Zadatak – 1:
Dan je binarni blok kôd K s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Odredite tablicu sindroma koda K za sve moguće vektore pogreške.
ii) Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}$'=[11010]. Je li moguće jednoznačno odrediti koja je kodna riječ poslana?

Zadatak – 2:
Dan je binarni blok kôd K $[n, k]$=[7, 3] s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & \_ & \_ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \_ & \_ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \_ & \_ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Odredite sve moguće vrijednosti dvaju stupaca koji nedostaju u matrici $\mathbf{H}$ uzimajući pri tome da kodna riječ [0110011] pripada kodu K i da je minimalna distanca koda 4, tj. $d(K)$=4.
ii) Dekodirajte primljenu kodnu riječ $\mathbf{c}$'=[0110111].

Zadatak – 3:
Dan je Hammingov kôd K s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Pokažite da su $\mathbf{c}_1$=[0010011] i $\mathbf{c}_2$=[0001111] kodne riječi koda K i odredite Hammingovu udaljenost između njih.
ii) Neka je poslana kodna riječ $\mathbf{c}$ i neka je primljena kodna riječ $\mathbf{c}'=\mathbf{c}+\mathbf{e}$. Dokažite da sindrom $\mathbf{s}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{H}^T$ jedino ovisi o vektoru pogreške $\mathbf{e}$.
iii) Ispišite sve sindrome za sve moguće vektore pogreške čija je težina ≤ 1.

Zadatak – 4:
Dan je binarni ciklični blok kôd K [15, 7] s generirajućim polinomom $g(x)=x^8+x^7+x^6+x^4+1$.
i) Dokažite da $g(x)$ može biti generirajući polinom koda K.
ii) Na ulazu kodera danog koda pojavljuje se poruka čiji je polinomski zapis $d(x)=x^4+x+1$. Odredite polinomski i binarni zapis kodne riječi u sistematičnom obliku.
iii) Je li $c(x)=x^{14}+x^5+x+1$ kodna riječ koda K?

Zadatak – 5:
Dan je binarni ciklični blok kôd K $[n, k]$ koji može ispraviti jednostruku pogrešku u primljenoj kodnoj riječi. Sindromi ($s_1 - s_8$) za dani kôd su:
s_1 = 10100; s_2 = 01010; s_3 = 00101; s_4 = 10000
s_5 = 01000; s_6 = 00100; s_7 = 00010; s_8 = 00001
Odredite:
i) generirajuću matricu $\mathbf{G}=[\mathbf{I} \mid \mathbf{A}]$ danog koda.
ii) $[n, k]$.
iii) generirajući polinom koda K.
iv) sve kodne riječi danog koda K.
v) kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}$'=[01101011].

Zadatak – 6:
Izvorište generira 128 poruka, iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola $\mathbf{X} = \{x_0 \ldots, x_{127}\}$, koje se kodiraju binarnim kodom (Shannon-Fano!). Poruke se prije odašiljanja u kanal kodiraju Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja. Na ulazu dekodera kanala pojavljuje se slijed bitova 11110110000100110l... Odredite prvu poruku (**d**) koja je odaslana. **Napomena:** Kontrolni bitovi u kodnoj riječi nalaze se na pozicijama 1, 2, 4, 8,...

Zadatak: Neka je K linearan ciklički kod, kojem pripada $011011 \in K$

a) Ispišite kodne riječi u bin. zapisu i polinomskom

b) $g(x) = ?$

c) $d = [11] \Rightarrow c = ?$

$$r(x) = \frac{x^{n-k} \cdot d(x)}{g(x)}$$

Ako se radi o većem kodu...

$$\boxed{c = d(x) + r(x)}$$

a) $K = \begin{bmatrix} 011011 \\ 110110 \\ 101101 \\ 000000 \end{bmatrix}$; $K = \{0, x^4+x^3+x+1, x^4+x^2+x, x^5+x^3+x^2+1\}$

