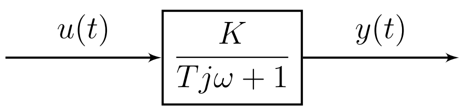
Teorija estimacije – Ljetni ispitni rok (2015./16.)

8.7.2016.

1. Za identifikaciju frekvencijske karakteristike $G(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$ koristi se signal bijelog šuma $u(t)$ prema shemi na slici 1. Spektralna snaga bijelog šuma definirana je sljedećim izrazom:

$$S_{uu}(\omega^2) = \begin{cases} 2, & \omega \neq 0 \\ s_0, & \omega = 0 \end{cases} \tag{1}$$



Slika 1: Blok shema sklopa za identifikaciju frekvencijske karakteristike korištenog u zadatku 1.

(a) Što označava parametar s_0 u (1) u vremenskoj domeni i koja je njegova vrijednost?
RJEŠENJE: Parametar s_0 označava spektralnu gustoću snage bijelog šuma na frekvenciji jednakoj 0, a njegova vrijednost je jednaka 2 jer je spektar bijelog šuma konstantan. ($s_0 = S_{uu}(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau)e^{-j0}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} c^2\delta(\tau)d\tau = c^2 = 2$).

(b) Odredite i skicirajte spektralnu gustoću snage izlaznog signala $S_{yy}(j\omega)$.
RJEŠENJE:

$$G(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega + 1}$$

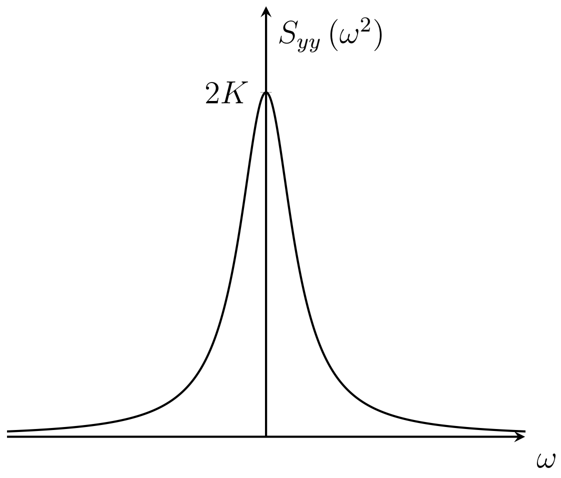
$$|G(j\omega)|^2 = \frac{K^2}{T^2\omega^2 + 1}$$

$$S_{yy}\left(\omega^2\right) = |G(j\omega)|^2 S_{uu}\left(\omega^2\right) = \frac{2K^2}{T^2\omega^2 + 1}$$

Skica je prikazana na slici 2.

(c) Odredite srednju snagu izlaznog signala $\bar{P}_y$.
Napomena : $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$
RJEŠENJE:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_y &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} y^2(t)dt = R_{yy}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{yy}(\omega^2)e^{j\omega 0}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2K}{T^2\omega^2 + 1}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2K}{(T\omega)^2 + 1}\frac{d(T\omega)}{T} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2K}{T}\cdot\tan^{-1}(T\omega)\Big|_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2K}{T}\cdot\pi = \frac{K}{T}
\end{aligned}$$



Slika 2: Spektralna gustoća snage izlaznog signala y iz zadatka 1. b).

2. Korištenjem korelacijske analize estimira se prijenosna funkcija procesa $G(j\omega)$:

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega) + V(j\omega),$$

pri čemu ulazni signal procesa $u(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\, U(j\omega)$ i šum $v(t) \bullet\!\!-\!\!\circ\, V(j\omega)$ sadrže smetnju $w(t)$:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^*(t) + w(t) \\ v(t) &= v^*(t) + w(t), \end{aligned}$$

pri čemu su $u^*(t)$ i $v^*(t)$ nekorelirani signali bijelog šuma.

Izvedite izraz za pogrešku estimacije prijenosne funkcije procesa $\widehat{G}(j\omega) - G(j\omega)$, pri čemu je $\widehat{G}(j\omega)$ estimat dobiven primjenom korelacijske analize uz zanemarenje korelacije signala $u(t)$ i $v(t)$. Komentirajte rezultat.

