Bojanja grafova

Anamari Nakić, Mario-Osvin Pavčević

6. svibnja 2014.

Poglavlje 1

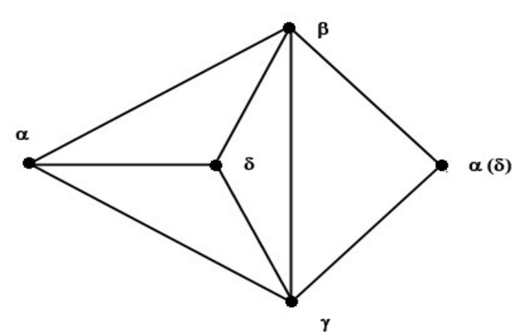
Bojanja vrhova

Definicija 1.1 *Bojanje zadanog grafa G je pridruživanje nekog skupa boja skupu vrhova od G, na način da je svakome vrhu pridružena jedna boja, tako da su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Za bojanje ćemo reći da je k-bojanje ako smo upotrijebili k boja u ovom pridruživanju. Graf G je k-obojiv, ako postoji s-bojanje grafa G, za neki $s \leq k$.*

Svaki graf s n vrhova je n-obojiv, budući možemo svaki vrh obojati nekom drugom bojom. U tom smislu jedino zanimljivo pitanje ostaje koliki je najmanji broj boja koji se treba upotrijebiti da bi se zadani graf korektno obojao.

Definicija 1.2 *Ako je graf G k-obojiv, ali nije $(k-1)$-obojiv, onda kažemo da je G k-kromatski. Dotični najmanji broj boja k s kojim se graf može pobojati nazivamo kromatski broj te ga označavamo s $\chi(G)$.*

Uočimo da je svaki podgraf k-obojivog grafa k-obojiv, pa vrijedi: ako je H podgraf od G, onda je $\chi(H) \leq \chi(G)$.



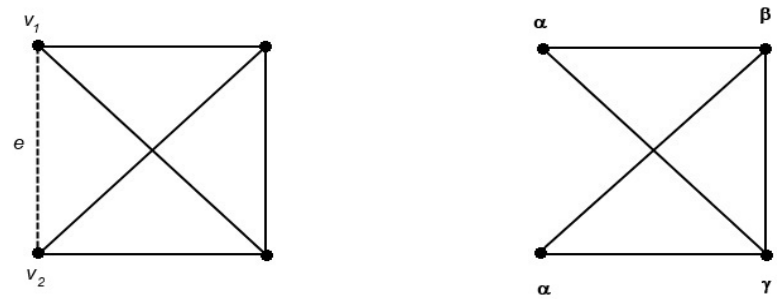
Primjer 1.1 *Zadani graf je 4-obojiv, a nije 3-obojiv, pa je $\chi(G) = 4$.*

Pretpostavljat ćemo da su grafovi jednostavni (višestruki bridovi ne bi imali nikakvog utjecanja na problem bojanja, a petlja je kontradiktorna sama po sebi, tj. vrh incidentan s petljom nije obojiv niti na jedan način).

Primjer 1.2 *Za neke klase grafova je jednostavno ustanoviti kromatski broj. Uvjerite se da vrijedi:*
a) $\chi(C_{2l}) = 2$, $\chi(C_{2l+1}) = 3$,
b) $\chi(K_n) = n$,
c) $\chi(W_{2l}) = 4$, $\chi(W_{2l+1}) = 3$.

Zadatak 1.1 *Neka je graf* $G = K_n - e$ *dobiven iz potpunog grafa* K_n *brisanjem jednog istaknutog brida* e*. Odredite* $\chi(G)$*.*

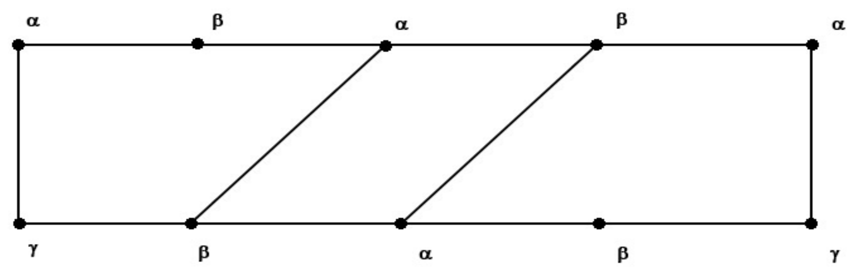
Rješenje Promotrimo prvo jedan primjer. Dan je graf K_4 i jedan istaknuti brid e. Znamo da je K_4 4-kromatski graf. Uočite da je $\chi(K_4 - e) = 3$.



Dokazat ćemo da općenito vrijedi $\chi(K_n - e) = n - 1$. Neka je e brid između vrhova v_1 i v_2. Odredimo, za početak, kromatski broj grafa $G - v_1$ dobivenog iz grafa G brisanjem vrha v_1. Graf $G - v_1$ je izomorfan potpunom grafu K_{n-1} pa je $(n-1)$-kromatski. Stoga je $\chi(G) \geq n - 1$. Neka je dano jedno $(n-1)$-bojanje podgrafa $G - v_1$. Svaki vrh podgrafa $G - v_1$ obojan je drugom bojom. U grafu G, vrh v_1 susjedan je sa svim vrhovima osim vrha v_2. Obojamo li sada vrh v_1 istom bojom kao vrh v_2, dobit ćemo jedno $(n-1)$-bojanje od G. Zaključujemo da je $\chi(G) = n - 1$.

Primjer 1.3 *Uočimo da su kromatskim brojem grafovi u nekom smislu definirani.*
a) $\chi(G) = 1$ *onda i samo onda ako je* G *nul-graf.*
b) $\chi(G) = 2$ *onda i samo onda ako je* G *bipartitni graf.*
c) Imamo li dano neko bojanje grafa G *s točno* $\chi(G)$ *boja, uočimo da se skup vrhova* $V(G)$ *raspada na particiju podskupova vrhova koji su istobojni. Pri tome, vrhovi iz istog podskupa nisu susjedni, jer su obojani istom bojom. Na ovaj se način može poopćiti pojam bipartitnosti na* k*-partitne grafove, koju su karakterizirani činjenicom da svaki brid incidira s vrhovima koji pripadaju različitim podskupovima particije skupa vrhova. Točnije vrijedi:* $\chi(G) = k$ *onda i samo onda ako je* G k*-partitan graf.*

Iako se prethodno poopćenje na k-partitne grafove činilo efikasnim, ono to nije. Naime, uopće nije jednostavno ustanoviti je li zadani graf k-partitan ili nije, ako je $k > 2$. U tom smislu morat ćemo se poslužiti nekim ocjenama, pa jedino ako ocjenu dostignemo, znat ćemo da je graf obojiv s toliko boja.



Primjer 1.4 *Graf sa slike je* 3*-kromatski! Naime, kako on ima* C_5 *kao podgraf, zaključujemo da je* $\chi(G) \geq 3$*, a budući smo našli (realizirali) jedno* 3*-bojanje, zaključujemo da je* $\chi(G) = 3$*.*

Općenito, za graf G s n vrhova znamo da je $\chi(G) \leq n$, a ako u njemu nađemo neki potpuni podgraf K_r s r vrhova, onda je svakako $\chi(G) \geq r$. U smislu profinjavanja ovih ocjena, dokazat ćemo neke važne rezultate za kromatski broj. Prethodno uvedimo oznaku $\Delta(G)$, ili kratko samo Δ, za najveći stupanj vrha u promatranom grafu G.

Teorem 1.1 *Ako je* G *jednostavni graf u kojem vrhovi imaju stupanj ne veći od* Δ*, onda je* G $(\Delta + 1)$*-obojiv.*

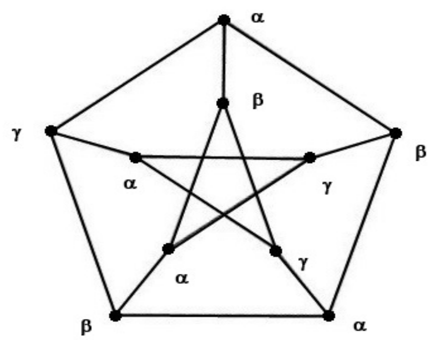
Dokaz Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju vrhova od G. Neka je G jednostavni graf s n vrhova. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove s $n-1$ vrhova i stupnja ne većeg od Δ. Uočimo jedan vrh, te ga izbacimo iz grafa, skupa s njemu incidentnim bridovima. Graf $G - v$ koji je preostao je graf s $n - 1$ vrhom, vrhova stupnjeva ne većeg od Δ, pa vrijedi pretpostavka indukcije, što znači da ga možemo obojati s $\Delta + 1$ bojom. Međutim, budući je $deg(v) \leq \Delta$, to su susjedi od v obojani s najviše Δ različitih boja, pa sam vrh v obojamo s nekom od preostalih boja. □

Zapravo se može izreći i nešto jači teorem, koji dajemo bez dokaza.

Teorem 1.2 (Brooks, 1941.) *Ako je* G *jednostavni povezani graf koji nije potpun, te ako je najveći stupanj nekog vrha jednak* Δ $(\Delta \geq 3)$*, onda je* G Δ*-obojiv.*

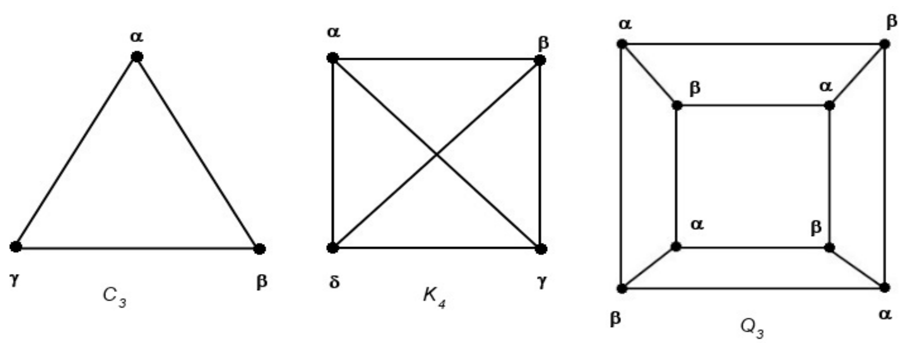
Zapitajmo se koliko nam ove ocjene za broj potrebnih boja pomažu. Na primjer, za cikluse nam prvi od ova dva teorema daje ocjenu koja se niti ne može popraviti. Brooksov teorem daje potpuni odgovor za kubične (tj. 3-regularne) grafove - uzmite na primjer Petersenov graf. No, promotrimo li grafove koji nisu ni blizu regularni, situacija više nije tako povoljna. Tipični primjeri kad Brooksov teorem ne pomaže previše u određivanju kromatskog broja su kotači W_n i potpuni bipartitni grafovi $K_{1,s}$.

Primjer 1.5 *Petersenov graf G nije bipartitan pa je $\chi(G) > 2$. Petersenov graf je 3-regularan pa je prema Brooksovom teoremu $\chi(G) \leq 3$. Zaključujemo da je $\chi(G) = 3$.*



Zadatak 1.2 *Dokažite ili opovrgnite: kromatski broj Δ-regularnog grafa je uvijek Δ.*

Rješenje Tvrdnja, naravno, ne vrijedi. Evo i primjera: ciklus C_3 je 2-regularan graf, a pritom je i 3-kromatski. Tvrdnju opovrgavaju i grafovi K_4 i Q_3. Jesu li to jedini primjeri?



Loša situacija u određivanju ili ocjenjivanju kromatskog broja znatno je povoljnija ako dodatno pretpostavimo da je promatrani graf planaran. O tome govore sljedeći teoremi.

Teorem 1.3 *Svaki jednostavni planarni graf je 6-obojiv.*

Dokaz Teorem dokazujemo matematičkom indukcijom po broju vrhova grafa G. Kao baza indukcije može poslužiti činjenica da je svaki graf s najviše 6 vrhova 6-obojiv. Neka je G jednostavan planaran graf s n vrhova, te neka su svi jednostavni planarni grafovi s $n-1$ vrhom 6-obojivi. Znamo da graf G sadrži vrh stupnja najviše 5, uočimo takav vrh i označimo ga s v. Pogledajmo graf $G-v$. To je graf s $n-1$ vrhom, dakle je 6-obojiv. No, onda 6-bojanje grafa G dobijemo tako da vrh v, stupnja ne većeg od 5, obojimo nekom bojom kojom nisu obojani njegovi susjedi. Takva boja naravno postoji, pa smo dobili 6-bojanje cijeloga G. □

Teorem 1.4 *Svaki jednostavni planarni graf je* 5*-obojiv.*

Dokaz Slično kao u prethodnom teoremu, jedino su tehnički detalji dokaza nešto kompliciraniji. Provodimo dakle opet indukciju po broju vrhova. Neka je G jednostavan planaran graf s n vrhova, te neka su svi jednostavni planarni grafovi s $n-1$ vrhova 5-obojivi. Sad, G ima neki vrh stupnja najviše 5, kojeg nazovemo s v. Pogledamo li $G-v$, vidimo da je to graf s $n-1$ vrhova, pa je po pretpostavci indukcije 5-obojiv. Želimo još dovršiti bojanje vrha v, odnosno cijelog grafa G.

Ako je $deg(v) < 5$, onda vrh v možemo obojati s nekom od boja kojom nisu obojani susjedi od v, pa bi dokaz bio gotov. Zato, pogledajmo slučaj kad je $deg(v) = 5$, te neka su $v_1, v_2, \ldots, v_5$ susjedi od v. Ako bi svi $v_1, v_2, \ldots, v_5$ bili međusobno susjedni, onda bi G imao K_5 kao podgraf, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je G planaran. Postoje dakle sigurno neka dva nesusjeda među njima, neka su to na primjer v_1 i v_3. Stegnemo li bridove vv_1 i vv_3, dobit ćemo graf s $n-2$ vrha koji je svakako, po pretpostavci indukcije, 5-obojiv. Zaista taj graf sada i obojamo. Razložimo li graf natrag (stegnute bridove rastegnemo), uz čuvanje nađenog bojanja, vidimo da v_1 i v_3 imaju istu boju (jer su bili stegnuti u isti vrh), što je korektno, budući oni nisu susjedi. No, sada je skup susjeda vrha v obojan s najviše 4 boje, pa vrh v obojamo nekom od preostalih boja. Time je korak indukcije proveden i teorem dokazan. □

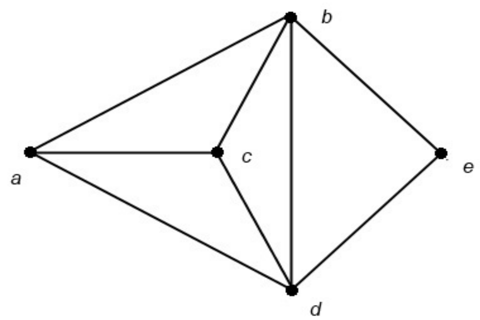
Možemo li nastaviti smanjivati ocjenu za kromatski broj? Da, za još jedan korak. No sljedeći važni čuveni teorem nećemo dokazivati, budući je trebalo puno godina a i puno kompjutorskog vremena da se dokaz provede. Pitanje o 4-obojivosti planarnih grafova formulirano je još davne 1852. godine, a prvi dokaz dali su Appel i Haken 1976.

Teorem 1.5 *Svaki jednostavni planaran graf je* 4*-obojiv.*

Zadatak 1.3 *Kemičar mora pohraniti* 5 *kemikalija, a, b, c, d, e u razne dijelove skladišta. Neke od kemikalija burno reagiraju ako dođu u kontakt, pa se svakako moraju čuvati odvojeno. Tablica pokazuje kemikalije koje burno reagiraju. Koliko* *je odvojenih dijelova skladišta potrebno da bi se one pospremile?*

	a	b	c	d	e
a	-	+	+	+	-
b	+	-	+	+	+
c	+	+	-	+	-
d	+	+	+	-	+
e	-	+	-	+	-

Rješenje Radi se, očito, o bojanju grafa s 5 vrhova, gdje je susjedno dano znakom + u gornjoj tablici.



Već smo vidjeli da nam za ovaj graf trebaju 4 boje, dakle potrebna su 4 odvojena dijela skladišta.

Zadatak 1.4 *Neka je G jednostavni planarni graf bez trokutova.*
a) Korištenjem Eulerove formule dokažite da G sadrži vrh stupnja najviše 3.
b) Matematičkom indukcijom dokažite da je G 4-obojiv.

Rješenje a) Pokazali smo da za planarne grafove bez trokutova vrijedi ocjena za broj bridova $m \leq 2n-4$. S druge strane, ako bi svaki vrh bio stupnja barem 4, $deg(v) \geq 4$, onda bismo prebrajanjem incidencija dobili

$$2m \geq 4n \Rightarrow m \geq 2n\,.$$

Sveukupno imamo

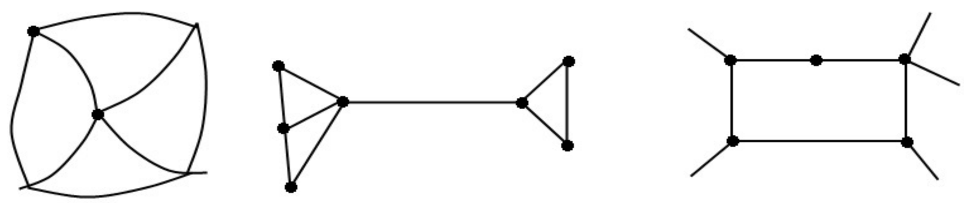
$$2n \leq m \leq 2n-4\,,$$

što je kontradikcija. Dakle, postoji vrh stupnja najviše 3.

b) Pokažimo korak indukcije. U zadanom grafu G postoji dakle vrh stupnja najviše 3. Pogledamo li $G-v$, on je po pretpostavci indukcije 4-obojiv, pri čemu su susjedi od v obojani s najviše 3 različite boje, pa sam v možemo pobojati s nekom preostalom bojom.

* * * * *

Povijesno je *Problem četiri boje* nastao i vezan je uz bojanje geografskih karata. Postavimo si pitanje, koliko je boja potrebno da bi se dana geografska politička karta obojala tako, da zemlje koje graniče budu obojane različitim bojama. Vrlo jednostavan univerzalni odgovor na to pitanje dajemo odmah: potrebne su 4 boje. Prije nego to razjasnimo, evo nekoliko dogovora o tome što ćemo smatrati kartama.

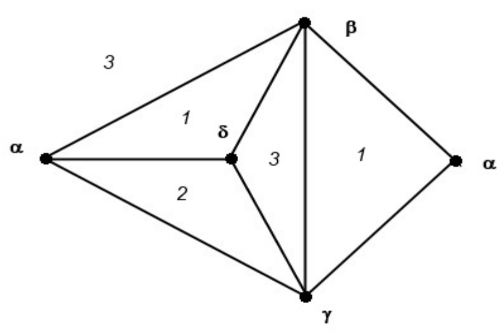


Smatramo da su države susjedne ako imaju zajednički brid kao granicu, a ne zajednički vrh (slika lijevo). Brid koji bi bio most nije dopustiv – to ništa ne predstavlja. Konačno, ništa ne predstavlja ni vrh stupnja 2 - takve bismo pregazili, a interpretacija nije moguća. Dakle, u kartama kakve ćemo gledati svi vrhovi imaju stupanj barem 3.

Definicija 1.3 *Karta je 3-povezan planarni graf prikazan u ravnini.*

Definicija 1.4 *Za kartu kažemo da je k-obojiva (f) ili k-strano obojiva ako se njene strane mogu obojati s k boja tako da nikoje dvije strane sa zajedničkim bridom nisu obojane istom bojom.*

U situacijama kad bi moglo doći do zabune govorit ćemo o vršnom odnosno o stranom bojanju i pisati da je graf k-vršno (v) odnosno k-strano (f) obojiv.



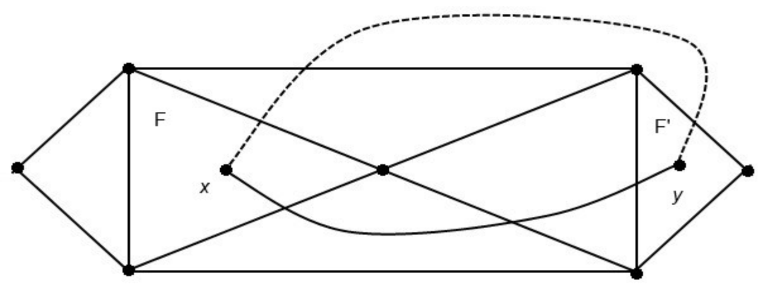
Primjer 1.6 *Graf sa slike je* 3*-obojiv* (f) *i* 4*-obojiv* (v).

Usvojimo sada neke činjenice u svezi s bojanjem strana.

