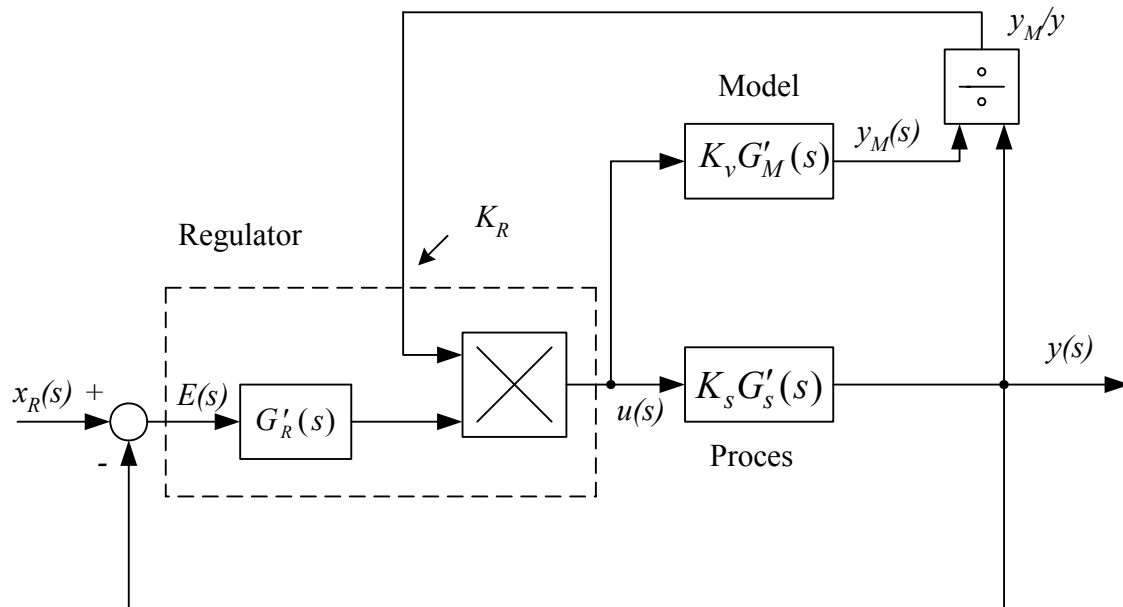
- identifikacija;
- proces odlučivanja;
- modifikacija (provedba).



Sl. 4.1. Shematski prikaz adaptivnog sustava upravljanja.

Prema načinu realizacije triju navedenih stupnjeva postoje različite strukture adaptivnih sustava upravljanja.

Način funkcioniranja adaptivnog sustava upravljanja ilustriran je na sljedećem jednostavnom primjeru (Sl. 4.2.).



Sl. 4.2. *Primjer adaptivnog sustava upravljanja.*

Osnovni regulacijski krug sastoji se od procesa prikazanog prijenosnom funkcijom $K_s G'_s(s)$ i regulatora prikazanog s $K_R G'_R(s)$.

Pretpostavimo da se pojačanje procesa K_s lagano mijenja, ali na nepoznat način.

Pri tome želimo da pojačanje ovorenog regulacijskog kruga ostane nepromijenjeno:

$$K_0 = K_R(t)K_s(t) = K_v = \text{konst.} \quad (4-1)$$

Kako bi se to postiglo, $K_R(t)$ mora biti promjenljiv, tj. mora se adaptirati (prilagoditi).

Realizacija adaptacije sustava postiže se načelno na sljedeći način.

Upravljačka veličina $u(t)$ dovodi se istovremeno na stvarni proces i na model (Sl. 4.2.). Pri tome pretpostavljamo da vrijedi:

$$G'_s(s) = G'_M(s). \quad (4-2)$$

Dijeljenjem izlaznih signala iz dinamičkog modela procesa i samog procesa dobije se, uzimajući u obzir (4-1) i (4-2):

$$\frac{y_M}{y} = \frac{K_v G'_M(s)}{K_s G'_s(s)} = \frac{K_v}{K_s} = K_R \Rightarrow K_0 = \text{konst.} \quad (4-3)$$

Prema tome, izlazni signal iz djelila (adaptivnog dijela sustava) predstavlja pojačanje regulatora koje pomnoženo s $G'_R(s)$ osigurava upravljački signal $U(s)$.

Na ovom jednostavnom primjeru mogu se uočiti sva tri navedena stupnja adaptivnih sustava:

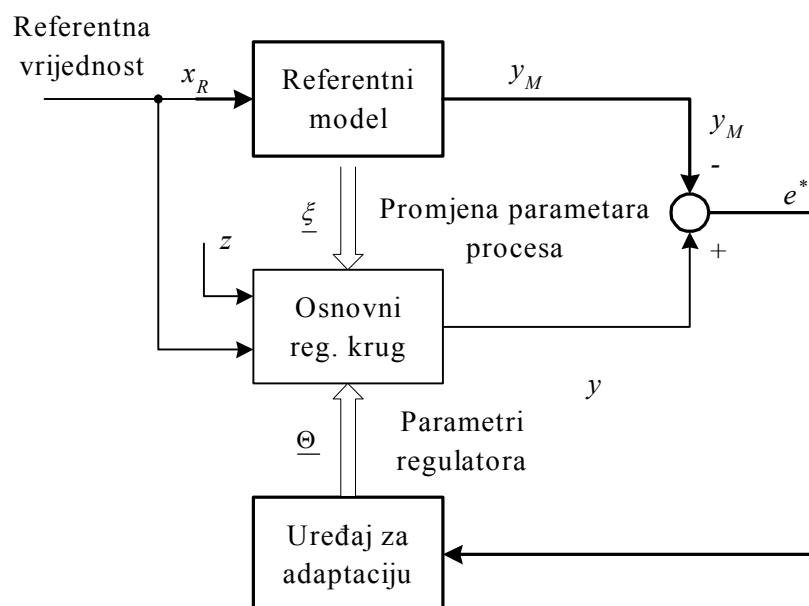
- identifikacija vremenski promjenljivog pojačanja procesa $K_s(t)$ ostvarena usporedbom izlaznih signala procesa i modela (dijeljenje);
- odlučivanje se zasniva na spoznaji da se dijeljenjem dobiva traženo promjenjivo pojačanje regulatora koje osigurava $K_0 = \text{konst.}$;
- modifikacija se realizira množenjem.

4.1. Osnovne strukture adaptivnih sustava

Adaptivni sustav upravljanja s referentnim modelom

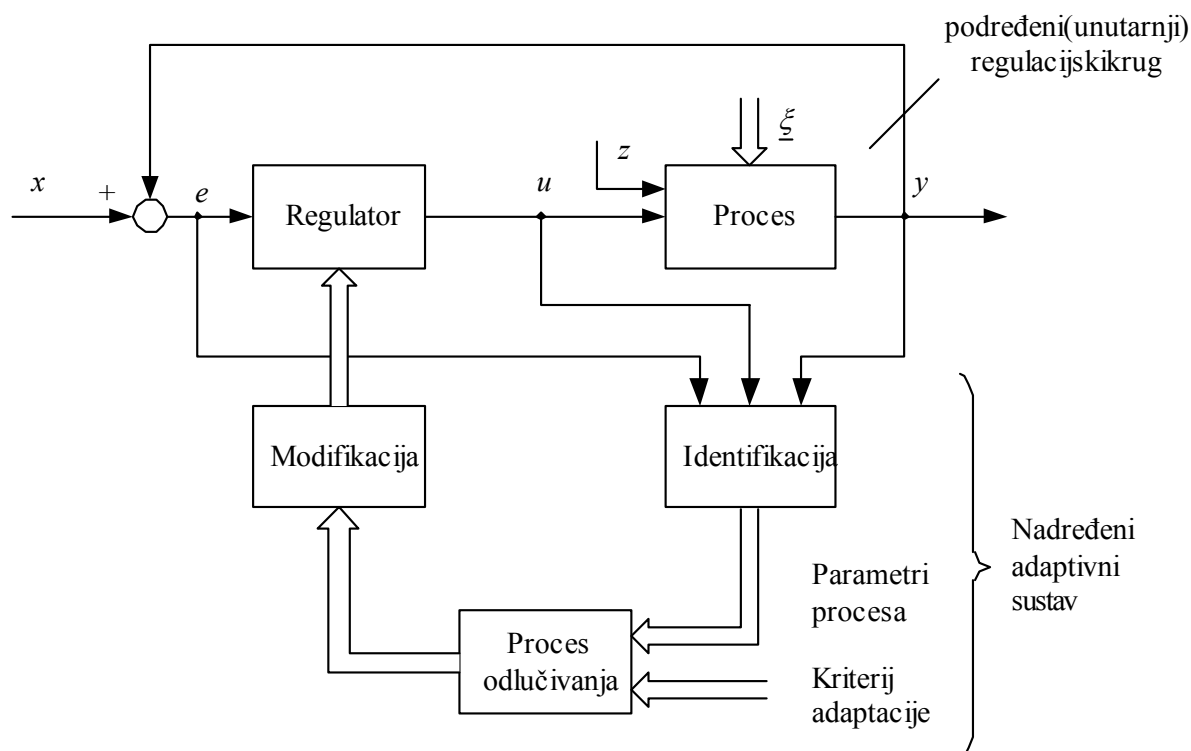
Adaptivni sustavi upravljanja s referentnim modelom (Sl. 4.3.) (*engl. Model Reference Adaptive Control, MRAC*) dijele se na sustave upravljanja :

- s parametarskom adaptacijom;
- sa signalnom adaptacijom.



Sl. 4.3. Adaptivni sustav upravljanja zasnovan na referentnom modelu.

Adaptivni sustav sa samopodešavajućim regulatorom



Sl.4.4. Adaptivni sustav upravljanja sa samopodešavajućim regulatorom.

Adaptivni sustav upravljanja zasnovan na samopodešavajućem regulatoru (Sl. 4.4.) (engl. *Self Tuning Controller, STC*) obično koristi rekurzivni postupak procjene parametara, budući da se sinteza regulatora (odlučivanje i modifikacija) obavlja “on-line”.

Sinteza regulatora može se obaviti na različite načine:

- zadavanjem faznog i amplitudnog osiguranja;
- zadavanjem polova zatvorenog sustava;
- primjenom “minimum-varijance” strategije;
- primjenom optimalne regulacije stanja.

Adaptivno upravljanje, prikazano na slici 4.4, koristi **indirektni**, odnosno **eksplicitni** STR, jer se sinteza regulatora obavlja na osnovi eksplicitnog modela procesa. Ovdje su identifikacija i podešavanje parametara razdvojeni.

Često je moguće identificirati parametre regulatora direktno, bez određivanja parametara procesa. Tako projektirani STR zasniva se na implicitnom modelu procesa i naziva se **direktnim**, odnosno **implicitnim** STR.

