LINEARNO BINARNI BLOK KODOVI

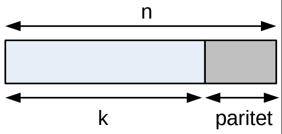
$(n, M, d) \leftrightarrow [n, k, d] \leftrightarrow [n, k]$

$M = 2^k$

$R(K) = \frac{k}{n} \leq 1$

$d(K) = \min_{x,y \in K}(d(x, y) | x \neq y)$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = w(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$



k – broj informacijskih bitova u kodnoj riječi

n - duljina kodne riječi

M - broj kodnih riječi u kodu

d – distanca (udaljenost) koda

R – kodna brzina

w - težina kodne riječi

Uvjeti lineranosti binarnog blok koda

1) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in$, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in$
2) $a \cdot \boldsymbol{x} \in$, $a \in \{0,1\}$
3) $000 \ldots 0 \in$

HAMMINGOVA MEĐA

$$M \leq \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{t}}$$

PERFEKTAN KÔD

$$M = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{t}}$$

VJEROJATNOST ISPRAVNOG DEKODIRANJA

$$p(K) = \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} p_g^i (1 - p_g)^{n-i}$$

<u>DEKODIRANJE LINEARNOG BINARNOG KODA:</u>

1) Metoda najbližeg susjeda

$d(K) \geq s + 1$

$s = d(K) - 1$

$t = \left\lfloor \frac{d(K) - 1}{2} \right\rfloor$

$d(K) \geq 2t + 1$

$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$

s - najveći broj pogrešaka koje kôd može otkriti

t - najveći broj pogrešaka koje kôd *K* može ispraviti

2) Sindromsko dekodiranje

$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$

$\boldsymbol{e}$ - vektor pogreške

$\boldsymbol{x}$ - poslana kodna riječ

$\boldsymbol{y}$ - primljena kodna riječ

$\boldsymbol{G} = [\boldsymbol{I_k} \mid \boldsymbol{A}]$

$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{A}^T \mid \boldsymbol{I}_{n-k}]$

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{H^T}$

$\boldsymbol{G}$ – generirajuća matrica koda dimenzija $k \times n$

$\boldsymbol{H}$ - matrica provjere pariteta

$\boldsymbol{S}$ - sindrom

HAMMINGOV KÔD

$\boldsymbol{H}$ - matrica provjere pariteta dimenzija $r \times (2^r - 1)$

$r = n - k$

Generirajuću matricu G je iz matrice H moguće dobiti sljedećim postupkom:

1. U matrici H izbrisati sve stupce koji se nalaze na pozicijama s indeksom jednakim potenciji broja 2 (pozicije 1,2,4, 8, 16, itd).
2. Dobivenu matricu transponirati.
3. Stupce dobivene matrice smjestiti na pozicije generirajuće matrice G čiji indeksi odgovaraju potencijama broja 2.
4. Ostale stupce popuniti redom stupcima jedinične matrice.

HAM [7,4]

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

CIKLIČKI KÔD

Uvjeti:

1. $a(x), b(x) \in K$, *vrijedi* $a(x) + b(x) \in K$
2. $a(x) \in K$ *i* $\forall\, r(x) \in Rn$, *vrijedi* $r(x) \cdot a(x) mod(xn - 1) \in K$.

$x^n - 1 = g(x) \cdot h(x)$

r - stupanj generirajućeg polinoma

$h(x)$ - polinom za provjeru pariteta cikličnog koda K.

$d(x) \cdot x^r = g(x)q(x) + r(x) = c(x)$

$r(x) = d(x) \cdot x^r \; mod[g(x)]$

$S(c'(x)) = \frac{x^{n-k} c'(x)}{g(x)}$

$\boldsymbol{c} = [d|r]$

$g(x)$ - generirajući polinom

$q(x)$ - kvocijent

$d(x)$ – polinom kodirane poruke

$r(x)$ – ostatak nakon dijeljenja s $g(x)$

$c(x)$ – kodna riječ

$S(c'(x))$ - sindrom primljene kodne riječi

FAKTORIZACIJE NEKIH POLINOMA OBLIKA $x^n - 1$

n	aritmetika	Faktorizacija u aritmetici modulo 2
1	$x - 1$	$x + 1$
2	$x^2 - 1$	$(x+1)^2$
3	$x^3 - 1$	$(x+1)(x^2+x+1)$
5	$x^5 - 1$	$(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$
7	$7 - 1$	$(x+1)(x^3+x+1)(x^3+x^2+1)$
9	$x^9 - 1$	$(x+1)(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
11	$x^{11} - 1$	$(x+1)(x^{10}+x^9+\cdots+x+1)$
13	$x^{13} - 1$	$(x+1)(x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1)$
15	$x^{15} - 1$	$(x+1)(x^2+x+1)(x^4+x+1)(x^4+x^3+1)(x^4+x^3+x^2+1)$
17	$x^{17} - 1$	$(x+1)(x^8+x^5+x^4+x^3+1)(x^8+x^7+x^6+x^4+x^2+x+1)$
19	$x^{19} - 1$	$(x+1)(x^{18}+x^{17}+\cdots+x+1)$