Teorem 1.6 *Karta* G *je* 2*-strano obojiva onda i samo onda ako je* G *eulerovski graf.*

Dokaz Ovo je lijepa karakterizacija eulerovskih grafova. U ekvivalenciji moramo dokazati dva smjera.

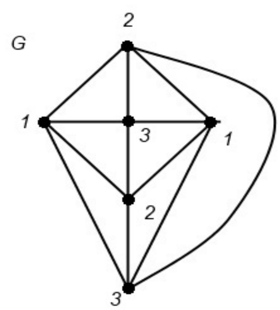
$(\Rightarrow)$ Neka je G 2-strano obojiva karta. Pogledajmo bilo koji vrh od G, kažimo v. Broj strana koje okružuju v zbog 2-obojivosti mora biti paran (boje naime tada alterniraju). No, ako je broj strana paran, onda je i broj granica među njima paran, tj. v je incidentan s parnim brojem bridova, dakle je parnoga stupnja. Kako je v bio proizvoljno izabran, ovo vrijedi za svaki vrh v, pa je po karakterizaciji eulerovskih grafova zadana karta G eulerovska.
$(\Leftarrow)$ Neka je dan eulerovski graf G. Obojimo kartu G na sljedeći način.

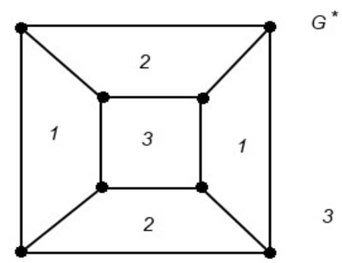


Uzmimo proizvoljnu stranu F i obojamo je crveno. Uočimo neku drugu stranu F', te izaberemo po jednu točku unutar strana F i F', a zatim na proizvoljan način spojimo te dvije točke, bilo kako, samo da ne prolaze nekim bridom od G (tj. tako da sve bridove pri prolasku sijeku negdje po sredini). Ako ovako formirana spojnica strana F i F' siječe bridove od G neparan broj puta, onda F' obojamo plavom (onom drugom bojom na raspolaganju), a ako spojnica siječe bridove paran broj puta, onda obojimo F' crvenom bojom. Tvrdimo da je ovo dobro definirano bojanje strana. Naime, pitamo se jesmo li mogli naći dvije različite spojnice između F i F' koje bi bile različite parnosti u smislu broja bridova koje presijecaju. No, uzmemo li dvije takve spojnice s različitim bridovima, one zatvaraju ciklus, koji je, tvrdimo, nužno parne "duljine". Ta činjenica slijedi zbog toga što je svaki vrh parnog stupnja. Ako je obiđen jedan jedini vrh, tvrdnja je očevidna, a ako je obiđeno više vrhova, pogleda se parnost bridova zaokruženih stvorenim ciklusom i vidi da je broj vrhova incidentnih s neparnim brojem presječenih bridova nužno paran (tehničke detalje ostavljamo čitatelju). Time smo obrazložili da je ovo bojanje dobro definirano, no očito je da je to bojanje korektno, u smislu da su susjedne strane raznobojne, pa je i ovaj smjer dokazan. □

Teorem 1.7 *Neka je G ravninski prikaz jednostavnog planarnog grafa G, te neka je G^* geometrijski dual od G. Tada je G k-vršno obojiv onda i samo onda ako je G^* k-strano obojiv.*

Dokaz ($\Rightarrow$) Možemo pretpostaviti da je G povezan, pa je G^* karta. Podsjetimo se da smo uspostavili korespondenciju između vrhova grafa i strana njegovog duala, u smislu da svaka strana od G^* sadrži točno jedan vrh od G. Ako postoji k-vršno bojanje od G, onda tvrdimo da možemo obojati strane od G^* tako da svaka strana ,,naslijedi" boju onog vrha grafa G kojeg po konstrukciji duala sadrži (s kojom je u bijektivnoj korespondenciji). Dvije susjedne strane od G^*, na ovaj način bojanja, ne mogu biti jednako obojane, jer su njima korespondenti vrhovi u G susjedni, pa su svakako različito obojani. Tako smo našli k-bojanje duala G^*, dakle je on k-strano obojiv.





($\Leftarrow$) Pretpostavimo da imamo dano k-strano bojanje grafa G^*. Obojamo sad vrhove grafa G tako da onaj vrh od G koji pripada nekoj strani od G^* bude obojan isto kao i ta strana. Dva susjedna vrha nisu obojana istom bojom, jer su korespondentne strane susjedne u G^*. Zato je G k-vršno obojiv. □

Dokažimo sada prethodni teorem (o tome kada je karta 2-strano obojiva) na drugi način. Karta G je 2-strano obojiva onda i samo onda ako je njen dual, graf G^*, 2-vršno obojiv, tj. bipartitan. No, G^* je bipartitan i planaran onda i samo onda ako je G eulerovski (i planaran, naravno). Ova ekvivalencija je jednostavan zadatak te je ostavljamo čitateljima za dokazati.

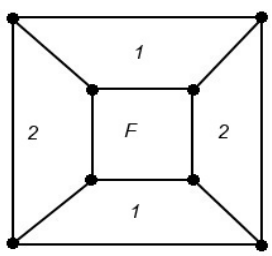
Korolar 1.1 *Problem četiri boje za karte ekvivalentan je problemu četiri boje za planarne grafove.*

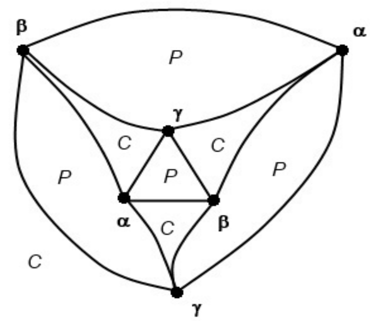
Teorem 1.8 *Neka je G kubična karta. Tada je G 3-strano obojiva onda i samo onda ako je svaka strana od G omeđena parnim brojem bridova.*

Dokaz Kubična karta je 3-regularna karta. Dokazujemo svaki smjer zasebno.

($\Rightarrow$) Za danu kartu uočimo jednu njenu stranu F. Strane koje su susjedne strani F moraju alternirati u boji (jer su na raspolaganju još samo dvije boje), pa je svaka strana omeđena parnim brojem bridova.

($\Leftarrow$) Dokazujemo dualnu tvrdnju, tj. ako je G jednostavni povezani ravninski graf u kojem je svaka strana trokut (ovo je dualno 3-regularnosti), te je svaki vrh parnoga stupnja, onda je takav graf G 3-vršno obojiv. Konstruirat ćemo jedno takvo vršno 3-bojanje. Označimo si boje na raspolaganju s α, β i γ. Kako je G eulerovski, njegove se strane (koje su trokutovi) mogu obojati s dvije boje, na primjer s crvenom (C) i plavom (P). Traženo vršno 3-bojanje dobivamo tako da vrhove crvenih trokutova pobojamo bojama α, β i γ u pozitivnom smjeru, a vrhove plavih trokutova pobojamo tim bojama u negativnom smjeru. Uočimo da je ovo bojanje moguće proširiti na cijeli graf. $\square$

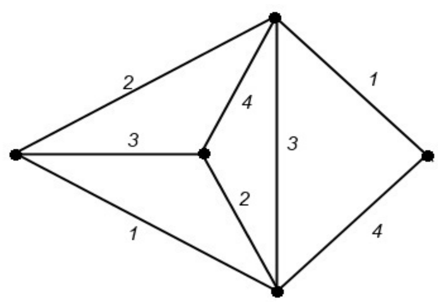




Poglavlje 2

Bojanja bridova

Definicija 2.1 *Za graf G kažemo da je bridno k-obojiv ako se njegovi bridovi mogu obojati s k boja tako da su bridovi koji su susjedni (oba incidentni s nekim vrhom) različito obojani. Ako je G bridno k-obojiv, ali nije bridno $(k-1)$-obojiv, onda kažemo da je kromatski indeks grafa G jednak k i pišemo $\chi'(G) = k$.*



Primjer 2.1 *Graf sa slike je bridno 4-obojiv, dakle je $\chi'(G) = 4$. Naime, postoji vrh stupnja 4, pa zaključujemo da je $\chi'(G) \geq 4$; kako smo našli jedno bridno 4-bojanje, time je dokazano da je kromatski indeks tog grafa jednak 4.*

Napomenimo da problem nalaženja kromatskog indeksa može svesti na problem nalaženja kromatskog broja. Vrijedi naime

$$\chi'(G) = \chi(L(G))$$

gdje smo s $L(G)$ označili bridni graf zadanog grafa. Podsjećamo, bridni graf $L(G)$ grafa G je graf čiji skup vrhova predstavljaju bridovi od G, a oni su susjedni ako su u G incidentni s nekim zajedničkim vrhom.

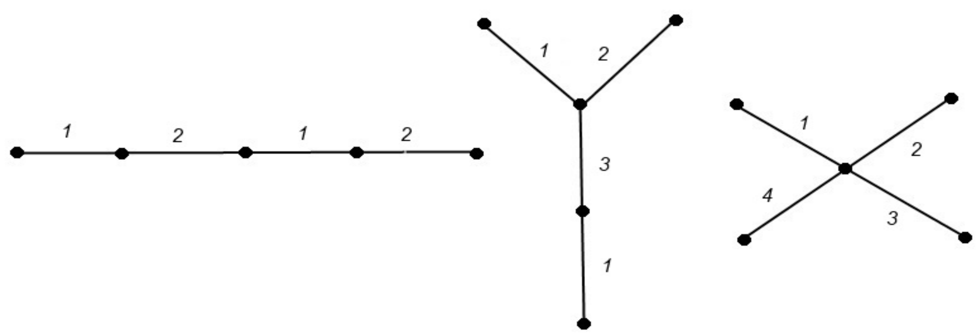
Svođenje nalaženja kromatskog indeksa na nalaženje kromatskog broja nam nimalo ne olakšava posao. Već u prethodnom primjeru smo se koristili očevidnom činjenicom da je $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, jer ako postoji vrh stupnja Δ, onda bridovi koji s tim vrhom incidiraju moraju biti obojani s Δ različitih boja. Kao i u slučaju bojanja vrhova, i ovdje postoji dobra ocjena odozgo.

Teorem 2.1 (Vizing, 1964.) *Ako je G jednostavan graf s najvećim stupnjem nekog vrha jednakim Δ, onda je*

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1 \, .$$

Znajući ovaj rezultat, preostaje nam za dani graf odrediti jednu od dvije mogućnosti za kromatski indeks: to je ili najveći stupanj vrha u grafu, ili taj broj uvećan za jedan. Može se pokazati da skoro svi grafovi imaju kromatski indeks jednak Δ, no za konkretan graf nam ta spoznaja ne pomaže u odlučivanju.

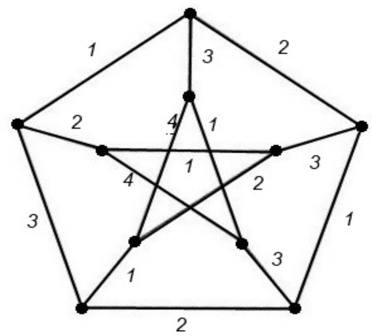
Primjer 2.2 *Poznato nam je da postoje tri neizomorfna stabla s* 5 *vrhova. Kromatski indeksi stabala sa slike su redom:* 2*,* 3 *i* 4*.*



Primjer 2.3 *Odredimo kromatski indeks nekih od poznatih klasa grafova:*
a) $\chi'(C_n) = \begin{cases} 2, & \textit{za } n \textit{ paran} \\ 3, & \textit{za } n \textit{ neparan} \end{cases}$
b) $\chi'(W_n) = n - 1$*, za* $n \geq 4$*. Zašto?*

Zadatak 2.1 *Odredite kromatski indeks Petersenovog grafa.*

Rješenje Petersenov graf G je 3-regularan. Prema Vizingovom teoremu vrijedi $3 \leq \chi'(G) \leq 4$. Pokazat ćemo da je $\chi'(G) = 4$. Uočimo, vanjski ciklus Petersenovog grafa je ciklus C_5, stoga se može bridno obojati s tri boje. Bridovi koji spajaju vrhove vanjskog ciklusa s vrhovima unutarnjeg ciklusa obojaju se s jednom od tri uvedene boje, pritom poštujući odabrano bridno bojanje vanjskog ciklusa. Preostaje bridno obojati unutarnji ciklus C_5. Za to su potrebne najmanje tri boje. Uvjerite se sami da unutarnji ciklus Petersenovog grafa nije moguće obojati s tri otprije uvedene boje bez narušavanja regularnosti odabranog bojanja ostatka Petersenovog grafa.

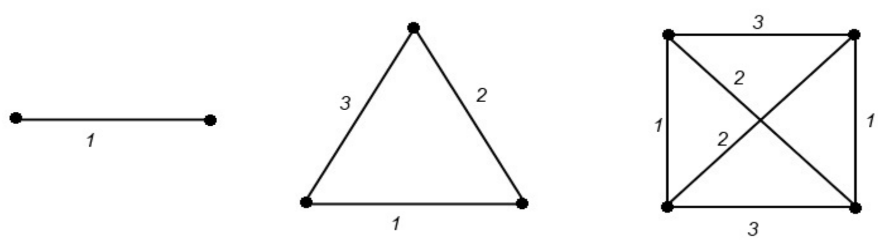


Pokazali smo da je $\chi'(K_4) = 3$, tj. da se postiže donja ocjena za kromatski indeks. To ne vrijedi uvijek za potpune grafove. Točnije, vrijedi sljedeći

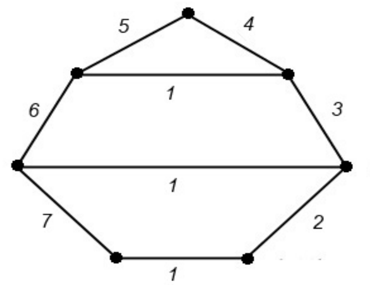
Teorem 2.2

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n, & \textit{za } n \textit{ neparan} > 1 \\ n-1, & \textit{za } n \textit{ paran} \end{cases}$$

Dokaz Prije nego krenemo u dokazivanje, uočimo da je rezultat istinit za $n = 2$, kao i za $n = 3$, što pokazuju ove slike.



Ako je n neparan, onda smjestimo najprije njegove vrhove u ravninu kao vrhove pravilnog n-terokuta (kromatski indeks dakako je neovisan o tome kako graf prikažemo). Vanjski hamiltonovski ciklus pobojamo s n različitih boja, dakle svaki brid s drugom bojom. Sve preostale bridove („nutarnje dijagonale") sada obojamo tako da svakoj dijagonali damo onu boju s kojom je pobojana stranica koja je s njom paralelna (takva je, uočimo, jednoznačno određena). Očito je da je ovo bojanje dobro, u smislu da su susjedni bridovi raznobojni. Dakako, postavlja se pitanje, nismo li mogli proći s jednom bojom manje (jer mi smo pobojali graf s $\Delta + 1$ bojom).

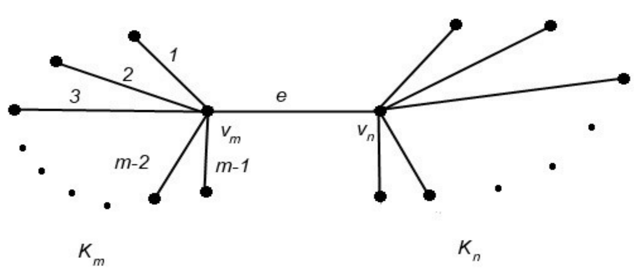


No, kako god mi bojali, bridova iste boje može biti, za neparni n, najviše $\frac{n-1}{2}$ (Kad pobojamo jedan brid, okupirali smo 2 vrha, u njima se više ista boja ne smije pojaviti. Bojajući dalje, možemo u najboljem slučaju istom bojom okupirati $n-1$ vrh). No, ako bismo bojali s $n-1$ bojom, onda možemo pobojati najviše $\frac{(n-1)^2}{2}$ bridova, što je premalo, jer K_n ima $\frac{n(n-1)}{2}$ bridova. Dakle, nam nužno treba n boja (i tada uspijevamo točno pobojati sve bridove tako da je svakom bojom pobojano $\frac{n-1}{2}$ bridova.

Ako je n paran, onda ćemo bojanje za K_n dobiti iz bojanja za K_{n-1}. Obojamo dakle K_{n-1} s $n-1$ bojom, te dodajmo tom grafu još jedan vrh i spojimo ga sa svakim preostalim vrhom. Budući je K_{n-1} $(n-2)$-regularan graf, svaki od njegovih vrhova na sebi nema brid neke boje. Upravo tom bojom pobojamo svaki od bridova dobivenih spajanjem nekog vrha grafa K_{n-1} s nadodanim vrhom. Tako smo u ovom slučaju postigli donju ocjenu Vizingovog teorema, pa je tvrdnja dokazana. □

Zadatak 2.2 *Zadan je graf G u kojem postoji brid e takav da je $G-e = K_n \cup K_m$, $n \leq m$. Odredite kromatski indeks grafa G.*

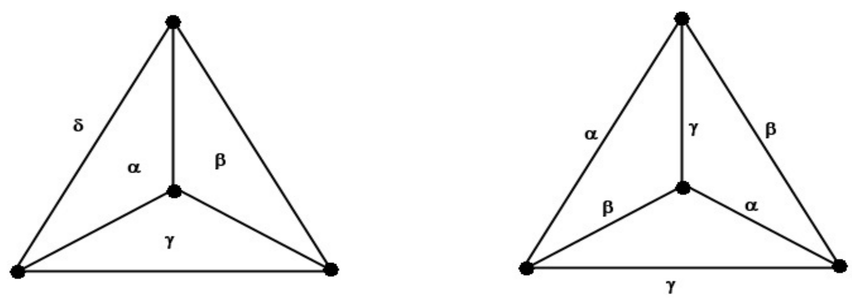
Rješenje Uočimo da zbog $n \leq m$ vrijedi $\chi'(K_n) \leq \chi'(K_m)$. Nadalje, lako se uočava da je $\chi'(G) \leq \chi'(K_m) + 1$. Neka je e brid između vrhova v_m i v_n, pri čemu je v_m vrh podgrafa K_m, a v_n vrh podgrafa K_n.



Ako je m paran, onda je $\chi'(K_m) = m-1$ i brid v_m je susjedan s $m-1$ bridova od K_m obojanih s $m-1$ boja. Stoga je za bojanje brida e potrebno uvesti još jednu boju. Kako je $n \leq m$, graf K_n je moguće bridno obojati s $m-1$ bojom, pa je $\chi'(G) = m$. Ako je m neparan, onda je $\chi'(K_m) = m$. Vrh v_m susjedan je s $m-1$ bridom obojanim u $m-1$ boja. Pridružimo bridu e preostalu boju iz bridnog bojanja K_m. Odavde lagano slijedi da je $\chi'(G) = m$.

Teorem 2.3 *Teorem o četiri boje ekvivalentan je tvrdnji da je $\chi'(G) = 3$ za svaku kubičnu kartu G.*

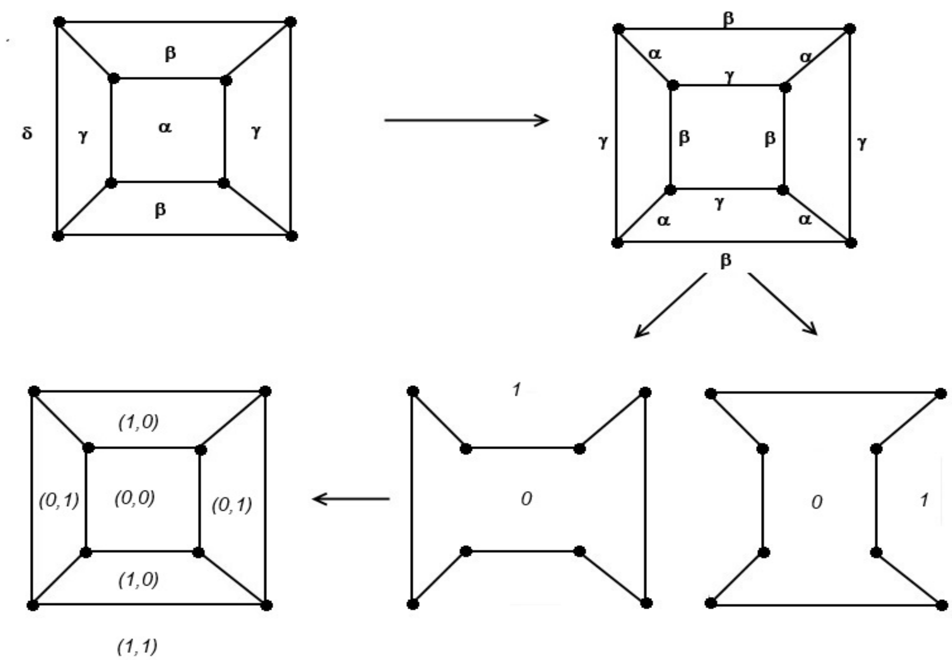
Dokaz ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da nam je dano 4-bojanje strana od G. Identificirajmo te četiri boje ovako: $\alpha = (1,0)$, $\beta = (0,1)$, $\gamma = (1,1)$ i $\delta = (0,0)$. Konstruirat ćemo 3-bojanje bridova od G na način da brid e pobojamo onom bojom koju dobijemo binarnim zbrajanjem po komponentama boja strana koje graniče preko brida e.



