Završni ispit

1. srpnja 2009.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (4 boda)

Zadan je skalarni sustav:

$$x_{k+1} = x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi nepoznatih varijanci (Q i R). Stoga je za estimaciju stanja korišteno ustaljeno (podoptimalno) pojačanje K_∞.

Izrazite ustaljenu vrijednost P_∞^- kao funkciju ustaljenog Kalmanova pojačanja K_∞ i stvarnih vrijednosti Q i R.

Naputak: Koristite prvi oblik izraza za P_k^+ diskretnog Kalmanova filtra.

$P_\infty^- =$ (a) $\frac{RK_\infty^2+Q}{2K_\infty-K_\infty^2}$, b) $\frac{QK_\infty^2+R}{2K_\infty-K_\infty^2}$, c) $\frac{RK_\infty^2+Q}{2-K_\infty}$, d) $\frac{RK_\infty^2-Q}{2K_\infty+K_\infty^2}$, e) $\frac{RK_\infty+Q}{2-K_\infty}$.

2. zadatak (6 bodova)

Razmotrimo skalarni sustav sa sljedećom jednadžbom mjerenja:

$$y_k = x_k^2 + v_k.$$

U koraku k, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $\hat{x}_k^- = 1$. Stvarno stanje je $x_k = 5$, a mjerenje iznosi $y_k = 25$. Unaprijedna (*a priori*) varijanca pogreške estimacije iznosi $P_k^- = 1$, a varijanca mjernog šuma iznosi $R_k = 4$.

Iterativnim EKF algoritmom odredite $\hat{x}_{k,1}^+$ i $\hat{x}_{k,2}^+$.

(3 boda) $\hat{x}_{k,1}^+ =$ a) 2.3, b) 4.8, c) 3.4, (d) 7, e) 6.1 .

(2 boda) $\hat{x}_{k,2}^+ =$ a) 1.2, b) 4.3, c) 3.6, (d) 5.2, e) 7.2 .

(1 bod) Poboljšava li se naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja? (a) Da. b) Ne.

3. zadatak (5 bodova)

Radioaktivna masa ima vrijeme poluraspada τ sekundi. U svakom koraku uzorkovanja, broj emitiranih čestica x jednak je polovici broja čestica emitiranih u prethodnom koraku. Međutim, u tom procesu postoji određena pogreška uzrokovana pozadinskom radijacijom, koju možemo modelirati šumom w_k nulte očekivane vrijednosti i varijance Q_k ($w_k \sim N(0, Q_k)$). U svakom koraku uzorkovanja, dvama različitim instrumentima je određen broj emitiranih čestica y. Pogreška koju instrumenti prilikom mjerenja rade može se opisati slučajnom varijablom srednje vrijednosti nula i jedinične varijance.

Početna je nesigurnost broja radioaktivnih čestica slučajna varijabla varijance 4 i srednje vrijednosti nula.

Koristeći informacijski filtar izračunajte *a priori* i *a posteriori* informacijsku matricu u koracima $k = 1$ i $k = 2$. Uzmite da je $Q_0 = Q_1 = 2$.

(2 boda) $\mathcal{I}_1^- =$ a) 0.2, b) $\frac{1}{2}$, (c) $\frac{1}{3}$. $\mathcal{I}_1^+ =$ a) $\frac{1}{6}$, (b) $\frac{7}{3}$, c) $\frac{4}{3}$.

(3 boda) $\mathcal{I}_2^- =$ (a) $\frac{28}{59}$, b) $\frac{36}{56}$, c) $\frac{36}{53}$. $\mathcal{I}_2^+ =$ a) 2, (b) $\frac{146}{59}$, c) $\frac{171}{56}$.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Pri rješavanju zadatka koriste se izrazi diskretnog Kalmanova filtra. Izraz (9-47) iz predavanja.

$$P_k^- = \Phi_{k-1} P_{k-1}^+ \Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}.$$

Koristi se prvi oblik izraza za P_k^+:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k.$$

Za ustaljeno stanje i za zadani skalarni sustav:

$$x_{k+1} = x_k + w_k,$$
$$y_k = x_k + v_k,$$

izrazi prelaze u:

$$P_\infty^- = P_\infty^+ + Q,$$
$$P_\infty^+ = (1 - K_\infty)^2 P_\infty^- + K_\infty^2 R.$$

Uvrštavanjem drugog izraza u prvi dobivamo:

$$P_\infty^- = (1 - K_\infty)^2 P_\infty^- + K_\infty^2 R + Q,$$
$$P_\infty^- = \frac{K_\infty^2 R + Q}{2K_\infty - K_\infty^2}.$$

Zadatak 2

U prvoj iteraciji izvršimo standardne jednadžbe D-EKF-a. Izrazi od (10-89) do (10-94) predavanja.

$$H_{k,0} = 2\hat{x}_k^- = 2$$
$$K_{k,0} = \frac{P_k^- H_{k,0}}{P_k^- H_{k,0}^2 + R_k} = \frac{1}{4}$$
$$P_{k,1}^+ = P_k^- - K_{k,0} H_{k,0} P_k^- = \frac{1}{2}$$
$$\hat{x}_{k,1}^+ = \hat{x}_k^- + K_{k,0}\left[y_k - (\hat{x}_k^-)^2\right] = 7$$

Slijedi druga iteracija (IDEKF). Izrazi od (10-104) do (10-110) predavanja.

$$H_{k,1} = 2\hat{x}_{k,1}^+ = 14$$
$$K_{k,1} = \frac{P_k^- H_{k,1}}{P_k^- H_{k,1}^2 + R_k} = \frac{7}{100}$$
$$P_{k,2}^+ = P_k^- - K_{k,1} H_{k,1} P_k^- = \frac{1}{50}$$
$$\hat{x}_{k,2}^+ = \hat{x}_k^- + K_{k,1}\left[y_k - (\hat{x}_{k,1}^+)^2 - K_{k,1}(\hat{x}_k^- - \hat{x}_{k,1}^+)\right] = 5.2$$

Očito je da se u ovom slučaju poboljšava naknadna (*a posteriori*) estimacija stanja.

Zadatak 3

Tekstom opisan sustav glasi:

$$\Phi = \frac{1}{2}$$
$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{I}_0^+ = (P_0^+)^{-1} = \frac{1}{4}$$

Uvrštavanjem u jednadžbe informacijskog filtra (11-25) i (11-26) iz predavanja

$$\mathcal{I}_k^- = \left[\Phi_{k-1}(\mathcal{I}_{k-1}^+)^-1\Phi_{k-1}^T + Q_{k-1}\right]^{-1},$$
$$\mathcal{I}_k^+ = \mathcal{I}_k^- + H^T R^{-1} H,$$

dobiva se:

$$\mathcal{I}_1^- = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + 2\right]^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$\mathcal{I}_1^+ = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$
$$\mathcal{I}_2^- = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{7}{3}\right)^{-1} + 2\right]^{-1} = \frac{28}{59}$$
$$\mathcal{I}_2^+ = \frac{28}{59} + 2 = \frac{146}{59}$$