3.10. Odredite kodnu brzinu za sljedeće kodove:

i) K= {0000,0101, 1010, 1111};

ii) K= {0000, 1110, 1111, 0101, 1010} ;

iii) K= {0000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100, 1111 };

iv) K je kod sa 16 kodnih riječi i duljinom kodne riječi 7 bitova.

$$R = \frac{k}{n}$$

- i) $k = 2$, $n = 4$ => $R = 2/4 = 0.5$
- ii) $M = 5$, $k = \log_2 5$, $n = 4$ => $R = (\log_2 5)/4 = 0.5805$
- iii) $k = 3$, $n = 4$ => $R = 3/4 = 0.75$
- iv) $M = 16$, $k = 4$, $n = 7$ => $R = 4/7 = 0.5714$

3.11. Dan je linearni blok kod K s matricom provjere pariteta **H**, tj. $\mathbf{H}^T$:

$$\mathbf{H^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Odredite udaljenost koda K.

ii) Odredite kodnu riječ (≠ **0**) koda K koja ima minimalnu težinu.

i) Odredite udaljenost koda K.

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{A^T} \mid \mathbf{I_3}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Udaljenost koda možemo odrediti tako da odredimo minimalan broj stupaca matrice **H** koji zbrojeni u aritmetici modulo 2 daju rezultat **0**.

Zbrajanjem 3. i 5. stupca dobivamo: $010 \oplus 010 = 000 \Rightarrow d(K) = 2$

ii) Odredite kodnu riječ (≠ **0**) koda K koja ima minimalnu težinu.

Iz **H** možemo odrediti generirajuću matricu koda:

$$\mathbf{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \left[\mathbf{I_3} \mid \mathbf{A}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Odredimo sve kodne riječi koda K:

Minimalnu težinu ima kodna riječ 001010.

$$K = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right.$$

$$w(001010) = 2$$

3.12. Dan je binarni kod *K* s kodnim riječima K = {0101, 1010, 1100}. Odredite sve kodne riječi koda $K^{\perp}$ ($K^{\perp}$ je dualni kod od koda *K* !).

- Ako bi kod *K* imao samo 3 riječi kao što piše u zadatku, onda ne bi bio linearan
- Iz nelinearnog koda nije moguće dobiti dualni kod
- Samo linearni kodovi imaju generirajuće matrice
- Zadane kodne riječi koda *K* očito su reci generirajuće matrice nekog linearnog koda

$$K = \begin{cases} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{cases} \longrightarrow \mathrm{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Generirajuću matricu **G** potrebno je svesti na standardni oblik: **G** = [$\mathbf{I}_k$ | **A**] (u ovom slučaju *k* = 3)
- Prvo se zamijene 2. i 3. stupac, a zatim i 1. i 4. stupac te naposljetku dodavanjem 3.retka 1. retku dobije se:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Iz standardnog oblika generirajuće matrice **G** je iščitati matricu **A** na sljedeći način:

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Generirajuća matrica koda $K^{\perp}$ dobije se na sljedeći način:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mid \mathbf{I}_{n-k}] \longrightarrow \mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Množenjem redaka matrice **H** nulom i jedinicom te njihovom linearnom kombinacijom (množenje matrice retka **H** s 0 i 1) dobije $K^{\perp}$:

$$K^{\perp} = \begin{cases} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{cases}$$

3.14. Dan je linearni blôk kôd K za binarni simetrični kanal u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa p_g. Neka su K = {00000, 11010, 01111, 10101} kodne riječi danog koda.

