Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Prvi ispitni rok iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 17. veljače 2021.

Pravilo bodovanja zadataka

Svaki točno odgovoreni zadatak donosi 10 bodova, netočno odgovoreni 4 negativna boda, a neodgovoreni 0 bodova.

Zadatak 1. Instrument mjeri slučajnu veličinu čije su vrijednosti zadane skupom $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Sve su vrijednosti jednako vjerojatne. Pokazivač instrumenta, namijenjen brojčanom prikazu izmjerene vrijednosti, u kvaru je koji se manifestira tako da se znak za "minus" ne upali u 40% slučajeva kad bi trebao biti upaljen. Promatrajte opisani mjerni sustav kao komunikacijski kanal i odredite transinformaciju u kanalu, izraženu jedinicom bit/simbol.

a) 1,8386

b) 1,9167

c) 1,7309

d) 1,6268

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Promatrani mjeriteljski sustav, tj. komunikacijski kanal kojim ga modeliramo, možemo opisati matricom uvjetnih vjerojatnosti prijelaza:

$$\left[P\left(y_j|x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}0,6 & 0 & 0 & 0 & 0,4\\ 0 & 0,6 & 0 & 0,4 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

pri čemu su x_i izmjerene vrijednosti, a y_j vrijednosti prikazane na pokazivaču instrumenta. Nadalje, s obzirom da su sve vrijednosti mjerene veličine međusobno jednako vjerojatne, vrijedi $P(x_i) = 0,2$, $i = 1, \dots, 5$. Koristeći matricu kanala i apriorne vjerojatnosti mjerene veličine moguće je odrediti matricu parova vjerojatnosti (x_i, y_j) koje čine mjerena i prikazana veličina:

$$\left[P\left(x_i,y_j\right)\right]=\left[P\left(x_i\right)\cdot P\left(y_j|x_i\right)\right]=\begin{bmatrix}0,12 & 0 & 0 & 0 & 0,08\\ 0 & 0,12 & 0 & 0,08 & 0\\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2\end{bmatrix}$$

Zbrajanjem po stupcima matrice $[P(x_i, y_j)]$ dobivamo vjerojatnosti pojave izmjerene veličine na pokazivaču, $P(y_j) = [0,12\ \ 0,12\ \ 0,2\ \ 0,28\ \ 0,28]$, $j = 1, \dots, 5$. Transinformaciju u kanalu moguće je odrediti koristeći izraz:

$$I\left(X;Y\right)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}P\left(x_i,y_j\right)\log_2\left(\frac{P\left(x_i,y_j\right)}{P\left(x_i\right)\cdot P\left(y_j\right)}\right)$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti vjerojatnosti dobivamo $I(X; Y) = 1,8386$ bit/simbol.

Zadatak 2. Neki diskretni bezmemorijski izvor generira simbole x_i iz skupa X, $i = 1, 2, \ldots, 8$. Vjerojatnosti simbola, $P(x_i)$, tako su raspodijeljene da je entropija $H(X)$ maksimalna. Kodirajte zadani skup simbola optimalnim ternarnim kodom te odredite efikasnost tako nastalog koda.

a) 0,9604

b) 0,6667

c) 0,75

d) 0,9464

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Ako skup sadrži 8 simbola i ima maksimalnu entropiju, to znači da vrijedi $H_2(X) = \log_2 8 = 3$ bit/simbol. Pri tome mora vrijediti $P(x_i) = 1/8$ za svaki $i = 1, 2, \ldots, 8$. Ako takav skup simbola želimo kodirati optimalnim ternarnim kodom, potrebno je koristiti Huffmanovo ternarno kodiranje. Nakon njegove primjene dobivamo 8 ternarnih kodnih riječi od kojih svaka ima duljinu točno $L = 2$ ternarna simbola po simbolu izvora. Dakle, efikasnost koda jednaka je: $\varepsilon = H_3(X)/L = \log_3(2)\cdot H_2(X)/L = 0{,}9464$.

