Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 5. veljače 2014.

Napomena:

Svaki točno riješen zadatak boduje se s najviše 7 bodova. Svaki zadatak potrebno je rješavati na zasebnom listu papira. U svakom potpitanju jasno istaknite konačni odgovor. Svaka izračunata veličina mora imati točnu brojčanu vrijednost i po potrebi mjernu jedinicu.
U zadacima koji su razdvojeni na više dijelova (tzv. I. dio, II. dio,…) ne postoji nikakva povezanost između navedenih dijelova.

Trajanje ispita: 150 minuta.

ZADACI

Zadatak – 1: (I. dio) **{4 boda}** Signal $x(t) = 2e^{-\frac{t}{5}}u(t)$ [V] dovodi se na ulaz idealnog niskopropusnog filtra (NPF). Odredite graničnu frekvenciju NPF-a, f_g, tako da je energija signala na njegovom izlazu jednaka polovici energije signala na njegovom ulazu.

Napomena: $\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}dx = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{b}{a}x\right) + \text{konst.}$

$u(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$

(II. dio) **{3 boda}** Signal $x(t) = \cos^4 2\pi t$ [V] dovodi se na ulaz idealnog niskopropusnog kanala čija je gornja granična frekvencija 3 Hz. Odredite analitički oblik signala, $y(t)$, na izlazu zadanog kanala.

***Rješenje*:**

(I. dio) $X(f) = \int_0^\infty x(t)e^{-j2\pi ft}dt = \cdots = \frac{2}{\frac{1}{5}+j2\pi f} \rightarrow |X(f)|^2 = \frac{4}{\left(\frac{1}{5}\right)^2+(2\pi f)^2}$

tj.:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2df = 2\int_0^{+\infty}\frac{4}{\left(\frac{1}{5}\right)^2+(2\pi f)^2}df = 8\frac{1}{\frac{1}{5}\cdot 2\pi}\arctan\left(\frac{2\pi}{\frac{1}{5}}f\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{20}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)$$
$$= 10 \text{ Ws}$$

Nadalje,

$$E_y = \int_{-f_g}^{+f_g}|Y(f)|^2df = \int_{-f_g}^{+f_g}|X(f)|^2df = 2\int_0^{+f_g}\frac{4}{\left(\frac{1}{5}\right)^2+(2\pi f)^2}df = 5$$

$$\frac{20}{\pi}\arctan(10\pi f_g) = 5$$

$$\arctan(10\pi f_g) = \frac{\pi}{4}$$

$$10\pi f_g = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f_g = \frac{1}{10\pi}\text{ Hz}$$

(II. dio) Koristeći Eulerovu formulu $\cos 2\pi t = \frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right)$ kao i binomnu formulu $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ dobivamo:

$$x(t) = \left(\frac{1}{2}\left(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}\right)\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{j8\pi t} + 4e^{j4\pi t} + 6 + e^{-j4\pi t} + e^{-j8\pi t}\right).$$

Iz prethodnog izraza se vidi da se komponente spektra signala $x(t)$ nalaze na frekvencijama: 4 Hz, 2 Hz, 0 Hz, – 2 Hz i – 4 Hz, slijedno gledano.

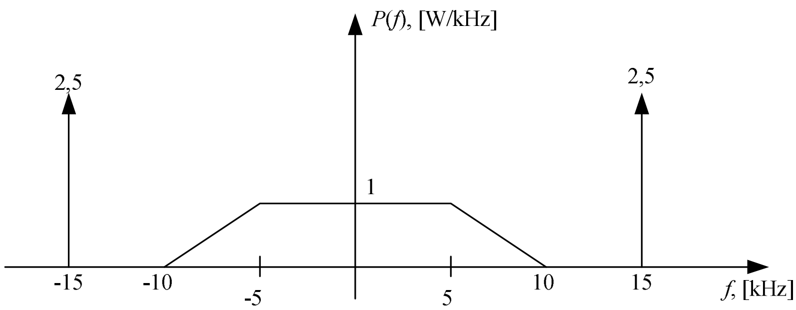
Dakle, na izlazu zadanog niskopropusnog kanala, gornje granične frekvencije 3 Hz, pojavljuje se signal oblika:

$$y(t) = \frac{1}{16}\left(4e^{j4\pi t} + 6 + 4e^{-j4\pi t}\right) = \frac{1}{16}\left(6 + 8\cos 4\pi t\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 4\pi t \ \text{[V]}.$$

