SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predmet: Teorija informacije (34315)
Ak. godina: 2010./2011.
Predavač: doc.dr.sc. željko ilić

Zadaci

Zadatak /zi03/:

Komunikacijskim kanalom prenose se četiri poruke generirane iz skupa od četiri simbola $\mathbf{X} = \{x_1,...,x_4\}$. Vjerojatnosti pojavljivanja simbola su sljedeće: $\mathbf{p}_X = [p/2,\ p/2,\ (1\text{-}p)/2,\ (1\text{-}p)/2]$, slijedno gledano ($p \in (0,\ 1)$). Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je:

$$\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1-f & f & 0 & 0 \\ f & 1-f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ uz } 0 \le f \le 1.$$

Odredite općeniti izraz za varijablu p koji osigurava maksimalnu količinu informacije po simbolu koja se u prosjeku može prenijeti danim kanalom. (**Napomena:** $H(f) = \log_2 \frac{1}{f} + \log_2 \frac{1}{1-f}$))

Rješenje: [$p = 1/\left(1 + 2^{H(f)}\right)$]

Zadatak /zi04/:

Mjerni uređaj mjeri napon čija je funkcija gustoće vjerojatnosti zadana jednadžbom

$$f(u) = a \cdot u \cdot (3-u), u \in [0,3]$$
$$f(u) = 0, u \notin [0,3]$$
$$a \in \mathbf{R}$$

Uređaj može prikazati samo cijele brojeve i polovine, koji su zaokruženi na prvi veću vrijednost (npr. 1,2V se zaokružuje na 1,5 V, a 1,9 V se zaokružuje na 2,0 V). Ako se napon uzorkuje svakih 10 ms, koliki je ukupni srednji sadržaj informacije generiran za jednu minutu?

Rješenje: [1,83 kbyte]

Zadatak /zi05/:

Na ulazu diskretnog komunikacijskog kanala pojavljuju se simboli $\mathbf{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Uvjetne vjerojatnosti prijelaza u kanalu dane su sljedećim izrazom $p(y_j|x_i) = \begin{cases} 0.5, & y_j = (x_i \pm 1) \bmod 5 \\ 0, & \text{inace} \end{cases}$.

Odredite kapacitet danog kanala.

Rješenje: [1,322 bit/simbol]

Zadatak /zi06/:

Na ulazu diskretnog binarnog komunikacijskog kanala pojavljuju se dva simbola $\mathbf{X} = \{x_1,\ x_2\}$. Odredite vjerojatnosti pojavljivanja ulaznog skupa simbola za koje se postiže maksimum transinformacije te nakon toga odredite kapacitet danog kanala. Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu je $\left[p(y_j|x_i)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$.

Rješenje: [3/5, 2/5, 0.322 bit/simbol]

Zadatak /zi12 /:

Dana je diskretna slučajna varijabla X koja poprima vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnošću 1/4 i vrijednost 2 s vjerojatnošću 1/2. Slučajne varijable Y i Z definirane su na sljedeći način: ako je $X = 0$ tada je $Y = Z = 0$; ako je $X = 1$ tada je $Y = 1$ i $Z = 0$; ako je $X = 2$ tada je $Z = 1$ dok Y slučajno poprima jednu od vrijednosti {0, 1} s jednakom vjerojatnošću. Odredite: $H(X)$, $H(Y)$, $H(Z)$, $H(Y|X)$, $H(X, Y)$, $H(X|Y)$, $H(X, Z)$, $H(X|Z)$, $H(Y, Z)$, $H(Z|Y)$.

