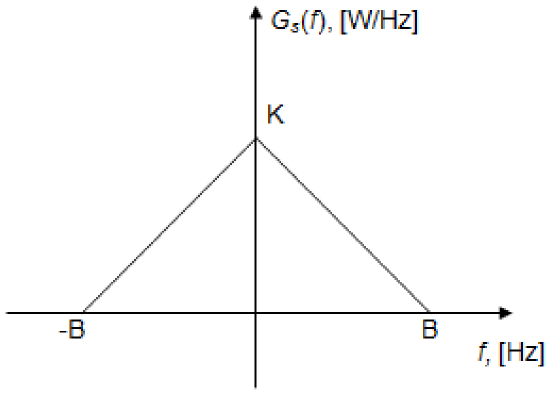
4.9. Na slici je predočena spektralna gustoća snage signala *s*(*t*). Odredite srednju snagu signala.



$$P = ?$$

$$P = E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} G_S(f)\, df$$

Rješenje integrala je ekvivalentno površini ispod linije funkcije. Površina se sastoji od dva pravokutna trokuta.

$$P_\Delta = \frac{A \cdot B}{2}$$

$$P = \frac{K \cdot B}{2} + \frac{K \cdot B}{2} = K \cdot B \quad W$$

4.10. Promatrajmo slučajni proces *X(t)* zadan kao $X(t) = A\cos 2\pi ft$

Gdje je *f* konstanta, a *A* slučajna varijabla sa jednolikom razdiobom na [0,1]. Odredite autokovarijancu i autokorelaciju danog slučajnog procesa.

$$R_x = ?$$

$$R_x = E\left[X(t_1)X(t_2)\right]$$

$$R_x = E\left[A\cos 2\pi ft_1 \cdot A\cos 2\pi ft_2\right]$$

$$R_x = E\left[A^2 \cos 2\pi ft_1 \cdot \cos 2\pi ft_2\right]$$

$$R_x = E\left[A^2\right]\cos 2\pi ft_1 \cdot \cos 2\pi ft_2$$

$$E\left[A^2\right] = \int_0^1 A^2 f(A)dA = \frac{A^3}{3} = \frac{1}{3}$$

$$R_x = \frac{1}{3}\cos 2\pi ft_1 \cdot \cos 2\pi ft_2$$

f(A) – funkcija gustoće

f(A)=1 na intervalu [0,1]

$$C_x = ?$$

$$C_x = R_x - E\left[X(t_1)\right]E\left[X(t_2)\right]$$

$$E\left[X(t)\right] = E\left[A\cos 2\pi ft\right] = E\left[A\right]\cos 2\pi ft$$

$$E\left[A\right] = \int_0^1 Af(A)dA = \frac{A^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E\left[X(t_1)\right] = \frac{1}{2}\cos 2\pi ft_1$$

$$E\left[X(t_2)\right] = \frac{1}{2}\cos 2\pi ft_2$$

$$C_x = R_x - E\left[X(t_1)\right]E\left[X(t_2)\right]$$

$$C_x = \frac{1}{3}\cos 2\pi ft_1 \cdot \cos 2\pi ft_2 - \frac{1}{4}\cos 2\pi ft_1 \cdot \cos 2\pi ft_2$$

$$C_x = \frac{1}{12}\cos 2\pi ft_1 \cdot \cos 2\pi ft_2$$

4.11. Neka je $X(t)$ Gaussov slučajni proces stacionaran u širem smislu s očekivanjem nula i autokorelacijskom funkcijom $R_X(\tau) = \mathrm{e}^{-|\tau|/2}$, neka je $N(t)$ Gaussov bijeli šum sa spektralnom gustoćom snage $N_0/2$.

Odredite:

a) srednju snagu P slučajnog signala modeliranog stacionarnim slučajnim procesom $X(t)$,

b) spektralnu gustoću snage $S_X(f)$ slučajnog signala modeliranog stacionarnim slučajnim procesom $X(t)$,

c) prijenosnu karakteristiku kanala čiji je ulaz $N(t)$, dok se na izlazu pojavljuje signal čija je spektralna gustoća snage $S_X(f)$.

a) $P = ?$

Srednja snaga P slučajnog signala opisanog slučajnim procesom $X(t)$: $P = R_X(0)$

$$R_X(\tau) = e^{-|\tau|/2} \qquad P = e^{-|0|/2} = 1$$

b) $S_X(f) = ?$

Spektralna gustoća $S_X(f)$ slučajnog signala opisanog slučajnim procesom $X(t)$:

