

Pravilo bodovanja zadataka

Netočno odgovoreni zadaci od 5 bodova donose 2 negativna boda, a netočno odgovoreni zadaci od 10 bodova donose 4 negativna boda. Neodgovoreni zadaci donose 0 bodova.

1. zadatak (5 bodova): Zadan je linearni binarni blok kôd K s oznakom $[n, k]$, pri čemu su n i k prirodni brojevi. Odredite koliko ima vektora u prostoru $V(n)$ koji nisu članovi niti koda K niti njemu dualnog koda K^\perp , ako generirajuća matrica koda K^\perp ima 4 retka, a kodne riječi duljinu 10 bita.

a) 1014

b) 960

c) 944

d) 1002

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako je kôd K linearno binarni blok kôd s oznakom $[n, k]$, tada je njemu dualni kôd, K^\perp , linearno binarni blok kôd s oznakom $[n, n - k]$. To znači da generirajuća matrica dualnog koda, tj. matrica za provjeru pariteta ima $n - k$ redaka, što u ovom konkretnom slučaju znači da je $n - k = 4$. Nadalje, ako kodne riječi imaju duljinu 10 bita, tada vrijedi: $n = 10$. Znači, $k = n - (n - k) = 10 - 4 = 6$. Dakle, kod K je linearni kôd s oznakom $[10, 6]$. Sukladno tome, kod K ima 2^6 kodnih riječi, a kod K^\perp ima 2^4 kodnih riječi. Konačno, u prostoru $V(10)$ sadržano je 2^{10} kodnih riječi, pa je broj kodnih riječi iz $V(10)$ koje nisu sadržane ni u kodu K niti u njemu dualnom kodu jednak: $2^{10} - 2^6 - 2^4 = \mathbf{944}$ kodnih riječi.

2. zadatak (5 bodova): Razmatrajte paritetno binarno kodiranje pri kojem se koristi tehnika horizontalnog i vertikalnog pariteta. Poruke duljine 7 bita kodiraju se prema načelu neparnog pariteta, pri čemu se svakoj poruci dodaje jedan horizontalni paritetni bit. Nakon n , $n \in \mathbf{N}$, uzastopnih kodnih riječi duljine 8 bita formira se paritetna kodna riječ sastavljena od vertikalnih paritetnih bitova, također prema načelu neparnog pariteta. Koliko najmanje smije iznositi broj n pa da kodna brzina, definirana kao omjer broja korisničkih bita (bita sadržanih u porukama) prema ukupnom broju bita (korisnički i paritetni zajedno) ne padne ispod 80%? **Napomena:** kodnu brzinu razmatrajte nad jednim blokom koji obuhvaća n kodnih riječi i jednu paritetnu kodnu riječ.

a) 11

b) 10

c) 12

d) 10,67

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Dakle, svaka se poruka duljine 7 bita kodira s po jednim paritetnim bitom, uslijed čega nastaju kodne riječi duljine 8 bita. Nakon n uzastopnih kodnih riječi, $n \in \mathbb{N}$, umeće se jedna kodna riječ duljine 8 bita koja je formirana od vertikalnih paritetnih bitova (vidi PowerPoint prezentaciju s predavanja "Zaštitno kodiranje I", slajdovi "Paritetno kodiranje"). Dakle, jedan takav blok sadrži ukupno $N_u = (n + 1) \cdot 8$ bita. U istom tom bloku sadržano je $N_k = n \cdot 7$ korisničkih bita. Kodna je brzina definirana kao: $R = N_k/N_u$. Dakle, mora vrijediti:

$$R = \frac{N_k}{N_u} \geq 0,8$$

$$\frac{7n}{8(n+1)} \geq 0,8$$

$$0,6n \geq 6,4$$

$$n \geq \frac{6,4}{0,6} \rightarrow n = \left\lceil \frac{6,4}{0,6} \right\rceil = 11$$

3. zadatak (5 bodova): Neki ciklični binarni kôd K s oznakom $[n, k]$, pri čemu su n i k prirodni brojevi, sadrži kodnu riječ 10101010. Koliko najmanje smije iznositi k pa da bude zadržano svojstvo linearnosti koda?

a) 1

b) 2

c) 8

d) 4

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Po definiciji, ako ciklični kôd sadrži neku kodnu riječ, onda mora sadržavati i sve njene ciklične posmake. U ovom konkretnom slučaju, ako traženi kôd K sadrži kodnu riječ 10101010, to znači da mora sadržavati i kodnu riječ 01010101. Međutim, kôd koji bi sadržavao samo te dvije riječi nije linearan. Temeljem uvjeta za cikličan kod (knjiga "Uvod u teoriju informacije, 2. izdanje, stranica 170), kôd K mora sadržavati i zbroj dviju navedenih riječi:

$$10101010 + 01010101 = 11111111$$

te mora sadržavati i riječ sastavljenu od osam nula: 00000000.

