Teorija informacije
Akademska godina: 2009./2010.
2. međuispit

3. prosinca 2009.

Napomena:

- Točno riješen zadatak: 2,5 bodova
- Netočno rješenje: -0,5 bodova
- Zadatak nije rješavan: 0 bodova
- **Ukoliko zadatak NIJE rješavan, molim, na obrascu za test NE precrtavati polja!**
- **Trajanje ispita: 135 minuta**
- Ukupni broj zadataka: 10
- Nije dopušteno pisanje po papirima s ispitnim zadacima!

GRUPA A

Zadatak-1: Dan je Hammingov binarni kôd K $[n, k]$=[7,4]. Kodne riječi koda K se prenose komunikacijskim kanalom s brisanjem simbola. Odredite kodnu riječ **c**=[1100abc], a, b, $c \in \{0, 1\}$, koja je poslana ako je primljena kodna riječ **c**'=[1100???]. **Napomena:** Kontrolni bitovi u kodnoj riječi nalaze se na pozicijama 1, 2 i 4.

Rješenje:

a) $a = c$
b) $(a+b+c) \bmod 2 = 1$
c) $(a+b+c) \bmod 2 = 0$
d) $b = c$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

Neka je: $c' = [1100abc]$

$$c' \cdot H^T = [000] \rightarrow \left.\begin{matrix} 1+a+c = 0 \\ 1+b+c = 0 \\ a+b+c = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{matrix} c = 0 \\ b = 1 \\ a = 1 \end{matrix}$$

Zadatak-2: Dan je linearni binarni kôd $K \subset F^4_2$ s kodnim riječima {0000, 1011, 1110, 0101}. Na izlazu nekog kodera kanala pojavljuju se kodne riječi koda $K^{\perp}$. Za niže dane slijedove bitova (izlaz kodera kanala) odredite onaj koji pripada kodu $K^{\perp}$.

Rješenje:

a) 0000 0111 1101 0000 1101 1101 1001
b) 0111 0000 1101 1101 0000 1011 1101
c) 0000 1010 0111 0111 0000 1101 1101
d) 1101 0000 0111 1001 1011 0111 0000

$$K: G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(I | A)} \rightarrow H = [A^T | I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} K: & G & \rightarrow & H \\ K^{\perp}: & G^{\perp} & & H^{\perp} \end{matrix}$$

$$K^{\perp}: C = \begin{cases} [00] \cdot H = [0000] \\ [01] \cdot H = [1101] \\ [10] \cdot H = [1010] \\ [11] \cdot H = [0111] \end{cases}$$

ILI:

$K^{\perp}: C = [abcd]$ $\quad K: G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$[abcd] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [00] \rightarrow \left.\begin{matrix} a+c+d = 0 \\ a+b+c = 0 \\ \text{UVJET ORT.} \quad b+d = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$$

a b c d
0 0 0 0
1 0 1 0
1 1 0 1
0 1 1 1

Zadatak-3: Izvorište generira 128 poruka, iz skupa od 128 jednako vjerojatnih simbola $\mathbf{X} = \{x_0 \ldots, x_{127}\}$, koje se kodiraju binarnim kodom (Shannon-Fano!). Poruke se prije odašiljanja u kanal kodiraju Hammingovom metodom zaštitnog kodiranja. Na ulazu dekodera kanala pojavljuje se slijed bitova 111101100001001101... Odredite prvu poruku (**d**) koja je odaslana. **Napomena:** Kontrolni bitovi u kodnoj riječi nalaze se na pozicijama 1, 2, 4, 8,...

D. Z.

Rješenje:

a) zadnja tri bita u poruci **d** su 001
b) zadnja tri bita u poruci **d** su 011
c) prva četiri bita u poruci **d** su 1011
d) prva četiri bita u poruci **d** su 1111

Zadatak-4: Neka je K linearni ciklični kôd kojem pripada kodna riječ 1001110. Kodirajte poruku 101 koristeći generirajuću matricu danog koda koja nije u standardnom obliku.

zbirka : zad (29)

Rješenje:

a) 1010011
b) 1110100
c) 1101001
d) 0100111

1001110
0011101
0111010
1110100
1101001
1010011
0100111

[7,3]

$$C = [101] \cdot \begin{bmatrix} 1110100 \\ 0111010 \\ 0011101 \end{bmatrix} = [1101001]$$

$$g(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 1 = [11101]$$

Zadatak-5: Dan je Hammingov [6, 3] binarni blok kôd s generirajućom matricom **G** u standardnom obliku. Neka je primljena kodna riječ 101100. Odredite poruku koja je poslana, kao i vjerojatnost pogrešnog dekodiranja (p_{pd}) ako je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita u kanalu p_e=0,01.

