Martina Terlević
0036464491

3. DZ TINF

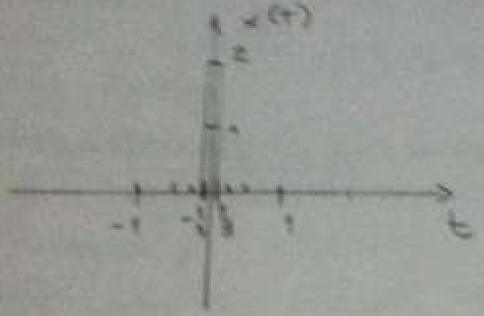
Zadatak 1.

$$x(t) = \begin{cases} A, & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \\ 0, & inače \end{cases}$$

$A = 2$,
$\tau = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$

$\tau = \frac{1}{4}$:

$$x(t) = \begin{cases} 2, & t \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right] \\ 0, & inače \end{cases}$$



$$X(f) = A\tau \cdot \frac{\sin(2\pi f \tau/2)}{2\pi f \tau/2}$$

$$X(f) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\left(f \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{f \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(f \cdot \frac{\pi}{4}\right)}{f \cdot \frac{\pi}{4}}$$

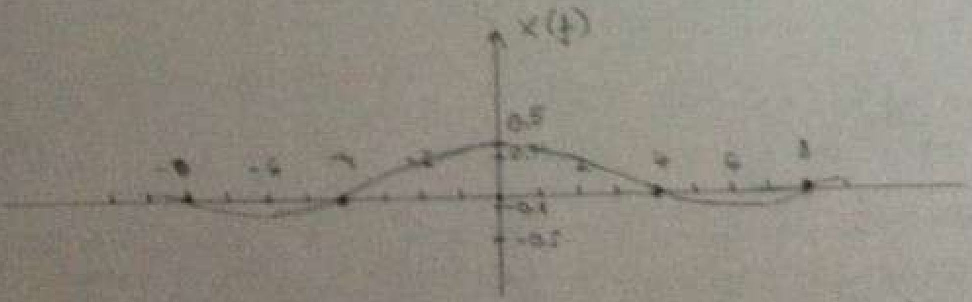
$X(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

$X(4) = X(8) = X(12) = \ldots = 0$

$X(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{1}{\pi}$

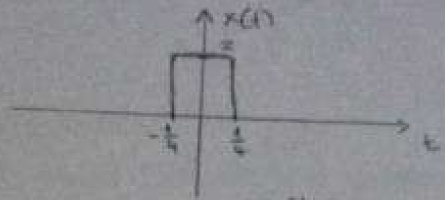
$X(-2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$

$X(6) = X(-6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{3\pi} = \frac{-1}{3\pi}$



Za svaki f koji je višekratnik broja 4 vrijednost spektra je 0

$\tau = \frac{1}{2}$: $x(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



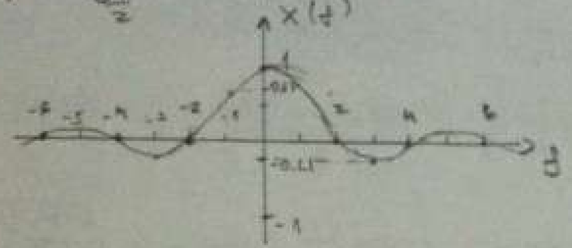
$$X(f) = A\tau \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi f \tau}{2}\right)}{\frac{2\pi f \tau}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi f}{2}\right)}{\left(\frac{\pi f}{2}\right)}$$

$$X(0) = \frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(f\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = 1$$

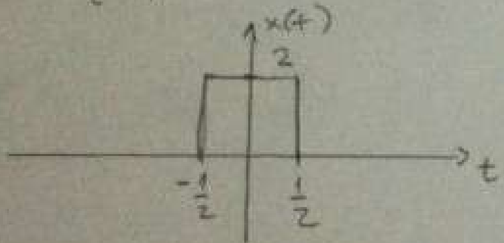
$X(2) = X(4) = X(6) = \ldots = 0$, za svaki višekratnik broja 2 vrijednost spektra je 0