Zadatak – 2: (I. dio) **{4 boda}** Zadan je slučajni signal $X(t) = A + B \cdot t$ gdje su A i B nezavisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu [–1, +1].

- i) Odredite očekivanje od $X(t)$, tj. $\mu_X(t)$.
- ii) Odredite autokorelacijsku funkciju $R_X(t_1, t_2)$ slučajnog signala $X(t)$.
- iii) Je li $X(t)$ stacionaran u širem smislu? Obrazložite odgovor!

(II. dio) **{3 boda}** Na slici je dana spektralna gustoća snage, $P(f)$, signala $p(t)$. Odredite koliki postotak ukupne snage signala se nalazi iznad 10 kHz.



Rješenje:

(I. dio)

i)

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = E[A + B \cdot t] = E[A] + E[B] \cdot t = 0$$

jer su A i B s jednolikom razdiobom na [–1, +1] i vrijedi $E[A] = E[B] = 0$.

ii)

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E[(A + +B \cdot t_1)(A + B \cdot t_2)]$$
$$= E[A^2] + E[AB]t_2 + E[AB]t_1 + E[B^2]t_1t_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t_1t_2$$

Slučajne varijable A i B su nezavisne te vrijedi $E[AB] = E[A]E[B] = 0$. Nadalje,

$$E[A^2] = E[B^2] = \int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2} dx = \cdots = \frac{1}{3}$$

iii)

Slučajni signal $X(t)$ NIJE stacionaran u širem smislu jer njegova autokorelacijska funkcija ne ovisi o razlici vremena t_1 i t_2.

(II. dio)

Ukupna srednja snaga signala $p(t)$ iznosi:

$$P_{uk} = 2\left(\frac{1\dfrac{\text{W}}{\text{kHz}}\cdot 5\,\text{kHz}}{2} + 1\frac{\text{W}}{\text{kHz}}\cdot 5\,\text{kHz} \right) + 2\cdot 2{,}5\frac{\text{W}}{\text{kHz}}\cdot 1\,\text{kHz} = 20\,\text{W}.$$

Snaga signala iznad 10 kHz je:

$$P_{>10kHz} = 2\cdot 2{,}5\frac{\text{W}}{\text{kHz}}\cdot 1\,\text{kHz} = 5\,\text{W}.$$

Dakle, postotak ukupne srednje snage signala koji se nalazi iznad 10 kHz iznosi:

$$x = \frac{P_{>10kHz}}{P_{uk}}\cdot 100 = 25\%.$$

Zadatak – 3: Za neki linearni binarni blok kôd K zadani su svi njegovi mogući vektori pogreške i za neke od njih njima pridruženi sindromi, tj. *vektor pogreške* → (*sindrom*): 000000 → (?), 110000 → (011), 000001 → (?), 100000 → (?), 010000 → (010), 001000 → (111), 000100 → (100) i 000010 → (101).

i) **{3 boda}** Odredite sve kodne riječi koda K.

ii) **{2 boda}** Neka je primljena kodna riječ **c**'=[110010]. Odredite najvjerojatniju poslanu kodnu rječ **c**. **Napomena:** Pri dekodiranju se koristi sindromsko dekodiranje.

iii) **{2 boda}** Odredite kodnu brzinu koda $K^{\perp}$ ($K^{\perp}$ je dualni kôd koda K).

Rješenje:

Lako se uviđa da se radi o kodu $[n, k]=[6, 3] \rightarrow t = 1$ i $d_{\min} = 3$.