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau \qquad R_X(\tau) = e^{-|\tau|/2}$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\tau|/2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\tau/2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau/2} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot \tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{\tau \cdot (\frac{1}{2} - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau \cdot (\frac{1}{2} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} + \frac{1}{\frac{1}{2} + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = \frac{4}{1 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2}$$

c) $|H(f)| = ?$

Spektralna gustoća snage odziva, $S_{izl}(f)$: $S_{izl}(f) = S_{ul}(f) \cdot |H(f)|^2$

$$S_{ul}(f) = N_0 / 2$$

$$S_{izl}(f) = S_X(f) = \frac{4}{1 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{S_{izl}(f)}{S_{ul}(f)} = \frac{\dfrac{4}{1 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2}}{\dfrac{N_0}{2}} = \frac{8}{N_0 \cdot (1 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2)}$$

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{8}{N_0 \cdot (1 + 16 \cdot \pi^2 \cdot f^2)}}$$

4.12. Neka je primljen signal $r(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + n(t)$, gdje je $n(t)$ aditivni Gaussov bijeli šum sa spektralnom gustoćom snage $N_0 / 2$. Primljeni signal doveden je na ulaz RC filtra čija je širina prijenosnog pojasa $B = 1/(4RC)$. Odredite omjer srednje snage "korisnog" signala prema srednjoj snazi šuma uzimajući pritom da kosinusi signal prolazi kroz filtar nepromijenjen.

"Korisni" signal je kosinus dio primljenog signala.Kosinus je periodičan signal, a srednja snaga periodičnog signala računa se prema izrazu:

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} r^2(t) dt$$

Kako RC filtar u potpunosti propušta kosinusni signal njegova srednja snaga iznosi: $P = \frac{A_c^2}{2}$

Srednja snaga aditivnog Gaussovog bijelog šuma unutar frekvencijskog pojasa $0 \le |f| \le B$ iznosi: $N = N_0 B$

Za konkretan primjer srednja snaga iznosi: $N = N_0 \frac{1}{4RC} = \frac{N_0}{4RC}$

Konačno omjer ovih srednjih snaga iznosi:

$$\frac{S}{N} = \frac{P}{N} = \frac{\frac{A_c^2}{2}}{\frac{N_0}{4RC}} = \frac{4A_c^2 RC}{2N_0} = \frac{2A_c^2 RC}{N_0}$$

4.13. Na ulazu niskopropusnog komunikacijskog kanala (širina prijenosnog pojasa *B* [Hz]), konstantnog amplitudnog odziva od 1 unutar pojasa propuštanja, dovodi se signal čija je autokorelacijska funkcija $R_X(\tau) = \delta(\tau).$

Odredite autokorelacijsku funkciju signala na izlazu iz kanala. $R_Y(\tau) = ?$

Napomena:

Kanal se može promatrati kao linearan i vremenski nepromjenjiv

1) Spektralna gustoća snage signala na ulazu: $S_X(f) = ?$

$$R_X(\tau) = \delta(\tau)$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau = e^{-j2\pi f\cdot 0} = 1$$

2) Amplitudni odziv prijenosne funkcije: $|H(f)| = ?$

$$|H(f)| = \begin{cases} 1, |f| < B \\ 0, |f| > B \end{cases}$$

$$|H(f)| = \operatorname{sgn}(f + B) - \operatorname{sgn}(f - B)$$

3) Spektralna gustoća snage signala na izlazu: $S_Y(f) = ?$

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot |H(f)|^2 = |H(f)|^2 = H(f)^2$$

$$S_Y(f) = H(f)$$

4) Autokorelacijska funkcija signala na izlazu: $R_Y(\tau) = ?$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df$$

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \cdot e^{j2\pi f\tau} df = \int_{-B}^{B} e^{j2\pi f\tau} df = \left. \frac{e^{j2\pi f\tau}}{j2\pi\tau} \right|_{-B}^{B}$$

$$R_Y(\tau) = \frac{e^{j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} - \frac{e^{-j2\pi B\tau}}{j2\pi\tau} = \frac{1}{\pi\tau} \cdot \frac{e^{j2\pi B\tau} - e^{-j2\pi B\tau}}{2j}$$

$$R_Y(\tau) = \frac{1}{\pi\tau} \sin(2\pi B\tau)$$

4.14. Odredite je li sustav definiran kao $y(t) = c \cdot t \cdot x(t) + d \cdot x(t-1)$

linearan i vremenski nepromjenjiv. **Napomena:** *c* i *d* su konstante.