Tvrdimo da je ovo zaista bridno 3-bojanje. Svakako, neku petu boju nismo mogli dobiti, binarnim zbrajanjem ostali smo u skupu dane 4 boje. Također, uočimo i da se boja δ ne može pojaviti, jer različite boje iz gornjeg skupa od 4 boje ne mogu nikako dati δ. (Usput, boja δ dobiva se kao $\delta = \alpha + \alpha = \beta + \beta = \gamma + \gamma$.) Dakle, pojavile su se samo boje α, β i γ. Dalje, dva susjedna brida su sigurno različito obojana, inače bi, budući susjedni bridovi graniče s jednom istom stranom, recimo γ, pa bi bilo npr. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, što je kontradikcija. Uočimo da smo u bitnome od skupa boja formirali Kleinovu četvornu grupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i da u njoj računamo.

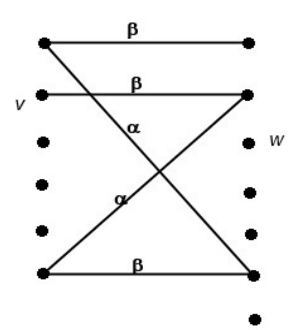
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je dano 3-bojanje bridova u G. Tada u svakom vrhu incidiraju bridovi sve tri boje. Podgraf od G određen onim bridovima koji su pobojani s α ili β je regularan graf stupnja 2, pa je 2-strano obojiv. (Teorem je rekao da je karta 2-strano obojiva onda i samo onda ako je eulerovski graf; 2-regularan graf je eulerovski ako je povezan, ako nije, tvrdnja također vrijedi što se pokaže slično.) Pobojamo strane od ovog 2-regularnog podgrafa bojama 0 i 1. Na sličan način obojamo bojama 0 i 1 podgraf od G određen bridovima pobojanima s α i γ. Svekupno, svakoj smo strani od G pridijelili dvije koordinate (boje), zapišimo ih kao (x, y), $x, y \in \{0, 1\}$. Imamo dakle 4 boje i tvrdimo da je to traženo bojanje strana. Zaista, po konstrukciji, susjedne strane ne mogu imati iste obje koordinate, pa je time teorem dokazan. $\square$

Primjer 2.4 *Ilustrirajmo konstruirana bojanja iz prethodnog teorema na kocki.*



Teorem 2.4 (König, 1916.) *Ako je G bipartitan graf s najvećim stupnjem nekog vrha jednakim Δ, onda je $\chi'(G) = \Delta$.*

Dokaz Matematičkom indukcijom po broju bridova od G. Po pretpostavci indukcije, moguće je obojati s Δ boja sve bridove od G osim jednog, kažimo brida vw. Oduzmemo li taj brid, vrijedi da je $deg(v) \leq \Delta - 1$, $deg(w) \leq \Delta - 1$, pa barem jedna boja nedostaje u vrhovima v i w. Ako je to ista boja, onda njome obojamo brid vw pa smo gotovi. Ako pak takva boja ne postoji, učinimo sljedeće. Neka je α boja koja nedostaje u vrhu v, te neka je β boja koja nedostaje u vrhu w. Neka je $H_{\alpha\beta}$ povezani podgraf od G koji se sastoji od vrha v i onih vrhova i bridova od G koji se mogu doseći iz v bridovima obojanima s α ili β.

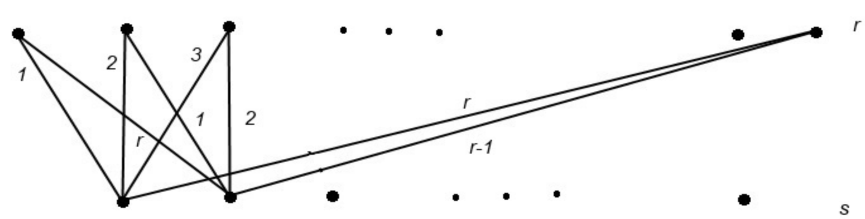


Budući je G bipartitan, podgraf $H_{\alpha\beta}$ ne sadrži vrh w. Stoga, zamjenom boja α i β u tom podgrafu ništa ne kvarimo. Nakon zamjene obojamo brid vw s bojom β, to je naime sada boja koja nedostaje i u vrhu v i u vrhu w, čime smo dovršili Δ-bojanje danog bipartitnog grafa. $\square$

Korolar 2.1 $\chi'(K_{r,s}) = max\{r, s\}$.

Zadatak 2.3 *Konstruirajte efektivno jedno $\chi'(G)$-bojanje za $K_{r,s}$.*

Rješenje Ne smanjujući općenitost pretpostavimo da je $r \geq s$. Tada bojamo kao na slici ispod:



Boje prvog od s vrhova drugog skupa su redom $(1, 2, \ldots, r)$, drugog su $(2, 3, \ldots, r, 1)$, i konačno s-tog vrha su $(r, 1, 2, \ldots, r-1)$. To je, očevidno dobro bojanje.

Zadatak 2.4 *Odredite kromatski indeks k-kocke Q_k.*

Rješenje Graf Q_k je k-regularan. S obzirom da je Q_k bipartitan graf, on je po Königovom teoremu bridno k-obojiv.

Zadatak 2.5 *Dokažite da je $\chi'(G) = 3$ za svaki kubični hamiltonovski graf G.*

Rješenje Po pretpostavci zadatka je $\chi'(G) \geq 3$, pa treba naći jedno 3-bojanje bridova. Uočimo hamiltonovski ciklus i obojamo ga naizmjence s 2 boje (kubični graf ima paran broj vrhova, jer je $3n = 2m$). Preostale bridove obojamo trećom bojom.

Zadatak 2.6 *Neka je G jednostavan povezan neregularan graf. Dokažite da vrijedi $\chi(G) \leq \chi'(G)$.*

Rješenje Uočimo da G nije potpuni graf jer G nije regularan. Stoga, za $\Delta(G) \geq 3$, možemo primijeniti Brooksov teorem: $\chi(G) \leq \Delta(G)$. Prema Vizingovom teoremu je $\Delta(G) \leq \chi'(G)$. Dakle, za $\Delta(G) \geq 3$ vrijedi

$$\chi(G) \leq \Delta(G) \leq \chi'(G).$$

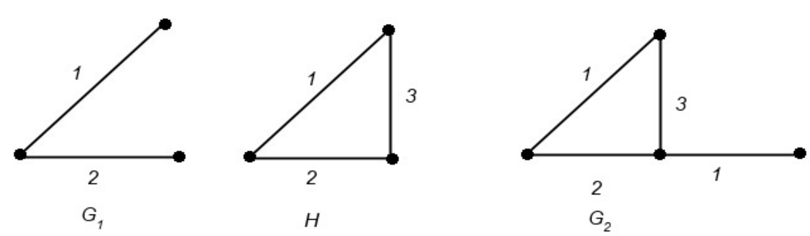
Preostaje nam zasebno ispitati slučajeve kada je $\Delta(G) = 1$ i $\Delta(G) = 2$. Jedini povezani graf s maksimalnim stupnjem $\Delta(G) = 1$ je lanac P_2 koji je regularan, stoga ne zadovoljava pretpostavke ovog zadatka. Povezani grafovi s maksimalnim stupnjem $\Delta(G) = 2$ su lanci P_n i ciklusi C_n, $n \geq 3$. Ciklus C_n je regularan, a lanac P_n nije. Vrijedi da je $\chi(P_n) = \chi'(P_n) = 2$, stoga je trivijalno ispunjen zahtjev $\chi(P_n) \leq \chi'(P_n)$. Ovime smo dokazali zadanu tvrdnju.

Zadatak 2.7 *Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: ako su G_1 i G_2 grafovi za koje vrijedi*

$$\chi'(G_1) = \Delta(G_1), \qquad \chi'(G_2) = \Delta(G_2),$$

te ako je H graf za koji vrijedi $G_1 \leq H \leq G_2$, onda je $\chi'(H) = \Delta(H)$.

Rješenje Pokazat ćemo da tvrdnja ne vrijedi. Evo jednog primjera grafova G_1, H i G_2 koji zadovoljavaju pretpostavke teorema. Graf G_1 podgraf of H, a H je podgraf od G_2.

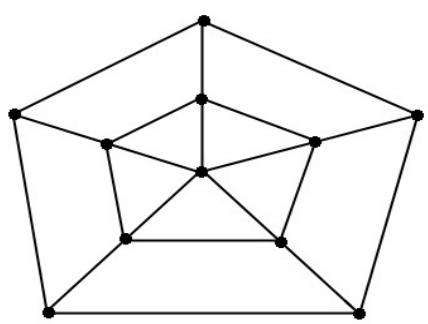


Vrijedi $\chi'(G_1) = \Delta(G_1) = 2$, $\chi'(G_2) = \Delta(G_2) = 3$, ali i $\chi'(H) = 3$, $\Delta(H) = 2$.

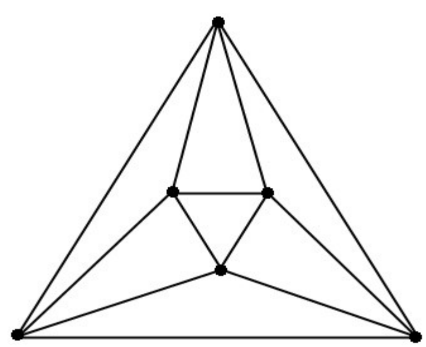
Poglavlje 3

Zadaci za vježbu

1. Odredite kromatski broj grafa sa slike.



2. Odredite kromatski broj oktaedra.



3. Odredite kromatski broj k-kocke Q_k.
4. Odredite kromatski broj grafa $K_{1,s}$.
5. Neka je G 3-regularni graf s $n > 4$ vrhova struka 3. Odredite $\chi(G)$.
6. Dokažite ili opovrgnite: kromatski broj Δ-regularnog grafa je uvijek $\Delta + 1$.

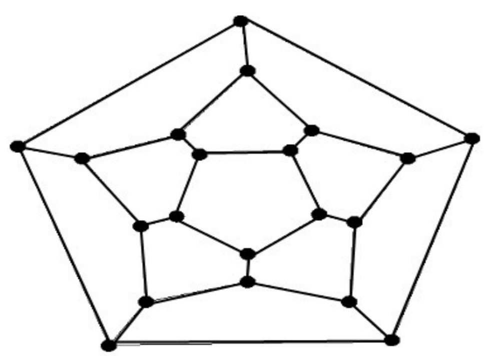
7. Kemičar mora pohraniti 7 kemikalija, a, b, c, d, e, f, h u razne dijelove skladišta. Neke od kemikalija burno reagiraju ako dođu u kontakt, pa se svakako moraju čuvati odvojeno. Tablica pokazuje kemikalije koje burno reagiraju. Koliko je odvojenih dijelova skladišta potrebno da bi se one pospremile?

	a	b	c	d	e	f	g
a	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
b	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
c	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
d	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$
e	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
f	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$
g	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

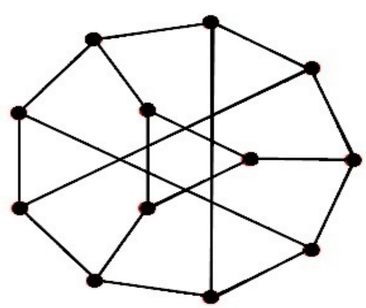
8. Matematičkom indukcijom dokažite da je svaki jednostavni planarni graf bez trokutova 3-obojiv.

9. Odredite kromatski indeks oktaedra.

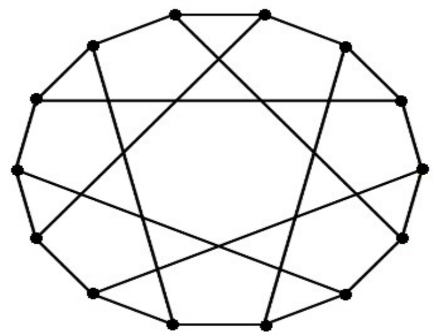
10. Odredite kromatski indeks dodekaedra.



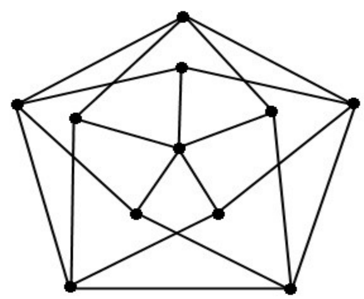
11. Odredite kromatski broj i kromatski indeks Tietzeovog grafa.



12. Odredite kromatski broj i kromatski indeks Heawoodovog grafa.



13. Odredite kromatski broj i kromatski indeks Grötzschovog grafa.



14. Neka je G jednostavni Δ-regularni graf s neparnim brojem vrhova.
    a) Dokažite da je $\chi'(G) = \Delta + 1$.
    b) Neka je graf H dobiven iz G oduzimanjem ne više od $(\Delta - 1)/2$ bridova. Dokažite da je $\chi'(H) = \Delta + 1$.

15. Dokažite ili opovrgnite: kromatski indeks Δ-regularnog grafa je uvijek $\Delta+1$.

Odgovori

1. $\chi(G) = 4$.
2. $\chi(G) = 3$.
3. $\chi(Q_k) = 2$.
4. $\chi(K_{1,s}) = 2$.
5. $\chi(G) = 3$.
6. Tvrdnja ne vrijedi: 3-kocka Q_3 je 3-regularan graf i vrijedi da je $\chi(Q_3) = 2$.
7. 3. Pogledajte zadatak 1.3
8. Pogledajte zadatak 1.4.
9. $\chi'(G) = 4$.
10. $\chi'(G) = 3$.
11. $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 4$.
12. G je kubičini bipartitni graf, stoga je $\chi(G) = 2$, $\chi'(G) = 3$.
13. $\chi(G) = 4$, $\chi'(G) = 5$.
14. a) Pogledajte dokaz teorema 2.2. b) Neka je $|V(G)| = 2n + 1$. Maksimalan broj bridova od G koji se mogu prebojati s Δ boja je $N = n \cdot \Delta$. Uočite da graf G ima $n \cdot \Delta + \Delta/2$ bridova. Stoga, oduzimanjem najviše $(\Delta - 1)/2$ bridova iz G dobivamo graf H čiji broj bridova premašuje N. Zaključujemo da se H ne može bridno obojati s Δ boja.
15. Tvrdnja ne vrijedi. Primjer je ciklus C_{2n} koji je 2-regularan i čiji je kromatski indeks jednak 2.

Poglavlje 4

Istraživački zadaci

Zadatak 4.1 *Pitanje* 4*-obojivosti planarnih grafova formulirano je još davne 1852. godine, a prvi su dokaz* Teorema o četiri boje *dali Appel i Haken 1976. godine. Bio je to prvi računalni dokaz jednog važnog matematičkog teorema. Isprva je ovaj dokaz pomoću računala označen kontroverznim jer ga nije moguće* provjeriti rukom*. Proučite dokaz teorema i literaturu o* Problemu četiri boje*. Povijesno je ovaj problem nastao i vezan je uz bojanje geografskih karata: koliko je boja potrebno da bi se dana geografska politička karta obojala tako, da zemlje koje graniče budu obojane različitim bojama? Potrebne su, naravno, četiri boje. Pronađite barem jednu skupinu od četiri zemlje koje graniče jedna s drugom. Nalazi li se i Hrvatska u jednoj takvoj skupini?*

Zadatak 4.2 Snark *je povezan kubični graf bez mostova kromatskog indeksa* 4*. Prvi primjer snarka je konstruiran 1889. godine i to je, dobro nam poznat, Petersenov graf. Proučavanje snarkova inicirao je škotski znanstvenik P. G. Tait 1880. godine kada je dokazao da je* Problem četiri boje *ekvivalentan tvrdnji da niti jedan snark nije planaran. Tek je 1946. godine hrvatski matematičar Danilo Blanuša otkrio nove primjere snarkova. Pronađite u literaturi Blanušine snarkove. Jesu li to jedini danas poznati snarkovi?*

Zadatak 4.3 *Bikubični graf je bipartitni* 3*-regularni graf. Primjeri takvog grafa su potpuni bipartitni graf* $K_{3,3}$ *i* 3*-kocka* Q_3*. Pronađite u literaturi još neke primjere bikubičnih grafova. Britanski matematičar W.T. Tutte je u svom radu iz 1971. godine postavio slutnju da je svaki bikubični graf hamiltonovski. Proučite u literaturi je li njegova slutnja dokazana ili opovrgnuta.*

Zadatak 4.4 *Za svaki prirodni broj* $k \in \mathbb{N}$ *postoji graf* G *bez trokutova, takav da mu je kromatski broj* $\chi(G) = k$*. Dokažite ovu tvrdnju!*
Naputak: *Dokaz provedite matematičkom indukcijom. Prethodno promotrite slučajeve* $k = 1, 2, 3$ *i* 4*.*

Zadatak 4.5 *Dokažite da za svaki graf G s n vrhova vrijedi sljedeća ocjena*

$$2\sqrt{n} \leq \chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Zadatak 4.6 *Dokažite da je kromatski indeks svakog 3-regularnog grafa koji ima most jednak 4.*

Usmjereni grafovi

Anamari Nakić, Mario-Osvin Pavčević

20. svibnja 2014.

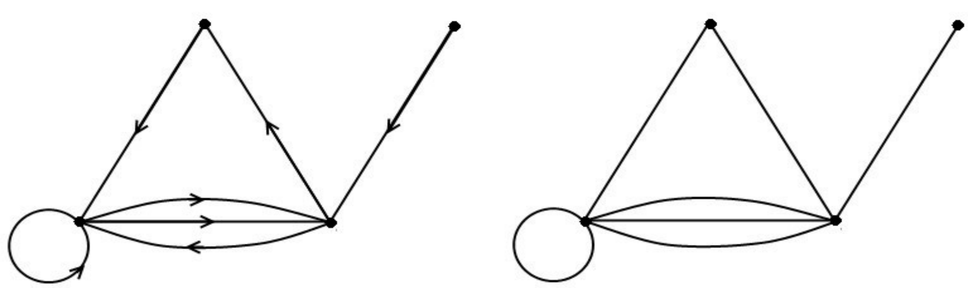
Poglavlje 1

Uvod

Definicija 1.1 *Usmjereni graf ili digraf D sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(D)$, čije elemente zovemo vrhovi, i konačne familije $A(D)$ uređenih parova elemenata skupa $V(D)$ koje zovemo lukovi.*

Kad govorimo o skupu $V(D)$ govorimo o skupu vrhova (u engleskoj terminologiji vrh se kaže vertex, pa zato oznaka $V(D)$), a kad govorimo o skupu $A(D)$ govorimo o skupu lukova (engleski se luk kaže arc, pa zato oznaka $A(D)$). Umjesto precizne oznake (u, v) za luk od vrha u do vrha v, često ćemo kratko pisati uv i misliti na orijentaciju tog luka od u prema v.

Gotovo svi pojmovi teorije grafova koje smo radili se analogno definiraju za digrafove. Ako danom digrafu D „pobrišemo" orijentaciju lukova, te svaki luk pretvorimo u brid, onda graf G koji tako dobijemo zovemo pripadajući graf digrafa D.



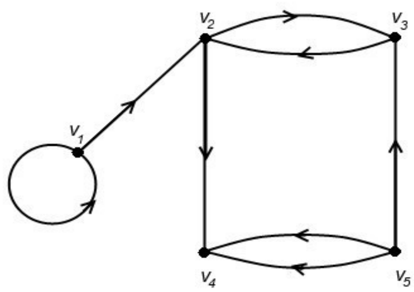
Za digraf D kažemo da je jednostavan ako su svi lukovi od D različiti, te ako on nema petlji (lukova oblika vv). Pripadajući graf jednostavnog digrafa ne mora biti jednostavan – moguće je da ima dvostruke bridove koji su nastali od (različitih!) lukova uv i vu.

Definicija 1.2 *Dva digrafa su izomorfna ako postoji izomorfizam između pripadnih grafova koji čuva poredak vrhova svakog luka.*

Dakako da bi se ova definicija mogla iskazati i eksplicitno, no to ostavljamo čitatelju za vježbu.

