Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 3. veljače 2021.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, netočno odgovoreni 2 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Zadan je kôd K s generirajućom matricom $\mathbf{G}$. Kodne riječi prenose se binarnim simetričnim kanalom s vjerojatnošću pogrešnog prijenosa simbola q = 0,02. Odredite vjerojatnost da dekoder ne otkrije pogrešku na primljenoj kodnoj riječi.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) 0,092

b) $3{,}766 \cdot 10^{-3}$

c) $3{,}2 \cdot 10^{-9}$

d) $3{,}842 \cdot 10^{-3}$

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Matrica **G** ukazuje na to da se radi o parnom paritetnom kodu. Dekoder neće otkriti pogrešku na primljenoj poruci ako je broj pogrešaka na kodnoj riječi paran. Dakle,

$$P_e = \binom{5}{2} q^2 (1-q)^3 + \binom{5}{4} q^4 (1-q)$$

Ako uvrstimo zadanu vrijednost q = 0,02, dobivamo rezultat $P_e = 3{,}766 \cdot 10^{-3}$.

Zadatak 2. Neki slučajni signal $x(t)$ modeliran je stacionarnim slučajnim procesom $X(t)$ kojeg čini familija slučajnih varijabli X_t, $t \in \mathbf{R}$. Sve slučajne varijable X_t imaju međusobno identičnu jednoliku razdiobu na intervalu $(0, a)$, $a \in \mathbf{R}$ i $a > 0$. Odredite srednju snagu slučajnog signala.

a) $a^2/12$ [W]

b) a^2 [W]

c) $a^2/3$ [W]

d) $a^2/4$ [W]

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Srednja snaga P slučajnog signala opisanog stacionarnim slučajnim procesom dana je izrazom: $P = E[X^2(t)]$. S obzirom da je razdioba slučajnih varijabli X_t opisana izrazom:

$$f_{X_t}(x,t)=\begin{cases}1/a & 0<x<a\\ 0 & \text{za ostale } x\end{cases},$$

slijedi da je

$$P=E\left[X^2(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_{X_t}(x,t)\,dx=\int_0^a x^2\frac{1}{a}\,dx=\frac{1}{a}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{a^2}{3}[W].$$

Zadatak 3. Zadan je ciklični kôd K s parametrima [7, k], pri čemu je $k < 7$. Ako je dekoder primio kodnu riječ **c** = [1 0 0 0 1 0 1], te ako pretpostavimo da u prijenosu nije bilo pogrešaka bita, odredite broj korisničkih bita u kodnoj riječi.

a) 4

b) 6

c) 3

d) 1

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ možemo prikazati polinomom $c(x) = x^6 + x^2 + 1$. Iz duljine kodne riječi očitavamo da je $n = 7$. S obzirom da je kodna riječi umnožak podatkovne poruke $d(x)$ i generirajućeg polinoma, potrebno je provjeriti kvocijente kodne riječi sa svim mogućim polinomima koji se mogu pojaviti u faktorizaciji polinoma $x^7 – 1$. Kao ispravan polinom nudi se onaj uz kojeg vrijedi da je $c(x)$ mod $d(x) = 0$. Znamo da vrijedi $x^7 – 1 = (x + 1)\cdot(x^3 + x + 1)\cdot(x^3 + x^2 + 1)$.

a) Podijelimo li $c(x)$ s $(x + 1)$ dobivamo $x^5 + x^4 + x^3 + x^2$ i ostatak 1;

b) Podijelimo li $c(x)$ s $(x^3 + x + 1)$ dobivamo $x^3 + x + 1$ i ostatak 0;

c) Podijelimo li $c(x)$ s $(x^3 + x^2 + 1)$ dobivamo $x^3 + x^2 + \text{x}$ i ostatak $x + 1$.

Očito je da je generirajući polinom jednak $x^3 + x + 1$ i stoga je $k = n – r = 7 – 3 = 4$.

Zadatak 4. Prilikom slanja binarnih simbola nekim binarnim simetričnim kanalom simbol 0 se prenosi kao trobitna kombinacija 000, a binarni simbol 1 kao 111. Time se postiže zaštita informacije u prijenosu kanalom. Vjerojatnost pogrešnog prijenosa u kanalu iznosi $p_g = 0{,}25$. U prijemniku se prilikom dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti, tj. najbližeg susjeda. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja.

a) 0,015625

b) 0,578125

c) 0,104

d) 0,15625

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Svaka trobitna riječ će biti pogrešno dekodirana, a samim time i simbol kojeg prenosi, ako na njoj nastupi dvostruka ili trostruka pogreška. Sukladno tome vrijedi:

$$P_{\mathrm{pd}} = \binom{3}{2} p_{\mathrm{g}}^2 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right) + \binom{3}{3} p_{\mathrm{g}}^3 = 3 p_{\mathrm{g}}^2 \left(1 - p_{\mathrm{g}}\right) + p_{\mathrm{g}}^3 = 0{,}15625$$