Poznavajući vektore pogreške nekog koda K i njima pridijeljene sindrome moguće je odrediti transponiranu matricu provjere pariteta ($\mathbf{H}^T$). Nadalje, formirajmo tablicu *vektor pogreške* → *sindrom*, tj:

Vektor pogreške, **e**	Sindrom, **s**
000000	000
100000	001
010000	010
001000	111
000100	100
000010	101
000001	110
110000	011

Dobivamo:

$$\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i)

Neka su kodne riječi zadanog koda oblika **c** = [*abcdef*], gdje su a, b, c, d, e i f iz {0, 1}. Također, vrijedi sljedeće: [*abcdef*] · $\mathbf{H}^T$= [000]. Iz prethodne jednakosti dobivamo:

$c+d+e+f=0$ ------ (1)

$b+c+f=0$ ------ (2)

$a+c+e=0$ ------ (3)

Napomena: zbrajanje se provodi u aritmetici modulo-2.

Koristeći jednakosti (1), (2) i (3) dobivamo kodne riječi koda K, tj.:

a	*b*	*c*	*D*	*e*	*f*
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0

ii)

Odredimo sindrom primljene kodne riječi **c**'=[110010], tj. **s**(**c**') = **c**' · $\mathbf{H}^T$= [110]. U prethodnoj tablici sindroma lako pronalazimo da dobivenom sindromu odgovara vektor pogreške **e**=[000001], odnosno da je najvjerojatnija poslana kodna riječ **c** = **c**'+ **e** = [110011]**.**

iii) Kodna brzina koda $K^{\perp}$ je: $R^{\perp} = 0{,}5$.

Zadatak – 4: (I. dio) **{4 boda}** Zadan je binarni linearni blok kôd $K \subseteq F_2^n$ koji je ujedno sam sebi i dualni kôd, tj. $K^\perp = K$.

i) Odredite koliko redaka ima matrica **G** koda K ($K \subseteq F_2^n$).
ii) Dokažite da je svaka kodna riječ koda K parne težine.
iii) Dokažite da kodna riječ 11...1, težine n, pripada kodu K.

Napomena: Zadatak je potrebno riješit za općeniti n i isto tako samo matematički korektna rješenja uzimat će se u razmatranje.

(II. dio) **{3 boda}** Zadan je binarni ciklični blok kôd K [15, 7] s generirajućim polinomom $g(x)=x^8+x^7+x^6+x^4+1$.

i) Na ulazu kodera zadanog koda pojavljuje se poruka čiji je polinomski zapis $d(x)=x^4+x+1$. Odredite polinomski i binarni zapis kodne riječi u sistematičnom obliku.
ii) Je li $c(x)=x^{14}+x^5+x+1$ kodna riječ koda K?
iii) Skicirajte koder zadanog cikličnog koda.

***Rješenje*:**

(I. dio)

Neka kodna riječ $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n] \in K$. Iz uvjeta zadatka $K^\perp = K$ vrijedi i sljedeće: $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n] \in K^\perp$.

i)

Nadalje, neka generirajuća matrica, **G**, koda K ima k redaka (radi se o kodu $[n, k]$). Tada, generirajuća matrica, $\mathbf{G}^\perp$, koda $K^\perp$, ima $n - k$ redaka (radi se o kodu $[n, n-k]$). Nadalje, iz $K^\perp = K$ i $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 0$, dobivamo da je $k = n - k \rightarrow k = n/2$. Dakle, matrica **G** koda K za koji je $K^\perp = K$ ima $n/2$ redaka (paran broj redaka).

ii)

Neka kodna riječ $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n] \in K$. Iz uvjeta zadatka $\mathbf{c} \in K^\perp$, tj. vrijedi $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = 0$ što daje $c_1^2 + \dots + c_n^2 = 0$. Napomenimo da $c_1, \dots, c_n \in F_2$, i da $F_2 = \{0,1\}$ ima zanimljivo svojstvo, tj. da je $x^2=x$ za svaki $x \in F_2$. Temeljem prethodno rečenog dobivamo da vrijedi $c_1 + \dots + c_n = 0$ u F_2 što znači da je **c** <u>parne težine</u>.

iii)

Iz ii), za svaku kodnu riječ $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n] \in K$ vrijedi i $c_1 + \dots + c_n = 0$ što se može zapisati kao 11...1·**c** = 0. Ovo upućuje da 11...1 pripada kodu $K^\perp$, Međutim, kako vrijedi $K^\perp = K$ slijedi da $11\dots1 \in K$.

