Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 25. siječnja 2017.

Pravilo bodovanja zadataka

Netočno odgovoreni zadaci od 5 bodova donose 2 negativna boda, a netočno odgovoreni zadaci od 10 bodova donose 4 negativna boda. Neodgovoreni zadaci donose 0 bodova.

1. zadatak (5 bodova): Zadan je linearni binarni blok kôd K s oznakom $[n, k]$, pri čemu su n i k prirodni brojevi. Odredite koliko ima vektora u prostoru $V(n)$ koji nisu članovi niti koda K niti njemu dualnog koda $K^{\perp}$, ako generirajuća matrica koda $K^{\perp}$ ima 4 retka, a kodne riječi duljinu 10 bita.

a) 1014

b) 960

c) 944

d) 1002

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako je kôd K linearno binarni blok kôd s oznakom $[n, k]$, tada je njemu dualni kôd, $K^{\perp}$, linearno binarni blok kôd s oznakom $[n, n-k]$. To znači da generirajuća matrica dualnog koda, tj. matrica za provjeru pariteta ima $n - k$ redaka, Što u ovom konkretnom slučaju znači da je $n - k = 4$. Nadalje, ako kodne riječi imaju duljinu 10 bita, tada vrijedi: $n = 10$. Znači, $k = n - (n - k) = 10 - 4 = 6$. Dakle, kod K je linearni kôd s oznakom $[10, 6]$. Sukladno tome, kod K ima 2^6 kodnih riječi, a kod $K^{\perp}$ ima 2^4 kodnih riječi. Konačno, u prostoru $V(10)$ sadržano je 2^{10} kodnih riječi. Međutim, neke kodne riječi koje se javljaju u kodu K, mogu se pojaviti i u kodu $K^{\perp}$ pa je, u općenitom slučaju, nemoguće točno odrediti broj kodnih riječi iz $V(10)$ koje nisu sadržane ni u kodu K niti u njemu dualnom kodu. Broj takvih riječi se kreće u intervalu $[945, 960]$. Ako kôd K i njemu dualni kôd, nemaju zajedničkih riječi osim riječi 0000000000, tada bi traženi broj riječi iz $V(10)$ iznosio 945. Međutim, moguće je da se kôd K i njemu dualni kôd jednaki. U tom slučaju bi traženi broj riječi iz $V(10)$ iznosio 960.

2. zadatak (5 bodova): Razmatrajte paritetno binarno kodiranje pri kojem se koristi tehnika horizontalnog i vertikalnog pariteta. Poruke duljine 7 bita kodiraju se prema načelu neparnog pariteta, pri čemu se svakoj poruci dodaje jedan horizontalni paritetni bit. Nakon n, $n \in \mathbf{N}$, uzastopnih kodnih riječi duljine 8 bita formira se paritetna kodna riječ sastavljena od vertikalnih paritetnih bitova, također prema načelu neparnog pariteta. Koliko najmanje smije iznositi broj n pa da kodna brzina, definirana kao omjer broja korisničkih bita (bita sadržanih u porukama) prema ukupnom broju bita (korisnički i paritetni zajedno) ne padne ispod 80%? **Napomena:** kodnu brzinu razmatrajte nad jednim blokom koji obuhvaća n kodnih riječi i jednu paritetnu kodnu riječ.

a) 11

b) 10

c) 12

d) 10,67

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Dakle, svaka se poruka duljine 7 bita kodira s po jednim paritetnim bitom, uslijed čega nastaju kodne riječi duljine 8 bita. Nakon n uzastopnih kodnih riječi, $n \in \mathbf{N}$, umeće se jedna kodna riječ duljine 8 bita koja je formirana od vertikalnih paritetnih bitova (vidi PowerPoint prezentaciju s predavanja "Zaštitno kodiranje I", slajdovi "Paritetno kodiranje"). Dakle, jedan takav blok sadrži ukupno $N_\mathrm{u} = (n + 1)\cdot 8$ bita. U istom tom bloku sadržano je $N_\mathrm{k} = n\cdot 7$ korisničkih bita. Kodna je brzina definirana kao: $R = N_\mathrm{k}/N_\mathrm{u}$. Dakle, mora vrijediti:

$$R = \frac{N_\mathrm{k}}{N_\mathrm{u}} \geq 0{,}8$$

$$\frac{7n}{8(n+1)} \geq 0{,}8$$

$$0{,}6n \geq 6{,}4$$

$$n \geq \frac{6{,}4}{0{,}6} \rightarrow n = \left\lceil \frac{6{,}4}{0{,}6} \right\rceil = 11$$

3. zadatak (5 bodova): Neki ciklični binarni kôd K s oznakom $[n, k]$, pri čemu su n i k prirodni brojevi, sadrži kodnu riječ 10101010. Koliko najmanje smije iznositi k pa da bude zadržano svojstvo linearnosti koda?

a) 1

b) 2

c) 8

d) 4

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Po definiciji, ako ciklični kôd sadrži neku kodnu riječ, onda mora sadržavati i sve njene ciklične posmake. U ovom konkretnom slučaju, ako traženi kôd K sadrži kodnu riječ 10101010, to znači da mora sadržavati i kodnu riječ 01010101. Međutim, kôd koji bi sadržavao samo te dvije riječi nije linearan. Temeljem uvjeta za cikličan kod (knjiga "Uvod u teoriju informacije, 2. izdanje, stranica 170), kôd K mora sadržavati i zbroj dviju navedenih riječi:

10101010 + 01010101 = 11111111

te mora sadržavati i riječ sastavljenu od osam nula: 00000000.

Dakle,

$$K = \begin{cases} 00000000 \\ 01010101 \\ 10101010 \\ 11111111 \end{cases}$$

je cikličan kod, zadovoljava svojstvo linearnosti i ujedno je i najmanji cikličan kod s oznakom $[n, k]$ koji sadrži kodnu riječ 10101010. S obzirom da kôd K ima 4 kodne riječi, $k = 2$.

4. zadatak (5 bodova): Razmatrajte linearni binarni blok kôd K s oznakom $[n, k, 3]$, $n, k \in \mathbf{N}$, koji je ujedno i perfektan. Ako k iznosi 11, odredite koliko iznosi duljina kodne riječi, tj. n.

a) 14

b) 15

c) 16

d) 12

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Za broj kodnih riječi perfektnog koda, M, mora vrijediti:

$$M = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t}}$$

Ako je kôd k tome i linearan, tada vrijedi $M = 2^k$:

$$2^k = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{t}}$$

U ovom konkretnom slučaju udaljenost koda iznosi $d(K) = 3$, pa s obzirom da mora biti zadovoljen izraz da je $d(K) \geq 2t + 1$, iz toga proizlazi da je $t = 1$. Dakle, mora vrijediti:

$$2^k = \frac{2^n}{1 + n}$$

$$n + 1 = 2^{n-k}$$

Očito je da $(n + 1)$ mora biti jednak cjelobrojnoj potenciji broja 2, pa se uzastopnim ispitivanjem gornjeg izraza može doći do rezultata:

za n = 1, 2 $\neq 2^{-10}$

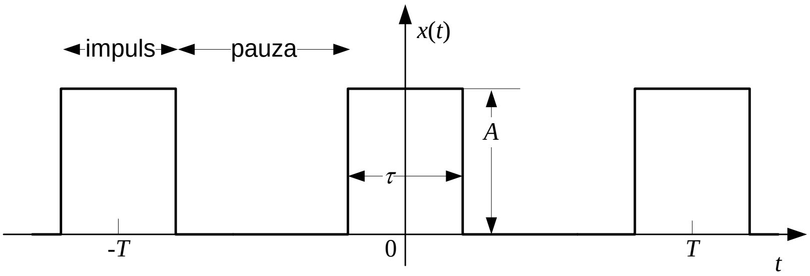
za n = 3, 4 $\neq 2^{-8}$

za n = 7, 8 $\neq 2^{-4}$

za n = 15, 16 = 2^4

Dakle, rješenje je n = 15.

