

Teorija informacije

Osnovni pojmovi teorije informacije

Osnovni pojmovi teorije informacije

- ♦ Opći model komunikacijskog sustava
 - Diskretni komunikacijski sustav
 - Poruka i prijenos poruke
- ♦ Sadržaj informacije, entropija
- ♦ Kodiranje
- ♦ Informacijski opis komunikacijskog sustava, informacijske mjere
- ♦ Kapacitet kanala
- ♦ Prijenos informacije komunikacijskim sustavom

09/05

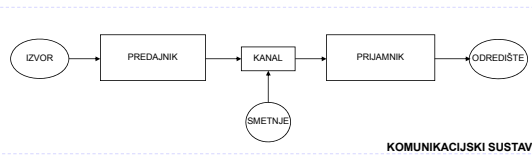
TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

2

Opći model komunikacijskog sustava

DEFINICIJA

Temeljni problem komunikacije je točno ili aproksimativno reproducirati u jednoj točki informacijskog prostora (odredište) poruku odabranu na nekoj drugoj točki (izvor) [Shannon 1948].



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

3

Diskretni komunikacijski sustav

- ♦ Jednostavniji slučaj – diskretni signali
- ♦ Ključna pitanja:
 - Što je poruka?
 - Što znači prenijeti poruku?
 - Koja je mjera za količinu informacije u nekoj poruci, te informacije prenesene sustavom?



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

4

Poruka

DEFINICIJA

- ♦ Niz simbola odabranih iz konačne abecede X
 - Abeceda je skup elementarnih simbola
$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$$
- ♦ Svaki simbol pri N -tom biranju ima vjerojatnost pojavljivanja: $x_i \longrightarrow p_N(x_i)$
- ♦ Pretpostavka (za sada): odabir simbola neovisan o prethodno odabranim simbolima: $x_i \longrightarrow p(x_i)$



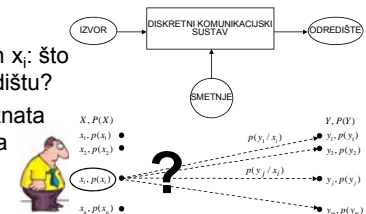
09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

5

Prijenos poruke: pogled sa izvora

- ♦ Prijenos poruke = prijenos simbola
- ♦ Na izvoru odabran x_i : što se pojavi na odredištu?
- ♦ Pretpostavka: poznata statistička svojstva prijenosa



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

6

Prijenos poruke: pogled sa odredišta

Zavod za telekomunikacije

- ♦ Prije pojave y_i , znamo vrlo malo o događajima na izvoru
- ♦ Nakon opažanja y_i znamo više: primili smo **informaciju!**

09/05 TI • Osnovni pojmovi teorije informacije 7

Sadržaj informacije poruke - primjer

Zavod za telekomunikacije

- ♦ Koliko informacije možemo maksimalno prenijeti nekom porukom?
- ♦ Primjer: pismo ili glava

- ♦ Koliko informacije je primio promatrač?
- ♦ Što ako uvijek pada pismo?
- ♦ Što ako pismo pada 70% puta?

09/05 TI • Osnovni pojmovi teorije informacije 8

Entropija

DEFINICIJA Zavod za telekomunikacije

- ♦ Entropija diskretne slučajne varijable

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) [\text{bit / simbol}]$$

- ♦ Entropija daje mjeru za sadržaj informacije

PRIMJER

09/05 TI • Osnovni pojmovi teorije informacije 9

Entropija, neodređenost, sadržaj informacije u sustavu bez smetnji

Zavod za telekomunikacije

- ♦ Neodređenost = entropija

PRJE NASTANKA PORUKE

- ♦ Informacija na izvoru, neodređenost na odredištu

NAKON NASTANKA ALI PRIJE SLANJA PORUKE

PRIJENOS $I(X; Y)$

- ♦ Prijenosom poruke neodređenost je nestala

NAKON PRIJENOSA PORUKE

09/05 TI • Osnovni pojmovi teorije informacije 10

Svojstva entropije

$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i)$ Zavod za telekomunikacije

- ♦ Sadržaj informacije ne može biti negativan $H(X) \geq 0$
- ♦ Sadržaj informacije je 0 ako se uvijek pojavljuje samo jedan simbol $H(X) = 0 \Leftrightarrow \exists i \mid p(x_i) = 1$
- ♦ Neodređenost i sadržaj informacije su maksimalni ako su vjerojatnosti simbola jednako raspoređene $H(X) \leq \log n$
 $p(x_i) = \frac{1}{n} \Rightarrow H(X) = \log n$
- ♦ Zašto baš logaritam? $H(XY) = H(X) + H(Y)$