Linearnost sustava?

Sustav je linearan ako je odziv na pobudu tj. na signal na ulazu sustava: $a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$

jednak $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$ za svaki $a, b \in \mathbf{R}$.

$y_1(t)$ – odziv na pobudu $x_1(t)$

$y_2(t)$ – odziv na pobudu $x_2(t)$

U zadatku sustav je zadan kao: $y(t) = c \cdot t \cdot x(t) + d \cdot x(t-1)$

Za dvije različite pobude odziv glasi: $y_1(t) = c \cdot t \cdot x_1(t) + d \cdot x_2(t-1)$

$$y_2(t) = c \cdot t \cdot x_2(t) + d \cdot x_2(t-1)$$

Uvodimo zamjenu:

$$x(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$$

$$\Rightarrow y(t) = c \cdot t \cdot [a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)] + d \cdot [a \cdot x_1(t-1) + b \cdot x_2(t-1)]$$

$$= c \cdot t \cdot a \cdot x_1(t) + c \cdot t \cdot b \cdot x_2(t) + d \cdot a \cdot x_1(t-1) + d \cdot b \cdot x_2(t-1)$$

$$= a \cdot [c \cdot t \cdot x_1(t) + d \cdot x_1(t-1)] + b \cdot [c \cdot t \cdot x_2(t) + d \cdot x_2(t-1)]$$

$$= a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Sustav je linearan.

Vremenska nepromjenjivost sustava?

Sustav je vremenski nepromjenjiv ako pomak pobude $x(t)$ za t_0 sekundi rezultira isključivo vremenskim pomakom odziva $y(t)$ za t_0 sekundi, odnosno ako je $x(t) \to y(t)$

onda $x(t-t_0) \to y(t-t_0)$

Za $t \to t - t_0$

Odziv je:

$$y(t-t_0) = c \cdot (t-t_0) \cdot x(t-t_0) + d \cdot x(t-t_0-1)$$

Uz vremenski pomak pobude $x(t)$ za t_0 sekundi

Dobivamo odziv: $y(t) = c \cdot t \cdot x(t-t_0) + d \cdot x(t-t_0-1)$

$$x(t) \to x(t-t_0)$$

Ta dva odziva se razlikuju

$$y(t-t_0) \neq y(t)$$

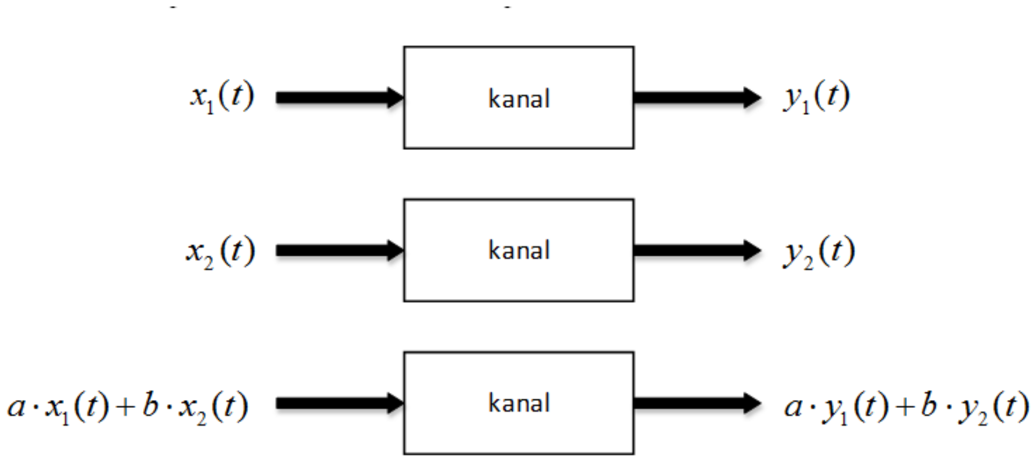
Sustav nije vremenski nepromjenjiv.

Sustav **je** linearan i **nije** vremenski nepromjenjiv.

4.15. Dokažite da je sustav definiran kao $y(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$

linearan i vremenski nepromjenjiv. Također, odredite impulsni odziv danog sustava.