(II. dio)

i)

$$c(x) = d(x)x^{n-k} + r(x)$$ sistematični oblik kodne riječi

$$r(x) = \frac{d(x)x^{n-k}}{g(x)}$$

$$(x^{12} + x^9 + x^8) : (x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1) = x^4 + x^3$$

$$\underline{x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^4}$$

$$x^{11} + x^{10} + x^9 + x^4$$

$$\underline{x^{11} + x^{10} + x^9 + x^7 + x^3}$$

$$x^7 + x^4 + x^3 \rightarrow r(x)$$

$$c(x) = x^{12} + x^9 + x^8 + x^7 + x^4 + x^3 = d(x)x^r + r(x)$$

$c = [0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$

ii)

Sindrom kodne riječi $c(x)$ određujemo iz $S(c(x)) = \frac{x^{n-k}c(x)}{g(x)}$

Ako je $c(x)$ kodna riječ koda K tada je njen sindrom **0**.

Nadalje dobivamo:

$$x^{22} + x^{13} + x^9 + x^8 : x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1 = x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x$$

$$\underline{x^{22} + x^{21} + x^{20} + x^{18} + x^{14}}$$

$$x^{21} + x^{20} + x^{18} + x^{14} + x^{13} + x^9 + x^8$$

$$\underline{x^{21} + x^{20} + x^{19} + x^{17} + x^{13}}$$

$$x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{14} + x^9 + x^8$$

$$\underline{x^{19} + x^{18} + x^{17} + x^{15} + x^{11}}$$

$$x^{15} + x^{14} + x^{11} + x^9 + x^8$$

$$\underline{x^{15} + x^{14} + x^{13} + x^{11} + x^7}$$

$$x^{13} + x^9 + x^8 + x^7$$

$$\underline{x^{13} + x^{12} + x^{11} + x^9 + x^5}$$

$$x^{12} + x^{11} + x^8 + x^7 + x^5$$

$$\underline{x^{12} + x^{11} + x^{10} + x^8 + x^4}$$

$$x^{10} + x^7 + x^5 + x^4$$

$$\underline{x^{10} + x^9 + x^8 + x^6 + x^2}$$

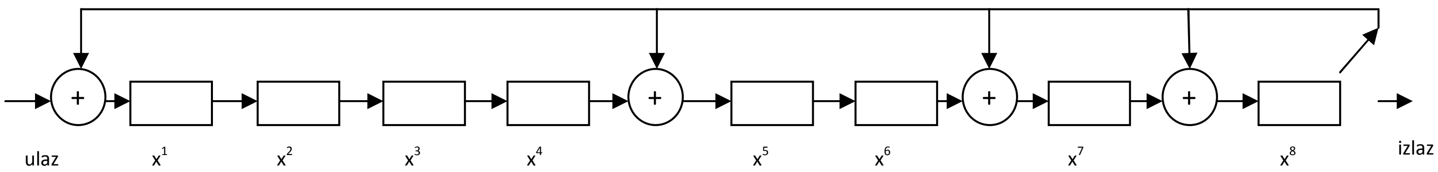
$$x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2$$

