DEFINICIJE, TEOREMI, KOROLARI, LEME

Definicija:

Jednostavni graf G sastoji se od nepraznog konačnog skupa $V(G)$, čije elemente zovemo **vrhovi** (čvorovi) grafa G i konačnog skupa $E(G)$ različitih dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje zovemo **bridovi**. Skup $V(G)$ zovemo skup vrhova i ako je jasno o kojem je grafu G riječ označavat ćemo ga kraće samo s V, a skup $E(G)$ zovemo skup bridova i označavat ćemo ga kraće samo s E. Formalno, ponekad ćemo pisati $G = (V(G), E(G))$ ili kraće još i $G = (V, E)$.

Definicija:

Za brid $e = \{v, w\}$ kažemo da **spaja** vrhove v i w i bez mogućnosti zabune kraće ga pišemo vw. U toj situaciji kažemo da su vrhovi v i w grafa G **susjedni**. Također, kažemo da je vrh v **incidentan** s bridom e. Naravno, i w je također incidentan s bridom e.

Definicija:

Za grafove G_1 i G_2 kažemo da su **izomorfni** ako postoji bijektivna korespodencija (1 – 1 preslikavanje) između skupova $V(G_1)$ i $V(G_2)$, takva da je broj bridova koji spajaju bilo koja dva izabrana vrha u $V(G_1)$ jednak broju bridova koji spajaju korespodentna dva vrha u $V(G_2)$, Takvu bijekciju zvat ćemo **izomorfizam** grafova.

Definicija:

Za zadane disjunktne grafove $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ i $G_2 = (V(G_2), E(G_2))$ definiramo njihovu **uniju** $G_1 \cup G_2$ kao graf $G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$.

Definicija:

Graf je **povezan** ako se ne može prikazati kao unija neka dva grafa. U suprotnom kažemo da je graf **nepovezan**. Svaki se nepovezani graf dakle može prikazati kao unija povezanih grafova. Svaki član te unije zovemo **komponenta povezanosti**.

Definicija:

Stupanj vrha v grafa G je broj bridova koji su incidentni s v. Označavamo ga s deg(v). Dogovorno, ako je vrh v petlja, onda ona broju deg(v) doprinosi s 2. Vrh stupnja 0 zovemo **izolirani vrh**, a vrh stupnja 1 zovemo **krajnji vrh**.

Lema (o rukovanju):

U svakom grafu G je zbroj stupnjeva svih vrhova paran.

Korolar:

Broj vrhova neparnog stupnja u svakom je grafu paran.

Definicija:

Za graf G kažemo da je **regularan**, ako su svi njegovi vrhovi istog stupnja. Kažemo da je G r-regularan ako je $\deg(v) = r$, za svaki v iz $V(G)$. Cijeli broj r tada ćemo zvati **stupanj regularnosti** grafa G.

Definicija:

Podgraf grafa G je graf čiji vrhovi pripadaju skupu $V(G)$, a bridovi skupu $E(G)$.

Definicija:

Označimo li vrhove zadanog grafa G s $\{1, 2, \ldots, n\}$, onda definiramo **matricu susjedstva** $A = [a_{ij}]$ kao n x n matricu čiji je element a_{ij} jednak broju bridova koji spajaju vrh i s vrhom j.

Definicija:

Označimo li dodatno bridove zadanog grafa G s $E = \{1, 2, \ldots, m\}$, onda definiramo **matricu incidencije** kao n x m matricu $B = [b_{ij}]$ čiji su elementi 1 ako je vrh i incidentan s bridom j, a 0 inače.

Definicija:

Neka je dan graf G. **Šetnja** u G je konačan slijed bridova oblika $v_0v_1, v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m$, također često u oznaci $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \ldots \rightarrow v_m$, u kojem su svaka dva uzastopna brida ili susjedna ili jednaka.