09/05 TI • Osnovni pojmovi teorije informacije 11

Bit i binarna znamenka

Zavod za telekomunikacije

- ♦ Teorija informacije: bit je osnovna jedinica informacije
- ♦ Ostatak svijeta: bit je binarna znamenka
- ♦ Bacamo "nepošteni" novčić, pismo=1, glava=0; koliko je ovo bitova: 1111111111 ?
- ♦ Kada znamo razliku, iz konteksta je jasno što se misli

09/05 TI • Osnovni pojmovi teorije informacije 12

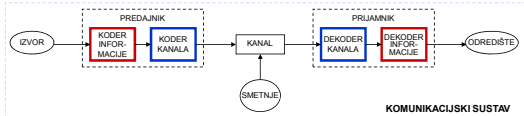
Kodiranje

DEFINICIJA



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Dodjela kodnih riječi simbolima poruke
- ♦ Poruka se "samo" pretvara u novi oblik (niz simbola)
- ♦ Zašto onda kodirati?
- ♦ U praksi, kodovi su binarni



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

13

Kodiranje i entropija



Zavod za telekomunikacije

PRIMJER	SIMBOL (x_i)	VJEROJATNOST POJAVLJIVANJA $p(x_i) = p_i$	KODNA RIJEČ (C_i)	DULJINA KODNE RIJEČI (l_i)
	1	1/2	0	1
	2	1/4	10	2
	3	1/8	110	3
	4	1/8	111	3

- ♦ Prosječna duljina kodne riječi:

$$L = \sum_{i=1}^n p_i l_i = 0.5 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.125 \cdot 3 + 0.125 \cdot 3 = 1.75 [\text{bit / simbol}] = H(X)$$

- ♦ Ne postoji kod sa manjom prosječnom duljinom
- ♦ Entropija je granica kompresije bez gubitaka

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

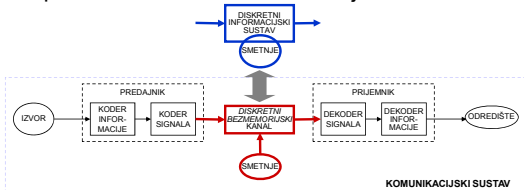
14

Informacijski opis komunikacijskog sustava



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Sustav bez smetnji ne postoji ☹️
 - Promatramo opći sustav uz (manja) ograničenja: diskretni bezmemorijski kanal
- ♦ Opis kanala – diskretni informacijski sustav



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

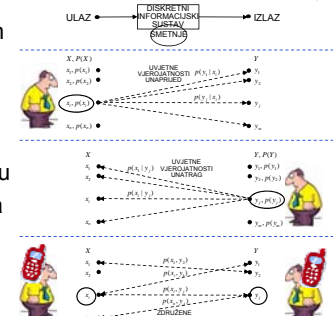
15

Vjerojatnosni opis inf. sustava (kanala)



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Opis sustava skupom vjerojatnosti
- ♦ Svaki od ova tri pogleda potpuno određuje sustav i pojave na ulazu/izlazu
- ♦ Vjerojatnosti prijelaza $x \rightarrow y$ potpuno definiraju kanal



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

16

Primjer



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Komunikacijski kanal prenosi simbole $\{a, b, c\}$
 - $p(a) = p(b) = 2p(c)$
- ♦ Matrica uvjetnih vjerojatnosti prijelaza u kanalu:

$$[p(y_j | x_i)] = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,7 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$$

- nacrtati graf prijelaza u kanalu.
- odrediti vjerojatnost pojave pojedinog simbola na izlazu iz kanala

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

17

Odnosi vjerojatnosti u inf. sustavu (kanalu)



Zavod za telekomunikacije

MATEMATIČKI OPIS	ZNAČENJE
$\sum_{i=1}^n p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(y_j) = 1$	Skup simbola na ulazu je potpun; isto vrijedi i za izlaz.
$p(x_i) = \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j), p(y_j) = \sum_{i=1}^n p(x_i, y_j)$	Vjerojatnost pojave simbola je zbroj vjerojatnosti pojava svih parova u kojima se taj simbol pojavljuje.
$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j x_i) = p(y_j)p(x_i y_j)$	Prijelazi između tri pogleda na sustav (pogled s ulaza, s izlaza ili oboje istovremeno). Veza između tri načina potpunog opisa sustava.
$p(x_i y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} = \frac{p(x_i, y_j)}{\sum_{i=1}^n p(x_i, y_j)} = \frac{p(x_i)p(y_j x_i)}{\sum_{i=1}^n p(x_i)p(y_j x_i)}$	Prijelaz iz apriori u aposteriornu vjerojatnost pojave x_i . Izračun unazadnih vjerojatnosti prijelaza. Bayesova formula.

