Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 5 bodova, netočno odgovoreni 2 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Razmatrajte blok kôd s 8 kodnih riječi koji svaku poruku duljine 3 bita kodira dodatnim paritetnim bitom koristeći pri tome neparni paritet. Odredite vjerojatnost da zadani kôd ne otkrije pogreške bita koje mogu nastati prilikom prijenosa kodnih riječi binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,01.

a) $960{,}6\cdot 10^{-3}$; b) $588{,}07\cdot 10^{-6}$; c) $38{,}82\cdot 10^{-3}$; d) $961{,}18\cdot 10^{-3}$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Zadani paritetni kôd neće otkriti sve dvostruke i četverostruke pogreške na bilo kojoj kodnoj riječi. Dakle, vjerojatnost neotkrivanja pogreške računa se prema izrazu:

$$P_e = \binom{4}{2} p^2 (1-p)^2 + \binom{4}{4} p^4 (1-p)^0$$

Uz zadani $p = 0{,}01$ točan rezultat iznosi $P_e = 588{,}07\cdot 10^{-6}$.

Zadatak 2. U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kod oznake [7, 4, 3] s generirajućim polinomom $g(x) = 1 + x + x^3$. Koder kanala koristi generirajuću matricu u obliku:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [1010011], odredite koja je poruka poslana. Pretpostavka je da je prilikom prijenosa kodne riječi kanalom eventualno nastupila jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

a) [1 0 1 0]; b) [1 1 1 1]; c) [0 0 1 1]; d) [1 0 0 1]; e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ c = [1010011] treba u polinomnom obliku podijeliti s generirajućim polinomom: $x^6 + x^4 + x + 1 : x^3 + x + 1 = x^3 + 1 = d(x)$, što znači da je poslana poruka [1001]. Da to doista vrijedi, moguće je provjeriti množenjem vektora poruke **d** sa zadanom generirajućom matricom **G**: $[1001]\cdot\mathbf{G} = [1010011]$, što odgovara zadanoj kodnoj riječi koju je dekoder kanala primio.

Zadatak 3. Ako se u AWGN kanalu srednja snaga signala S [W] poveća x puta, odredite za koliko se promijeni kapacitet kanala, uz pretpostavku da u kanalu djeluje bijeli Gaussov šum srednje snage šuma N [W], a kanal ima karakteristiku idealnog niskog propusta širine prijenosnog pojasa B [Hz]. Svakako uzmite u obzir i pretpostavku da je omjer S/N puno veći od 1.

a) poveća se za $(x + 1)\cdot B$ [bit/s]; b) poveća se za $B\cdot\log_2(x)$ [bit/s]; c) poveća se za $x\cdot B$ [bit/s];

d) poveća se za $B\cdot\log_2(x + 1)$ [bit/s]; e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kapacitet kanala računamo koristeći izraz

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}.$$

Prije povećanja snage i uz uvjet da je $S/N >> 1$, imamo

$$C_1 \approx B\log_2\left(\frac{S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}.$$

Ako se srednja snaga signala poveća x puta, kapacitet kanala poveća se na iznos C_2

$$C_2 \approx B\log_2\left(\frac{x \cdot S}{N}\right) \text{ [bit/simbol]}.$$

Razlika iznosi $C_2 - C_1 = B \cdot \log_2(x)$ bit/simbol.

Zadatak 4. Zadan je kod Ham(2). Odredite kodnu brzinu tog koda.

a) 2/3; b) 1/¨2; c) 1/3; d) 3/4; e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

U svakoj kodnoj riječi duljine 3 bita jedan bit je korisnički, Dakle, kodna brzina $R = k/n = 1/3$.

Zadatak 5. U nekom AWGN kanalu na signal s Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti i srednje snage 3 W djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = 7{,}5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz, $\forall f \in \mathbf{R}$. Koliko iznosi maksimalni iznos kapaciteta ostvariv u takvom kanalu?

a) 138,629 Mbit/s; b) 577,078 Mbit/s; c) 277,259 Mbit/s; d) 288,539 Mbit/s;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

S obzirom da su srednja snaga signala i srednja snaga šuma zadane, maksimalni kapacitet ostvariv u takvom kanalu bit će postignut kad je širina prijenosnog pojasa, B, beskonačna. Tada kapacitet kanala teži prema $S/N_0 \cdot \log_2(\mathrm{e})$. S obzirom da je spektralna gustoća snage bijelog Gaussovog šuma zadana za sve frekvencije, to znači da je $S_N(f) = N_0/2$. Uvrštavanjem svih poznatih veličina dobivamo da maksimalni kapacitet zadanog kanala iznosi 288,539 Mbit/s.