b) $g(x) =$ najmanji stupanj $= x^4+x^3+x+1$

c) Radi

$r = 4$

$n = 2$

$r = n - k$

$k = 6$

$$\frac{x^4(x+1)}{x^4+x^3+x+1} \Rightarrow x^5 + x^4 : x^4+x^3+x+1 = $$

$x^3 + x$

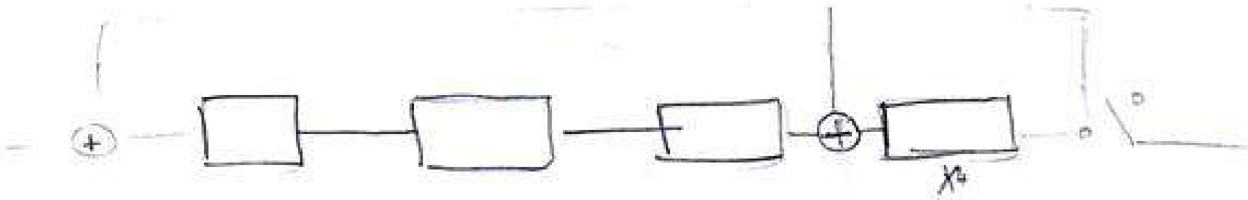
$[0110]$

$c = [11|0110]$

Generirajući polinom definira koder. Ciklički koder od mod 2 zbrajala i posmačni registara

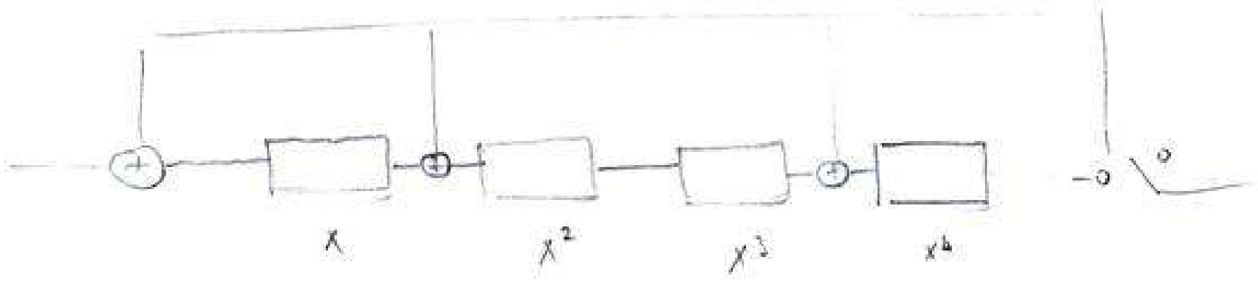
Primjer:

$g(x) = x^4 + x^3 + 1$



Ako x^1 postoji u polinomu $g(x) \Rightarrow$ stavi mod 2 zbrajalo

$g(x) = x^4 + x^3 + x + 1$



Primjer

$g(x) = x^4 + x^3 + 1$ | Za DZ ?

$r = n-k$ $\quad n-k=4$

$r=4$

Primjer

- $g(x) = x^3 + x^2 + 1$

$[7,k] \Rightarrow [7,4]$

$r=3$

odredite sindrom za prvu primljenu kodnu riječ ako dolazi sljedeći slijed bitova

1001110 0000....

$$S(c'(x)) = \frac{x^{n-k} \cdot c'(x)}{g(x)}$$

$$g(x) = (x^6 + x^3 + x^2 + x) \cdot x^3$$

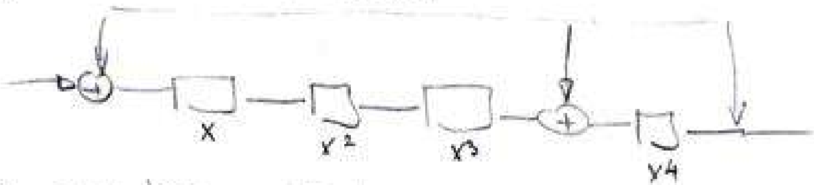
$$(x^9 + x^6 + x^5 + x^4) : (x^6 + x^3 + x^2 + x) = x^3 = S$$

$$x^9 + x^6 + x^5 + x^4$$

$\vdots$

$$S = x^2 + x = 110$$

Primjer Zadan je ciklični koder za $[15,k]$



Odredite prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu, ako je na ulazu

10101010101 0101010....

$c = ?$ $\quad [d \mid r]$

$g(x) = x^4 + x + 1$ $\qquad r = 4$ $\qquad r = n-k$

$r = 15-4$

$r = 11$ Uzimamo prvih 11.

$$r(x) = \frac{x^{n-k} \cdot d}{g(x)} = \frac{x^4 \cdot (x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)}{x^4 + x + 1}$$

$$(x^{14} + x^{12} + x^{10} + x^8 + x^6 + x^4) : (x^4 + x + 1) = x^{10}$$

ZADACI

1. Zadan je binarni blok kod K s matricom H:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

c' - primljena

a) odredite tablicu sindroma koda K za sve moguće vektore pogreške.

$$\left.\begin{matrix} n=5 \\ r=3 \end{matrix}\right\} k=2$$

Vektor pogreške (e)	sindrom
00000	000
00001	101
00010	001
00100	111
01000	110
10000	100
10100	011

$s = c' \cdot H^T$

$s = (c+e) \cdot H^T$

$s = \underbrace{c \cdot H^T}_{0} + e \cdot H^T$

$s = e \cdot H^T$

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena $c' = [11010]$

$$s = c' \cdot H^T = [11010] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [011] \rightarrow e = 10100$$

$e = c' - c$

$c = c' - e$

$c = [11010] - [10100]$

$c = [01110]$

- Nije moguće jer ovisi o tablici

3.

