Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Drugi ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 8. srpnja 2021.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Tri simbola međusobno jednakih vjerojatnosti pojavljivanja prenose se kroz dva serijski vezana kanala. U svakom od ta dva kanala vjerojatnost ispravnog prijenosa simbola iznosi 0,8, a vjerojatnosti pogrešnog prijenosa simbola su međusobno jednako vjerojatne. Odredite kapacitet serijskog spoja kanala.

a) 2,85 bit/s

b) 0,32 bit/s

c) 0,755 bit/s

d) 1,585 bit/s

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ovaj zadatak je nadopuna zadatka 1.10., riješenog zadatka iz zbirke. Koristeći jednakost iz slajdova s predavanja

$$\left[P(y_1), P(y_2), \ldots, P(y_m)\right] = \left[P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)\right] \cdot \left[P(Y|X)\right],$$

možemo napisati jednakost za serijski spoj kanala:

$$\left[P(y_j)\right] = \left[P(z_k)\right]\left[P(y_j \mid z_k)\right] = \left[P(x_i)\right]\left[P(z_k \mid x_i)\right]\left[P(y_j \mid z_k)\right] = \left[P(x_i)\right]\left[P(y_j \mid x_i)\right],$$

te sukladno tome vrijedi:

$$\left[P(y_j \mid x_i)\right] = \left[P(z_k|x_i)\right]\left[P(y_j \mid z_k)\right].$$

Tražena matrica je:

$$\left[P(y_j \mid x_i)\right] = \begin{bmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}66 & 0{,}17 \\ 0{,}17 & 0{,}17 & 0{,}66 \end{bmatrix}.$$

Uvidom u elemente matrice jasno je da se radi o simetričnom kanalu (stupci su permutacije jedni drugih i reci također). Dakle, kapacitet kanala možemo jednostavno izračunati koristeći izraz:

$$C = \log\left[\mathrm{card}(Y)\right] - H(Y|x),$$

entropija $H(Y|x)$ računa se za jedan od redaka matrice $[P(y_j|x_i)]$:

$$H(Y|x) = \sum_{y \in Y} P(y|x_i) \log\left(\frac{1}{P(y|x_i)}\right),$$

$$C = \log_2 3 + (0{,}66 \log_2 0{,}66 + 2 \cdot 0{,}17 \log_2 0{,}17) = 0{,}32\,\mathrm{bit/s}.$$

Zadatak 2. Zadan je skup od 6 simbola sa sljedećim vjerojatnostima pojavljivanja: $P(x_1) = 0{,}24$, $P(x_2) = 0{,}42$, $P(x_3) = P(x_5) = 0{,}1$, $P(x_4) = 0{,}13$, $P(x_6) = 0{,}01$. Kodirajte zadani skup simbola tako da srednja duljina kodne riječi bude minimalna. Nastavno na to, odredite duljinu trajanja binarnih simbola „0“ i „1“ tako da prosječan broj simbola x_i koji se unutar 10 sekundi prenesu kanalom iznosi 4000.

a) 0,44 s

b) 0,11 ms

c) 2,5 ms

d) 1,12 ms

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ovo je zadatak 2.8., riješeni zadatak iz zbirke, zadan uz male modifikacije vjerojatnosti simbola. Postupak kodiranja skupa simbola Huffmanovim kodom daje sljedeće kodne riječi:

x_i	$p(x_i)=p_i$	Kodna riječ	$l(x_i)=l_i$
x_1	0,42	0	1
x_2	0,24	10	2
x_3	0,13	110	3
x_4	0,10	1110	4
x_5	0,10	11111	5
x_6	0,01	11110	5

Srednja duljina kodne riječi $L = 2{,}24$ bit/simbol.

Dakle, prosječan broj bitova koji se prenesu komunikacijskim kanalom u jednoj sekundi je:

$$R = \frac{4000\,\text{simbol}}{10\,\text{s}} = 400\,\text{simbol/s} = 400\,\text{simbol/s} \cdot 2{,}24\,\text{bit/simbol} = 896\,\text{bit/s}$$

Trajanje binarnih simbola “0” i “1” jednako je $T = 1/R = 1{,}12$ ms.