Odredite:

a) generirajuću matricu, **G**, danog koda, kao i matricu provjere pariteta, **H**;

b) standardni niz danog koda K za sve moguće sindrome;

c) vjerojatnost ispravnog dekodiranja u ovisnosti o p_g ako se koristi sindromsko dekodiranje.

a)

$$\mathbf{G} = ?$$

$$\mathbf{H} = ?$$

$$K = \begin{cases} 00000 \\ 11010 \\ 01111 \\ 10101 \end{cases}$$

K je blôk kôd s dimenzijama (n, M, d) = (5, 4, 3), gdje je n duljina kodne riječi, M broj kodnih riječi, a d udaljenost koda. Iz $M = 2^k = 4$ slijedi da je k jednak 2.

Generirajuća matrica **G** je oblika: $\mathbf{G} = [\mathbf{I}_k \mid \mathbf{A}]$

Tražimo dvije linearno nezavisne kodne riječi čijom linearnom kombinacijom možemo generirati kod.

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Očitamo matricu **A** iz matrice **G** pomoću koje dobimo matricu **H**.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \left[\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mid \mathbf{I}_{n-k}\right] \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Standardni niz koda K za sve moguće sindrome

Prvi stupac u tablici su vektori pogreške. U drugom, trećem i četvrtom stupcu su kodne riječi zbrojene s vektorom pogreške. U zadnjem stupcu je sindrom.

Sindrom primljene kodne riječi **c** računamo kao: $S(\mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}}$

e	c + e			S(c + e)
00000	11010	01111	10101	000
00001	11011	01110	10100	001
00010	11000	01101	10111	010
00100	11110	01011	10001	100
01000	10010	00111	11101	111
10000	01010	11111	00101	101
00011	11001	01100	10110	011
01001	10011	00110	11100	110

Prvi redak prikazuje slučaj bez pogreške kada je sindrom jednak 0. U drugom do šestom retku se nalaze sindromi koji prikazuju pogrešku na jednom bitu. Ti sindrom se mogu iščitati iz matrice **H** kao njezini stupci.

Zadnja dva retka prikazuju sindrom pri pogrešci na dva bita.

c) Vjerojatnost ispravnog kodiranja $p(K)$

$$p(K) = \sum_{i=0}^{n} N_i \cdot p_g{}^i \cdot (1 - p_g)^{n-i}$$

N_i – broj vektora pogreške e s i pogrešnih bitova koji pripadaju standardnom nizu blok koda K duljine n

p_g – vjerojatnost pogrešnog prijenosa

$N_0 = 1 \quad N_1 = 5 \quad N_2 = 2 \quad N_3 = N_4 = N_5 = 0$

$$p(K) = \sum_{i=0}^{n} N_i \cdot p_g{}^i \cdot (1 - p_g)^{n-i} = (1 - p_g)^5 + 5 p_g (1 - p_g)^4 + 2 p_g{}^2 (1 - p_g)^3$$

3.15. Dan je binarni kod *K* s generirajućom matricom

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Odredite minimalnu Hammingovu udaljenost koda.

ii) Neka je primljena kodna riječ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ koja ima najviše jedan pogrešan simbol i jedan obrisan (x). Odredite kodnu riječ koja je poslana.

- **i)** Minimalnu udaljenost koda *K* dobivamo na način da odredimo koliko minimalno stupaca u matrici **H** treba zbrojiti u aritmetici modulo 2 da bi rezultat njihova zbroja bio 0.
- Iz $G = [I^k | A]$ odredimo matricu **A**: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow -A^T = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
- Matrica provjere pariteta glasi: $H = [-A^T | I_{n-k}] = [A^T | I_{n-k}]$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rješenje je: $d(k) = 4$ $\qquad (1110 \oplus 1101 \oplus 0010 \oplus 0001 = 0000)$

ii) Izračunamo sindrom prema izrazu: $S(c') = c' \cdot H^T$

$$S(c') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0\cdot x & 1+0\cdot x & 1+0\cdot x & 1+1\cdot x \end{bmatrix}$$

Za $x = 0$ dobivamo sindrom : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Za $x = 1$ dobivamo sindrom : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Iz zadatka znamo da je došlo do samo jedne pogreške što znači da se dobiveni sindrom mora nalaziti u matrici $\mathbf{H}^T$. Upravo se sindrom $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ nalazi u toj matrici.

