Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 5. veljače 2020.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, netočno odgovoreni 2 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Promatrani je napon opisan signalom $u(t) = A \cdot \sin(2\pi f t)$ [V], za svaki $t \in \mathbf{R}$, $f \neq 0$. Nadodamo li na taj signal istosmjernu komponentu napona B [V], dobivamo naponski signal $y(t) = B + A \cdot \sin(2\pi f t)$ [V], za svaki $t \in \mathbf{R}$. Ako maksimalna vrijednost signala $y(t)$ iznosi 2 V, a njegova srednja snaga $P_y = 10$ W, odredite vrijednost od A uz dodatni uvjet da je $A < B$.

a) –1,07 volta;

b) 1,07 volta;

c) 3,737 volta;

d) –3,737 volta;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Srednja snaga napona $y(t)$ dana je izrazom: $P_y = B^2 + A^2/2$ [W]. Nadalje, maksimalna vrijednost signala $y(t)$ iznosi $B + |A|$ [V]. Uvrstimo li u te izraze zadane brojčane vrijednosti, dobivamo sljedeće jednakosti:

$B^2 + A^2/2 = 10$, $\qquad B + |A| = 2$.

Koristeći jednakost $|A|^2 = A^2$, dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$\frac{(2-B)^2}{2} + B^2 = 10$$
$$3B^2 - 4B - 16 = 0$$
$$B_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-16)}}{2 \cdot 3} = \frac{4 \pm \sqrt{208}}{6}$$
$$B_1 = 3,07\,\mathrm{V},\ B_2 = -1,737\,\mathrm{V}$$

Sukladno proračunatom, postoje višestruke moguće vrijednosti od A:

$|A| = 2 - B_1 = 2 - 3,07 = -1,07$ V – ovo nije moguće rješenje jer apsolutna vrijednost od A ne može biti negativna;

$|A| = 2 - B_2 = 2 - (-1,737) = 3,737$ V, što daje dvije moguće vrijednosti: $A_1 = 3,737$ V i $A_2 = -3,737$ V. No s obzirom da mora biti zadovoljen i uvjet $A < B$, jedino ispravno rješenje je $A = -3,737$ V. Dakle, $y(t) = -1,737 - 3,737 \cdot \sin(2\pi f t)$ [V].

Zadatak 2. Generirajuća matrica koda K zadana je izrazom:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Koder promatranog komunikacijskog sustava koristi dualni kôd koda K. Ako dekoder na drugom kraju komunikacijskog sustava primi riječ [1 1 0 1 0 1], odredite na kojem bitu je nastala (eventualna) pogreška u prijenosu. Dodatna pretpostavka je da na bilo kojoj kodnoj riječi tijekom njenog prijenosa kanalom ne može nastati više od jedne pogreške bita, tj. težina vektora pogreške ne može biti veća od 1: $w(\mathbf{e}) \leq 1$.

a) Na 1. bitu;

b) Na 3. bitu;

c) Na 6. bitu;

d) Nije bilo pogreške;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Promatrani prijenosni sustav koristi $K^{\perp}$ kao zaštitni kôd. Sve riječi tog koda moguće je konstruirati poznavanjem matrice **H**, matrice provjere pariteta koda K. Jer ako matrica **G** daje sve kodne riječi koda K, tada njegova matrica provjere pariteta **H** daje sve kodne riječi koda $K^{\perp}$. Ako je G u standardnom obliku, tada je **H** moguće dobiti jednostavnom pretvorbom: $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k|\mathbf{A}] \rightarrow \mathbf{H} = [\mathbf{A}^T|\mathbf{I}_{n-k}]$. Dakle

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je moguće ispisati sve kodne riječi koda $K^{\perp}$:

$$K^{\perp} = \begin{Bmatrix} 000000 \\ 110100 \\ 011010 \\ 101001 \\ 101110 \\ 011101 \\ 110011 \\ 000111 \end{Bmatrix}.$$

Od svih njih najmanju udaljenost prema primljenoj kodnoj riječi 110101 ima kodna riječ 110100 i prema tome zaključujemo da je pogreška nastala na šestom bitu. No do tog se rezultata moglo doći i na kraći način. Ako je matrica **G** generirajuća matrica koda K, tada je ona ujedno i matrica provjere pariteta koda $K^{\perp}$. Stoga da bi neka kodna riječ **c** bila dio koda $K^{\perp}$ mora vrijediti: $\mathbf{c}\cdot\mathbf{G}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$. Provjera pariteta primljene kodne riječi pokazuje sljedeće:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

što pokazuje na šesti redak matrice $\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$, a to znači da je dekoder otkrio pogrešku na šestom bitu primljene kodne riječi.