Zadatak 3. Zadan je paritetni kod [4, 3] s jednim parnim paritetnim bitom. Izračunajte vjerojatnost neotkrivenih pogrešaka u prijemniku, uz uvjet da se u kanalu pogreške bita javljaju s vjerojatnošću $p_g = 0{,}04$.

a) 0,85

b) 0,14

c) $8{,}85 \cdot 10^{-3}$

d) 0,98

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ovo je zadatak 3.1., riješeni zadatak iz zbirke. Vjerojatnost nedetektiranih pogrešaka, p_{np}, jednaka je zbroju vjerojatnosti pojave dvostrukih i četverostrukih pogrešaka i iznosi:

$$p_{\text{np}} = \binom{4}{2} p_{\text{g}}^2 (1-p_{\text{g}})^2 + \binom{4}{4} p_{\text{g}}^4 (1-p_{\text{g}})^0 = 8{,}85 \cdot 10^{-3}$$

Zadatak 4. U AWGN kanalu na signal s Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti i srednje snage 1,9 W djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = 7{,}5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz, za svaki $f \in \mathbf{R}$. Koliko iznosi maksimalni kapacitet ostvariv u takvom kanalu? Napomena: nije potreban izvod izraza za maksimalni kapacitet kanala.

a) 253,333 Mbit/s

b) 182,741 Mbit/s

c) 365,483 Mbit/s

d) 126,667 Mbit/s

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ovo je zadatak 4.44, neriješeni zadatak iz zbirke. Kapacitet idealnog AWGN kanala širine *B*:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right).$$

Uz fiksno zadanu srednju snagu signala i spektralnu gustoću snage bijelog šuma kapacitet će poprimiti maksimalnu vrijednost kad je širina prijenosnog pojasa beskonačna:

$$C_\infty = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right) = \lim_{B\to\infty} \log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right)^B$$

Uvedemo zamjenu varijabli:

$$t = \frac{N_0 B}{S}$$
$$B \to \infty \Rightarrow t \to \infty$$

Uvrstimo *t* i prepoznajemo

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

$$C_\infty = \lim_{t\to\infty}\log_2\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t\frac{S}{N_0}} = \log_2 \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right]^{\frac{S}{N_0}} = \log_2 e^{\frac{S}{N_0}} =$$
$$= \frac{S}{N_0}\log_2 e = 182741371{,}8\ \frac{\text{bit}}{\text{s}} = 182{,}741\ \frac{\text{Mbit}}{\text{s}}$$

Zadatak 5. Zadan je linearni binarni blok kôd *K* [7, 3] s matricom provjere pariteta **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \_ & \_ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \_ & \_ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dekodirajte primljenu kodnu riječ **c**' = [0 1 1 0 0 1 1]. Napomena: matrica **G** koda *K* je u standardnom obliku.

a) 0 1 1 0 1 1 1

b) 0 1 1 0 1 0 1

c) 1 1 1 0 1 1 1

d) 0 1 1 0 0 1 1

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ovo je zadatak 3.23., neriješeni zadatak iz zbirke.

$$[0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} a + e &= 0 \\ b + f &= 0 \\ c + g + 1 &= 0 \\ d + h + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{I} \mid \mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 1 & e & f & g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a & b & c & d \\ 0 & 0 & 1 & a & b & c+1 & d+1 \end{bmatrix}$$

Distanca koda $d(K) = 4$ znači da sve kodne riječi koda K, osim riječi sastavljene od svih nula, moraju imati težinu veću od ili jednaku 4: $w(\mathbf{x}) \geq 4$. Dakle, i bazni vektori koda K, $\mathbf{b}_i$, $i = 1, 2, 3$, sadržani u matrici $\mathbf{G}$, moraju imati težinu veću od ili jednaku 4:

za prvi redak to vrijedi, $w(\mathbf{b}_1) = 4$,

nadalje, mora vrijediti i $w(\mathbf{b}_2) = w([0\ 1\ 0\ a\ b\ c\ d]) \geq 4$ i

$w(\mathbf{b}_3) = w([0\ 1\ 0\ a\ b\ c{+}1\ d{+}1]) \geq 4$

Kako bi vrijedilo $w(\mathbf{b}_2) \geq 4$, u obzir dolaze sljedeće kombinacije:

$a\ b\ c\ d = 1\ 1\ 1\ 1$, $w(\mathbf{b}_2) = 5$

$a\ b\ c\ d = 1\ 1\ 1\ 0$, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

$a\ b\ c\ d = 1\ 1\ 0\ 1$, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

$a\ b\ c\ d = 1\ 0\ 1\ 1$, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

$a\ b\ c\ d = 0\ 1\ 1\ 1$, $w(\mathbf{b}_2) = 4$

Tada za $\mathbf{b}_3$ vrijedi:

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1 = 1\ 1\ 0\ 0$, $w(\mathbf{b}_3) = 3$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 1 0 1, $w(\mathbf{b}_3) = 4$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 1 1 0, $w(\mathbf{b}_3) = 4$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 1 0 0 0, $w(\mathbf{b}_3) = 2$

$a\ b\ c{+}1\ d{+}1$ = 0 1 0 0, $w(\mathbf{b}_3) = 2$.