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a.)

$$s_1 = c_1 \cdot H^T = [0010011] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [000]$$

$$s_2 = c_2 \cdot H^T = [000]$$

$$d_{min} = 3$$

b.)

$$c' = c + e$$

$$s = c' \cdot H^T$$

$$s = (c+e) \cdot H^T = \underbrace{CH^T}_{0} + e \cdot H^T = e \cdot H^T$$

c.) Ispišite sve sindrome čija je težina ≤ 1

e	s
0000000	000
0000001	001
0000010	010
0000100	100
0001000	111
0010000	011
0100000	101
1000000	110

5. Iz sindroma:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10100 \\ 01010 \\ 00101 \end{bmatrix}$$

Ispravi jednostruku pogrešku $\Rightarrow H^T = S$

$$G = [I \mid A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b.) $[n, k]$

$n = 8$
$k = 3$ $\quad r = 5$

c.) polinom: $g(x) = 1 + x^2 + x^5$

d.) $d = [011]$

$c = [01101111]$

e.) $S = c' \cdot H^T = [01101011] \cdot \begin{bmatrix} 10100 \\ 01010 \\ 00101 \\ 10000 \\ 01000 \\ 00100 \\ 00010 \\ 00001 \end{bmatrix} = [00100]$

$d = [0111$

6. $N = 128 = 2^7$ $k = 7$ duljina bitova koja ulazi u koder kanala

$P_i = \frac{1}{N}$

slijed bitova $c' = 1111011000010011 01 \ldots$

a) Odredite prvu poruku koja je odaslano

c_1	c_2	d_1	c_3	d_2	d_3	d_4	c_4	d_6	d_7	d_8	
1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1
	1	1	-	-	1	1	-	-	0	0	0
			1	0	1	1	-	-	-	-	1
							0	0	0	0	0

$0101 = 5_{(10)}$

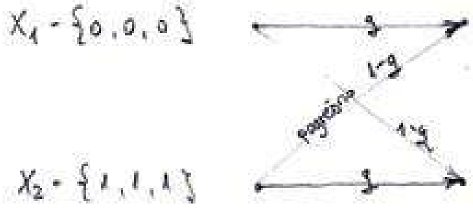
$c = 11111110000$

$d = 1011000$

Primjer
2 kodne riječi

Na prijemnoj strani se kod dekodiranja koristi pravilo minimalne udaljenosti. Odredite vjerojatnost pog. dekodiranja.

$P_g = 0.2$



000	111
001	110
010	011
100	101

Primjer: Zadan je binarni blok kod $K[n,2]$. Zadano je $d_{min} = 5$. Odredite minimalnu duljinu kodne riječi n.

$t = \frac{d_{min}-1}{2}$

$\boxed{t=2}$

$M = 2^k$

$$\boxed{2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}}$$

Iz ovoga odredimo $\boxed{n=7}$

Primjer Zadan je $[k+1, k]$ s parnim paritetom:

a.) Odredite sve kodne riječi koda $\overset{n\ k}{[4,3]}$

b) Koje pogreške može otkriti ovakav kod

c) Izračunajte nedetektiranih pogrešaka, na jednom bitu $p_g = 0.04$

a.) $M = 2^k = 2^3 = 8$

000 0
001 1
010 1
011 0
100 1
110 0
111 0

b) jednostruke i dvostruke

c) $P_{np} = \binom{4}{2} p^{2} (1-p_g)^2 + \binom{4}{4} p^4 (1-p_g)^0 = \boxed{8.8 \cdot 10^{-3}}$

SINDROMSKO

Vektor pogreške

ST. NIZ

H

ORTOG.