Rješenje: [1.5-; 1-; 1-; 0.5-; 2-; 1-; 1.5-; 0.5-; 2-; 1-bit/simbol]

Zadatak /zi13/:

//*Relativna entropija*// Dana je diskretna slučajna varijabla X koja poprima vrijednosti iz skupa vrijednosti $\{a, b, c\}$. Promatrajmo dvije razdiobe dane slučajne varijable:

simbol	$p(x)$	$q(x)$
a	0,5	1/3
b	0,25	1/3
c	0,25	1/3

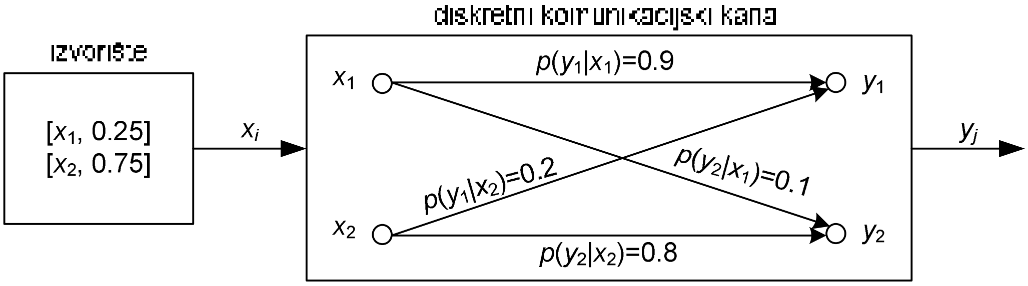
i) Odredite: $H(p)$, $H(q)$, $D(p\|q)$, $D(q\|p)$. Uočite da vrijedi: $D(p\|q) \neq D(q\|p)$.

ii) Kako je pokazano u i), u općem slučaju $D(p\|q) \neq D(q\|p)$. Međutim, pronađite p i q za slučaj u kojem diskretna slučajana varijabla X poprima vrijednosti iz skupa vrijednosti $\{0, 1\}$ tako da je $D(p\|q) = D(q\|p)$.

Rješenje: [i) 1.5-; 1.585-; 0.085-; 0.082-bit/simbol; ii) općenito za $p = 1 - q$ jednakost je zadovoljena]

Zadatak /zi20/:

Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $\mathbf{X} = \{x_1, x_2\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(x_1) = 0{,}25$ i $p(x_2) = 0{,}75$. Diskretni komunikacijski kanal je modeliran kao na slici:



Odredite:

i) vjerojatnost pojave pogrešnog simbola na izlazu kanala.

ii) matricu združenih vjerojatnosti $[p(x_i, y_j)]$.

iii) iznos korisne informacije koja se pojavljuje na izlazu kanala.

Rješenje: [i) 0.175; ii) [0.225 0.025; 0.15 0.6]; iii) ≈0.2958 bit/simbol]

Zadatak /zi21/:

Promatrajmo vezu između tipkovnice i računala kao diskretni bezmemorijski komunikacijski kanal. Na zaslonu računala želimo ispisivati brojeve od 0 do 9. Odredite kapacitet danog kanala ako:

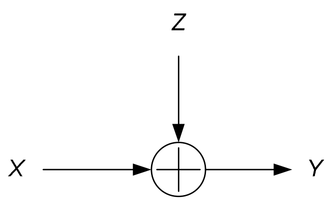
i) pritisak na bilo koju tipku (0 - 9) rezultira pojavom pripadajućeg broja na zaslonu računala.

ii) pritisak na bilo koju tipku (0 - 9) rezultira pojavom (s jednakom vjerojatnošću) pripadajućeg broja ili njemu sljedećeg broja, tj. 0 → 0 ili 1; 1 → 1 ili 2, ..., 9 →9 ili 0.

Rješenje: [i) $\log_2 10$ bit/simbol; ii) $\log_2 10 - 1$ bit/simbol]

Zadatak /zi22/:

Odredite kapacitet diskretnog bezmemorijskog kanala sa slike:



gdje je $p(Z = 0) = p(Z = a) = 0{,}5$ ($a \in \mathbf{R}$). Diskretno bezmemorijsko izvorište generira simbole iz skupa simbola $\mathbf{X} = \{0, 1\}$ s vjerojatnostima pojavljivanja $p(0)$ i $p(1)$ uz uvjet $p(0)+p(1) = 1$. Također, Z je neovisno od X. Uočite da kapacitet kanala ovisi o vrijednosti parametra a.