Zadatak 6. Razmatrajte linearni binarni ciklični kôd K s oznakom $[n, 11]$. Poznato je da kodne riječi [001111111111000] i [111111111111111] pripadaju zadanom kodu. Odredite generirajući polinom $g(x)$ koda K.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$; b) $x^4 + x^3 + x^2 + 1$; c) $x^4 + x^3 + x^2$; d) $x^4 + x^3 + x^2 + x$;

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Temeljem duljine zadanih kodnih riječi proizlazi da je $n = 15$. Dakle, $[n, k] = [15, 11]$. Stoga generirajući polinom $g(x)$ mora biti stupnja $n - k$, odnosno $15 - 11 = 4$. Pri određivanju generirajućeg polinoma zadanog koda moguće je koristiti sljedeća pravila:

1. Zbroj dvije kodne riječi koda K daje novu kodnu riječ koja pripada kodu K;

2. Ciklični posmak kodne riječi iz K daje novu kodnu riječ iz K;

3. Generirajući polinom je polinom najmanjeg stupnja u K [$g(x) \neq 0$].

Temeljem prvog pravila, zbrajanjem zadanih kodnih riječi u aritmetici modulo 2 dobivamo novu kodnu riječ koda K, tj.

$$\begin{array}{r} 111111111111111 \\ +\ 001111111111000 \\ \hline 110000000000111 \end{array}$$

Tako dobivenu kodnu riječ posmaknemo za 2 mjesta ulijevo uslijed čega dobivamo kodnu riječ [000000000011111]. Ta kodna riječ pripada kodu K (pravilo 2). Koristeći treće pravilo dobivamo da za generirajući polinom danog koda vrijedi: $g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Kodna riječ [000000000011111], izražena polinomski, jednaka je umnošku polinoma poruke $d(x) = 1$ i generirajućeg polinoma. Evidentno je da množenjem bilo kojeg polinoma poruke, osim $d(x) = 0$ i $d(x) = 1$, i generirajućeg polinoma stupnja 4 ne možemo dobiti kodnu riječ čiji polinom ima stupanj manji od 5. Dakle, $g(x)$ je polinom najmanjeg stupnja u kodu K, a ujedno je i različit od 0.

Zadatak 7. Izvor generira poruke nastale ravnomjernim kodiranjem simbola iz skupa X sastavljenog od 128 jednako vjerojatnih simbola, $X = \{x_1, \ldots, x_{128}\}$. Poruke se prije slanja u kanal kodiraju Hammingovom tehnikom zaštitnog kodiranja. Širina prijenosnog pojasa komunikacijskog kanala iznosi 4 kHz, dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB. Odredite koliko je poruka moguće prenositi promatranim komunikacijskim kanalom unutar svake sekunde. Napomena: konačni rezultat zaokružite na prvi cijeli broj manji od ili jednak proračunatom iznosu.

a) 1775 poruke/s; b) 2663 poruke/s; c) 2421 poruka/s; d) 1597 poruka/s;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako skup od 128 jednako vjerojatnih simbola kodiramo ravnomjernim kodom, tada je svaki simbol opisan jednoznačnom porukom duljine 7 bita. Nadalje, ako tu poruku kodiramo Hammingovim kodom, tada je na svaku poruku potrebno dodati 4 zaštitna bita na pozicije 1, 2, 4 i 8 u kodnoj riječi. Dakle, ukupan broj bita po svakoj kodnoj riječi iznosit će 11. Kanal širine prijenosnog pojasa 4 kHz u kojem omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB ima kapacitet

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 4\cdot 10^3 \log_2\left(1+100\right) = 26632{,}85\ \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$$

Podijelimo li kapacitet kanala s duljinom svake kodne riječi, dobivamo da je svake sekunde promatranim kanalom moguće poslati, sukladno 2421,17 kodnu riječ, odnosno poruku. Uzevši u obzir i napomenu, konačan rezultat je 2421 poruka/s.

Zadatak 8. Zadan je linearni binarni blok kôd K s oznakom $[n, k]$ te s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Svaka kodna riječ koda K ima sistematičan oblik: $\mathbf{c} = [\mathbf{d}\ \mathbf{p}]$, pri čemu $\mathbf{d} = [d_1\ d_2\ \ldots\ d_k]$ i $\mathbf{p} = [p_1\ p_2\ \ldots\ p_{n-k}]$ predstavljaju poruku (bitove poruke), odnosno zaštitni dio (paritetne bitove). Odredite paritetne bitove ($\mathbf{p}$) u kodnoj riječi $\mathbf{c}$ na izlazu kodera kanala, ako na njegov ulaz dolazi poruka 1010.

a) 101; b) 111; c) 100; d) 001; e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Temeljem zadane matrice **H** možemo odrediti da vrijedi $[n, k] = [7, 4]$. Nadalje, neka je $\mathbf{c} = [d_1\ d_2\ d_3\ d_4\ p_1\ p_2\ p_3]$. Ako je **c** kodna riječ koda K, tada vrijedi: $\mathbf{c}\cdot\mathbf{H}^T = \mathbf{0}$. Temeljem te jednakosti dobivamo sustav linearnih jednadžbi:

(1) $d_4+p_1+p_2+p_3=0$

(2) $d_2+d_3+p_2+p_3=0$

(3) $d_1+d_3+p_1+p_3=0$

(1) + (2) → $p_1= d_2+d_3+d_4$

(1) + (3) → $p_2= d_1+d_3+d_4$

(1) + (2) + (3) → $p_3= d_1+d_2+d_4$

Sada možemo odrediti matricu **G** koda K:

$$G=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

U konačnici dobivamo **c** = [1010]·**G**=[1010 **101**], pa je **p** = [1 0 1].