5. zadatak (5 bodova): Zadan je periodični slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ amplitude A = 1 V (Slika 1). Omjer snage sadržane u istosmjernoj komponenti tog signala prema srednjoj snazi cijelog signala iznosi 1 / 4. Odredite srednju snagu signala $x(t)$.



Slika 1: Periodični slijed pravokutnih impulsa

a) 1/16 W b) 0,5 W c) 0,25 W d) 1 W e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Istosmjerna komponenta signala $x(t)$ jednaka je $\frac{A \cdot \tau}{T}$, dok je srednja snaga signala jednaka $\frac{A^2 \cdot \tau}{T}$. Prema tome, omjer snage istosmjerne komponente prema srednjoj snazi signala $x(t)$ jednak je $\frac{\left(\frac{A \cdot \tau}{T}\right)^2}{\frac{A^2 \cdot \tau}{T}} = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$. Sukladno tome, srednja snaga signala jednaka je 0,25 W.

6. zadatak (5 bodova): Govorni signal se prije slanja komunikacijskim kanalom uzorkuje frekvencijom f_u = 8 kHz, a potom kodira s 8 bita po uzorku. Omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma na izlazu kanala iznosi 30 dB. Odredite potrebnu širinu prijenosnog pojasa kanala, ako se šum u kanalu poveća za 6 dB..

a) 8,022 kHz b) 7,133 kHz c) 8,369 kHz d) 7,962 kHz e) ništa od navedenog

Rješenje:

Ako se šum u kanalu poveća za 6 dB, tada vrijedi:

$$6\,\mathrm{dB} = 10\cdot\log N_2 - 10\cdot\log N_1 = 10\cdot\log\frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = 3,981$$

Temeljem frekvencije uzorkovanja f_u i broja bita po uzorku *r* možemo dobiti informacijsku brzinu

$$R = f_u \cdot r = 64\ \mathrm{kbit/s}\,.$$

Kapacitet kanala *C* mora biti veći ili jednak informacijskoj brzini *R*, te zaključujemo, budući da je širina pojasa proporcionalna s kapacitetom kanala, da je potrebna širina prijenosnog pojasa kanala ona za koju dobijemo $C = R$ i iznosi:

$$B = \frac{R}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_2}\right)} = \frac{R}{\log_2\left(1+\frac{S_1}{N_1}\cdot\frac{N_1}{N_2}\right)} = \frac{R}{\log_2\left(1+\frac{1000}{3,981}\right)} = 8,022\,\mathrm{kHz}$$

7. zadatak (5 bodova): Signal $x(t) = \cos(200\pi\cdot t) + 2\cos(320\pi\cdot t)$ [V] uzorkovan je frekvencijom uzorkovanja f_u, a potom propušten kroz idealni niskopropusni filtar granične frekvencije f_g = 170 Hz. Koliko mora iznositi frekvencija uzorkovanja f_u, veća od najveće frekvencije sadržane u signalu $x(t)$, ako kroz filtar prolaze tri frekvencijske komponente uzorkovanog signala $x_\delta(t)$ (razmatrajte samo pozitivne frekvencije) i pri čemu su susjedne frekvencijske komponente filtriranog uzorkovanog signala jednako razmaknute.

a) 30 Hz b) 130 Hz c) 380 Hz d) 290 Hz e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Signal $x(t)$ sadrži dvije frekvencijske komponente (ako promatramo samo pozitivne frekvencije): 100 Hz i 160 Hz. Uslijed uzorkovanja frekvencijom f_u, u spektru signala $x_\delta(t)$ pojavit će se i frekvencije f_u – 100 Hz i f_u – 160 Hz. Razmatrajući uvjet da su susjedne komponente jednako razmaknute, imamo 2 scenarija:

Scenarij 1:
$$\left(f_u - 160\right) - 100 = 160 - (f_u - 160)$$
$$f_u - 260 = 320 - f_u$$
$$f_u = 290\ \mathrm{Hz}$$

Pri tome, komponenta f_u – 100 Hz iznosi 190 Hz, a komponenta f_u – 160 Hz iznosi 130 Hz. U scenariju 1 kroz zadani filtar prolaze tri komponente: 100 Hz, 130 Hz i 160 Hz.