Srednja snaga i energija

(Ako nije drugačije zadano, R = 1Ω!)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} Ri^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2(t)}{R}dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Ri^2(t)dt$$

Periodični signali

$$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Granice mogu ići i od 0 do T_0, ili po bilo kojem intervalu duljine T_0

$$c_k = |c_k|e^{-j\theta_k}$$

$$P = \sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k^2| = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}|c_k^2| = \frac{1}{2}(A_1^2+\dots+A_n^2)$$

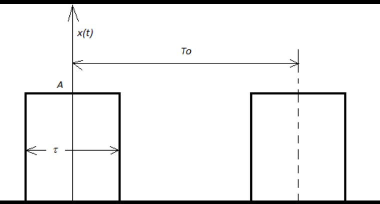
Snaga istosmjerne komponente: $|c_0|^2$.

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \to T_0$ - osnovni period

Periodičan slijed pravokutnih impulsa

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le |t| \le \frac{\tau}{2} \\ 0, & \frac{\tau}{2} < |t| \le \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

τ - trajanje signala
T_0 - osnovni period
A - amplituda



$$P = A^2\frac{\tau}{T_0}$$

Omjer impuls/pauza:

$$\frac{\tau}{T_0-\tau}$$

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)}{\frac{k\omega_0\tau}{2}} \leftrightarrow |c_k| = A\frac{\tau}{T_0}\left|\frac{\sin\left(\frac{k\omega_0\tau}{2}\right)}{\frac{k\omega_0\tau}{2}}\right|$$

Kroz 0 prolazi u $\frac{k}{\tau}, k \in \mathbb{Z}$.

$$c_0 = A\frac{\tau}{T_0}$$

Snaga istosmjerne komponente: $P_0 = A^2\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2$

Neperiodični signali

$$E = \int_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2dt = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}[x(t)]^2dt$$

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[x(t)]^2dt$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Pravokutni impuls:

$$X(f) = A\tau\frac{\sin\left(\frac{2\pi f\tau}{2}\right)}{\frac{2\pi f\tau}{2}}$$

Signal energije: $E < \infty \to P = 0$

Signal snage: $P > 0 \to E \to \infty$

Ni jedno ni drugo: $E \to \infty,\ P \to \infty$

Slučajni signali

$$\mu_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x,t)dx$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

$$P = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df$$

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2$$

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df$$

NPK: $B = f_g$
PPK: $B = f_g - f_d$

μ_X – srednja vrijednost slučajnog procesa
R_X – autokorelacijska funkcija
$S_{X,Y,N}$ – spektralna gustoća snage
X – ulaz; Y – izlaz; može biti i obrnuto!!
S ili P_S – srednja snaga signala
P ili P_N – srednja snaga šuma
h(t) – impulsni odziv
H(f) – prijenosna funkcija
H(X) – entropija
N_0 – spektralna gustoća AWGN
N_q – srednja snaga kvantizacijskog šuma
u – uzorkovanje
m – multipleksiranje
n – broj kanala koji se multipleksiraju
r – broj bitova
L – broj razina
B – širina pojasa
A – pojačanje
E_b – energija bita
C – kapacitet kanala
D – dinamika
m_{max} – maksimalna amplituda ulaznog signala
Δ - korak kvantizacije
σ_q^2 - srednja kvadratna greška (brže i lakše)
$\overline{N_q}^2$ - srednja kvadratna greška (sporije i teže)
f(u) ili p(u) – funkcija gustoće vjerojatnosti razine signala
f(q) – funkcija gustoće vjerojatnosti razine kvantizacijskog šuma
(1) – ako imamo odstupanje od polazne vrijednosti
(2) – kod odstupanja od vrha do vrha; U_p = |zadano u postocima|
Frekvencijsko miješalo poduplava frekvencije!

