Rješenja zadataka sa drugog međuispita iz Teorije estimacije

Srećko Jurić-Kavelj

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

31. svibnja 2010.

Zadatak a)

Primjer

Antena za praćenje satelita opisana je sljedećim matematičkim modelom:

$$J\ddot{\Theta} + B\dot{\Theta} = M_m + M_v \ ,$$

gdje je J moment inercije antene, B faktor prigušenja (usred trenja), M_m moment motora i M_v moment smetnje (usred naleta vjetra).

a) *(1 bod)* Zadani sustav prikažite u prostoru stanja. U sustavu se mjeri kut Θ. Koristite oznake $a = \frac{B}{J}$ i $u = \frac{M_m}{B}$. Diskretizirajte sustav uz vrijeme diskretizacije $T = 0.1s$, koje je dovoljno malo za razmatrani sustav ($a = 0.02$).

Prikaz u prostoru stanja - diferecijalna jednadžba

$$J\ddot{\Theta} + B\dot{\Theta} = M_m + M_v \ ,$$

$$\ddot{\Theta} = -\frac{B}{J}\dot{\Theta} + \frac{M_m}{J} + \frac{M_v}{J} \ ,$$

$$a = \frac{B}{J}, \ u = \frac{M_m}{B}$$

$$\ddot{\Theta} = -a\dot{\Theta} + au + \frac{M_v}{J} \ .$$

Prikaz u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{\Theta} \\ \ddot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} \Theta \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix}$$

Zadatak b)

Primjer

b) *(3 boda)* Projektirajte diskretni neprediktivni estimator stanja tako da u prvom slučaju svi polovi dinamike pogreške estimacije budu u nuli ($z_p = 0$), a u drugom u 0.6 ($z_p = 0.6$).

Diskretni neprediktivni estimator stanja

Definicija

Dinamika diskretnog neprediktivnog estimatora stanja dana je:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (\Phi - KH\Phi)\tilde{x}(k|k) \ .$$

Karakteristična jednadžba glasi:

$$P_{NPE}(z) = |zI - \Phi + KH\Phi| \ .$$

- $(z_p = 0)$ $P_{NPE}(z) = z^2$
- $(z_p = 0.6)$ $P_{NPE}(z) = (z - 0.6)^2 = z^2 - 1.2z + 0.36$

Rješenje u Matlabu

```
ACKER  Pole placement gain selection using Ackermann's
formula.
    K = ACKER(A,B,P)  calculates the feedback gain matrix K
    such that the single input system
            .
            x = Ax + Bu

    with a feedback law of  u = -Kx  has closed loop poles at
    the values specified in vector P, i.e.,  P = eig(A-B*K).
```

$$\Phi - KH\Phi \stackrel{?}{=} A - BK$$

Ackermann

$$(\Phi - KH\Phi)^T = \Phi^T - \Phi^T H^T K^T$$

```
>> K1T = acker(F', F'*H', [0 0])
>> K2T = acker(F', F'*H', [0.6 0.6])
```

$$K_1^T = [1 \;\; 9.98]$$

$$K_2^T \approx [0.64 \;\; 1.59]$$

Zadatak c)

Primjer

c) *(2 boda)* Pretpostavimo da u sustavu postoji mjerni šum v_k očekivane vrijednosti nula i varijance R ($v_k \sim N(0, R)$). Obrazložite koji bi od dvaju projektiranih estimatora imao bolje vladanje s obzirom na šum. Napišite izraz za dinamiku pogreške estimacije uz postojanje mjernog šuma u sustavu.

Utjecaj mjernog šuma

Dinamika estimatora uz pretpostavku mjernog šuma dana je jednadžbom:

$$\tilde{x}(k+1|k+1) = (\Phi - KH\Phi)\tilde{x}(k|k) - K\nu(k+1) \ .$$

Zadatak

Primjer

U akvariju se nalaz x_p pirana i x_g akvarijskih ribica. Ribice hranite jednom tjedno hranom u. Također, svaki tjedan pirane pojedu nekoliko ribica. Natalitet pirana proporcionalan je populaciji ribica, a mortalitet je proporcionalan njihovoj vlastitoj populaciji (zbog prenapučenosti). Natalitet ribica proporcionalan je količini hrane u (uz konstantu proporcionalnosti 1), a mortalitet je proporcionalan populaciji pirana.

Zadatak a)

Primjer

a) *(2 boda)* Napišite model zadanog sustava u prostoru stanja. Uzmite da konstante proporcionalnosti (za koje nije drugačije rečeno) iznose $\frac{1}{2}$, a nesigurnost modela izrazite bijelim šumom jedinične varijance uz očekivanu vrijednost 0 ($w \sim N(0, I)$). Pirane zbog veličine možete točno prebrojiti, dok za ribice pretpostavljate mjerni šum jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti.

$$x_p(k+1) = x_p(k) + k_{np}x_g(k) - k_{mp}x_p(k) + w_p(k)$$

$$x_g(k+1) = x_g(k) - k_{mg}x_p(k) + u(k) + w_g(k)$$

Prikaz u prostoru stanja

$$\begin{bmatrix} x_p(k+1) \\ x_g(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_g(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + w(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p(k) \\ x_g(k) \end{bmatrix} + \nu(k)$$

$$w(k) \sim N(0, I)$$

$$\nu(k) \sim N\left(0, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Zadatak b)

Primjer

b) *(2 boda)* U početnom trenutku imamo točan broj pirana i ribica (x_{p0} i x_{g0}). Kalmanovim filtrom estimiramo populaciju ribica. Koliko iznosi varijanca estimiranog broja ribica nakon 2 tjedna?

$$P_0^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_1^- = \Phi P_0^+ \Phi^T + Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak b) - nastavak

$$K_1 = P_1^- H^T (H P_1^- H^T + R)^{-1} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P_1^+ = (I - K_1 H) P_1^- \approx \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Zadatak c)

Primjer

c) *(2 boda)* Koliko iznosi omjer populacija pirana i ribica u ustaljenom stanju? Za ovaj dio zadatka pretpostavite da nema procesnog šuma.

$$x_p(k+1) = \frac{1}{2}x_p(k) + \frac{1}{2}x_g(k)$$

$$\frac{1}{2}x_p = \frac{1}{2}x_g$$

$$x_g(k+1) = -\frac{1}{2}x_p(k) + x_g(k) + u(k)$$

$$x_p = 2u$$