Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 24. siječnja 2012.

Grupa A

Napomena:

Svaki točno riješen zadatak boduje se s tri (3) boda, zadatak koji nije rješavan s nula (0) bodova, a svaki netočno riješen zadatak boduje se s jednim negativnim bodom (-1).

Trajanje ispita: 120 minuta.

ZADACI

1. Razmatrajte blok kôd s 8 kodnih riječi koji svaku poruku duljine 3 bita kodira dodatnim paritetnim bitom koristeći pri tome neparni paritet. Odredite vjerojatnost da zadani kôd otkrije pogreške bita koje mogu nastati prilikom prijenosa kodnih riječi binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,01.

a) 0,99

b) $5{,}88 \cdot 10^{-4}$

c) 10^{-6}

d) $38{,}82 \cdot 10^{-3}$

Postupak rješavanja:

Zadani paritetni kôd će otkriti sve jednostruke i trostruke pogreške na svakoj kodnoj riječi. Dakle, vjerojatnost otkivanja pogreške računa se prema izrazu:

$$P_o = \binom{4}{1} p(1-p)^3 + \binom{4}{3} p^3 (1-p)$$

Uz zadani $p = 0{,}01$ točan rezultat iznosi $P_\text{o} = 38{,}82 \cdot 10^{-3}$.

2. Zadan je binarni blok kôd K. Na ulazu kodera kanala danog koda pojavljuju se tri poruke: $\mathbf{d}_1$ = [101], $\mathbf{d}_2$ = [011] i $\mathbf{d}_3$ = [111]. Na izlazu kodera kanala, za dane tri poruke $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$ pojavljuju se sljedeće tri kodne riječi: $\mathbf{c}_1$ = [100101], $\mathbf{c}_2$ = [001011], odnosno $\mathbf{c}_3$ = [010110]. Odredite 5. i 6. bit u kodnoj riječi koja odgovara poruci $\mathbf{d}_4$ = [110].

a) 00

b) 01

c) 10

d) 11

Postupak rješavanja:

Temeljem zadanih poruka i kodnih riječi očito je da se radi o kodu $[n, k] = [6, 3]$. Također, temeljem zadanih kodnih riječi $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_3$ vidljivo je da generirajuća matrica danog koda K nije u standardnom obliku. Dakle, neka je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}, a_i, b_i, c_i \in \{0,1\} \; za \; i = 1,...,6$$

Nadalje, za zadane poruke i kodne riječi vrijede sljedeće jednakosti:

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_1 \rightarrow [101] \cdot \mathbf{G} = [100101] \qquad (1)$$

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_2 \rightarrow [011] \cdot \mathbf{G} = [001011] \qquad (2)$$

$$\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_3 \rightarrow [111] \cdot \mathbf{G} = [010110] \qquad (3)$$

Temeljem navedenih jednakosti određujemo bitove matrice **G**. Na primjer,

Temeljem jednakosti (1) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_1$ vrijedi sljedeće: $a_1 \oplus c_1 = 1$

Temeljem jednakosti (2) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_2$ vrijedi sljedeće: $b_1 \oplus c_1 = 0$

Temeljem jednakosti (3) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_3$ vrijedi sljedeće: $a_1 \oplus b_1 \oplus c_1 = 0$

Iz toga slijedi: $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ i $c_1 = 1$. Po istoj analogiji određujemo sve ostale bitove matrice **G** i dobivamo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $\mathbf{c}_4 = \mathbf{d}_4 \cdot \mathbf{G}$ = [101110], odnosno bitovi koji odgovaraju 5. i 6. poziciji u kodnoj riječi $\mathbf{c}_4$ su 1 i 0.

3. Razmatrajte sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3]. Na ulazu kodera kanala koji koristi takav kôd dolaze poruke u obliku [d_1 d_2 d_3], pri čemu su d_1, d_2 i d_3 binarne znamenke. Koder kanala svaku poruku [d_1 d_2 d_3] pretvara u kodnu riječ [c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6] pri čemu vrijedi:

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus \mathrm{d}_3\ ,\ c_5 = d_1 \oplus \mathrm{d}_2 \oplus \mathrm{d}_3\ ,\ c_6 = d_1 \oplus \mathrm{d}_2$$

Pretpostavite da je dekoder kanala koji koristi identičan sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3] primio kodnu riječ [011011]. Odredite kodnu riječ koja je poslana, tj. kodnu riječ na izlazu kodera kanala.

a) [011011]

b) [010011]

c) [100111]

d) [011101]

Postupak rješavanja:

S obzirom na navedene jednakosti

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus \mathrm{d}_3\ ,\ c_5 = d_1 \oplus \mathrm{d}_2 \oplus \mathrm{d}_3\ ,\ c_6 = d_1 \oplus \mathrm{d}_2$$

generirajuća matrica u standardnom obliku ima oblik

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I}_3 \middle| \mathbf{A} \right]$$

Da matrica **G** doista ima ovakav oblik vidi se iz jednakosti

$$\left[d_1\, d_2\, d_3 \right] \cdot \mathbf{G} = \left[c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6 \right]$$

Nadalje, transponirana matrica provjere pariteta $\mathbf{H}^\mathrm{T}$ ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{H}^\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S obzirom da je primljena kodna riječ c' = [011011], tada za njen sindrom vrijedi:

$$S(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^\mathrm{T} = [110]$$

Dobiveni rezultat odgovara trećem retku matrice $\mathbf{H}^\mathrm{T}$ što znači da je pogreška nastala na trećem bitu poslane poruke **c**. Konačno, poslana je poruka **c** = [010011].

