Sveučilište u Zagrebu
**Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 31. siječnja 2018.

**Pravilo bodovanja zadataka**

Točno odgovoreni zadaci donose 5 bodova, netočno odgovoreni zadaci donose 2 negativna boda, a neodgovoreni zadaci donose 0 bodova.

**Zadatak 1:** Dan je Hammingov kôd $K$ s duljinom kodne riječi $n = 3$ bita. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja $p_{pd}$ (pod pretpostavkom da se dekodiranje provodi po načelu najbližeg susjeda), ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu $p_g=10^{-4}$.

a) $2\cdot 10^{-8}$

b) $3\cdot 10^{-8}$

c) $3\cdot 10^{-6}$

d) $2\cdot 10^{-6}$

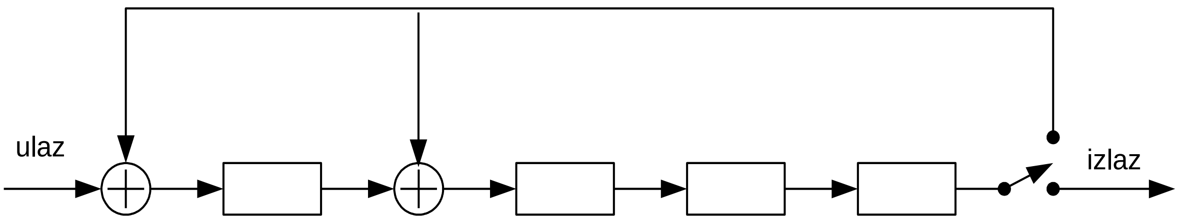
e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja*:
Radi se o Hammingovom kodu koji može ispraviti jednostruku pogrešku, pa do pogrešnog dekodiranja može doći kad se dogodi dvostruka ili trostruka pogreška. Ukupna vjerojatnost pogrešnog dekodiranja $p_{pd}$ jednaka je zbroju vjerojatnosti pojave dvostruke pogreške i vjerojatnosti trostruke pogreške, tj.

$$p_{pd} = p_2 + p_3 = \binom{3}{2} p_g{}^2 (1 - p_g) + \binom{3}{3} p_g{}^3$$

$$p_{pd} = 3\cdot 10^{-8}$$

**Zadatak 2:** Na slici je dan koder za ciklični kôd. Kodirajte poruku 10001001011 koristeći metodu ciklične redundantne zaštite.




a) 100010010101100

b) 100010010111100

c) 100010010100110

d) 100010010110000

e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja:*

S obzirom da je sa slike vidljivo da je generirajući polinom cikličnog koda dan izrazom

$$g(x) = x^4 + x + 1,$$

broj zaštitnih bitova je $r$ = 4, a poruka ima $k$ = 11 bita, to znači da će duljina kodne riječi iznositi $n = k + r$ = 15 bita. Dakle, kôd je [15,11].

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti koristeći metodu ciklične redundantne zaštite, tj. vrijedi

$$r(x) = x^{n-k} \cdot d(x) \bmod \left[ g(x) \right]$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n-k} \cdot d(x)}{g(x)} = \frac{x^4 \left( x^{10} + x^6 + x^3 + x + 1 \right)}{g(x)} = x^{10} + x^7 + x^4 \text{ uz ostatak } 0$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi 0, odnosno [0000] iz čega slijedi da je tražena kodna riječ:

$$\mathbf{c} = [10001001011\underline{0000}]$$

**Zadatak 3:** Na signal $s(t) = 20\cos(2\pi t)\left[\text{V}\right]$ u komunikacijskom LTI-kanalu djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = e^{-3|f|}\left[\text{W/Hz}\right]$. Novonastali signal se dovodi na ulaz filtra amplitudnog odziva $|H(f)|$. Odredite omjer $S/N$ (u dB) na izlazu filtra ako je $|H(f)|=1$ za $|f| < 1/3$ Hz.

a) 26,763 dB

b) 25,932 dB

c) 23,882 dB

d) 24,782 dB

e) ništa od navedenog

*Rješenje*:

Amplituda: $A$=20 V. Snagu signala računamo prema izrazu:

$$S = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t)dt$$

$$S = \frac{A^2}{2} = 200 \text{ W}$$

Snagu šuma računamo sa granicama određenim filtrom:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) \cdot |H(f)|^2 df = 2\int_0^1 e^{-3f} df = \frac{2}{3}(1 - e^{-1})\ \text{W}$$

Omjer *S*/*N* u decibelima računamo prema izrazu:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 10\ \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$$

Odnosno,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{dB} = 26{,}763\ \text{dB}$$

**Zadatak 4:** Zadan je signal $s(t) = 10\cos(100\pi t) + 14\cos(500\pi t)$ [V]. Odredite minimalni broj bita potrebnih za kodiranje svakog uzorka signala $s(t)$ tako da omjer srednje snage signala i srednje snage kvantizacijskog šuma bude veći od 40 dB. **Napomena:** Svi koraci kvantizacije međusobno su jednaki i signal $s(t)$ koristi sve razine za rekonstrukciju signala!

a) 3

b) 5

c) 7

d) 9

e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja*:

Sukladno pregledu najvažnijih izraza i pojmova danog u zbirci zadataka (na početku poglavlja o komunikacijskim kanalima u kontinuiranom vremenu) vrijedi:

$$10\ \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{3S}{m^2{}_{max}}\ 2^{2r}\right)$$

gdje $m_{max}$ označava maksimalni iznos amplitude koju signal može poprimiti na ulazu, $S$ je srednja snaga signala u vatima, a $r$ je broj bita potreban za kodiranje uzoraka signala $s(t)$. Maksimalna vrijednost ovog signala je 24 V, a minimalna -24 V. Prema tome,

$$m_{max} = 24\ \text{V}$$

Srednju snagu signala možemo odrediti zbrajanjem srednjih snaga pojedinih kosinusnih komponenata ulaznog signala:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{{A_1}^2}{2} + \frac{{A_2}^2}{2} = \frac{10^2}{2} + \frac{14^2}{2} = 148\ \text{W}$$

Iz uvjeta zadanih zadatkom dalje slijedi:

$$10\log\left(\frac{3S}{m^2{}_{max}}\ 2^{2r}\right)\ > 40$$

$$10\log\left(\frac{3S}{m^2{}_{max}}\right) + 10\log 2^{2r}\ > 40$$

Uvrstivši poznate vrijednosti slijedi:

$$-0{,}113 + \ \log 2^{2r} > 4$$

$$\log 2^{2r} > 4{,}113 \quad |10^x$$

$$2^{2r} > 12971{,}793 \quad |\log_2 x$$

$$2r > 13{,}663$$

$$r = \ \lceil 6{,}8315 \rceil$$

$$r = 7$$

Za kodiranje svakog uzorka ovog signala potrebno je najmanje sedam bita.

**Zadatak 5:** Dan je binarni blok kôd *K*. Na ulazu kodera kanala danog koda pojavljuju se tri poruke: $\mathbf{d}_1$ = [101] , $\mathbf{d}_2$ = [011] i $\mathbf{d}_3$ = [111]. Na izlazu kodera kanala se za dane tri poruke pojavljuju sljedeće tri kodne riječi: $\mathbf{c}_1$ = [100101], $\mathbf{c}_2$ = [001011], odnosno $\mathbf{c}_3$ = [010110]. Odredite 5. i 6. bit u kodnoj riječi koja odgovara poruci $\mathbf{d}_4$ = [110].

a) 00

b) 01

c) 11

d) 10

e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja:*

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{G}=\mathbf{c} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{G}=\mathbf{c}_1\begin{cases} a_5+e_5=0 \\ a_6+e_6=1 \end{cases} \qquad \mathbf{d}_2\cdot\mathbf{G}=\mathbf{c}_2\begin{cases} b_5+e_5=1 \\ b_6+e_6=1 \end{cases} \qquad \mathbf{d}_3\cdot\mathbf{G}=\mathbf{c}_3\begin{cases} a_5+b_5+e_5=1 \\ a_6+b_6+e_6=0 \end{cases}$$

$$a_5=0 \quad a_6=1 \quad b_5=1 \quad b_6=1 \quad e_5=0 \quad e_6=0$$

$$\mathbf{d}_4\cdot\mathbf{G}=\mathbf{c}_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, 5. i 6. bit su 1, odnosno 0.

**Zadatak 6:** Razmatrajte paritetno binarno kodiranje pri kojem se koristi tehnika horizontalnog i vertikalnog pariteta. Poruke duljine 7 bita kodiraju se prema načelu parnog pariteta, pri čemu se svakoj poruci dodaje jedan horizontalni paritetni bit i time formira kodna riječ. Nakon svakih 10 uzastopnih kodnih riječi duljine 8 bita formira se paritetna kodna riječ sastavljena od vertikalnih paritetnih bitova, također prema načelu parnog pariteta (**napomena**: koristite tehniku horizontalnog i vertikalnog paritetnog kodiranja opisanu u knjizi.). Koliko u danom slučaju iznosi kodna brzina, definirana kao omjer broja korisničkih bita (bita sadržanih u porukama) prema ukupnom broju bita (korisnički i paritetni zajedno)? **Napomena:** kodnu brzinu razmatrajte nad jako dugim nizom poslanih poruka.

a) 79,5%

b) 90,9%

c) 96,25%

d) 87,5%

e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja:*

Dakle, svaka se poruka duljine 7 bita kodira s po jednim paritetnim bitom, uslijed čega nastaju kodne riječi duljine 8 bita. Nakon 10 uzastopnih kodnih riječi, umeće se jedna kodna riječ duljine 8 bita koja je formirana od vertikalnih paritetnih bitova (vidi PowerPoint prezentaciju s predavanja "Zaštitno kodiranje I", slajdovi "Paritetno kodiranje"). Dakle, jedan takav blok sadrži ukupno $N_u$ = (10 + 1)·8 bita. U istom tom bloku sadržano je $N_k$ = 10·7 korisničkih bita. Kodna je brzina definirana kao: $R = N_k/N_u$. Dakle, vrijedi:

$$R = \frac{N_\mathrm{k}}{N_\mathrm{u}} = \frac{70}{88} = 0,795 = 79,5\%$$

**Zadatak 7:** Pretpostavite da signal $x(t)$ dolazi na ulaz prijenosnog LTI-sustava čiji je impulsni odziv $h(t)$.

$$x(t) = \begin{cases} a, & |t| \le T_1/2 \\ 0, & |t| > T_1/2 \end{cases}, \quad h(t) = \begin{cases} b, & |t| \le T_2/2 \\ 0, & |t| > T_2/2 \end{cases}, \quad T_2 < T_1$$

Odredite amplitudu istosmjerne komponente (0 Hz) sadržane u signalu $y(t)$ na izlazu sustava.

a) $T_1ab$

b) $T_2ab$

c) $(T_1 + T_2)ab$

d) $(T_1 - T_2)ab$

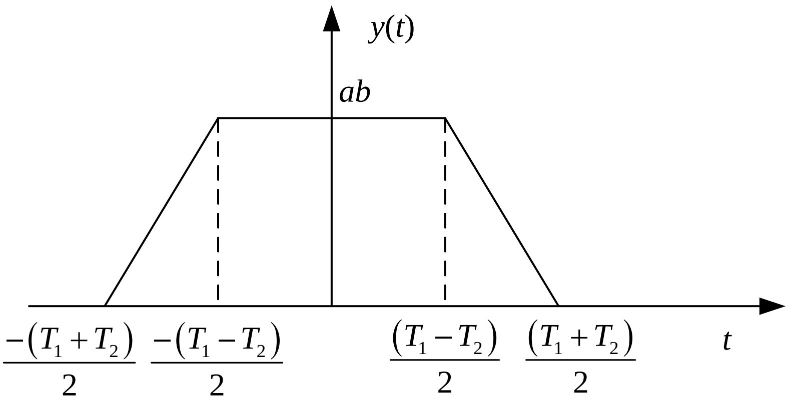
e) ništa od navedenog.

*Postupak rješavanja*

Signal na izlazu LTI-sustava određuje se konvolucijom ulaznog signala i impulsnog odziva sustava.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau$$

Bez puno izvođenja, očito je da konvolucija dva pravokutna signala daje trapezni signal. Sukladno zadanim parametrima izlaz $y(t)$ imat će sljedeći oblik:




Istosmjernu komponentu u signalu moguće je odrediti korištenjem Fourierove transformacije:

$$Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$Y(0)=\int_{-\infty}^{\infty} y(t)dt$$

Dakle, istosmjerna komponenta sadržana u signalu $y(t)$ bit će jednaka površini ispod trapeza prikazanog gornjom slikom.

$$Y(0)=2\cdot\frac{T_2ab}{2}+(T_1-T_2)ab=T_1ab$$

**Zadatak 8:** Promatrajte AWGN kanal širine prijenosnog pojasa $B$ Hz. Na ulazu kanala djeluje signal $x(t)$ srednje snage $S$ [W], a šum u kanalu ima spektralnu gustoću snage $S_N(f) = N_0/2$, $\forall f \in \mathbf{R}$. Odredite gornju granicu kapaciteta tog kanala ako se širina prijenosnog pojasa povećava do beskonačnosti.

a) $\frac{S}{N_0}$ [bit/s] b) $\frac{S}{N_0 \ln 2}$ [bit/s] c) $\frac{N_0}{S}$ [bit/s]

d) $\frac{S}{N_0}\ln 2$ [bit/s] e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja:*

$$y(t)=x(t)+n(t)$$

Relacija za kapacitet kanala širine prijenosnog pojasa $B$, uz spektralnu gustoću šuma definiranu kao

$$S_N(f)=\frac{N_0}{2}, \forall f \in R$$

uz srednju snagu signala $S$ [W] je:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0B}\right) \quad \text{[bit/s]}$$

Promatrat ćemo kapacitet kanala kao funkciju širine kanala $C(B)$ i ispitati ćemo rubne točke (limes za 0 i za beskonačno).

Za širinu prijenosnog pojasa $B = 0$ Hz intuitivno zaključujemo da je tada kapacitet kanala jednak nuli, ali i matematički zaključujemo:

$$C_0 = \lim_{B\to 0} B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0B}\right)=0$$

jer je $\lim_{B\to 0}\left(1+\frac{S}{N_0B}\right)^B=1$, a $\log_2(1)=0$ (L' Hospitalovo pravilo)

Za širinu kanala $B=\infty$ Hz slijedi:

$$C_\infty = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right) = \lim_{B\to\infty}\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right)^B$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Supstitucija $x = \frac{N_0 B}{S}$

$$C_\infty = \lim_{x\to\infty}\log_2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{N_0 B}{S}}\right]^{\frac{S}{N_0}} = \lim_{x\to\infty}\log_2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{S}{N_0}} = \log_2 e^{\frac{S}{N_0}}$$

$$C_\infty = \frac{S}{N_0}\log_2 e = \frac{S}{N_0}\frac{\ln e}{\ln 2} = \frac{S}{N_0 \ln 2}[\text{bit/s}]$$

Kad se širina prijenosnog pojasa navedenog AWGN kanala poveća do beskonačnosti, njegov kapacitet poprima iznos $\frac{S}{N_0 \ln 2}$ [bit/s].

**Zadatak 9:** Izvorište generira simbole iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola, koji se kodiraju ravnomjernim binarnim kodom i pretvaraju u poruke jednake duljine. Te se poruke prije odašiljanja u kanal kodiraju Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja. Komunikacijski kanal ima širinu pojasa 8 kHz dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite koliko se poruka u sekundi može prenositi danim komunikacijskim kanalom.

a) 3624,45 poruka/s

b) 7973,78 poruka/s

c) 7248,9 poruka/s

d) 3986,89 poruka/s

e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja:*

$128 = 2^7 \rightarrow 7$ bita za 1 simbol

$$\frac{S}{N}_{dB} = 30\text{dB}$$

$$10\log\left(\frac{S}{N}\right) = 30\text{dB} \Rightarrow \frac{S}{N} = 10^3 = 1000$$

1 simbol (7 bitova) + 4 zaštitna bita $\rightarrow n = 11$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C_0$ | $C_1$ | $k_1$ | $C_2$ | $k_2$ | $k_3$ | $k_4$ | $C_3$ | $k_5$ | $k_6$ | $k_7$ |

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

$$N_{poruka} = \frac{C}{n} = \frac{B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)}{n} = \frac{8000\log_2(1001)}{11} = 7248{,}9\,\frac{\text{poruka}}{\text{s}}$$

**Zadatak 10:** Razmatrajte linearan binarni kôd $K$ s generirajućom matricom **G** = [$\mathbf{I}_3$ | **A**] čija je matrica za provjeru pariteta zadana kao:

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{A}^T \middle| \mathbf{I}_3\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pretpostavite da je primljena kodna riječ 110110. Odredite najvjerojatniju poslanu poruku uz pretpostavku da je u prijenosu moguća jednostruka pogreška na kodnoj riječi.

a) 010

b) 100

c) 111

d) 110

e) ništa od navedenog

*Postupak rješavanja:*

$$S(c') = c' \cdot H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Na temelju sindroma zaključujemo da je greška nastala na 2. bitu te je poslana kodna riječ [1 0 0 1 1 0], a sama poruka 1 0 0.