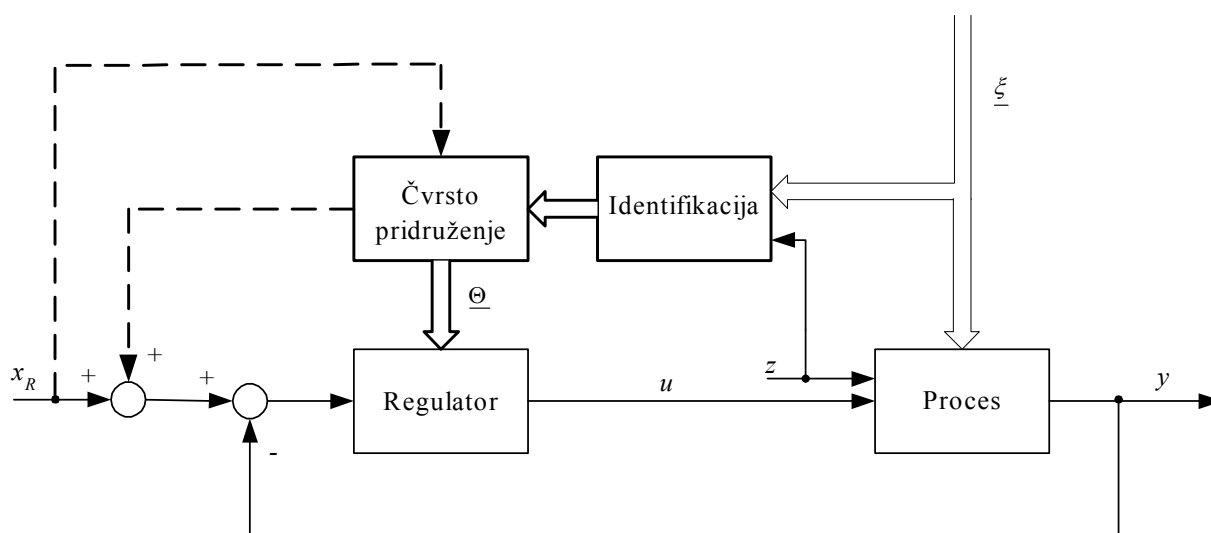
Prve industrijske primjene adaptivnih sustava s STR-om pojavljuju se 80-tih godina (temeljene na radovima Kalmana, 1958, te Åströma i Wittenmarka, 1973, i drugih)

Osnovni problemi za obje navedene adaptivne strukture su:

- stabilnost ukupnog sustava;
- konvergencija parametara regulatora;
- utjecaj smetnji.

Postupak upravljive adaptacije

Ako je vladanje sustava upravljanja poznato za različite promjene parametara $\underline{\xi}$ procesa i smetnji z , tada je često moguće podesiti parametre regulatora $\underline{\Theta}$ prema prethodno izračunatoj proceduri (*engl. parameter scheduling*).



Sl. 4.5. Struktura upravljanja zasnovana na postupku upravljive adaptacije.

Upravljiva adaptacija (Sl. 4.5.), strogo govoreći, ne pripada adaptivnim sustavima upravljanja jer:

- u proces adaptacije nije uključena izlazna veličina;
- djelovanje adaptacije parametara regulatora $\underline{\Theta}$ ne djeluje povratno.

Umjesto da se korigiraju parametri $\underline{\Theta}$, može se djelovati i na referentnu veličinu pa bi se u tom slučaju moglo govoriti o vrsti signalne adaptacije.

Čvrsto pridruženje između vektora parametara $\underline{\Theta}$ i poremećajnih veličina $\underline{\xi}$ i z te referentne vrijednosti x_R može se provesti ako se dobro poznaje vladanje procesa.

Dobre osobine upravljanja zasnovanog na upravljivoj adaptaciji su:

- brzo prilagođenje osnovnog regulacijskog kruga;
- jednostavna realizacija;
- praktične primjene.

Primjer ovakvog koncepta upravljanja je upravljanje istosmjernim motorom uz napajanje iz tiristorskog usmjerivača.

Naime, pojačanje tiristorskog usmjerivača se mijenja pri prijelazu iz režima tzv. kontinuiranog vođenja u režim tzv. diskontinuiranog vođenja. Režim vođenja tiristorskog usmjerivača se detektira na osnovi valnog oblika struje, te se iz tablice u memoriji računala uzima pojačanje regulatora struje armature koje se odnosi na taj režim vođenja.

5. UVOD U IDENTIFIKACIJU NELINEARNIH DINAMIČKIH PROCESA

Uobičajena je pretpostavka u identifikaciji procesa da je proces koji se identificira linearan i vremenski nepromjenljiv. Svi su procesi u prirodi, pa tako i tehnički procesi, u određenoj mjeri nelinearni i vremenski promjenljivi, ali je kod velikog broja procesa nelinearnost blago izražena i vremenska promjenljivost dovoljno spora da se linearnim vremenski nepromjenljivim modelom može dobro opisati njihovo vladanje. Teorija linearnih sustava dobro je razvijena tako da postoji veliki broj metoda koje se mogu primijeniti za dobivanje linearnoga modela procesa.

Međutim, kod nekih je procesa nelinearnost jako izražena tako da linearni modeli nisu dovoljno dobri za opis njihova vladanja, već se moraju primijeniti nelinearni modeli. Primjenom nelinearnih modela postupak identifikacije znatno se usložnjava. Najveću poteškoću predstavlja izbor strukture modela jer za nelinearni model ima neusporedivo veći broj mogućnosti nego za linearni. Rezultat je to činjenice da nelinearna funkcija može biti nelinearna na mnoštvo različitih načina. Kao posljedica toga može se zaključiti da opći nelinearni model mora biti znatno fleksibilniji od općega linearnog modela, a to znači da mora imati i znatno veći broj parametara. Međutim, veliki broj parametara može stvarati probleme, jer se povećavanjem broja parametara znatno usložnjava i postupak estimacije parametara modela.

5.1. Postupci provjere linearnosti/nelinearnosti procesa

Iz naprijed rečenog jasno je da je identifikacija nelinearnog modela znatno složenija od identifikacije linearnog pa je opravdano primijeniti linearni model procesa kad je god to moguće. Dakle, prvi korak pri izboru strukture modela svakako bi trebao biti provjera linearnosti/nelinearnosti funkcijske ovisnosti izlaznih o ulaznim signalima procesa. Za provjeru linearnosti/nelinearnosti procesa može se koristiti više postupaka kao što su dva postupka kako slijedi.

Prvi se postupak zasniva na međusobnoj usporedbi odziva procesa na više različitih skokovitih promjena ulaznog signala procesa. Proces se prvo dovede u radnu točku na sredini očekivanog radnog područja procesa $[u_0(k), y_0(k)]$. Zatim se ulazni signal skokovito promijeni za iznos $\Delta u^{(1)}$ i snimi se odziv izlaznog signala procesa $y^{(1)}(k)$. Proces se ponovo vrati u početnu radnu točku pa se ulazni signal skokovito promijeni za iznos $\Delta u^{(2)}$ koji je ρ_u puta veći od prethodne promjene ($\Delta u^{(2)} = \rho_u \cdot \Delta u^{(1)}$) i snimi se odziv izlaznog signala procesa $y^{(2)}(k)$. Zatim se izračuna omjer ρ_y između promjene izlaznoga signala u drugom i u prvom pokusu:

$$\rho_y(k) = \frac{y^{(2)}(k) - y_0}{y^{(1)}(k) - y_0}. \quad (5-1)$$

Ako je ρ_y konstantnog iznosa i ako je jednak ρ_u proces je linearan, dok je u protivnom proces nelinearan i treba ga modelirati nelinearnim modelom. Postupak je potrebno provesti najmanje dvaput, jedanput za pozitivnu a drugi puta za negativnu promjenu ulaznoga signala u odabranoj radnoj točki. Osim toga, zbog standardno prisutnog šuma mjerenja, dobro je svaku skokovitu promjenu ponoviti nekoliko puta te

usrednjiti odzive izlaznog signala prije analize. Ovaj je postupak moguće primijeniti samo na procesima koji su stabilni te mogu raditi u otvorenoj petlji.

Drugi se postupak zasniva na izračunavanju korelacijske funkcije izlaznog signala višeg reda. Na ulaz procesa dovede se signal $u(k)$, koji se sastoji od istosmjernog offseta u_0 i njemu superponiranog pobudnog signala $\Delta u(k)$, i snimi se odziv izlaznog signala procesa $y(k)$. Zatim se iz izlaznog signala eliminira očekivanje $y'(k) = y(k) - E[y(k)]$ te izračuna korelacijska funkcija višeg reda:

$$R_{y'y',2} = E[y'(k + \tau)(y'(k))^2], \quad (5-2)$$

gdje je τ pomak u diskretnom vremenu.

Proces je linearan ako je ispunjen uvjet:

$$R_{y'y',2} = 0 \quad \forall \tau. \quad (5-3)$$

Osnovne su pretpostavke na kojima se temelji ovaj postupak da su pobudni signal $\Delta u(k)$ i šum $\xi(k)$ u izlaznom signalu procesa međusobno neovisni signali srednjih vrijednosti nula te da su svi njihovi neparni momenti jednaki nuli, dok svi parni momenti postoje. Pobudni signali, kao što su, zbroj sinusoida različitih frekvencija te PRBS i BLWNS¹ signali ispunjavaju ove uvjete.

Opisani su postupci izravno primjenjivi za provjeru linearnosti/nelinearnosti procesa s jednim ulaznim i jednim izlaznim signalom (SISO procesi), ali se mogu primijeniti i za provjeru linearnosti/nelinearnosti procesa s više ulaza i više izlaza (MIMO procesi), tako da se provedu zasebno za svaki par ulaznih i izlaznih signala.

Postupci provjere linearnosti/nelinearnosti omogućuju donošenje odluke o primjeni linearnog ili nelinearnog modela, ali ne omogućuju izbor određene strukture modela procesa. Zbog toga se u nastavku obrađuju strukture modela procesa, s naglaskom na strukture nelinearnih modela koje omogućuju jednostavnu primjenu neuronskih mreža za modeliranje nelinearnosti procesa.

5.2. Opći model nelinearnih dinamičkih procesa

Široka se klasa nelinearnih dinamičkih procesa može opisati sljedećim diskretnim jednadžbama u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \underline{x}(k+1) &= \underline{g}(k, \underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{w}(k)), \\ \underline{y}(k) &= \underline{h}(k, \underline{x}(k), \underline{u}(k)) + \underline{\xi}(k), \end{aligned} \quad (5-4)$$

gdje je:

- $\underline{u}(k)$ - vektor ulaznih signala procesa dimenzije $n(u)$;
- $\underline{x}(k)$ - vektor varijabli stanja procesa dimenzije $n(x)$;
- $\underline{y}(k)$ - vektor izlaznih signala procesa dimenzije $n(y)$;
- \underline{g} - vektorska funkcija koja opisuje dinamiku procesa;

¹ engl. Band Limited White Noise – nastaje generiranjem diskretnog niza slučajnih brojeva po zakonu normalne razdiobe, te propuštanjem niza kroz ekstrapolator nultog reda (ZOH) da bi signal dobio energiju

\underline{h} - vektorska funkcija koja opisuje ovisnost izlaznih signala procesa o varijablama stanja;

$\underline{w}(k)$ - vektor slučajnih varijabli sa svojstvima Gaussovog bijelog šuma očekivanja $E[\underline{w}(k)]=0$ i varijance $E[\underline{w}^2(k)]=\underline{\sigma}_w^2$, tzv. *procesni šum* (engl. *process noise*);

$\underline{\xi}(k)$ - vektor slučajnih varijabli sa svojstvima Gaussovog bijelog šuma očekivanja $E[\underline{\xi}(k)]=0$ i varijance $E[\underline{\xi}^2(k)]=\underline{\sigma}_\xi^2$, tzv. *mjerni šum* (engl. *measurement noise*).

