# 1. DOMAĆA ZADAĆA

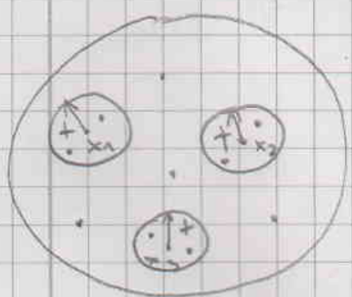
(1) Binarni $(n, M, 2t+1)$ kod koji zadovoljava izraz

$$M = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{t}}$$

naziva se perfektan kod.

Perfektan kod je onaj kod udaljenosti $2t+1$ za kojeg vrijedi da su sve moguće kodne riječi u jednoj od kugli radijusa $t$. Ovo svojstvo je vrlo korisno kod dekodiranja zato što koja god kodna riječ dođe u dekoder kanala, on će uspjeti naći originalnu kodnu riječ kojoj pripada.

DOKAZ: Neka je udaljenost koda $d = 2t+1$. U tom slučaju, oko svake od $M$ kodnih riječi možemo opisati kuglu radijusa $t$. Sve kugle su međusobno disjunktne te zasigurno vrijedi $M \cdot \#S(x, t) \leq 2^n$, gdje je $2^n$ ukupan broj mogućih binarnih vektora duljine $n$.




Točkama su prikazani svi mogući vektori duljine $n$, a krugovima su označene kugle oko kodnih riječi koda. Iz ovoga se jednostavno može izračunati gornja granica na $M$, a to je upravo i dokaz svojstva o Hammingovom ograničenju.

$$G = \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0&0&1 \end{bmatrix} \underset{4=4+1}{\sim} \begin{bmatrix} 1&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \underset{1=1+2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&1&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \underset{2=2+3}{\sim} \begin{bmatrix} 1&0&0&1&1&1&1&1 \\ 0&1&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \underset{1=1+4}{\sim}$$

$$G' = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \qquad H' = \begin{bmatrix} 1&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

a) $K = \{[0000]\cdot G, [0001]\cdot G, \dots$

$$K = \left\{ \begin{array}{c} 00000000 \\ 11100001 \\ 00100111 \\ 11000110 \\ 01101011 \\ 10001010 \\ 01001100 \\ 10101101 \\ 11110100 \\ 00010101 \\ 11010011 \\ 00110010 \\ 10011111 \\ 01111110 \\ 10111000 \\ 01011001 \end{array} \right.$$

$2^4 = 16$ kodnih riječi

b) $d(k) = 3$

$$t = \left\lfloor \frac{d(k) - 1}{2} \right\rfloor = 1$$

Hammingova udaljenost je 3. Kod može otkriti 2 greške, a ispraviti jednu.

c) $M = 2^k = 2^4 = 16$

$$\frac{2^n}{\binom{n}{0} + \dots \binom{n}{t}} = \frac{2^8}{\binom{8}{0} + \binom{8}{1}} = 28{,}44 \neq 16 \rightarrow \text{kod nije perfektan}$$

d) $[1 0 1 1 1 0 0 0] \cdot H^T = [0 0 0 0]$

$[1 1 1 0 0 0 0 1] \cdot H^T = [0 0 0 0]$

(2) Ham(2)

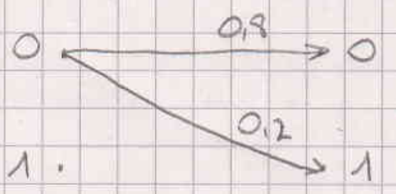
a) $r \times (2^r - 1) = 2 \times (2^2 - 1) = 2 \times 3$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{cases} 0 \cdot G \\ 1 \cdot G \end{cases} = \begin{cases} 000 \\ 111 \end{cases}$$

b) $p = 0{,}2$




$d = 3 \Rightarrow \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor \Rightarrow$ ispravlja 1 pogrešku

$$P_{isp} = \binom{3}{0} \cdot 0{,}8^3 + \binom{3}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = \boxed{0{,}896}$$

c) $p_{isp} = \binom{3}{0} \cdot 0{,}8^3 + \binom{3}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 +$

$$+ \binom{3}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 \cdot \left( \binom{3}{0} \cdot 0{,}8^3 + \binom{3}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 \right) =$$

$$= \boxed{0{,}982}$$

Vjerojatnost ispravnog kodiranja raste.

3. $[10, k]$ $\quad r=4,\ k=6$

a) $g = x^4 + x^3 + x^2 + 1 \qquad [1\,1\,1\,0\,1]$

b) $[1\,0\,0\,1\,0\,1] \Rightarrow x^5 + x^2 + 1$

$r(x) = x^{n-k}\ d(x) \bmod [g(x)]$

$$(\cancel{x^9} + x^6 + x^4) : (x^4 + x^3 + x^2 + 1) = x^5 + x^4 + x + 1$$

$$\underline{\cancel{x^9} + x^8 + x^7 + x^5}$$

$$\cancel{x^8} + \cancel{x^7} + \cancel{x^6} + x^5 + \cancel{x^4}$$

$$\underline{\cancel{x^8} + \cancel{x^7} + \cancel{x^6} + \cancel{x^4}}$$

$$\cancel{x^5}$$

$$\underline{\cancel{x^5} + x^4 + x^3 + x}$$

$$\cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \cancel{x}$$

$$\underline{\cancel{x^4} + \cancel{x^3} + x^2 + 1}$$

$$x^2 + x + 1 \Rightarrow [0\,1\,1\,1]$$

$$\boxed{c = [1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,1]}$$