Zadaci: Trekkie, rješenja: lycan

1. Zadatak

Laserskim senzorom mjerimo udaljenost do objekta u slobodnom padu.
(Ima i slika al je nepotrebna :D)
Jednadžba $y_k = h_k(x_k, v_k) = \sqrt{x_k^2 + d^2} + v_k$
d = 4 - horizontalna udaljenost senzora od vertikalnog pravca po kojem objekt pada,
v_k $N(0, \frac{1}{400})$ - mjerni šum (senzor je jako precizan)

U koraku K, unaprijedna (*a priori*) estimacija stanja je $x_k^- = 6$. Stvarno stanje za $x_k = 3$, mjerenje je $y_k = 5$. Unaprijedna varijanca pogreške iznosi $P_k^- = 1$.
Obaviti dvije iteracije IEKF-a (N=1)

H_k, $x_{k,1}^+$, $x_{k,2}^+$, $P_{k,1}^+$, $P_{k,2}^+$, $x_k^- = ?$

Rješenje:

$$R = \frac{1}{400}$$
$$\hat{x}_{k,0}^+ = \hat{x}_k^- = 6$$
$$P_{k,0}^+ = P_k^- = 1$$

Iz IEKF formula slijedi:

$$\begin{aligned}
H_{k,i} &= \frac{\hat{x}_k}{\sqrt{\hat{x}_k^2 + d^2}},\ \hat{x}_k = \hat{x}_{k,i}^+ \\
K_{k,i} &= P_k^- H_{k,i}^T \left(H_{k,i}^2 P_k^- + R\right)^{-1} \\
&= H_{k,i}^T \left(H_{k,i}^2 + \frac{1}{400}\right)^{-1} \\
P_{k,i}^+ &= (1 - K_{k,i}) P_k^- \\
x_{k,i+1}^+ &= \hat{x}_k^- + K_{k,i}\left(y_k - h(x_{k,i}^+ - H_{k,i}(\hat{x}_k^- - \hat{x}_{k,i}^+)\right)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formule za $i = 0$ i zatim $i = 1$ slijedi

$$\begin{aligned}
i &= 0 \\
H_{k,0} &= 0.832 \\
K_{k,0} &= 1.19745 \\
P_{k,0}^+ &= 0.00372 \\
x_{k,1}^+ &= 3.3688 \\
i &= 1 \\
H_{k,1} &= 0.6444 \\
K_{k,1} &= 1.543 \\
P_{k,1}^+ &= 0.00569 \\
x_{k,2}^+ &= 3.03
\end{aligned}$$

Još su bila pitanja (IIRC) da li a posteriori estimacija dobro estimira (očito, pošto teži k 3), te za koju vrijednost $\hat{x}_k^-$ estimacija nema smisla - rješenje je 0, pošto za nula u stvari ništa ne računa (H=0, K=0 itd).

2. Zadatak

Zadan je skalarni sustav: $x_{k+1} = \frac{1}{2}x_k + w_k$
$y_k = x_k + v_k$
Gdje su procesni i mjerni šum (w_k i v_k) bijeli i nekorelirani šumovi varijanci ($Q = 1/2$ i $R = 1/3$).
Stanje u početnom koraku dano je slučajnom varijablom $x_0^+ \ N(2, 3)$.
Kalmanovim izračunajte a priori i a posteriori matricu kovarijance u koracima $K = 1$ i $K = 2$, te P_∞^+.

Rješenje:

$$\phi = \frac{1}{2}$$
$$H = 1$$

Iz $x_0^+ \ N(2, 3)$ slijedi:

$$P_0^+ = 3$$
$$x_0^+ = 2$$

Iz DKF jednadžbi:

$$P_k^- = \frac{P_{k-1}^+}{4} + \frac{1}{2}$$
$$K_k = P_k^-(P_k^- + \frac{1}{3})^{-1}$$
$$P_k^+ = (1 - K_k)P_k^-$$

Dobivamo rješenja:

$$P_1^- = \frac{5}{4}$$
$$K_1 = \frac{15}{19}$$
$$P_1^+ = \frac{5}{19}$$
$$P_2^- = \frac{43}{76}$$
$$K_2 = \frac{129}{205}$$
$$P_2^+ = \frac{43}{205}$$

Za P_∞^+ imamo P_∞^+ i P_∞^-, te K.

$$P^+ = (1-K)P^- \tag{1}$$

$$P^- = \frac{P^+ + 2}{4} \tag{2}$$

$$K = P^-(P^- + R)^{-1} \tag{3}$$

Uvrštavanjem (2) → (3) → (1)

$$3(P^+)^2 + 9P^+ - 2 = 0$$
$$P_1^+ = -3.21$$
$$P_2^+ = 0.21$$

Kovarijanca ne može biti negativna pa se uzima pozitivno rješenje, dakle $P_\infty^+ = 0.21$.