4. Koder kanala u nekom komunikacijskom sustavu koristi Hammingov kôd zadan matricom provjere pariteta Ham(r). Odredite koliko najmanje mora iznositi r pa da kodna brzina ovako zadanog linearnog binarnog blok koda bude veća od 0,904.

a) 6 bita

b) 5 bita

c) 10 bita

d) 7 bita

Postupak rješavanja:

Hammingov kôd definiran matricom Ham(r) koristi r zaštitnih bita koji štite m bita poruke. Kodna brzina $R(K)$ definirana je kao omjer broja bita poruke, m, prema ukupnom broju bita u kodnoj riječi (zbroj broja bita poruke i broja zaštitnih bita), $m + r$. Nadalje, vrijedi relacija:

$m + r \leq 2^r - 1$. Dakle, kodna brzina uz zadani broj zaštitnih bita bit će maksimalna kad vrijedi

$m + r = 2^r - 1$. Sukladno tome, kodna brzina ovog koda Ham(r) bit će jednaka:

$$R(K) = \frac{2^r - 1 - r}{2^r - 1} = 1 - \frac{r}{2^r - 1}$$

Uzevši u obzir uvjet $R(K) > 0,904$ i ponuđena rješenja dobivamo da je uvjet ispunjen uz $r = 6$ bita.

5. U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kod [7,4,3] s generirajućim polinomom $g(x) = 1 + x + x^3$. Koder kanala koristi generirajuću matricu u obliku:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [1010011], odredite koja je poruka poslana. Pretpostavka je da je prilikom prijenosa eventualno nastupila jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

a) [1010]

b) [1001]

c) [1111]

d) [0011]

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ c = [1010011] treba u polinomnom obliku podijeliti s generirajućim polinomom: $x^6 + x^4 + x + 1 : x^3 + x + 1 = x^3 + 1 = d(x)$, što znači da j poslana poruka [1001]. Da to doista vrijedi, moguće je provjeriti množenjem vektora poruke **d** sa zadanom generirajućom matricom **G**: [1001]·**G** = [1010011], što odgovara zadanoj kodnoj riječi koju je primio dekoder kanala.

6. Na ulaz linearnog i vremenski nepromjenjivog sustava čija je karakteristika $H(f) = 0{,}1 \cdot e^{j\pi/4}$, $\forall f \in \mathbf{R}$ dovodimo pravokutni impuls energije 0,1 mWs. Pravokutni impuls definiran je sljedećim izrazom:

$$x(t-t_0)=\begin{cases} A & \text{za } 0 \le |t-t_0| < \tau/2 \\ 0 & \text{za } |t-t_0| > \tau/2 \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Odredite koliko iznosi energija signala na izlazu zadanog sustava.

a) 10^{-6} Ws

b) 10^{-4} Ws

c) 10^{-5} Ws

d) 10^{-3} Ws

Postupak rješavanja:

Za spektar signala na ulazu linearnog i vremenski nepromjenjivog sustava (LTI), $x(t - t_0)$, vrijedi:

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \cdot e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f t_0} \cdot A\tau \frac{\sin(2\pi f \tau/2)}{2\pi f \tau/2}$$

Dakle, pomak signala u vremenu utječe samo na promjenu faze spektra. Dalje, za spektar signala na izlazu LTI sustava vrijedi: $Y(f) = H(f) \cdot X(f)$, tj. spektar izlaznog signala je umnožak spektra ulaznog signala i prijenosne funkcije LTI sustava. Sukladno tome, za amplitudni spektar izlaznog signala vrijedi: $|Y(f)| = |H(f)| \cdot |X(f)|$, tj. $|Y(f)| = 0{,}1 \cdot |X(f)|$.