$$\underline{x^9 + x^8 + x^7 + x^5 + x}$$

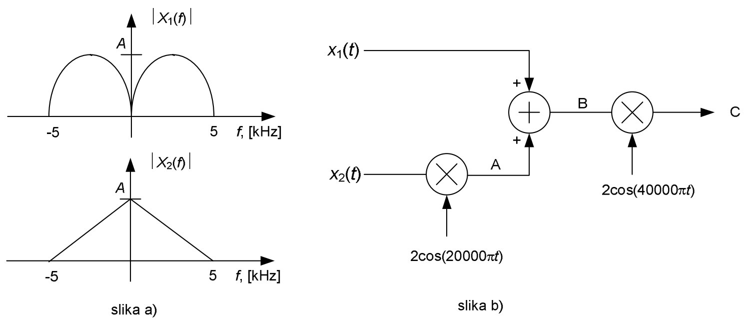
$$x^6 + x^4 + x^2 + x$$

Obzirom da prethodni postupak određivanja sindroma kodne riječi ima ostatak, tj. vrijedi da sindrom $S(c(x)) \neq 0$ što znači da $c(x)$ nije kodna riječ koda *K*.

iii)



Zadatak – 5: (I. dio) **{4 boda}** Dva signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ čiji su amplitudni spektri $|X_1(f)|$ i $|X_2(f)|$ dani na slici a), dovode se na ulaz prijenosnog sustava predočenog na slici b).



i) Skicirajte aplitudni spektar signala u točkama A, B i C.

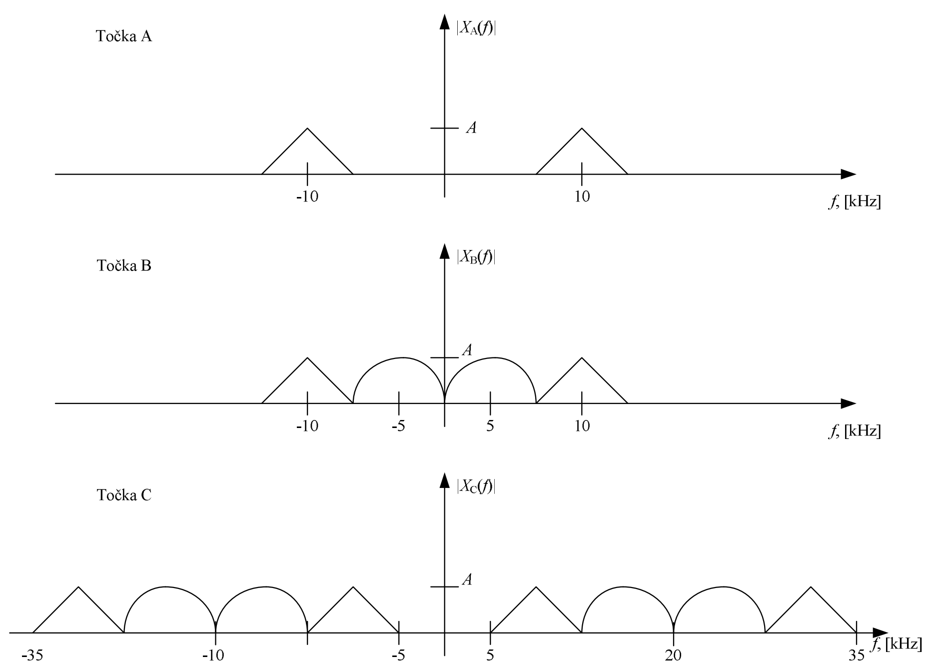
ii) Odredite širinu pojasa prijenosa (u kHz) koji zauzimaju signali u točkama A, B i C.

(II. dio) **{3 boda}** Zadan je binarni blok kôd *K*. Na ulazu kodera kanala zadanog koda pojavljuju se tri poruke, i to: $\mathbf{d}_1$=[101], $\mathbf{d}_2$=[011] i $\mathbf{d}_3$=[111]. Na izlazu kodera kanala, za dane tri poruke $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$ pojavljuju se sljedeće tri kodne riječi $\mathbf{c}_1$=[101101], $\mathbf{c}_2$=[110100] i $\mathbf{c}_3$=[101011], slijedno gledano. Odredite kodnu riječ koja odgovara poruci $\mathbf{d}_4$=[110].

