PLANARNOST

PROPOZICIJA

Svaki graf može se prikazati u prostoru $\mathbf{R}_3$ bez presijecanja bridova.

PROPOZICIJA

Potpuni bipartitni graf $\mathbf{K}_{3,3}$ ne može se smjestiti u ravninu bez presijecanja.

PROPOZICIJA

Potpuni graf $\mathbf{K}_5$ ne može se smjestiti u ravninu bez presijecanja.

DEFINICIJA

Planarni graf je graf koji se može smjestiti u ravninu bez presijecanja bridova, tj. tako da se dva brida geometrijski ne sijeku niti u jednoj točki, osim eventualno u vrhu s kojim su oba incidentna.

DEFINICIJA

Za dva grafa kažemo da su **homeomorfni** ako se oba mogu dobiti iz nekog grada umetanjem novih vrhova stupnja 2 u njihove bridove.

TEOREM (KURATOWSKI)

Graf je planaran onda i samo onda ako ne sadrži podgraf homeomorfan s $\mathbf{K}_5$ ili $\mathbf{K}_{3,3}$.

DEFINICIJA

Za graf **H** kažemo da je stezljiv do $\mathbf{K}_5$ ili $\mathbf{K}_{3,3}$ ako stezanjem nekih bridova od **H** možemo dobiti $\mathbf{K}_5$ ili $\mathbf{K}_{3,3}$.

TEOREM

Graf je planaran onda i samo onda ako ne sadrži podgraf stezljiv do $\mathbf{K}_5$ ili $\mathbf{K}_{3,3}$.

DEFINICIJA

Minimalni broj presjecišta u ravnini potreban za prikaz grafa **G** zovemo **križni broj** od **G** i označavamo s **cr(G)**.

TEOREM (EULER)

Neka je **G** ravninski prikaz povezanog planarnog grafa te neka su **n**, **m** i **f** slijedom označeni brojevi vrhova, bridova i strana od **G**. Tada je $\mathbf{n - m + f = 2}$.

KOROLAR

Neka je **G** planarni graf s **n** vrhova, **m** bridova, **f** strana i **k** komponenata povezanosti. Tada je **n – m + f = k – 1**.

KOROLAR

Ako je **G** jednostavan povezan planaran graf s **n >= 3** vrhova i **m** bridova, onda je **m <= 3n – 6**. Ako, dodatno, **G** nema trokutova (tj. struk mu je barem 4), onda je **m <= 2n – 4**.

KOROLAR

K_5 ili $K_{3,3}$ nisu planarni.

TEOREM

Svaki jednostavan planaran graf ima vrh stupnja ne većeg od 5.

PROPOZICIJA

Najmanje jedna strana poliedra omeđena je k-ciklusom, gdje je **k = 3, 4 ili 5**.

TEOREM

Postoji točno 5 regularnih poliedara.

TEOREM

Neka je **G** jednostavan graf s **n >= 3** vrhova i **m** bridova. Tada **gustoća t(G)** grafa zadovoljava nejednakosti:

t(G) >= ceil (m / (3n - 6)), **t(G) >= floor ((m + 3n - 7) / (3n - 6))**.

LEMA

Neka je **G** planaran povezan graf s **n** vrhova, **m** bridova i **f** strana te njegov geometrijski dual ima **n*** vrhova, **m*** bridova i **f*** strana. Tada je **n* = f**, **m* = m**, **f* = n**.

TEOREM

Ako je **G** povezan ravninski graf, onda je **G**** izomorfan s **G**.

TEOREM

Neka je **G** planaran graf te neka je **G*** geometrijski dual od **G**. Tada skup bridova u **G** tvori ciklus u **G** onda i samo onda ako odgovarajući skup bridova u **G*** tvori rezni skup u **G***.

KOROLAR

Skup bridova u **G** tvori rezni skup u **G** onda i samo onda ako odgovarajući skup bridova od **G*** tvori ciklus u **G***.

DEFINICIJA

Za graf **G*** kažemo da je (apstraktni) dual od **G** ako postoji bijektivna korespondencija između bridova od **G** i onih od **G***, sa svojstvom da je skup bridova od **G** ciklus u **G** onda i samo onda ako je odgovarajući skup bridova od **G*** rezni skup od **G***.

