

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predmet: Teorija informacije (34315)
Ak. godina: 2012./2013.
Predavač: doc.dr.sc. željko ilić

Prva domaća zadaća

Zadatak /zi_8/:

Na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala, sa smetnjama, pojavljuju se tri simbola $X=\{x_1, x_2, x_3\}$. Na izlazu istog kanala pojavljuju se simboli $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$. Statističke veze između ulaznog i izlaznog skupa simbola dane su preko matrice združenih vjerojatnosti - $[p(x_i, y_j)]$:

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Odredite vrijednosti p_{11}, \dots, p_{33} za koje se postiže maksimum $H(X, Y)$. Također, $p(x_1)=1/2$; $p(x_2)=1/4$; $p(y_1)=1/3$ i $p(y_2)=1/6$.

Rješenje: $[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

Zadatak /zi_21/:

(I. dio) Neka su X i Y slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti iz skupova $x \in \{0, 1\}$ i $y \in \{0, 1, 2\}$, slijedno gledano. Neka je $p(X=x, Y=y)=K \cdot (x+y)$, $K \in \mathbb{R}^+$.

Odredite:

- i) K .
- ii) $H(X)$.
- iii) $H(Y)$.
- iv) $I(X;Y)$.

(II. dio)

- v) Neka je Z slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa $\{0, 1\}$ i neka je

$$p(Z = z) = \begin{cases} p, & z = 0 \\ 1 - p, & z = 1 \end{cases}$$

Neka je p slučajna varijabla koja poprima, s jednakom vjerojatnosti, vrijednosti iz skupa $\{0, 0.5, 1\}$. Kolika je očekivana vrijednost entropije slučajne varijable Z ?

Rješenje: [i) 1/9; ii) 0,9183 bit/simbol; iii) 1,3516 bit/simbol; iv) 0,0728 bit/simbol; v) 1/3 bit/simbol]

Zadatak /zi_15/:

Mjerni uređaj mjeri napon čija je funkcija gustoće vjerojatnosti zadana jednadžbom

$$f(u) = a \cdot u \cdot (3 - u), u \in [0, 3]$$

$$f(u) = 0, u \notin [0, 3]$$

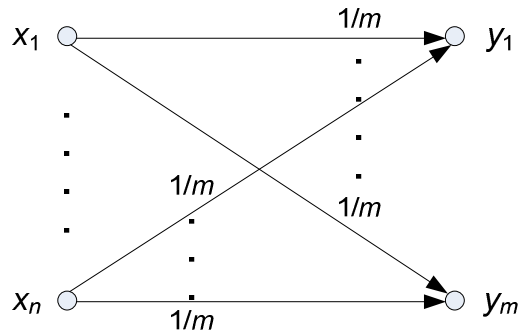
$$a \in \mathbf{R}$$

Uređaj može prikazati samo cijele brojeve i polovine, koji su zaokruženi na prvi veću vrijednost (npr. 1,2V se zaokružuje na 1,5 V, a 1,9 V se zaokružuje na 2,0 V). Ako se napon uzorkuje svakih 10 ms, koliki je ukupni srednji sadržaj informacije generiran za jednu minutu?

Rješenje: [1,83 kbyte]

Zadatak /zi_16/:

Razmatrajte diskretni informacijski kanal s međusobno neovisnim ulazima i izlazima, prikazan na slici.



Vjerojatnosti pojave simbola na ulazu kanala zadane su kao $p(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Vjerojatnosti pojave simbola na izlazu kanala zadane su kao $p(y_j)$, $j = 1, \dots, m$. Nadalje, vrijedi:

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j) = 1$$

Nadalje, svaki ulazni simbol x_i , $i = 1, \dots, n$, preslikava se u bilo koji od izlaznih simbola y_j , $j = 1, \dots, m$, s jednakom vjerojatnošću: $p(y_j|x_i) = 1/m$, $\forall i, j$. Kanal je dodatno definiran matricom združenih vjerojatnosti $[P(X,Y)]$ koja ima m identičnih stupaca:

$$[P(X,Y)] = \begin{bmatrix} p_1 & p_1 & \dots & p_1 \\ p_2 & p_2 & \dots & p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_n & p_n & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

U potpitanjima i), ii, iii) i iv) odredite tražene veličine kao funkcije isključivo varijabli m i p_i :

i) Izraz za $H(X)$.

ii) Izraz za $H(Y)$.

iii) Izraz za $H(X|Y)$

iv) Izraz za $H(Y|X)$.

Rješenje:

i) i iii)

$$H(X) = H(X|Y) = -m \cdot \sum_{i=1}^{k(p_i)} p_i \cdot \log_2(m \cdot p_i) = -\log_2(m) - m \cdot \sum_{i=1}^{k(p_i)} p_i \cdot \log_2 p_i \quad \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$

ii) i iv)

$$H(Y) = H(Y|X) = \log_2 m \quad \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}$$