DUALNI KOD

C

$e = c - c'$

$\hookrightarrow$ SKALARNI UMNOŽAK = 0

Svi vektori jednostruke pogreške

00000 00000   11100   00011   11011   kodne riječi

00001 × 00001

00010   00010

Zadatak: Zadan je bin. kod [7,4] s generirajućom matricom

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(J, A)

a) $H = [A^T | I] = ?$

b) $d = ?$

c) Perfektan kod = ?

d) odrediti c ako je $c' = 1110100$

a)
$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^T

b) $d = ?$

U Matrici H naći min. broj stupaca da se dobije nula. To će biti distanca koda.

Zbroj 3 stupca daje 0.

$\boxed{d(k) = 3}$

c) $M = 16$

$$M = \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}} = \frac{128}{\binom{7}{0} + \binom{7}{1}} = \frac{128}{8} = 16$$

Perfektan kod

$$t = \left[\frac{d_k - 1}{2}\right] = \frac{3-1}{2} = 1$$

d) Primljena kodna riječ $c' H^T = 0$

$$[1110101] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0\,0\,1]$$ Idem u H i zadnji red

Kod: $K \cdot G - H$

Dualni kod: $K^T \cdot G \rightarrow H^T$

sindrom: $\boxed{s = c' \cdot H^T}$

2. Zadan je bin. kod

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$[n,k] = [2,4]$

a.) Pronađite stand. niz koda K

b.) Tablica sindroma koda K

4. kodne riječi:

00

01

10

11

0000 0000 0101 1010 1111

1000

Sve kodne riječi

0000

0101

1010

1111

③ Za zadani kod K dana je matrica H^T

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odredite sve kodne riječi koda K?

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$n=4$

$c[abcd] \cdot H^T = 0$

$$c[abcd] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$a+b+d=0$

$b+c+d=0$

$a+c=0$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer: Linearni binarni blok kod K

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$c' \cdot H^T = S$

$$[110110] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [110]$$

$c' = [11011 0]$

$c = ?$

$c = [100110]$

HAMMINGOV KOD

- perfektan kod - sve kombinacije kodnih riječi padaju u sfere c_1 i c_2

a) $c_0 \, c_1 c_2 \quad c_4$

b) 1. KONTROLNI BIT KONTROLIRA JEDAN BIT, PA JEDAN NE

c.) KONTROLNI BIT NEKONTROLIRA ZAŠTITNE BITOVE

- Primjer: Recimo da smo primili

$c' = [0110111]$

$\_ \ \_ \ \_ \ \underline{0} \ \_ \ \underline{1} \ \underline{1} \ \underline{0} \ \underline{1} \ \underline{1} \ \underline{1}$

$\_ - 0 - 1 - 0 - 1 - \Big| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}$ 5 mjesto - greška

- Kako dobiti generirajuću matricu Hammingovo koda

$$G = [I \mid A] = ? \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

K_1 - kontrolni bitovi

Primjer: Hammingov kod $[\overset{n}{5}, \overset{k}{2}]$, odrediti

a) $G = [I \vdots A]$

$r = n - k$

$r = 3$

b.) $c = ?$

c) Linearnost koda

a.) $\_ \ \_ \ \_ \ \_ \ \_$

$K_1 = m_1 \oplus m_2$

$K_2 = m_1$

$K_4 = m_2$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

00	00000
01	01101
10	10111
11	11011

c.) Kod je linearan

Primjer: Zadan je Hamming [7,4], kodne riječi sa brisanjem simbola. Odredite

a) c=? ako je primljeno c=[101?01?]

Primjer

$[n,k]=[6,3]$

$c=[\underbrace{d_1 d_2 d_3}_{\text{poruka}} \underbrace{c_4 c_5, c_6}_{\text{zaštita}}]$

$c_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3$

$c_5 = d_1 \oplus d_3$

$c_6 = d_2 \oplus d_3$

$H=[r \times 2^{r-1}]$

$c' = [010111]$

Odredite primljenu riječ $c=?$

$H=[A^T \mid I]$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix} \qquad H=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$c'\cdot H^T=[0\,1\,0]^T$$

CIKLIČKI KOD

a) Linearnost

$g(x)$ = polinom

$g(x) = x^{n-k} + \dots + 1$

Polinom definira generirajuću matricu G

· Kako napraviti stand. $G=[I \mid A]$

$g(x) = x^3 + x^2 + 1$ $[7,4]$

1. korak

$$\begin{bmatrix} \\ \quad g(x) \end{bmatrix} \Rightarrow G=\begin{bmatrix} \\ 0&0&1&1&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix} \oplus$$

→ dok je tu 1

2. korak $G=[g(x) \mid \;]$

$$G=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&1\end{bmatrix}$$ Matrica u stand. obliku