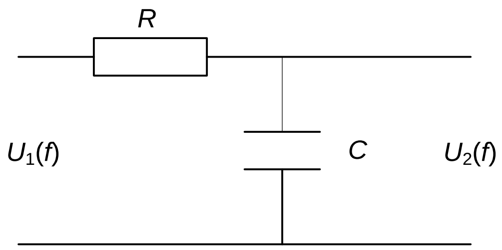
Energija ulaznog signala zadovoljava jednakost:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = A^2 \tau = 0{,}1 \cdot 10^{-3}\, Ws$$

Za energiju signala na izlazu LTI sustava vrijedi sljedeće:

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} (0{,}1)^2 |X(f)|^2 df = (0{,}1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = 10^{-2} \cdot E_x = 10^{-6}\, Ws$$

7. Neki komunikacijski kanal u kontinuiranom vremenu ima karakteristiku RC kruga, pri čemu je R = 100 Ω, a C = 50 nF.



Prijenosna funkcija RC kruga određena je izrazom $|H(f)| = U_2(f)/U_1(f)$. Odredite graničnu frekvenciju tog kanala, ako se prilikom njenog određivanja primjenjuje kriterij da je na toj frekvenciji amplitudni odziv RC kruga 100 puta manji od $|H(0)|$.

a) 31,8 kHz

b) 318 kHz

c) 3,18 MHz

d) 3,18 kHz

Postupak rješavanja:

Za amplitudnu karakteristiku prijenosne funkcije RC kruga vrijedi:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}$$

Nadalje, $|H(f)| = |H(0)|/100 = 10^{-2}$, jer je $|H(0)| = 1$. Iz navedenog slijedi

$$\sqrt{1+(2\pi fRC)^2} = 100$$

što daje konačan rezultat da je $f_g = 3{,}18 \cdot 10^6$ Hz.

8. Na ulaz sklopa za uzimanje uzoraka dolazi signal $u(t) = \sin(2\pi f_0 t + \phi)$. Prilikom uzorkovanja signala zadovoljen je uvjet da je frekvencija uzorkovanja $f_u > 2f_0$. Uzorci signala $u(t)$ dolaze na ulaz kvantizatora s jednolikom karakteristikom kvantiziranja čiji se dozvoljeni raspon amplituda ulaznog signala kreće između -5 V i +5 V. Odredite s koliko najmanje bita treba kodirati svaki kvantizirani uzorak signala $u(t)$ pa da omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma bude veći od 20 dB. Napomena: broj bita po uzorku mora biti cjelobrojan.

a) 5 bit/uzorak

b) 6 bit/uzorak

c) 4 bit/uzorak

d) 7 bit/uzorak

Postupak rješavanja:

Amplituda signala $u(t)$ iznosi 1 V. Dakle, srednja snaga signala $u(t)$ jednaka je $A^2/2$, tj. 0,5 W.

Srednja snaga kvantizacijskog šuma zadovoljava jednakost:

$$Q = \frac{1}{3} m_{\max}^2 2^{-2r}$$

pri čemu je $m_{\max} = 5$ V, a r je broj bita po uzorku signala. Sukladno navedenom, omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma zadovoljava jednakost:

$$\frac{P}{Q} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3} m_{\max}^3 2^{-2r}} = \frac{3}{2} \frac{2^{2r}}{m_{\max}^2}$$

Izraženo logaritamski, omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma jednak je

$$10 \cdot \log\left(\frac{P}{Q}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{3}{2} \frac{2^{2r}}{m_{\max}^2}\right) = -12,2 + 6,02 \cdot r\,[dB]$$

S obzirom da omjer srednje snage signala $u(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma mora bit veći od 20 dB, konačan rezultat je da je po svakom uzorku ulaznog signala $u(t)$ potrebno uzeti 6 bita.

9. U AWGN kanalu djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $S_N(f)$ = 5 nW/Hz, $\forall f \in \mathbf{R}$. Kanal je ograničen na pojas frekvencija –100 kHz $\leq f \leq$ 100 kHz. Koliko iznosi srednja snaga signala na ulazu AWGN kanala, ako dinamika u tom kanalu iznosi 5 bit/uzorak?

a) 2,05 W

b) 1,02 W

c) 0,51 W

d) 0,25 W

Postupak rješavanja:

Sukladno zadanim vrijednostima vrijedi: $S_N(f) = N_0/2 = 5\cdot 10^{-9}$ W/Hz. Dakle, srednja snaga šuma N jednaka je: N $=(N_0/2)\cdot 2B = 10^{-3}$ W, jer je B = 100 kHz. Dakle, dinamika D jednaka je:

$$D = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

pri čemu je S srednja snaga signala. Temeljem navedenog, proizlazi da je S = 1,02 W.

10. U nekom kanalu u kontinuiranom vremenu omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 10^5. Odredite koliko puta će se smanjiti prijenosna brzina u tom kanalu u odnosu na kapacitet kanala uslijed korištenja neoptimalnog kodnog sustava koji unosi smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u iznosu od 20 dB.

a) 3,14 puta

b) 1,14 puta

c) 1,35 puta

d) 1,67 puta

Postupak rješavanja:

Zadan je omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma $S/N = 10^5$ te smanjenje omjera srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma $\Gamma = 20$ dB, tj. $\Gamma = 100$. Omjer kapaciteta kanala prema prijenosnoj brzini određen je izrazom:

$$\frac{C}{R} = \frac{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)}{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N\Gamma}\right)} = 1,67$$