Definicija 1.3 *Vrhovi v i w digrafa D su susjedni ako postoji luk u $A(D)$ oblika vw ili wv. Vrhovi v i w su tada incidentni s dotičnim lukom.*

Definicija 1.4 *Ako vrhove digrafa D obilježimo s $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, onda je matrica susjedstva od D kvadratna $n \times n$ matrica $A = [a_{ij}]$, pri čemu je a_{ij} broj lukova iz vrha v_i u vrh v_j.*



Primjer 1.1 *Za digraf zadan slikom, matrica susjedstva je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Definicija 1.5 *Šetnja u digrafu D je konačan niz lukova oblika v_0v_1, v_1v_2, ... , $v_{m-1}v_m$. Ponekad taj niz pišemo kao $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m$ i govorimo o šetnji od v_0 do v_m, koja je duljine m. Na sličan, situaciji u grafovima analogan način, definiramo stazu, put i ciklus.*

Uočimo da usmjerena staza može sadržavati i luk uv i vu, ali svaki od njih samo jednom. U prethodnom primjeru $v_2 \to v_3 \to v_2 \to v_4$ je staza duljine 3, a najdulji ciklus je duljine 2, i to je $v_2 \to v_3 \to v_2$.

Definicija 1.6 *Digraf D je povezan ako se ne može izraziti kao disjunktna unija dva digrafa, na prirodan način. Ekvivalentno je reći da je pripadajući graf povezan.*

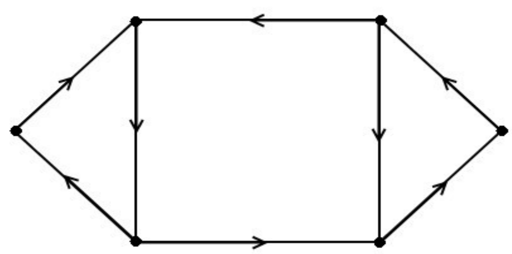
Definicija 1.7 *Digraf D je jako povezan ako za svaka dva vrha v, $w \in D$ postoji (naravno usmjerena) šetnja iz v u w.*

Svaki jako povezani graf je povezan, no povezani graf ne mora biti jako povezan. To je upravo slučaj u digrafu iz prethodnog primjera – on je povezan, ali nije jako povezan, jer se iz vrha v_4 ne može usmjerenom šetnjom doći ni u jedan drugi vrh toga digrafa (uočimo da se to vidi i tako što je 4. redak matrice incidencije nul-redak.

Sada se postavlja sljedeće prirodno zanimljivo pitanje. Imamo li mrežu ulica (neusmjerenu), možemo li ulice učiniti jednosmjernima (dakle, orijentirati ih) tako da mjesto bude jako povezano, tj. da se u svaki vrh može doći u smjeru vožnje? Neke nužne uvjete odmah vidimo – na primjer, imamo li u zadanom grafu koji prikazuje mrežu ulica most, problem ima negativan odgovor, jer ćemo mostom moći prijeći iz jednog dijela grada u drugi, ali onda nikako obratno.

Definicija 1.8 *Za graf G reći ćemo da je usmjeriv ako se svaki brid od G može orijentirati (usmjeriti) tako da je dobiveni digraf jako povezan.*

Primjer 1.2 *Evo primjera usmjerivog grafa i jedne moguće orijentacije njegovog skupa bridova.*



Primijetimo da je svaki eulerovski graf usmjeriv; naprosto usmjerimo eulerovsku stazu u istom smjeru, što garantira da ćemo (po toj stazi) moći doći u svaki vrh iz bilo kojeg vrha.

Teorem 1.1 *Neka je G povezani graf. G je usmjeriv onda i samo onda ako je svaki brid od G sadržan u barem jednom ciklusu.*

Dokaz ($\Rightarrow$) Ovaj smjer je jasan, jer ako je graf usmjeriv, onda smo brid uv nekako orijentirali, na primjer baš tako, (u, v). No, jer je G usmjeriv, to nakon orijentiranja svih bridova postoji šetnja iz v u u, iz koje nakon eliminacije eventualno suvišnih lukova dolazimo do orijentiranog ciklusa, kojem u početnom grafu odgovara ciklus, kojemu brid uv svakako pripada.

($\Leftarrow$) U grafu G neki ciklus C svakako postoji. Uočimo ga i orijentirajmo njegove bridove „ciklički". Ako je svaki brid iz G sadržan u tom ciklusu C, onda smo gotovi s orijentiranjem. Ako ne, uočimo neki brid $e \in G$ koji je susjedan već orijentiranom ciklusu C. Po pretpostavci, e se također nalazi u nekom ciklusu C' kojeg opet orijentiramo ciklički, sve njegove bridove osim onih koji su već eventualno bili orijentirani kao bridovi od C. U svakom takvom koraku, digraf koji dobivamo je jako povezan, a budući je skup bridova konačan, postupak orijentiranja bridova uspješno ćemo okončati. $\square$

Zadatak 1.1 *Neka je D jednostavni digraf s n vrhova i m lukova.*
(i) Dokažite da ako je D povezan, onda je

$$n-1 \leq m \leq n(n-1)\,.$$

(ii) Nađite odgovarajuću ocjenu za jako povezani digraf D!

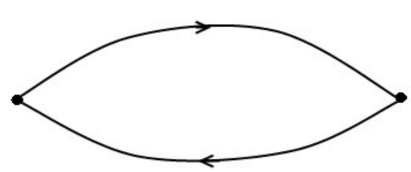
Rješenje (i) Najveći broj bridova postiže se za potpuni digraf, dakle za situaciju kad između svaka dva vrha postoje obostrani lukovi. U tom slučaju lukova je ukupno $n(n-1)$. Slučaj s najmanjim brojem bridova postiže se ako je pripadajući graf stablo, koje ima $n-1$ bridova. Nalaženjem primjera u kojima se jednakosti u zadanim nejednakostima postižu, tvrdnja je dokazana.

(ii) Ocjena odozgo ostaje nepromijenjena. Ocjena odozdo za broj bridova se može poboljšati, jer digraf čiji je pripadajući graf stablo nije sigurno jako povezan. No, uzmemo li ciklus s n vrhova, on ima $m = n$ bridova, te ako ga ,,ciklički" orijentiramo, dobit ćemo jako povezani digraf. Sveukupno smo pokazali da je ocjena za broj lukova kod jako povezanog digrafa dana s

$$n \leq m \leq n(n-1)\,.$$

Zadatak 1.2 *Za digraf D definira se suprotan digraf $\tilde{D}$ tako da se svakom luku od D obrne orijentacija.*
(i) Navedite primjer digrafa koji je izomorfan sebi suprotnom digrafu.
(ii) Kakva je veza između matrica susjedstva od D i $\tilde{D}$?

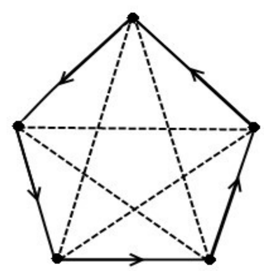
Rješenje (i) To je svaki potpuni digraf, na primjer s dva vrha:



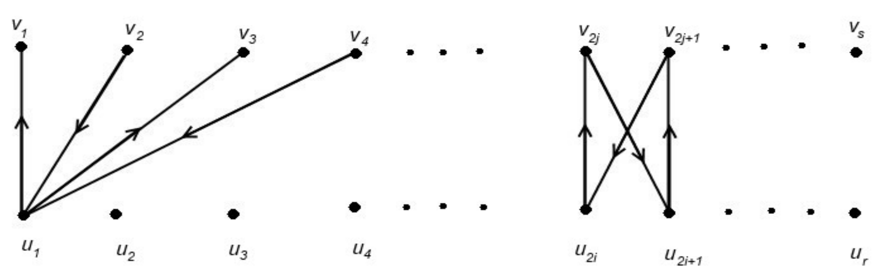
(ii) Jasno je, po definiciji suprotnog digrafa, da je $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$, pa je prema tome $A_{\tilde{D}} = A_D^T$. Uočimo da možemo iskazati i ovakvu karakterizaciju digrafova koji su izomorfni sebi suprotnim digrafovima: $D \cong \tilde{D}$ onda i samo onda ako je A_D simetrična matrica. Dokažite formalno ovu tvrdnju!

Zadatak 1.3 *Jesu li potpuni graf K_n i potpuni bipartitni graf $K_{r,s}$ usmjerivi? Nađite efektivno po jednu orijentaciju za svakog od njih!*

Rješenje Pogledajmo prvo potpune grafove. Uočimo ciklus kroz sve vrhove, takav postoji, pa ga ciklički orijentirajmo. Ostale bridove možemo orijentirati bilo kako.



Nešto je složenija situacija kod potpunih bipartitnih grafova. Označimo vrhove jednog skupa s $u_1, u_2, \dots, u_r$ a drugog s $v_1, v_2, \dots, v_s$. Orijentirajmo bridove na sljedeći način. Ako su indeksi vrhova iste parnosti, onda orijentiramo od u_i prema v_j, a ako su suprotne parnosti, onda orijentiramo od v_j prema u_i.



Tvrdimo da je ovako formiran digraf jako povezan. Da bismo se uvjerili u to, potrebno je proći kroz nekoliko slučajeva. Iz u_{2i} u v_{2j} postoji direktan luk, kao i iz u_{2i+1} u v_{2j+1}, za sve i, j. Iz u_{2i} u u_{2j} šetnja je: $u_{2i} \to v_{2j} \to u_{2j+1} \to v_{2j+1} \to u_{2j}$. Slično za neparne u-ove. Iz u_{2i} u u_{2j+1} šetnja je: $u_{2i} \to v_{2j} \to u_{2j+1}$, kao i za sve ostale ovdje još nenavedene slučajeve.

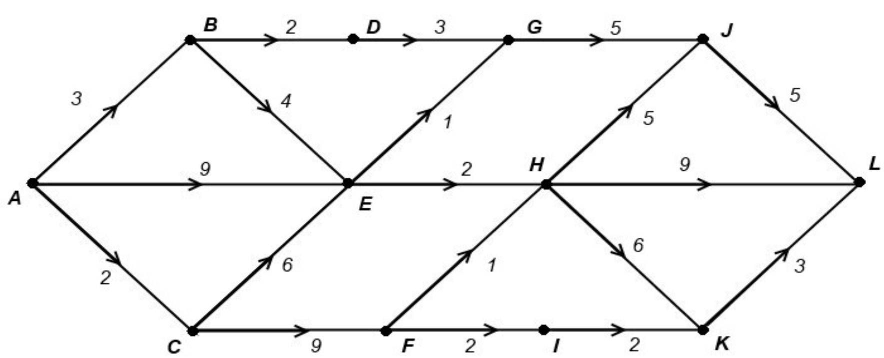
Poglavlje 2

Nalaženje kritičnog puta

Promotrimo sljedeći problem. Pretpostavimo da treba obaviti neki posao koji se izvodi u etapama, pri čemu se neke etape ne mogu obaviti dok se ne završe neke koje im prethode, dok se pak druge etape mogu izvoditi nezavisno, ,,paralelno". Etape imaju svoje trajanje. Pitamo se koliko je minimalno vrijeme potrebno da se izvede cijeli posao, odnosno sve njegove etape, te kako ga organizirati.

Problem ćemo izmodelirati pomoću digrafova. Konstruiramo mrežu aktivnosti na prirodan način, vezujući one etape koje su zavisne, u smjeru zavisnosti, s težinama koje odgovaraju (minimalnom) trajanju pojedine etape. Tako dobivamo težinski digraf. On ima jasan početak i kraj, pri čemu je početni vrh ,,izvor", iz kojeg svi lukovi izlaze, a krajnji vrh je ponor, i u njega svi lukovi ulaze. Traženo rješenje nazivat ćemo ,,kritični put". On opisuje način kako organizirati posao uz uvjet da je njegovo trajanje minimalno, a uz poštivanje svih uvjetovanosti, tj. čekanja.

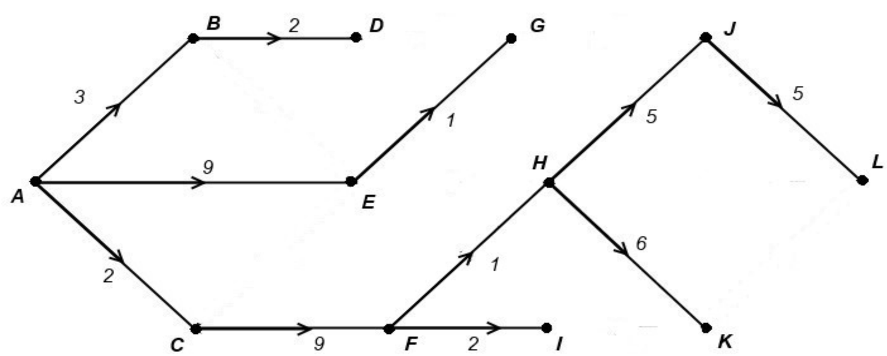
Primjer 2.1 *Nađite kritični put za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom:*



Potražimo ,,najkraći najdulji put" algoritmom sličnim Dijkstrinom algoritmu. Krećući od izvora, promatrat ćemo vrhove u koje možemo doći iz onih gdje smo optimum (maksimalnu vrijednost) već našli. Na primjer, kako u vrh E gornje mreže možemo doći samo iz vrhova A, B i C, onda sigurno možemo jednostavno naći najdulji put do E znamo li najdulje putove do njegovih prethodnika u mreži.

Vrhu A pridijelimo duljinu 0, $l(A) = 0$.
U vrh B možemo samo iz A, pa je $l(B) = 3$.
U vrh C možemo samo iz A, pa je $l(C) = 2$.
U vrh D možemo samo iz B, pa je $l(D) = l(B) + 2 = 5$.
U vrh E možemo iz vrhova A, B ili C, pa je $l(E) = \max\{l(A)+9, l(B)+4, l(C)+6\} = 9$.
U vrh F možemo samo iz C, pa je $l(F) = 11$.
U vrh G možemo iz vrhova D i E, pa je $l(G) = \max\{l(D) + 3, l(E) + 1\} = 10$.
U vrh H možemo iz vrhova E i F, pa je $l(H) = \max\{l(E) + 2, l(F) + 1\} = 12$.
U vrh I možemo samo iz F, pa je $l(I) = l(F) + 2 = 13$.
U vrh J možemo iz vrhova G i H, pa je $l(J) = \max\{l(G) + 5, l(H) + 5\} = 17$.
U vrh K možemo iz vrhova H i I, pa je $l(K) = \max\{l(H) + 6, l(I) + 2\} = 18$.
U vrh L možemo iz vrhova J i K, pa je $l(L) = \max\{l(J) + 5, l(K) + 3\} = 22$.

Slijedi da je najmanja najveća duljina 22, pri čemu algoritam treba pamtiti i kako je ta duljina postignuta. Uočimo da zastoji (kašnjenja) mogu i ne moraju prouzročiti kašnjenje cijeloga posla; promislite o čemu to zapravo ovisi.



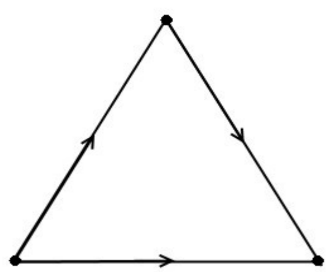
Poglavlje 3

Turniri

U ovom poglavlju pozabavit ćemo se nekim posebno lijepim digrafovima, odnosno proučavati dodatna svojstva koja digrafovi mogu imati.

Definicija 3.1 *Za povezani digraf D reći ćemo da je eulerovski ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki luk od D. Takvu stazu onda zovemo eulerovska staza.*

Primjer 3.1 *Digraf sa slike nije eulerovski digraf, iako je njemu pripadni graf eulerovski.*



Uočimo da je nuždan uvjet za eulerovost digrafa da je on jako povezan. Naime zasigurno moramo moći doći do svakog vrha, i proći svakim lukom.

Definicija 3.2 *Izlazni stupanj vrha $v \in V(D)$ je broj lukova oblika vw; označavamo ga s $outdeg(v)$. Ulazni stupanj od v je broj lukova oblika uv; njega označavamo s $indeg(v)$.*

Uočimo da vrijedi:

$$\sum_{v \in V(D)} indeg(v) = \sum_{v \in V(D)} outdeg(v)\,.$$

Naime, svaki luk doprinosi točno za 1 u obje sume, i one s lijeve i one s desne strane. Zapravo, mi smo na dva načina prebrojali sve lukove digrafa D (jednom brojivši početke tih lukova, a drugi puta krajeve).

Definicija 3.3 *Vrh od D ulaznog stupnja 0 zovemo izvor, a vrh od D izlaznog stupnja 0 zovemo ponor.*

Eulerovski digraf ne može imati ni izvora ni ponora (u izvor ne možemo doći, a iz ponora ne možemo izaći). Karakterizacija eulerovskih grafova u slučaju digrafova mora se produbiti, naime vidimo da digraf čiji je pripadajući graf eulerovski ne mora biti eulerovski. Ipak, laganom modifikacijom dokaza u neorijentiranom slučaju dobiva se sljedeći

Teorem 3.1 *Povezani digraf D je eulerovski onda i samo onda ako za svaki vrh v od D vrijedi*

$$outdeg(v) = indeg(v)\,.$$

Uočimo da se lako vidi da je stupanj svakog vrha pripadajućeg grafa paran, jer je zbroj dva ista broja. Dakle, pripadajući graf eulerovskog digrafa svakako je eulerovski. Puno je teže dati analogne teoreme onima iz neorijentiranih grafova kod digrafova u slučaju hamiltonovosti (podsjećamo, tamo smo imali samo nužne uvjete za hamiltonovost, Diracov i Oreov teorem).

Definicija 3.4 *Za digraf D kažemo da je hamiltonovski ako postoji ciklus koji sadrži svaki vrh od D. Nehamiltonovski digraf koji sadrži put kroz svaki vrh zovemo semihamiltonovski.*

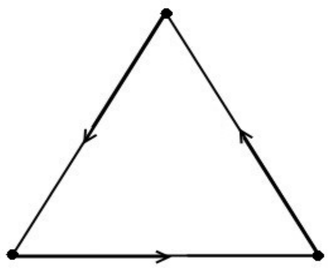
Bez dokaza (a on je tehnički puno zahtjevniji nego u neorijentiranom slučaju) dajemo analogon Diracovog teorema o nužnim uvjetima hamiltonovosti.

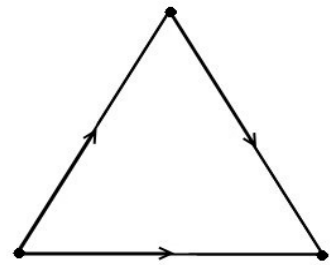
Teorem 3.2 *Neka je D jako povezani digraf s n vrhova. Ako je $outdeg(v) \geq \frac{n}{2}$ i $indeg(v) \geq \frac{n}{2}$ za svaki vrh v iz D, onda je D hamiltonovski.*

S obzirom da pitanje hamiltonovosti ovdje pogotovo postaje teškim, dobro bi bilo klasificirati hamiltonovost barem neke uže klase digrafova, koja bi bila sama po sebi dovoljno zanimljiva.

Definicija 3.5 *Turnir je digraf u kojem su svaka dva vrha spojena točno jednim lukom.*

Primjer 3.2 *Do izomorfizma postoje točno dva turnira s 3 vrha. Oni su dani sljedećom slikom.*





Iz definicije slijedi da turnir T s n vrhova ima $n(n-1)/2$ lukova. Također, lako se vidi za svaki vrh v od T vrijedi

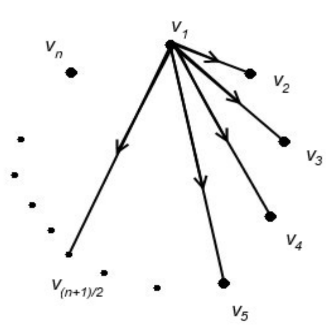
$$indeg(v) + outdeg(v) = n - 1.$$

Kažemo da je digraf D *regularan* ako postoji $r \in \mathbb{N}$ takav da je $outdeg(v) = indeg(v) = r$, za svaki $v \in V(D)$.

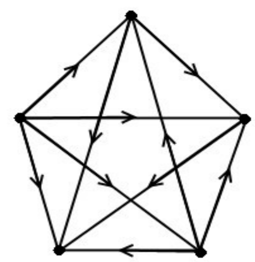
Zadatak 3.1 *Nađite nužne i dovoljne uvjete na broj vrhova n turnira T uz koje je T regularan.*

Rješenje Pokazat ćemo da je turnir T s n vrhova regularan ako i samo ako je n neparan.
($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je T regularan turnir stupnja regularnosti r. Tada je $2r = n - 1$. Zaključujemo da je $r = (n-1)/2$ i n je neparan.
($\Rightarrow$) Dokazat ćemo dovoljnost konstrukcijom jednog regularnog turnira. Bridove potpunog grafa s n vrhova možemo usmjeriti na sljedeći način:

- $(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_{\frac{n+1}{2} \pmod{n}})$
- $(v_2, v_3), (v_2, v_4), \ldots, (v_2, v_{\frac{n+3}{2} \pmod{n}})$
- $\cdots$
- $(v_n, v_1), (v_n, v_2), \ldots, (v_n, v_{\frac{n-1}{2}})$



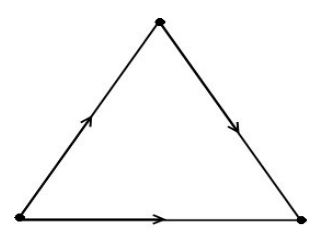
Primjer 3.3 *Evo jednog turnira s* 5 *vrhova. Uočimo da je turnir zgodan grafički zapis rezultata pravog turnira, kod kojeg se igralo ,,svaki sa svakim", a gdje na primjer luk iz x u y znači da je momčad x pobijedila momčad y (neriješenih rezultata nema).*



Uočavamo da turnir ne mora biti hamiltonovski digraf (jer neka momčad može biti superiorna, pa je ,,izvor", pa se ciklus zasigurno ne može zatvoriti). Pa ipak, ako turnir nije hamiltonovski digraf, nije niti predaleko od tog svojstva, točnije, onda je ,,na korak" do hamiltonovosti.