Zadatak 3. Zadan je binarni blok kôd koji koristi načelo paritetnog kodiranja parnim paritetom. Tako dobivenim kodom oznake $[n, n-1]$ kodiramo poruke duljine 2 bita. Pod pretpostavkom da na svakoj kodnoj riječi u prijenosu sigurno nastupi barem jedna pogreška bita, odredite vjerojatnost da dekoder koji koristi zadani kôd otkrije pogrešno prenijete kodne riječi. Također pretpostavite da se prijenos odvija binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi $p = 0{,}02$.

a) 0.980003

b) 0,057632

c) 0,058808

d) 0,001176

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Dakle, radi se o linearnom binarnom blok kodu oznake [3, 2]. Pod pretpostavkom da su u prijenosu nastale pogreške, takav kod može otkriti jednostruke i trostruke pogreške s vjerojatnošću P_1:

$$P_1=\binom{3}{1}p(1-p)^2+\binom{3}{3}p^3 .$$

Uvrštavanjem zadane vjerojatnosti p u gornji izraz dobivamo $P_1 = 0{,}057632$. Nadalje, vjerojatnost da na kodnoj riječi nastupi barem jedna pogreška bita je P_2:

$$P_2=1-(1-p)^3=1-0{,}98^3=0{,}058808 .$$

Tražena vjerojatnost da dekoder koji koristi zadani kôd otkrije pogrešno prenijete bitove, ako je na svakoj kodnoj riječi u prijenosu sigurno nastupila barem jedna pogreška bita iznosi $P_1/ P_2 = 0.980003$.

Zadatak 4. U nekom promatranom komunikacijskom sustavu u svrhu zaštite poruka od pogrešaka u prijenosu kanalom koristi se linearni binarni blok kod [6, 3] čija je generirajuća matrica jednaka onoj u zadatku 2 (ima oblik $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k|\mathbf{A}]$). Predajnik pošalje kodnu riječ $\mathbf{c}$ = [1 1 1 0 0 0], a prijemnik na drugom kraju kanala primi promijenjenu riječ duljine 6 bita, nazovimo ju $\mathbf{x}$, koja u sebi sadrži dva pogrešno prenijeta bita. Provjerom pariteta primljene riječi $\mathbf{x}$ matricom $\mathbf{H} = [\mathbf{A}^{\mathrm{T}}|\mathbf{I}_{n-k}]$ dobiven je sindrom [1 1 1]. Odredite težinu primljene riječi $\mathbf{x}$.

a) 3

b) 4

c) 5

d) 2

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

S obzirom na zadanu matricu **G**, matrica **H** jednaka je

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Očito, primljena riječ $\mathbf{x} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$, pri čemu vektor pogreške $\mathbf{e}$ sadrži dvije jedinice i četiri nule. S obzirom da je $\mathbf{c}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ = [0 0 0], mora vrijediti da je $\mathbf{e}\cdot\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ = [1 1 1]. Dakle, [1 1 1] nastaje zbrajanjem dva retka matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ koji pak odgovaraju pozicijama bitova pogreške u vektoru **e**. Uvidom u matricu jasno je da je zbroj [1 1 1] moguće dobiti na tri načina:

[1 1 1] = [1 0 1] + [0 1 0] (zbroj prvog i petog retka), vektor pogreške **e** = [1 0 0 0 1 0],

[1 1 1] = [1 1 0] + [0 0 1] (zbroj drugog i šestog retka), vektor pogreške **e** = [0 1 0 0 0 1],

[1 1 1] = [0 1 1] + [1 0 0] (zbroj trećeg i četvrtog retka), vektor pogreške **e** = [0 0 1 1 0 0].

Polazeći od zadane kodne riječi **c** = [1 1 1 0 0 0], vektor **x** može imati jednu od sljedećih vrijednosti:

[0 1 1 0 1 0], [1 0 1 0 0 1] ili [1 1 0 1 0 0].

Sve tri riječi imaju jednaku težinu, tj. 3.

Zadatak 5. Promatrani kvantizator koristi jednoliku kvantizaciju i njegova je karakteristika zadana stepenastom funkcijom pri čemu se amplitude ulaznog signala kreću u rasponu od $-m_{\max}$ do $m_{\max}$. Pretpostavimo da na ulaz takvog kvantizatora dolazi signal zadan izrazom $s(t) = A\cdot\sin(2\pi ft)$ [V] koji koristi 50% razina kvantizatora. Odredite s koliko minimalno bita po svakom uzorku treba kodirati uzorkovani signal $s(t)$ pa da omjer S/N (omjer srednje snage signala $s(t)$ prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma) bude veći od 43 dB. Dodatna je pretpostavka da funkcija gustoće vjerojatnosti kvantizacijskog šuma ima jednoliku razdiobu po svakom kvantizacijskom intervalu $(m_k, m_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, L$, pri čemu je L broj stupnjeva amplitude koje kvantizator koristi.

