Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 8. veljače 2016.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, svaki netočno odgovoreni -2 boda, a neodgovoreni zadaci donose 0 bodova.

Zadatak 1: Dan je linearni binarni blok kod *K* čija je matrica provjere pariteta

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako je primljena kodna riječ c'=[1 1 0 1 1 0] odredite kodnu riječ koja je poslana.

a) [1 1 0 1 1 1] b) [1 0 0 1 1 0] c) [0 1 0 1 1 0] d) [1 0 0 1 1 0] e) ništa od navedenog

-isto kao i pod d)

Postupak rješavanja:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S(\mathbf{c}') = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadatak 2: Binarni blok kôd *K* [*n*, 2] ima minimalnu Hammingovu udaljenost $d_{\min} = 5$. Odredite minimalnu duljinu kodne riječi – *n*.

a) 5 b) 6 c) 7 d) 4 e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$M = 2^k$$

$$t = \left\lfloor \frac{d(K)-1}{2} \right\rfloor$$

$M = 4$ i $t = 2$.

$$M \le \frac{2^n}{\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{t}}$$

$$4 \le \frac{2^5}{\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}$$, ne vrijedi nejednakost

$$4 \le \frac{2^6}{\binom{6}{0}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2}}$$, ne vrijedi nejednakost

$$4 \le \frac{2^7}{\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}}$$, vrijedi nejednakost tako da je rješenje $n = 7$

$n = 7$

Zadatak 3: Dan je Hammingov kôd K s duljinom kodne riječi $n = 3$ bita. Odredite vjerojatnost pogrešnog dekodiranja p_{pd}, ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu $p_g = 10^{-3}$.

a) $p_{\mathrm{pd}} = 2{,}998 \cdot 10^{-6}$ b) $p_{\mathrm{pd}} = 2{,}001 \cdot 10^{-6}$ c) $p_{\mathrm{pd}} = 1{,}001 \cdot 10^{-6}$

d) $p_{\mathrm{pd}} = 4{,}001 \cdot 10^{-6}$ e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Radi se o Hammingovom kodu koji može ispraviti jednostruku pogrešku, pa do pogrešnog dekodiranja može doći kad se dogodi dvostruka ili trostruka pogreška. Ukupna vjerojatnost pogrešnog dekodiranja p_{pd} jednaka je zbroju vjerojatnosti pojave dvostruke pogreške i vjerojatnosti trostruke pogreške, tj.

$$p_{\mathrm{pd}} = p_2 + p_3 = \binom{3}{2} {p_g}^2 (1 - p_g) + \binom{3}{3} {p_g}^3$$

$$p_{\mathrm{pd}} = 2{,}998 \cdot 10^{-6}$$

Zadatak 4: Dan je binarni kôd [n, k] = [6, 3] čije su kodne riječi oblika $d_1d_2d_3c_4c_5c_6$ i gdje si d_i-ovi i c_i-ovi bitovi poruke, odnosno, bitovi zaštite. Bitovi zaštite proračunavaju se na sljedeći način:

$$c_4 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3$$
$$c_5 = d_1 \oplus d_3$$
$$c_6 = d_2 \oplus d_3$$

Ako je primljena kodna riječ **c**´ = [010111] , odredite kodnu riječ koja je poslana.

a) 110111 b) 010110 c) 010011 d) 010101 e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$[n,\ k] = [6,\ 3]$$

$$\mathbf{c}' = [010111]$$

$$\mathrm{S}(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{G} = [\ \mathbf{I}_{\mathrm{k}}\ |\ \mathbf{A}\ ]$$

$$\mathbf{G} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{H} = [\ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\ |\ \mathbf{I}_{\mathrm{n\text{-}k}}\ ]$$

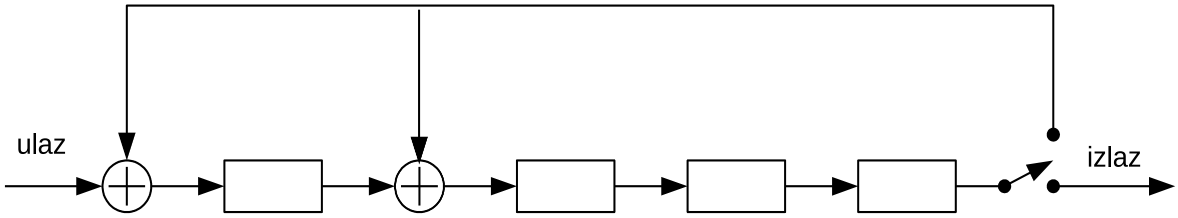
$$\mathbf{H} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathrm{S}(\mathbf{c}') = [010111] \cdot \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [010]$$

Iz sindroma vidimo da je greška na 5. bitu, dakle, kodna riječ koja je poslana je 010101.

