Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Završni ispit iz predmeta **TEORIJA INFORMACIJE**, 3. veljače 2015.

Rješenja zadataka

1. zadatak: Razmatrajte blok kôd s 8 kodnih riječi koji svaku poruku duljine 3 bita kodira dodatnim paritetnim bitom koristeći pri tome neparni paritet. Odredite vjerojatnost da zadani kôd otkrije pogreške bita koje mogu nastati prilikom prijenosa kodnih riječi binarnim simetričnim kanalom u kojem vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita iznosi 0,02.

a) 0,98

b) 0,925

c) $75{,}33 \cdot 10^{-3}$

d) $38{,}82 \cdot 10^{-3}$

Postupak rješavanja:

Zadani paritetni kôd će otkriti sve jednostruke i trostruke pogreške na svakoj kodnoj riječi. Dakle, vjerojatnost otkivanja pogreške računa se prema izrazu:

$$P_o = \binom{4}{1} p(1-p)^3 + \binom{4}{3} p^3(1-p)$$

Uz zadani $p = 0{,}02$ točan rezultat iznosi $P_o = 75{,}33 \cdot 10^{-3}$.

2. zadatak: Razmatrajte sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3]. Na ulazu kodera kanala koji koristi takav kôd dolaze poruke u obliku [d_1 d_2 d_3], pri čemu su d_1, d_2 i d_3 binarne znamenke. Koder kanala svaku poruku [d_1 d_2 d_3] pretvara u kodnu riječ [c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6] pri čemu vrijedi:

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus d_3,\ c_5 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3,\ c_6 = d_1 \oplus d_2$$

Pretpostavite da je dekoder kanala koji koristi identičan sistematičan linearan binarni blok kôd [6,3] primio kodnu riječ [011011]. Odredite kodnu riječ koja je najvjerojatnije poslana, tj. kodnu riječ na izlazu kodera kanala.

a) [011011]

b) [100111]

c) [010011]

d) [011101]

Postupak rješavanja:

S obzirom na navedene jednakosti

$$c_1 = d_1,\ c_2 = d_2,\ c_3 = d_3,\ c_4 = d_1 \oplus d_3,\ c_5 = d_1 \oplus d_2 \oplus d_3,\ c_6 = d_1 \oplus d_2$$

generirajuća matrica u standardnom obliku je

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{I}_3 \middle| \mathbf{A}\right]$$

Da matrica **G** doista ima ovakav oblik vidi se iz jednakosti

$$\left[d_1\, d_2\, d_3\right]\cdot \mathbf{G} = \left[c_1\, c_2\, c_3\, c_4\, c_5\, c_6\right]$$

Nadalje, transponirana matrica provjere pariteta $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ ima sljedeći oblik:

$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S obzirom da je primljena kodna riječ c' = [011011], tada za njen sindrom vrijedi:

$$S(\mathbf{c}') = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{H}^{\mathrm{T}} = [110]$$

Dobiveni rezultat odgovara trećem retku matrice $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ što znači da je pogreška nastala na trećem bitu poslane poruke **c**. Konačno, poslana je poruka **c** = [010011].

3. zadatak: Koder kanala u nekom komunikacijskom sustavu koristi Hammingov kôd zadan matricom provjere pariteta Ham(r). Odredite koliko najmanje mora iznositi r pa da kodna brzina ovako zadanog linearnog binarnog blok koda bude veća od 0,944.

a) 6 bita

b) 8 bita

c) 10 bita

d) 7 bita

Postupak rješavanja:

Hammingov kôd definiran matricom Ham(r) koristi r zaštitnih bita koji štite m bita poruke. Kodna brzina $R(K)$ definirana je kao omjer broja bita poruke, m, prema ukupnom broju bita u kodnoj riječi (zbroj broja bita poruke i broja zaštitnih bita), $m + r$. Nadalje, vrijedi relacija:

$m + r \leq 2^r - 1$. Dakle, kodna brzina uz zadani broj zaštitnih bita bit će maksimalna kad vrijedi

$m + r = 2^r - 1$. Sukladno tome, kodna brzina ovog koda Ham(r) bit će jednaka:

$$R(K) = \frac{2^r - 1 - r}{2^r - 1} = 1 - \frac{r}{2^r - 1}$$

Uzevši u obzir uvjet $R(K) > 0{,}944$ i ponuđena rješenja dobivamo da je uvjet ispunjen uz $r = 7$ bita.

