Teorija informacije - zadaća

Nikola Đuranec
Valentina Karolj
Ana Milinović
Danijel Živčec

29. listopad 2012.

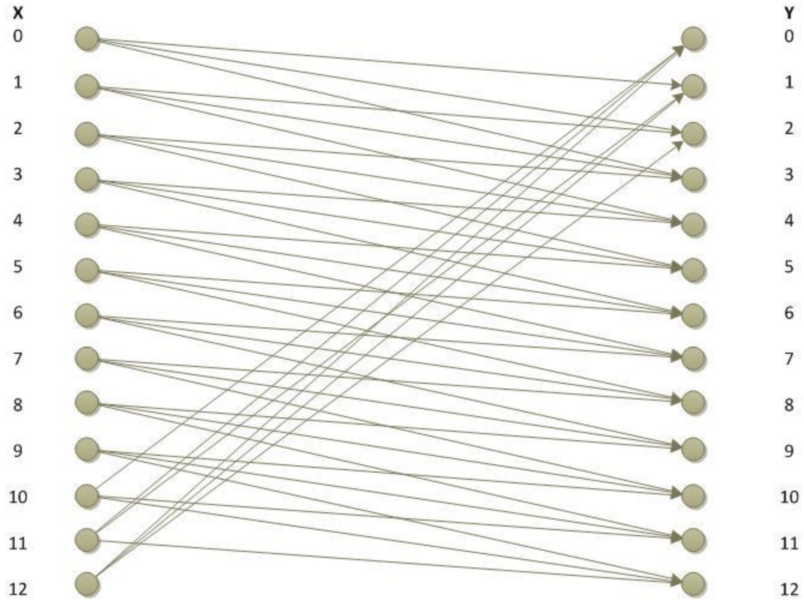
Zadatak/zi_11/:
Dan je diskretni komunikacijski kanal $Y = X + Z(mod 13)$ gdje je

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{s vjerojatnošću } 1/3 \\ 2 & \text{s vjerojatnošću } 1/3 \\ 3 & \text{s vjerojatnošću } 1/3 \end{cases}$$

i $X \in \{0, 1, \ldots, 12\}$.

Odredite kapacitet danog kanala uz nepoznatu razdiobu vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog, X, skupa simbola.

Rješenje:
Zbog vjerojatnosti pojavljivanja pojedine vrijednosti iz Z, komunikacijski kanal izgleda ovako:



pri čemu je težina svake poveznice točno $\frac{1}{3}$.
Iz slike konstruiramo matricu $[p(y_j|x_i)]$, koja izgleda ovako:

$$[\mathbf{p}(\mathbf{y_j}|\mathbf{x_i})] = \begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Veličina kanala je $len(X) * len(Y) = n * m = 13 * 13$ i iz matrice prijelaza zaključujemo da je simetričan.

Budući da kapacitet kanala tražimo po formuli:

$$C = max_{\{p(x_i)\}}[H(Y) - H(Y|X)]$$

i tražimo maksimum, možemo uzeti jednaku razdiobu vjerojatnosti i ulaznih i izlaznih znakova zbog simetričnosti kanala. Iz toga nam dalje slijedi

$$p(x_i, y_j) = \begin{cases} \frac{1}{39} & \forall x_i \in X, y_j = \{x_i + 1, x_i + 2, x_i + 3(mod13)\} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

$$p(y_j) = \frac{1}{13} \qquad \forall y_j \in Y$$

Iz ovih jednadžbi dalje računamo:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) \log_2 p(y_j|x_i) \\ &= -39 * \frac{1}{39} \log_2 \frac{1}{3} \\ &= \log_2 3 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(Y) &= -\sum_{j=1}^{m} p(y_j) \log_2 p(y_i) \\ &= -13 * \frac{1}{13} \log_2 \frac{1}{13} \\ &= \log_2 13 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \end{aligned}$$

Sada konačno imamo:

$$\begin{aligned} C &= \log_2 13 - \log_2 3 \\ &= \log_2 \frac{13}{3} \\ &= 2.12 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}} \end{aligned}$$

Probajmo sada riješiti po univerzalnoj formuli za kapacitet simetričnog kanala:

$$
\begin{aligned}
C &= \log_2 n - H(\vec{r}) \\
&= \log_2 n - \left[- \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) log_2 p(y_j|x_i) \right] \\
&= \log_2 13 + 3 * \frac{1}{3} \log_2 \frac{1}{3} \\
&= \log_2 \frac{13}{3} \\
&= 2.12 \frac{\text{bit}}{\text{simbol}}
\end{aligned}
$$

Sada smo numerički pokazali da vrijedi univerzalna formula za kapacitet simetričnog kanala.