Zavod za
telekomunikacije

Kapacitet kanala u kontinuiranom vremenu

Teorija informacije

Entropija u kontinuiranim kanalima

- definicija entropije jednodimenzionalne slučajne varijable *X* s kontinuiranom razdiobom:

$$H(X) = E\left[-\log f_X(X)\right] = -\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\log f_X(x)\,dx$$

- diferencijalna entropija može biti i negativna
- primjer: *X* ima jednoliku razdiobu na intervalu (0, *a*)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \qquad H(X) = \int_0^a \frac{1}{a}\log(a)\,dx = \log(a)$$

- ako je *a* < 1, tada je log(*a*) < 0, pa je H(X) negativna

Informacijske mjere kontinuiranog sustava

- ulaz u kanala – slučajna varijabla X
  - kontinuirana funkcija gustoće vjerojatnosti $f_1(x)$
- izlaz iz kanala – slučajna varijabla Y
  - kontinuirana funkcije gustoće vjerojatnosti $f_2(y)$
- združena funkcija gustoće vjerojatnosti od X i Y
  - kontinuirana funkcija $f(x,y)$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dy,$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dx.$$

Informacijske mjere kontinuiranog sustava (II)

entropija na ulazu kanala: $H(X)=E\left[-\log f_1(X)\right]=-\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\log f_1(x)dx$

entropija na izlazu kanala: $H(Y)=E\left[-\log f_2(Y)\right]=-\int_{-\infty}^{\infty} f_2(y)\log f_2(y)dy$

ekvivokacija: $H(X|Y)=E\left[-\log f_y(X|Y)\right]=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log\frac{f(x,y)}{f_2(y)}dx\,dy$

entropija šuma: $H(Y|X)=E\left[-\log f_x(Y|X)\right]=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log\frac{f(x,y)}{f_1(x)}dx\,dy$

združena entropija: $H(X,Y)=E\left[-\log f(X,Y)\right]=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log f(x,y)dx\,dy$

Transinformacija u kontinuiranom kanalu

- transinformacija je očekivanje slučajne varijable *I* definirane funkcijom $\log\left(\frac{f(X,Y)}{f_1(X)\,f_2(Y)}\right)$

$$E[I] = I(X;Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\log\frac{f(x,y)}{f_1(x)f_2(y)}\,dx\,dy$$

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y)$$

- $I(X;Y) = I(Y;X)$
- $I(X;Y) \geq 0$
- $I(X;Y) = 0$ ako su X i Y međusobno neovisne slučajne varijable

Entropija slučajnog vektora

- neka je **X** slučajni vektor sastavljen od *n* kontinuiranih slučajnih varijabli X_k, $k = 1, \ldots, n$
- diferencijalna entropija dana izrazom

$$H(X_1,\ldots,X_n)=E\left[-\log\left\{f_{\mathbf{X}}\left(X_1,\ldots,X_n\right)\right\}\right]=-\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}\left(x_1,\ldots,x_n\right)\log\left[f_{\mathbf{X}}\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right]dx_1\cdots dx_n$$

$$H(\mathbf{X})=E\left[-\log\left\{f\left(\mathbf{X}\right)\right\}\right]=-\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}\right)\log\left[f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{x}\right)\right]d\mathbf{x}$$

- $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ združena funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnog vektora **X**

Određivanje maksimuma entropije kontinuirane slučajne varijable

- Maksimum *H*(*X*) za DSV nastupa kad su svi elementarni događaji jednako vjerojatni
  - ako je kontinuirana slučajna varijabla ograničena na neki konačan interval, tada ima smisla razmatrati koja gustoća vjerojatnosti daje maksimalnu vrijednost entropije
- od svih jednodimenzionalnih razdioba s unaprijed zadanom standardnom devijacijom najveću entropiju pruža Gaussova (normalna) razdioba

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \qquad H(X) = \ln\left(\sigma_X \sqrt{2\pi e}\right)$$

Prijenos informacije u prisustvu aditivnog šuma

- općenito gledano, proračun kapaciteta kontinuiranog kanala je vrlo složen problem
  - ne postoji općenita metoda za određivanje kapaciteta u svim okolnostima
  - jednostavno je proračunati kapacitet kanala s aditivnim šumom
- neka *X* opisuje izlaz predajnika, a *Y* ulaz u prijemnik
  - *X* i *Y* su kontinuirane slučajne varijable
  - uvjetna funkcija gustoće vjerojatnosti $f_x\left(y|x\right) = \frac{f\left(x,y\right)}{f_1\left(x\right)}$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom

- pretpostavimo da je šum u kanalu aditivan i neovisan o X
- $Y = X + Z$ i $f_x(y|x) = f_x(z + x|x) = \phi(z)$
  - Z je slučajna varijabla koja opisuje šum
    - funkcija gustoće vjerojatnosti šuma je $\phi(z)$
    - $f_x(z + x|x)$ ovisi samo o z
  - iz toga proizlazi jednakost $H(Y|X) = H(X + Z|X) = H(Z)$
- dakle, za transinformaciju vrijedi:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(Y) - H(Z) = H(Y) + \int_{-\infty}^{\infty} \phi(z) \log[\phi(z)]\, dz$$

- kapacitet određujemo pronalaženjem maksimuma transinformacije $I(X;Y)$ u ovisnosti o funkciji $f_1(x)$ i pod određenim ograničenjima

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (II)

- problem:
  - određivanje **kapaciteta kanala**
  - u prisustvu **Gaussovog aditivnog šuma**
  - te uz zadanu **srednju snagu signala na izlazu predajnika** i
  - **srednju snagu šuma**
- ograničenja bitna za proračun kapaciteta
  - pretpostavka: šum ima Gaussovu razdiobu
    - srednja vrijednost jednaka nuli i
    - srednja snaga jednaka σ_z^2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/(2\sigma_z^2)}\,dz = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \sigma_x^2$$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (III)

- transinformacija u kanalu

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Z) = H(Y) - \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma_z^2\right)$$

- vrijedi: max $I(X;Y)$ = max $[H(Y) - H(Z)]$
  - kapacitet kanala je moguće izračunati maksimizacijom entropije $H(Y)$ i
  - uz ranije navedena ograničenja
- nadalje, $E[Y] = E[X + Z] = E[X] + E[Z] = 0$
- $E[Y^2] = E[(X + Z)^2] = E[X^2] + 2E[X]E[Z] + E[Z^2]$
- $E[X]E[Z] = 0$ pa vrijedi $E[Y^2] = \sigma_x^2 + \sigma_z^2 =$ konst.

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (IV)

- dakle, problem pronalaženja kapaciteta kanala svodi se na pronalaženje
  - **funkcije gustoće vjerojatnosti** koja daje
    - srednju vrijednost 0 i
    - standardnu devijaciju $\sigma_x^2 + \sigma_z^2$
  - rezultat od prije: za takvu slučajnu varijablu najveću entropiju daje **Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti**
- maksimalna entropija na ulazu u prijemnik

$$H(Y) = \ln\left[\sqrt{2\pi e\left(\sigma_x^2 + \sigma_z^2\right)}\right]\ [\text{nat/simbol}]$$

$$C_1 = \max I(X;Y) = \max\left[H(Y) - \frac{1}{2}\ln\left(2\pi e\sigma_z^2\right)\right] = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\sigma_x^2 + \sigma_z^2}{\sigma_z^2}\right]\ [\text{nat/simbol}]$$

Kapacitet kanala s aditivnim šumom (V)

- ako pretpostavimo da vrijedi $\sigma_x^2 = S$ i $\sigma_z^2 = N$
  - S je srednja snaga signala na izlazu predajnika
  - N je srednja snaga šuma u kanalu

$$C_1 = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{S}{N}\right)\ [\text{nat/simbol}]$$

$$C_1 = \frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\ [\text{bit/simbol}]$$

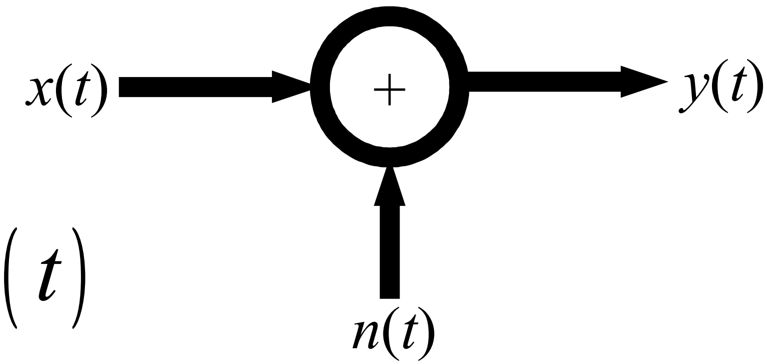
- **rezime**: u kanalu u kojem djeluje aditivni Gaussov šum, a srednja snaga signala na izlazu predajnika i srednja snaga šuma su ograničene, signal na ulazu kanala i signal na izlazu kanala moraju imati Gaussovu razdiobu kako bi brzina prijenosa informacije takvim kanalom bila maksimalna, tj. jednaka kapacitetu tog kanala