Zadatak 3. Zadan je diskretni binarni kanal. Na izvoru informacije pojavljuju se simboli x_1 i x_2, a na odredištu simboli y_1 i y_2. Matrica šuma u kanalu koji povezuje izvor i odredište, $[P(Y|X)]$, je sljedeća:

$$P[Y \mid X] = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Odredite za koliko se kapacitet ovog zadanog kanala razlikuje od maksimalnog mogućeg kapaciteta binarnog simetričnog kanala (traži se apsolutna vrijednost razlike).

a) 0 bit/simbol

b) 0,92 bit/simbol

c) 1 bit/simbol

d) 0,08 bit/simbol

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

U zadanom kanalu vjerojatnost pogrešnog prijenosa simbola je $p_g = 1/3$. Kapacitet binarnog simetričnog kanala dan je izrazom:

$$C = 1 + p_g \log_2\left(p_g\right) + \left(1 - p_g\right)\log_2\left(1 - p_g\right)[\text{bit/simbol}]$$

Ako u izraz uvrstimo $p_g = 1/3$, dobit ćemo $C = 0{,}08$ bit/simbol. Maksimalan mogući kapacitet binarnog simetričnog kanala, C_{max}, iznosi 1 bit/simbol. Sukladno tome, apsolutna vrijednost razlike između C_{max} i C iznosi 0,92 bit/simbol.

Zadatak 4. U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kôd [7, 4, 3] s generirajućim polinomom $g(x) = 1 + x + x^3$. Koder kanala koristi sljedeću generirajuću matricu:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [1010011], odredite koja je poruka poslana. Pretpostavka: prilikom prijenosa nastupila je ili jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

a) 1010

b) 0111

c) 1001

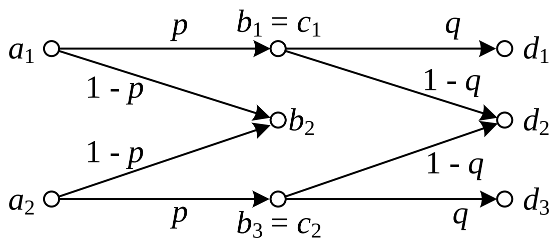
d) 1011

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ **c** = [1010011] treba u polinomnom obliku podijeliti s generirajućim polinomom: $x^6 + x^4 + x + 1 : x^3 + x + 1 = x^3 + 1 = d(x)$, što znači da je poslana poruka [1001]. Da to doista vrijedi, moguće je provjeriti množenjem vektora poruke **d** sa zadanom generirajućom matricom **G**: [1001]·**G** = [1010011], što odgovara zadanoj kodnoj riječi koju je primio dekoder kanala.

Zadatak 5. Dva binarna kanala s brisanjem vezana su u seriju.



Na ulazu prvog kanala (lijevog na slici) dolaze binarni simboli a_1, odnosno a_2. Izlazi iz prvog kanala postaju ulazi u drugi kanal (desno na slici), tj. $b_1 = c_1$ i $b_3 = c_2$. Na izlazu serijskog spoja dva kanala su binarni simboli d_1, odnosno d_3. U prvom kanalu vjerojatnost ispravnog prijenosa simbola označena je kao p, a u drugom kao q. Simboli b_2 i d_2 su obrisani simboli u prvom, odnosno drugom kanalu. Odredite vjerojatnost da neki simbol, a_1, odnosno a_2, prolaskom kroz oba kanala bude obrisan. **Napomena**: radi se o uvjetnoj vjerojatnosti oblika: ako je na ulaz kanala došao simbol a_i, $i = 1, 2$, kolika je vjerojatnost da je i obrisan.

a) $1 – p$

b) $1 – pq$

c) $p·(1 – q)$

d) $(1 – p)·(1 – q)$

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Vjerojatnost da neki simbol, a_1 ili a_2, bude prenijet bez pogreške kroz serijski spoj kanala iznosi pq. Drugim riječima, dotični simbol mora biti prenijet ispravno kroz prvi kanal (vjerojatnost p) i kroz drugi kanal (vjerojatnost q). Dakle, vjerojatnost da je simbol obrisan je $1 – pq$. Do toga se može doći i logikom: vjerojatnost da je simbol obrisan u prvom kanalu iznosi $r_1 = 1 – p$, a vjerojatnost da je simbol obrisan u drugom kanalu iznosi $r_2 = p·(1 – q)$. Ukupna vjerojatnost brisanja iznosi $r_u = r_1 + r_2 = 1 – pq$.