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

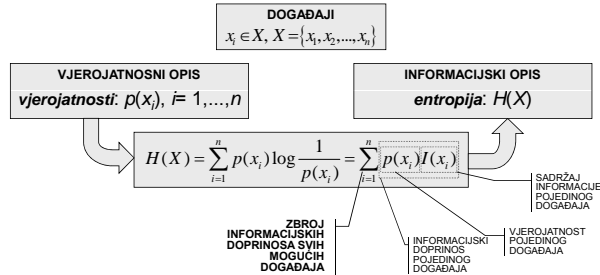
18

Vjerojatnosni opis → informacijski opis



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Entropija: informacijski opis slučajnih događaja



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

19

Informacijske mjere



Zavod za telekomunikacije

- vlastite entropije {
 - $H(X)$ ♦ Entropija na ulazu sustava
 - $H(Y)$ ♦ Entropija na izlazu sustava
- $H(X, Y)$ ♦ Združena entropija
- uvjetne entropije {
 - $H(Y|X)$ ♦ Entropija šuma, irelevantnost
 - $H(X|Y)$ ♦ Ekvivokacija, mnogoznačnost
 - $I(X; Y)$ ♦ Srednji uzajamni sadržaj informacije, transinformacija

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

20

Entropija na ulazu, izlazu, združena entropija

DEFINICIJA



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Promatramo događaje na ulazu i izlazu odvojeno:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i) \quad H(Y) = -\sum_{j=1}^m p(y_j) \log p(y_j)$$

- ♦ Promatramo događaje zajednički:

- Združena entropija para slučajnih varijabli (definicija):

$$H(X, Y) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(x_i, y_j)$$

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

21

Uvjetna entropija (općenito)

DEFINICIJA



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Prosječna preostala neodređenost varijable Y nakon što je poznata varijabla X

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= \sum_{i=1}^n p(x_i) H(Y|x=x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n p(x_i) \sum_{j=1}^m p(y_j|x_i) \log p(y_j|x_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log p(y_j|x_i) \end{aligned}$$

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

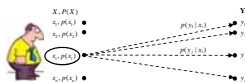
22

Entropija šuma ili irelevantnost



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Uvjetna entropija $H(Y|X)$
- ♦ Neodređenost simbola na izlazu nakon što je poslan simbol sa ulaza (promatrano s ulaza)
- ♦ Posljedica smetnji



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

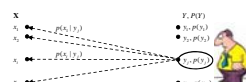
23

Mnogoznačnost ili ekvivokacija



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Uvjetna entropija $H(X|Y)$
- ♦ Preostala neodređenost simbola na ulazu nakon što je primljen simbol na izlazu (promatrano s izlaza)



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

24

Relativna entropija

DEFINICIJA



Zavod za telekomunikacije

- Mjera udaljenosti između dviju raspodjela vjerojatnosti varijable:

$$D(p \parallel q) = \sum_{i=1}^n p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)}$$

- Interpretacija

- Stvarne vjerojatnosti su p ; mi pretpostavljamo q
- Ta pogreška nosi neefikasnost; to je relativna entropija
- Kodiranjem prema pogrešnim vjerojatnostima trošimo $D(p \parallel q)$ više bitova po simbolu nego što je potrebno:

$$L = \sum_{i=1}^n p(x_i) \log \frac{1}{q(x_i)} = \sum_{i=1}^n p(x_i) \log \frac{1}{p(x_i)} + \sum_{i=1}^n p(x_i) \log \frac{p(x_i)}{q(x_i)} = H(X) + D(p \parallel q)$$

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

25

Srednji uzajamni sadržaj informacije (transinformacija)

DEFINICIJA



Zavod za telekomunikacije

- Definicija: $I(X; Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(x_i, y_j) \log \frac{p(x_i, y_j)}{p(x_i)p(y_j)}$
- Interpretacija:
 - Koliko informacije jedna varijabla pruža o drugoj
 - U kojoj mjeri su dvije varijable zavisne
 - Nezavisne: $I(X; Y) = 0$
 - Jednake: $I(X; Y) = H(X) = H(Y)$

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

26

Odnos entropije i uzajamnog sadržaja informacije



Zavod za telekomunikacije

- Uzajamni sadržaj informacije $I(X; Y)$ predstavlja smanjenje neodređenosti varijable X uzrokovano poznavanjem varijable Y

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

- Uzajamni sadržaj informacije dviju varijabli je simetričan:

$$I(Y; X) = I(X; Y).$$

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

27

Odnos između entropije, združene entropije i uvjetne entropije



Zavod za telekomunikacije

- Združena entropija (neodređenost) para varijabli jednaka je zbroju neodređenosti jedne varijable, te preostale neodređenosti druge varijable uz uvjet da je prva varijabla poznata.