a) 6 bit/uzorak;

b) 7 bit/uzorak;

c) 8 bit/uzorak;

d) 9 bit/uzorak;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Srednja snaga zadanog sinusnog signala $s(t)$ iznosi $S = A^2/2$ [W]. Ako taj signal koristi 50% razina kvantizatora čiji se raspon amplituda proteže od $-m_{\max}$ do $m_{\max}$, tada vrijedi $A = m_{\max}/2$. S obzirom da šum kvantizacije ima jednoliku razdiobu na svakom kvantizacijskom intervalu $(m_k, m_{k+1}]$, $k = 1, 2, \ldots, L$, za njegovu srednju snagu vrijedi: $N = \Delta^2/12 = (2m_{\max}/L)^2/12$. Sukladno navedenom, omjer srednje snage signala S i srednje snage kvantizacijskog šuma moguće je odrediti sljedećim izrazom:

$$\frac{S}{N} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m_{\max}}{2}\right)^2}{\frac{\frac{1}{3}m_{\max}^2}{L^2}} = \frac{3}{8}L^2$$

Ako nadalje definiramo da je $L = 2^r$, pri čemu je r broj bita po svakom kvantiziranom uzorku originalnog signala, tada se gornji izraz pretvara u

$$\frac{S}{N} = \frac{3}{8}2^{2r}$$

Izrazimo li omjer S/N u decibelima gornji izraz prelazi u: $10\log_{10}(S/N) = -4{,}26 + 6{,}02\cdot r$ [dB]. Konačno, ako je uvjet $10\log_{10}(S/N) > 43$ decibela, tada mora vrijediti $-4{,}26 + 6{,}02\cdot r > 43$, što pak daje rješenje $r > 7{,}85$. Prvi cijeli broj koji je veći od 7,85 je 8 pa konačno rješenje glasi $r = 8$ bita po uzorku.

Zadatak 6. Poruka duljine četiri bita, $\mathbf{d} = [w\ x\ y\ z]$, kodirana je Hammingovim kodom [7, 4, 3], pri čemu su w, x, y i z binarne znamenke. Korišteni kôd je ujedno i kôd Ham(3) te koristi matricu provjere pariteta

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nakon kodiranja poruka $\mathbf{d}$ se pretvara u kodnu riječ $\mathbf{c} = [1\ 1\ w\ 1\ x\ y\ z]$. Također vrijedi da kad bi poruku $\mathbf{d}$ štitili paritetnim kodom s parnim paritetom, ona bi bila kodirana kao $[w\ x\ y\ z\ 1]$. Odredite bitove x i y.

a) $x = 0, y = 0$;

b) $x = 0, y = 1$;

c) $x = 1, y = 0$;

d) $x = 1, y = 1$;

Postupak rješavanja

Da bi odredili vezu između poruke **d** i kodne riječi **c** potrebna nam je generirajuća matrica koda, **G**:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Postupak određivanja matrice **G** iz matrice **H** objašnjen je u udžbeniku „Uvod u teoriju informacije i kodiranje“, str. 166. Sada možemo odrediti produkt poruke i generirajuće matrice:

$$\mathbf{c} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{G} = \begin{bmatrix} w & x & y & z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & w & 1 & x & y & z \end{bmatrix}$$

Iz gornjeg izraza možemo izvesti tri jednadžbe:

1. $w + x + z = 1$

2. $w + y + z = 1$

3. $x + y + z = 1$

Četvrtu jednadžbu izvlačimo iz dodatnog uvjeta: ako se na [w x y z] dodaje binarna jedinica kako bi se postigao parni paritet, to znači da je broj jedinica unutar poruke **d** neparan, što pak znači da vrijedi:

4. $w + x + y + z = 1$

Kombinirajući 3. i 4. jednadžbu dobivamo: $w + 1 = 1$, što nedvojbeno znači da je $w = 0$. Uvrštavajući taj rezultat u 1. i 2. jednadžbu dobivamo:

a) $x + z = 1$

b) $y + z = 1$

Uvrštavajući jednadžbu a) u izraz $x + y + z = 1$ dobivamo $y = 0$, a uvrstivši jednadžbu b) u isti izraz dobivamo $x = 0$. U konačnici vrijedi $z = 1$. Dakle, točan odgovor je a), $x = y = 0$, a $\mathbf{d} = [0\ 0\ 0\ 1]$.

Zadatak 7. Razmatrajte ciklični kod [6, 2]. Odredite njegov polinom za provjeru pariteta, $h(x)$.

a) x

b) $x^2 + x$

c) $x + 1$

d) $x^2 + 1$

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Ciklični kôd [6, 2] ima jednoznačan skup kodnih riječi:

$$K = \begin{cases} 000000 \\ 010101 \\ 101010 \\ 111111 \end{cases}$$

Njegov generirajući polinom je $g(x) = x^4 + x^2 + 1$. S obzirom da mora vrijediti $h(x) \cdot g(x) = x^n - 1$, slijedi da je $h(x) = (x^6 - 1):(x^4 + x^2 + 1) = x^2 + 1$.

