Završni pismeni ispit

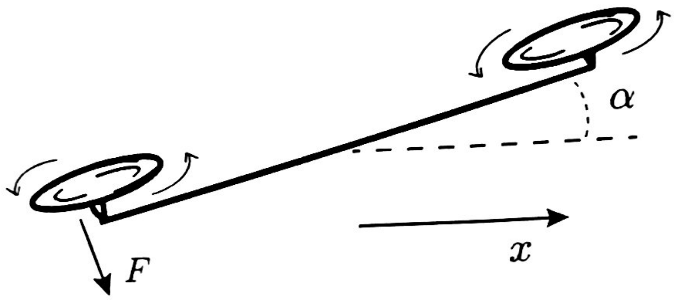
27. lipnja 2016.

Matični broj:

Ime i Prezime:

Napomena: Sve primljene materijale obvezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (12 bodova)



Na slici je prikazana višerotorska letjelica u presjeku. U nastavku razmatramo horizontalno gibanje letjelice duž x osi. Uz pretpostavku raspregnutosti gibanja po osima, gibanje letjelice duž x osi može se opisati diferencijalnom jednadžbom:

$$M\ddot{x} = -B\dot{x}^2 - F\sin\alpha$$

gdje je $M = 5\,\mathrm{kg}$ masa letjelice, $B = 1\,\mathrm{kg/m}$ je faktor otpora zraka duž horizontalne osi, F je ukupna sila potiska generirana propelerima, a α je nagib letjelice s obzirom na x os.

Ulaz u sustav je sila potiska $u = F$.

Model sustava u prostoru stanja, s varijablama stanja sustava: $\dot{x}$ - brzina gibanja duž horizontalne osi, x - položaj letjelice duž horizontalne osi, α - nagib letjelice s obzirom na horizontalnu os, dan je sljedećim izrazom

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{M}{x_1}^2 - \frac{u}{M}\sin x_3 + \omega_x \\ x_1 \\ \omega_\alpha \end{bmatrix}.$$

gdje su ω_x i ω_α procesni šumovi kao rezultat aproksimacija u opisu dinamike letjelice. Procesni šumovi ravnaju se prema $\omega_x \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $\omega_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Letjelica se nalazi u zatvorenom prostoru, u laboratorijskom okruženju, pokrivenom preciznim lokalizacijskim sustavom koji omogućuje mjerenje položaja letjelice i njenog nagiba s obzirom na horizontalnu os. Jednadžbe mjerenja dane su kako slijedi:

$$y_x = x_2 + v_x$$
$$y_\alpha = x_3 + v_\alpha$$

Mjerni šumovi ravnaju se prema $v_x \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $v_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Potrebno je:

a) *(4 boda)* Linearizirati dobiveni model oko točke $(\dot{x}_0, x_0, \alpha_0)$ (odrediti matrice A, B, C).

b) *(4 boda)* Diskretizirati linearizirani model uz vrijeme diskretizacije $T = 0.1\,\mathrm{s}$ i pretpostavku malog vremena uzorkovanja (odrediti matrice Φ, Γ, L, H i M).

c) *(4 boda)* Ako u koraku $k = 0$ vrijedi $\hat{x}_0^+ = [1\ 0\ \frac{\pi}{6}]^T$ i $P_0^+ = I$, koristeći diskretni prošireni Kalmanov filtar odredite $\hat{x}_1^-$ i P_1^-. Ulaz u sustav je $u_0 = 1\,\mathrm{N}$.

2. zadatak (6 bodova)

Zadan je skalarni sustav:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \frac{1}{4}x_{k-1} + w_{k-1},\\
y_k &= 2x_k + v_k,
\end{aligned}
$$

gdje su procesni i mjerni šum, w_{k-1} i v_k, bijeli i nekorelirani šumovi varijanci Q i R.

a) *(4 boda)* Izračunajte ustaljenu vrijednost varijance estimacije P_∞^+ i Kalmanova pojačanja K_∞ ako su $Q = 1$ i $R = 2$.

b) *(2 boda)* Je li ustaljeni diskretni Kalmanov filtar optimalan estimator za navedeni sustav? Koje su prednosti ustaljenog Kalmanovog filtra? Objasnite!

3. zadatak (12 bodova)

Za sustav opisan sljedećim jednadžbama:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \Phi_{k-1}x_{k-1} + \Gamma_{k-1}u_{k-1} + L_{k-1}w_{k-1},\\
y_k &= H_k x_k + v_k,
\end{aligned}
$$

gdje su procesni i mjerni šum, w_{k-1} i v_k, bijeli i nekorelirani šumovi varijanci Q i R, potrebno je:

a) *(5 bodova)* Izvesti jedandžbe diskretnog Kalmanovog filtra za unaprijednu estimaciju stanja sustava $\hat{x}_k^-$ i matrice kovarijanci pogreške estimacije P_k^-.

b) *(2 boda)* Pri izvodu Kalmanova pojačanja, što čini kriterijsku funkciju, tj. što točno minimizira Kalmanov filtar i na što se konačno svodi kriterij? Objasnite, nije potreban izvod!

c) *(5 bodova)* Ako je naknadna estimacija matrice kovarijanci pogreške estimacije $P_k^+ = (I-K_kH_k)P_k^-(I-K_kH_k)^\mathrm{T} + K_kR_kK_k^\mathrm{T}$, koristeći zaključak iz podzadatka b) izvedite jednadžbu za računanje optimalnog Kalmanovog pojačanja.

4. zadatak (10 bodova)

Pretpostavite da imate sustav od tri parkirna senzora koji mjere udaljenost do prepreke. Središnji parkirni senzor gleda u smjeru pravocrtnog gibanja, dok susjedna dva senzora stoje pod određenim kutom spram pravocrtnog smjera gibanja. Iz tog razloga, mjerni šum v_k ima sljedeću statistiku:

$$
v_k \sim (0, R), \qquad R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

Pretpostavlja se pravocrtno gibanje uz poznatu upravljačku vrijednost te nesigurnost zbog nesavršenosti prijenosnog mehanizma te imamo sljedeću jednadžbu sustava (x_k je estimirana udaljenost do prepreke):

$$
x_k = x_{k-1} + u_{k-1} + w_{k-1},
$$

gdje je w_{k-1} procesni šum varijance $Q = 1$, a u_{k-1} je upravljačka varijabla. Potrebno je:

a) *(1.5 bodova)* Napisati jednadžbu mjerenja ovog sustava u matričnom obliku. Čemu je jednaka matrica mjerenja H?

b) *(3 boda)* Izračunajte unaprijednu estimaciju stanja sustava $\hat{x}_k^-$ i pripadajuće sigurnosti $\mathcal{I}_k^-$ za trenutak $k = 1$, ako su $\hat{x}_0^+ = 1\,\mathrm{m}$, $u_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ te $P_0^+ = I$.

c) *(4 boda)* Izračunajte naknadnu estimaciju stanja sustava $\hat{x}_k^+$ i pripadajuće sigurnosti $\mathcal{I}_k^+$ za trenutak $k = 1$, ako su dobivena mjerenja $y_1 = 1.2\,\mathrm{m}$, $y_2 = 1.1\,\mathrm{m}$ i $y_3 = 1.15\,\mathrm{m}$. Indeksi mjerenja odgovaraju stupcima matrice kovarijanci R.

d) *(1.5 bodova)* Komentirajte kako biste projektirali sustav upozorenja vozaču, ako želite s određenom sigurnošću tvrditi da automobil neće udariti u prepreku?