Zadatak 6. Razmatrajte informacijski izvor koji generira 5 simbola: x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5. Njihove vjerojatnosti su $p_i = P(x_i)$, $i = 1, …, 5$. Pretpostavite da vrijedi: $P(x_1) \geq P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5)$.

Odredite najmanji broj q za kojeg vrijedi da iz uvjeta $P(x_1) > q$ slijedi da je $n_1 = 1$. Pri tome n_1 označava duljinu binarne kodne riječi koja je Huffmanovim kodom pridijeljena simbolu x_1.

a) 3/5

b) 2/5

c) 1/3

d) 1/4

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Kako bi bio zadovoljen uvjet $P(x_1) \geq P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5)$, mora vrijediti $P(x_2) = P(x_3) = P(x_4) = P(x_5) = [1 – P(x_1)]/4$. Primijenimo li Huffmanovo kodiranje, prvi će biti združeni simboli x_4 i x_5 u nadsimbol vjerojatnosti $[1 – P(x_1)]/2$. Nakon toga će simboli x_2 i x_3 biti združeni u nadsimbol vjerojatnosti $[1 – P(x_1)]/2$. Kako bi simbol bio kodiran samo jednim bitom, mora vrijediti uvjet: $P(x_1) > [1 – P(x_1)]/2$ iz čega slijedi $P(x_1) > 1/3$. Dakle, $q = 1/3$.

Zadatak 7. Izvor generira crno-bijelu TV-sliku koja se sastoji od $2 \cdot 10^5$ elemenata (piksela). Svaki od njih može poprimiti jednu od 10 razina svjetline, pri čemu su sve te razine međusobno jednako vjerojatne. Pretpostavite da izvor TV-signala generira 25 okvira (svaki okvir se sastoji od jedne ranije opisane slike) te da omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 30 dB. Odredite koliko najmanje mora iznositi širina prijenosnog pojasa AWGN kanala kroz kojeg je moguće prenijeti takvu sliku uz proizvoljno malu vjerojatnost pogreške.

a) 1,6664 MHz

b) 16,6096 MHz

c) 3,3526 MHz

d) 0,1341 MHz

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Entropija svakog elementa (piksela) od kojeg se sastoji slika iznosi

$$H(X) = \sum_{i=1}^{10} P(x_i) \log_2 P(x_i)$$

S obzirom da vrijedi $P(x_i) = 1/10$ za svaki $i = 1, \ldots, 10$, $H(X) = \log_2 10$ bit/element = 3,32193 bit/element. Dakle, informacijska brzina takvog izvora iznosi $R = H(X) \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 25 = 16{,}60964$ Mbit/s. Za kapacitet kanala mora vrijediti $C \geq R$. Kapacitet AWGN kanala računamo izrazom

$$C = B \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$$

Iz toga možemo odrediti uvjet kojeg mora zadovoljavati širina prijenosnog pojasa kanala:

$$B \geq \frac{R}{\log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)} \left[\text{Hz}\right]$$

Omjer S/N je zadan kao 30 dB, što znači da je $S/N = 1000$. Nakon uvrštenja u gornji izraz dobivamo $B \geq 1{,}6664$ MHz.

Zadatak 8. Neki binarni blok kôd K ima oznaku $(5, M, d(K))$, pri čemu je $d(K) > 1$. Nadalje, pretpostavimo da je kôd K perfektan te označimo s N_1 broj različitih kodova K_i, $i = 1, \ldots, N_1$, koji zadovoljavaju navedena svojstva. Nakon toga razmatrajmo kôd C s oznakom $[5, k, d(C)]$, $k = \log_2 M$, $d(C) = d(K)$, koji ima sva svojstva koda K i k tome je i cikličan kôd. Neka je N_2 broj različitih kodova C_j, $j = 1, \ldots, N_2$, koji zadovoljavaju zadana svojstva. Odredite omjer N_1/N_2.