Međutim, u teoriji je sustava od primarne važnosti poznavanje funkcije koja opisuje ulazno-izlazno vladanje procesa, jer se sva interakcija s procesom odvija preko ulaznih i izlaznih signala. Ako je nelinearni sustav konačno ostvariv, to jest ako ga se može opisati konačnim brojem varijabli stanja, onda je opisu u prostoru stanja (5-4) ekvivalentan ulazno-izlazni opis:

$$\underline{y}(k) = \underline{f}(k, \underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}) + \underline{\xi}(k), \quad (5-5)$$

gdje je:

\underline{f} - vektorska funkcija koja opisuje ovisnost izlaznih signala procesa o ulaznim signalima;

$$\begin{aligned} \underline{u}^{k-1} &= [\underline{u}^T(1), \dots, \underline{u}^T(k-1)]^T = [u_1(1), \dots, u_{n(u)}(1), \dots, u_1(k-1), \dots, u_{n(u)}(k-1)]^T - \\ &\quad \text{- vektor dostupnih mjernih vrijednosti ulaznih signala procesa} \\ &\quad \text{u } (k-1)\text{-om trenutku, dimenzije } (k-1) \cdot n(u); \\ \underline{y}^{k-1} &= [\underline{y}^T(1), \dots, \underline{y}^T(k-1)]^T = [y_1(1), \dots, y_{n(y)}(1), \dots, y_1(k-1), \dots, y_{n(y)}(k-1)]^T - \\ &\quad \text{- vektor dostupnih mjernih vrijednosti izlaznih signala procesa} \\ &\quad \text{u } (k-1)\text{-om trenutku, dimenzije } (k-1) \cdot n(y). \end{aligned}$$

Prvi je član u izrazu (5-5) funkcija prošlih mjernih vrijednosti ulaznih i izlaznih signala procesa, a drugi je član neovisan o njima pa se ne može niti identificirati. Problem se identifikacije, dakle, svodi na pronalaženje aproksimacijske funkcije funkciji \underline{f} . Kao aproksimacijska funkcija uobičajeno se primjenjuje funkcija parametrirana konačno-dimenzionalnim vektorom parametara $\underline{\Theta}$:

$$\underline{f}_N(k, \underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}, \underline{\Theta}). \quad (5-6)$$

Parametriranjem funkcije \underline{f}_N određena je struktura modela procesa:

$$\hat{\underline{y}}(k) = \underline{f}_N(k, \underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}, \underline{\Theta}). \quad (5-7)$$

Vektor izlaznih signala modela procesa $\hat{\underline{y}}(k)$ izračunava se u $(k-1)$ -om koraku, na osnovi u tom trenutku dostupnih mjernih vrijednosti ulaznih i izlaznih signala procesa $[\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}]$. Dakle, vektor $\hat{\underline{y}}(k)$ predstavlja procijenjenu vrijednost vektora izlaznih signala procesa u k -tom koraku $\underline{y}(k)$, izračunatu jedan korak unaprijed, u $(k-1)$ -om koraku. Zbog toga se model (5-7) naziva *predikcijskim modelom procesa* ili jednostavno *prediktorom*, a vektor signala pogrešaka između izlaznih signala procesa i modela

$$\hat{e}(k) = y(k) - \hat{y}(k) \quad (5-8)$$

vektorom predikcijskih pogrešaka.

Kada je odabrana parametrirana struktura modela (5-7) potrebno je estimirati vrijednosti parametara modela $\underline{\Theta} = \underline{\Theta}^*$ uz koje je predikcijska pogreška najmanja, odnosno uz koje izlaz modela predstavlja očekivanje izlaza procesa:

$$\hat{y}(k) = f_N(k, \underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}, \underline{\Theta}^*) = E[y(k)]. \quad (5-9)$$

Uz definirani kriterij kakvoće kojim se minimizira pogreška (5-8), optimalne se vrijednosti parametara modela estimiraju numeričkim postupcima koji traže minimum kriterija kakvoće, a time i minimum predikcijske pogreške.

Sa stajališta izbora strukture modela i estimacije parametara modela korisno je nelinearnu funkciju (5-7) prikazati kao kompoziciju dviju funkcija: jedne, koja preslikava stalno rastući prostor prošlih uzoraka $[\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}]$ u konačno-dimenzijski vektor $\underline{\varphi}(k)$ i druge, koja preslikava vektor $\underline{\varphi}(k)$ u izlazni prostor $\hat{y}(k)$:

$$\hat{y}(k) = f_N(k, \underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}, \underline{\Theta}) = f_N(k, \underline{\varphi}(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}), \underline{\Theta}) = f_N(k, \underline{\varphi}(k), \underline{\Theta}). \quad (5-10)$$

U statistici se predikcijski model (5-10) naziva *nelinearnom regresijom*, vektor $\underline{\varphi}(k)$ *regresijskim vektorom*, dok se njegove komponente nazivaju *regresorima*.

Kada se razmatraju nelinearni procesi vremenski nepromjenljivih ili sporo promjenljivih karakteristika, predikcijski se model (5-10) može napisati u sljedećem obliku:

$$\hat{y}(k) = f_N(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}, \underline{\Theta}) = f_N(\underline{\varphi}(k), \underline{\Theta}). \quad (5-11)$$

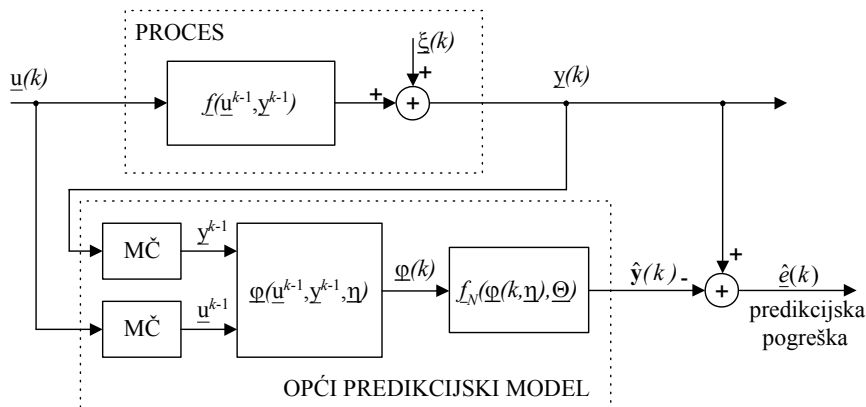
U općem slučaju i sami regresori mogu biti parametrirani, to jest mogu ovisiti o nekim ili o svim parametrima modela procesa:

$$\underline{\varphi}(k) = \underline{\varphi}(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1}, \underline{\eta}) = \underline{\varphi}(k, \underline{\eta}), \quad (5-12)$$

gdje je vektor parametara $\underline{\eta} \subseteq \underline{\Theta}$. Zbog ovisnosti o parametrima modela vektor $\underline{\varphi}(k, \underline{\eta})$ naziva se pseudoregresijskim vektorom, a model

$$\hat{y}(k) = f_N(\underline{\varphi}(k, \underline{\eta}), \underline{\Theta}), \quad (5-13)$$

nelinearnom pseudoregresijom. Model (5-13) predstavlja opći predikcijski model nelinearnih, vremenski nepromjenljivih procesa. Njegova blokovska shema prikazana je na slici 5.1.



Sl. 5.1. Blokvska shema općeg predikcijskog modela procesa².

Razdvajanjem funkcije (5-6) u kompoziciju dviju funkcija razdvaja se i problem izbora strukture općega nelinearnog modela procesa na dva zasebna problema:

- 1) izbor regresijskog vektora $\underline{\varphi}(k)$, odnosno funkcije $\underline{\varphi}(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1})$ koja preslikava prostor prošlih mjernih vrijednosti ulaznih i izlaznih signala procesa u regresijski prostor i
- 2) izbor funkcije $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$ koja preslikava regresijski prostor u izlazni prostor modela procesa.

Prvi se problem, problem izbora regresijskog vektora, pojavljuje i kod identifikacije linearnih i nelinearnih procesa, dok se drugi problem pojavljuje samo kod identifikacije nelinearnih procesa. Naime, kod općega je linearnog modela funkcija $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$ linearna po $\underline{\varphi}(k)$ pa je njegova struktura u cijelosti definirana izborom regresijskoga vektora, koji, također, linearno ovisi o izabranim regresorima. Regresori se izabiru unaprijed i ne mijenjaju se tijekom postupka identifikacije. Prema tome, za linearne procese nelinearna regresija (5-11) postaje linearnom regresijom:

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{\Theta}^T \cdot \underline{\varphi}(k). \quad (5-14)$$

Ako se koriste regresori koji ovise o parametrima modela, linearna regresija (5-14) postaje pseudolinearnom regresijom:

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{\Theta}^T \cdot \underline{\varphi}(k, \underline{\eta}). \quad (5-15)$$

Kod identifikacije nelinearnih procesa obje funkcije, i $\underline{\varphi}(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1})$ i $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$, mogu biti nelinearne. U tom je slučaju fleksibilnost modela raspodijeljena između njih (takav je slučaj kod modela u prostoru stanja). Međutim, u identifikaciji nelinearnih procesa češće se koriste modeli kod kojih je jedna funkcija linearna, a druga nelinearna. Tada je sva fleksibilnost modela sadržana u nelinearnoj funkciji. Ako je funkcija $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$ linearna, a funkcija $\underline{\varphi}(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1})$ nelinearna, model nelinearnog procesa je oblika (pseudo)linearne regresije (5-14) odnosno (5-15). Nelinearna funkcija $\underline{\varphi}(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1})$ najčešće je polinomskog oblika, gdje su regresori monomi konačnog broja prošlih mjernih vrijednosti ulaznih i izlaznih signala procesa. Dobro je svojstvo ovog modela linearnost po parametrima, što omogućuje primjenu numeričkih postupaka estimacije parametara koji se koriste u identifikaciji linearnih

² MČ - memorijski član koji pamti prošle vrijednosti signala

procesa. Međutim, ova struktura modela nije prikladna za primjenu neuronskih mreža, jer je teško definirati kriterij na osnovi kojeg bi se neuronska mreža učila.

Sa stajališta primjene neuronskih mreža najzanimljiviji su modeli nelinearnih procesa kod kojih je $\varphi(\underline{u}^{k-1}, \underline{y}^{k-1})$ linearna funkcija po izabranim regresorima, kao i kod linearnih modela, dok je $f_N(\varphi, \Theta)$ nelinearna funkcija. Funkcija $f_N(\varphi, \Theta)$ može biti nelinearna na mnoštvo načina i u načelu se razlikuje od procesa do procesa, pa je za njezinu aproksimaciju najprikladnije koristiti aproksimatore sa svojstvima univerzalnog aproksimatora, kao što su, primjerice, neuronske mreže. Na taj se način dobije najfleksibilnija struktura modela za zadani regresijski vektor. Općenito, fleksibilniji model ima veći broj parametara, što može negativno utjecati na kakvoću modela. Naime, varijanca pogreške modela raste proporcionalno s brojem parametara modela uz moguće beznačajno smanjenje “biasa” pogreške. Ovo ima za posljedicu pogoršanje svojstava poopćavanja modela, to jest povećanje pogreške modela kada mu na ulaz pristižu novi mjerni podaci. Prema tome, u nekim je slučajevima bolje ograničiti fleksibilnost nelinearnoga modela procesa s ciljem dobivanja modela sa što manjim brojem parametara koji zadovoljavajuće dobro opisuje dinamičko vladanje procesa. Ovo se načelo naziva *načelom štedljivosti* (engl. parsimony principle). Ograničenje fleksibilnosti nelinearnog modela procesa ostvaruje se uvođenjem ograničenja na nelinearnu funkciju $f_N(\varphi, \Theta)$.

Uvođenje ograničenja na funkciju $f_N(\varphi, \Theta)$ vrlo je prirodno. Kao što je već rečeno, kada se pristupa identifikaciji nekog procesa, logično je prvo pokušati primijeniti linearni model pa tek ako se pokaže da on ne zadovoljava primijeniti nelinearni model. Međutim, to ne znači da se odmah mora primijeniti opći nelinearni model, već se mogu razmotriti mogućnosti primjene jednostavnijih modela s manjim brojem parametara. Primjerice, preslikavanje iz regresijskog u izlazni prostor može biti linearno po nekim regresorima. Dva su pristupa ograničavanju funkcije $f_N(\varphi, \Theta)$. Prvi se pristup zasniva na uvođenju strukturnih pretpostavki o procesu, a drugi na uvođenju pretpostavki o svojstvima smetnje na proces.

