2. MI 2009/2010 A

(1) $K=[7,4]$

$c=[1100abc]$

$$H=\begin{bmatrix}1010101\\0110011\\0001111\end{bmatrix} \Rightarrow H^T=\begin{bmatrix}100\\010\\110\\001\\101\\011\\111\end{bmatrix}$$

$\underbrace{S=c\cdot H^T=[000]}$ (sindrom treba biti 0 da bi kodna riječ bila ispravna)

$$\begin{aligned}1+a+c&=0\\1+b+c&=0\\a+b+c&=0\end{aligned} \quad \begin{aligned}a+c&=1 \rightarrow c=0\\b+c&=1 \quad \boxed{b=1}\\a+1&=0 \rightarrow \boxed{a=1}\end{aligned}$$

$\boxed{(a+b+c) \bmod 2=0}$

$\cancel{a\neq b}$

ODGOVOR (c)

---

(2)

$$K=\begin{bmatrix}0000\\1011\\1110\\0101\end{bmatrix} \qquad G=\begin{bmatrix}1011\\0101\end{bmatrix}$$

(odabrao sam ove dvije kodne riječi da odmah dobijem G u stand. obliku)

$G=[I|A]$

$$H=\begin{bmatrix}1010\\1101\end{bmatrix}$$

$H=[A^T|I]$

$$K^{\perp}=\begin{bmatrix}0000\\1010\\1101\\0111\end{bmatrix}$$

(kodne riječi ~~od~~ čija je generirajuća matrica H)

JEDINO ODGOVOR (C) ODGOVARA $K^{\perp}$

③ 128 poruka, svaka s istom vjer. kodiraju se SF-om.

Kodne poruke su dakle raspon 0000000 - 1111111 $(2^7 = 128)$

$k=7 \quad n=11$

$K = [11,7]$ (Hamming)

- na dekoder dolazi 11 bitova, dakle 11110110000

- sad tražimo sindrom da vidimo da li je poruka dobra ~~[illegible]~~

$$H = \begin{bmatrix} 10101010101 \\ 01100110011 \\ 00011110000 \\ 00000001111 \end{bmatrix} \Rightarrow H^T = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0100 \\ 1100 \\ 0010 \\ 1010 \\ 0110 \\ 1110 \\ 0001 \\ 1001 \\ 0101 \\ 1101 \end{bmatrix}$$

$$S(y) = y \cdot H^T = [1010]$$

(lijevo je najmanje značajan bit, pa sindrom čitamo "obrnuto" što nam daje grešku na 5. bitu)

PRAVA PORUKA:

11111110000

ODGOVOR: D

(4.)

$$K = \begin{bmatrix} 1001110 \\ 0011101 \\ 0111010 \\ 1110100 \\ 1101001 \\ 1010011 \\ 0100111 \end{bmatrix}$$

(dobiveno cikličnim pomakom za 1 bit ulijevo)

$\boxed{c = 101}$

$n = 7$ $k = 3$ (3 su podatkovna bita)

$r = n - k = 4 \Rightarrow g(x)$ je stupnja 4, pa tražimo kodnu riječ koja ima taj stupanj kao najveći

to je $\boxed{0011101}$

$\Downarrow$

$\boxed{g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1}$. (po ovome formiramo G po postupku u knjizi)

$$G = \begin{bmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 0011101 \end{bmatrix}$$

$c \cdot G =$ kodna riječ

$\Downarrow$

$\boxed{1101001}$

ODGOVOR: c

(5) $K = [6, 3]$ (Hamming)

$$H = \begin{bmatrix} 101010 \\ 011001 \\ 000111 \end{bmatrix} \qquad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$c = 101100$

$s = c \cdot H^T = [011]$ (greška na 6. bitu)

poslano je 101101 $\Rightarrow$ pošto je $G = [I|A]$ prva 3 bita kodirane poruke odgovaraju poslanoj poruci = $\boxed{101}$

POGREŠNO DEKOD = 1 − DOBRO

$$\text{DOBRO} = \underbrace{\binom{6}{0} p_g^0 (1-p_g)^6 + \binom{6}{1} p_g^1 (1-p_g)^5}_{\text{to Hamming uspješno dekodira}}$$

$\binom{6}{0} p_g^0 (1-p_g)^6$ = greška na 0 bitova

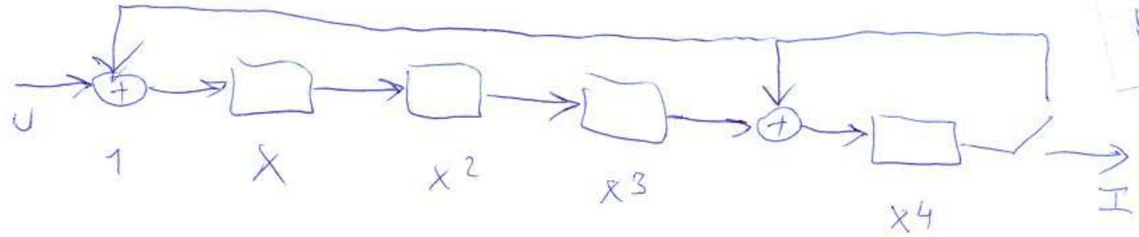
$\binom{6}{1} p_g^1 (1-p_g)^5$ = greška na 1 bitu

$= (1-p_g)^5 (1+5p_g)$

$$\underbrace{1 - 0{,}99^5 \cdot 1{,}05}_{\boxed{1{,}46 \cdot 10^{-3}}}$$

ODGOVOR: c

6.