Rješenje: [$a = 0 \rightarrow C$=1 bit/simbol; $a = 1 \rightarrow C$=0.5 bit/simbol; $a = -1 \rightarrow C$=0.5 bit/simbol; $a \neq 0, \pm 1 \rightarrow C$=1 bit/simbol]

Zadatak – /zi01/:
Sljedeći skup boja x_i s frekvencijama pojavljivanja f_i opisuje nepomičnu sliku:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	1000	1500	900	2000	1100

Koliko manje bitova nam treba za prijenos slike ako je ista kodirana Huffmanovim binarnim kodom u odnosu kada su svi simboli kodirani kodnim riječima jednake duljine (binarna abeceda!)?

Rješenje: [4600 bitova]

Zadatak – /zi02/:
Aritmetičkim kodom kodirajte poruku RIBA_RIBI. Odredite interval koji jednoznačno definira navedenu poruku. Kumulativne podskupove (D_s i G_s za pojedini simbol) formirajte redoslijedom kako se simboli pojavljuju u poruci (npr. za 'R' je $D_s = 0$ i $G_s = 2/9$,..., za '_' je $G_s = 1$).

Rješenje: [[0,1049828 0,1049839)]

Zadatak – /zi07/:
Koristeći algoritam LZ77 kodirajte poruku *aacaacabcabaaac** uzimajući pri tome da je maksimalna duljina posmičnog prozora (PP) i prozora za kodiranje (PZK) 4, odnosno 6 simbola. **Napomena:** "*" označava kraj poruke.

Rješenje: [(0,0,a), (1,1,c), (3,4,b), (3,3,a), (1,2,c), (0,0,*)]

Zadatak – /zi09/:
Uzimajući polazni rječnik D gdje je $D[0] = a$ i $D[1] = b$ dekodirajte kodiranu poruku 0 1 1 0 2 4 6 kodiranu algoritmom LZW.

Rješenje: [*a b b a a b b a a b b*]

Zadatak – /zi11/:
Na ulazu kodera kanala, koji koristi paritetno kodiranje (*parni paritet*; vertikalna i horizontalna provjera zalihosti) pojavljuju se dvije poruke, i to: $\mathbf{x}_1$=[11] i $\mathbf{x}_2$=[01]. i) Neka je primljena kodna riječ c'=[100011101]. Koristeći vertikalnu i horizontalnu provjeru zalihosti odredite na kojem se mjestu nalazi pogreška u primljenoj kodnoj riječi. Također, odredite mjesto pogreške za sljedeće primljene kodne riječi: ii) 111110011; iii) 011111110.

Rješenje: [i) / ii) pogreška je u bitu koji pripada prvom retku i drugom stupcu; iii) pogreška je u bitu koji pripada drugom retku i drugom stupcu]

Zadatak – /zi14/:
Binarni blok kôd *K* [*n*, 2] ima minimalnu Hammingovu udaljenost $d_{\min}$=5. Odredite minimalnu duljinu kodne riječi – *n*.

Rješenje: [7]

Zadatak – /zi15/:
Dan je binarni blok kôd *K* s matricom provjere pariteta **H**:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&1\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&1\end{bmatrix}$$

i) Odredite tablicu sindroma koda *K* za sve moguće vektore pogreške.
ii) Odredite kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ **c'**=[11010]. Je li moguće jednoznačno odrediti koja je kodna riječ poslana?

Rješenje: [i) Jedno od rješenja: *vektor pogreške → sindrom*: 00000 → 000; 10000 → 100; 01000 → 110; 00100 → 111; 00010 → 001; 00001 → 101; 00101 → 010; 10100 → 011; ii) Jedno od rješenja je 01110; Nemoguće je jednoznačno odrediti koja je kodna riječ poslana. Sve ovisi o tome koji smo vodeći član pojedinog razreda uzeli]

Zadatak – /zi10/:
Dan je binarni blok kôd *K* [*n*, *k*]=[7, 3] s matricom provjere pariteta **H**:

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix}1&\_&\_&1&0&0&0\\0&\_&\_&0&1&0&0\\1&\_&\_&0&0&1&0\\1&\_&\_&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

i) Odredite sve moguće vrijednosti dvaju stupaca koji nedostaju u matrici **H** uzimajući pri tome da kodna riječ [0110011] pripada kodu *K* i da je minimalna distanca koda 4, tj. *d*(*K*)=4.
ii) Dekodirajte primljenu kodnu riječ **c'**=[0110111].