Rješenje:

a) 101; $p_{pd}\approx 0{,}99884$
b) 100; $p_{pd}\approx 1{,}46\times10^{-3}$
c) 101; $p_{pd}\approx 1{,}46\times10^{-3}$
d) 100; $p_{pd}\approx 0{,}99884$

$K_1\ K_2\ m_1\ K_3\ m_2\ m_3 \rightarrow G = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

$$S = [101100] \cdot \begin{bmatrix} 110 \\ 101 \\ 011 \\ 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} = [011] \rightarrow$$ pogr. na [illegible]

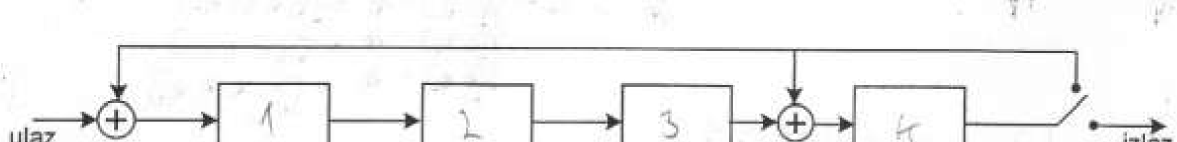
$$2^{n-k} \geq \sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$$

$\underline{t=1}$

$$P_{pd} = 1 - [P_0 + P_1] = \ldots = 1{,}46 \cdot 10^{-3}$$

$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Zadatak-6: Na slici je dan koder za ciklični kôd [15, k]. Odredite cikličnu provjeru zalihosti (engl. *Cyclic Redundancy Check*, CRC) za prvu kodnu riječ koja se pojavljuje na izlazu iz kodera ako se na ulazu kodera pojavljuje slijed bitova: 101010101000101...



Rješenje:

a) 0010
b) 0100
c) 0001
d) 1000

$g(x) = x^4 + x^3 + 1 \rightarrow [15, 11]$

Zadatak-7: Dan je linerani binarni blok kôd K $[n, k]$=[7, 3] s matricom provjere pariteta $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Odredite kodnu riječ koja se <u>prva</u> pojavljuje na izlazu kodera kanala koda $K^{\perp}$ ako se na njegovom ulazu pojavljuje slijed bitova 10101110...

Rješenje:

$K^{\perp}: C^{\perp} = [1\,0\,1] \cdot H = [0\,1\,1\,0\,0\,0\,0]$

a) 0111000
b) 0110100
c) 0110000
d) 0110001

Zadatak-8: Dan je binarni kôd K $[n, k]$=[7, 4] s generirajućom matricom

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Neka je K^* prošireni kôd čije su kodne riječi dobivene tako što je na početak svake kodne riječi koda K dodan bit pariteta (parni!). Na ulazu dekodera kanala koda K^* pojavljuje se slijed bitova 0111100100110011... Odredite sindrom za <u>prvu</u> primljenu kodnu riječ.

Rješenje:

a) 0110
b) 0111
c) 1011
d) 1110

Zadatak-9: Slijed bita $\mathbf{x}$ ulazi u Hammingov koder $[n, k]$ = [7, 4] i nakon toga se prenosi prijenosnim kanalom u kojem je vjerojatnost pogrešnog prijenosa bita m. Odredite omjer vjerojatnosti ispravnog dekodiranja (p_{ispdek}) slijeda $\mathbf{x}$ ako se umjesto Hammingovog kodera kao zaštita uporabi paritet (parni!), tj. odredite p_{ispdek}(HAMMING) / p_{ispdek}(PARITET).

Rješenje:

a) $(1+6m)(1-m)$
b) $(1-6m)(1-m)$
c) $(1+6m)(1-m)^2$
d) $(1+6m) / (1-m)^2$

$$\frac{P_{isp}(HAMM)}{P_{isp}(PARITY)} = \frac{\binom{7}{0} \cdot m^0 \cdot (1-m)^7 + \binom{7}{1} m^1 \cdot (1-m)^6}{\binom{5}{0} \cdot (1-m)^5} = \frac{(1-m)^{\cancel{7}\,2} + 7m \cdot (1-m)^{\cancel{6}\,1}}{\cancel{(1-m)^5}} = (1-m) \cdot (1-m+7m) =$$

$$= (1-m)\,(1+6m)$$

Zadatak-10: Mjerenjem je utvrđeno da u binarnom komunikacijskom kanalu djeluju smetnje koje mogu uzrokovati pogrešan prijenos od jednog bita u slijedu od najmanje 9 uzastopnih bita. Za zaštitu informacije uporabljen je Hammingov koder, a duljina zaštitno kodiranog bloka prilagođena je uvjetima koji vladaju u kanalu. Za slijed bitova 1110101011010... odredite prvi zaštitno kodirani blok bitova (kodna riječ **c**) ali tako da je kodna brzina maksimalna.

***Rješenje*:**

a) težina kodne riječi **c** je 5
b) težina kodne riječi **c** je 4
c) težina kodne riječi **c** je 3
d) težina kodne riječi **c** je 6

$n=9: \ \sqcup \sqcup - \sqcup - - - \sqcup -$ $\quad k=5 \quad \varepsilon_{(9)} = \frac{k}{n} = \frac{5}{9} = 0{,}5556$

$n=8:$?

$n=7 \quad k=4 \quad \varepsilon_{(7)} = 4/7 = 0{,}5714$

0 0 1 0 1 1 0

0 1 1 0

0 1 1 0

0 1 1 0