Prvi je pristup korišten kod klasičnih postupaka identifikacije nelinearnih procesa, što je rezultiralo razvojem većeg broja različitih struktura modela. Strukture modela temeljene na polinomskom razvoju ulazno-izlazne funkcije procesa f (modeli u obliku Volterraovog reda te racionalni i “output-affine” modeli) mogu opisati široku klasu nelinearnih dinamičkih procesa, ali je postupak estimacije parametara modela jako složen, tako da ovi modeli nisu našli širu primjenu. Zbog složenosti postupaka estimacije parametara navedenih modela, kod klasičnih se postupaka identifikacije nelinearnih dinamičkih procesa uglavnom koriste jednostavnije strukture modela (npr. bilinearni model i tzv. blokovski modeli), dobivene uvođenjem strukturnih pretpostavki o procesu. Bilinearni model se najčešće koristi za modeliranje dinamičkih procesa u kontinuiranom području, dok je njegova primjena u diskretnom području znatno rjeđa jer diskretni bilinearni model može opisati znatno užu klasu procesa od odgovarajućeg kontinuiranog. Blokovski su modeli sačinjeni od kaskada statičkih nelinearnosti i linearnih dinamičkih modela s jednim ulazom i jednim izlazom. Ovi se modeli mogu primijeniti samo za modeliranje SISO procesa kod kojih je moguće razdvojiti statičke nelinearnosti od linearnih dinamičkih članova. Najčešće korišteni modeli blokovske strukture su Hammersteinov model, Wienerov model i Wiener-Hammersteinov model. Sa stajališta primjene neuronskih mreža, navedeni modeli nisu zanimljivi jer je u njihovu strukturu vrlo teško ili nemoguće uključiti neuronske mreže.

Za razliku od modela procesa nastalih uvođenjem strukturnih ograničenja na proces, modeli koji se dobiju uvođenjem pretpostavki na svojstva smetnje vrlo malo narušavaju svojstva i strukturu općega modela (modela “crne kutije”), uz moguću znatnu uštedu u broju parametara modela. K tome, struktura je ovih modela takva da omogućuje jednostavno uključivanje neuronskih mreža i potpuno iskorištavanje njihovih dobrih svojstava. Zbog navedenih se prednosti u nastavku prikazuju strukture modela koje se dobivaju iz općega modela, uvođenjem pretpostavki na svojstva smetnje.

Prvo se, u potpoglavlju 5.3, opisuju ulazno-izlazni modeli procesa, a zatim u potpoglavlju 5.4 modeli procesa u prostoru stanja. Veća je pozornost pridana ulazno-izlaznim modelima jer oni omogućuju jednostavnu primjenu standardnih struktura neuronskih mreža, dok modeli u prostoru stanja uglavnom zahtijevaju primjenu specijalnih struktura neuronskih mreža. Osim toga, svi su modeli u prostoru stanja s povratnim djelovanjem pa primijenjene neuronske mreže moraju pripadati klasi dinamičkih mreža. Naprotiv, najznačajniji su ulazno-izlazni modeli bez povratnoga djelovanja pa omogućuju primjenu statičkih neuronskih mreža, što u velikoj mjeri pojednostavnjuje postupak estimacije parametara modela, a dobiveni su modeli strukturno stabilni.

5.3. Ulazno-izlazni modeli nelinearnih dinamičkih procesa zasnovani na općem modelu

Kao što je već naglašeno, problem izbora strukture modela nelinearnih procesa može se razdvojiti na izbor (pseudo)regresijskog vektora $\varphi(k)$ i izbor aproksimatora nelinearnog preslikavanja iz regresijskoga prostora u izlazni prostor $f_N(\varphi, \Theta)$. Sa stajališta primjene neuronskih mreža najzanimljiviji su modeli kod kojih je regresijski vektor $\varphi(k)$ linearno ovisan o izabranim regresorima. Kod ulazno-izlaznih modela, regresijski se vektor unaprijed zadaje i njegova se dimenzija tijekom postupka estimacije parametara više ne mijenja. Dakle, sva je fleksibilnost modela sadržana u nelinearnoj funkciji $f_N(\varphi, \Theta)$.

Poželjno je da regresijski vektor $\varphi(k)$ ima što manju dimenziju te da ne ovisi o parametrima modela Θ . Iako su ova dva svojstva regresijskoga vektora često u kontradikciji, oni se postavljaju kao glavni cilj pri izboru strukture modela nelinearnog procesa. Naime, smanjenjem dimenzije regresijskog vektora smanjuje se dimenzija nelinearnog preslikavanja $f_N(\varphi, \Theta)$, a time i složenost problema estimacije parametara modela. S druge strane, ako regresijski vektor ne ovisi o parametrima modela, nema povratnog djelovanja u modelu pa je on strukturno stabilan.

Izborom regresijskog vektora određena je struktura modela procesa, ili, preciznije, grupa modela iste strukture. Različiti modeli unutar tako dobivene grupe modela dobiju se uvođenjem ograničenja na nelinearnu funkciju $f_N(\varphi, \Theta)$. Glavni je cilj izbora aproksimatora nelinearne funkcije $f_N(\varphi, \Theta)$ pronalaženje aproksimatora koji s najmanjim brojem parametara daje zadovoljavajuću aproksimaciju, a da se pri tome u većoj mjeri ne naruši svojstvo općenitosti modela.

Bilo koja informacija o procesu može se koristiti kao regresor. U nekim je slučajevima dostupno odgovarajuće znanje o procesu na temelju kojeg se lako odlučuje koje je varijable najbolje koristiti kao regresore. Međutim, takvo je znanje o procesu rijetko dostupno, pa je izboru regresora potrebno pristupiti općenito, bez

ulaženja u fizikalne zakonitosti vladanja procesa. Pri izboru regresora za nelinearne modele procesa korisno je kao polazište uzeti najčešće korištene regresore pri identifikaciji linearnih modela procesa.

Primjenom istih regresora i istog načina tvorbe naziva za nelinearne kao i za linearne modele, dobiju se odgovarajući nelinearni modeli procesa:

- NFIR modeli (*engl.* Nonlinear FIR models), koriste $\underline{u}(k-i)$ kao regresore;
- NARX modeli (*engl.* Nonlinear ARX models), koriste $\underline{u}(k-i)$ i $\underline{y}(k-i)$ kao regresore;
- NOE modeli (*engl.* Nonlinear OE models), koriste $\underline{u}(k-i)$ i $\hat{\underline{y}}(k-i)$ kao regresore;
- NARMAX modeli (*engl.* Nonlinear ARMAX models), koriste $\underline{u}(k-i)$, $\underline{y}(k-i)$ i $\hat{\underline{e}}(k-i)$ kao regresore;
- NBJ modeli (*engl.* Nonlinear BJ models), koriste $\underline{u}(k-i)$, $\hat{\underline{y}}_s(k-i)$, $\hat{\underline{e}}(k-i)$ i $\hat{\underline{e}}_s(k-i)$ kao regresore.

Dok je struktura linearnih modela u potpunosti određena izabranim regresorima, struktura nelinearnih modela dodatno ovisi i o karakteristikama nelinearne funkcije $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$. Prema tome, navedeni su nelinearni modeli ustvari grupe modela. Unutar svake grupe modela moguće je dobiti neograničen broj modela ovisno o pretpostavkama na nelinearnu funkciju $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$. U tablici 5.1 usporedno je dan pregled linearnih modela procesa i grupa nelinearnih modela procesa, u ovisnosti o korištenim regresorima.

Tablica 5.1. Pregled regresora te odgovarajućih linearnih modela i grupa nelinearnih modela procesa.

| Regresori | Linearni model | Grupa nelinearnih modela |
|--|----------------|--------------------------|
| $\underline{u}(k-i)$ | FIR model | NFIR modeli |
| $\underline{u}(k-i), \underline{y}(k-i)$ | ARX model | NARX modeli |
| $\underline{u}(k-i)$ i $\hat{\underline{y}}(k-i)$ | OE model | NOE modeli |
| $\underline{u}(k-i), \underline{y}(k-i), \underline{e}(k-i)$ | ARMAX model | NARMAX modeli |
| $\underline{u}(k-i), \hat{\underline{y}}_s(k-i), \underline{e}(k-i)$ i $\underline{e}_s(k-i)$ ³ | BJ model | NBJ modeli |

NFIR modeli

NFIR modeli opisuju proces kao nelinearnu funkciju prošlih vrijednosti ulaznih signala:

$$\underline{y}(k) = f(\underline{u}^{k-1}) + \underline{\xi}(k). \quad (5-16)$$

Prediktor za model (5-16) glasi (Sl. 5.2.):

$$\hat{\underline{y}}(k) = f_N(\underline{\varphi}(k), \underline{\Theta}) = f_N(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}), \quad (5-17)$$

gdje je:

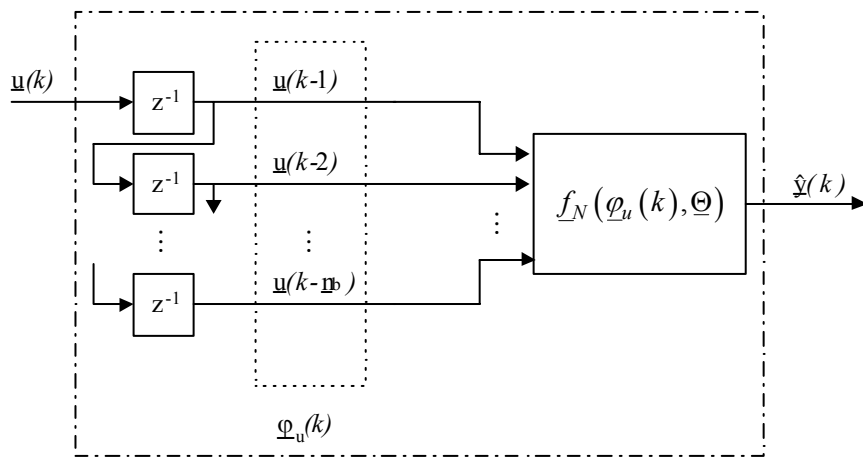
$$^3 \hat{\underline{y}}_s(k) = \frac{B(q)}{F(q)} \underline{u}(k), \quad \underline{e}_s(k) = \underline{y}(k) - \hat{\underline{y}}_s(k)$$

$$\underline{\varphi}(k) = \underline{\varphi}_u(k) = [\underline{u}^T(k-1), \dots, \underline{u}^T(k-\underline{n}_b)]^T \quad (5-18)$$

- regresijski vektor dimenzije $n(\varphi) = \sum_{j=1}^{n(u)} \underline{n}_b(j)$

$\underline{n}_b = [\underline{n}_b(1), \dots, \underline{n}_b(n(u))]$ - vektor broja korištenih prošlih vrijednosti ulaznih signala procesa.

Budući da regresijski vektor sadrži samo prošle mjerne vrijednosti ulaznih signala, NFIR model je stabilan u svim uvjetima. Međutim, nedostaci su mu, kao i FIR modela, potrebna velika dimenzija regresijskog vektora te nemogućnost modeliranja signala smetnje.



Sl. 5.2. Blokovska shema prediktora NFIR modela procesa.