4. zadatak: Izvor generira poruke nastale ravnomjernim kodiranjem simbola iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola, $X = \{x_1, \ldots, x_{128}\}$. Poruke se prije slanja u kanal kodiraju Hammingovom tehnikom zaštitnog kodiranja. Širina prijenosnog pojasa komunikacijskog kanala iznosi 4 kHz, dok omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB. Odredite koliko je poruka moguće prenositi danim komunikacijskim kanalom unutar svake sekunde.

a) 2421 poruka/s

b) 794 poruke/s

c) 3624 poruke/s

d) 3805 poruka/s

Postupak rješavanja:

Ako skup od 128 jednako vjerojatnih simbola kodiramo ravnomjernim kodom, tada je svaki simbol opisan jednoznačnom porukom duljine 7 bita. Nadalje, ako tu poruku kodiramo Hammingovim kodom, tada je na svaku poruku potrebno dodati 4 zaštitna bita na pozicije 1, 2, 4 i 8 u kodnoj riječi. Dakle, ukupan broj bita po svakoj kodnoj riječi iznosit će 11. Kanal širine prijenosnog pojasa 4 kHz u kojem omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma iznosi 20 dB ima kapacitet

$$C = B\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = 4\cdot 10^3 \log_2\left(1+100\right) = 26632{,}85 \left[\frac{\text{bit}}{\text{s}}\right]$$

Podijelimo li kapacitet kanala s duljinom svake kodne riječi, dobivamo da je svake sekunde promatranim kanalom moguće poslati 2421 kodnu riječ, odnosno poruku.

5. zadatak: U nekom komunikacijskom sustavu koder kanala koristi ciklični kod [7,4,3] s generirajućim polinomom $g(x) = 1 + x + x^3$. Koder kanala koristi generirajuću matricu u obliku:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako je dekoder kanala primio kodnu riječ [1010011], odredite koja je poruka poslana. Pretpostavka je da je prilikom prijenosa eventualno nastupila jednostruka pogreška bita na kodnoj riječi ili pogreške nije bilo.

a) [1010]

b) [1111]

c) [0011]

d) [1001]

Postupak rješavanja:

Primljenu kodnu riječ c = [1010011] treba u polinomnom obliku podijeliti s generirajućim polinomom: $x^6 + x^4 + x + 1 : x^3 + x + 1 = x^3 + 1 = d(x)$, što znači da j poslana poruka [1001]. Da to doista vrijedi, moguće je provjeriti množenjem vektora poruke **d** sa zadanom generirajućom matricom **G**: $[1001]\cdot\mathbf{G} = [1010011]$, što odgovara zadanoj kodnoj riječi koju je primio dekoder kanala.

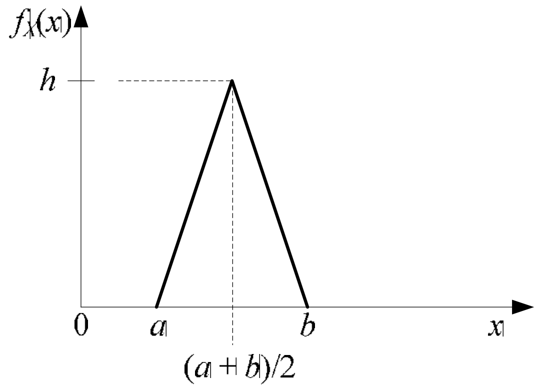
6. zadatak. Kontinuirana slučajna varijabla X ima funkciju gustoće vjerojatnosti zadanu slikom. Odredite entropiju slučajne varijable X ako je zadano $a = 1$ i $b = 5$.

