Sveučilište u Zagrebu
**Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 7. rujna 2018.

**1. zadatak** (**15 bodova**): Napon *V* kojeg mjeri instrument može poprimiti jednu od osam vrijednosti $v_i$, $i = 1, \ldots, 8$, sa sljedećim vjerojatnostima $p(v_i)$:

| $v_i$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | $v_5$ | $v_6$ | $v_7$ | $v_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p(v_i)$ | 0,05 | 0,05 | 0,15 | 0,25 | 0,30 | 0,05 | 0,05 | 0,10 |

Tablica vjerojatnosti izmjerenih vrijednosti

Odredite srednji sadržaj informacije generiran instrumentom u jedinici vremena (bit/s) ako instrument mjeri napon svakih 15 ms i tu izmjerenu vrijednost šalje na izlaz.

*Postupak rješavanja:*

Prosječna količina informacije koju daje instrument po mjernoj vrijednosti je:

$$H(v) = -\sum_{i=1}^{8} p(x_i) \cdot \log_2 p(x_i) = \ldots = 2,6282 \,\text{bit/mjerna vrijednost}$$

Ako se pokazivanje instrumenta mijenja svakih $t$ = 15 ms, tada količina informacije koju instrument generira u jedinici vremena iznosi

$$R = \frac{H(v)}{t} = 175,214 \,\text{bit/s}$$

**2. zadatak** (**15 bodova**): Promatrani diskretni bezmemorijski izvor generira simbole iz skupa{a, b, n, o, y}, čije su frekvencije pojavljivanja 5, 4, 3, 2 odnosno 1 po istom redoslijedu kojim su simboli navedeni u skupu.. Kodirajte zadani skup simbola Shannon-Fanoovom metodom kodiranja, a potom dekodirajte sljedeći slijed bita: 11111011100100111010111.

*Postupak rješavanja:*

| Simbol | Frekvencija | Korak 1 | Korak 2 | Korak 3 | Kodna riječ |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 5 | 0 | 0 | | 00 |
| b | 4 | 0 | 1 | | 01 |
| n | 3 | 1 | 0 | | 10 |
| o | 2 | 1 | 1 | 0 | 110 |
| y | 1 | 1 | 1 | 1 | 111 |

Dekodirani slijed riječi je: *yoyanbony*

**3. zadatak** (**15 bodova**): U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kôd [7,4,3] s generirajućim polinomom $g(x) = 1 + x + x^3$. Koder kanala koristi generirajuću matricu u obliku:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [1010011], odredite koja je poruka poslana. Pretpostavka je da je prilikom prijenosa eventualno nastupila jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

*Postupak rješavanja:*

Primljenu kodnu riječ **c** = [1010011] treba u polinomnom obliku podijeliti s generirajućim polinomom: $x^6 + x^4 + x + 1 : x^3 + x + 1 = x^3 + 1 = d(x)$, što znači da je poslana poruka [1001]. Da to doista vrijedi, moguće je provjeriti množenjem vektora poruke **d** sa zadanom generirajućom matricom **G**: [1001]·**G** = [1010011], što odgovara zadanoj kodnoj riječi koju je primio dekoder kanala.

**4. zadatak** (**20 bodova**): Slučajni signal spektralne gustoće snage $S(f)$, koji ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa, dovodi se na ulaz LTI-sustava S1 prijenosne funkcije $H_1(f)$, a izlaz tog sustava vezan je izravno na ulaz LTI-sustava S2 prijenosne funkcije $H_2(f)$. Navedene funkcije frekvencije definirane su sljedećim izrazima:

$$S(f) = 10\,\mu\text{W/Hz}, \forall f \in \mathbf{R}, \quad H_1(f) = \begin{cases} 0,5 & \text{za} \, |f| \le 10^6\,\text{Hz} \\ 0 & \text{za} \, |f| > 10^6\,\text{Hz} \end{cases}, \quad H_2(f) = \begin{cases} 0,2 & \text{za} \, |f| \le 10^7\,\text{Hz} \\ 0 & \text{za} \, |f| > 10^7\,\text{Hz} \end{cases}$$

Odredite minimalni vremenski razmak $\Delta$, $\Delta \ge 0$, između dva potpuno nekorelirana uzorka slučajnog procesa (signala) na izlazu LTI-sustava S2.

*Postupak rješavanja:*

Ako na ulaz LTI-sustava dovedemo slučajni signal s obilježjima stacionarnog slučajnog procesa, tada slučajni signal na izlazu LTI-sustava također ima obilježja stacionarnog slučajnog procesa i za spektralne gustoće snage vrijedi izraz:

$$S_{\text{izlaz}}(f) = S_{\text{ulaz}}(f)\,|H(f)|^2$$

pri čemu je $H(f)$ prijenosna funkcija LTI-sustava. Neka je $S_1(f)$ spektralna gustoća snage na izlazu sustava S1. Za nju vrijedi izraz:

$$S_1(f) = \begin{cases} 2,5\,\mu\text{W/Hz} & \text{za} \, |f| \le 10^6\ \text{Hz} \\ 0\,\text{W/Hz} & \text{inače} \end{cases}$$

Na sličan način, za spektralnu gustoću snage signala na izlazu sustava S2 vrijedi:

$$S_2(f) = \begin{cases} 0,1\,\mu\text{W/Hz} & \text{za} \, |f| \le 10^6\ \text{Hz} \\ 0\,\text{W/Hz} & \text{inače} \end{cases}$$

Nadalje, potrebno je odrediti autokorelacijsku funkciju signala na izlazu sustava S2. Za nju vrijedi:

$$R_2(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_2(f)e^{j2\pi f\tau}df=\int_{-10^6}^{10^6} 0{,}1\cdot 10^{-6}\, e^{j2\pi f\tau}df=0{,}1\cdot 10^{-6}\int_{-10^6}^{10^6} e^{j2\pi f\tau}df=$$

$$=0{,}1\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^{6}\,\frac{\sin\left(2\pi 10^{6}\tau\right)}{2\pi 10^{6}\tau}[s]$$

Dakle, da bi odredili minimalnu udaljenost između dva potpuno nekorelirana uzorka, moramo odrediti prvi trenutak $\tau$, veći od nule, u kojem autokorelacijska funkcija poprima vrijednost nula: $R_2(\tau) = 0$ za $2\pi 10^6\tau = \pi$, a to će biti postignuto kad je $\tau = 1/(2\cdot 10^6)$ [s], tj. u 0,5 μs.

**5. zadatak** (**35 bodova**): Na ulazu nekog diskretnog komunikacijskog kanala pojavljuje se $n$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, simbola iz abecede $X$, koje označavamo kao $x_i$, $1 \leq i \leq n$. Svakom simbolu pridružena je vjerojatnost pojavljivanja $p(x_i)$, $0 < p(x_i) < 1$. Količina ili sadržaj informacije svakog pojedinog simbola definiran je kao $I(x_i)$. Odredite sljedeće.

a) (**4 boda**) Izraz za očekivanje od $I(X)$.

b) (**10 bodova**) Izraz za disperziju, odnosno varijancu od $I(X)$.

c) (**5 bodova**) Iznos disperzije od $I(X)$ za slučaj kad vrijedi $I(x_i) = 1/n$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

d) **(16 bodova)** Iznos disperzije od $I(X)$ za poseban slučaj kad je vjerojatnost jednog od $n$ ulaznih simbola jednaka 1, a svih ostalih 0. **Napomena**: obavezno provesti matematički dokaz, a ne intuitivno zaključivati.