Zadatak 5: Na slici je dan koder za ciklični kôd [15, *k*]. Kodirajte slijed 10001001010 koristeći metodu ciklične provjere zalihosti.



a) 100010010100011   b) 100010010100111   c) 100010010100010

d) 100010010101010   e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Iz slike kodera lako možemo očitati generirajući polinom:

$g(x) = x^4 + x + 1$

i isto tako (budući da je stupanj polinoma jednak četiri) da se radi o cikličnom kodu [15,11].

Kôd je [15,11] dakle prvi kodirani slijed dobit će se iz prvih 11 bitova ulaznog slijeda, tj. iz "10001001010".

Jedno od temeljnih svojstava cikličnih kodova je da zaštitne bitove neke kodne riječi možemo dobiti koristeći metodu ciklične redundantne zaštite, tj. vrijedi

$$r(x) = x^{n-k} \cdot d(x) \bmod g(x)$$

U našem slučaju to bi bilo:

$$\frac{x^{n\text{-}k} \times d(x)}{g(x)} = \frac{x^4\left(x^{10} + x^6 + x^3 + x\right)}{g(x)} = x^{10} + x^7 + x^4 + 1 \quad \text{uz ostatak} \quad x + 1$$

Vidimo da ostatak pri dijeljenju iznosi x+1, odnosno [0011] iz čega slijedi da je tražena kodna riječ:

c = [100010010100011]

Zadatak 6: Signal $x(t)$ čija je raspodjela amplituda dana normalnom razdiobom gustoće vjerojatnosti sa srednjom vrijednosti jednakom nuli prenaša se do odredišta kontinuiranim komunikacijskim kanalom s ograničenim spektrom frekvencija $0 \le f \le B$, B = 4 kHz. Na signal spektralne gustoće snage $S_0(f) = \frac{S_0}{2} = 0,25 \cdot 10^{-3}$ W/Hz, $\forall f \in \mathbb{R}$ aditivno djeluje bijeli šum spektralne gustoće snage $N_0(f) = N_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ W/Hz, $\forall f \ge 0$. Kolika je količina energije potrebna za prijenos jednog bita informacije?

a) $1,445 \cdot 10^{-2}$ W/bit b) $1,445 \cdot 10^{-4}$ W/bit c) $1,445 \cdot 10^{-6}$ W/bit

d) $1,445 \cdot 10^{-8}$ W/bit e) ništa od navedenog

Mjerne jedinice bi trebale biti Ws.

Postupak rješavanja:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_0(f)df = \int_{-B}^{B} S_0(f)df = \frac{S_0}{2} \cdot 2B = 0,25 \cdot 10^{-3} \cdot 8 \cdot 10^{3} = 2\,\text{W}$$

Budući je kapacitet kanala definiran kao maksimalni broj bita koji se može prenijeti po kanalu u jedinici vremena, to će energija potrebna za prijenos jednog bita informacije biti dana kao:

$$\frac{P}{C} = \frac{S_0/2 \cdot 2B}{C}$$

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S_0/2 \cdot 2B}{N_0/2 \cdot 2B}\right)$$

$$\frac{S_0 \cdot B}{C} = \frac{S_0 \cdot B}{B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S_0 \cdot B}{N_0 \cdot B}\right)} = \frac{S_0}{\log_2\left(1 + \frac{S_0}{N_0}\right)} = 1,445 \cdot 10^{-4} \text{ W/bit}$$

Zadatak 7: Promatrajte AWGN kanal širine prijenosnog pojasa B Hz. Na ulazu kanala djeluje signal $x(t)$ srednje snage S [W], a šum u kanalu ima spektralnu gustoću snage $S_N(f) = N_0/2$ $\forall f \in$ **R**. Odredite gornju granicu kapaciteta tog kanala ako se širina prijenosnog pojasa povećava do beskonačnosti.