Informacijski kapacitet pojasno ograničenog kanala

- problem egzaktnog opisa kontinuiranih signala
  - vrijednost slučajnog kontinuiranog signala $x(t)$ u bilo kojem trenutku je nepredvidiva
  - u bilo kojem trenutku t_k, $x(t_k)$ je slučajna varijabla
  - potrebno je poznavanje statističkih svojstava praktički beskonačnog broja slučajnih varijabli
- rješenje: prikazati kontinuirani signal diskretnim signalom
  - u prelasku s kontinuiranog prikaza signala na diskretni uzorkovanje ima glavnu ulogu
  - promatrani skup signala svodi se na pojasno ograničene signale

AWGN-kanal

- model AWGN-kanala



$$y(t) = x(t) + n(t)$$

- pravilo u praksi za korištenje bijelog šuma u analizi realnih sustava
  - sve dok je širina frekvencijskog pojasa šuma na ulazu sustava znatno veća nego širina prijenosnog pojasa sustava
  - šum možemo modelirati kao bijeli šum.

Teorem o informacijskom kapacitetu AWGN-kanala

- ako signale $x(t)$ i $y(t)$ uzorkujemo sukladno teoremu uzorkovanja,
  - dobivamo diskretne signale koje je moguće prikazati n-dimenzionalnim slučajnim vektorima **X**, odnosno **Y**

$$\mathbf{X}=\left[X_1,X_2,\ldots,X_n\right] \text{ i } \mathbf{Y}=\left[Y_1,Y_2,\ldots,Y_n\right]$$

$$E\left[X_k\right]=0,$$

$$E\left[X_k^2\right]=\sigma_{xk}^2 .$$

$$\mathbf{Z}=\left[Z_1,Z_2,\ldots,Z_n\right]$$

$$E\left[Z_k\right]=0,$$

$$E\left[Z_k^2\right]=\sigma_{zk}^2 ,$$

$$C_Z\left(Z_i,Z_j\right)=0,\ i \neq j$$

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}+\mathbf{Z}$$

Transinformacija u AWGN-kanalu

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X})$$

$$f_x(\mathbf{y}|\mathbf{x}) = f_x(\mathbf{x}+\mathbf{z}|\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{z}) \qquad \phi(\mathbf{z}) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma_{z_k}\sqrt{2\pi}} e^{-z_k^2/\left(2\sigma_{z_k}^2\right)} \right)$$

- komponente šuma međusobno neovisne
- entropija šuma jednaka je zbroju entropija njegovih pojedinačnih komponenata

$$H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{Z}) = -\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mathbf{z}) \log\left(\phi(\mathbf{z})\right) d\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\sigma_{z_k}\sqrt{2\pi e}\right)$$

$$I(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Y}|\mathbf{X}) = H(\mathbf{Y}) - H(\mathbf{Z}) = H(\mathbf{Y}) - \sum_{k=1}^{n} \log\left(\sigma_{z_k}\sqrt{2\pi e}\right)$$

Određivanje maksimalne vrijednosti transinformacije

- svodi se na maksimizaciju entropije $H(\mathbf{Y})$
- $Y_k = X_k + Z_k$
  - na svaku komponentu slučajnog vektora **X** djeluje neovisna Gaussova smetnja

$$\sigma_{y_k}^2 = \sigma_{x_k}^2 + \sigma_{z_k}^2 , \quad k = 1, 2, \ldots , n$$

- entropija $H(\mathbf{Y})$ će biti maksimalna kad su ispunjeni sljedeći uvjeti
  - sve komponente slučajnog vektora **Y** su međusobno neovisne slučajne varijable
  - svaka komponenta ima najveću entropiju pod zadanim uvjetima

Određivanje maksimalne vrijednosti transinformacije (II)

$$I_{\max}(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\sigma_{y_k}\sqrt{2\pi e}\right) - \sum_{k=1}^{n} \log\left(\sigma_{z_k}\sqrt{2\pi e}\right) = \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{\sigma_{y_k}}{\sigma_{z_k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_{x_k}^2}{\sigma_{z_k}^2}\right)$$

- pretpostavka: $\sigma_{x_k} = \sigma_x, \quad \sigma_{z_k} = \sigma_z, \quad k = 1, 2, \ldots, n$

$$I_{\max}(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{\sigma_x^2}{\sigma_z^2}\right)$$

$$I_{\max}(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = \frac{n}{2}\log\left(1+\frac{S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}$$