Iz toga zaključujemo da je došlo do pogreške na četvrtom simbolu, te da je x=0.

Konačno dobivamo poslanu kodnu riječ: $\mathrm{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.16. Dan je binarni blok kôd *K*. Na ulazu kodera kanala danog koda pojavljuju se tri poruke, i to: $\mathbf{d}_1$ = [101] , $\mathbf{d}_2$ = [011] i $\mathbf{d}_3$ = [111]. Na izlazu kodera kanala, za dane tri poruke $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$ pojavljuju se sljedeće tri kodne riječi $\mathbf{c}_1$ = [100101], $\mathbf{c}_2$ = [001011] i $\mathbf{c}_3$ = [010110], slijedno gledano. Odredite 5. i 6. bit u kodnoj riječi koja odgovara poruci $\mathbf{d}_4$ = [110].

Neka je $\mathrm{G}_2 = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$ matrica koja predstavlja 5. i 6. stupac generirajuće matrice danog koda.

Tada vrijedi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathrm{G}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Iz čega slijede sustavi jednadžbi:

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 0 & 1 \cdot d + 0 \cdot e + 1 \cdot f = 1 \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 1 & 0 \cdot d + 1 \cdot e + 1 \cdot f = 1 \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c = 1 & 1 \cdot d + 1 \cdot e + 1 \cdot f = 0 \end{array}$$

Iz čega dobivamo:

$$\begin{array}{ll} a = 0 & d = 1 \\ b = 1 & e = 1 \\ c = 0 & f = 0 \end{array}$$

Na kraju iz toga dobivamo rješenje:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{c}_4 = \begin{bmatrix} x & y & z & w & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gdje x, y, z i w označavaju nepoznate bitove čiji izračun nije tražen u zadatku.

3.17. Dan je linearni blok kod K s generirajućom matricom

$$G=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$$

Odredite:

i) generirajuću matricu koda $K^{\perp}$ (**Napomena**: $K^{\perp}$ je dualni kod koda K);

ii) minimalnu Hammingovu udaljenost između svih parova kodnih riječi koda $K^{\perp}$ koje počinju s 10;

iii) kodnu brzinu koda $K^{\perp}$.

i) $G^{\perp}=?$

- Trebamo ***G*** svesti na standardni oblik :

$$G=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1\\0&1&1&0&0&1&1\\0&0&0&1&1&1&1\end{bmatrix}\approx\left[\begin{array}{ccc:cccc}1&0&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&1\\0&0&1&0&1&1&1\end{array}\right]$$

- Kreiramo ***H*** :

$$H=\left[\begin{array}{ccc:cccc}1&1&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1&0\\1&1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

- ***G***$^{\perp}$ dobijemo tako da napravimo iste izmjene kao u ***G***:

$$G^{\perp}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0&1&0\\1&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

ii) $d_{\min}=?$

$$K^{\perp}=\begin{cases}0000000\\1110001\\0110010\\1000011\\1010100\\0100101\\1100110\\0010111\\1101000\\0011001\\1011011\\0101011\\0111100\\1001101\\0001110\\1111111\end{cases}$$

parovi kodnih riječi koda $K^{\perp}$ koje počinju s 10 :

1. 1000011
2. 1010100
3. 1011010
4. 1001101

$1.\rightarrow 2.\quad d=4$

$1.\rightarrow 3.\quad d=4$

$1.\rightarrow 4.\quad d=3$

$2.\rightarrow 3.\quad d=3$

$2.\rightarrow 4.\quad d=3$

$3.\rightarrow 4.\quad d=4$

$$d_{\min}=3$$

iii) $R = ?$

$$R = \frac{k}{n} = \frac{4}{7}$$

- k-broj informacijskih bitova u kodnoj riječi
- n-duljina kodne riječi