Teorem 3.3 *(i) Svaki nehamiltonovski turnir je semihamiltonovski.*
(ii) Svaki jako povezani turnir je hamiltonovski.

Dokaz (i) Tvrdnja je očevidno istinita za turnire s manje od 4 vrha.



Dokaz nastavljamo matematičkom indukcijom po broju vrhova turnira i pretpostavljamo da je svaki nehamiltonovski turnir s n vrhova semihamiltonovski. Neka je T nehamiltovski turnir s $n+1$ vrhom, te neka se T' dobije iz T micanjem vrha v i njemu incidentnih lukova. T' ima n vrhova, pa po pretpostavci indukcije ima semihamiltonovski put $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$. Razlikujemo 3 slučaja:

(1) Ako je vv_1 luk u T, onda je tražena staza

$$v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \,.$$

(2) Ako vv_1 nije luk u T (dakle v_1v to jest), te ako postoji i takav da je vv_i luk u T, onda izaberemo najmanji takav i te dobivamo put

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v \to v_i \to \cdots \to v_n\,.$$

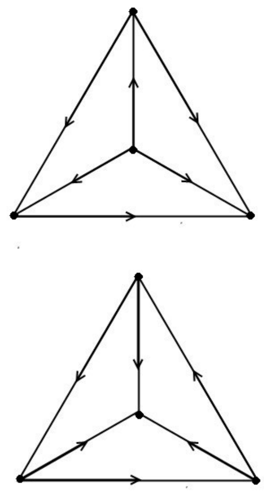
(3) Ako u T nema luka oblika vv_i, onda je tražena staza oblika

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v\,.$$

(ii) Dokazat ćemo jaču tvrdnju, da jako povezani turnir T s n vrhova ima cikluse svake pojedine duljine od 3 do n. Pokažimo prvo da T ima ciklus duljine 3. Neka je v vrh turnira T, te neka je Z skup svih vrhova z, takvih da je zv luk, a W skup svih onih vrhova w takvih da je vw luk u T. Budući je T jako povezan, a skupovi Z i W su sigurno neprazni (jer zbog jake povezanosti vrh v ne može biti ni izvor ni ponor), to postoji luk u T oblika $w'z'$, gdje su $w' \in W$, $z' \in Z$. Traženi ciklus duljine 3 sada je $v \to w' \to z' \to v$.
Neka nam ovaj slučaj ciklusa duljine 3 posluži kao baza indukcije; mi bismo željeli pokazati da ako postoji ciklus duljine k, $k < n$, da onda postoji ciklus duljine $k + 1$. Neka je $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$ ciklus duljine k. Najprije, neka postoji vrh v koji nije u tom ciklusu, takav da u T postoje lukovi oblika vv_i te v_jv, $1 \leq i, j \leq k$. Tada postoji vrh v_r takav da su $v_{r-1}v$ i vv_r lukovi u T. Traženi ciklus duljine $k + 1$ je $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{r-1} \to v \to v_r \to \cdots \to v_k \to v_1$. Ako pak nema vrha v s prethodnim svojstvom, onda skup vrhova izvan uočenog ciklusa duljine k razdijelimo u disjunktne skupove W i Z, gdje je W skup vrhova w takvih da je v_iw luk za svaki i, a Z skup vrhova z takvih da je zv_i luk za svaki i. Zbog jake povezanosti turnira T, skupovi W i Z moraju biti neprazni te mora postojati luk $w'z'$, uz $w' \in W$, $z' \in Z$. Traženi ciklus je sada $v_1 \to w' \to z' \to v_3 \to \cdots \to v_k \to v_1$. Time je teorem u potpunosti dokazan. □

Zadatak 3.2 *Koliko ima hamiltonovskih turnira s* 4 *vrha?*

Rješenje Na slici su dani svi neizomorfni turniri s 4 vrha. Samo jedan je hamiltonovski. Pronađite ga!

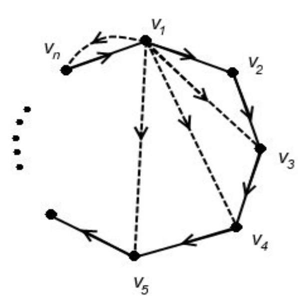


Zadatak 3.3 *Kažemo da je turnir T tranzitivan ako je za svaka dva luka (uv i vw od T, i uw luk od T. Dokažite da je turnir tranzitivan ako i samo ako ne sadrži ciklus.*

Rješenje ($\Leftarrow$) Neka su uv i vw lukovi od T. Turnir T nema ciklus pa wu nije luk od T. Dakle, uw je luk od T.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo suprotno. Neka je T tranzitivan turnir i neka sadrži ciklus

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n.$$

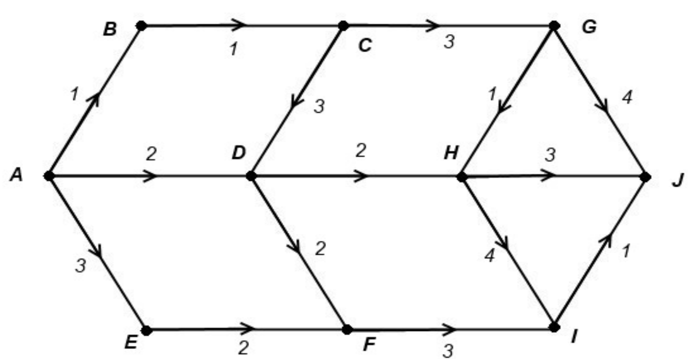
Turnir T ima lukove v_1v_2 i v_2v_3 pa je zbog tranzitivnosti v_1v_3 luk od T. Sada, v_1v_3 i v_3v_4 su lukovi od T pa je zbog tranzitivnosti v_1v_4 luk od T. Koristeći svojstvo tranzitivnosti možemo pokazati da su v_1v_5, v_1v_6, $\ldots, v_1v_n$ lukovi od T. Konačno, pokazali smo da T ima lukove v_1v_n i v_nv_1, što je kontradikcija jer je T turnir.



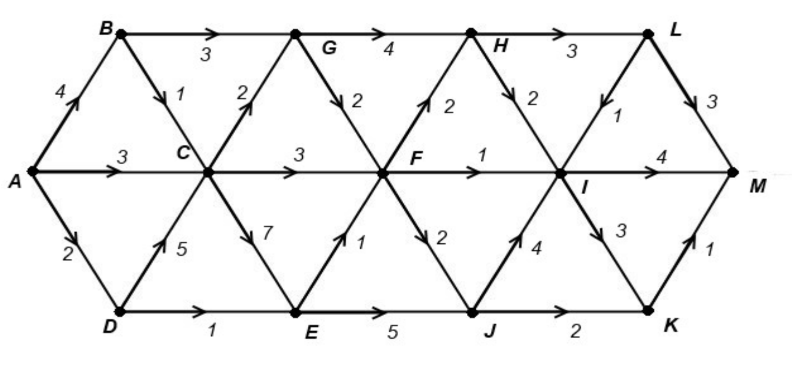
Poglavlje 4

Zadaci za vježbu

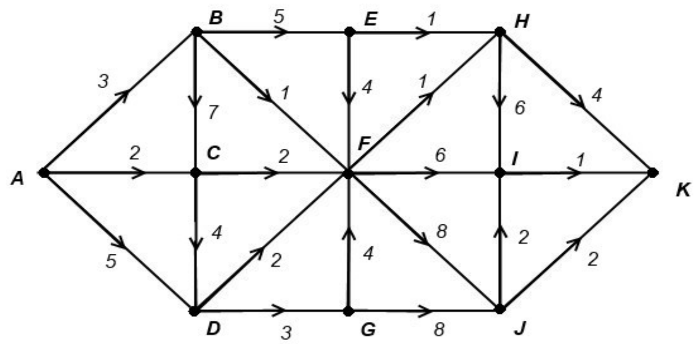
1. Dokažite da je svaki hamiltonovski graf usmjeriv.
2. Koliko ima neizomorfnih jednostavnih povezanih digrafova s 3 vrha? Navedite ih sve eksplicitno!
3. Je li Petersenov graf usmjeriv?
4. Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom.



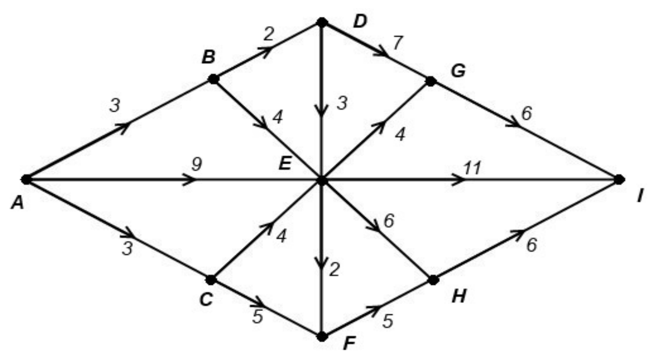
5. Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom.



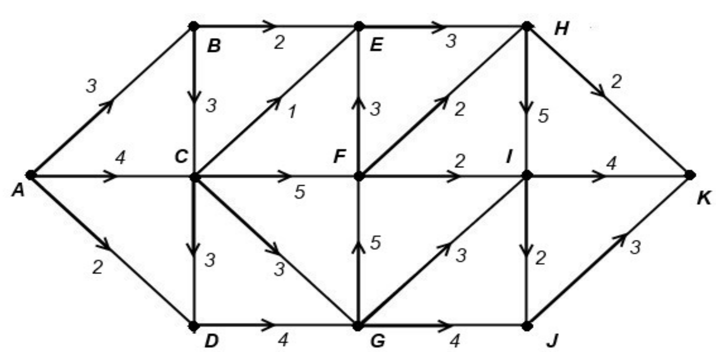
6. Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom. Koliko najviše smije kasniti posao u etapi GJ, a da se ukupni posao ne produži?



7. Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom. Za koliko se produlji kritični put, odnosno izvođenje cijelog posla, ako se tijekom izvođenja mreže trajanje etape DE nenadano poveća za 3?



8. Mreža aktivnosti zadana je slikom. Nađite kritični put i duljinu kritičnog puta za mrežu aktivnosti danu sljedećom slikom. Koliko najviše smije kasniti posao u etapi CE, a da se ukupni posao ne produži?

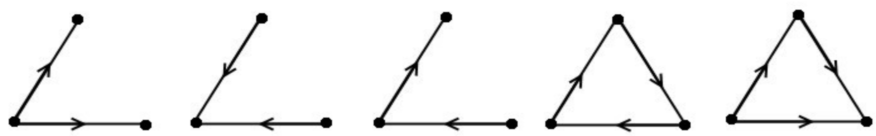


9. Neka je T turnir s n vrhova. Izračunajte $\sum\limits_{v \in T} outdeg(v)$.

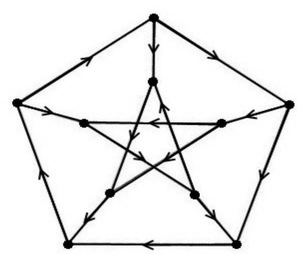
Odgovori

1. Hamitonovski ciklus usmjerimo ciklički, a ostale bridove po volji.

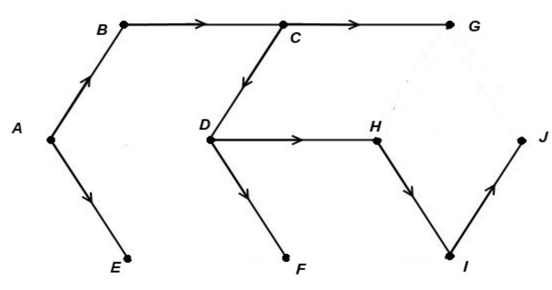
2. 5.



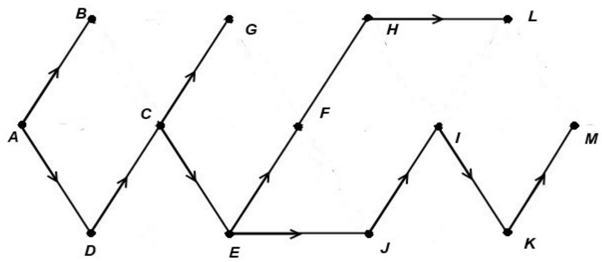
3. Da.



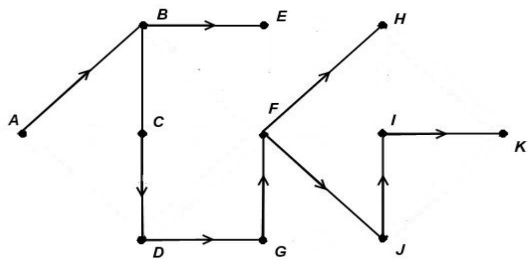
4. Duljina kritičnog puta je 12, $l(A) = 0, l(B) = 1, l(C) = 2, l(D) = 5, l(E) = 3, l(F) = 7, l(G) = 5, l(H) = 7, l(I) = 11, l(J) = 12$.



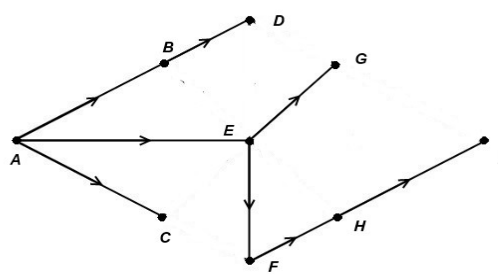
5. Duljina kritičnog puta je 27, $l(A) = 0, l(B) = 4, l(C) = 7, l(D) = 2, l(E) = 14, l(F) = 15, l(H) = 17, l(I) = 23, l(J) = 19, l(K) = 26, l(L) = 20, l(M) = 27$.



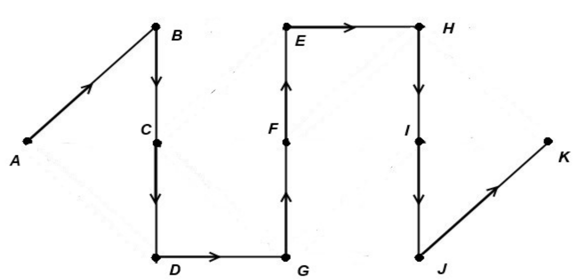
6. Duljina kritičnog puta je 32, $l(A) = 0, l(B) = 3, l(C) = 10, l(D) = 14, l(E) = 8, l(F) = 21, l(G) = 17, l(H) = 22, l(I) = 31, l(J) = 29, l(K) = 32$. Posao smije kasniti $l(J) - l(G) - w(JG) = 29 - 17 - 8 = 4$.



7. Duljina kritičnog puta je 22, $l(A) = 0, l(B) = 3, l(C) = 3, l(D) = 5, l(E) = 9, l(F) = 11, l(G) = 13, l(H) = 16, l(I) = 22$. Produlji se za 1.



8. Duljina kritičnog puta je 34, $l(A) = 0, l(B) = 3, l(C) = 6, l(D) = 9, l(E) = 21, l(F) = 18, l(G) = 13, l(H) = 24, l(I) = 29, l(J) = 31, l(K) = 34$. Posao smije kasniti $l(E) - l(C) - w(CE) = 14$.



9. $n(n-1)/2$.

Poglavlje 5

Istraživački zadaci

Zadatak 5.1 *Dokažite formalno algoritam za nalaženje kritičnog puta!*

Potpuna sparivanja

Anamari Nakić, Mario-Osvin Pavčević

26. svibnja 2014.

Poglavlje 1

Ženidbeni problem

Promotrimo sljedeći problem. Dan je konačan skup djevojaka, od kojih svaka poznaje izvjestan skup momaka. Pitamo se pod kojim se uvjetom mogu sve djevojke udati za momke koje su otprije poznavale.

Na primjer, pogledajmo skup $\{d_1, d_2, d_3, d_4\}$ od 4 djevojke i skup $\{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5\}$ od 5 momaka, te njihovo prethodno poznanstvo dano sljedećom tablicom:

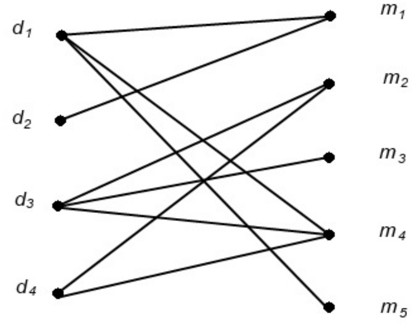
d_1	m_1	m_4	m_5
d_2	m_1		
d_3	m_2	m_3	m_4
d_4	m_2	m_4	

Ovdje rješenje ženidbenog problema postoji, na primjer ovako:

$$d_1 \to m_5, \;\; d_2 \to m_1, \;\; d_3 \to m_3, \;\; d_4 \to m_2$$

(a momak m_4 ionako poznaje najviše djevojaka, pa je za očekivati da će više sreće imati sljedeći puta).

Na prirodan način se ovaj problem prevodi u teoriju grafova. Neka je G bipartitni graf u kojem je skup vrhova podijeljen u dva disjunktna skupa V_1 i V_2, dok je susjedstvo definirano kao ,,prethodno poznanstvo". U našem primjeru taj bi bipartitni graf izgledao ovako:



Definicija 1.1 *Potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 u bipartitnom grafu kod kojeg je $V(G) = V_1 \cup V_2$ je bijektivna korespondencija između vrhova skupa V_1 i nekog podskupa skupa vrhova V_2, takva da su korespondentni vrhovi susjedni (spojeni).*

Dakle, u terminima teorije grafova, ženidbeni problem bi glasio ovako. Ako je $V(G) = V_1 \cup V_2$ bipartitni graf, kada (uz koje uvjete) postoji potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 u grafu G? Označimo brojnost skupa V_1 s m. Razmislimo odmah možemo li formulirati kakav makar nuždan uvjet egzistencije ovakvog ženidbenog problema. Očito je da svaka djevojka mora poznati barem jednog momka (ili u terminima grafova, da svaki vrh iz V_1 ima barem jednog susjeda). No, lako uočavamo i da podskup od svake dvije djevojke mora (zajedno) poznavati barem dva momka; u protivnom, od njih dvije neka će sigurno ostati neudana. Uvjet je lako poopćiti te se odmah vidi nužnost ispunjenja. Dakle, svakih k djevojaka mora zajedno poznavati barem k momaka, za svaki $1 \leq k \leq m$ (m je ukupan broj djevojaka). Ovako formulirani uvjet, za koji odmah vidimo da je nuždan za egzistenciju rješenja ženidbenog problema, zvat ćemo kratko ,,ženidbeni uvjet". Pokazuje se da je taj nužni uvjet ujedno i dovoljan.

Teorem 1.1 (Ph. Hall, 1935.) *Nuždan i dovoljan uvjet za rješenje ženidbenog problema je da bilo koji skup od k djevojaka zajedno poznaje najmanje k momaka, za svaki $1 \leq k \leq m$.*

Dokaz Dokazati još samo treba dovoljnost ženidbenog uvjeta za ženidbeni problem, i to ćemo učiniti matematičkom indukcijom po ukupnom broju djevojaka m. Jasno je da je za $m = 1$ tvrdnja ispunjena. Pretpostavimo da je teorem istinit uvijek kad je broj djevojaka manji od m. Pogledajmo kakva je onda situacija kad imamo baš m djevojaka. Tretiramo dva različita slučaja. Prvo, ako svakih k djevojaka zajedno ($k < m$) poznaje $k + 1$ momaka (dakle, s jednim momkom ,,viška" u samom uvjetu), onda najprije izaberemo bilo koju djevojku i udamo je za bilo kojeg momka kojeg ona poznaje. Nakon toga originalni ženidbeni uvjet ostaje ispunjen, u smislu da će svakih k djevojaka poznavati barem k momaka, pa kako je neudanih djevojaka ostalo $m - 1$, njih udamo po pretpostavci indukcije, koja garantira da se to može napraviti. Time je ovaj slučaj pozitivno riješen.