a) 0,693 nat/simbol

b) –0,193 nat/simbol

c) 1,193 nat/simbol

d) –0,5 nat/simbol



Postupak rješavanja:

Izraz za $f_X(x)$ određuje se pomoću jednadžbi pravaca kroz dvije točke. Funkcija $f_X(x)$ određena je sljedećim izrazom:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2h}{b-a}(x-a) & \text{za}\ a\le x\le \dfrac{a+b}{2}\\ \dfrac{2h}{b-a}(b-x) & \text{za}\ \dfrac{a+b}{2}\le x\le b\end{cases}$$

Entropiju, tj. diferencijalnu entropiju slučajne varijable X računamo prema sljedećem izrazu:

$$H(X)=-\int_a^{(a+b)/2}\frac{2h}{b-a}(x-a)\ln\left[\frac{2h}{b-a}(x-a)\right]dx-\int_{(a+b)/2}^{b}\frac{2h}{b-a}(b-x)\ln\left[\frac{2h}{b-a}(b-x)\right]dx$$

Koristeći identitet

$$\int x\ln(x)dx=\frac{x^2}{2}\ln(x)-\frac{x^2}{4}$$

dobivamo:

$$H(X)=\frac{-h}{b-a}\left\{(x-a)^2\ln\left[\frac{2h}{b-a}(x-a)\right]-\frac{(x-a)^2}{2}\right\}\Bigg|_a^{(a+b)/2}+$$

$$+\frac{h}{b-a}\left\{(b-x)^2\ln\left[\frac{2h}{b-a}(b-x)\right]-\frac{(b-x)^2}{2}\right\}\Bigg|_{(a+b)/2}^{b}$$

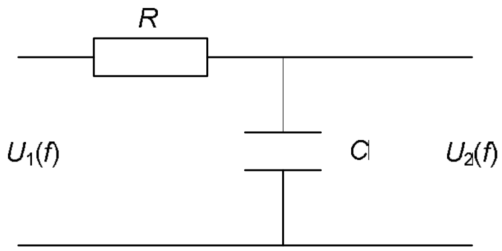
Nakon sređivanja gornjeg izraza dobivamo:

$$H(X)=\frac{h(b-a)}{2}\left[-\ln(h)+\frac{1}{2}\right]$$

S obzirom da mora vrijediti

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx=1$ jer je $f_X(x)$ funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable, u ovom konkretnom slučaju to implicira da je $h\cdot(b-a)/2=1$. Dakle, $H(X) = -\ln(h) + 1/2$. Budući da su zadani $a = 1$ i $b = 5$, mora vrijediti $h = 0{,}5$. Sukladno tome, $H(X) = -\ln(0{,}5) + 0{,}5 = 1{,}193$ nat/simbol.

7. zadatak: Neki komunikacijski kanal u kontinuiranom vremenu ima karakteristiku RC kruga, pri čemu je $R = 100\ \Omega$, a $C = 50$ nF.



Prijenosna funkcija RC kruga određena je izrazom $|H(f)| = |U_2(f)/U_1(f)|$. Odredite graničnu frekvenciju tog kanala, ako se prilikom njenog određivanja primjenjuje kriterij da je na toj frekvenciji amplitudni odziv RC kruga 10 puta manji od $|H(0)|$.

a) 95,5 kHz

b) 317 kHz

c) 3,18 MHz

d) 3,15 MHz

Postupak rješavanja:

Za amplitudnu karakteristiku prijenosne funkcije RC kruga vrijedi:

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi fRC)^2}}$$

Nadalje, na graničnoj frekvenciji f_g vrijedi: $|H(f_g)| = |H(0)|/10 = 10^{-1}$, jer je $|H(0)| = 1$. Iz navedenog slijedi

$$\sqrt{1+(2\pi f_g RC)^2} = 10$$

$$f_g = \frac{1}{2\pi RC}\sqrt{10^2-1}\ \text{Hz}$$

što daje konačan rezultat da je $f_g = 316.714$ Hz, tj. približno 317 kHz.