$X(1) = \frac{2}{\pi} = X(-1)$

$X(3) = \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-2}{3\pi} = X(-3)$



$\tau = 1$: $x(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-1/2, 1/2] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



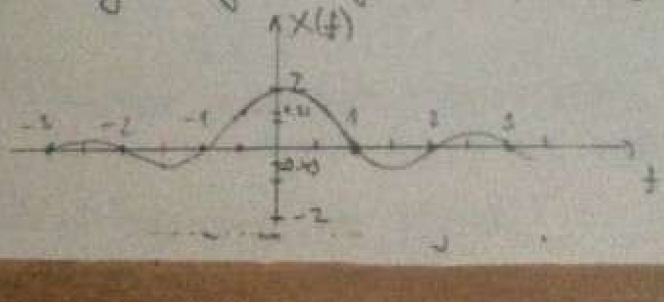
$$X(f) = 2 \cdot \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

$X(0) = 2 \cdot 1 = 2$

$X(1) = X(2) = X(3) = \ldots = 0$, za svaki cjelobrojni f vrijednost spektra je 0

$X(1/2) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

$X(3/2) = 2 \cdot \frac{-1}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{-4}{3\pi}$



Što je signal širi u vremenskoj domeni, to je uži u frekvencijskoj.
Širine signala u vremenskoj i frekvencijskoj domeni su obrnuto proporcionalne.

Heisenbergovo načelo neodređenosti kaže kako što je koncentriranija funkcija $f(x)$ to će njen spektar biti raspršeniji.
Izvor: en.wikipedia.org/wiki/Fourier_transform#Uncertainty_principle

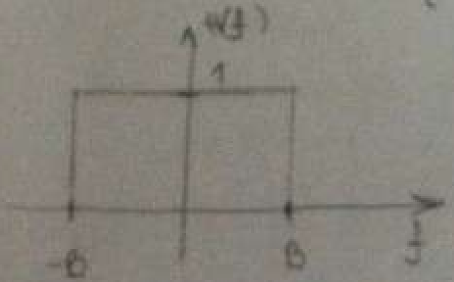
Zadatak 2.

Teorem o uzorkovanju:

- Pojasno ograničeni signal konačne energije, $x(t), t \in \mathbb{R}$, čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B herca ($X(f) = 0$ za $|f| > B$), u potpunosti je i na jednoznačan način opisan pomoću vrijednosti tog signala uzetih u diskretnim vremenskim trenucima $T_n = n/(2B)$, gdje je n cijeli broj, a B je gornja granična frekvencija signala;
- Pojasno ograničeni signal $x(t)$ konačne energije, čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B herca ($X(f) = 0$ za $|f| > B$) moguće je u potpunosti i na jednoznačan način rekonstruirati na temelju poznavanja njegovih uzoraka uzetih u diskretnim trenucima međusobno razmaknutim za $1/(2B)$ sekundi.

Prvi dio definicije odnosi se na predajnik, drugi na prijemnik.

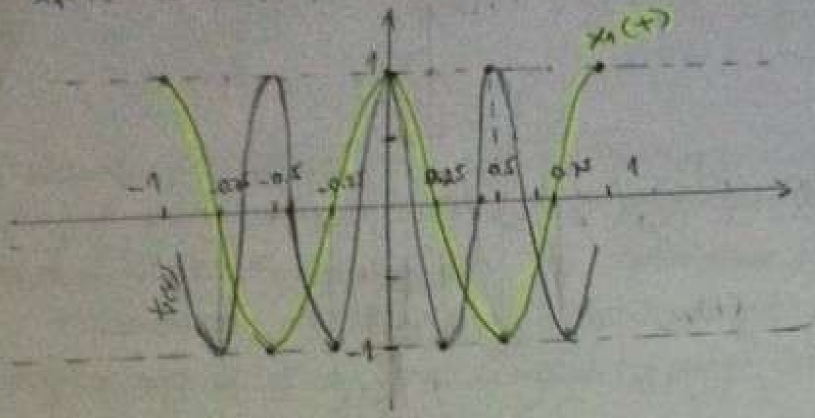
a) Rekonstrukcija signala:
Ako signal uzorkujemo sukladno teoremu rekonstrukciju provodimo njegovim propuštanjem kroz niskopropusni filtar koji ima $h(t)$ koji je funkcija $\mathrm{sinc}(x)$, a $H(f) = \begin{cases} 1, & |f| < B \\ 0, & \end{cases}$



