PRVA DOMAĆA ZADAĆA IZ TEORIJE INFORMACIJA

Zadatak 1.

Neka je X diskretna slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa *{x_1,..., x_i,...x_n}*, a *$p(x_i)$* su vjerojatnosti pojavljivanja vrijednosti *x_i*, *$1 \le i \le n$*, **entropiju** diskretne slučajne varijable X definiramo kao:

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) * log\left(\frac{1}{p(x_i)}\right) [bit/simbol]$$

Uzajamni sadržaj informacije (transinformacija) između slučajnih varijabli *X* i *Y* definiran je kao:

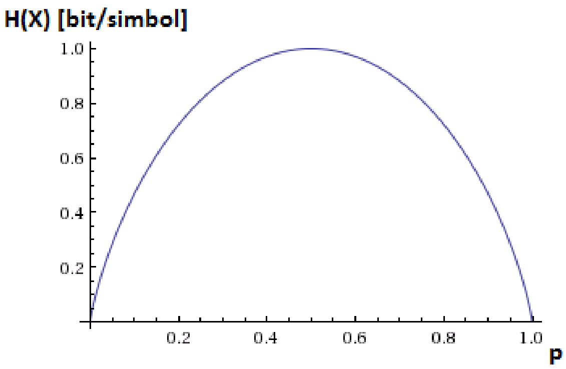
$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j) * log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i) * p(y_j)}$$

gdje Y poprima vrijednosti iz skupa *{y_1,..., y_j,...y_m}*, a X iz *{x_1,..., x_i,...x_n}*.

(a) $p \in [0,1], X\ slučajna\ varijabla\ koja\ poprima\ vrijednosti\ iz\ skupa\ \{0,1\}\ i\ vrijedi:$

$$P(X = x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1 - p & x = 0 \end{cases}$$

1. Ovisnost entropije varijable *X* o *p*:



$$H(X) = p * \log_2\left(\frac{1}{p}\right) + (1 - \mathrm{p}) * \log_2(\frac{1}{1-p})$$

2. Maksimum entropije:

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p * \ln\left(\frac{1}{p}\right) + (1 - \mathrm{p}) * \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}{\ln(2)}\right) = \frac{\ln\left(\frac{1}{p}\right) - 1 - \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) + 1}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{1}{p}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}{\ln(2)}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{1}{p}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-p}\right)}{\ln(2)} = 0 \qquad \ln\left(\frac{1-p}{p}\right) = 0 \qquad p = \frac{1}{2}$$

Maksimum entropije se postiže za p=0.5

3. Neka je *p* slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa {0, 0.5, 1} s jednakim vjerojatnostima. Kolika je očekivana vrijednost entropije varijable X?

$$E(H(X)) = \sum_{j=1}^{3} H(X; p = p_j) * \frac{1}{3}$$

$$H(X; p = 0) = 0 \qquad H(X; p = 0.5) = \frac{1}{2} * 1 + \frac{1}{2} * 1 = 1 \qquad H(X; p = 1) = 0$$

$$E(H(X)) = \frac{1}{3}(0 + 1 + 0) = \frac{1}{3}\,[\text{bit/simbol}]$$

b) Slučajna varijabla X poprima vrijednosti iz skupa {-1,0,1} s jednakim vjerojatnostima. Nađi entropiju od X,X^2,2^X.

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$H(X) = \frac{1}{3} * (\log 3 + \log 3 + \log 3) = \log 3 = 1{,}585\ bit/simbol$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$H(X) = \frac{1}{3} * \log 3 + \frac{2}{3} * \log \frac{3}{2} = 0{,}918\ bit/simbol$$

$$2^X \sim \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$H(X) = \frac{1}{3} * (\log 3 + \log 3 + \log 3) = \log 3 = 1{,}585 \frac{bit}{simbol}$$

Naslućujem u vezi entropije diskretne slučajne varijable *X* i entropije neke njezine funkcije *f(X)* da vrijedi da je *H(X) ≥ H(f(X))*

Dokaz:

1. Vrijedi: $H(X, f(X)) = H(X) + H(f(X)|X) = H(f(X)) + H(X|f(X))$
2. $H(f(X)|X) = 0$ jer je za neku vrijednost od X, f(X) potpuno određen:
   $H(f(X)|X) = \sum_i p(x_i) H(f(X)|x = x_i) = 0$
3. $H(X|f(X)) \geq 0$ (jednako nula akko je funkcija bijekcija)
4. Iz 1-3 slijedi: $H(X) \geq H(f(X))$