Kanal je linearan ako vrijedi:



$$y_1(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t} x_1(\tau)d\tau \qquad y_2(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t} x_2(\tau)d\tau$$

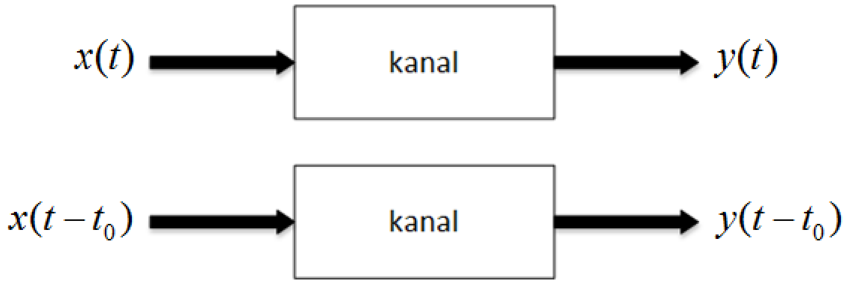
$$x(t)\rightarrow a\cdot x_1(t)+b\cdot x_2(t)$$

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t}\left[a\cdot x_1(\tau)+b\cdot x_2(\tau)\right]d\tau =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t} a\cdot x_1(\tau)d\tau+\frac{1}{\sqrt{T}}\int_{t-T}^{t} b\cdot x_2(\tau)d\tau =$$

$$=a\cdot y_1(t)+b\cdot y_2(t)$$

Kanal je vremenski nepromjenjiv ako vrijedi:



$$x_1(t) = x(t-t_0) \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t-T}^{t} x(\tau)d\tau$$

$$y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau)d\tau \qquad y(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t-t_0-T}^{t-t_0} x(\tau)d\tau$$

$$y_1(t) = y(t-t_0)$$

$$h(t) = ?$$

Impulsni odziv je odziv na diracov impuls: $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{t-T}^{t} \delta(\tau)d\tau$

Da bi gornji integral bio različit od nule (imao vrijednost 1) mora vrijediti:

$$\left.\begin{array}{l} t-T<0 \rightarrow t<T \\ t>0 \end{array}\right\} 0<t<T$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{za } 0<t<T \\ 0 & \text{inačn} \end{cases}$$

4.16. Na ulazu LTI sustava djeluje signal obilježja stacionarnog slučajnog procesa *X(t)* čije je očekivanje nula i čija je autokorelacijska funkcija $R_X(\tau) = e^{-0,5|\tau|}$.

Na ulazu istog sustava djeluje bijeli Gaussov šum $N(t)$ čija je spektralna gustoća snage $N_0/2$

Pretpostavimo da se na ulaz nekog niskopropusnog filtra prijenosne funkcije $H(f)$ dovodi signal $N(t)$ i da se na njegovom izlazu pojavljuje signal čija je spektralna gustoća snage $S_X(f)$

Odredite $|H(f)|^2$

LTI (linearni vremenski nepromjenjiv) sustav

$$X(t) \to R_X(\tau) = e^{-0,5|\tau|}$$

$$N(t) \to NPF \to S_W(f) = \frac{N_0}{2}$$

$$E(X) = 0$$

$$|H(f)|^2 = ?$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cdot e^{-2j\pi f\tau} d\tau$$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau(0,5-2j\pi f)} d\tau + \int_{0}^{+\infty} e^{-\tau(0,5+2j\pi f)} d\tau$$

$$S_X(f) = \frac{1}{0,5-2j\pi f} \cdot e\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{-(0,5+2j\pi f)} \cdot e\Big|_{0}^{+\infty}$$

$$S_X(f) = \frac{1}{0,5-2j\pi f} \cdot (e^0 - e^{-\infty}) + \frac{1}{-(0,5+2j\pi f)} \cdot (e^{-\infty} - e^0)$$

$$S_X(f) = \frac{1}{0,5-2j\pi f} \cdot (1-0) + \frac{1}{-(0,5+2j\pi f)} \cdot (0-1)$$

$$S_X(f) = \frac{1}{0,5-2j\pi f} + \frac{1}{0,5+2j\pi f} = \frac{4}{1+16\pi^2 f^2}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{S_X(f)}{S_W(f)}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{\dfrac{4}{1+16\pi^2 f^2}}{\dfrac{N_0}{2}} \qquad |H(f)|^2 = \frac{8}{N_0(1+16\pi^2 f^2)}$$