Rješenje: Jednadžba procesa u vremenskoj domeni je $Y(j\omega) \bullet\!\!-\!\!\circ\, y(t) = (g*u)(t) + v(t)$. Izračunavanjem korelacija dobije se:

$$\begin{aligned} R_{uu}(\tau) &= R_{u^*u^*}(\tau) + R_{ww}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{uu}\left(\omega^2\right) = S_{u^*u^*}\left(\omega^2\right) + S_{ww}\left(\omega^2\right) \\ R_{uy}(\tau) &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(u(t) \cdot \left((g*u)(t+\tau) + v(t+\tau)\right)\right) dt \\ &= \left(R_{uu} * g\right)(\tau) + R_{uv}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{uy}(j\omega) = S_{uu}(\omega^2) \cdot G(j\omega) + S_{uv}(j\omega) \\ R_{uv}(\tau) &= R_{ww}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\, S_{uv}(j\omega) = S_{ww}(j\omega) \end{aligned}$$

Stvarna spektralna gustoća snage prijenosne funkcije je:

$$G(j\omega) = \frac{S_{uy}(j\omega) - S_{uv}(j\omega)}{S_{uu}\left(\omega^2\right)},$$

a estimirana, uz zanemarenje korelacije signala u i v:

$$\widehat{G}(j\omega) = \frac{S_{uy}(j\omega)}{S_{uu}\left(\omega^2\right)}.$$

Pogreška estimacije je:

$$\widehat{G}(j\omega) - G(j\omega) = \frac{S_{uv}(j\omega)}{S_{uu}(\omega^2)} = \frac{S_{ww}(\omega^2)}{S_{u^*u^*}(\omega^2) + S_{ww}(\omega^2)}.$$

Iz izraza za pogrešku estimacije može se zaključiti da je pogreška manja što je snaga šuma w manja i što je snaga šuma u^* veća.

3. Ovisnost izlaza modela $y(t)$ o ulaznom signalu $u(t)$ modelira se jednadžbom:

$$y[k] = \alpha + \beta u[k] + \varepsilon[k], \tag{2}$$

pri čemu je ε signal bijelog šuma srednje vrijednosti nula koji ne korelira s ulaznim i izlaznim signalom, a α i β su parametri modela koje je potrebno identificirati iz N parova ulazno-izlaznih podataka $\{u[k], y[k]\}$, za $k \in [1..N]$.

(a) Definirajte vektor mjerenja Y i parametara Θ, te matricu podataka Φ za estimaciju parametara modela (2), $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ korištenjem metode najmanjih kvadrata.

RJEŠENJE:

$$y[k] = \begin{bmatrix} 1 & u[k] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \varepsilon[k]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[N] \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u[1] \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u[N] \end{bmatrix}}_{\Phi} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{\Theta} + \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon[1] \\ \vdots \\ \varepsilon[N] \end{bmatrix}}_{E}$$

(b) Korištenjem metode najveće vjerojatnosti (engl. *maximum likelihood*) odredite estimat parametara modela (2), $\hat{\alpha}$ i $\hat{\beta}$. Slučajna varijabla pogreške $\varepsilon[k]$ ima Gaussovu razdiobu, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable s normalnom razdiobom $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ je $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$.

RJEŠENJE:

$$I(\Theta) = \sum_{n=1}^{N} \varepsilon^2[n]$$

$$L(E; \alpha, \beta, \sigma_\varepsilon^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\varepsilon^2}} \exp\left(-\frac{I(\Theta)}{2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

$$\ln L = -\frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{2}{N} \ln \sigma_\varepsilon^2 - \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} I(\Theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln L = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \alpha} I(\Theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \beta} I(\Theta) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} I(\Theta) = \sum_{n=1}^{N} -2\left(y[n] - \alpha - \beta u[n]\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} I(\Theta) = \sum_{n=1}^{N} -2\left(y[n] - \alpha - \beta u[n]\right) u[n] = 0$$

Iz posljednje dvije jednadžbe mogu se izvući estimati parametara:

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \frac{\sum_{n=1}^{N} (y[n] - \bar{y})\, u[n]}{\sum_{n=1}^{N} (u[n] - \bar{u})\, u[n]} \cdot \bar{u}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{n=1}^{N} (y[n] - \bar{y})\, u[n]}{\sum_{n=1}^{N} (u[n] - \bar{u})\, u[n]},$$

uz oznake $\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u[n]$ i $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} y[n]$.