- ako je slučajni signal **X** pojasno ograničen na pojas $0 \le |f| \le B$ herca - $f_u \ge 2B$ i $n = 2B$

Određivanje maksimalne vrijednosti transinformacije (III)

$$C = \frac{2B}{2} I_{\max}(\mathbf{X};\mathbf{Y}) = B \log\left(1 + \frac{S}{N}\right) [\mathrm{bit/s}]$$

- $C = 2BD$, D je dinamika

$$D = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{S}{N}\right) [\mathrm{bit/uzorak}]$$

- spektralna gustoća snage šuma definiramo kao

$$S_N(f) = \frac{N_0}{2}, \forall f$$

- $N = N_0 B$

$$C = B \log\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right) [\mathrm{bit/s}]$$

Teorem o informacijskom kapacitetu AWGN-kanala (II)

- uz uvjete zadane teoremom
- kanalom je moguće prenositi C bit/s uz proizvoljno malu vjerojatnost pogreške
  - ako se primijeni sustav za kodiranje zadovoljavajuće razine složenosti
- kanalom nije moguće prenositi informaciju brzinom većom od C bit/s,
- a da je pri tome vjerojatnost pogreške proizvoljno mala
  - bez obzira na složenost kodera
- C lakše povećati povećanjem B umjesto S

Primjer određivanja kapaciteta kanala

- telefonski kanal
  - pojasni propust od 300 do 3400 herca
  - pretpostavimo kvantizaciju s 256 razina (L = 256, R = 8)
  - odnos srednje snage sinusnog signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma iznosi 49,8 dB
  - B = 3100 Hz i S/N = 95499
  - C = 51283 bit/s
  - šum kvantizacije nije jedina smetnja u telefonskom kanalu
  - barem 50% krajnjih korisnika ima odnos srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma manji ili jednak 35 dB
  - S/N = 3162, C = 36044 bit/

Učinkovitost prijenosnog pojasa

- idealan sustav: prijenosna brzina $R_b = C$ [bit/s]
- promatramo neki signal $x(t)$ trajanja T
  - pomoću njega se bitovi informacije prenose kanalom

$$S = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} x^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt = \frac{E}{T}$$

- predajnik generira R_b bit/s
  - šalje jedan bit informacije svakih $1/R_b$ sekundi
- srednja energija po svakom bitu $E_b = S/R_b$
  - u idealnom sustavu $S = E_b C$

Učinkovitost prijenosnog pojasa (II)

$$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{E_b}{N_0}\frac{C}{B}\right)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{C/B} - 1}{C/B},$$

- omjer prijenosne brzine R_b i širine prijenosnog pojasa sustava naziva se **učinkovitost prijenosnog pojasa**
  - kako se širina prijenosnog pojasa povećava prema beskonačnosti, omjer E_b/N_0 se približava svojoj donjoj graničnoj vrijednosti

$$\lim_{B \to \infty}\left(\frac{E_b}{N_0}\right) = \log(2) = 0,693 \qquad \lim_{B \to \infty} C = \frac{S}{N_0}\log_2 e$$

Odnos prijenosne brzine i kapaciteta kanala

- $R_b = C$
  - granična vrijednost prijenosne brzine
- $R_b < C$
  - prijenos brzinom koja je manja od kapaciteta kanala moguće je realizirati s po volji malom vjerojatnošću pogrešaka simbola u prijemu
- $R_b > C$
  - prijenos brzinom koja je veća od kapaciteta kanala nije moguće realizirati s po volji malom vjerojatnošću pogrešaka simbola u prijemu
- realni prijenosni sustavi uvijek su projektirani tako da je $R_b < C$ – nužno zbog pouzdanosti sustava

Prijenosna brzina

- smanjenje odnosa srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma, Γ
  - prilikom razmatranja praktičnih prijenosnih sustava u kojima je vjerojatnost pogreške dovoljno mala
  - funkcija dozvoljene vjerojatnosti pogreške i kodnog sustava korištenog u prijenosu
  - određuje učinkovitost realnog kodnog sustava u odnosu na idealni sustav

$$\Gamma = \frac{2^{2C}-1}{2^{2R}-1} = \frac{\left(S/N\right)}{2^{2R}-1}$$

$$R = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{S}{\Gamma N}\right)\left[\text{bit/simbol}\right]$$

$$R_b = B\log\left(1+\frac{S}{\Gamma N}\right)\left[\text{bit/s}\right]$$