Domaća zadaća iz predmeta “Teorija informacije”

ak. godina 2014./2015.

Zadatak 1.16

datum zadavanja zadatka: 15.10.2014.

Tekst zadatka

- Dana je diskretna slučajna varijabla Z koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima 1 - p i p, slijedno gledano. Neka slučajna varijabla X, neovisna od Z, poprima vrijednosti 1,2,...,n s vjerojatnostima $q = [q_1,q_2,...,q_n]$ i neka je $Y = XZ$.

Odredite:

- a) $H(Y)$ u ovisnosti o $H(X)$ i $H(Z)$;
- b) p i q uz uvjet da je $H(Y)$ maksimalno.

Postupak rješavanja

$$Z = [(1-p), p] \qquad X = [q_1, q_2, ..., q_n] \qquad Y = XZ$$

Obzirom da *Z* ima vrijednosti 0 i 1, pomnožen sa *X* koji ima (1,2,...,*n*) daje vrijednosti (0,1,...,*n*)

$$Y = \left[[(1-p)\sum_{i=1}^{n} q_i], pq_1, pq_2, ..., pq_n \right]$$

Postupak rješavanja

a) $H(Y)$ u ovisnosti o $H(X)$ i $H(Z)$

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 q_i$$

$$H(Z) = -[p \log_2 p + (1-p)\log_2(1-p)]$$

$$H(Y) = -\sum_{j=0}^{n} y_j \log_2 y_j$$

Postupak rješavanja

$$H(Y) = -\left[\left((1-p)\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2((1-p)\sum_{i=1}^{n} q_i)\right) + p\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 pq_i\right]$$

Znamo da je $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$

$$H(Y) = -\left[(1-p)\log_2(1-p) + p\sum_{i=1}^{n} q_i\left(\log_2 p + \log_2 q_i\right)\right]$$

$$H(Y) = -\left[(1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p + p\sum_{i=1}^{n} q_i \log_2 q_i\right]$$

Postupak rješavanja

Stoga je konačno rješenje: $H(Y) = H(Z) + pH(X)$

b) Izračunati *p* i *q* uz uvjet da je $H(Y)$ maksimalan

Za $q_i = \dfrac{1}{n}$, $i = 1,2,...,n$ je $H(X)$ najveći

te iznosi: $H(X) = \log_2 n$

Postupak rješavanja

$$H(Y) = -\left[(1-p)\log_2(1-p) + p\log_2 p + pn\frac{1}{n}\log_2\frac{1}{n}\right]$$

$$= -\left[\log_2(1-p) - p\log_2(1-p) + p\log_2 p + p\log_2\frac{1}{n}\right]$$

Maksimum neke funkcije dobivamo kada njenu prvu derivaciju izjednačimo s nulom

$$\frac{-1}{(1-p)\ln 2} - \log_2(1-p) - \frac{-p}{(1-p)\ln 2} + \log_2 p + \frac{p}{p\ln 2} + \log_2\frac{1}{n} = 0$$

Postupak rješavanja

$$\frac{-(1-p)}{(1-p)\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}-\log_2(1-p)+\log_2 p-\log_2 n=0$$

$$\log_2\frac{p}{n(1-p)}=0$$

Znamo da $\log x=0$ za $x=1$

$$\frac{p}{n(1-p)}=1$$

$$p=n(1-p)$$

$$p=\frac{n}{n+1}$$

Konačno rješenje zadatka

- a)

$$H(Y) = H(Z) + pH(X)$$

- b)

$$p = \frac{n}{n+1} \quad , \; q = [q_1, q_2, \ldots, q_n] \; \text{ gdje je } \; q_i = \frac{1}{n}$$