a) 0 [bit/s] b) $\frac{S}{N_0 \ln 2}$ [bit/s] c) $\frac{N_0 B}{S}$ [bit/s]

d) $\log_2\left(1 + \frac{S}{N_0 B}\right)$ [bit/s] e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$y(t)=x(t)+n(t)$

Relacija za kapacitet kanala širine prijenosnog pojasa *B*, uz spektralnu gustoću šuma definiranu kao

$$S_N(f)=\frac{N_0}{2}, \forall f \in R$$

uz srednju snagu signala *S* [W] je:

$$C = B\log_2(1+\frac{S}{N_0 B}) \quad \text{[bit/s]}$$

Promatrat ćemo kapacitet kanala kao funkciju širine kanala *C*(*B*) i ispitati ćemo rubne točke (limes za 0 i za beskonačno).

Za širinu prijenosnog pojasa *B* = 0 Hz intuitivno zaključujemo da je tada kapacitet kanala jednak nuli, ali i matematički zaključujemo:

$$C_0 = \lim_{B\to 0} B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right) = 0$$

Jer je $\lim_{B\to 0}\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right)^B = 1$, a $\log_2(1) = 0$ (L' Hospitalovo pravilo)

Za širinu kanala $B=\infty$ Hz slijedi:

$$C_\infty = \lim_{B\to\infty} B\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right) = \lim_{B\to\infty}\log_2\left(1+\frac{S}{N_0 B}\right)^B$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Supstitucija $x=\frac{N_0 B}{S}$

$$C_\infty = \lim_{x\to\infty}\log_2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{N_0 B}{S}}\right]^{\frac{S}{N_0}} = \lim_{x\to\infty}\log_2\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{\frac{S}{N_0}} = \log_2 e^{\frac{S}{N_0}}$$

$$C_\infty = \frac{S}{N_0}\log_2 e = \frac{S}{N_0}\frac{\ln e}{\ln 2} = \frac{S}{N_0 \ln 2}\left[\text{bit/s}\right]$$

Kad se širina prijenosnog pojasa navedenog AWGN kanala poveća do beskonačnosti, njegov kapacitet poprima iznos $\frac{S}{N_0 \ln 2}$ [bit/s].

Zadatak 8: Govorni signal se na ulazu nekog prijenosnog sustava uzorkuje frekvencijom uzorkovanja f_u = 8 kHz, a potom kodira s 8 bita po uzorku. Omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma u kanalu iznosi 30 dB. Odredite potrebnu širinu prijenosnog pojas, ako se šum u kanalu poveća za 3 dB.

a) 1,995 kHz b) 5,217 kHz c) 7,133 kHz d) 6,421 kHz e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako se šum u kanalu poveća za 3 dB, tada vrijedi:

$$3\,\mathrm{dB} = 10\cdot\log N_2 - 10\cdot\log N_1 = 10\cdot\log\frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = 1{,}9953$$

Temeljem frekvencije uzorkovanja f_u i broja bita po uzorku r možemo dobiti informacijsku brzinu

$$R = f_u \cdot r = 64\ \mathrm{kbit/s}\,.$$

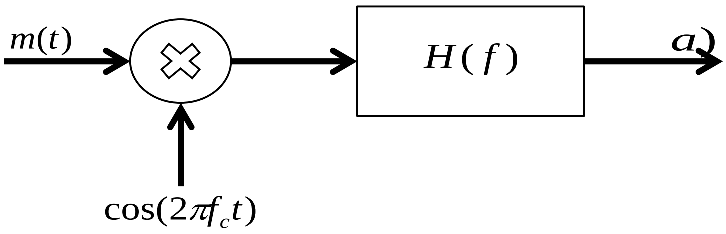
Kapacitet kanala C mora biti veći ili jednak informacijskoj brzini R, te zaključujemo, budući da je širina pojasa proporcionalna s kapacitetom kanala, da je potrebna širina prijenosnog pojasa ona koju dobijemo za $C = R$ i iznosi:

$$B = \frac{C}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_2}\right)} = \frac{C}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_1}\cdot\frac{N_1}{N_2}\right)} = \frac{C}{\log_2\left(1+\frac{1000}{1{,}9953}\right)} = 7{,}133\,\mathrm{kHz}$$

Zadatak 9: Signal $m(t) = 4\cos(2\pi f_1 t) + 4\cos(2\pi f_2 t)[V],\ f_1 = f_2/2$

dovodi se na ulaz sklopa sa slike. Odredite snagu signala na izlazu sklopa (slika, točka a) čija je prijenosna funkcija:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| = f_c - f_2 \\ \frac{1}{4}, & |f| = f_c - f_1 \\ \frac{1}{2}, & |f| = f_c \\ \frac{3}{4}, & |f| = f_c + f_1 \\ 1, & |f| = f_c + f_2 \end{cases}$$



a) 5,25 W b) 3,25 W c) 16 W d) 8 W e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Signal $x(t)$ na ulazu sklopa dan je sljedećim izrazom:

$$x(t) = S_u\left[H(f)\right]^2$$

$$\begin{aligned} x(t) &= m(t)\cos(2\pi f_c t) \\ &= 4\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_c t) + 4\cos(2\pi f_2 t)\cos(2\pi f_c t) \\ &= 2\left[\cos 2\pi t\left(f_c - f_1\right) + \cos 2\pi t\left(f_c + f_1\right)\right] + 2\left[\cos 2\pi t(f_c - f_2) + \cos 2\pi t(f_c + f_2)\right] \end{aligned}$$

Nakon prolaska kroz sustav, na izlazu (u točki a)), signal se sastoji od umnožaka kosinusnih komponenata s pripadajućim vrijednostima prijenosne funkcije. Drugim riječima, na izlazu ću se pojaviti signal:

$$a(t)=\frac{3}{4}\cdot 2\cos 2\pi t(f_c+f_1)+1\cdot 2\cos 2\pi t(f_c+f_2)+\frac{1}{4}\cdot 2\cos 2\pi t\left(f_c-f_1\right)+1\cdot 2\cos 2\pi t(f_c-f_2)$$

Temeljem navedenog izraza, možemo izračunati srednju snagu signala kao:

$$P=\frac{\left(\frac{3}{4}\cdot 2\right)^2+\left(1\cdot 2\right)^2+\left(\frac{1}{4}\cdot 2\right)^2+\left(1\cdot 2\right)^2}{2}=5,25\text{ W}$$

Zadatak 10: Na ulaz linearnog i vremenski nepromjenjivog sustava čija je karakteristika $H(f)=0,1\cdot e^{j\pi/4},\forall f\in R$ dovodimo pravokutni impuls energije 0,1 mWs. Pravokutni impuls definiran je sljedećim izrazom:

$$x(t-t_0)=\begin{cases}A\ \text{ za }\ 0\le\left|t-t_0\right|<\tau/2\\ 0\ \text{ za }\ \left|t-t_0\right|>\tau/2\end{cases},\quad t\in R$$

Odredite koliko iznosi energija signala na izlazu zadanog sustava.

a) 10^{-5} Ws b) 10^{-4} Ws c) 10^{-3} Ws d) 10^{-6} Ws e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

$$X(f)=A\tau\frac{\sin(2\pi f\tau/2)}{2\pi f\tau/2}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|X(f)\right|^2=A^2\tau=0,1\cdot 10^{-3}$$

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)=A\tau\frac{\sin(2\pi f\tau/2)}{2\pi f\tau/2}\cdot 0,1\cdot e^{j\pi/4}$$

$$\begin{aligned}E(y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|Y(f)\right|^2 df\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left|A^2\tau^2\cdot\frac{\sin^2(2\pi f\tau/2)}{(2\pi f\tau/2)^2}\cdot 0,01\cdot e^{j\pi/2}\right|df\\&=0,01\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left|A\tau\cdot\frac{\sin(2\pi f\tau/2)}{2\pi f\tau/2}\right|^2 df\end{aligned}$$

$$\left|e^{ja}\right|=1$$

$$
\begin{aligned}
E(y) &= 0,01 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left| A\tau \cdot \frac{\sin(2\pi f \tau / 2)}{2\pi f \tau / 2} \right|^2 df \\
&= 0,01 \cdot E(x) \\
&= 0,01 \cdot A^2 \tau \\
&= 0,01 \cdot 0,1 \cdot 10^{-3} \\
&= 10^{-6}
\end{aligned}
$$

$$E(y) = 10^{-6}\,\mathrm{Ws}$$