Dakle,

$$K = \begin{cases} 00000000 \\ 01010101 \\ 10101010 \\ 11111111 \end{cases}$$

je cikličan kod, zadovoljava svojstvo linearnosti i ujedno je i najmanji cikličan kod s oznakom $[n, k]$ koji sadrži kodnu riječ 10101010. S obzirom da kôd K ima 4 kodne riječi, $k = 2$.

4. zadatak (5 bodova): Razmatrajte linearni binarni blok kôd K s oznakom $[n, k, 3]$, $n, k \in \mathbf{N}$, koji je ujedno i perfektan. Ako k iznosi 11, odredite koliko iznosi duljina kodne riječi, tj. n .

a) 14

b) 15

c) 16

d) 12

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Za broj kodnih riječi perfektnog koda, M , mora vrijediti:

$$M = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t}}$$

Ako je kôd k tome i linearan, tada vrijedi $M = 2^k$:

$$2^k = \frac{2^n}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{t}}$$

U ovom konkretnom slučaju udaljenost koda iznosi $d(K) = 3$, pa s obzirom da mora biti zadovoljen izraz da je $d(K) \geq 2t + 1$, iz toga proizlazi da je $t = 1$. Dakle, mora vrijediti:

$$2^k = \frac{2^n}{1 + n}$$

$$n + 1 = 2^{n-k}$$

Očito je da $(n + 1)$ mora biti jednak cjelobrojnoj potenciji broja 2, pa se uzastopnim ispitivanjem gornjeg izraza može doći do rezultata:

za $n = 1$, $2 \neq 2^{-10}$

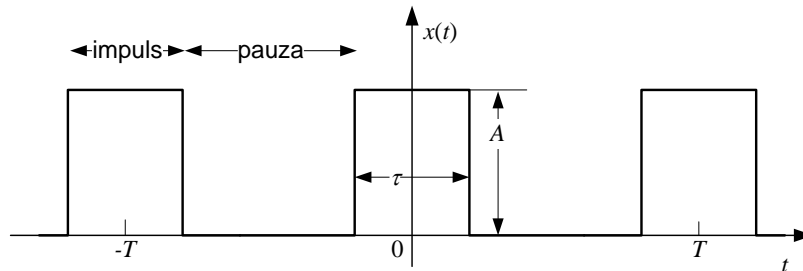
za $n = 3$, $4 \neq 2^{-8}$

za $n = 7, 8 \neq 2^4$

za $n = 15, 16 = 2^4$

Dakle, rješenje je $n = 15$.

5. zadatak (5 bodova): Zadan je periodični slijed pravokutnih impulsa $x(t)$ amplitude $A = 1$ V (Slika 1). Omjer snage sadržane u istosmjernoj komponenti tog signala prema srednjoj snazi cijelog signala iznosi $1/4$. Odredite srednju snagu signala $x(t)$.



Slika 1: Periodični slijed pravokutnih impulsa

- a) $1/16$ W b) $0,5$ W **c) $0,25$ W** d) 1 W e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Istosmjerna komponenta signala $x(t)$ jednaka je $\frac{A \cdot \tau}{T}$, dok je srednja snaga signala jednaka $\frac{A^2 \cdot \tau}{T}$. Prema tome, omjer snage istosmjerne komponente prema srednjoj snazi signala $x(t)$

jednak je $\frac{\left(\frac{A \cdot \tau}{T}\right)^2}{\frac{A^2 \cdot \tau}{T}} = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$. Sukladno tome, srednja snaga signala jednaka je $0,25$ W.

6. zadatak (5 bodova): Govorni signal se prije slanja komunikacijskim kanalom uzorkuje frekvencijom $f_u = 8$ kHz, a potom kodira s 8 bita po uzorku. Omjer srednje snage signala prema srednjoj snazi šuma na izlazu kanala iznosi 30 dB. Odredite potrebnu širinu prijenosnog pojasa kanala, ako se šum u kanalu poveća za 6 dB..

- a) $8,022$ kHz** b) $7,133$ kHz c) $8,369$ kHz d) $7,962$ kHz e) ništa od navedenog

Rješenje:

Ako se šum u kanalu poveća za 6 dB, tada vrijedi:

$$6\text{dB} = 10 \cdot \log N_2 - 10 \cdot \log N_1 = 10 \cdot \log \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{N_2}{N_1} = 3,981$$