Zadatak 5. Slijed bitova 1 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 … kodiran je Hammingovim kodom [11, k, 3]. Stupci matrice **H** su binarni ekvivalenti dekadskih brojeva, i-ti stupac, i = 1, …, 11, gledano s lijeva je binarni ekvivalent broja i, a u prvom retku matrice **H** nalaze se bitovi najmanje težine odgovarajućih binarnih brojeva. Odredite prvih šest bita prve kodne riječi na izlazu kodera.

a) 1 0 1 1 0 0

b) 1 1 0 1 0 0

c) 1 1 1 1 0 0

d) 1 0 0 1 0 0

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Temeljem opisa matrice **H** ona ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nadalje, s obzirom na duljinu kodne riječi (n = 11) i distancu koda ($d(K)$ = 3), očito je da k mora biti jednak 7 jer u svaku kodnu riječ duljine 11 bita koder umeće 4 paritetna bita (na pozicije 1, 2, 4 i 8). Sada je od matrice **H** potrebno konstruirati generirajuću matricu Hammingova koda:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomnožimo li prvu poruku **d** = [1 0 0 1 0 0 1] s matricom **G** dobit ćemo traženo rješenje, kodnu riječ:

$$\mathbf{d}\cdot\mathbf{G}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Zadatak 6. Na ulaz kanala s aditivnim šumom u kontinuiranom vremenu dovodimo slučajni signal sastavljen od familije slučajnih varijabli koje sve imaju identičnu Gaussovu razdiobu sa srednjom vrijednošću nula i standardnom devijacijom 10^{-3} V. Gaussov aditivni šum ima 10 puta manju standardnu devijaciju od ulaznog signala, a srednja mu je vrijednost također nula. Odredite kapacitet na izlazu aditivnog kanala u jedinici nat/simbol.

a) 4,6151 nat/simbol

b) 2,3076 nat/simbol

c) 6,6582 nat/simbol

d) 1,1989 nat/simbol

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kapacitet kanala s aditivnim šumom u kontinuiranom vremenu određujemo izrazom:

$$C=\max I(X;Y)=\max\left[H(Y)-\frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma_z^2\right)\right]=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sigma_x^2+\sigma_z^2}{\sigma_z^2}\right)\left[\text{nat/simbol}\right]$$

Zadano je da je $\sigma_x = 10^{-3}$ V, te s obzirom da je σ_z 10 puta manji, vrijedi $\sigma_z = 10^{-4}$ V. Sukladno tome, C = 2,3076 nat/simbol.

Zadatak 7. Na ulaz nekog AWGN kanala dovodimo slučajni signal $x_1(t)$ srednje snage S_1 [W] i širine spektra B_1 [Hz]. Ta širina spektra je ujedno i širina prijenosnog pojasa kanala. U promatranom kanalu uvijek djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $S_n(f) = N_0/2$, za svaki $f \in \mathbf{R}$. Zatim na ulaz AWGN kanala dovedemo slučajni signal $x_2(t)$ čija su snaga S_2 [W] i širina spektra B_2 [Hz], što je ujedno i širina prijenosnog pojasa kanala za slučaj signala $x_2(t)$. Oba signala, $x_1(t)$ i $x_2(t)$, modelirana su slučajnim procesima, pri čemu svaki od njih predstavlja familiju slučajnih varijabli Gaussove funkcije gustoće vjerojatnosti sa srednjom vrijednošću 0 i standardnom devijacijom σ_1, odnosno σ_2, te vrijedi: $\sigma_2 = 1{,}5\cdot\sigma_1$. Odredite omjer kapaciteta kanala za slučaj drugog signala na ulazu kanala prema kapacitetu kanala za slučaj prvog signala na ulazu AWGN-a, C_2/C_1, pod uvjetom da su dinamike oba signala, izražene brojem bita po simbolu, međusobno jednake.

a) 1

b) 2

c) 1,5

d) 2,25

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Za srednju snagu signala $x_1(t)$ vrijedi $S_1 = \sigma_1^2$ [W]. Također, po analogiji, $S_2 = \sigma_2^2$ [W]. S obzirom da je $\sigma_2 = 1{,}5 \cdot \sigma_1$, slijedi: $S_2 = 2{,}25 \cdot S_1$. Za dinamike oba signala vrijede sljedeći izrazi:

$$D_1 = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_0 B_1}\right)\left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right], \quad D_2 = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{S_2}{N_0 B_2}\right)\left[\frac{\text{bit}}{\text{simbol}}\right]$$

S obzirom da je zadatkom zadano da je $D_1 = D_2 = D$, iz toga proizlazi sljedeće:

$$\frac{S_1}{N_0 B_1} = \frac{S_2}{N_0 B_2} \rightarrow B_2 = \frac{S_2 B_1}{S_1} = 2{,}25 \cdot B_1$$

Za kapacitet prvog AWGN-a vrijedi $C_1 = 2B_1D$, a za kapacitet drugog $C_2 = 2B_2D$. Očito je omjer kapaciteta jednak omjeru širina prijenosnog pojasa pa vrijedi: $C_2 / C_1 = 2{,}25$.