$\boxed{g(x) = x^4 + x^3 + 1}$ => zadnji kvadratić uvijek + oni koji su prije ⊕

$\Downarrow$

$r = 4$, $n = 15$ CRC = ?

$k = n - r = \boxed{11}$ => 11 bitova kodiramo s 4 CRC

$p = 10101010100$

$d(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2$

$CRC = r(x) = \cancel{g}\left(d(x) \cdot x^r\right) \bmod g(x)$

$(x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2) \cdot x^4 \bmod (x^4 + x^3 + 1)$

$$\cancel{x^{14}} + x^{12} + \cancel{x^{10}} + x^8 + x^6 : x^4 + x^3 + 1 = x^{10} + x^9 + x^5 + x^2$$

$$- \quad \cancel{x^{14}} + x^{13} + \cancel{x^{10}}$$

(minus možemo pisati kao plus jer je $-1 = 1$ u mod 2 aritmetici)

$$+ \cancel{x^{13}} + \cancel{x^{12}} + x^8 + x^6$$
$$\cancel{x^{13}} + \cancel{x^{12}} + x^9$$
$$\cancel{x^9} + \cancel{x^8} + x^6$$
$$\cancel{x^9} + \cancel{x^8} + x^5$$
$$\cancel{x^6} + \cancel{x^5}$$
$$\cancel{x^6} + \cancel{x^5} + x^2$$
$$x^2$$

=> $r(x) = x^2$ $\boxed{CRC = 0100}$

ODGOVOR: B

7. $K[7,4] \Rightarrow k=4$, kodiramo 4 bita

$$H = \begin{bmatrix} 1101001 \\ 0001101 \\ 1011001 \\ 0000011 \end{bmatrix}$$

$K^{\perp} \Rightarrow$ kod čija je gen. mat. H

- rješenje = samo pomnožimo prva 4 bita poruke s H

$p = 1010 \qquad c = p \cdot H = [0110000]$

ODGOVOR: C

9. $H = [7,4] \qquad p_e = m$

$P = [5,4] \qquad$ OMJER $= ?$

$\Rightarrow$ dekod. ako nema ili je 1 greška

$$p(\text{Hamm}) = \binom{7}{0} m^0 (1-m)^7 + \binom{7}{1} m^1 (1-m)^6$$

$$p(\text{paritet}) = \binom{5}{0} m^0 (1-m)^5$$ $\Rightarrow$ samo može dekod. ako nema greške

$$\text{OMJER} = \frac{(1-m)^7 + 7m(1-m)^6}{(1-m)^5} = \frac{(1-m)^{\cancel{6}}(1-m+7m)}{\cancel{(1-m)^5}}$$

$$= (1-m)(1+6m)$$

ODGOVOR: A

8. <u>A</u>

$$G = \begin{bmatrix} 1000111 \\ 0100110 \\ 0010101 \\ 0001011 \end{bmatrix} \qquad G^* = \begin{bmatrix} 10001110 \\ 01001101 \\ 00101011 \\ 00010111 \end{bmatrix}$$

$$H^* = \begin{bmatrix} 11101000 \\ 11010100 \\ 10110010 \\ 01110001 \end{bmatrix} \qquad H^*_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$c = 01111001$

$s = c \cdot H^T = [1000] \Rightarrow$ točno, stavljeno je krivo rješenje

(10.) $p_e = \frac{1}{9}$ uzimamo Hamming s max kodnom brz

$$R = \frac{k}{n} = \frac{\text{broj podatkovnih}}{\text{ukupan broj}}$$

Hamming:

n	k	R
3	1	0,333
4	1	0,25
5	2	0,4
6	3	0,5
7	4	$\boxed{0,5714}$
8	4	0,5
9	5	0,5556

R je max za k=4 i n=7

$\boxed{K = [7,4]}$

- dalje ne idemo jer kod n=10 može doći do greške na 2 bita

uzimamo prvih 4 bitova poruke => 1110 ~~1101~~

~~TEŽINA 5~~

xx1x110
0_1_1_0
01__10
0110

0010110 => $\boxed{\text{TEŽINA} = 3}$

~~1110~~
~~xx1x110~~
~~0010110~~

ODGOVOR: (C)