Temeljem frekvencije uzorkovanja f_u i broja bita po uzorku r možemo dobiti informacijsku brzinu

$$R = f_u \cdot r = 64 \text{ kbit/s}.$$

Kapacitet kanala C mora biti veći ili jednak informacijskoj brzini R , te zaključujemo, budući da je širina pojasa proporcionalna s kapacitetom kanala, da je potrebna širina prijenosnog pojasa kanala ona za koju dobijemo $C=R$ i iznosi:

$$B = \frac{R}{\log_2 \left(1 + \frac{S_1}{N_2} \right)} = \frac{R}{\log_2 \left(1 + \frac{S_1}{N_1} \cdot \frac{N_1}{N_2} \right)} = \frac{R}{\log_2 \left(1 + \frac{1000}{3,981} \right)} = 8,022 \text{ kHz}$$

7. zadatak (5 bodova): Signal $x(t) = \cos(200\pi \cdot t) + 2\cos(320\pi \cdot t)$ [V] uzorkovan je frekvencijom uzorkovanja f_u , a potom propušten kroz idealni niskopropusni filter granične frekvencije $f_g = 170$ Hz. Koliko mora iznositi frekvencija uzorkovanja f_u , veća od najveće frekvencije sadržane u signalu $x(t)$, ako kroz filter prolaze tri frekvencijske komponente uzorkovanog signala $x_\delta(t)$ (razmatrajte samo pozitivne frekvencije) i pri čemu su susjedne frekvencijske komponente filtriranog uzorkovanog signala jednako razmaknute.

- a) 30 Hz b) 130 Hz c) 380 Hz **d) 290 Hz** e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Signal $x(t)$ sadrži dvije frekvencijske komponente (ako promatramo samo pozitivne frekvencije): 100 Hz i 160 Hz. Uslijed uzorkovanja frekvencijom f_u , u spektru signala $x_\delta(t)$ pojavit će se i frekvencije $f_u - 100$ Hz i $f_u - 160$ Hz. Razmatrajući uvjet da su susjedne komponente jednako razmaknute, imamo 2 scenarija:

$$(f_u - 160) - 100 = 160 - (f_u - 160)$$

$$\text{Scenarij 1: } f_u - 260 = 320 - f_u$$

$$f_u = 290 \text{ Hz}$$

Pri tome, komponenta $f_u - 100$ Hz iznosi 190 Hz, a komponenta $f_u - 160$ Hz iznosi 130 Hz. U scenariju 1 kroz zadani filter prolaze tri komponente: 100 Hz, 130 Hz i 160 Hz.

$$100 - (f_u - 160) = (f_u - 100) - 100$$

$$\text{Scenarij 2: } 260 - f_u = f_u - 200$$

$$f_u = 230 \text{ Hz}$$

Pri tome, komponenta $f_u - 100$ Hz iznosi 130 Hz, a komponenta $f_u - 160$ Hz iznosi 70 Hz. U scenariju 2 kroz zadani filter prolaze četiri komponente: 70 Hz, 100 Hz, 130 Hz i 160 Hz što nije u skladu s uvjetom zadatka.

Stoga je moguć samo scenarij 1 i, sukladno tome, $f_u = 290$ Hz.

8. zadatak (5 bodova): Slučajni signal spektralne gustoće snage $S(f)$, koji ima obilježje stacionarnog slučajnog procesa, dovodi se na ulaz LTI-sustava S1 prijenosne funkcije $H_1(f)$, a izlaz tog sustava vezan je izravno na ulaz LTI-sustava S2 prijenosne funkcije $H_2(f)$. Navedene funkcije frekvencije definirane su sljedećim izrazima:

$$S(f) = 10 \mu\text{W/Hz}, \forall f \in \mathbf{R}, \quad H_1(f) = \begin{cases} 0,5 & \text{za } |f| \leq 10^6 \text{ Hz} \\ 0 & \text{za } |f| > 10^6 \text{ Hz} \end{cases}, \quad H_2(f) = \begin{cases} 0,2 & \text{za } |f| \leq 10^7 \text{ Hz} \\ 0 & \text{za } |f| > 10^7 \text{ Hz} \end{cases}$$

Odredite minimalni vremenski razmak Δ , $\Delta \geq 0$, između dva potpuno nekorelirana uzorka slučajnog procesa (signala) na izlazu LTI-sustava S2.

a) 0 s

b) 0,5 μs

c) 5 μs

d) 1 μs

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Ako na ulaz LTI-sustava dovedemo slučajni signal s obilježjima stacionarnog slučajnog procesa, tada slučajni signal na izlazu LTI-sustava također ima obilježja stacionarnog slučajnog procesa i za spektralne gustoće snage vrijedi izraz:

$$S_{\text{izlaz}}(f) = S_{\text{ulaz}}(f) |H(f)|^2$$

pri čemu je $H(f)$ prijenosna funkcija LTI-sustava. Neka je $S_1(f)$ spektralna gustoća snage na izlazu sustava S1. Za nju vrijedi izraz:

$$S_1(f) = \begin{cases} 2,5 \mu\text{W/Hz} & \text{za } |f| \leq 10^6 \text{ Hz} \\ 0 \text{ W/Hz} & \text{inače} \end{cases}$$