Zadatak 9. Zadana su dva paralelna kanala u kojima djeluje aditivni bijeli Gaussov šum, u prvom kanalu šum Z_1, u drugom kanalu šum Z_2, te vrijedi $E[Z_1] = E[Z_2] = 0$, $E[Z_1^2] = 0{,}5$ i $E[Z_2^2] = 0{,}7$. Na ulazu prvog kanala djeluje signal X_1, dok na ulazu drugog kanala djeluje signal X_2. Neka je $E[X_1] = E[X_2] = 0$ te $E[X_1^2] + E[X_2^2] = 0{,}4$. Odredite maksimalnu dinamiku u zadanom sustava kanala, izraženu brojem bita po simbolu.

a) 0,326 bit/simbol; b) 0,415 bit/simbol; c) 0,424 bit/simbol; d) 0,435 bit/simbol;

e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Dinamika u sustavu paralelnih kanala jednaka je zbroju dinamika pojedinih kanala, tj.:

$$D=D_1+D_2=\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{0,4-\sigma_1^2}{\sigma_{Z_2}^2}\right)$$

Maksimum dinamike moguće je odrediti deriviranjem prethodnog izraza po σ_1 i izjednačavanjem istog s nulom. Dakle, iz

$$\frac{dD}{d\sigma_1}=\frac{1}{2\ln 2}\frac{1}{1+\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_{Z_1}^2}}\frac{2\sigma_1}{\sigma_{Z_1}^2}+\frac{1}{2\ln 2}\frac{1}{1+\dfrac{0,4-\sigma_1^2}{\sigma_{Z_2}^2}}\frac{-2\sigma_1}{\sigma_{Z_2}^2}=0$$

$$\sigma_1\left(\frac{1}{\sigma_{Z_1}^2+\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_{Z_2}^2+0,4-\sigma_1^2}\right)=0$$

dobivamo dva rješenja: $\sigma_{11} = 0$ i $\sigma_{12} = \sqrt{0,3}$. Uvrštavanjem prvog rješenja u izraz za D dobivamo da je D = 0,326 bit/simbol, a uvrštavanjem drugog rješenja dobivamo D = 0,435 bit/simbol što predstavlja maksimalnu dinamiku u promatranom sustavu paralelnih kanala.

Zadatak 10. Odredite iznos varijable a za koji entropija kontinuirane slučajne varijable X, čija je funkcija gustoće vjerojatnosti zadana izrazom

$$f_X(x)=\begin{cases} bx^2 & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{inače} \end{cases}, \ a,\ b > 0,$$

poprima vrijednost 0 nat/simbol.

a) $e^{-1/3}$; b); $3e^{-2/3}$ c) $3e^{-1/3}$; d) $e^{-2/3}$; e) ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X mora zadovoljavati svojstvo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$$

U ovom konkretnom slučaju to znači

$$\int_0^a f_X(x)\,dx = \int_0^a bx^2\,dx = b\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^a = \frac{ba^3}{3} = 1$$

Dakle, $b = 3/a^3$. Entropija promatrane slučajne varijable X jednaka je

$$H(X) = -\int_0^a bx^2 \ln\left(bx^2\right)dx \text{ [nat/simbol].}$$

S obzirom da općenito vrijedi

$$\int x^2 \ln(\lambda x) = \frac{x^3}{3}\ln(\lambda x) - \frac{x^3}{9}$$

te uzevši da je $\lambda = \sqrt{b}$ vrijedi

$$H(X) = -2b\left[\frac{x^3}{3}\ln\left(\sqrt{b}x\right) - \frac{x^3}{9}\right]_0^a = -2b\frac{a^3}{3}\left[\ln\left(\sqrt{b}a\right) - \frac{1}{3}\right] =$$

$$= \left|b = \frac{3}{a^3}\right| = -2\left(\ln\sqrt{\frac{3}{a}} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \ln\frac{a}{3}$$

Entropija može biti pozitivna, nula ili negativna, ovisno o parametru a

$$\begin{aligned} H(X) &> 0 \quad a > 3e^{-2/3} \\ H(X) &= 0 \quad a = 3e^{-2/3} \\ H(X) &< 0 \quad a < 3e^{-2/3} \end{aligned}$$