Definicija:

Šetnju u kojoj su svib bridovi različiti zovemo **staza**. Ako su, uz to i svi vrhovi $v_0, v_1, \ldots, v_m$ različiti (osim eventualno početni vrh v_0 i krajnji vrh v_m), onda takvu stazu zovemo **put**. Za stazu ili put kažemo da su **zatvoreni** ako je $v_0 = v_m$. Zatvoreni put koji sadrži barem jedan brid zovemo ciklus.

Teorem:

Relacija „biti povezan“ definirana na skupu vrhova grafa G je relacija ekvivalencije. Razredi (klase) ekvivalencije te relacije su komponente povezanosti grafa G.

Teorem:

G je bipartitan graf onda i samo onda ako je svaki ciklus u grafu G parne duljine.

Teorem:

Neka je G jednostavan graf s n vrhova. Ako G ima k komponenata povezanosti, onda za broj bridova m od G vrijedi

$$n - k \leq m \leq (n - k)(n - k + 1) / 2$$

Korolar:

Svaki jednostavni graf s n vrhova i više od $(n-1)(n-2) / 2$ bridova je povezan.

Definicija:

Rastavljajući skup povezanog grafa G je skup bridova čijim uklanjanjem G postaje nepovezan.

Definicija:

Za rastavljajući skup kažemo da je **rezni skup**, ako nijedan njegov pravi podskup nije rastavljajući.

Definicija:

Rezni skup koji se sastoji od jednog jedinog brida zovemo **most**.

Definicija:

Separirajući skup povezanog grafa G je skup vrhova od G čijim uklanjanjem G postaje nepovezan.

Definicija:

Vršna povezanost $\kappa(G)$ je broj elemenata najmanjeg separirajućeg skupa.

Definicija:

Šuma je graf bez ciklusa, a povezanu šumu zovemo **stablo**.

Teorem:

Neka je T graf s n vrhova. Onda su sljedeće izreke ekvivalentne:

(i) T je stablo.

(ii) T ne sadrži ciklus i ima $n - 1$ bridova.

(iii) T je povezan i ima $n - 1$ bridova.

(iv) T je povezan i svaku mu je brid most.

(v) Svaka dva vrha od T povezana su točno jednim putem.

(vi) T ne sadrži ciklus, no dodavanjem jednog brida dobit ćemo točno jedan ciklus.

Korolar:

Ako je G šuma s n vrhova i k komponenata povezanosti, onda G ima $n - k$ bridova.

Definicija:

Za povezani graf G kažemo da je **eulerovski**, ako postoji zatvorena staza koja sadrži svaki brid od G. Takvu stazu zovemo **eulerovska staza**. Neeulerovski graf je **skoro eulerovski** (semi-eulerovski) ako postoji staza koja sadrži svaki brid od G.

Lema:

Ako je G graf u kojem je stupanj svakog vrha najmanje 2, onda G sadrži ciklus.

Teorem (Euler):

Povezani graf G je eulerovski onda i samo onda ako je stupanj svakog vrha paran.

Korolar:

Povezani graf je eulerovski onda i samo onda ako se njegov skup bridova može rastaviti u disjunktnu uniju ciklusa.

<u>Korolar:</u>

Povezani graf je skoro eulerovski onda i samo onda ako ima točno dva vrha neparnog stupnja.

<u>Teorem (Fleuryjev algoritam):</u>

Neka je G eulerovski graf. Tada je sljedeća konstrukcija uvijek moguća i dovodi do eulerovske staze od G. Započni u bilo kojem vrhu u i prolazi vrhovima u bilo kojem redoslijedu, pazeći pritom samo na sljedeća pravila:

(i) prebriši bridove kojima si prošao, a ako nakon prolaska vrh ostane izoliran, pobriši i njega.

(ii) prijeđi mostom samo ako nemaš druge mogućnosti.

<u>Definicija:</u>

Ciklus koji prolazi svim vrhovima zadanog grafa zovemo **hamiltonovski ciklus**. Graf koji posjeduje hamiltonovski ciklus zovemo **hamiltonovski graf**.