Na sličan način, za spektralnu gustoću snage signala na izlazu sustava S2 vrijedi:

$$S_2(f) = \begin{cases} 0,1 \mu\text{W/Hz} & \text{za } |f| \leq 10^6 \text{ Hz} \\ 0 \text{ W/Hz} & \text{inače} \end{cases}$$

Nadalje, potrebno je odrediti autokorelacijsku funkciju signala na izlazu sustava S2. Za nju vrijedi:

$$\begin{aligned} R_2(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_2(f) e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-10^6}^{10^6} 0,1 \cdot 10^{-6} e^{j2\pi f\tau} df = 0,1 \cdot 10^{-6} \int_{-10^6}^{10^6} e^{j2\pi f\tau} df = \\ &= 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 10^6 \frac{\sin(2\pi 10^6 \tau)}{2\pi 10^6 \tau} [s] \end{aligned}$$

Dakle, da bi odredili minimalnu udaljenost između dva potpuno nekorelirana uzorka, moramo odrediti prvi trenutak τ , veći od nule, u kojem autokorelacijska funkcija poprima vrijednost nula: $R_2(\tau) = 0$ za $2\pi 10^6 \tau = \pi$, a to će biti postignuto kad je $\tau = 1/(2 \cdot 10^6)$ [s], tj. u $0,5 \mu\text{s}$.

9. zadatak (10 bodova): Na ulaz sklopa za uzimanje uzoraka dovodimo signal $s(t)$ definiran izrazom:

$$s(t) = \left| \frac{3}{4} + \sin\left(2\pi ft - \frac{\pi}{6}\right) \right| [\text{V}]$$

Uzorci $s(kT)$, uzeti u trenucima kT , $k \in \mathbf{Z}$, dovode se na ulaz kvantizatora čija je karakteristika određena izrazom:

$$I(kT) = \begin{cases} 1,5 \text{ V} & 1 \text{ V} \leq s(kT) < 2 \text{ V} \\ 0,5 \text{ V} & 0 \text{ V} \leq s(kT) < 1 \text{ V} \\ -0,5 \text{ V} & -1 \text{ V} \leq s(kT) < 0 \text{ V} \\ -1,5 \text{ V} & -2 \text{ V} \leq s(kT) < -1 \text{ V} \end{cases}$$

pri čemu je $I(kT)$ izlaz kvantizatora u trenucima kT . Odredite srednju vrijednost kvantizacijskog šuma koji se pojavljuje na uzorcima signala $s(t)$ uzetim u trenucima $k/(4f)$, $k \in \mathbf{Z}$. **Napomena:** U ovom konkretnom zadatku, kvantizacijski šum računajte kao razliku između kvantizirane i stvarne vrijednosti signala.

a) 0 V

b) 0,768 V

c) 0,083 V

d) 0,192 V

e) ništa od navedenog

Postupak rješavanja:

Da bi odredili srednju vrijednost kvantizacijskog šuma za ovaj konkretan slučaj determinističkog signala $s(t)$ uzorkovanog u trenucima $kT = k/(4f)$, nužno je odrediti koje će vrijednosti signal poprimiti u tim diskretnim vremenskim trenucima. Period funkcije $s(t)$ jednak je $1/f$ pa je potrebno izračunati njene uzorke u trenucima 0 , $1/(4f)$, $1/(2f)$ i $3/(4f)$. Nakon toga se uzorci periodički ponavljaju (isto vrijedi i za negativne vrijednosti vremena).

$$t=0, s(0)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$$

$$t=\frac{1}{4f}, s\left(\frac{1}{4f}\right)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right|=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$t=\frac{1}{2f}, s\left(\frac{1}{2f}\right)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right|=\frac{5}{4}$$

$$t=\frac{3}{4f}, s\left(\frac{3}{4f}\right)=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right|=\left|\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$$

$$t=\frac{1}{f}, s\left(\frac{1}{f}\right)=s(0)$$

Nadalje, potrebno je odrediti vrijednosti na izlazu kvantizatora u trenucima $kT = k/(4f)$:

$$I(0)=0,5\text{ V}, I\left(\frac{1}{4f}\right)=1,5\text{ V}, I\left(\frac{1}{2f}\right)=1,5\text{ V}, I\left(\frac{3}{4f}\right)=0,5\text{ V}, I\left(\frac{1}{f}\right)=I(0)=0,5\text{ V}$$

S obzirom da je period funkcije jednak $1/f$, izračunate vrijednosti na izlazu kvantizatora se periodički ponavljaju. Srednja vrijednost kvantizacijskog šuma dana je izrazom:

$$\bar{Q}=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^3\left(I\left(\frac{k}{4f}\right)-s\left(\frac{k}{4f}\right)\right)=0,192\text{ V}$$