Rješenje: [i) $\mathbf{H}_1=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&0&0&1\end{bmatrix},\mathbf{H}_2=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&0&1&0\\1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}$; ii) [011]]

Zadatak – /zi16/:

Dan je Hammingov kôd K s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

i) Pokažite da su $\mathbf{c}_1$=[0010011] i $\mathbf{c}_2$=[0001111] kodne riječi koda K i odredite Hammingovu udaljenost između njih.

ii) Neka je poslana kodna riječ $\mathbf{c}$ i neka je primljena kodna riječ $\mathbf{c}'=\mathbf{c}+\mathbf{e}$. Dokažite da sindrom $\mathbf{s}=\mathbf{c}'\cdot\mathbf{H}^T$ jedino ovisi o vektoru pogreške $\mathbf{e}$.

iii) Ispišite sve sindrome za sve moguće vektore pogreške čija je težina ≤ 1.

Rješenje: [i) $\mathbf{s}_i=\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{H}^T$=[000] i=1, 2; ii) $\mathbf{s} = \mathbf{c}'\cdot\mathbf{H}^T = (\mathbf{c}+\mathbf{e})\cdot\mathbf{H}^T = \mathbf{c}\cdot\mathbf{H}^T+\mathbf{e}\cdot\mathbf{H}^T = 0+\mathbf{e}\cdot\mathbf{H}^T = \mathbf{e}\cdot\mathbf{H}^T$ iii) *vektor pogreške → sindrom*: 0000000→000, 1000000→110, 0100000→101, 0010000→011, 0001000→111, 0000100→100, 0000010→010, 0000001→001]

Zadatak – /zi17/:

Dan je binarni ciklični blok kôd K [15, 7] s generirajućim polinomom $g(x)=x^8+x^7+x^6+x^4+1$.

i) Dokažite da $g(x)$ može biti generirajući polinom koda K.

ii) Na ulazu kodera danog koda pojavljuje se poruka čiji je polinomski zapis $d(x)=x^4+x+1$. Odredite polinomski i binarni zapis kodne riječi u sistematičnom obliku.

iii) Je li $c(x)=x^{14}+x^5+x+1$ kodna riječ koda K?

Rješenje: [i) $(x^{15}+1)$ je djeljivo s $g(x)$ bez ostatka što znači da je $g(x)$ generiajući polinom koda K; ii) $c(x)=x^{12}+x^9+x^8+x^7+x^4+x^3$ ili 001 0011 1001 1000; iii) ne jer je sindrom $s(c(x))\neq 0$]

Zadatak – /zi18/:

Dan je binarni ciklični blok kôd K [n, k] koji može ispraviti jednostruku pogrešku u primljenoj kodnoj riječi. Sindromi ($s_1 - s_8$) za dani kôd su:

s_1 = 10100; s_2 = 01010; s_3 = 00101; s_4 = 10000

s_5 = 01000; s_6 = 00100; s_7 = 00010; s_8 = 00001

Odredite:

i) generirajuću matricu $\mathbf{G}$=[$\mathbf{I}$ | $\mathbf{A}$] danog koda.

ii) [n, k].

iii) generirajući polinom koda K.

iv) sve kodne riječi danog koda K.

v) kodnu riječ koja je poslana ako je primljena kodna riječ $\mathbf{c}'$=[01101011].

Rješenje: [i) $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ii) [8, 3]; iii) $g(x)=x^5+x^2+1$; iv) 00000000,...; v) 01101111]

Zadatak – /zi19/:

Izvorište generira 128 poruka, iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola $\mathbf{X} = \{x_0...,x_{127}\}$, koje se kodiraju binarnim kodom (Shannon-Fano!). Poruke se prije odašiljanja u kanal kodiraju Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja. Na ulazu dekodera kanala pojavljuje se slijed bitova 111101100001001101... Odredite prvu poruku (**d**) koja je odaslana. **Napomena:** Kontrolni bitovi u kodnoj riječi nalaze se na pozicijama 1, 2, 4, 8,...

Rješenje: [1111000]