Scenarij 2:
$$100 - \left(f_u - 160\right) = (f_u - 100) - 100$$
$$260 - f_u = f_u - 200$$
$$f_u = 230\ \mathrm{Hz}$$

Pri tome, komponenta f_u – 100 Hz iznosi 130 Hz, a komponenta f_u – 160 Hz iznosi 70 Hz. U scenariju 2 kroz zadani filtar prolaze četiri komponente: 70 Hz, 100 Hz, 130 Hz i 160 Hz što nije u skladu s uvjetom zadatka.
Stoga je moguć samo scenarij 1 i, sukladno tome, f_u = 290 Hz.

8. zadatak (5 bodova): Slučajni signal spektralne gustoće snage $S(f)$, koji ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa, dovodi se na ulaz LTI-sustava S1 prijenosne funkcije $H_1(f)$, a izlaz tog sustava vezan je izravno na ulaz LTI-sustava S2 prijenosne funkcije $H_2(f)$. Navedene funkcije frekvencije definirane su sljedećim izrazima:

$$S(f)=10\,\mu\text{W/Hz}, \forall f \in \mathbf{R}, \quad H_1(f)=\begin{cases} 0{,}5 & \text{za} \left| f \right| \le 10^6\,\text{Hz} \\ 0 & \text{za} \left| f \right| > 10^6\,\text{Hz} \end{cases}, \quad H_2(f)=\begin{cases} 0{,}2 & \text{za} \left| f \right| \le 10^7\,\text{Hz} \\ 0 & \text{za} \left| f \right| > 10^7\,\text{Hz} \end{cases}$$

Odredite minimalni vremenski razmak Δ, $\Delta \ge 0$, između dva potpuno nekorelirana uzorka slučajnog procesa (signala) na izlazu LTI-sustava S2.

a) 0 s

b) 0,5 μs

c) 5 μs

d) 1 μs

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako na ulaz LTI-sustava dovedemo slučajni signal s obilježjima stacionarnog slučajnog procesa, tada slučajni signal na izlazu LTI-sustava također ima obilježja stacionarnog slučajnog procesa i za spektralne gustoće snage vrijedi izraz:

$$S_{\text{izlaz}}(f)=S_{\text{ulaz}}(f)\left|H(f)\right|^2$$

pri čemu je $H(f)$ prijenosna funkcija LTI-sustava. Neka je $S_1(f)$ spektralna gustoća snage na izlazu sustava S1. Za nju vrijedi izraz:

$$S_1(f)=\begin{cases} 2{,}5\,\mu\text{W/Hz} & \text{za} \left| f \right| \le 10^6\ \text{Hz} \\ 0\,\text{W/Hz} & \text{inače} \end{cases}$$

Na sličan način, za spektralnu gustoću snage signala na izlazu sustava S2 vrijedi:

$$S_2(f)=\begin{cases} 0{,}1\,\mu\text{W/Hz} & \text{za} \left| f \right| \le 10^6\ \text{Hz} \\ 0\,\text{W/Hz} & \text{inače} \end{cases}$$

Nadalje, potrebno je odrediti autokorelacijsku funkciju signala na izlazu sustava S2. Za nju vrijedi:

$$R_2(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} S_2(f)e^{j2\pi f\tau}df=\int_{-10^6}^{10^6} 0{,}1\cdot 10^{-6}e^{j2\pi f\tau}df=0{,}1\cdot 10^{-6}\int_{-10^6}^{10^6} e^{j2\pi f\tau}df=$$

$$=0{,}1\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^6\frac{\sin\left(2\pi 10^6\tau\right)}{2\pi 10^6\tau}[s]$$

Dakle, da bi odredili minimalnu udaljenost između dva potpuno nekorelirana uzorka, moramo odrediti prvi trenutak τ, veći od nule, u kojem autokorelacijska funkcija poprima vrijednost nula: $R_2(\tau) = 0$ za $2\pi 10^6\tau = \pi$, a to će biti postignuto kad je $\tau = 1/(2\cdot 10^6)$ [s], tj. u 0,5 μs.