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y|X)$$

- Uzajamni sadržaj informacije je razlika između zbroja pojedinačnih entropija varijabli i združene entropije tih istih varijabli.

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y)$$

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

28

Vlastiti sadržaj informacije



Zavod za telekomunikacije

- Uzajamni sadržaj informacije jedne varijable same sa sobom naziva se vlastiti sadržaj informacije.
- Vlastiti sadržaj informacije slučajne varijable je upravo njena entropija:

$$I(X; X) = H(X) - H(X|X) = H(X)$$

09/05

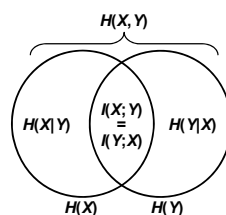
TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

29

Odnosi i svojstva informacijskih mjera



Zavod za telekomunikacije



$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(X) - H(X|Y) \\ I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ I(X; Y) &= H(X) + H(Y) - H(X, Y) \\ H(X, Y) &= H(X) + H(Y|X) \\ H(X, Y) &= H(Y) + H(X|Y) \\ I(X; Y) &= I(Y; X) \\ I(X; X) &= H(X) \\ I(X; Y) &\geq 0 \\ H(X|Y) &\leq H(X) \end{aligned}$$

09/05

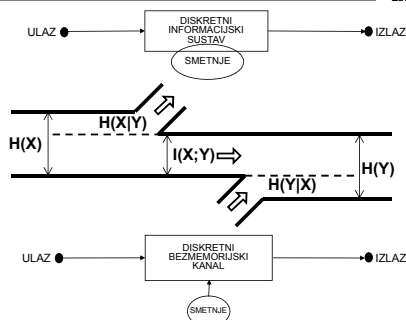
TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

30

Prijenos informacije i informacijske mjere



Zavod za telekomunikacije



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

31

Primjer



Zavod za telekomunikacije

♦ Za komunikacijski sustav zadan u prethodnom primjeru matricom uvjetnih vjerojatnosti potrebno je odrediti:

- entropiju ulaznog i izlaznog skupa simbola, tj. $H(X)$ i $H(Y)$;
- uvjetne entropije $H(X|Y)$ i $H(Y|X)$;
- uzajamni sadržaj informacije $I(X; Y)$;
- združenu entropiju para varijabli $H(X, Y)$.

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

32

Kapacitet kanala

DEFINICIJA



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Promatramo prijenos informacije kom. kanalom
- ♦ Simboli na ulazu s vjerojatnosima $p(x_i)$
- ♦ Kapacitet kanala je definiran kao:

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X; Y) \text{ [bit/simbol]}$$

Kapacitet kanala je maksimalna količina informacije po simbolu koja se u prosjeku može prenijeti kanalom

09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

33

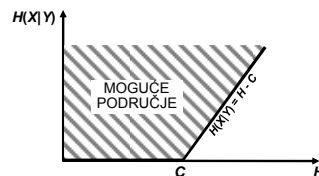
Temeljni teorem kanala sa smetnjama

TEOREM



Zavod za telekomunikacije

- ♦ Kanal kapaciteta C [bit/simbol]
- ♦ Izvor entropije H [bit/simbol]
- ♦ Ako je $H \leq C$, mogući proizvoljno mali gubici
- ♦ Ako je $H > C$, nemoguć prijenos bez gubitaka



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

34

Primjer: kapacitet simetričnog binarnog kanala



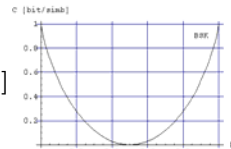
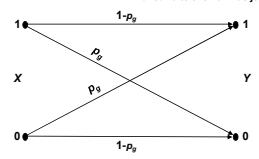
Zavod za telekomunikacije

$$C = \max_{\{p(x_i)\}} I(X; Y)$$

$$= \max_{\{p(x_i)\}} [H(Y) - H(Y|X)]$$

max. za $p(0)=p(1)=0.5$

neovisno o $p(x)$



09/05

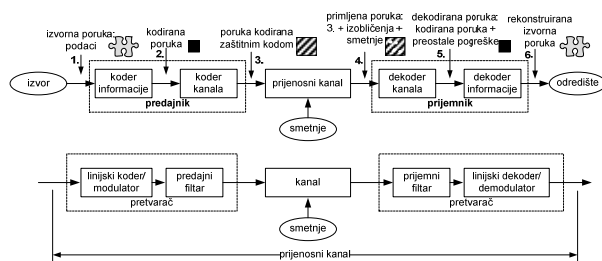
TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

35

Prijenos informacije komunikacijskim sustavom



Zavod za telekomunikacije



09/05

TI • Osnovni pojmovi teorije informacije

36