(c) Odredite izraz za kovarijancu parametara modela (2) identificiranih metodom najmanjih kvadrata ako je $\mathbf{E}\left[\varepsilon \cdot \varepsilon^{\mathrm{T}}\right] = \sigma_\varepsilon^2 I$, gdje je I jedinična matrica i ε vektor pogrešaka modela.

RJEŠENJE:

$$P^* = \sigma_\varepsilon^2 \Phi^{*-1} = \sigma_\varepsilon^2 \left[\Phi^T \Phi\right]^{-1} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_{n=1}^{N} (u[n] - \bar{u})\, u[n]} \begin{bmatrix} 1 & -\bar{u} \\ -\bar{u} & \bar{u}^2 \end{bmatrix},$$

uz oznaku $\bar{u}^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} u^2[n]$.

4. (a) Objasnite i matematički opišite kako se red modela procjenjuje testom odnosa determinanata.

RJEŠENJE: Ima opis u slajdovima od 5. predavanja.

(b) Postupkom identifikacije ARX modela dobiveni su sljedeći polinomi:

$$A\left(z^{-1}\right) = 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}$$
$$B\left(z^{-1}\right) = z^{-1} - 2z^{-2}$$

Koristeći polinomski test procijenite red dobivenog modela.

RJEŠENJE: Iz omjera polinoma B i A:

$$\frac{B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)} = \frac{z^{-1} - 2z^{-2}}{1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}} = \frac{z^{-1}}{1 - 2z^{-1}},$$

procjenjuje se da je red modela 1.

5. Za sustav opisan sljedećim jednadžbama:

$$x_k = \phi_{k-1} x_{k-1} + \Gamma_{k-1} u_{k-1} + w_{k-1}$$
$$y_k = H_k x_k + v_k,$$

gdje su procesni i mjerni šum, w_{k-1} i v_k bijeli i nekorelirani šumovi varijanci Q i R, potrebno je riješiti sljedeće podzadatke:

(a) Izvesti očekivanu pogrešku naknadne estimacije $\tilde{x}_k^+$.

(b) Izvesti jednadžbu za računanje matrice kovarijanci pogreške naknadne estimacije diskretnog Kalmanovog filtra P_k^+.

(c) Čemu je jednaka kriterijska funkcija koju minimizira diskretni Kalmanov filtar prilikom računanja optimalnog pojačanja K_k? Dokažite!

(d) Čemu je jednaka inovacija r_k diskretnog Kalmanovog filtra? Izvesti izraz za računanje matrice kovarijanci inovacije.

RJEŠENJE: a), b) i c) dijelovi izvedeni su u 9. predavanju, a d) u 12. predavanju.

6. U akvariju se nalazi x_p pirana i x_g akvarijskih ribica. Ribice hranite jednom tjedno hranom u. Također, svaki tjedan pirane pojedu nekoliko ribica. Natalitet pirana proporcionalan je populaciji ribica, a mortalitet je proporcionalan njihovoj vlastitoj populaciji (zbog prenapučenosti). Natalitet ribica proporcionalan je količini hrane u (uz konstantu proporcionalnosti 1), a mortalitet je proporcionalan populaciji pirana.

(a) Napišite model zadanog sustava u prostoru stanja, gdje su stanja broj pirana $x_{p,k}$ i broj akvarijskih ribica $x_{g,k}$. Uzmite da konstante proporcionalnosti (za koje nije drugačije rečeno) iznose $\frac{1}{2}$, a nesigurnost oba modela izrazite bijelim šumom jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti ($w_k \sim \mathcal{N}(0,1)$). Pirane zbog veličine možete točno prebrojati, dok za ribice pretpostavljate mjerni šum jedinične varijance i nulte očekivane vrijednosti.

RJEŠENJE:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{p,k} \\ x_{g,k} \end{bmatrix}}_{x_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_{p,k-1} \\ x_{g,k-1} \end{bmatrix}}_{x_{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\Gamma} \cdot u_{k-1} + w_{k-1},\ w_{k-1} \sim \left(0, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q}\right)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{p,k} \\ y_{g,k} \end{bmatrix}}_{y_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{H} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_{p,k} \\ x_{g,k} \end{bmatrix}}_{x_k} + v_k,\ v_k \sim \left(0, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{R}\right)$$

(b) U početnom trenutku imamo točan broj pirana i ribica ($x_{p,0}$ i $x_{g,0}$). Kalmanovim filtrom estimiramo populaciju ribica. Koliko iznosi matrica kovarijanci pogreške naknadne estimacije broja pirana i akvarijskih ribica nakon 1 tjedna ($k=1$)?