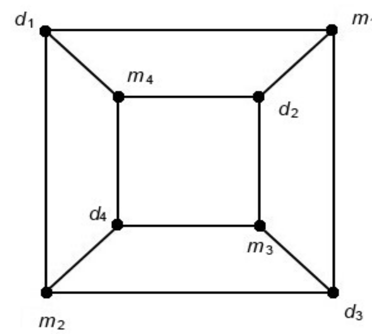
Ako pak nije ispunjen dopunski uvjet iz prethodnog slučaja, to onda znači da postoji skup od k djevojaka, $k < m$, koje zajedno poznaju točno k momaka. Po pretpostavci indukcije, za tih k djevojaka je ženidbeni problem rješiv, pa ih udamo za dotičnih k momaka. Preostaje nam udati još $m - k$ djevojaka. Međutim, svaka kolekcija od h djevojaka, izabranih između tih preostalih $m - k$ djevojaka, $h \leq m-k$, poznaje barem h od preostalih momaka, jer bi u suprotnom tih h, zajedno s onih već udanih k djevojaka ukupno poznavalo manje od $h + k$ momaka, suprotno pretpostavci da je ženidbeni uvjet ispunjen. Prema tome, ženidbeni uvjet vrijedi za tih $m - k$ neudanih djevojaka, pa se i one mogu udati po pretpostavci indukcije. $\square$

Prevedimo ovaj rezultat u jezik teorije grafova, odnosno u situaciju kad tražimo potpuno sparivanje u bipartitnom grafu.

Korolar 1.1 *Neka je G bipartitni graf, $V(G) = V_1 \cup V_2$, te neka je za svaki podskup A skupa vrhova V_1 s $\varphi(A)$ označen skup vrhova od V_2 susjednih s barem jednim vrhom od A. Tada potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 postoji onda i samo onda ako je $|A| \leq |\varphi(A)|$, za svaki podskup A od V_1.*

Zadatak 1.1 *Koliko ima različitih sparivanja u 3-kocki Q_3?*

Rješenje Graf Q_3 je bipartitan.

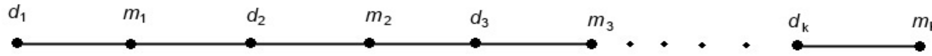


Označimo s $d_1, \ldots, d_4$ vrhove jednog skupa particije vrhova i s $m_1, \ldots, m_4$ vrhove drugog skupa particije vrhova. Krenimo s konstrukcijom potpunog sparivanja od vrha d_1. Uočimo da je Q_3 3-regularan, pa d_1 možemo *upariti* na 3 načina. Nakon što smo odabrali prvi par, preostala 3 para spojenih vrhova možemo odabrati na 3 načina. Konačno, broj različitih potpunih sparivanja u Q_3 je 9.

Zadatak 1.2 *Uzimajući u obzir da maldića ima barem onoliko koliko ima djevojaka, nađite broj potpunih sparivanja u lancu P_n s n vrhova.*

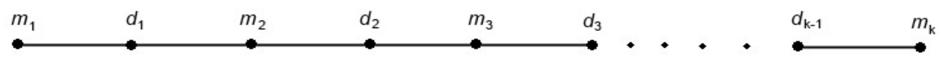
Rješenje Lanac P_n je bipartitan. Označimo vrhove jednog skupa particije vrhova s d_i, a vrhove drugog skupa particije vrhova s m_i. Razlikujemo dva slučaja: kada je n paran i kada je n neparan.

Za $n = 2k$ paran, broj djevojaka i momaka jednak je k.



Očito je da postoji samo jedno potpuno sparivanje.

Za $n = 2k - 1$ neparan, broj mladića jednak je k, a djevojaka $k - 1$.



Matematičkom indukcijom se može pokazati da je broj različitih potpunih sparivanja jednak k.

Zadatak 1.3 *Ima li, i koliko, potpunih sparivanja u potpunom bipartitnom grafu $K_{r,s}$, $r \leq s$?*

Rješenje Ženidbeni uvjet je trivijalno ispunjen, jer je $|\varphi(A)| = s$, za svaki $A \subseteq V_r$. Potpunih sparivanja ima isto koliko i injekcija iz V_1 u V_2, dakle:

$$s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-r+1)\,.$$

Poglavlje 2

Transverzale

Probleme koje smo iznijeli u prethodnom poglavlju sada bismo iznijeli u drugačijem kontekstu. Prisjetimo se konkretnog primjera (danog tablicom poznanstva djevojaka i momaka). Djevojke su slijedom poznavale sljedeće podskupove skupa momaka:

$$\{m_1, m_4, m_5\}, \ \ \{m_1\}, \ \ \{m_2, m_3, m_4\}, \ \ \{m_2, m_4\}$$

a rješenje ženidbenog problema bilo je zapravo naći po jedan m_i iz svakog od navedena četiri podskupa, tako da oni budu različiti. Takav pogled na ovaj problem motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.1 *Neka je E neprazan konačan skup, te neka je $\mathcal{F} = (S_1, S_2, \ldots, S_m)$ familija (ne nužno različitih) nepraznih podskupova od E. Transverzala familije $\mathcal{F}$ je skup od m različitih elemenata od E, takav da je svaki od elemenata izabran iz nekog (drugog) podskupa S_i.*

Primjer 2.1 *Neka je $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, te neka je $S_1 = S_2 = \{1, 2\}$, $S_3 = S_4 = \{2, 3\}$, te $S_5 = \{1, 4, 5, 6\}$. Ispitajmo postoji li transverzala za ovu familiju podskupova.*

Ovdje je nemoguće naći 5 elemenata skupa E tako da je svaki iz nekog drugog S_i. Razlog tome je što je $|S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4| = 3$, pa ne možemo naći četiri različita elementa koji bi pripadali po jednom od ovih skupova. Dakle, familija $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_5)$ nema transverzalu. Potražimo li neku podfamiliju za koju bi transverzala mogla postojati, lako ćemo uočiti $\mathcal{F}' = (S_1, S_2, S_3, S_5)$ za koju vidimo da ima na primjer transverzalu $\{1, 2, 3, 4\}$. Transverzalu neke podfamilije zadane familije zovemo *parcijalna transverzala*. Lako se možemo uvjeriti da $\mathcal{F}$ iz primjera ima razne parcijalne transverzale. Nađite ih! Posebno, svaki podskup parcijalne transverzale je parcijalna transverzala.

Naravno da je ključno pitanje koja nas zanima kada zadana familija podskupova nekog zadanog skupa ima transverzalu. Na to je pitanje lagano dati odgovor prevedemo li situaciju na ženidbeni problem. Naime, uzmemo li da je E baš skup momaka, a podskup S_i onaj skup momaka koje poznaje djevojka d_i, za sve $1 \leq i \leq m$, vidimo da je transverzala zapravo skup od m momaka koji je svaki pridijeljen točno jednoj djevojci, te predstavlja jedno rješenje ženidbenog problema. Pritom je dakle egzistencija transverzale ekvivalentna egzistenciji rješenja ženidbenog problema, no broj takvih rješenja nije isti, budući kod ženidbenog problema razlikujemo i djevojke i momke, a kod transverzale (koja je skup) nemamo poredak među elementima!

Primjer 2.2 *Za dani skup* $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ *familija* $\mathcal{F} = (\{2,3\},\{1,3,4\}, \{2,5,6\},\{2,4\},\{4,6\},\{3,4\})$ *ima jedinstvenu trasverzalu.*

Prevedimo sada Hallov teorem o nužnost i dovoljnosti ženidbenog uvjeta u novu situaciju s transverzalama. Dat ćemo i jedan drugi dokaz tog teorema koji rabi samo elementarna znanja iz teorije skupova.

Teorem 2.1 *Neka je* E *neprazan konačan skup i neka je* $\mathcal{F} = (S_1, \ldots, S_m)$ *familija nepraznih podskupova od* E*. Tada* $\mathcal{F}$ *ima transverzalu onda i samo onda ako unija bilo kojih* k *podskupova* S_i *ima najmanje* k *elemenata, za* $1 \leq k \leq m$.

Dokaz Nužnost ovog uvjeta je jasna. Dokažimo dovoljnost. Pokazat ćemo sljedeće. Ako neki podskup S_i iz familije $\mathcal{F}$ ima više od jednog elementa, onda postoji u S_i element koji možemo izbaciti iz njega bez da se promijeni početni uvjet. Uočimo da time zapravo dokazujemo korak algoritma kojim u konačno mnogo koraka dolazimo do familije jednočlanih podskupova koji u uniji daju transverzalu. Tim algoritmom jednostavno ćemo transverzale nalaziti.

Dokažimo dakle da je ovakvo izbacivanje elemenata iz podskupova s više od jednog elementa dopustivo. U tu svrhu, pretpostavimo suprotno. Neka, ne smanjujući općenitost, podskup S_1 sadrži elemente x i y tako da uklanjanje bilo kojeg od njih kvari uvjet. To zapravo znači da postoje podskupovi A i B skupa $\{2, 3, \ldots, m\}$, i skupovi P i Q definirani sa:

$$P = (\bigcup_{i \in A} S_i) \cup (S_1 \setminus \{x\}), \;\; Q = (\bigcup_{j \in B} S_j) \cup (S_1 \setminus \{y\})$$

takvi da je

$$|P| \leq |A|, \quad |Q| \leq |B| \,.$$

Naime, skup P sastavljen je od $|A|+1$ elemenata familije $\mathcal{F}$, pa bi uvjet trebao glasiti $|P| \geq |A|+1$. Zato je suprotno od toga upravo $|P| \leq |A|$. Analogni argument vrijedi za skup Q.

Uočimo da vrijede sljedeće skupovne relacije:

$$P \cup Q = (\bigcup_{j \in A \cup B} S_j) \cup S_1 \,, \quad P \cap Q \supseteq \bigcup_{j \in A \cap B} S_j \,,$$

pa na razini kardinaliteta ovih skupova vrijedi:

$$|P \cup Q| = |(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j) \cup S_1| \text{ kao i } |P \cap Q| \geq |\bigcup_{j \in A \cap B} S_j|$$

Do kontradikcije nas sada vodi sljedeći račun:

$$\begin{aligned} |A| + |B| \quad \geq \quad & |P| + |Q| = |P \cup Q| + |P \cap Q| \geq \\ & |(\bigcup_{j \in A \cup B} S_j) \cup S_1| + |\bigcup_{j \in A \cap B} S_j| \geq (\text{uvjet teorema}) \geq \\ & |A \cup B| + 1 + |A \cap B| = |A| + |B| + 1, \end{aligned}$$

što je očevidno protuslovlje. □

Korolar 2.1 *Uz skup E i familiju $\mathcal{F}$ kao u prethodnom teoremu, $\mathcal{F}$ ima parcijalnu transverzalu veličine t onda i samo onda ako unija bilo kojih k podskupova S_i sadrži najmanje $k + t - m$ elemenata.*

Korolar 2.2 *Uz skup E i familiju $\mathcal{F}$ kao u prethodnom teoremu, neka je $X \subseteq E$. Tada X sadrži parcijalnu transverzalu od $\mathcal{F}$ veličine t onda i samo onda ako za svaki podskup A od $\{1, 2, \ldots, m\}$ vrijedi:*

$$|(\bigcup_{j \in A} S_j) \cap X| \geq |A| + t - m\,.$$

Zadatak 2.1 *Neka je E skup $\{1, 2, \cdots, 50\}$. Koliko različitih transverzala ima familija*

$$(\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{49, 50\}, \{50, 1\})?$$

Rješenje Ova pedesetočlana familija ima jednu jedinu transverzalu: $\{1, 2, \ldots, 50\}$. Naime, ponovno naglašavamo da transverzala ne uključuje poredak. Koliko bi bilo različitih transverzala ako bi se poredak uključivao? Odgovor na to pitanje identičan je odgovoru na pitanje koliko različitih potpunih sparivanja postoji u ciklusu sa 100 vrhova, dakle 2.

Poglavlje 3

Primjena na latinske kvadrate

Definicija 3.1 *Latinski pravokutnik tipa $m \times n$ je matrica $M = (m_{ij})$ dimenzije $m \times n$ čiji elementi su prirodni brojevi uz uvjete:*

1. $1 \leq m_{ij} \leq n$
2. *Svi elementi nekog retka ili stupca su različiti.*

Dakako, vrijedi da je $m \leq n$, a kad je $m = n$ govorimo o *latinskom kvadratu.*

Primjer 3.1 *Pokažimo da latinski kvadrat reda n postoji za svaki prirodni broj n.*

Naime, pogledajmo ovakvu matricu

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Puno je teže pitanje ima li i drugih latinskih kvadrata reda n, koji su ovome u apstraktnom smislu neekvivalentni. Odgovor je pozitivan, o čemu se mogu naći podaci u tablicama broja neizotopnih latinskih kvadrata reda n.

Logično je zapitati se može li se svaki latinski pravokutnik dimenzije $m \times n$ nadopuniti do latinskog kvadrata. Zapravo iznenađujući odgovor je da se to uvijek može.

Teorem 3.1 *Neka je M latinski pravokutnik dimenzije $m \times n$, uz $m < n$. Tada se M može proširiti do latinskog kvadrata dodavanjem $n - m$ redaka.*

Dokaz Dovoljno je pokazati da se pravokutnik M uvijek može proširiti za jedan redak, tj. da mu se može dodati sljedeći redak, tako da dobijemo latinski pravokutnik dimenzije $(m+1)\times n$, jer onda dalje možemo nastaviti iterativno. Neka je $E=\{1,2,\ldots,n\}$ i neka je $\mathcal{F}=(S_1,\ldots,S_n)$, gdje je S_i skup elemenata od E koji se ne nalaze u i-tom stupcu od M. Tvrdimo da familija $\mathcal{F}$ ima transverzalu, što onda i dokazuje tvrdnju. Dovoljno je, po Hallovom teoremu, dokazati da svaka unija od k S_i-ova sadrži najmanje k elemenata. No, budući svaka takva unija sadrži ukupno $(n-m)\cdot k$ elemenata, uključujući njihove kratnosti, činjenica da ima manje od k različitih povlačila bi da se neki element morao pojaviti više od $n-m$ puta, a to je nemoguće jer to znači da on nedostaje u više od $n-m$ stupaca, dakle da se pojavljuje u manje od m stupaca, ali kako već imamo m redaka gotovih, svaki se element pojavljuje već u m stupaca. □

Primjer 3.2 *Dopunite do latinskog kvadrata ovaj pravokutnik:*

1	2	3	4	5	6
3	5	2	6	1	4
4	6	1	2	3	5

Važno je uočiti da po prethodnom teoremu možemo dopunjavati redak po redak, te da se nećemo morati vraćati unazad, jer se i pravokutnik dimenzije 4×6 može dopuniti do kvadrata. Npr. uzmimo za 4. redak: [5, 1, 6, 3, 4, 2]. Dobiveni latinski pravokutnik može se dalje dopuniti do kvadrata. Za 5. redak možemo uzeti: [6, 3, 4, 5, 2, 1], a zadnji redak je ionako uvijek jednoznačno određen – on je zapravo već transverzala familije nedostajućih elemenata po stupcima.

Zadatak 3.1 *Zadan je latinski pravokutnik*

1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1
5	4	1	6	3	2

Ispišite familiju podskupova $\mathcal{F}$, za koju sigurno postoji transverzala, a koja garantira da se ovaj pravokutnik može nadopuniti jednim retkom.

Rješenje Familiju skupova $\mathcal{F}$ definirat ćemo na sljedeći način. Neka je S_i skup svih elementata iz $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ koji nedostaju u i-tom stupcu danog latinskog pavokutnka. Sada je $\mathcal{F}=(\{2,3,4\},\{1,3,6\},\ \{2,5,6\},\{1,2,5\},\{1,4,6\},\{3,4,5\})$. Uočimo transverzalu familije $\mathcal{F}$: $[2,3,6,1,4,5]$. Dani latinski pravokutnik može se nadopuniti s ovim retkom. Nastavite sami na ovaj način dopunjavati dani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata.

Poglavlje 4

Zadaci za vježbu

1. Zadan je graf $K_{3,3}$ kojemu uklonimo neka dva brida. Postoji li uvijek potpuno sparivanje u nastalom grafu?

2. Dokažite da, ako je G bipartitni graf sa skupom vrhova $V(G) = V_1 \cup V_2$, u kojem je stupanj svakog vrha iz V_1 veći ili jednak stupnju bilo kojeg vrha iz V_2, onda G ima potpuno sparivanje.

3. Koliko ima različitih potpunih sparivanja u ciklusu C_{2n}?

4. Nadopunite zadani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata.

1	2	3	4	5	6
4	6	1	2	3	5
3	5	2	6	1	4

5. Nadopunite zadani latinski pravokutnik do latinskog kvadrata.

7	2	1	8	5	4	3	6
8	1	6	3	2	7	4	5
1	5	3	6	7	2	5	4
2	7	8	1	4	5	6	3

6. Mogu li se sljedeće matrice dopuniti do latinskih kvadrata?

1	2	3	4	5
2	1			
3		1		
4			1	
5				1

1	2	3	4	5	6
2	1				
3		1			
4			1		
5				1	
6					1

Mogu li se ove matrice dopuniti do latinskih kvadrata koji su simetrične matrice?

7. Mogu li se sljedeće matrice dopuniti do latinskih kvadrata?

1	5	2	6	4	3
6				3	
5			4		
4		5			
3	1				
2					

1	2	3	4	5	6
2	1				
3		1			
4			2		
5				2	
6					2

Odgovori

1. Dva brida od $K_{3,3}$ možemo ukloniti na dva načina. Dobit ćemo dva grafa sa sljedećim nizovima stupnjeva $(1, 2, 2, 3, 3, 3)$ i $(2, 2, 2, 2, 3, 3)$. U oba slučaja potpuno sparivanje je moguće.

2. -

3. 2.

4.

1	2	3	4	5	6
4	6	1	2	3	5
3	5	2	6	1	4
5	1	4	3	6	2
6	4	5	1	2	3
2	3	6	5	4	1

5.

7	2	1	8	5	4	3	6
8	1	6	3	2	7	4	5
1	5	3	6	7	2	5	4
2	7	8	1	4	5	6	3
3	6	5	4	1	8	7	2
4	5	2	7	6	3	8	1
5	4	7	2	3	6	1	8
6	3	4	5	8	1	2	7

6. Druga matrice može se nadopuniti do simetrične.

1	2	3	4	5
2	1	4	5	3
3	5	1	2	4
4	3	5	1	2
5	4	2	3	1

1	2	3	4	5	6
2	1	4	5	6	3
3	4	1	6	2	5
4	5	6	1	3	2
5	6	2	3	1	4
6	3	5	2	4	1

7. Samo se prva matrica može nadopuniti do latinskog kvadrata.

1	5	2	6	4	3
6	4	1	5	3	2
5	3	6	4	2	1
4	2	5	3	1	6
3	1	4	2	6	5
2	6	3	1	5	4

1	2	3	4	5	6
2	1				
3		1			
4			2		
5				2	
6					2

Poglavlje 5

Istraživački zadaci

Zadatak 5.1 *Odredite broj latinskih kvadrata tipa* 1×1,2×2 *i* 3×3. *Uvjerit ćete se vrlo brzo kako ovaj postupak nije nimalo lagan. Pronađite u literaturi podatke o broju latinskih kvadrata tipa* $n \times n$. *Postoji li zatvorena formula za ovaj broj?*

Zadatak 5.2 *Napišite program koji računa broj različitih latinskih kvadrata tipa* $n \times n$.

Zadatak 5.3 *Jeste li upoznati s logičko-kombinatornom igrom* Sudoku? *Ukoliko jeste, riješite sljedeći* Sudoku. *Ukoliko niste, otkrijte koja su pravila igre. Koja je veza između igre* Sudoku *i latinskih kvadrata?*

		4						
	7		2			5	9	
	6			3	5			1
		9					7	
		6				2		
	1					9		
5			4	9			1	
	4	2			3		6	
						4		

Protoci u mrežama

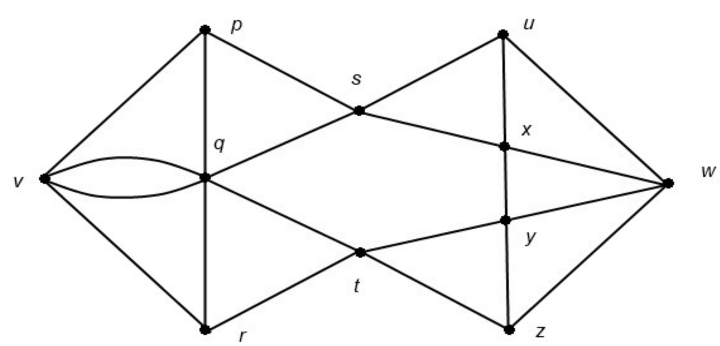
Anamari Nakić, Mario-Osvin Pavčević

30. svibnja 2014.

Poglavlje 1

Problem disjunktnih putova

Postavimo si ovakvo pitanje. Koliko ima (različitih) putova u nekom grafu (digrafu) od zadanog početnog vrha v do zadanog krajnjeg vrha w? Pogledajmo na primjer graf na ovoj slici.