Dakle, zbog težina kodnih riječi, u obzir dolaze samo kombinacije 2 i 3.

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je potrebno provjeriti sindrome za primljenu kodnu riječ.

$$S_1(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S_2(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oba sindroma pokazuju da pogreške nema pa je poslana kodna riječ jednaka primljenoj, [0 1 1 0 0 1 1].

Zadatak 6. Na ulaz kodera informacije dolazi poruka sastavljena od dvanaest simbola *a* i oznake kraja poruke (simbol *), *aaaaaaaaaaaa**. Koliko mora iznositi duljina prozora za kodiranje pa da izlaz iz kodera informacije koji koristi kôd LZ77 bude određen sljedećim trojkama: (0, 0, *a*), (1, 10, *a*), (0, 0, *)?

a) 11 simbola;

b) 13 simbola;

c) 12 simbola;

d) 10 simbola.

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Nakon prvog koraka kodiranja, koji generira trojku (0, 0, a), u posmičnom prozoru sadržan je simbola a, a prozor za kodiranje obuhvaća naredne simbole u nizu. Kako bi druga trojka bila (1, 10, a), a treća (0, 0, *) prozor za kodiranje mora obuhvaćati 11 simbola a (deset kako označava drugi element trojke i jedan kojeg označava treći element trojke). To je ujedno i duljina prozora za kodiranje, tj. 11 simbola.

Zadatak 7. Neka je k kanala s brisanjem (BEC) spojeno u seriju. Vjerojatnost brisanja simbola u svakom od njih iznosi $p = 0{,}01$. Odredite koliko najmanje mora iznositi k pa da je vjerojatnost brisanja simbola u serijskom spoju kanala veća od 0,1 te za tu vrijednost od k odredite kapacitet serijskog spoja kanala.

a) 0,895 bit/simbol

b) 0,99 bit/simbol

c) 0,314 bit/simbol

d) 0,686 bit/simbol

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Podloga za ovaj zadatak je riješeni zadatak 1.15. iz zbirke. Razmatramo kanal s brisanjem u kojem je vjerojatnost ispravnog prijenosa simbola $1 - p$, a vjerojatnost njegova brisanja p. Serijski spoj k kanala s brisanjem je također kanala s brisanjem u kojem je vjerojatnost ispravnog prijenosa simbola jednaka $(1 - p)^k$, a vjerojatnost brisanja simbola $1 - (1 - p)^k$. Kako bi vjerojatnost brisanja simbola u serijskom spoju k kanala bila veća od 0,1 mora vrijediti: $1 - (1 - p)^k > 0{,}1$, što znači da mora vrijediti $0{,}99^k < 0{,}9$:

$$0{,}99^k < 0{,}9 \,\big|\ln$$
$$k \cdot \ln 0{,}99 < \ln 0{,}9$$
$$k > \frac{\ln 0{,}9}{\ln 0{,}99}$$
$$k > 10{,}483$$

Dakle, k mora iznositi minimalno 11 kako bi ukupna vjerojatnost brisanja iznosila više od 0,1. Kapacitet serijskog spoja k kanala s brisanjem određuje se po analogiji s izrazom iz spomenutog zadatka 1.15. iz zbirke. $C_k = (1 - p)^k$ bit/simbol, što za $p = 0{,}01$ i $k = 11$ daje $C_k = 0{,}895$ bit/simbol.

Zadatak 8. Razmatrajte informacijski izvor koji generira 5 simbola: x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5. Njihove vjerojatnosti su $p_i = P(x_i)$, $i = 1, \ldots, 5$. Pretpostavite da vrijedi: $P(x_1) \geq P(x_2) \geq P(x_3) \geq P(x_4) > P(x_5) = 0$. Odredite najveću vrijednost broja r za koju uvjet $P(x_1) \leq r$ implicira da je $n_1 > 1$. Pri tome n_1 označava duljinu binarne kodne riječi koja je Huffmanovim kodom pridijeljena simbolu x_1.