RJEŠENJE: Kako na početku znamo točan broj ribica, matrica kovarijanci P_0^+ je u nultom trenutku jednaka nula.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_0^+ &= \begin{bmatrix} x_{p,0} & x_{g,0} \end{bmatrix}^T \\
P_0^+ &= 0 \\
P_1^- &= \Phi P_0^+ \Phi^T + Q = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
K_1 &= P_1^- H^T \left(H P_1^- H^T + R\right)^{-1} = I \cdot I \cdot \left(I \cdot P_1^- \cdot I + R\right)^{-1} = (P_1^- + R_1)^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
P_1^+ &= (I - K_1 H) P_1^- = (I - K_1 \cdot I) \cdot I = I - K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Koliko iznosi omjer populacija pirana i akvarijskih ribica u ustaljenom stanju? Za ovaj dio zadatka pretpostavite da nema procesnog šuma.

RJEŠENJE: Uz $x_k = x_{k-1} = x_\infty$ (x se više ne mijenja u ustaljenom stanju) i $w_{k-1} = 0$, jednadžba stanja prelazi u:

$$x_\infty = \Phi x_\infty + \Gamma u,$$

a iz nje se može izračunati x_∞:

$$x_\infty = \begin{bmatrix} x_{p,\infty} \\ x_{g,\infty} \end{bmatrix} = (I - \Phi)^{-1} \Gamma u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ 2u \end{bmatrix}.$$

Traženi omjer jednak je $\dfrac{x_{p,\infty}}{x_{g,\infty}} = 1$.

7. Razmotrimo jednodimenzionalan nestacionarni model rasta koji je definiran sljedećom jednadžbom:

$$x_k = \alpha x_{k-1} + \beta \frac{x_{k-1}}{1 + x_{k-1}^2} + \gamma \cos(1.2k - 1.2) + w_k,$$

gdje su koeficijenti $\alpha = 0.5$, $\beta = 25$ i $\gamma = 10$. Procesni šum w_k ima razdiobu $\mathcal{N}(0, 1)$. Mjerenje rasta vrši se sljedećom nelinearnom funkcijom:

$$y_k = \frac{x_k^2}{20} + v_k,$$

gdje mjerni v_k šum ima razdiobu $\mathcal{N}(0, 1)$.

(a) Odredite matrice Φ, L, H i M diskretnog proširenog Kalmanovog filtra.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \Phi_{k-1} &= \alpha + \beta \frac{1 - \left(\hat{x}_{k-1}^+\right)^2}{\left(1 + \left(\hat{x}_{k-1}^+\right)^2\right)^2} \\ L &= 1 \\ H_k &= \frac{\hat{x}_k^-}{10} \\ M &= 1 \end{aligned}$$

(b) Ako u koraku $k = 0$ vrijedi $\hat{x}_0^+ = 10$ i $P_0^+ = I$, koristeći diskretni prošireni Kalmanov filtar odredite $\hat{x}_1^-$ i P_1^-.

Rješenje:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^+ &= 10 \\ P_0^+ &= 1 \\ \hat{x}_1^- &= 10\alpha + \frac{10}{101}\beta + \gamma = 17.475 \\ P_1^- &= \Phi_0 P_0^+ \Phi_0^T + LQL^T = \left(\alpha + \frac{-99}{10201}\beta\right)^2 \cdot 10 + 1 = 1.066 \end{aligned}$$

(c) Odredite vrijednosti $\hat{x}_1^+$ i P_1^+, ako je stvarna vrijednost $x_1 = 18$, a slučajna varijabla v_k je u koraku 1 poprimila vrijednost 0.1.

Rješenje:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 18 \\
v_1 &= 0.1 \\
y_1 &= \frac{x_1^2}{20} + v_1 = 16.3 \\
K_1 &= P_1^- H_1^T \left(H_1 P_1^- H_1^T + MRM \right)^{-1} = 0.438 \\
\hat{x}_1^+ &= \hat{x}_1^- + K_1 \left(y_1 - \frac{\left(\hat{x}_1^-\right)^2}{20} \right) = 17.927 \\
P_1^+ &= (I - K_1 H_1) P_1^- = 0.251
\end{aligned}
$$