PROPOZICIJA

Ako je **C** ciklus, a **C*** rezni skup povezanog grafa **G**, onda **C** i **C*** imaju parni broj zajedničkih bridova. Ako je **S** neki podskup skupa bridova grafa **G** sa svojstvom da ima parni broj zajedničkih bridova sa svakim reznim skupom od **G**, onda se **S** može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa.

TEOREM

Ako je **G*** apstraktni dual od **G**, onda je **G** apstraktni dual od **G***.

TEOREM

Graf je planaran onda i samo onda ako ima apstraktni dual.

BOJANJE GRAFOVA

DEFINICIJA

Bojanje zadanog grafa **G** je pridruživanje nekog skupa boja skupu vrhova od **G**, na način da je svakome vrhu pridružena jedna boja, tako da su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Za bojanje ćemo reći da je **k-bojanje** ako smo upotrijebili **k** boja u ovom pridruživanju. Graf **G** je **k-obojiv**, ako postoji s-bojanje grafa **G**, za neki **s <= k**.

DEFINICIJA

Ako je graf **G** k-obojiv, ali nije (k-1)-obojiv, onda kažemo da je **G k-kromatski**. Dotični najmanji broj boja k s kojim se graf može pobojati nazivamo **kromatski broj** te ga označavamo s **χ(G)**.

TEOREM

Ako je **G** jednostavan graf u kojem vrhovi imaju stupanj ne veći od **Δ**, onda je **G (Δ + 1)-obojiv**.

TEOREM (BROOKS)

Ako je **G** jednostavan povezan graf koji nije potpun te ako je najveći stupanj nekog vrha jednak **Δ (Δ >= 3)**, onda je **G Δ-obojiv**.

TEOREM

Svaki jednostavan planarni graf je **6-obojiv**.

TEOREM

Svaki jednostavan planarni graf je **5-obojiv**.

TEOREM

Svaki jednostavan planarni graf je **4-obojiv**.

DEFINICIJA

Karta je 3-povezan planaran graf prikazan u ravnini.

DEFINICIJA

Za kartu kažemo da je **k-obojiva (f)** ili **k-strano obojiva**, ako se njene strane mogu obojati s k boja tako da nikoje dvije strane sa zajedničkim bridom nisu obojane istom bojom.

TEOREM

Karta **G** je **2-strano obojiva** onda i samo onda ako je **G** eulerovski graf.

TEOREM

Neka je **G** ravninski prikaz jednostavnog planarnog grafa **G** te neka je **G*** geometrijski dual od **G**. Tada je **G** k-vršno obojiv onda i samo onda ako je **G*** k-strano obojiv.

KOROLAR

Problem četiri boje za karte ekvivalentan je problemu četiri boje za planarne grafove.

TEOREM

Neka je **G** kubična karta (3-regularna karta). Tada je **G** 3-strano obojiva onda i samo onda ako je svaka strana od **G** omeđena parnim brojem bridova.

DEFINICIJA

Za graf **G** kažemo da je **bridno k-obojiv**, ako se njegovi bridovi mogu obojati s **k** boja tako da su bridovi koji su susjedni (oba incidentna s nekim vrhom) različito obojani. Ako je **G** bridno k-obojiv, ali nije bridno (k-1)-obojiv, onda kažemo da je **kromatski indeks** grafa **G** jednak **k** i pišemo $\chi' = k$.

TEOREM (VIZING)

Ako je **G** jednostavan graf s najvećim stupnjem nekog vrha jednakim Δ, onda je
$\Delta <= \chi'(G) <= \Delta + 1$.

TEOREM

$\chi'(K_n) = n$ (za neparan $n > 1$), $\chi'(K_n) = n - 1$ (za paran n).

TEOREM

Teorem o četiri boje ekvivalentan je tvrdnji da je $\chi'(G) = 3$ za svaku kubičnu kartu **G**.

TEOREM (KÖNIG)

Ako je **G** bipartitan graf s najvećim stupnjem nekog vrha jednakim Δ, onda je $\chi'(G) = \Delta$.

KOROLAR

$\chi'(K_{r,s}) = \max (r, s)$