Zadatak 8. Zadan je ciklični kôd [15, k] s generirajućim polinomom $g(x) = x^4 + x + 1$. Na ulaz kodera dolazi slijed bita 100010010111100… Koder kodira primljene poruke tehnikom nazvanom ciklična provjera zalihosti (isto što i ciklična redundantna zaštita). Odredite prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu kodera.

a) 100010010111010

b) 100010010111100

c) 100010010110011

d) 100010010110000

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Dakle, s obzirom na to da se radi o kodu [15, k], jasno je da duljina kodne riječi iznosi $n = 15$. Nadalje, s obzirom na stupanj generirajućeg polinoma $r = 4$, proizlazi da je $k = n - r = 11$. Iz zadanog slijeda bita poruka koder će uzeti prvih jedanaest bita i na njih nadodati cikličnu zaštitu. Kodna riječ će imati standardni oblik, originalna poruka i na nju nadodani zaštitni bitovi. Zaštitni dio dobivamo iz izraza:

$$r(x) = x^r \cdot d(x) \bmod [g(x)]$$

Polinom prve poruke na ulazu kodera je $d(x) = x^{10} + x^6 + x^3 + x + 1$, što pomnoženo s x^4 daje polinom $x^{14} + x^{10} + x^7 + x^5 + x^4$. Kad se taj novonastali polinom podijeli s generirajućim polinomom $g(x)$ dobivamo rezultat $x^{10} + x^7 + x^4$ i ostatak nula. To znači da će prva kodna riječ na izlatu kodera biti 100010010110000.

Zadatak 9. Zadan je periodički slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ amplitude A [V], frekvencije $f = 2$ kHz i omjera $\tau/(T_0 - \tau) = 1/3$:

$$x(t) = \begin{cases} A, & \text{za} \left|x\right| \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \text{za} \dfrac{\tau}{2} < \left|x\right| < \dfrac{T_0}{2} \end{cases}.$$

Odredite omjer srednje snage signala $x(t)$ prema snazi njegove istosmjerne komponente.

a) 4

b) 3

c) 16

d) 9

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz omjera $\tau/(T_0 - \tau) = 1/3$ određujemo da je $T_0 = 4\tau$. Srednja snaga slijeda pravokutnih impulsa zadanih zadatkom iznosi $P = A^2\tau/T_0 = A^2/4$. Srednja snaga istosmjerne komponente iznosi $P_0 = A^2\tau^2/T_0^2 = A^2/16$. Dakle, omjer $P/P_0 = 4$.

Zadatak 10. Odredite koliko iznosi donja granična vrijednost omjera energije signala po bitu prema spektralnoj gustoći snage bijelog šuma, E_b/N_0, u AWGN kanalu. Proračunatu vrijednost izrazite u decibelima.

a) -5,2877 dB

b) 0,6931 dB

c) -1,5917 dB

d) -0,1592 dB

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kapacitet AWGN kanala određen je izrazom

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = B\log_2\left(1+\frac{E_b C}{N_0 B}\right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B}-1}{C/B}$$

pri čemu je C/B učinkovitost prijenosnog pojasa izražena jedinicom bit/s/Hz. Kad omjer teži u nulu, tj. kad B teži u beskonačnost tada omjer E_b/N_0 poprima svoju donju graničnu vrijednost:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\min} = \lim_{B\to\infty}\frac{2^{C/B}-1}{C/B} = \frac{0}{0}.$$

Limes oblika 0/0 moguće je riješiti L'Hospitalovim pravilom:

$$\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\min} = \lim_{B\to\infty}\frac{2^{C/B}-1}{C/B} = \lim_{B\to\infty}\frac{\left(2^{C/B}-1\right)'}{\left(C/B\right)'} = \lim_{B\to\infty}\frac{2^{C/B}\ln 2\left(\frac{-C}{B^2}\right)}{\frac{-C}{B^2}} = \lim_{B\to\infty}2^{C/B}\ln 2 = \ln 2 = 0,6931.$$

Izraženo u decibelima to je: $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{\mathrm{dB},\min} = 10\log_{10}\left(\ln 2\right) = -1,5917\,\mathrm{dB}$.