SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predmet: Teorija informacije (34315)
Ak. godina: 2009./2010.

Domaća zadaća: {1.}
/zadatak: {6.}/

Grupa {3TIp1}:
1. {Krešimir Špes, 36419866}
2. {Daria Štefić, 36439899 }
3. {Ivo Štimac, 36437798}
4. {Eva Štos, 36440176}

**Zadatak** – {6.}: Četiri poruke, generirane iz skupa od četiri jednako vjerojatna simbola $\mathbf{X} = \{x_1,...,x_4\}$, kodirane binarnim kodom ( $x_1$ - '00', $x_2$ - '01', $x_3$ - '10', $x_4$ - '11'), prenose se binarnim simetričnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa 0,2. Izračunajte za koliko se promijeni ekvivokacija u kanalu ako se u prijenosu kao zaštita poruka uvede jedan paritetni bit (parni paritet!).

**Rješenje:**

Vjerojatnost da znak 00 na izlazu ostane 00 iznosi 0.8*0.8, da se pretvori u 01 iznosi 0.8*0.2, itd. Prema tome konstriramo ovu matricu:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ [p(y_j \mid x_i)] = & \begin{bmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.16 & 0.04 \\ 0.16 & 0.64 & 0.04 & 0.16 \\ 0.16 & 0.04 & 0.64 & 0.16 \\ 0.04 & 0.16 & 0.16 & 0.64 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Kako u zadatku piše da se simboli generiraju jednakom vjerojatnošću, imamo: $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 0.25$, pa je onda:

$$[p(x_i, y_j)] = \begin{bmatrix} 0.16 & 0.04 & 0.04 & 0.01 \\ 0.04 & 0.16 & 0.01 & 0.04 \\ 0.04 & 0.01 & 0.16 & 0.04 \\ 0.01 & 0.04 & 0.04 & 0.16 \end{bmatrix}.$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = 3.444 \text{ bit/simbol.}$$

Budući da su sve vjerojatnosti $p(y_i)$ na izlazu također jednake 0.25, dobijemo :

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{4} y_i \log y_i = 2 \text{ bit/simbol.}$$

$$H(X \mid Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.444 \text{ bit/simbol}$$

Sada na isti način promatramo slučaj kada imamo jedan paritetni bit:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 100 & 011 & 101 & 110 & 111 \end{array} \\ [p(y_j \mid x_i)] = & \begin{bmatrix} 0.512 & 0.128 & 0.128 & 0.128 & 0.032 & 0.032 & 0.032 & 0.008 \\ 0.032 & 0.128 & 0.128 & 0.08 & 0.512 & 0.032 & 0.032 & 0.128 \\ 0.032 & 0.128 & 0.08 & 0.128 & 0.032 & 0.512 & 0.032 & 0.128 \\ 0.032 & 0.08 & 0.128 & 0.128 & 0.032 & 0.032 & 0.512 & 0.128 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\left[p(x_i, y_j)\right] = \begin{bmatrix} 0.128 & 0.032 & 0.032 & 0.032 & 0.008 & 0.008 & 0.008 & 0.002 \\ 0.008 & 0.032 & 0.032 & 0.02 & 0.128 & 0.008 & 0.008 & 0.032 \\ 0.008 & 0.032 & 0.02 & 0.032 & 0.008 & 0.128 & 0.008 & 0.032 \\ 0.008 & 0.02 & 0.032 & 0.032 & 0.008 & 0.008 & 0.128 & 0.032 \end{bmatrix}$$

Zbrajanjem stupaca dobijemo:

$p(y_1) = 0.152$ $\qquad$ $p(y_5) = 0.152$

$p(y_2) = 0.098$ $\qquad$ $p(y_6) = 0.152$

$p(y_3) = 0.098$ $\qquad$ $p(y_7) = 0.152$

$p(y_4) = 0.098$ $\qquad$ $p(y_8) = 0.098$

Vjerojatnosti $p(y_2)$, $p(y_3)$, $p(y_4)$ i $p(y_8)$ možemo zbrojiti u jednu jer nam one predstavljaju simbole skupove simbola koji nikako nisu mogli zajedno biti na ulazu (npr. Jasno je da 001 nikako nije moglo biti na ulazu jer bi tada paritetni bit morao biti 0, a ne 1; isto tako i za 010, 100 i 111).

Sada imamo:

$p(y_1) = 0.152$

$p(y_2) = 0.152$

$p(y_3) = 0.152$

$p(y_4) = 0.152$

$p(y_5) = 0.392$

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{5} y_i \log y_i = 2.182 \text{ bit /symbol}$$

Isto tako onda napravimo u matrici $\left[p(x_i, y_j)\right]$ - po redovima zbrojimo vrijednosti u 2,3,4 i 8. stupcu, pa dobijemo:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 000 & 011 & 101 & 110 & \text{krivo} \end{array} \\ \left[p(x_i, y_j)\right] = & \begin{bmatrix} 0.128 & 0.008 & 0.008 & 0.008 & 0.098 \\ 0.008 & 0.128 & 0.008 & 0.008 & 0.098 \\ 0.008 & 0.008 & 0.128 & 0.008 & 0.098 \\ 0.008 & 0.008 & 0.008 & 0.128 & 0.098 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$H(X,Y) = -\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j) = 3.501 \text{ bit/simbol}$$

$$H(X \mid Y) = H(X,Y) - H(Y) = 1.319 \text{ bit/simbol}$$

Dakle, razlika ekvivokacija iznosi:

1.444 - 1.319 = **0.125 bit/simbol**