9. zadatak (10 bodova): Na ulaz sklopa za uzimanje uzoraka dovodimo signal $s(t)$ definiran izrazom:

$$s(t)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(2\pi ft-\frac{\pi}{6}\right)\right|[\mathrm{V}]$$

Uzorci $s(kT)$, uzeti u trenucima kT, $k \in \mathbf{Z}$, dovode se na ulaz kvantizatora čija je karakteristika određena izrazom:

$$I(kT)=\begin{cases}1{,}5\,\mathrm{V} & 1\,\mathrm{V}\le s(kT)<2\,\mathrm{V}\\ 0{,}5\,\mathrm{V} & 0\,\mathrm{V}\le s(kT)<1\,\mathrm{V}\\ -0{,}5\,\mathrm{V} & -1\,\mathrm{V}\le s(kT)<0\,\mathrm{V}\\ -1{,}5\,\mathrm{V} & -2\,\mathrm{V}\le s(kT)<-1\,\mathrm{V}\end{cases}$$

pri čemu je $I(kT)$ izlaz kvantizatora u trenucima kT. Odredite srednju vrijednost kvantizacijskog šuma koji se pojavljuje na uzorcima signala $s(t)$ uzetim u trenucima $k/(4f)$, $k \in \mathbf{Z}$. **Napomena:** U ovom konkretnom zadatku, kvantizacijski šum računajte kao razliku između kvantizirane i stvarne vrijednosti signala.

a) 0 V

b) 0,768 V

c) 0,083 V

d) 0,192 V

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Da bi odredili srednju vrijednost kvantizacijskog šuma za ovaj konkretan slučaj determinističkog signala s(t) uzorkovanog u trenucima $kT = k/(4f)$, nužno je odrediti koje će vrijednosti signal poprimit u tim diskretnim vremenskim trenucima. Period funkcije $s(t)$ jednak je $1/f$ pa je potrebno izračunati njene uzorke u trenucima 0, $1/(4f)$, $1/(2f)$ i $3/(4f)$. Nakon toga se uzorci periodički ponavljaju (isto vrijedi i za negativne vrijednosti vremena).

$$t=0,\ s(0)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$$

$$t=\frac{1}{4f},\ s\left(\frac{1}{4f}\right)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t=\frac{1}{2f},\ s\left(\frac{1}{2f}\right)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{4}$$

$$t=\frac{3}{4f},\ s\left(\frac{3}{4f}\right)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$$

$$t=\frac{1}{f},\ s\left(\frac{1}{f}\right)=s(0)$$

Nadalje, potrebno je odrediti vrijednosti na izlazu kvantizatora u trenucima $kT = k/(4f)$:

$$I(0)=0,5\,\mathrm{V},\ I\left(\frac{1}{4f}\right)=1,5\,\mathrm{V},\ I\left(\frac{1}{2f}\right)=1,5\,\mathrm{V},\ I\left(\frac{3}{4f}\right)=0,5\,\mathrm{V},\ I\left(\frac{1}{f}\right)=I(0)=0,5\,\mathrm{V}$$

S obzirom da je period funkcije jednak $1/f$, izračunate vrijednosti na izlazu kvantizatora se periodički ponavljaju. Srednja vrijednost kvantizacijskog šuma dana je izrazom:

$$\overline{Q}=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3}\left(I\left(\frac{k}{4f}\right)-s\left(\frac{k}{4f}\right)\right)=0,192\ \mathrm{V}$$