Kao rezultat dobit ćemo signal $x(t)$, koji je pojasno ograničen frekvencijom B, a A=1 nam omogućava da se frekvencijski spektar signala u tom području ne mijenja. Na taj način dobijemo opet signal $x(t)$.
Compressed sensing (sažeto uzorkovanje) - metoda otipkavanja signala sa smanjenim brojem uzoraka (u odnosu na teorem o uzorkovanju). Ova tehnika nije primjenjiva nad svakim signalom. Ovdje teorema ne vrijedi!

Compressed sensing (sažeto uzorkovanje) - metoda otipkavanja koja koristi umanjen broj uzoraka nego što teorem propisuje. Dakle, obzirom da se može koristiti ovaj način, obrat teorema o uzorkovanju ne vrijedi!

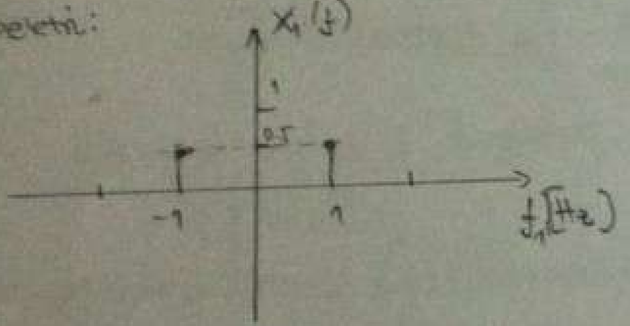
b) $x_1(t) = \cos(2\pi t)$, $x_2(t) = \cos(4\pi t)$, $f_s = 1$

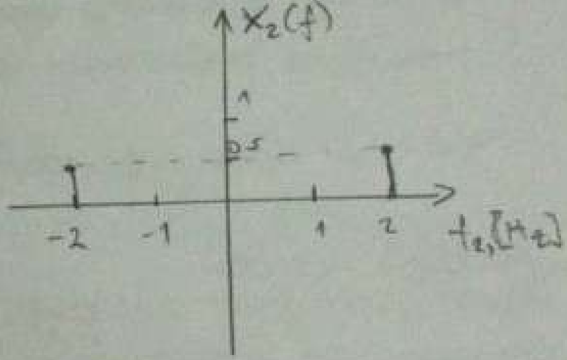


$\omega_1 = 2\pi$
$\cancel{2\pi} f_1 = \cancel{2\pi}$
$f_1 = 1\,Hz$

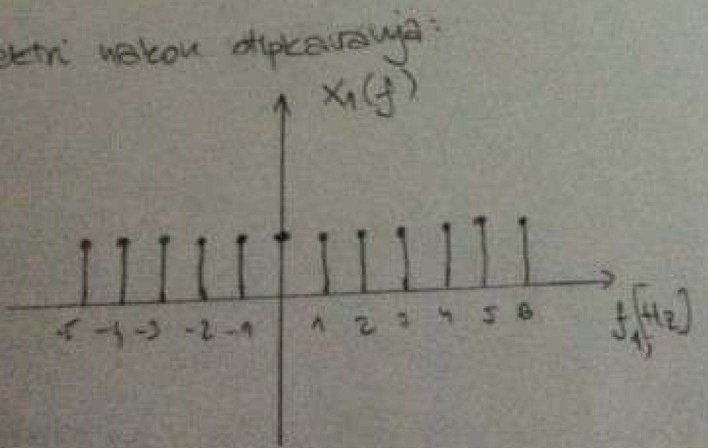
$\omega_2 = 4\pi$
$\cancel{2\pi} f_2 = 2\cancel{2\pi}$
$f_2 = 2\,Hz$

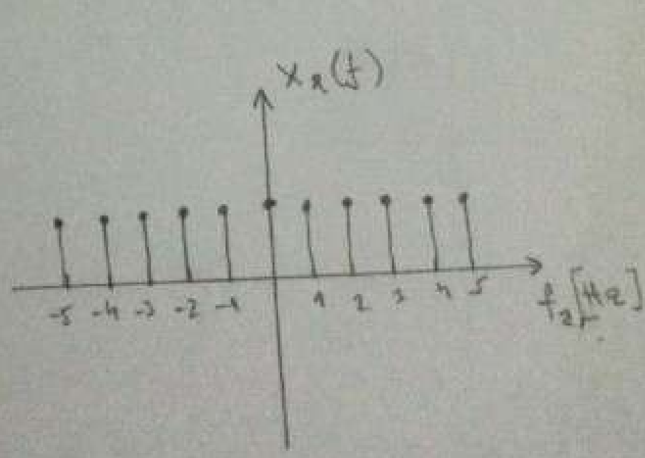
Spektri:





Spektri nakon otipkavanja:





Nije moguće nacrtati na istom grafu.

f_s je premalen -> dolazi do aliasinga (preklapanje)

c) Najmanja frekvencija omogućava potpunu rekonstrukciju

1) $\cos(\omega t)$

$\omega = 2\pi f$ $\qquad$ $f_s = 2f = \frac{\omega}{\pi}$ Hz

$f = \frac{\omega}{2\pi}$

2) $\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$, $\omega_1 \ll \omega_2$

$= \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_1-\omega_2)t + \cos(\omega_1+\omega_2)t\right]$

$\omega_{max} = \omega_1+\omega_2$ $\qquad$ $f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi}$

$f_{max} = 2\pi(f_1+f_2)$

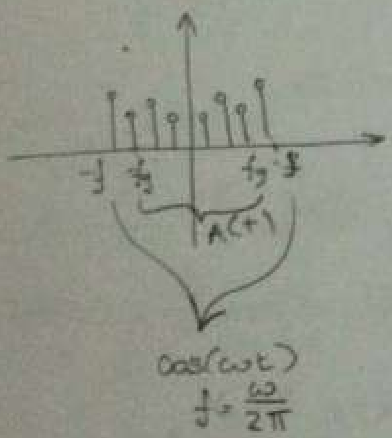
$f_s = 2(f_1+f_2)$

$f_s = 2\left(\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}\right) = \frac{\omega_1+\omega_2}{\pi}$ Hz

3) $A(t)\cos(\omega t)$

$A(t)$ ima ω_A , $\omega_A \ll \omega$

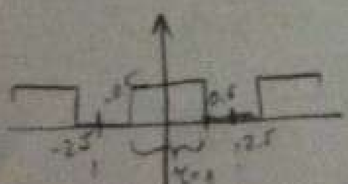
Umnožak u vremenskoj domeni → konvolucija u frekvencijskoj



$f_{max} = \frac{\omega+\omega_A}{2\pi}$

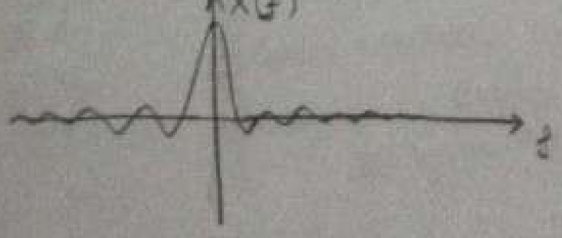
$f_s = 2 \cdot f_{max} = \frac{\omega+\omega_A}{\pi}$

4) Pravokutni impulsi : $T=5$, $\tau=1$, $A=3$



Signal mora biti pojasno ograničen

spektar beskonačnog periodičnog slijeda neće biti pojasno ograničen!

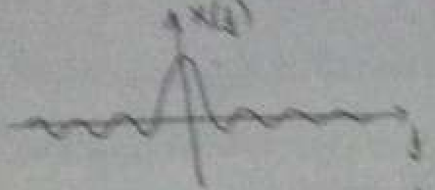


Nije ga moguće otipkati!

c) $A=1$, $\tau=2$, pravokutni signal

$$X(f) = A\tau \frac{\sin\left(2\pi f \frac{\tau}{2}\right)}{2\pi f \frac{\tau}{2}}$$

$$= 2\,\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$



[illegible] beskonačan signal $\rightarrow$ ne možemo otipkati jer nije pojasno ograničen.

d) $\Omega \sim [0, 2]$ $\qquad \cos(\Omega t) + \cos(\Omega^2 t)$

$f_s = 1$

Funkcija od omege: $\frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$

$f_s > 2 f_{max}$

$f_{max} = \frac{\Omega^2}{2\pi}$

$$P(f_s > 2f_{max}) = P\left(1 > \frac{\Omega^2}{\pi}\right) = P(\pi > \Omega^2)$$

$$= P(\Omega < \sqrt{\pi}) = \int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.886227$$

c) Najmanja frekvencija omogućava potpunu rekonstrukciju

1) $\cos(\omega t)$

$\omega = 2\pi f$ $\quad$ $f_s = 2f = \frac{\omega}{\pi}$ Hz

$f = \frac{\omega}{2\pi}$

2.

2) $\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)$, $\omega_1 \ll \omega_2$

$= \frac{1}{2}\left[\cos(\omega_1-\omega_2)t + \cos(\omega_1+\omega_2)t\right]$

$\omega_{max} = \omega_1+\omega_2$ $\quad$ $f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi}$

$f_{max} = 2\pi(f_1+f_2)$

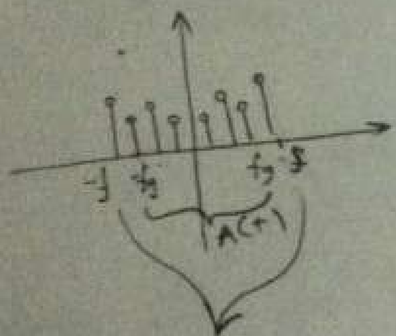
$f_s = 2(f_1+f_2)$

$f_s = 2\left(\frac{\omega_1}{2\pi} + \frac{\omega_2}{2\pi}\right) = \frac{\omega_1+\omega_2}{\pi}$ Hz

3) $A(t)\cos(\omega t)$

$A(t)$ ima ω_A, $\omega_A \ll \omega$

Umnožak u vremenskoj domeni → konvolucija u frekvencijskoj



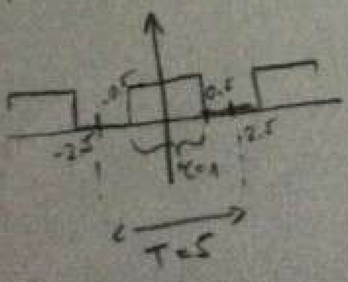
$f_{max} = \frac{\omega+\omega_A}{2\pi}$

$f_s = 2 \cdot f_{max} = \frac{\omega+\omega_A}{\pi}$

$\cos(\omega t)$

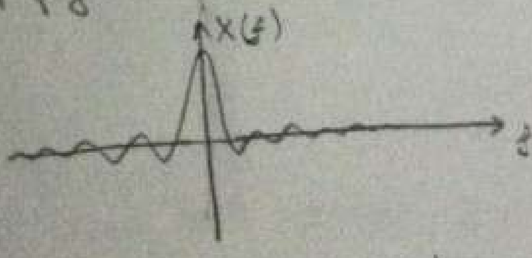
$f = \frac{\omega}{2\pi}$

4) Pravokutni impulsi: $T=5$, $\tau=1$, $A=3$



Signal mora biti pojasno ograničen

Spektar beskonačnog periodičnog slijeda neće biti pojasno ograničen!



Nije ga moguće otipkati!

Zadatak 3.

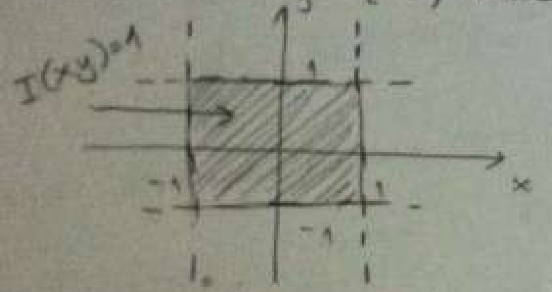
a) Neprekinuta dvodimenzionalna Fourierova transformacija i inverz

$$F(u,v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dxdy$$

$$f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv$$

u i v su prostorne frekvencije u x i y smjeru.
F(u,v) označava 2D spektar funkcije f(x,y)
Ovo je primjenjivo samo na aperiodične, kontinuirane signale s aperiodičnim, kontinuiranim spektrom.

b) $I(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$



$$F(u,v) = \iint_{-1}^{1} I(x,y) e^{-j2\pi(ux+yv)} dxdy$$

$$F(u,v) = \iint_{-1}^{1} e^{-j2\pi ux} e^{-j2\pi yv} dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-j2\pi ux} dx \int_{-1}^{1} e^{-j2\pi yv} dy$$

$$= -\frac{1}{j2\pi v} e^{-j2\pi vy} \Big|_{-1}^{1} \cdot \frac{1}{-j2\pi u} e^{-j2\pi ux} \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{j^2 4\pi^2 uv} \left(e^{-j2\pi v} - e^{-j2\pi u}\right)\left(e^{-j2\pi u} - e^{-j2\pi u}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{j^2} 4\pi^2 uv} \left[-\cancel{2}\cancel{j} \sin(2\pi v)\right]\left[-\cancel{2}\cancel{j} \sin(2\pi u)\right]$$

$$= \frac{4\pi^2}{\pi^2} \cdot \frac{\sin(2\pi v)}{2\pi v} \cdot \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u}$$

$$= 4 \cdot \frac{\sin(2\pi v)}{2\pi v} \cdot \frac{\sin(2\pi u)}{2\pi u}$$

... Kako nacrtati spektar kojega Wolfram Alpha izbacuje kao 3D plot??

pogrešno odgovičen,

c) Ako je signal $I_{m,n} = I(mx_s, ny_s)$ onda je moguće rekonstruirati početni signal $I(x,y)$.
Neka su mx_s i ny_s granične frekvencije, moguće je rekonstruirati signal I samo ako za udaljenosti među uzorcima w i h (w u smjeru x osi i h u smjeru y osi) vrijedi sljedeće

$$w \le \frac{1}{2mx_s} \quad , \quad h \le \frac{1}{2ny_s}$$

Zadatak 4.

$x(t) = A\cos(2\pi f t)$, frekvencija f_s.
Uzorci se jednoliko kvantiziraju na L razina (-A do A)

$A = 2$, $f = 1000$, $f_s = 4000$, $L = 32$ $\quad$ $L = 2^r$, $r = 5$

Omjer snage signala i srednje snage šuma.

Razine su -A do A, pa je $m_{max} = A_m$

$$\left(\frac{S}{N}\right) = 1.76 + 6.02r$$
$$= 31.86 \text{ dB} = 1534.62$$

Zadatak 5.

a) $H(x) = 10^8$ bitova
$S_N(f) = 10^{-18}$ W/Hz
$B = 1000$ Hz
$t = 1000$ s

$C = \frac{H}{t} = 100\,000$ bitova,

$S_N(f) = \frac{N_0}{2}$
$N_0 = 2 \cdot 10^{-18}$ W/Hz
$N = N_0 \cdot B = 2 \cdot 10^{-15}$ W

$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$\frac{C}{B} = \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$2^{\frac{C}{B}} = 1 + \frac{S}{N}$

$S = N\left(2^{\frac{C}{B}} + 1\right) = 2.54 \cdot 10^{15}$ W

b)

$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$

$S = 1.9$W
$\frac{N_0}{2} = 7.5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz
$N_0 = 15 \cdot 10^{-9}$ W/Hz

$C = B\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) = B\log_2\left(1 + \frac{S}{B \cdot N_0}\right)$

$= \log_2\left(1 + \frac{S}{B \cdot N_0}\right)^B$

B ide u beskonačnost → nije navedena širina u zad.

$C = \lim\limits_{B \to \infty} \log_2\left(1 + \frac{S}{B \cdot N_0}\right)^B = \lim\limits_{B \to \infty} \log_2\left(1 + \frac{S}{B \cdot N_0}\right)^{B \cdot \frac{N_0}{S} \cdot \frac{S}{N_0}}$

$= \log_2 e^{\frac{S}{N_0}} = 1.827 \cdot 10^8$ bit/s $= 182.7 \cdot 10^6$ bit/s

$= 182.7$ Mbit/s,