Postaje nam jasno da je problem težak u općenitom slučaju (nema ih beskonačno puno, jer tražimo putove, pa se bridovi, a ni vrhovi, ne mogu ponavljati, a to su konačni skupovi). Problem možemo pojednostavniti dodavanjem nekih posebnih uvjeta. Na primjer na ova dva načina.

A.) Koji je najveći broj putova od v do w koji nemaju zajednički brid?

Odmah vidimo da je rješenje za gornji primjer 4, jer 4 takva puta možemo efektivno naći, a više ih nema, jer je $deg(v) = 4$. Takve putove zvat ćemo *bridno-disjunktni putovi*.

B.) Koji je najveći broj putova od v do w koji nemaju zajednički vrh (osim naravno v i w)?

U gornjem primjeru takva su dva puta, jedan bi prolazio kroz s, a drugi kroz t. Vidimo da više nije moguće naći treći takav put. Takve putove zvat ćemo *vršno disjunktni putovi*.

Definicija 1.1 *Neka je G povezan graf s dva istaknuta vrha v i w. Za skup bridova E grafa G kažemo da je vw-rastavljajući skup, ako svaki put iz vrha*

v u vrh w sadrži neki brid iz E. Očito je svaki vw-rastavljajući skup ujedno rastavljajući skup za graf G.

Definicija 1.2 *Za skup vrhova S grafa G kažemo da je vw-separirajući skup, ako svaki put iz v u w prolazi nekim vrhom iz S. Takav skup je uvijek separirajući skup grafa G (uklanjanjem kojeg se graf rastavlja na najmanje dvije komponente, od kojih jedna sadrži vrh v, a druga vrh w).*

Primjer 1.1 *Navedimo nekoliko primjera vw-rastavljajućih i vw-separirajućih skupova u grafu iz gornjeg primjera. vw-rastavljajući skupovi su: $E_1 = \{ps, qs, ty, tz\}$, $E_2 = \{uw, xw, yw, zw\}$ ili $E_3 = \{vr, pq, qr, qs, ty, tz\}$; vw-separirajući skupovi su $S_1 = \{s, t\}$ ili $S_2 = \{p, q, y, z\}$.*

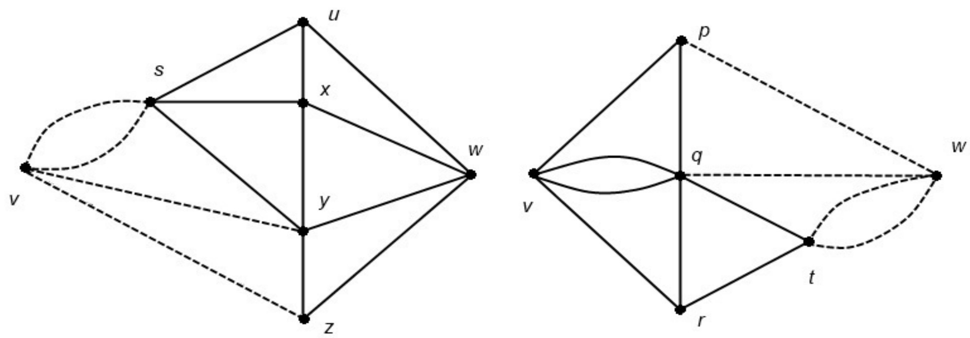
Uočimo da ima vw-rastavljajućih skupova, kao i vw-separirajućih skupova, raznih veličina, čak i onih minimalnih, u smislu da izbacivanjem nekog brida (vrha) iz njih dobiveni podskup više nije vw-rastavljajući (separirajući).

Primijetimo sljedeće. Pretpostavimo da smo uočili neki vw-rastavljajući skup od k elemenata. Prebrajamo li bridno-disjunktne putove od v do w, tada njihov broj zasigurno ne može premašiti k, jer svaki put mora sadržavati barem neki brid vw-rastavljajućeg skupa. Tim jednostavnim razmatranjem dolazimo do činjenice da je broj bridno-disjunktnih putova od v do w manji ili jednak kardinalitetu (bilo kojeg!) vw-rastavljajućeg skupa. No, zapravo vrijedi i bolji rezultat, i on je sadržan u sljedećem, čuvenom Mengerovom teoremu.

Teorem 1.1 (Menger, 1927.) *Maksimalni broj bridno-disjunktnih putova koji povezuju vrhove v i w nekog povezanog grafa jednak je kardinalitetu najmanjeg vw-rastavljajućeg skupa.*

Dokaz Teorem ćemo dokazati matematičkom indukcijom po broju bridova. Pretpostavimo dakle da zadani graf G ima m bridova, te da je tvrdnja istinita za sve grafove s manje od m bridova. Razmotrit valja ova dva slučaja.

(i) Pretpostavimo najprije da postoji vw-rastavljajući skup E minimalne veličine k, takav da nisu svi njegovi bridovi incidentni s vrhom v, niti su svi njegovi bridovi incidentni s vrhom w. U prethodnom primjeru takav je na primjer skup bridova E_1, pa cijeli graf potpada odmah pod ovaj slučaj. Kad bismo iz danog grafa G s ovakvim rastavljajućim skupom E sve bridove skupa E izbacili, dobili bismo dvije komponente povezanosti, dva nepovezana grafa, nazovimo ih V i W, od kojih V sadrži vrh v, a W sadrži vrh w. Sad definirajmo grafove G_1 i G_2 ovako. Neka je G_1 dobiven iz G tako, da se stegnu svi bridovi grafa V (čime se cijeli graf V zapravo stegne u vrh v), a G_2 neka je dobiven tako da se stegnu svi vrhovi od W. U našem primjeru s rastavljajućim skupom E_1, ovako formirani grafovi G_1 i G_2 bi izgledali ovako:



Na gornjoj skici smo crtkano označili bridove koji pripadaju rastavljajućem skupu E_1. Budući grafovi G_1 i G_2 imaju manje bridova od G, te budući je E očevidno vw-rastavljajući skup minimalne veličine i za jednog i za drugog, po pretpostavci indukcije postoji k bridno-disjunktnih putova iz v u w, kako u G_1, tako i u G_2. Sada se traženi putovi od v do w u cijelom grafu G dobiju na prirodan način, lijepljenjem prethodno konstruiranih bridno-disjunktnih putova nađenih za G_1 odnosno G_2.

(ii) Neka se svaki vw-rastavljajući skup minimalne veličine k sastoji samo od bridova koji su incidentni s vrhom v ili pak s w. Ne smanjujući općenitost možemo pretpostaviti da je svaki brid od G sadržan u nekom vw-rastavljajućem skupu veličine k, jer bi inače mogli izbaciti neki brid iz rastavljajućeg skupa veće brojnosti i primijeniti pretpostavku indukcije, što bi trivijalno dokazalo tvrdnju. Dakle, u situaciji smo da su svi vw-rastavljajući skupovi veličine k, te da su svi bridovi u njima incidentni ili s v ili s w. Ako je P put iz v u w, onda se P sastoji od najviše dva brida, te sadrži najviše jedan brid nekog vw-rastavljajućeg skupa veličine k. Izbacimo li put P iz grafa G, dobivamo graf s najviše $k-1$ bridno-disjunktnim putom, po pretpostavci indukcije. Ti putovi, zajedno s P, čine traženih k putova u G. $\square$

Analogni rezultat dobiva se promatraju se vršno disjunktni putovi od v do w, te vw-separirajući skupovi.

Teorem 1.2 (Menger, 1927.) *Maksimalni broj vršno disjunktnih putova koji povezuju dva različita nesusjedna vrha v i w danog grafa jednak je kardinalitetu najmanjeg vw-separirajućeg skupa.*

Ako za svaka dva vrha v, w zadanog grafa G vrijedi da je veličina vw-rastavljajućeg skupa barem k, onda će graf G biti k-bridno povezan. Zato vrijedi

Korolar 1.1 *Graf G je k-bridno povezan onda i samo onda ako su bilo koja dva različita vrha od G povezana s najmanje k bridno-disjunktnih putova.*

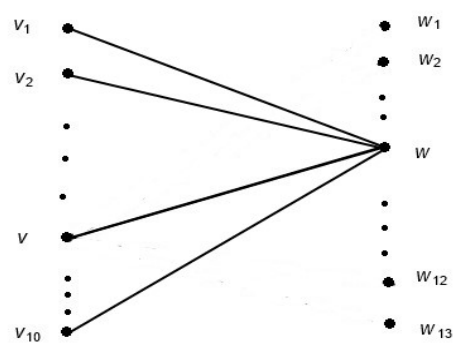
Analogni rezultat vrijedi i za vršnu povezanost.

Korolar 1.2 *Graf G s najmanje $k+1$ vrhom je k-vršno povezan onda i samo onda ako su bilo koja dva vrha od G povezana s najmanje k vršno-disjunktnih putova.*

Svi rezultati lagano se iskazuju i za usmjerene grafove.

Teorem 1.3 *Maksimalni broj lučno-disjunktnih putova iz vrha v u vrh w zadanog digrafa jednak je kardinalitetu najmanjeg vw-rastavljajućeg skupa.*

Zadatak 1.1 *Zadan je potpuni bipartitni graf $K_{10,13}$. Neka je v bilo koji vrh u skupu s 10 vrhova i w bilo koji vrh u skupu s 13 vrhova.*
a) Odredite maksimalan broj bridno-disjunktnih vw-putova.
b) Odredite maksimalan broj vršno disjunktnih vw-putova.



Rješenje a) Prema Mengerovom teoremu maksimalni broj bridno-disjunktnih vw-putova jednak je kardinalitetu skupa najmanjeg vw-rastavljajućeg skupa E. U ovom slučaju, to je 10 jer je

$$E = \{wv_1, wv_2, \ldots, vw_{10}\}.$$

b) Pogledajmo graf $K_{10,13} \setminus \{vw\}$ dobiven brisanjem brida vw iz $K_{10,13}$. Sada su v i w nesusjedni pa je prema Mengerovom teoremu maksimalan broj vršno disjunktnih vw-putova u grafu $K_{10,13} \setminus \{vw\}$ jednak kardinalitetu najmanjeg vw-separirajućeg skupa S. To je 9 jer je

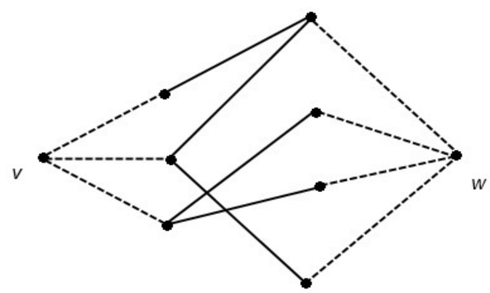
$$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_{10}\} \setminus \{v\}.$$

Konačno, maksimalan broj vršno disjunktnih vw-putova grafa $K_{10,13}$ je $|S|+1 = 10$ jer su v i w povezani bridom.

Znamo li da vrijedi, odnosno imamo li dokazan Mengerov teorem, onda pozivanjem na njega relativno lagano slijedi Hallov teorem.

Teorem 1.4 *Mengerov teorem povlači Hallov teorem.*

Dokaz Neka je $G = (V, E)$ bipartitni graf sa nesusjednim skupovima vrhova $V = V_1 \cup V_2$. Moramo dokazati, da ako smo u uvjetima Hallovog teorema, dakle ako je $|A| \leq |\varphi(A)|$, za svaki podskup A od V_1, da onda postoji potpuno sparivanje iz V_1 u V_2. Da bismo to dokazali, primijenimo Mengerov teorem na graf koji se dobiva tako da se zadanom grafu G dodaju dva vrha, v i w, i to tako da je v susjedan sa svima iz V_1, i samo s njima, a w pak da je susjedan samo sa svim vrhovima iz V_2.



Sada će potpuno sparivanje iz V_1 u V_2 postojati čim nađemo barem $|V_1|$ vršno disjunktnih putova iz v u w. Po Mengerovom teoremu, za to je dovoljno utvrditi da svaki vw-separirajući skup ima barem $|V_1| = k$ vrhova. Pa neka je S neki vw-separirajući skup. On se svakako sastoji od nekog podskupa A skupa vrhova V_1, te od nekog podskupa B skupa V_2. Kako je $A \cup B$ vw-separirajući skup, ne postoji brid koji spaja neki vrh skupa $V_1 \setminus A$ s nekim vrhom skupa $V_2 \setminus B$, tako da je $\varphi(V_1 \setminus A) \subseteq B$. Sada je

$$|V_1 \setminus A| = |V_1| - |A| \leq |\varphi(V_1 \setminus A)| \leq B\,,$$

pa je $|S| = |A| + |B| \geq |V_1|$, što je upravo trebalo dokazati. $\square$

Poglavlje 2

Primjena na mreže

Definicija 2.1 *Mreža N je težinski usmjereni digraf, dakle digraf u kojem je svakom luku a pridružen nenegativni realni broj $\psi(a)$ kojeg zovemo kapacitet luka. Izlazni stupanj vrha x u mreži N u oznaci $outdeg(x)$ je zbroj kapaciteta svih lukova oblika xz, $(z \in V(N))$, a ulazni stupanj u oznaci $indeg(x)$ zbroj kapaciteta lukova oblika wx, $(w \in V(N))$.*

Brojevi $outdeg(x)$ i $indeg(x)$ mogu se zapravo analogno definirati za bilo koju funkciju $f : A(N) \to \mathbf{R}$ koja svakom luku mreže pridružuje neki realni broj. Za potrebe našeg modela mi ćemo dodatno pretpostaviti da nam je zadana mreža koja ima točno jedan izvor, označit ćemo ga s v, i točno jedan ponor kojeg ćemo označiti s w.

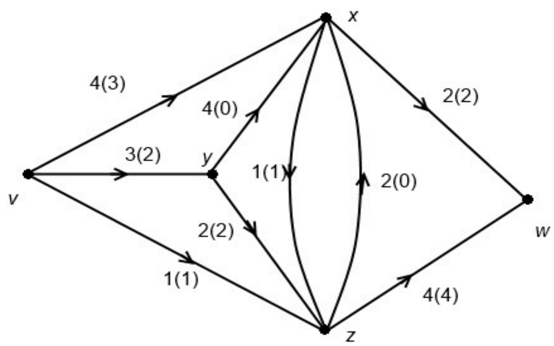
Definicija 2.2 *Protok u mreži N je funkcija φ koja svakom luku a pridjeljuje nenegativni realni broj $\varphi(a)$ tako da je:*
(i) $\forall a,\ \ \varphi(a) \leq \psi(a)$ *(ograničenost protoka)*
(ii) $\forall z \in V(N),\ z \neq v, w,\ \ outdeg(z) = indeg(z)$ *(uvjet sačuvanja protoka)*

Napomenimo da se uvjet (ii) odnosi na funkciju protoka φ, točnije, da možemo zapisati

$$\sum_{x \in V(N)} \varphi(xz) = \sum_{y \in V(N)} \varphi(zy),\ \ \forall z \in V(N)\,,$$

pri čemu podrazumijevamo da je vrijednost protoka nula ako vrhovi nisu susjedni.

Primjer 2.1 *Evo jedne mreže. Kapaciteti lukova naznačeni su na njima, a brojevi u zagradama predstavljaju vrijednosti protoka.*



Brid a zovemo zasićenim ako je $\varphi(a) = \psi(a)$. Zbog uvjeta sačuvanja protoka je očito da vrijedi da je izlazni stupanj izvora v jednak ulaznom stupnju ponora w, $outdeg(v) = indeg(w)$. Taj broj je ujedno i vrijednost protoka koji ćemo ponekad označavati s $val(\varphi)$. Zadatak je redovito naći što veći mogući protok, dakle maksimalnu vrijednost od $val(\varphi)$, ali i kako je prenijeti kroz danu mrežu.

Definicija 2.3 *Rez je skup lukova $A \subseteq N(A)$ takav da svaki put iz v u w sadrži neki luk iz A.*

Očito, rez je vw-rastavljajući skup pripadne mreže N. Kapacitet reza A je zbroj svih kapaciteta lukova dotičnog reza. Analogno razmišljanju u prethodnom poglavlju zaključujemo jednostavno da maksimalni tok ne može premašiti minimalni kapacitet reza. Jedna od inačica Mengerovog teorema, kojim se tvrdi da se u prethodno iskazanoj nejednakosti zapravo uvijek može postići jednakost, je i ovaj čuveni teorem.

Teorem 2.1 (MAX-FLOW MIN-CUT) *U svakoj je mreži vrijednost maksimalnog toka jednaka kapacitetu minimalnog reza.*

Dokaz Ako su kapaciteti svih lukova cijeli brojevi, onda na takvu mrežu gledamo kao na digraf D gdje kapaciteti lukova predstavljaju višestrukost (kratnost) lukova. Maksimalna vrijednost toka sada je jednaka ukupnom broju bridno-disjunktnih putova iz izvora v do ponora w u digrafu D, dok je kapacitet minimalnog reza jednak najmanjem broju lukova u nekom vw-rastavljajućem skupu od D. Uz ovakvu interpretaciju tvrdnja neposredno slijedi po Mengerovom teoremu.

Ako kapaciteti lukova nisu cijeli brojevi, nego eventualno racionalni, moguće je naći cijeli broj d tako da nakon množenja s d svi kapaciteti postanu cijeli brojevi. Tako se problem svede na prethodni. Nešto suptilnija razmatranja potrebna su pri svođenju slučaja kad su kapaciteti realni brojevi na ovaj kad su racionalni. $\square$

Definicija 2.4 *Neka je φ protok na transportnoj mreži N. φ-rastući put od v do w je put koji se sastoji od nezasićenih lukova koji prenose nenul tok.*

Lema 2.1 *Tok φ je maksimalan na zadanoj mreži N onda i samo onda ako ne postoji φ-rastući put od v do w na N.*

Dokaz Prvo, neka je φ maksimalni tok. Pretpostavimo da postoji φ-rastući put W. Neka je d najmanja od svih vrijednosti $\psi(a) - \varphi(a)$, pri čemu lukove a uzimamo kao elemente puta W. Po definiciji φ-rastućeg puta, $d > 0$. Definiramo preslikavanje $\varphi' : A(N) \to \mathbf{R}$ ovako:

$$\varphi'(a) = \begin{cases} \varphi(a) + d, & \text{ako je} a \in W \\ \varphi(a), & \text{inače} \end{cases}$$

Sada se lako vidi da je φ' također protok na N, te da je $val(\varphi') = val(\varphi) + d > val(\varphi)$, što je u protuslovlju s maksimalnošću protoka φ. Obratni smjer se vidi lagano, pozivanjem na prethodni glavni teorem. □

Načelno, ova nam lema daje ideju za algoritam za traženje maksimalnog protoka. Treba ga tražiti dokle god postoji φ-rastući put u zadanoj mreži. Ford i Fulkerson su 1957. godine dali algoritam kako tražiti takav put, odnosno kada sa sigurnošću ustanoviti da je cijela mreža zasićena. Mi ćemo taj algoritam dati u nešto većoj općenitosti nego su bila dosadašnja razmatranja. Naime, moguće je dopustiti da kroz luk protok ide i u suprotnome smjeru, no to jasno koči dani proces.

Algoritam ima dvije etape. U prvoj etapi se, polazeći od postojećeg protoka φ, pokušava naći φ-rastući put. Ako takvog nema, φ je maksimalni protok, no ako ga ima, onda u drugoj fazi algoritma izračunavamo novi, veći protok, na temelju ideje iz prethodne leme.

U prvoj etapi se obilježavaju vrhovi mreže i to tako da se svakom vrhu x za labelu dodijeli uređeni par (l_x, L_x). Pritom simbol l_x ukazuje na vrh iz kojeg je x dobio oznaku, a L_x vrijednost za koju bi se protok u lokalnom prolazu kroz luk l_x, x mogao povećati. Izvor u početnom trenutku označimo s $(-, \infty)$. Označavanje vrhova odvija se uz poštivanje sljedećih pravila:

Direktno označavanje. Ako je $a = (x, y)$, onda je direktno označavanje vrha y iz vrha x moguće ako je $\psi(a) > \varphi(a)$. U tom slučaju vrh y dobiva labelu (x^+, L_y), gdje je $L_y = \min\{L_x, \psi(a) - \varphi(a)\}$.

Obrnuto označavanje. Ako je $a = (y, x)$, onda je obrnuto označavanje vrha y iz vrha x duž a moguće, ako je $\varphi(a) > 0$. U tom slučaju y dobiva oznaku (x^-, L_y), gdje je $L_y = \min\{L_x, \varphi(a)\}$.

Uočimo da će vrijednost $L(w)$, za ponor w, biti ona za koju je moguće povećati postojeći protok na mreži N. U drugoj je fazi potrebno upravo za toliko povećati protok duž rekonstruiranog rastućeg puta.