<u>Teorem (Ore):</u>

Ako je G jednostavni graf s n vrhova, $n \geq 3$, te ako vrijedi

$$\mathbf{deg}(v) + \mathbf{deg}(w) \geq \mathbf{n}$$

za svaki par nesusjednih vrhova v i w grafa G, onda je G hamiltonovski.

<u>Teorem (Dirac):</u>

Ako je G jednostavni graf s n ($n \geq 3$) vrhova te ako je $\deg(v) \geq n/2$ za svaki vrh v iz G, onda je G hamiltonovski.

<u>Definicija:</u>

Razapinjući podgraf zadanog grafa $G = (V, E)$ s n vrhova je svaki podgraf $G' = (V, E')$ s grafa G s istim skupom vrhova kao i G, dakle također s n vrhova.

<u>Teorem:</u>

Ako je T razapinjuća šuma grafa G, onda vrijedi:

(i) Svaki rezni skup od G ima zajednički brid s T.

(ii) Svaki ciklus od G ima zajednički brid s komplementom od T.

Teorem (Cayley):

Postoji točno n^{n-2} različitih označenih stabala s n vrhova.

Definicija:

$(n - 2)$ – torka $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2})$, $1 \leq a_i \leq n$, pridružena obilježenom stablu T s n vrhova na način opisan u dokazu Cayleyevog teorema naziva se Prüferov kod stabla T.

Korolar:

Broj razapinjućih stabala potpunog grafa K_n s n vrhova je n^{n-2}.

Teorem (Kruskalov algoritam):

Neka je G povezani graf s n vrhova. Sljedeći konstrukcijski postupak daje rješenje problema minimalnog razapinjućeg stabla:

1. Neka je e_1 brid od G najmanje težine.
2. Definiramo $e_2, e_3, \ldots, e_{n-1}$ birajući u svakom sljedećem koraku brid najmanje moguće težine koji ne tvori ciklus već prethodno izabranim bridovima e_i.

Traženo razapinjuće stablo je podgraf T od G sastavljen od bridova $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$.

PRIMJERI GRAFOVA

Nul-graf:

Nul-graf je graf čiji je skup bridova prazan skup. Uočimo da su svi nul-grafovi s istim brojem vrhova međusobno izomorfni. Nul-graf s n vrhova označavat ćemo s N_n. U nul-grafu je svaki vrh izoliran, tj. stupanj svakog vrha jednak je nuli.

Potpuni graf:

Jednostavni graf kod kojeg su svaka dva vrha susjedna zovemo potpuni graf. Potpuni graf s n vrhova označavamo s K_n. Uočimo da potpuni graf ima $n(n-1) / 2$ bridova, te da svaki od n vrhova ima točno n-1 susjeda pa je K_n (n-1)-regularan.

Ciklički graf (ciklus):

Povezani 2-regularni graf zovemo ciklički graf (ili kratko ciklus). Ciklički graf s n vrhova označavamo s C_n. Ciklus C_n ima n vrhova i n bridova.

Lanac:

Graf koji dobijemo iz cikličkog grafa brisanjem točno jednog brida zovemo lanac i označavamo P_n, ako ima n vrhova.

Kotač:

Graf koji dobijemo iz ciklusa C_{n-1} tako da svaki njegov vrh spojimo s jednim novim vrhom zovemo kotač s n vrhova i označavmo s W_n. Jednostavno se izračuna da je $|E(W_n)| = 2n - 2$.

Potpuni bipartitni graf:

Potpuni bipartitni graf je onaj bipartitni graf s particijom skupa vrhova $V(G) = A \cup B$, kod kojeg je svaki vrh iz skupa A spojen sa svakim vrhom iz B. Ako je $|A| = r$, te $|B| = s$, onda takav graf označavamo s $K_{r,s}$, Jasno je da vrijedi da graf $K_{r,s}$ ima $r + s$ vrhova i $r \bullet s$ bridova.

Kocka:

k-kocka Q_k je graf čiji vrhovi odgovaraju svim binarnim nizovima $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, a_i može biti 0 ili 1, duljine k, te čiji bridovi spajaju one binarne nizove koji se razlikuju točno na jednom mjestu.

Petersonov graf: