SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predmet: Teorija informacije (34315)

Ak. godina: 2011./2012.

Predavač: doc.dr.sc. željko ilić

Zadaće

/10. listopada 2011./

Zadatak /zi02/:

Na ulazu diskretnog binarnog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola **X** = {x_1, x_2}. Odredite vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola za koje se postiže maksimum transinformacije te nakon toga odredite kapacitet danog kanala. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je $\left[p(y_j|x_i)\right]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}$.

Rješenje:

$p(x_1) = p$

$p(x_2) = 1 - p$

$$[p(x_i,y_j)] = [p(x_i)p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} p & 0 \\ \frac{1}{2(1-p)} & \frac{1}{2(1-p)} \end{bmatrix}$$

$p(y_1 1) = p + 1/2\ (1-p) = 1/2\ (p+1)$ (*Prvi stupac u matrici*)

$p(y_2) = 0 + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}(1-p)$ (*Drugi stupac*)

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} [p(\square] x_i, y_j) \log_2 \frac{p(x_i,y_j)}{p(x_i) * p(y_j)}$$

$$I(X;Y) = p\log_2 \frac{2}{p+1} + \frac{1}{2}(1-p)\log_2 \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2}(1-p)\log_2 \frac{1}{1-p}$$

$$I(X;Y) = -p\log_2 \frac{p+1}{2} - \frac{1}{2}(1-p)\log_2 (p+1) - \frac{1}{2}(1-p)\log_2 (1-p) \qquad (*)$$

$$\frac{dI(X;Y)}{dp} = 0$$

$$-\log_2 \frac{p+1}{2} - \frac{p}{(p+1)\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(p+1) - \frac{1-p}{2(p+1)\ln 2} + \frac{1}{2}\log_2(1-p) + \frac{1}{2\ln 2} = 0$$

$$p = \frac{3}{5}$$

U tom slučaju, transinformacija I iznosi 0.322 $\frac{bit}{simbol}$. (*Uvršteno u formulu (*)*)

$p(x_1) = p = \frac{3}{5}$

$p(x_2) = 1 - p = \frac{2}{5}$

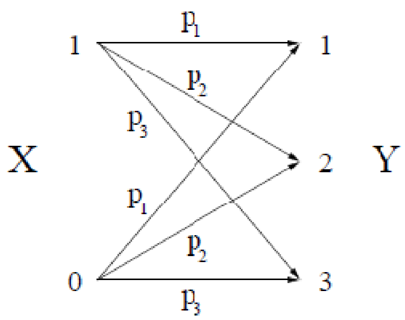
Kapacitet kanala je definiran kao maksimum transinformacije, gdje se maksimizacija provodi po svim mogućim razdiobama vjerojatnosti pojave simbola na ulazu:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X;Y) \quad \left[\frac{bit}{simbol}\right]$$

U ovom slučaju kapacitet kanala je jednak izračunatoj transinformaciji te iznosi 0.322 $\frac{bit}{simbol}$.

Zadatak /zi05/:

Odredite kapacitet diskretnog bezmemorijskog kanala sa slike:



Napomena: $p_1+p_2+p_3=1$; $p_i\neq 0$, $i=1,2,3$.

Rješenje:

Kapacitet kanala po definiciji:

$$C = \max I(X;Y)$$

Transinformacija:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

Entropija šuma:

$$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3} p(x_i,y_j) log_2\, p(y_j|x_i)$$

Matrica prijelaza kanala:

-vrijedi sljedeće:

$$p(y_j|x_i) = p_j$$

to jest:

$$[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

Matrica parova:

-vrijedi sljedeće:

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j|x_i)$$

to jest:

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} p(x_1)p_1 & p(x_1)p_2 & p(x_1)p_3 \\ p(x_2)p_1 & p(x_2)p_2 & p(x_2)p_3 \end{bmatrix}$$

Nakon uvrštavanja u formulu za entropiju šuma i kraćeg raspisivanja dobije se:

$$H(Y|X) = -[p(x_1) + p(x_2)] \cdot (p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3)$$

Vrijedi:

$p(x_1) + p(x_2) = 1;$

$(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + p_3 \log_2 p_3) = -H(Y);$

Dobivamo:

$$H(Y|X) = -1 \cdot [-H(Y)] = H(Y)$$

Transinformacija:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Y) = 0$$

Konačno, kapacitet jest:

$$C = I(X;Y) = 0$$

Zadatak /zi14/:

Odredite je li kôd K={00, 10, 001, 00101, 10101, 1101, 011, 111} jednoznačno dekodabilan.

Postoji li prefiksni kôd s navedenim duljinama kodnih riječi?

SARDINAS PATTERSONOV TEST

a)

S1= {1, 101, 01} ≠ K

S2= {0, 0101, 101, 11, 01, 1} ≠ K

S3= {0, 01, 0101, 11, 1, 101} ≠ K

Dolazi do ponavljanja skupova (S2=S3...), a kodne riječi skupova su različite od kodnih riječi početnog skupa K, stoga možemo zaključiti da je kod K jednoznačno dekodabilan.

b)

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{d}^{\mathbf{li}} \leq 1$$ d=2, 3,... baza sustava

d=2

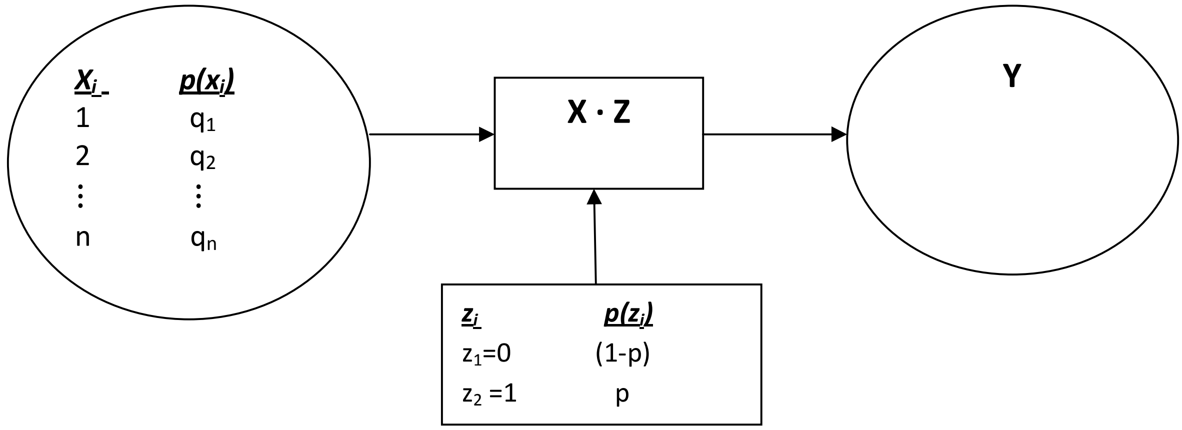
$2^{-2}+2^{-2}+2^{-3}+2^{-5}+2^{-5}+2^{-4}+2^{-3}+2^{-3} = 1$

Idealan slučaj (ne postoji bolji kod s navedenim duljinama kodnih riječi)

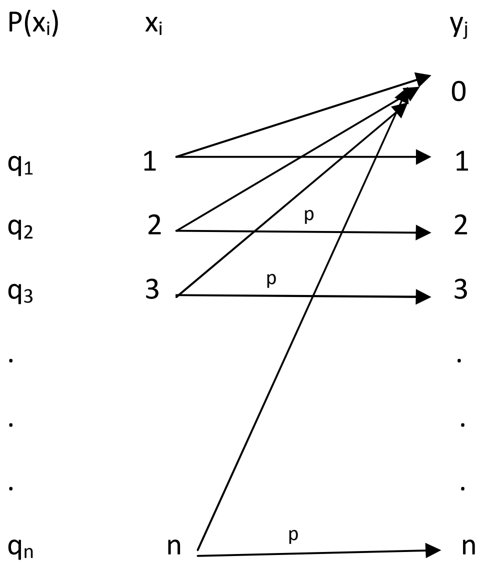
S obzirom da vrijedi kraftova nejednakost, postoji prefiksni kod s navedenim duljinama kodnih riječi.

Zadatak /zi18/:

Dana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima 1-p i p, slijedno gledano. Neka slučajna varijabla X, neovisna od Z, poprima vrijednosti 1, 2, ...,n s vjerojatnostima $\mathbf{q}=[q_1, q_2, ..., q_n]$ i neka je $Y=XZ$. Nadalje, neka X i Y predstavljaju ulaz, odnosno izlaz diskretnog bezmemorijskog kanala. Odredite kapacitet danog kanala.



C=max I (X:Y) = max [X(Y) – H (Y| X)]



matrica uvjetnih vjerojatnosti:

$$[p(y_j|x_i)] = \begin{bmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Matrica združenih vjerojatnosti:

$$[p(x_i,y_j)] = \begin{array}{c|ccccc|l} & 0 & 1 & 2 & 3 \;\ldots\ldots & n & \\ 1 & (1-p)q_1 & pq_1 & 0 & 0 & 0 & \sum p(x_i) = (1-p)q_1 + pq_1 \\ 2 & (1-p)q_2 & 0 & pq_2 & 0 & 0 & \\ 3 & (1-p)q_3 & 0 & 0 & pq_3 & 0 & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ n & (1-p)q_n & 0 & 0 & 0 & pq_n & \end{array}$$

$\sum p(y_j) = \quad (1-p)(q_1+q_2+q_3+..+q_n) \quad pq_1 \quad pq_2 \quad pq_3 \quad pq_n$

Pretpostavka : **q= 1/n**

C= max (H(Y) – H (Y|X)

H(Y)= $-\sum_{j=0}^{n} p(y_j) \log_2 p(y_j)$ = - [$(1-p)(q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + qn)\log_2 (q_1+q_2+q_3+ \ldots +q_n) + (pq1)\log_2 pq_1 + \ldots. + (pq_n)\log_2(pq_n)$] = - [$(1-p)\log_2 (1-p) + p\,(\frac{1}{n}\log_2 \frac{p}{n} + \frac{1}{n}\log_2 \frac{p}{n} + \frac{1}{n}\log_2 \frac{p}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\log_2 \frac{p}{n}$] =

= -[$\log_2(1-p) - \log_2(1-p) + p\log_2 \frac{p}{n}$] = ***- [$\log_2(1-p) - p\log_2(1-p) + (\log_2 p - \log_2 n$]***

$H(Y|X) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n} p(x_i,y_j)\log_2(y_j|x_i) = -[(1-p)\cdot q_1\cdot\log_2(1-p) + pq_1\log_2 p + (1-p)q_2\log_2(1-p) + pq_3\log_2 p + .. + (1-p)q_n\log_2(1-p) + pq_n\log_2 p] =$

$= -[(1-p)(\frac{1}{n}\log_2(1-p) + \frac{1}{n}\log_2(1-p) + \ldots + \frac{1}{n}\log_2(1-p) + p\log_2 p(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots\frac{1}{n})] =$ ***$-[(1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p]$***

$C = -\log_2(1-p) + \log 2(1-p) - p\log_2 p + p\log_2 n$

$C = p\log_2 n$ [bit/simbol]