a) 8

b) 32

c) 64

d) 16

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Iz oznake koda i uvjeta perfektnosti možemo odrediti broj M:

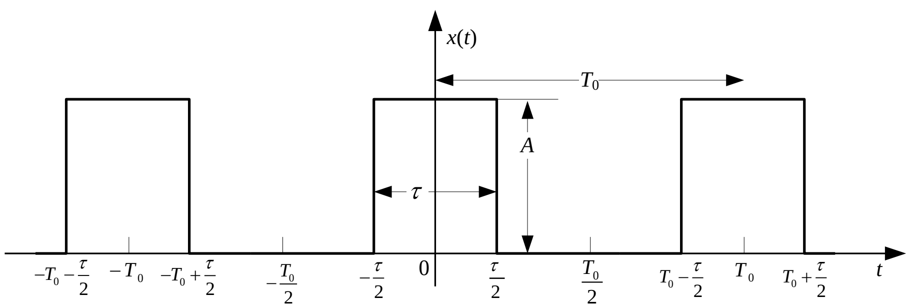
$$M = \frac{2^5}{\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \cdots + \binom{5}{t}}, \quad d(K) = 2t + 1.$$

S obzirom da je zadano da je $d(K) > 1$ treba ispitati za koje vrijednosti $d(K)$ kôd postaje perfektan. Općenito vrijedi $d(K) \geq 2t + 1$, a za perfektan kôd mora vrijediti $d(K) = 2t + 1$. Dakle, za $d(K) = 2$ kod nije perfektan ($t = 0$, $M < 32$), za $d(K) = 3$ ($t = 1$) kôd nije perfektan jer $M = 4 < 2^5/6$ (vidjeti tablicu 4.1. na 135. stranici udžbenika „Uvod u teoriju informacije i kodiranje“), za $d(K) = 4$ ($t = 1$) kôd nije perfektan, i konačno da $d(K) = 5$ ($t = 2$), kod je perfektan, $M = 2^5/16 = 2$ (to potvrđuje tablica 4.1. na 135. stranici udžbenika „Uvod u teoriju informacije i kodiranje“). Dakle, kod K može imati samo dvije kodne riječi. Takvih kodova ima ukupno 32: uzmemo bilo koju kodnu riječ, npr. 10110, tada je druga kodna riječ u kodu neminovno 01001. Iz toga slijedi $N_1 = 32$. No ako dodamo i uvjet cikličnosti, što za sobom povlači i linearnost koda, tada se broj kodova C svodi na 2:

$$C_1 = \begin{cases} 00000 \\ 11111 \end{cases}, \quad C_2 = \begin{cases} 11111 \\ 00000 \end{cases}.$$

Dakle, $N_2 = 2$, a omjer $N_1/N_2 = 16$.

Zadatak 9. Na ulaz kanala s aditivnim šumom dolazi signal $s(t)$, pravokutni periodični signal



A = 1 V, τ = 1 ms. U kanalu s aditivnim šumom tom se signalu pribraja šum $n(t)$ spektralne gustoće snage $0{,}5\cdot 10^{-6}$ W/Hz, za svaki $f \in \mathbf{R}$. Šum ima obilježja stacionarnog slučajnog procesa. Signal $x(t) = s(t) + n(t)$ ulazi u idealni niskopropusni filtar čija je prijenosna funkcija definirana izrazom

$$H(f)=\begin{cases} K & \text{za} \left|f\right|<10^3 \text{ Hz} \\ 0 & \text{za} \left|f\right|\geq 10^3 \text{ Hz} \end{cases},$$

Granična frekvencija filtra odabrana je na takav način da od signala $s(t)$ kroz filtar prolazi samo istosmjerna komponenta. Uzevši u obzir sve zadane veličine, uvjete i ograničenja odredite najmanji omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma na izlazu idealnog niskopropusnog filtra.

