Ljetni ispitni rok 2015/2016

by: docx ;)

1. **(10 bodova)** Za identifikaciju frekvencijske karakteristike $G(jw) = \frac{Y(jw)}{U(jw)}$ koristi se signal bijelog šuma *u* prema shemi na slici 1. Spektralna snaga bijelog šuma definirana je sljedećim izrazom:

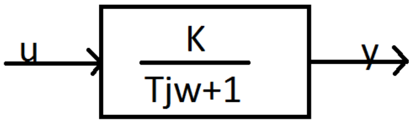
$$S_{uu} = \begin{cases} 2\,, w \neq 0 \\ s_0\,, \quad w = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

a) **(3 boda)** Što označava parametar s_o u (1) u vremenskoj domeni i koja je njegova vrijednost?

b) **(3 boda)** Odredite i skicirajte spektralnu gustoću snage izlaznog signala $S_{yy}(w)$.

c) **(4 boda)** Odredite srednju snagu izlaznog signala P_y

Napomena: $\frac{d\ actan(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$



Slika 1.

2. **(10 bodova)** Korištenjem korelacijske analize emitira se prijenosna funkcija procesa G(jw),

$$Y(jw)=G(jw)U(jw)+V(jw)$$

pri čemu je poznato da ulazni signal procesa u(t)=$F^{-1}\{U(jw)\}$ i šum v(t)= $F^{-1}\{V(jw)\}$ sadrže smetnju w(t).

$$u(t)=u^*(t)+w(t)$$
$$v(t)=v^*(t)+w(t)$$

pri čemu su u^* i v^* nekorelirani signali bijelog šuma. Izvedite izraz za pogrešku estimacije prijenosne funkcije procesa $\hat{G}(jw) - G(jw)$ pri čemu je $\hat{G}(jw)$ estimat dobiven primjenom korelacijske analize uz zanemarenje korelacije signala u i v. Komentirajte rezultat.

3. **(13 bodova)** Ovisnost izlaza modela *y* o ulaznom signalu *u* modelira se jednadžbom

$$y(k) = \alpha + \beta u(k) + \varepsilon(k) \qquad (2)$$

pri čemu je ε signal bijelog šuma srednje vrijednosti nula koji ne korelira s ulaznim i izlaznim signalom, a $\alpha\ i\ \beta$ su parametri modela koje je potrebno identificirati iz *N* parova ulazno-izlaznih podataka $\{u(k), y(k)\}_{k=1}^{N}$

a) **(3 boda)** Definirajte vektor mjerenja Y i parametara θ, te matricu podataka Φ za estimaciju parametara modela (2) $\hat{\alpha}\ i\ \hat{\beta}$ korištenjem metode najmanjih kvadrata.

b) **(7 bodova)** Korištenjem metode najveće vjerojatnosti (maximum likelihood) odredite estimat parametara modela (2), $\hat{\alpha}\ i\ \hat{\beta}$. Poznato je da se slučajna varijabla pogreške modela ε ravna po Gaussovoj razdiobi, $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Napomena: funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable ς s Gaussovom razdiobom $\varsigma \sim N(0, \sigma^2)$ definirana je s $f_\varsigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pri čemu x označava realizaciju slučajne varijable ς.

c) **(3 boda)** Odredite izraz za kovarijancu parametara modela (2) identificiranih metodom najmanjih kvadrata ako je poznato $E[\underline{\varepsilon} \cdot \underline{\varepsilon}^T] = \sigma_\varepsilon^2 I$ pri čemu je s *I* označena jedinična matrica odgovarajuće dimenzije i $\underline{\varepsilon}$ je vektor pogrešaka modela.

4. **(7 bodova)**
   a) **(4 boda)** Objasnite i matematički opišite kako se red modela procjenjuje testom odnosa determinanata.
   b) **(3 boda)** Postupkom identifikacije ARX modela dobiveni su sljedeći polinomi:

$$A(z^{-1})=1-4z^{-1}+4z^{-2}$$
$$B(z^{-1})=z^{-1}-2z^{-2}$$

   Koristeći polinomski test procijenite red dobivenog modela.