Uzorkovanje

$$f_u = 2B$$

$$R = \frac{H(X)}{T}$$

$$R_m = nR$$

$$L = 2^r$$

$$N = N_0B$$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\log_2 p(x_i)$$

$$A = \frac{S_2}{S_1}$$

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)$$

$$C \ge R$$

$$C = \log_2 e\frac{S}{N_0}, \text{kad } B\to\infty$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{\frac{C}{B}}-1}{\frac{C}{B}}$$

$$D = 0.5\log\left(1+\frac{S}{N}\right) = \frac{C}{2B}$$

Kvantizacija

$$\frac{S}{N} = \frac{3}{2}2^{2r} = \left(\frac{3S}{m_{max}^2}\right)2^{2r}$$

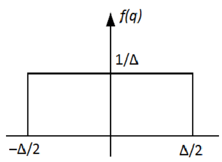
$$\left(\frac{S}{N_q}\right)_{dB} = 1.76 + 6.02r$$

$$\Delta = \frac{2m_{max}}{L}$$

$$-\frac{\Delta}{2} \le q \le \frac{\Delta}{2}$$

$$P_S = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u)du$$

$$P_N = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 f(q)dq$$



(1) $\frac{\Delta}{2} = \frac{m_{max}}{L}$

(2) $\frac{\Delta}{2} = U_p 2m_{max}$

$$\overline{N_q}^2 = \int_{u_{qi}-\frac{\Delta}{2}}^{u_{qi}+\frac{\Delta}{2}} (u-u_{qi})^2 p(u)du$$

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{3}m_{max}^2 2^{-2r}$$

Strujni krugovi: Energija i snaga

E = $\int_{-\infty}^{\infty} Ri^2(t)dt = {}_{-\infty}^{\infty}\frac{u^2(t)}{R}dt$ [Ws]

P = $\lim_{T\to\infty} {}_{-T/2}^{T/2} Ri^2(t)dt[W]$

cos x = $\frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$, sin x = $\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{2j}$, cos(2x) = $\cos^2 x - \sin^2 x$

Periodični signali

x(t) = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkw_0t}$

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jkw_0t}dt$$

P = $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |{c_k}^2|$ = $\frac{1}{2}(A_1^2 + \cdots + A_n^2)$

Energija je beskonačna

Periodičan slijed pravokutnih impulsa

x(t) = A <- 0≤ $|t| \le \frac{\tau}{2}$, 0 <- $\frac{\tau}{2} \le |t| \le \frac{T_0}{2}$

τ – trajanje signala

T_0 – osnovni period

A – amplituda

$$P = A^2\frac{\tau}{T_0}$$

Omjer impuls/pauza: $\frac{\tau}{T_0-\tau}$

$$c_k = A\frac{\tau}{T_0}\frac{\sin(\frac{kw_0\tau}{2})}{\frac{kw_0\tau}{2}}$$

$$c_0 = A\frac{\tau}{T_0}$$

Kroz 0 prolazi u $\frac{k}{\tau}$, k ∈ Z

Snaga istosmjerne komponente:

$$P = A^2\frac{\tau^2}{{T_0}^2}$$

Neperiodični signali

E = $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2dt = \lim_{T\to\infty} {}_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$ = ${}_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$

P = $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T} {}_{-T}^{T}|x(t)|^2dt$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jwt}dt$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{-jwt}dw$$

Pravokutni impuls

$$X(f) = A\tau\frac{\sin(\frac{2\pi ft}{2})}{\frac{2\pi ft}{2}}$$

Srednja snaga P=0

E = $A^2\tau$

Slučajni signali

μ_x – srednja vrijednost slučajnog procesa

$$\mu_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_x(x,t)dx$$

S_x – spektralna gustoća snage signala

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\ [\frac{W}{Hz}]$$

R_x - Autokorelacijska funkcija

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

Srednja snaga slučajnog signala

$$P = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df$$

Funkcija gustoće Gaussove razdiobe

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu_x)^2/(2\sigma_x^2)}$$

Funkcija gustoće vjerojatnosti razine signala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Linearnost signala

$ax_1(t) + bx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$

Vremenska nepromjenjivost signala

x(t - $t_0) = y(t - t_0)$

Impulsni odziv i prijenosna funkcija

h(t) - Impulsni odziv, x(t) – ulaz, y(t) - izlaz

* - konvolucija

y(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)d\tau = {}_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)d\tau$

y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)

H(f) – prijenosna funkcija

H(f) = $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j2\pi ft}dt$

h(f) = $\int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{j2\pi ft}df$

Y(f) = X(f) H(f)

S_x – spektralna gustoća snage ulaznog signala

S_y – spektralna gustoća snage izlaznog signala

$S_y\,(f) = S_x\,(f)\,|H(f)^2|$

A(f) – prigušenje kanala

A(f) = 1/ |H(f)|

B - Širina prijenosnog pojasa kanala

B = $f_{gornja} - f_{donja}$

Amplitudni odziv RC kruga

|H(f)| = $\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}$

f_g = B – granična frekvencija RC kruga

je ona na kojoj je |H(f)| = 1 / $\sqrt{2}$

Uzorkovanje signala

Teorem uzorkovanja: |f|>B, vrijednosti uzete u $T_n = n/(2B)$ [s]