***Rješenje*:**

(I. dio)

i)



ii) B_A=10 kHz; B_B=15 kHz i B_C=30 kHz

(II. dio)

$[n, k] = [6, 3]$; $M = 2^k = 8$;

$\mathbf{d}_1 = [101] \rightarrow \mathbf{c}_1=[101101]$

$\mathbf{d}_2 = [011] \rightarrow \mathbf{c}_2=[110100]$

$\mathbf{d}_3 = [111] \rightarrow \mathbf{c}_3=[101011]$

$\mathbf{d}_4 = [110] \rightarrow \mathbf{c}_4=[?]$

$\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_i$

Neka je generirajuća matrica, **G**, oblika:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & g_{15} & g_{16} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & g_{25} & g_{26} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} & g_{35} & g_{36} \end{bmatrix}$$

Nadalje, iz uvjeta zadatka dobivamo:

$\mathbf{c}_1 = \mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{G} = [101] \cdot \mathbf{G}=[g_{11}+g_{31}\;\; g_{12}+g_{32}\;\; g_{13}+g_{33}\;\; g_{14}+g_{34}\;\; g_{15}+g_{35}\;\; g_{16}+g_{36}]=[101101]$

$\mathbf{c}_2 = \mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{G} = [011] \cdot \mathbf{G}=[g_{21}+g_{31}\;\; g_{22}+g_{32}\;\; g_{23}+g_{33}\;\; g_{24}+g_{34}\;\; g_{25}+g_{35}\;\; g_{26}+g_{36}]=[110100]$

$\mathbf{c}_3 = \mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{G} = [111] \cdot \mathbf{G}=[\, g_{11}+g_{21}+g_{31}\;\; g_{12}+g_{22}+g_{32}\;\; g_{13}+g_{23}+g_{33}\;\; g_{14}+g_{24}+g_{34}\;\; g_{15}+g_{25}+g_{35}\;\; g_{16}+g_{26}+g_{36}]=[101011]$

$\mathbf{c}_4 = \mathbf{d}_4 \cdot \mathbf{G} = [110] \cdot \mathbf{G}=[\, g_{11}+g_{21}\;\; g_{12}+g_{22}\;\; g_{13}+g_{23}\;\; g_{14}+g_{24}\;\; g_{15}+g_{25}\;\; g_{16}+g_{26}]=[?]$

tj.:

$$\left.\begin{aligned} g_{11} \oplus g_{21} \oplus g_{31} &= 1 \\ g_{21} \oplus g_{31} &= 1 \\ g_{11} \oplus g_{31} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_{11} = 0; g_{21} = 0; g_{31} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} g_{12} \oplus g_{22} \oplus g_{32} &= 0 \\ g_{22} \oplus g_{32} &= 1 \\ g_{12} \oplus g_{32} &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_{12} = 1; g_{22} = 0; g_{32} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} g_{13} \oplus g_{23} \oplus g_{33} &= 1 \\ g_{23} \oplus g_{33} &= 0 \\ g_{13} \oplus g_{33} &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow g_{13} = 1; g_{23} = 0; g_{33} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{14} \oplus g_{24} \oplus g_{34} = 0 \\ g_{24} \oplus g_{34} = 1 \\ g_{14} \oplus g_{34} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g_{14} = 1; g_{24} = 1; g_{34} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{15} \oplus g_{25} \oplus g_{35} = 1 \\ g_{25} \oplus g_{35} = 0 \\ g_{15} \oplus g_{35} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow g_{15} = 1; g_{25} = 1; g_{35} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} g_{16} \oplus g_{26} \oplus g_{36} = 1 \\ g_{26} \oplus g_{36} = 0 \\ g_{16} \oplus g_{36} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g_{16} = 1; g_{26} = 0; g_{36} = 0$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_4 = \mathbf{d}_4 \cdot \mathbf{G} = [110] \cdot \mathbf{G} = [011001]$$