NARX modeli

Najopćenitiji se NARX model dobije primjenom nelinearne regresije nad prošlim mjernim uzorcima izlaznih i ulaznih signala procesa:

$$\underline{y}(k) = \underline{f}(\underline{y}^{k-1}, \underline{u}^{k-1}) + \underline{\xi}(k). \quad (5-19)$$

Prediktor za model (5-19) glasi (Sl. 5.3.):

$$\hat{\underline{y}}(k) = \underline{f}_N(\underline{\varphi}(k), \underline{\Theta}) = \underline{f}_N([\underline{\varphi}_y(k), \underline{\varphi}_u(k)], \underline{\Theta}), \quad (5-20)$$

gdje je:

$$\underline{\varphi}(k) = [\underline{\varphi}_y^T(k) \quad \underline{\varphi}_u^T(k)]^T = [\underline{y}^T(k-1), \dots, \underline{y}^T(k-\underline{n}_a), \underline{u}^T(k-1), \dots, \underline{u}^T(k-\underline{n}_b)]^T - \quad (5-21)$$

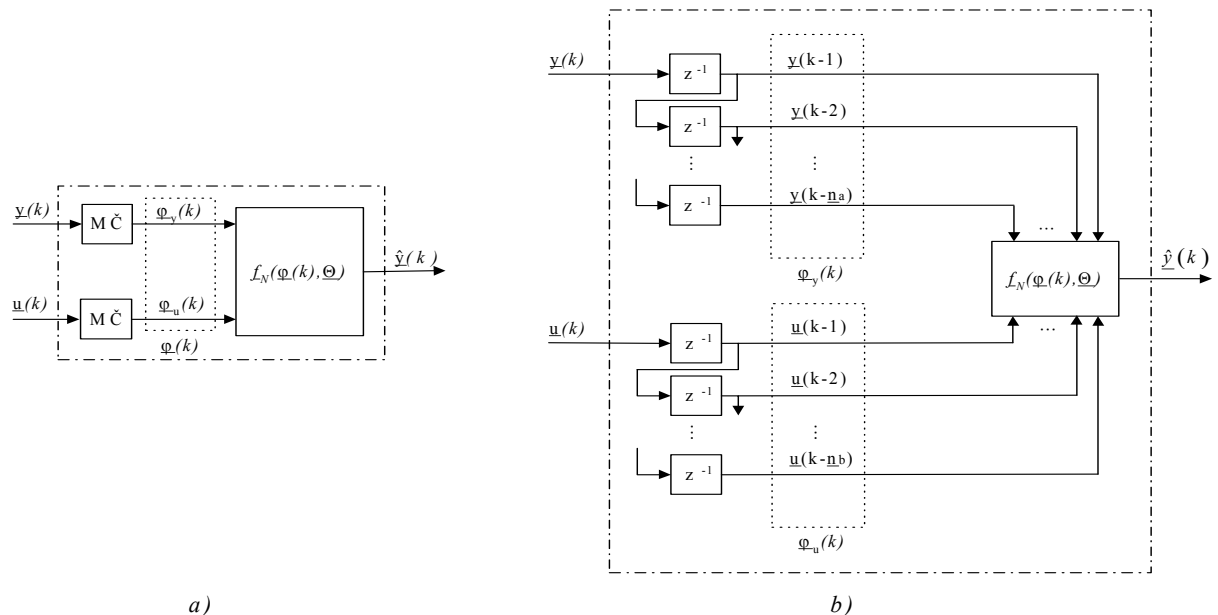
- regresijski vektor dimenzije

$$n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n(y)} \underline{n}_a(i) + \sum_{j=1}^{n(u)} \underline{n}_b(j);$$

⁴ indeks $k-\underline{n}_b$ je samo formalni zapis činjenice da se za različite ulaze može koristiti različit broj prošlih vrijednosti signala.

$\underline{n}_a = [\underline{n}_a(1), \dots, \underline{n}_a(n(y))]$ - vektor broja korištenih prošlih vrijednosti izlaznih signala procesa u regresijskom vektoru.

NARX model ima istu ulogu u modeliranju nelinearnih procesa koju ARX model ima u modeliranju linearnih procesa. Dok je ARX model opći model linearnih procesa, NARX model (5-19) može se smatrati općim modelom nelinearnih procesa.



Sl. 5.3. Blokovska shema prediktora općeg NARX modela procesa u kompaktnom (a) i razvijenom obliku (b)).

Osim što je opći model nelinearnih procesa, NARX model (5-19) je i model bez povratnih veza (*engl.* feedforward or non-recurrent model), to jest njegovi regresori ne ovise o parametrima modela. Ovo svojstvo čini NARX modele strukturno stabilnim, a numeričke postupke estimacije parametara modela jednostavnijim nego kod modela s povratnim djelovanjem (*engl.* feedback or recurrent models). Nadalje, NARX struktura modela omogućuje jednostavnu primjenu statičkih neuronskih mreža za aproksimaciju nelinearne funkcije $f_N(\underline{\varphi}, \underline{\Theta})$.

Nedostaci su NARX modela isti kao i ARX modela: smetnja se modelira kao dio dinamike procesa pa nema zasebnog modela smetnje, a zbog toga i potrebna dimenzija regresijskog vektora može biti znatno veća nego što ju zahtijeva dinamika procesa.

Kao što je već rečeno, model (5-19) predstavlja najopćenitiji NARX model. Međutim, potrebni broj parametara modela može biti velik, što ima više negativnih posljedica (npr. složenost estimacije parametara, prevelika varijanca modela). Zbog toga je smisleno pokušati pronaći nelinearni model koji može zadovoljavajuće dobro opisati proces s manjim brojem parametara, dakle jednostavniji, manje fleksibilni model. Da bi se model (5-19) mogao razlikovati od ostalih NARX modela, koji se obrađuju u nastavku, pridružuje mu se oznaka NARX1. Modeli NARX strukture, koji se obrađuju u nastavku, dobiju se iz općega modela (5-19) uvođenjem raznih pretpostavki na signal smetnje.

Stvarna svojstva signala smetnje kod nelinearnih procesa uglavnom su nepoznata. Stoga modele procesa koji se dobiju na osnovi raznih pretpostavki koje se odnose na signal smetnje treba promatrati kao moguće razumne prijedloge modela s ciljem modeliranja procesa sa što je moguće jednostavnijim modelom, a ne kao modele koji opisuju stvarna svojstva signala smetnje.

Prva pretpostavka koja se mogla smisleno primijeniti jest da je signal smetnje aditivan, ne nužno i sa svojstvima bijelog šuma. Tada se proces može opisati sljedećim izrazom:

$$\underline{y}(k) = \underline{f}(\underline{u}^{k-1}) + \underline{z}(k), \quad (5-22)$$

gdje je $\underline{z}(k)$ vektor signala smetnji sa svojstvima obojenog šuma. Najčešće se signali smetnje opisuju MA (*engl.* Moving Average) modelom isfiltriranim signalom sa svojstvima bijelog šuma:

$$\underline{z}(k) = \underline{C}(q)\underline{\xi}(k). \quad (5-23)$$

Prediktor za model dan izrazima (5-22) i (5-23) glasi:

$$\hat{\underline{y}}(k) = [\underline{I} - \underline{C}^{-1}(q)]\underline{y}(k) + \underline{C}^{-1}(q)\underline{f}_{N_2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2). \quad (5-24)$$

Izraz (5-24) neće izgubiti na općenitosti, ako se linearni filter $\underline{C}^{-1}(q)$ uključi u nelinearnu funkciju $\underline{f}_{N_2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2)$. To znači da se, uz $\underline{A}(q) = \underline{C}^{-1}(q)$, izraz (5-24) može napisati i na sljedeći način:

$$\hat{\underline{y}}(k) = [\underline{I} - \underline{A}(q)]\underline{y}(k) + \underline{f}_{N_2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2) = -\underline{A}_1\underline{y}(k-1) - \dots - \underline{A}_{n_a}\underline{y}(k-n_a) + \underline{f}_{N_2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2) \quad (5-25)$$

Prema tome, model (5-25), nazvat ćemo ga NARX2 modelom, linearan je po prošlim mjernim uzorcima izlaznih signala procesa (Sl. 5.4.a)). Drugim riječima, prvi je dio modela (5-25) linearna regresija s regresijskim vektorom

$$\underline{\varphi}_y(k) = [-\underline{y}(k-1)^T, \dots, -\underline{y}(k-n_a)^T]^T \quad (5-26)$$

dimenzije $n(\underline{\varphi}) = n(y) \cdot n_a$ i matricom parametara $\underline{\Theta}_y = [\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_{n_a}]^T$ dimenzije $n(\underline{\varphi}) \times n(y)$, dok je drugi dio modela jednak NFIR modelu (5-16), to jest predstavlja nelinearnu regresiju nad prošlim mjernim uzorcima ulaznih signala.

U usporedbi s NARX1 modelom, NARX2 model znatno je jednostavniji. Budući da je linearan u jednom dijelu parametara, postupak estimacije tih parametara postaje znatno jednostavniji. Osim toga, broj parametara modela se smanjuje, a i nelinearni dio modela postaje manje dimenzije pa se pojednostavljuje i estimacija njegovih parametara. Najvažnija je prednost NARX2 modela mogućnost osiguravanja njegove stabilnosti kada se koristi za simulaciju procesa ili za predikciju vladanja procesa više koraka unaprijed, što je, primjerice, potrebno kada se model koristi kao sastavni dio sustava prediktivnog upravljanja procesom. Naime, u ovim se primjenama na ulaz modela umjesto izlaza iz procesa dovodi izlaz iz modela. Zbog nelinearnosti NARX1 modela teško je provjeriti je li njegovo vladanje u takvim slučajevima stabilno, dok je stabilnost NARX2 modela jednostavno odrediti provjerom položaja polova linearnog dijela modela. Nelinearni se dio NARX2 modela može promatrati kao promjenljivo pojačanje linearnog dijela modela. Sva navedena svojstva čine NARX2 model prvim nelinearnim modelom kojega treba isprobati, nakon što se testovima nelinearnosti utvrdi da nije moguće koristiti linearni model.

Ako NARX2 model ne daje zadovoljavajući opis procesa moguće je, prije primjene općeg NARX1 modela (5-19), pokušati primijeniti model procesa koji je, kao i NARX2 model, zasnovan na pretpostavci da je smetnja aditivna, ali dodatno i na pretpostavci da je varijanca smetnje promjenljiva, to jest da ovisi o radnoj točki u kojoj se proces nalazi. Ova je pretpostavka razumna jer u nekim radnim točkama razina smetnje može biti prilično mala, a u drugim može biti i vrlo velika. Uz ovu pretpostavku, model smetnje (5-23) poprima oblik:

$$\underline{z}(k) = \underline{C}(q, \underline{u}^{k-1}) \underline{\xi}(k), \quad (5-27)$$

gdje je $\underline{C}(q, \underline{u}^{k-1})$ linearni filtar s parametrima ovisnim o radnoj točki procesa.

Prediktor za model dan izrazima (5-22) i (5-27) glasi:

$$\hat{\underline{y}}(k) = [\underline{I} - \underline{C}^{-1}(q, \underline{u}^{k-1})] \underline{y}(k) + \underline{C}^{-1}(q, \underline{u}^{k-1}) \underline{f}_{N2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2). \quad (5-28)$$

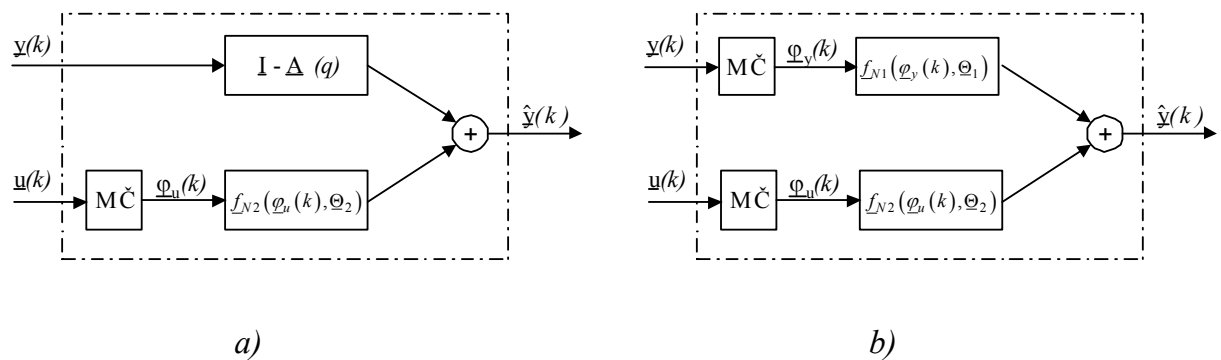
Ovisnost je filtra $\underline{C}(q, \underline{u}^{k-1})$ o radnoj točki općenito nelinearna, pa se i prvi dio prediktora (5-28) mora promatrati kao nelinearna funkcija prošlih mjernih vrijednosti ulaznih i izlaznih signala procesa. Prema tome, prediktor (5-28) predstavlja zbroj dvaju nelinearnih dijelova, odnosno dviju nelinearnih regresija:

$$\hat{\underline{y}}(k) = \underline{f}_{N1}([\underline{\varphi}_y^T(k) \ \underline{\varphi}_u^T(k)]^T, \underline{\Theta}_1) + \underline{f}_{N2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2). \quad (5-29)$$

Prvi dio modela (5-29) ima isti oblik kao model (5-20), pa ovaj model izgleda općenitiji od NARX1 modela. Ipak, ponekad i njegova primjena može biti opravdana, jer funkcije $\underline{f}_{N1}(\underline{\varphi}(k), \underline{\Theta}_1)$ i $\underline{f}_{N2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2)$ mogu imati manju dimenziju od funkcije $\underline{f}_N(\underline{\varphi}(k), \underline{\Theta})$ kod NARX1 modela. Osim toga, ako je ovisnost funkcije \underline{f}_{N1} o $\underline{\varphi}_u(k)$ slabo izražena, prediktor (5-29) može se svesti na znatno prihvatljiviji oblik:

$$\hat{\underline{y}}(k) = \underline{f}_{N1}(\underline{\varphi}_y(k), \underline{\Theta}_1) + \underline{f}_{N2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2). \quad (5-30)$$

Model (5-30) također je NARX model i nazvat ćemo ga NARX3 modelom (Sl. 5.4.b)). Model NARX3 je po složenosti, pa dakle i po fleksibilnosti, između NARX2 i NARX1 modela. Osim što može modelirati proces s manjim brojem parametara od NARX1 modela, glavna mu je prednost što omogućuje jednostavnije projektiranje regulatora zasnovanih na modelu procesa, primjerice prediktivnih regulatora. Naime, pri projektiranju takvih regulatora potrebno je izračunavati derivaciju izlaza modela procesa po trenutačnoj vrijednosti ulaza u model, a to je znatno jednostavnije kod NARX3 nego kod NARX1 modela.