Rekonstrukcija u trenucima s razmakom 1/(2B) [s]

$x_u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\delta(t-nT_u)$

DFT

$X_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,e^{j2\pi fT_u}$

Kvantizacija

m – amplituda signala, m_{max} najveća

L – broj kvantizacijskih razina

Δ - korak kvantizacije

$\Delta = 2m_{max}/L$

Funkcija gustoće vjerojatnosti razine kvantizacijskog šuma

$f_Q(q) = \frac{1}{\Delta}$ za $-\frac{\Delta}{2} < q \le \frac{\Delta}{2}$, 0 inače

P_s – srednja snaga signala

$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du$

P_N – srednja snaga šuma

$P_N = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 f(q) dq$

r – broj bita za opis uzorka

$L = 2^r$

Varijanca slučajne varijable

$\sigma_Q^2 = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{3} m_{max}^2 2^{-2r}$

Omjer srednje snage signala i

Srednje snage kvantizacijskog šuma

$(S/N) = \frac{S}{\sigma_Q^2} = \frac{3S}{m_{max}^2} 2^{-2r}$

Omjer snaga u logaritamskom mjerilu

$10\log_{10}(S/N) = 1,76 + 6.02 * r$ [dB]

Entropija u kontinuiranom vremenu

$H(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) \log f_x(x) dx$ - entropija ulaza/izlaza

$H(X|Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(y)} dx\, dy$ - ekvivokacija

$H(Y|X) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(x)} dx\, dy$ – entropija šuma

$H(X,Y) = -\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log f(x,y) dx\, dy$ – združena entropija

$I(X;Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) \log \frac{f(x,y)}{f(x)f(y)} dx\, dy$ – transinformacija

$I(X;Y) = H(Y) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$

Maksimalna entropija slučajne varijable

$H(X) = \ln(\sigma_x \sqrt{2\pi e})$[nat/simbol]

$C = \max I(X;Y)$

kapacitet kanala po simbolu

$C = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \left[\frac{bit}{simbol}\right]$

AWGN kanal

$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$[bit/s]

D – dinamika

C = 2BD

$D = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \left[\frac{bit}{uzorak}\right]$

$S_N(f)$ – spektralna gustoća snage šuma

$S_N(f) = \frac{N_0}{2}$

$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right)$[bit/s]

R_B – prijenosna brzina

$R_B \le C$ je OK

E_B – srednja enegrija po bitu signala

S – srednja snaga signala

$S = \frac{E}{T}$, $S = E_B C$, $E_B = S/R$

$\frac{C}{B} = \log_2(1 + \frac{E_B C}{N_0 B})$

$\frac{E_B}{N_0} = \frac{2^{C/B}-1}{C/B}$

$\lim_{B\to\infty} \frac{E_B}{N_0} = \log 2 = 0.693$

$\lim_{B\to\infty} C = \frac{S}{N_0}\log_2 e$

Γ – dozvoljena vjerojatnost pogreške

$\Gamma = \frac{2^{2C}-1}{2^{2R}-1} = \frac{(S\,/\,N)}{2^{2R}-1}$

$R = \frac{1}{2}\log_2\left(1 + \frac{S}{\Gamma N}\right)$ [bit/simbol]

$R_B = B\log_2\left(1 + \frac{S}{\Gamma N}\right)$ [bit/s]

Autokorelacijska funkcija

$R_x = E[\, x(t_1)\, x(t_2)\,] = E[\, x(t)\, x(t+\tau)\,]$

Autokovarijanca

$C_x = E[\, (x(t_1) - \mu_x(t_1))\, (x(t_2) - \mu_x(t_2))\,]$

$= R_x(t_1,t_2) - E[x(t_1)]\, E[x(t_2)]$

Proces stacionaran u širem smislu => μ_x je konstanta i R_x je isključivo funkcija razlike $|t_2-t_1|$ odnosno τ

Kada slučajni signal x prolazi kroz sustav,
očekivanje na izlazu $\mu_y=\mu_x * H(0)$, H je prijenosna f-ja
Spektralna gustoća na izlazu: $S_y = S_x * |H(f)|^2$

Idealni niskopropusni filtar (Nyquistov), od frekvencija $-f_g$ do f_g, ima sljedeći impulsni odziv:

$$h(t) = 2 f_g \frac{\sin(2\pi f_g t)}{2\pi f_g t}$$