a) 1/7

b) 2/5

c) 1/3

d) 2/9

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Prvo treba vidjeti kako bi Huffmanov kod djelovao nad zadanim skupom simbola. Prvo bi združio simbole x_3 i x_4 u nadsimol vjerojatnosti $P(x_3) + P(x_4)$. Kako bi duljina kodne riječi dodijeljen simbolu x_1 bila veća od 1 mora vrijediti $P(x_1) < P(x_3) + P(x_4)$, što za sobom povlači i nejednakost $P(x_2) < P(x_3) + P(x_4)$, jer je zadano da je $P(x_1) \geq P(x_2)$. Kako bi vjerojatnost $P(x_3) + P(x_4)$ bila što manja, mora vrijediti $P(x_1) = P(x_2)$. Iz toga proizlazi da je $P(x_3) + P(x_4) = 1 - 2P(x_1)$. Dakle, uvjet kojeg mora zadovoljavati $P(x_1)$ je: $P(x_1) < 1 - 2P(x_1)$, odnosno $P(x_1) < 1/3$. Dakle, $r = 1/3$.

Zadatak 9. Razmatrajte slučajnu varijablu X kojom je opisan ulaz u kontinuirani komunikacijski kanal bez šuma. Slučajna varijabla X opisana je funkcijom gustoće vjerojatnosti $f_X(x)$:

$$f_X(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ 1/8, & a\le x<a+b \\ 1/4, & a+b\le x<a+3b \\ 1/8, & a+3b\le x<a+4b \\ 0, & x\le 4b \end{cases}, \quad a,b\in R^+$$

Odredite kapacitet promatranog kanala u jedinici bit/simbol.

a) 7/(3·ln2) bit/simbol

b) 7/3 bit/simbol

c) 7/2 bit/simbol

d) 7/2·ln(2) bit/simbol

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

U prvom koraku potrebno je odrediti entropiju slučajne varijable X. S obzirom da je u konačnici potrebno izračunati kapacitet kanala u jedinici bit/simbol, entropiju je moguće odrediti izrazom:

$$H(X)=-\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\log_2 f_X(x)\,dx=$$
$$=-\left[\int_a^{a+b}\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}dx+\int_{a+b}^{a+3b}\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4}dx+\int_{a+3b}^{a+4b}\frac{1}{8}\log_2\frac{1}{8}dx\right].$$

Kako bi bilo moguće izračunati gore navedene integrale potrebno je poznavati konstantu b. Nju je moguće odrediti na temelju svojstva funkcije gustoće vjerojatnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=1.$$

U ovom konkretnom slučaju to znači da mora vrijediti:

$$\int_a^{a+b}\frac{1}{8}dx+\int_{a+b}^{a+3b}\frac{1}{4}dx+\int_{a+3b}^{a+4b}\frac{1}{8}dx=1,$$
$$\frac{b}{8}+\frac{2b}{4}+\frac{b}{8}=1,\quad \frac{6b}{8}=1,\quad b=\frac{4}{3}.$$

Sada je moguće odrediti $H(X)$:

$$H(X)=\frac{3}{8}b+\frac{1}{2}2b+\frac{3}{8}b=\frac{14}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{7}{3}\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

S obzirom da u promatranom kontinuiranom kanalu ne djeluje šum, vrijedi $C = H(X)$ pa je $C = 7/3$ bit/simbol.

Zadatak 10. Zadan je ciklični kôd K s parametrima $[9, k]$, pri čemu je $k < 9$. Ako je dekoder primio kodnu riječ $\mathbf{c} = [1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1]$, te ako pretpostavimo da u prijenosu nije bilo pogrešaka bita, odredite broj korisničkih bita u kodnoj riječi.

a) 4

b) 6

c) 3

d) 7

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ možemo prikazati polinomom $c(x) = x^8 + x + 1$. Iz duljine kodne riječi očitavamo da je $n = 9$. S obzirom da je kodna riječi umnožak podatkovne poruke $d(x)$ i generirajućeg polinoma, potrebno je provjeriti kvocijente kodne riječi sa svim mogućim polinomima koji se mogu pojaviti u faktorizaciji polinoma $x^9 - 1$. Kao ispravan polinom nudi se onaj uz kojeg vrijedi da je $c(x)$ mod $g(x) = 0$. Znamo da vrijedi $x^9 - 1 = (x + 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^6 + x^3 + 1)$.

a) Podijelimo li $c(x)$ s $(x + 1)$ dobivamo $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$ i ostatak 1;

b) Podijelimo li $c(x)$ s $(x^2 + x + 1)$ dobivamo $x^6 + x^5 + x^3 + x^2 + 1$ i ostatak 0;

c) Podijelimo li $c(x)$ s $(x^6 + x^3 + 1)$ dobivamo x^2 i ostatak $x^5 + x^2 + x + 1$.

Očito je da je generirajući polinom jednak $x^2 + x + 1$ i stoga je $k = n - r = 9 - 2 = 7$.