Sl. 5.4. Blokowska shema prediktora NARX2 (a)) i NARX3 (b)) modela procesa.

Strukture NARX modela procesa oblika (5-25) i (5-30) predložili su također Narendra i Parthasarthy (1990). Dodatno, oni su predložili i strukturu modela koja je nelinearna po prošlim vrijednostima izlaznih signala procesa, a linearna po prošlim vrijednostima ulaznih signala procesa. Međutim, njihovo se polazište nije temeljilo na pretpostavkama vezanim za svojstva smetnje, već na *ad hoc* pretpostavkama vezanim za strukturu procesa.

Uvodeći razne pretpostavke, moguće je doći do velikog broja raznih modela NARX strukture. Međutim, predloženi su samo modeli koji smanjuju složenost postupka estimacije parametara modela u odnosu na opći NARX1 model, uz očuvanje jednostavnosti primjene statičkih neuronskih mreža.

NOE modeli

NOE modeli se dobiju iz NARX modela zamjenom vektora izlaznih signala procesa $\underline{y}(k)$ vektorom izlaznih signala modela procesa $\hat{\underline{y}}(k)$. Dakle, na osnovi općeg NARX1 modela (5-19) dobije se opći NOE model (model NOE1):

$$\underline{y}(k) = f(\underline{u}^{k-1}, \hat{\underline{y}}^{k-1}) + \underline{\xi}(k), \quad (5-31)$$

odnosno odgovarajući prediktor (Sl. 5.5.):

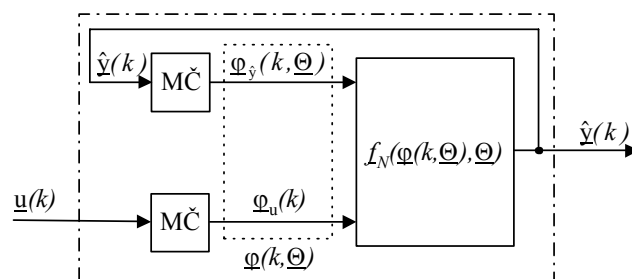
$$\hat{\underline{y}}(k) = f_N(\underline{\varphi}(k, \underline{\Theta}), \underline{\Theta}) = f_N([\underline{\varphi}_u^T(k) \quad \underline{\varphi}_y^T(k, \underline{\Theta})]^T, \underline{\Theta}), \quad (5-32)$$

gdje je:

$$\underline{\varphi}(k, \underline{\Theta}) = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_u^T(k) & \underline{\varphi}_y^T(k, \underline{\Theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{u}^T(k-1), \dots, \underline{u}^T(k-n_f), \hat{\underline{y}}^T(k-1), \dots, \hat{\underline{y}}^T(k-n_f) \end{bmatrix}^T - \quad (5-33)$$

- regresijski vektor dimenzije $n(\varphi) = \sum_{j=1}^{n(u)} n_b(j) + \sum_{i=1}^{n(\hat{y})} n_f(i)$;

$\underline{n}_f = [\underline{n}_f(1), \dots, \underline{n}_f(n(\hat{y}))]^T$ - vektor broja korištenih prošlih vrijednosti izlaznih signala procesa u regresijskom vektoru.



Sl. 5.5. Blokovska shema prediktora općeg NOE modela (NOE1 modela) procesa.

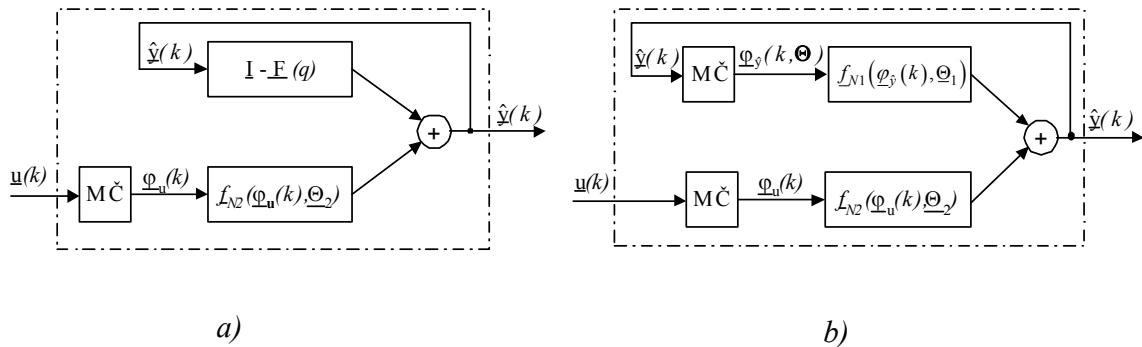
Na isti se način svi predloženi NARX modeli mogu pretvoriti u odgovarajuće NOE modele. Iz NARX2 modela (5-25) dobije se odgovarajući NOE2 model (Sl. 5.6.a)):

$$\hat{y}(k) = [I - C(q)]\hat{y}(k) + f_{N2}(\varphi_u(k), \Theta_2) = -F_1\hat{y}(k-1) - \dots - F_{n_f}\hat{y}(k-n_f) + f_{N2}(\varphi_u(k), \Theta_2) \quad (5-34)$$

a iz NARX3 modela (5-30) odgovarajući NOE3 model (Sl. 5.6.b)):

$$\hat{y}(k) = f_{N1}(\varphi_{\hat{y}}(k, \Theta_1), \Theta_1) + f_{N2}(\varphi_u(k), \Theta_2). \quad (5-35)$$

Budući da NOE modeli modeliraju samo dinamiku procesa, a ne i smetnju, razlika među njima može biti samo rezultat različitih pretpostavki na strukturu procesa, a nikako ne na svojstva smetnje.



Sl. 5.6. Blokovska shema prediktora NOE2 (a)) i NOE3 (b)) modela procesa.

Sa stajališta primjene statičkih neuronskih mreža najzanimljiviji je NOE2 model (5-34) jer u nelinearnom članu, kojeg se aproksimira neuronskom mrežom, nema povratnog djelovanja.

NARMAX i NBJ modeli

Kao što je već rečeno, NARX se modeli mogu smatrati općim modelima nelinearnih dinamičkih procesa jer opisuju i svojstva smetnje. Međutim, oni modeliraju smetnju zajedno s dinamikom procesa, što može rezultirati u potrebi primjene većeg broja regresora nego što zahtijeva dinamika procesa, odnosno u modelu s velikim brojem parametara. Zasebnim modeliranjem smetnje moguće je dobiti modele s manjim brojem regresora, odnosno parametara modela. Zasebno modeliranje smetnje omogućuju modeli NARMAX i NBJ strukture, koji predstavljaju poopćenja lineranih modela ARMAX i BJ strukture.

Opći NARMAX model (NARMAX1 model) dobije se proširenjem općeg NARX modela (5-19), tako da se nelinearna regresija primijeni, osim na prošlim vrijednostima izlaznih i ulaznih signala procesa, i na prošlim vrijednostima signala smetnje:

$$y(k) = f(y^{k-1}, u^{k-1}, \xi^{k-1}) + \xi(k). \quad (5-36)$$

Prediktor za (5-36) glasi (Sl. 5.7.):

$$\hat{y}(k) = f_N(\varphi(k, \Theta), \Theta) = f_N([\varphi_y^T(k), \varphi_u^T(k), \varphi_\xi^T(k, \Theta)]^T, \Theta), \quad (5-37)$$

gdje je:

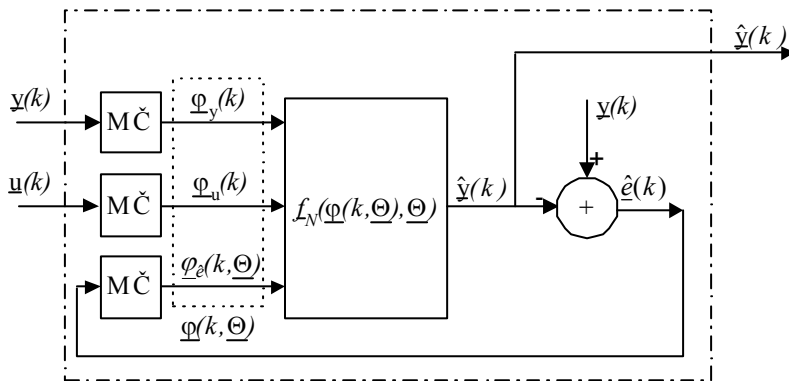
$$\underline{\varphi}(k) = \left[\underline{\varphi}_y^T(k), \underline{\varphi}_u^T(k), \underline{\varphi}_e^T(k) \right]^T = \left[\underline{y}^T(k-1), \dots, \underline{y}^T(k-n_a), \underline{u}^T(k-1), \dots, \underline{u}^T(k-n_b), \underline{\hat{e}}^T(k-1), \dots, \underline{\hat{e}}^T(k-n_c) \right]^T \quad (5-38)$$

- regresijski vektor dimenzije $n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n(y)} \underline{n}_a(i) + \sum_{j=1}^{n(u)} \underline{n}_b(j) + \sum_{l=1}^{n(e)} \underline{n}_c(l)$;

$\underline{n}_c = [\underline{n}_c(1), \dots, \underline{n}_c(n(e))]^T$ - vektor broja korištenih prošlih vrijednosti predikcijske pogreške u regresijskom vektoru.

Kao regresori u prediktoru NARMAX modela koriste se prošle vrijednosti predikcijske pogreške umjesto prošlih vrijednosti signala smetnje, jer su ove nedostupne (nemjerljive).

Postupak estimacije parametara NARMAX1 modela (5-37) znatno je složeniji nego modela NARX strukture, što je posljedica ovisnosti grupe regresora $\underline{\varphi}_e(k, \underline{\Theta})$ o parametrima modela.



Sl. 5.7. Blokovska shema prediktora NARMAX modela procesa.

S obzirom da je znatno teže dobiti dobar model smetnje nego dinamike procesa, važnije je i ograničiti njegovu fleksibilnost. Uvođenjem pretpostavke da su signali smetnje aditivni, ne nužno sa svojstvima bijelog šuma, ali s nepromjenljivom varijancom, NARMAX model poprima oblik:

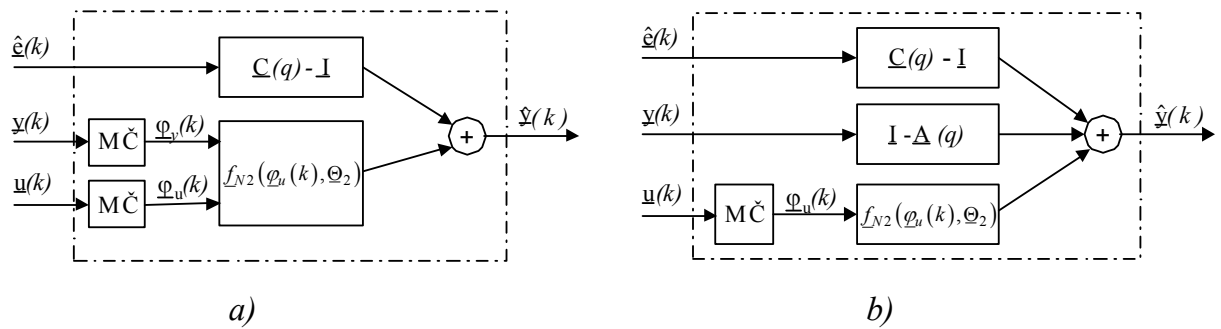
$$\underline{y}(k) = \underline{f}_1(\underline{y}^{k-1}, \underline{u}^{k-1}) + \underline{C}(q)\underline{\xi}(k), \quad (5-39)$$

a prediktor (5-37):

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{f}_{N1}([\underline{\varphi}_y^T(k), \underline{\varphi}_u^T(k)]^T, \underline{\Theta}_1) + [\underline{C}(q) - \underline{I}]\underline{\hat{e}}(k). \quad (5-40)$$

Model (5-39) odnosno (5-40) nazvat ćemo NARMAX2 modelom (Sl. 5.8.a)). On se može promatrati kao model NARX strukture s linearnim modelom smetnje dodanim na izlazu. Naravno, u modelu (5-39) moguće je koristiti bilo koji model iz grupe NARX modela. Primjerice, ako se koristi NARX2 model, prediktor (5-40) poprima sljedeći oblik (model NARMAX3, Sl. 5.8.b)):

$$\underline{\hat{y}}(k) = \underline{f}_{N2}(\underline{\varphi}_u(k), \underline{\Theta}_2) + [\underline{I} - \underline{A}(q)]\underline{y}(k) + [\underline{C}(q) - \underline{I}]\underline{\hat{e}}(k). \quad (5-41)$$



Sl. 5.8. Blokovska shema prediktora NARMAX2 (a)) i NARMAX3 modela procesa (b)).

NBJ model se dobije proširenjem NOE modela (5-31) tako da se nelinearna regresija primijeni, osim na prošlim vrijednostima ulaza procesa i izlaza modela procesa, i na prošlim vrijednostima signalâ smetnje:

$$\underline{y}(k) = f(\underline{u}^{k-1}, \underline{\hat{y}}_s^{k-1}, \underline{\xi}^{k-1}) + \underline{\xi}(k), \quad (5-42)$$

gdje je $\underline{\hat{y}}_s^{k-1}$ tzv. simulirani izlaz procesa, odnosno izlaz NOE modela procesa.

Primjenom istih regresora kao i za BJ model, dobije se prediktor za NBJ model (Sl. 5.9.):

$$\underline{\hat{y}}(k) = f_N(\underline{\varphi}(k, \underline{\Theta}), \underline{\Theta}) = f_N([\underline{\varphi}_u^T(k), \underline{\varphi}_{\hat{y}_s}^T(k, \underline{\Theta}), \underline{\varphi}_e^T(k, \underline{\Theta}), \underline{\varphi}_{e_s}^T(k, \underline{\Theta})]^T, \underline{\Theta}), \quad (5-43)$$

gdje je:

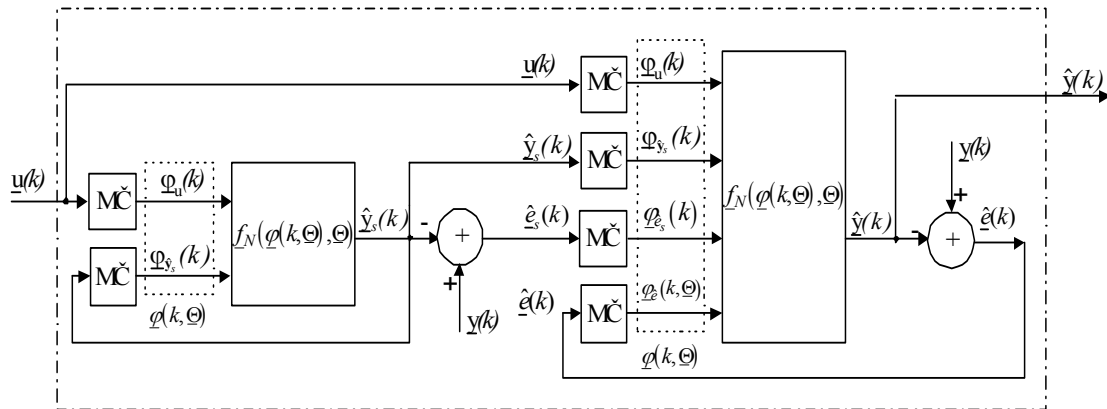
$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(k, \underline{\Theta}) &= [\underline{\varphi}_u^T(k), \underline{\varphi}_{\hat{y}_s}^T(k, \underline{\Theta}), \underline{\varphi}_e^T(k, \underline{\Theta}), \underline{\varphi}_{e_s}^T(k, \underline{\Theta})]^T = \\ &= [\underline{u}^T(k-1), \dots, \underline{u}^T(k-n_b), \underline{\hat{y}}_s^T(k-1), \dots, \underline{\hat{y}}_s^T(k-n_f), \underline{\hat{e}}^T(k-1), \dots, \underline{\hat{e}}^T(k-n_c), \underline{\hat{e}}_s^T(k-1), \dots, \underline{\hat{e}}_s^T(k-n_d)]^T \end{aligned} \quad (5-44)$$

- regresijski vektor dimenzije $n(\varphi) = \sum_{i=1}^{n(u)} \underline{n}_b(i) + \sum_{j=1}^{n(\hat{y}_s)} \underline{n}_f(j) + \sum_{l=1}^{n(e)} \underline{n}_c(l) + \sum_{q=1}^{n(e_s)} \underline{n}_d(q)$;

$\underline{n}_d = [\underline{n}_d(1), \dots, \underline{n}_d(n(e_s))]^T$ - vektor broja korištenih prošlih vrijednosti simulirane predikcijske pogreške (2-37) u regresijskom vektoru.

Usporedbom blokovskih prikaza NBJ modela (Sl. 5.9.) i NOE modela (Sl. 5.5.) jasno se vidi da pomoćna varijabla $\hat{y}_s(k)$ predstavlja izlaz NOE modela procesa, a izračunava se prema izrazu (5-43) s tim da se na mjestu regresora $\hat{e}(k-i)$ i $\hat{e}_s(k-i)$ upišu nule.

Različite modele NBJ grupe modela moguće je dobiti na isti način kao što su dobiveni različiti modeli ostalih grupa modela.



Sl. 5.9. Blokovska shema prediktora NBJ modela procesa.

Iz provedenih razmatranja jasno proizlazi da NFIR i NARX modeli nemaju povratnog djelovanja, to jest regresijski im vektori ne ovise o parametrima modela. Drugim riječima, signali se kroz model prostiru isključivo od ulaza prema izlazu modela. Prema tome, NFIR i NARX modeli strukturno odgovaraju statičkim (unaprijednim) neuronskim mrežama i omogućuju njihovu jednostavnu primjenu.

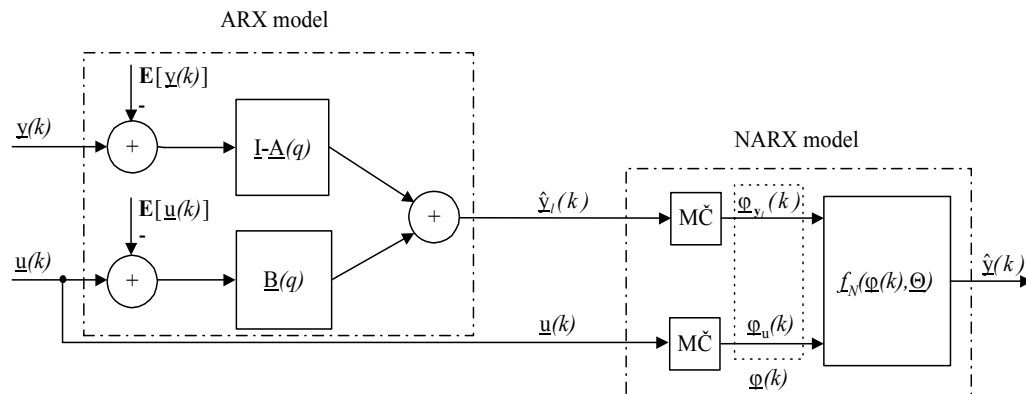
Za razliku od NFIR i NARX modela, NOE, NARMAX i NBJ modeli jesu modeli s povratnim djelovanjem jer im dio regresora ovisi o parametrima modela. Prema tome, ovi modeli strukturno odgovaraju povratnim neuronskim mrežama (*engl.* recurrent neural networks). Kao što je već rečeno znatno je teže raditi s povratnim neuronskim mrežama. Prije svega, teško je odrediti uvjete stabilnosti dobivenoga predikcijskog modela. K tome, postupak estimacije parametara modela postaje znatno složeniji jer se usložnjava izračunavanje gradijenta kriterija kakvoće po parametrima modela (neuronske mreže), koji kod povratnih modela postaje dinamička funkcija.

Ipak, statičke je neuronske mreže moguće primijeniti i za dobivanje nekih modela s povratnim djelovanjem. To se prije svega odnosi na NOE2 i NARMAX2 modele, kod kojih je povratno djelovanje ostvareno kao pseudolinearna regresija, dok je nelinearna regresija primijenjena samo nad regresorima koji ne ovise o parametrima modela.

Neke nestandardne strukture nelinearnih ulazno-izlaznih modela procesa

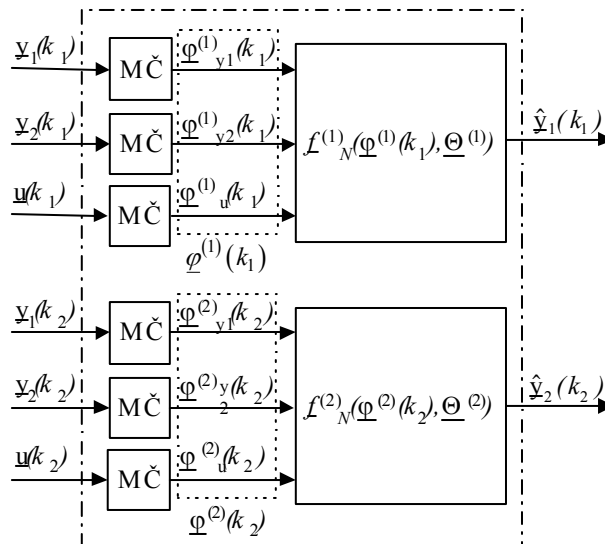
Moguća struktura nelinearnih ulazno-izlaznih modela procesa je struktura koju sačinjavaju i linearni i nelinearni model. Prvo se odredi najbolji linearni model procesa, a zatim se njegov izlaz koristi kao regresor za nelinearni model procesa. Primjerice, moguće je prvo odrediti najbolji ARX model, a zatim primijeniti NARX

model za modeliranje nelinearnosti sadržanih u njegovoj pogrešci. Blokovska shema takvog modela procesa (ARX-NARX model procesa) prikazana je na slici 5.10.



Sl. 5.10. ARX-NARX model procesa.