8. zadatak: Signal $s(t) = 4\cdot\sin(80000\cdot\pi\cdot t)$ dovodi se na ulaz sklopa za analogno-digitalnu (A/D) pretvorbu. Signal je takav da se prilikom kvantizacije koristi cijeli raspon raspoloživih razina kvantizacije, tj. svi pragovi odluke. Pri tome su svi koraci kvantizacije međusobno jednaki. Kvantizator uzima uzorke minimalnom potrebnom frekvencijom koja omogućava jednoznačan opis signala $s(t)$ pomoću njegovih uzoraka. Sukladno tome, odredite minimalnu brzinu prijenosa u bit/s na izlazu A/D pretvarača, R, ako minimalni zahtijevani omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi kvantizacijskog šuma mora iznositi barem 65 dB.

a) $R > 700$ kbit/s

b) $R > 770$ kbit/s

c) $R > 880$ kbit/s

d) $R > 800$ kbit/s

Postupak rješavanja:

S obzirom da signal koristi puni raspon raspoloživih kvantizacijskih razina, slijedi da je moguće primijeniti izraz:

$$10\log_{10}\left(\frac{S}{Q}\right)=1,76+6,02r\left[\mathrm{dB}\right]$$

Budući da mora vrijediti da je 10log10(S/Q) ≥ 65, iz toga proizlazi $r \geq 10,5$. S obzirom da r (broj bita po uzorku) mora biti cjelobrojan, proizlazi da r mora iznositi minimalno 11 bita. Kako je frekvencija signala jednaka 40 kHz, frekvencija uzimanja uzoraka mora biti veća od 80 kHz. Dakle, minimalnu brzinu na izlazu A/D pretvarača određujemo množenjem minimalne frekvencije uzimanja uzoraka i minimalnog broja bita po uzorku, tj. $R > 80 \cdot 10^3 \cdot 11 = 880$ kbit/s.

9. zadatak: U AWGN kanalu djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $S_N(f) = 5$ nW/Hz, $\forall f \in \mathbf{R}$. Kanal je ograničen na pojas frekvencija -100 kHz $\leq f \leq 100$ kHz. Koliko iznosi srednja snaga signala na ulazu AWGN kanala, ako dinamika u tom kanalu iznosi 6 bit/uzorak?

a) 4,095 W

b) 1,023 W

c) 2,05 W

d) 8,19 W

Postupak rješavanja:

Sukladno zadanim vrijednostima vrijedi: $S_N(f) = N_0/2 = 5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz. Dakle, srednja snaga šuma N jednaka je: $N = (N_0/2) \cdot 2B = 10^{-3}$ W, jer je $B = 100$ kHz. Dakle, dinamika D jednaka je:

$$D=\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right)\left[\frac{\mathrm{bit}}{\mathrm{uzorak}}\right]$$
$$S=N\left(2^{2D}-1\right)\left[\mathrm{W}\right]$$

pri čemu je S srednja snaga signala. Temeljem navedenog, proizlazi da je $S = 4,095$ W.

10. zadatak: U nekom AWGN kanalu na signal s Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti i srednje snage 2,9 W djeluje bijeli Gaussov šum spektralne gustoće snage $N(f) = 7,5 \cdot 10^{-9}$ W/Hz, $\forall f \in \mathbf{R}$. Koliko iznosi maksimalni iznos kapaciteta ostvariv u takvom kanalu?

a) 134 Mbit/s

b) 278,92 Mbit/s

c) 557,84 Mbit/s

d) 182,74 Mbit/s

Postupak rješavanja:

S obzirom da su srednja snaga signala i srednja snaga šuma zadane, maksimalni kapacitet ostvariv u takvom kanalu bit će postignut kad je širina prijenosnog pojasa, B, beskonačna. Tada kapacitet kanala teži prema $S/N_0 \cdot \log_2(\mathrm{e})$. S obzirom da je spektralna gustoća snage bijelog Gaussovog šuma zadana za sve frekvencije, to znači da je $N(f) = N_0/2$. Uvrštavanjem svih poznatih veličina dobivamo da maksimalni kapacitet zadanog kanala iznosi 278,92 Mbit/s.