a) 1

b) 2000

c) 1000

d) 500

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

S obzirom da je idealni niskopropusni filtar linearni i vremenski nepromjenjivi sustav (LTI), prolazak signala $s(t)$ i šuma $n(t)$ kroz njega možemo promatrati odvojeno. Signal na izlazu idealnog niskopropusnog filtra označimo kao $y(t) = s_f(t) + n_f(t)$, pri čemu su s_f i n_f filtrirane komponente signala, odnosno šuma. Dakle, signal $s_f(t)$ sastoji se isključivo od istosmjerne komponente:

$$s_f(t)=\left|H(f)\right|\cdot A\frac{\tau}{T_0}.$$

Nadalje, šum je slučajni signal te ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa te vrijedi:

$$N_f(f)=\frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2,$$

pri čemu je $N_f(f)$ spektralna gustoća snage šuma na izlazu filtra. Sada je moguće odrediti izraz za omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma na izlazu filtra:

$$\frac{S}{N}=\frac{\left|H(f)\right|^2 A^2\left(\frac{\tau}{T_0}\right)^2}{\left|H(f)\right|^2\frac{N_0}{2}2B}.$$

No, kako kroz filtar smije proći samo istosmjerna komponenta signala $s(t)$ onda mora vrijediti da je $B \leq 1/T_0$. Što je T_0 manji to je omjer $1/T_0$ veći te samim time raste i omjer S/N. Očito će S/N poprimiti najmanji iznos za $B = 1/T_0$:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\min}=\frac{A^2\tau^2B^2}{N_0B}=\frac{A^2\tau^2B}{N_0}=\frac{1^2\cdot\left(10^{-3}\right)^2\cdot 10^3}{10^{-6}}=10^3$$

Zadatak 10. Zadan je binarni blok kôd K. Na ulazu kodera kanala danog koda pojavljuju se tri poruke: $\mathbf{d}_1$ = [101], $\mathbf{d}_2$ = [011] i $\mathbf{d}_3$ = [111]. Na izlazu kodera kanala, za dane tri poruke $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ i $\mathbf{d}_3$

pojavljuju se sljedeće tri kodne riječi: $\mathbf{c}_1$ = [100101], $\mathbf{c}_2$ = [001011], odnosno $\mathbf{c}_3$ = [010110]. Odredite 5. i 6. bit u kodnoj riječi koja odgovara poruci $\mathbf{d}_4$ = [001].

a) 00

b) 10

c) 01

d) 11

e) Ništa od navedenog.

Postupak rješavanja:

Temeljem zadanih poruka i kodnih riječi očito je da se radi o kodu $[n, k] = [6, 3]$. Također, temeljem zadanih kodnih riječi $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$ i $\mathbf{c}_3$ vidljivo je da generirajuća matrica danog koda K nije u standardnom obliku. Dakle, neka je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{bmatrix}, a_i, b_i, c_i \in \{0,1\} \; za \; i = 1, \ldots, 6$$

Nadalje, za zadane poruke i kodne riječi vrijede sljedeće jednakosti:

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_1 \rightarrow [101] \cdot \mathbf{G} = [100101] \qquad (1)$$

$$\mathbf{d}_2 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_2 \rightarrow [011] \cdot \mathbf{G} = [001011] \qquad (2)$$

$$\mathbf{d}_3 \cdot \mathbf{G} = \mathbf{c}_3 \rightarrow [111] \cdot \mathbf{G} = [010110] \qquad (3)$$

Temeljem navedenih jednakosti određujemo bitove matrice **G**. Na primjer,

Temeljem jednakosti (1) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_1$ vrijedi sljedeće: $a_1 \oplus c_1 = 1$

Temeljem jednakosti (2) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_2$ vrijedi sljedeće: $b_1 \oplus c_1 = 0$

Temeljem jednakosti (3) za prvi bit kodne riječi $\mathbf{c}_3$ vrijedi sljedeće: $a_1 \oplus b_1 \oplus c_1 = 0$

Iz toga slijedi: $a_1 = 0$, $b_1 = 1$ i $c_1 = 1$. Po istoj analogiji određujemo sve ostale bitove matrice **G** i dobivamo:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle, $\mathbf{c}_4 = \mathbf{d}_4 \cdot \mathbf{G}$ = [111000], odnosno bitovi koji odgovaraju 5. i 6. poziciji u kodnoj riječi $\mathbf{c}_4$ su 0 i 0.