Svi su opisani nelinearni modeli procesa jednako primjenljivi za SISO i MIMO procese. Međutim, kada se identificira MIMO proces kod kojeg su neke procesne varijable brzo, a neke sporo promjenljive, moglo bi biti teško dobiti zadovoljavajući model procesa, osobito s razumnim brojem parametara. Osnovnu poteškoću predstavlja izbor perioda uzorkovanja. Naime, s jedne se strane zahtijeva dovoljno kratki period uzorkovanja da se mogu modelirati brzo promjenljive procesne veličine, a s druge strane dovoljno dugački period uzorkovanja da regresijski vektor sporo promjenljivih veličina bude razumne dimenzije. Ovaj se problem može izbjeći modeliranjem procesa s dva paralelna modela: jedan modelira sporo promjenljivi, a drugi brzo promjenljivi dio procesa. Periodi se uzorkovanja ovih modela međusobno razlikuju i izabiru se u skladu s dinamikom dijela procesa kojeg modeliraju. Kako bi se pojednostavila implementacija modela, preporuča se period uzorkovanja modela koji modelira sporo promjenljivi dio procesa izabrati kao cjelobrojni višekratnik perioda uzorkovanja modela koji modelira brzo promjenljivi dio procesa. Struktura svakog od ovih modela može biti bilo koja od prethodno opisanih. Na slici 5.11. prikazana je mogućnost modeliranja MIMO procesa s dva NARX modela (2NARX model procesa). Oznaka k_1 označava vremenski trenutak $t=k_1T_1$, gdje je T_1 period uzorkovanja brzo promjenljivog dijela procesa, a oznaka k_2 vremenski trenutak $t=k_2T_2$, gdje je T_2 period uzorkovanja sporo promjenljivog dijela procesa.



Sl. 5.11. 2NARX model MIMO procesa.

5.4. Modeli nelinearnih dinamičkih procesa u prostoru stanja

U identifikaciji procesa najčešće se koriste ulazno-izlazni modeli procesa. Međutim, ponekad može biti prikladnije koristiti model procesa u prostoru stanja. Za nelinearne vremenski nepromjenljive procese opći model procesa u prostoru stanja (5-4) poprima oblik:

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \underline{g}(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{w}(k)), \\ \underline{y}(k) &= \underline{h}(\underline{x}(k), \underline{u}(k)) + \underline{\xi}(k).\end{aligned}\quad (5-45)$$

Problem identifikacije procesa opisanog modelom (5-45) svodi se na pronalaženje parametriranih aproksimacijskih funkcija funkcijama \underline{g} i \underline{h} . Prediktor za model (5-45) glasi:

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}(k+1) &= \underline{g}_N(\hat{\underline{x}}(k, \underline{\Theta}_g), \underline{u}(k), \underline{\Theta}_g), \\ \hat{\underline{y}}(k) &= \underline{h}_N(\hat{\underline{x}}(k, \underline{\Theta}_g), \underline{u}(k), \underline{\Theta}_h).\end{aligned}\quad (5-46)$$

Dva su glavna problema kod nalaženja prediktora (5-46): izbor varijabli stanja $\hat{\underline{x}}$ i povratno djelovanje u prvoj jednadžbi modela. Prvi problem čini izbor strukture modela u prostoru stanja znatno složenijim od izbora strukture ulazno-izlaznih modela, dok drugi problem čini znatno složenijim postupak estimacije parametara nego, primjerice, kod NARX modela. Postavlja se pitanje: ima li model u prostoru stanja nekih prednosti koje kompenziraju ove njegove nedostatke?

Korisno je najprije usporediti model u prostoru stanja s ulazno-izlaznim modelima za linearne dinamičke procese. Linearni model u prostoru stanja glasi:

$$\begin{aligned}\underline{x}(k+1) &= \underline{\Phi}\underline{x}(k) + \underline{\Gamma}\underline{u}(k), \\ \underline{y}(k) &= \underline{C}\underline{x}(k) + \underline{D}\underline{u}(k).\end{aligned}\quad (5-47)$$

Ovaj se model može, kao i ulazno-izlazni OE, ARMAX i BJ modeli, prikazati kao pseudolinearna regresija (5-15), ako se varijable stanja prikažu kao tzv. virtualni

izlazi procesa koji se koriste samo za generiranje regresora. Dodajući vektor varijabli stanja vektoru stvarnih izlaza procesa dobije se novi, prošireni vektor izlaza:

$$\underline{o}(k) = \begin{bmatrix} \underline{o}_1(k) \\ \underline{o}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ x(k+1) \end{bmatrix}. \quad (5-48)$$

Uvrštenjem (5-47) u (5-48) slijedi:

$$\underline{o}(k) = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{D} \\ \underline{\Phi} & \underline{\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{D} \\ \underline{\Phi} & \underline{\Gamma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{o}_2(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix} = \underline{\Theta}^T \cdot \underline{\varphi}(k, \underline{\Theta}). \quad (5-49)$$

Vidljivo je da se virtualni izlazi \underline{o}_2 koriste samo kao regresori. Ovime je pokazano da se linearni model u prostoru stanja može promatrati kao specijalni ulazno-izlazni model. Međutim, u usporedbi s linearnim ulazno-izlaznim modelima, model u prostoru stanja može, u nekim slučajevima, opisati vladanje procesa s manjim brojem regresora, odnosno parametara modela, uz numerički stabilniji postupak estimacije parametara modela.

Kao što je pokazano u potpoglavlju 5.3, ulazno-izlazni NARX model (5-20) može opisati široku klasu nelinearnih dinamičkih procesa, pa je zanimljivo usporediti ga s modelom u prostoru stanja (5-46). Radi pojednostavnjenja označavanja usporedit ćemo modele za SISO procese. Model za SISO procese može se napisati na sljedeći način:

$$\hat{y}(k) = f_N(\underline{\varphi}(k), \underline{\Theta}), \quad (5-50)$$

$$\underline{\varphi}(k) = [\underline{\varphi}_y^T(k) \ \underline{\varphi}_u^T(k)]^T = [y(k-1), \dots, y(k-n_a), u(k-1), \dots, u(k-n_b)]^T. \quad (5-51)$$

Ako se definira vektor varijabli stanja:

$$\underline{x}(k) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(k) \\ \underline{x}_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [y(k-1), \dots, y(k-na)]^T \\ [u(k-1), \dots, u(k-nb)]^T \end{bmatrix}, \quad (5-52)$$

NARX model u prostoru stanja poprima oblik:

$$\underline{x}_1(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_1(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} y(k), \quad (5-53)$$

$$\underline{x}_2(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_2(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(k), \quad (5-54)$$

$$\hat{y}(k) = f_N(\underline{x}(k), \underline{\Theta}). \quad (5-55)$$

Na isti se način mogu i ostali ulazno-izlazni modeli pretvoriti u odgovarajuće modele u prostoru stanja.

Model (5-52)-(5-55) predstavlja specijalni slučaj općega modela u prostoru stanja (5-46), pa se sa sigurnošću može tvrditi da opći model u prostoru stanja (5-46)

može opisati najmanje istu klasu nelinearnih procesa kao i NARX model. Kao što je vidljivo, jednačbe (5-53) i (5-54) su linearne i s nepromjenljivim parametrima pa se ne mogu smatrati pravim jednačbama stanja, već samo jednim od načina izbora regresora za ulazno-izlazni model opisan izlaznom jednačbom (5-55). Pod pravim se nelinearnim modelom u prostoru stanja može smatrati samo onaj model kod kojega, osim izlazne jednačbe, i jednačbe stanja sadrže promjenljive parametre, kao što je slučaj kod općega modela u prostoru stanja (5-46). Prema tome, fleksibilnost modela u prostoru stanja raspodijeljena je između jednačbi stanja i izlazne jednačbe, za razliku od ulazno-izlaznih modela kod kojih su regresori unaprijed izabrani, a sva je fleksibilnost modela sadržana u izlaznoj jednačbi.

DODATAK

D1. Volterraov model procesa

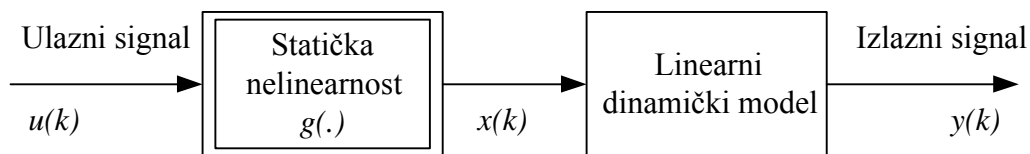
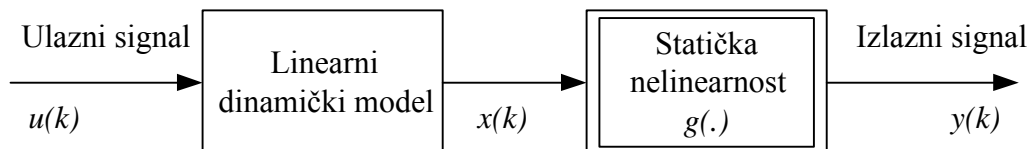
Primjenom višedimenzionalnog Taylorova razvoja funkcije $y(k)=f(u^{k-1})$ u red (Volterraov red) može se pisati:

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) = & \sum_{i_1=0}^{k-1} g_1(i_1)u(k-i_1) + \sum_{i_1=0}^{k-1} \sum_{i_2=0}^{i_1} g_2(i_1, i_2)u(k-i_1)u(k-i_2) + \\ & + \dots + \sum_{i_1=0}^{k-1} \dots \sum_{i_l=0}^{i_{l-1}} g_l(i_1, i_2, \dots, i_l)u(k-i_1)u(k-i_2) \dots u(k-i_l) + \dots \end{aligned} \quad (D-1)$$

Ovaj se oblik naziva diskretni **Volterraov** red neograničenog stupnja. Funkcije $g_1(i_1)$, $g_2(i_1, i_2), \dots, g_L(i_1, \dots, i_L)$ nazivaju se **Volterraovi kerneli**. Funkcija $g_1(i_1)$ predstavlja jedinični impulsni odziv linearnog procesa. Funkcije $g_j(\cdot)$ ($j > 1$) nazivaju se jediničnim impulsnim funkcijama j -tog stupnja. Dakle, Volterraov model predstavlja poopćenje opisa linearnog procesa pomoću konvolucijske sume (prvi član Volterraovog reda). Ograničenjem broja članova Volterraovog reda na L dobije se konačni Volterraov red L -tog stupnja, koji predstavlja specijalan oblik NFIR modela procesa. PROBLEM: Veliki broj parametara!

Blokovski modeli nelinearnih procesa

Kod nekih je nelinearnih procesa nelinearnost statičkog karaktera, dok je sama dinamika linearna (npr. pH procesi, destilacijski procesi, izmjenjivači topline). Vlananje takvih procesa moguće je opisati tzv. kaskadnim blokovskim modelom koji se sastoji od bloka sa statičkom nelinearnošću i bloka s linearnim dinamičkim modelom. Model kod kojeg statička nelinearnost prethodi linearnome dinamičkom modelu naziva se Hammersteinovim modelom, a model kod kojega linearni dinamički model prethodi statičkoj nelinearnosti Wienerovim modelom.

Hammersteinov model:**Wienerov model:**

Hammersteinovi i Wienerovi modeli predstavljaju poopćenje “gain-scheduling” koncepta za upravljanje nelinearnim procesima i smještaju ga u okvir identifikacije procesa. Drugim riječima, statička nelinearnost opisuje ovisnost pojačanja procesa o radnoj točki.

Statička se nelinearnost može modelirati raznim nelinearnim funkcijama, uz ograničenje da se primijenjenoj nelinearnoj funkciji $g(\cdot)$ može odrediti inverzna funkcija $g^{-1}(\cdot)$. Na taj se način omogućuje primjena linearnih regulatora za upravljanje nelinearnim procesima.

Najčešće se kao nelinearna funkcija koristi polinomska funkcija, a u posljednje se vrijeme sve češće primjenjuju neuronske mreže.

Kao linearni dinamički model najčešće se koristi ARX model.

BAZIČNA LITERATURA

1. L. Ljung, *System Identification, Theory for the User*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
2. L. Ljung, *MATLAB System Identification Toolbox User's Guide*, MathWorks, Natick, Mass., 1991.
3. R. Isermann, *Identifikation dynamischer Systeme*, Band 1, Band 2, Springer Verlag, 2. Auflage, 1992.
4. T. Söderström, P. Stoica, *System Identification*, Prentice-Hall International, Cambridge, 1989.
5. H. Unbehauen, *Identification Of Continuous Systems*, North-Holland, Amsterdam, 1987.