Zadatak 8. Na signal s Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti i srednje snage 15 mW u AWGN kanalu djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = 7{,}5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz, za svaki $f \in \mathbf{R}$. Koliko iznosi maksimalni kapacitet ostvariv u takvom kanalu?

a) 1 Mbit/s;

b) 1,443 Mbit/s;

c) 2,885 Mbit/s;

d) 2 Mbit/s;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Kapacitet AWGN kanala zadan je izrazom:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N_0 B} \right)$$

Srednja snaga signala, S, iznosi 15 mW. Poznavanjem spektralne gustoće snage $S_N(f)$ moguće je odrediti veličinu N_0. Poznato je da je spektralna gustoća snage bijelog šuma definirana kao $N_0/2$ po svim frelvencijama, pa iz toga slijedi da je $N_0 = 15 \cdot 10^{-9}$ W/Hz. Jedina veličina koja u zadatku nije određena je širina prijenosnog pojasa B koja može poprimiti bilo koju vrijednost između 0 i beskonačne. Iz teorije je poznato da kanal poprima maksimalni kapacitet uz beskonačnu širinu prijenosnog pojasa i iznosi:

$$\lim_{B\to\infty} C = \frac{S}{N_0}\log_2 e$$

(vidi udžbenik „Uvod u teoriju informacije i kodiranje“, str. 115.). Sukladno zadanim vrijednostima, maksimalna vrijednost kapaciteta AWGN kanala iznosit će $1{,}443\cdot 10^6$ bit/s.

Zadatak 9. Razmatrajte linearni binarni blok kôd K s oznakom [6, 2, 2]. Od svih mogućih linearnih binarnih blok kodova s tom oznakom odaberite jedan od onih koji imaju najmanji zbroj težina svih njegovih kodnih riječi te odredite vrijednost tog zbroja.

a) 5

b) 8

c) 6

d) 7

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Da bi kôd K oznake $[n, k, d(K)] = [6, 2, 2]$ bio linearan binarni blok kôd on mora imati kodne riječi duljine 6 bita, mora sadržavati riječ sastavljenu od 6 nula (kodna riječ $\mathbf{0} = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$) te ukupno ima $2^2 = 4$ kodne riječi. Udaljenost linearnog binarnog blok koda jednaka je najmanjoj težini od svih njegovih kodnih riječi različitih od $\mathbf{0}$. U ovom slučaju ta minimalna težina mora iznositi 2, što znači da takva kodna riječ smije imati najviše 2 jedinice. Nazovimo ju $\mathbf{c}_1$, S obzirom da tražimo da zbroj svih težina kodnih riječi koda K bude minimalna, sljedeća kodna riječ, $\mathbf{c}_2$, mora također imati najmanje dvije jedinice. Ako se jedna od tih jedinica preklapa s nekom jedinicom iz $\mathbf{c}_1$, tada će riječ $\mathbf{c}_3$, nastala kao $\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$, imati 2 jedinice, a ako preklapanja nema, $\mathbf{c}_4 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$ će imati 4 jedinice. Dakle, kodne riječi $\mathbf{0}$, $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_3$ tvore linearni binarni blok kod oznake [6, 2, 2], a zbroj svih težina kodnih riječi iznosi 6.

Zadatak 10. Govorni signal se u predajniku promatranog prijenosnog sustava uzorkuje frekvencijom $f_u = 8$ kHz, a potom kodira s 10 bita po svakom uzorku. Prije slanja kanalom signal je dodatno obrađen tako da je njegova funkcija gustoće vjerojatnosti Gaussova uz zadržanu prijenosnu brzinu. Novonastali signal $x(t)$ šalje se AWGN kanalom u kojem omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 255. Odredite koliko minimalno mora iznositi širina prijenosnog pojasa da bi se signal prenio kanalom uz proizvoljno malu pogrešku.

a) 8 kHz;

b) 10 kHz;

c) 9 kHz;

d) 11 kHz;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja

Signal koji se uzorkuje frekvencijom 8 kHz i kodira s 10 bitova po uzorku proizvodi digitalni signal $x(t)$ prijenosne brzine R = 80 kbit/s. Ako se signal $x(t)$ želi slati AWGN kanalom uz proizvoljno malu pogrešku, tada je nužno ispuniti uvjet da ja kapacitet kanala veći ili jednak prijenosnoj brzini: $C \geq R$. Dakle, mora vrijediti:

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \geq R$$

$$B \geq \frac{R}{\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)}$$

Uvrstimo li zadani omjer S/N = 255, dobivamo da mora vrijediti $B \geq 10$ kHz.