5. **(16 bodova)**
   Za sustav opisan sljedećim jednadžbama:

$$x_k = \phi_{k-1}\mathrm{x}_{k-1} + \Gamma_{k-1}\mathrm{u}_{k-1} + \mathrm{u}_{k-1}$$
$$y_k = \mathrm{H}_k\mathrm{x}_k + \mathrm{v}_k$$

   gdje su procesni i mjerni šum, u_{k-1} i v_k bijeli i nekorelirani šumovi varijanci *Q* i *R*, potrebno je riješiti sljedeće podzadatke:
   a) **(4 boda)**Izvesti očekivanu pogrešku naknadne estimacije $\tilde{x}_k^+$
   b) **(4 boda)** Izvesti jednadžbu za računanje matrice kovarijanci pogreške naknadne estimacije diskretnog Kalmanovog filtra P_k^+
   c) **(4 boda)** Čemu je jednaka kriterijska funkcija koju minimizira diskretni Kalmanov filtar prilikom računanja optimalnog pojačanja K_k? Dokažite!
   d) **(4 boda)** Čemu je jednaka inovacija r_k diskretnog Kalmanovog filtra? Izvesti izraz za računanje matrice kovarijanci inovacije.

6. **(12 bodova)**
   U akvariju se nalazi x_p pirana i x_g akvarijskih ribica. Ribice hranite jednom tjedno hranom *u.* također, svaki tjedan pirane pojedu nekoliko ribica. Natalitet pirana proporcionalan je populaciji ribica, a mortalitet je proporcionalan njihovoj vlastitoj populaciji (zbog prenapučenosti). Natalitet ribica proporcionalan je količini hrane *u* (uz konstantu proporcionalnosti 1), a mortalitet je proporcionalan populaciji pirana.
   a) **(4 boda)** Napišite model zadanog sustava u prostoru stanja, gdje su stanja broj pirana $x_{p,k}$ i broj akvarijskih ribica $x_{g,k}$. Uzmite da konstante proporcionalnosti (za koje nije drugačije rečeno) iznose ½ , a nesigurnost oba modela izrazite bijelim šumom jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti (w_k~N(0,1)) Pirane zbog veličine možete točno prebrojati, dok za ribice pretpostavljate mjerni šum jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti.
   b) **(4 boda)** U početnom trenutku imamo točan broj pirana i ribica ($x_{p,0}$ i $x_{g,0}$). Kalmanovim filtrom estimiramo populaciju ribica. Koliko iznosi matrica kovarijanci pogreške naknadne estimacije broja pirana i akvarijskih ribica nakon 1 tjedna (k=1)?
   c) **(4 boda)** Koliko iznosi omjer populacija pirana i akvarijskih ribica u ustaljenom stanju? Za ovaj dio zadatka pretpostavite da nema procesnog šuma.

7. **(12 bodova)**
   Razmotrimo jednodimenzionalan nestacionarni model rasta koji je definiran sljedećom jednadžbom:

$$x_k = \alpha x_{k-1} + \beta \frac{x_{k-1}}{1+x_{k-1}^2} + \gamma\cos(1.2k-1.2) + w_k$$

   gdje su koeficijenti $\alpha = 0.5$, $\beta = 25$ i $\gamma = 10$. Procesni šum ravna se prema $w_k \sim N(0,1)$. Mjerenje rasta vrši se sljedećom nelinearnom funkcijom:

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k$$

   gdje se mjerni šum ravna prema $v_k \sim N(0,1)$. Potrebno je:
   a) **(4 boda)** Odrediti matrice $\Phi, L, H\ i\ M$ diskretnog proširenog Kalmanovog filtra
   b) **(4 boda)** Ako u koraku k=0 vrijedi $\hat{x}_0^+ = 10$ i $P_0^+ = I$, koristeći diskretni prošireni Kalmanov filtar odredite $\hat{x}_1^-\ i\ P_1^-$
   c) **(4 boda)** Odrediti vrijednosti $\hat{x}_1^+\ i\ P_1^+$, ako je stvarna vrijednost x_1=18, a slučajna varijabla v_k u koraku 1 poprimila je vrijednost 0.1.