Ford-Fulkersonov algoritam za nalaženje maksimalnog protoka mreže

Korak 1. Odaberite neki protok φ na mreži N, na primjer nul-protok $\varphi(a) = 0$, za svaki luk $a \in A(N)$.

Korak 2. Označite v s $(-, \infty)$.

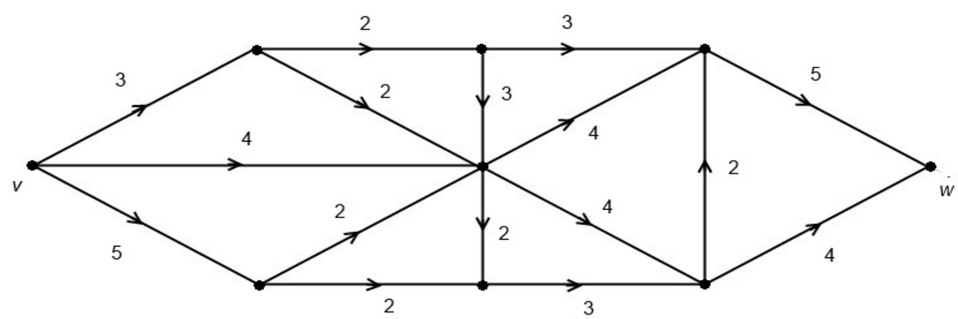
Korak 3. Ako postoji neoznačen vrh koji možemo označiti direktnim ili obrnutim označavanjem, onda odaberimo takav vrh x, označimo ga, i prijeđimo na sljedeći korak. U protivnome, maksimalni je protok nađen (kraj algoritma).

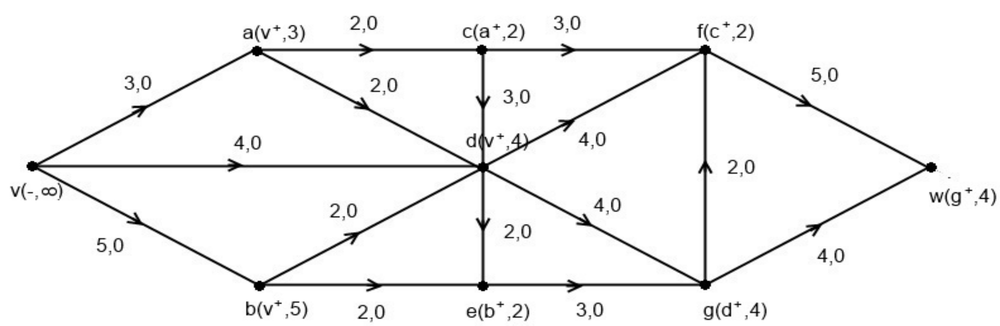
Korak 4. Ako smo došli do ponora w, prijeđite na sljedeći korak, ako ne, vratite se na prethodni korak.

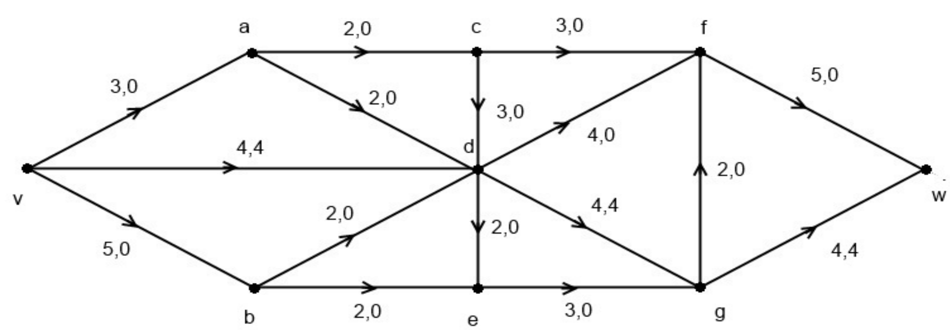
Korak 5. Neka je (l_y, L_y) oznaka vrha y. Ako je $l_y = x^+$, zamijeniti $\varphi(x, y)$ sa $\varphi(x, y) + L_w$. Ako je $l_y = x^-$, zamijeniti $\varphi(x, y)$ sa $\varphi(x, y) - L_w$.

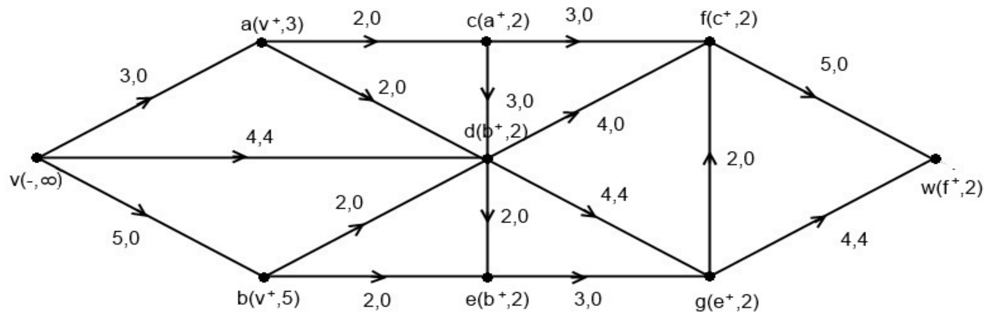
Korak 6. Ako je $x = v$, izbrišite sve oznake i prijeđite na korak 2, a ako je $x \neq v$, onda y postaje x i prelazimo na korak 5.

Primjer 2.2 *Provedimo Ford-Fulkersonov algoritam za mrežu sa slike!*

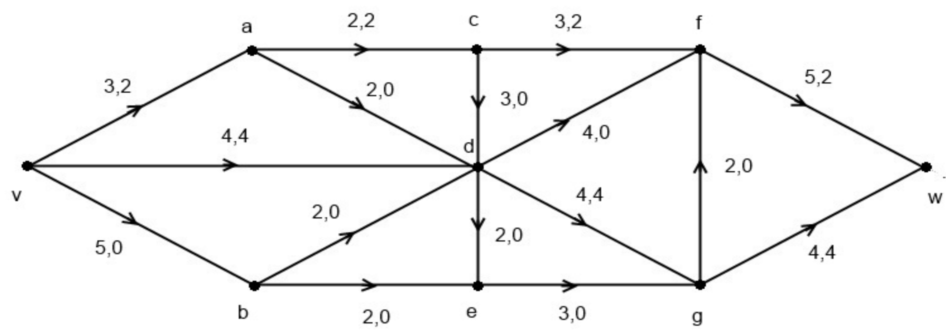




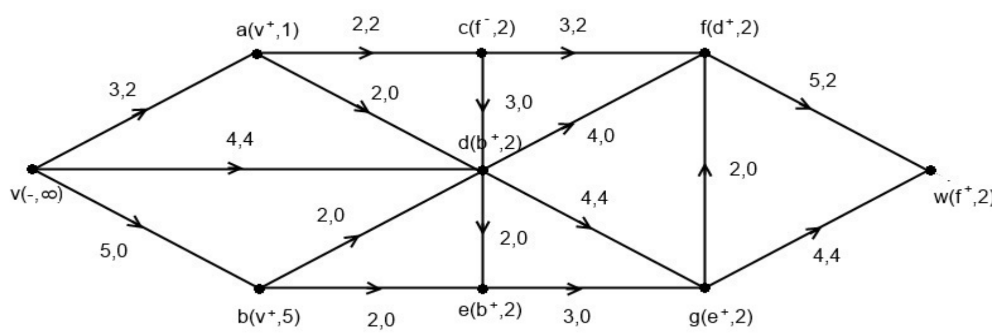




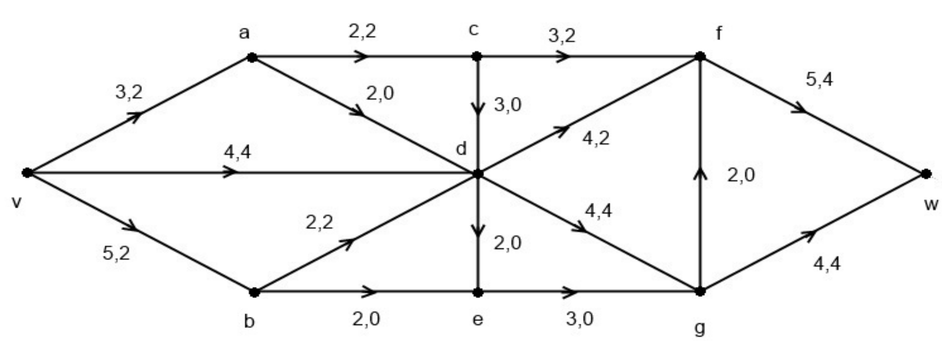
$a(v^+,3)$
$c(a^+,2)$
$f(c^+,2)$
$v(-,\infty)$
$d(b^+,2)$
$w(f^+,2)$
$b(v^+,5)$
$e(b^+,2)$
$g(e^+,2)$
3,0
4,4
5,0
2,0
2,0
3,0
2,0
3,0
4,0
2,0
4,4
2,0
2,0
3,0
5,0
2,0
4,4



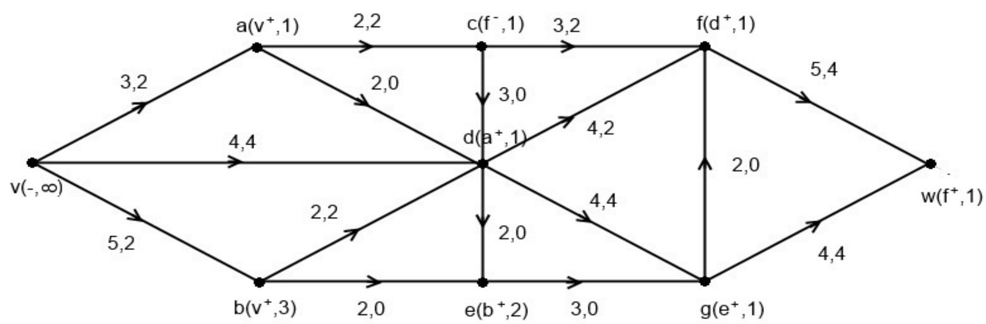
a
c
f
v
d
w
b
e
g
3,2
4,4
5,0
2,2
2,0
3,0
2,0
3,2
4,0
2,0
4,4
2,0
2,0
3,0
5,2
2,0
4,4

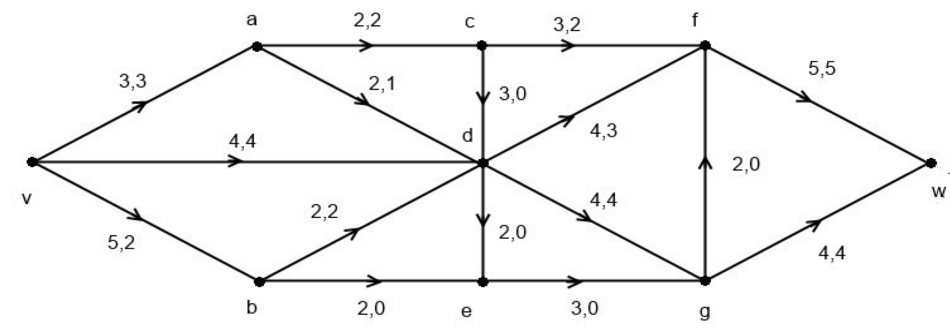


$a(v^+,1)$
$c(f^-,2)$
$f(d^+,2)$
$v(-,\infty)$
$d(b^+,2)$
$w(f^+,2)$
$b(v^+,5)$
$e(b^+,2)$
$g(e^+,2)$
3,2
4,4
5,0
2,2
2,0
3,0
2,0
3,2
4,0
2,0
4,4
2,0
2,0
3,0
5,2
2,0
4,4

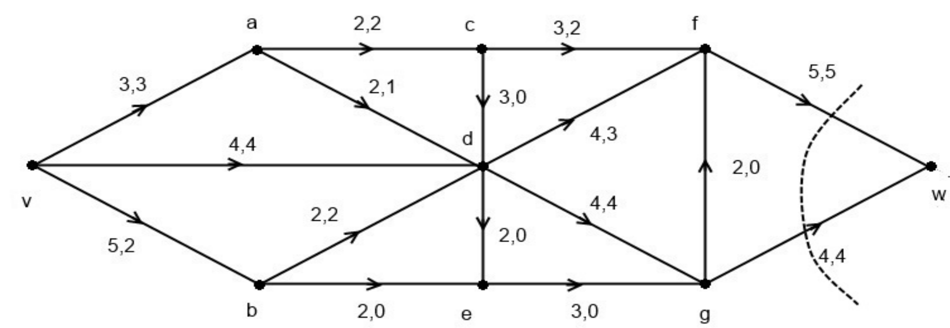


a
c
f
v
d
w
b
e
g
3,2
4,4
5,2
2,2
2,0
3,0
2,2
3,2
4,2
2,0
4,4
2,0
2,0
3,0
5,4
2,0
4,4





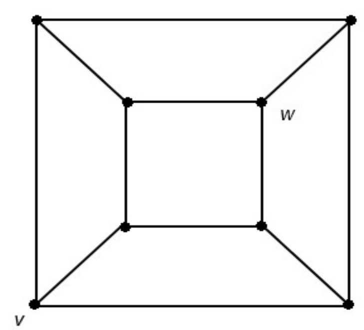
Odredimo na kraju jedan rez minimalnog kapaciteta.



Poglavlje 3

Zadaci za vježbu

1. U 3-kocki Q_3 nađite vw-separirajući skup.

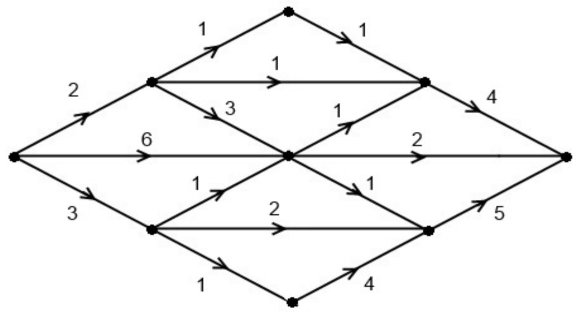


2. Verificirajte Mengerov teorem u obje forme za Petersenov graf, uzimajući za v i w dva nesusjedna vrha.

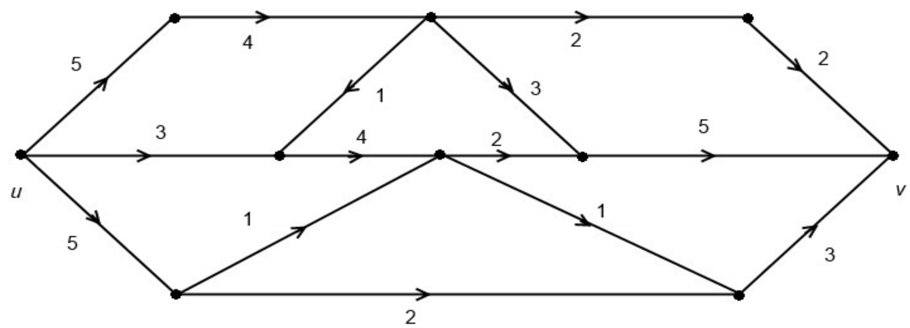
3. Pomoću korolara Mengerovog teorema odredite kolika je vršna povezanost sljedećih grafova: C_6, W_6, $K_{4,7}$.

4. Neka je G 2-bridno povezan. Dokažite da svaki brid od G pripada nekom ciklusu od G.

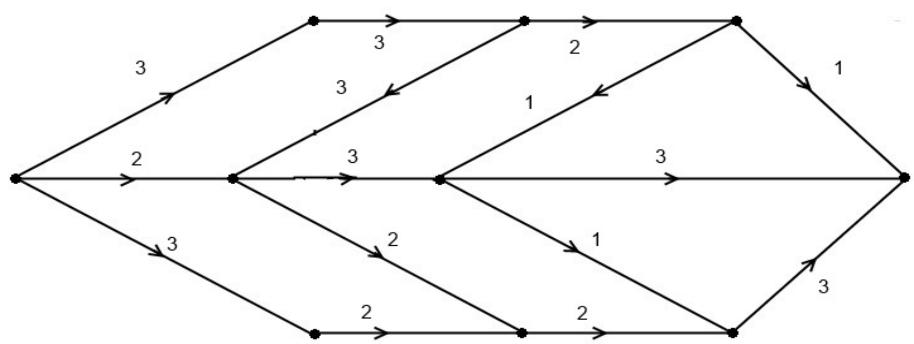
5. Nađite maksimalni protok u mreži zadanoj slikom. Nađite barem jedan rez minimalnog kapaciteta u toj mreži.



6. Nađite maksimalni protok u mreži zadanoj slikom. Nađite barem jedan rez minimalnog kapaciteta u toj mreži.

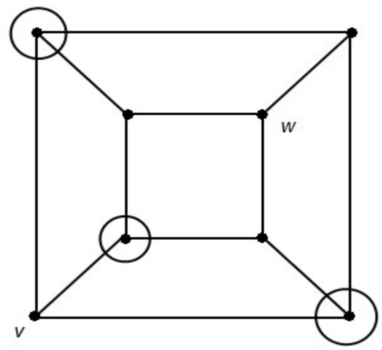


7. Nađite maksimalni protok u mreži zadanoj slikom. Nađite barem jedan rez minimalnog kapaciteta u toj mreži.



Odgovori

1. vw-separirajući skup čine 3 zaokružena vrha sa slike.

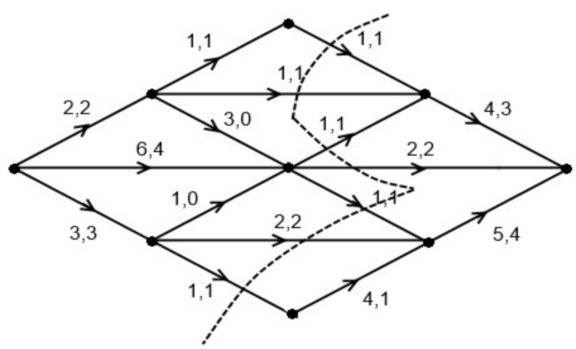


2. -

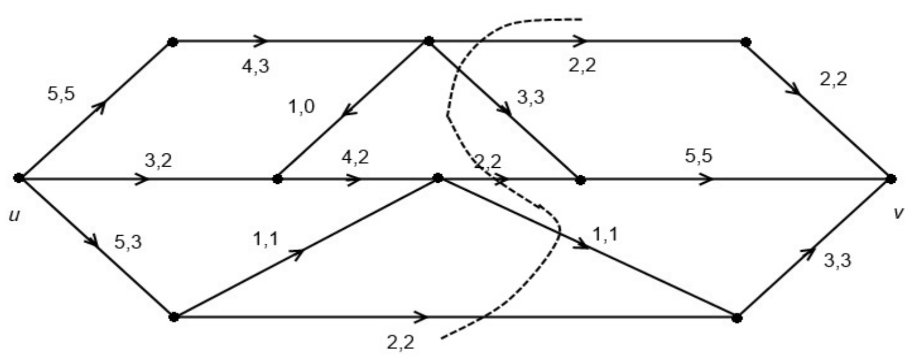
3. $2, 3, 4$.

4. Neka je uv neki brid od G. Graf G je 2-bridno povezan, pa je $G \setminus \{uv\}$ povezan. Dakle, postoji put od u do v u grafu $G \setminus \{uv\}$. Taj put u G zajedno s vrhom uv čini ciklus.

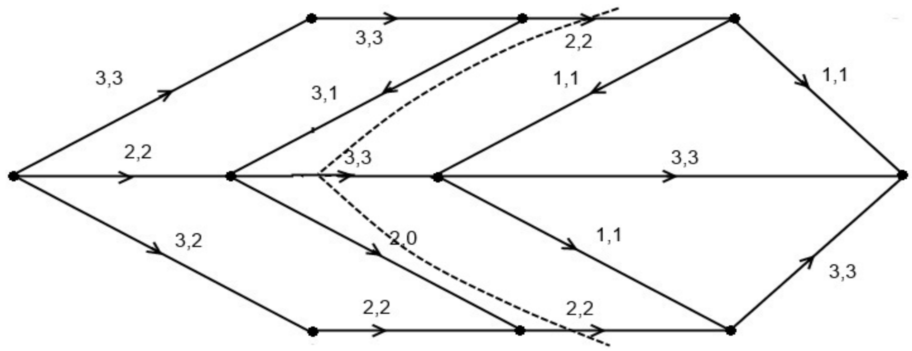
5. Minimalni rez čine lukovi presječeni iscrtkanim linijama.



6.



7.



Poglavlje 4

Istraživački zadaci

Zadatak 4.1 *Neka je G povezan s barem 2 vrha. Označimo s Δ najveći stupanj vrha od G. Nadalje, neka je $\kappa(G)$ vršnu povezanost, a $\lambda(G)$ bridna povezanost od G. Dokažite:*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \Delta.$$