Uzorkovanje signala
i
kvantizacija uzoraka

Teorija informacije

Analogni prijenos signala

- ograničit ćemo se na skup striktno pojasno ograničenih signala, $\{x(t)\}$

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt=0 \text{ za } |f|>f_g \geq 0$$

- pri prijenosu signala koji nije pojasno ograničen nužno je prenositi neprebrojiv skup kontinuiranih vrijednosti tog signala
  - sve vrijednosti signala $x(t)$, $\forall\, t \in [t_1, t_2]$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$
    - $[t_1, t_2]$ je promatrani vremenski interval unutar kojeg se odvija prijenos signala $x(t)$
  - takav prijenos zovemo i **analogni** prijenos

2 od 27

Uzorkovanje

- ako je signal pojasno ograničen, tada je unutar promatranog vremenskog intervala dovoljno prenositi prebrojiv skup njegovih vrijednosti
  - pojasno ograničen signal u kontinuiranom vremenu moguće je jednoznačno specificirati pomoću njegovih vrijednosti uzetih u diskretnim trenucima
  - proces uzimanja uzoraka kontinuiranog signala u diskretnim trenucima naziva se **uzorkovanje**
  - uzorkovanje se provodi u predajniku, a rekonstrukcija izvornog signala u prijemniku
  - uzorkovanje je osnova digitalnog prijenosa signala

3 od 27

Teorem uzorkovanja u vremenskoj domeni

- za striktno pojasno ograničene signale konačne energije

- Prvi dio teorema odnosi se na **predajnik**
- Pojasno ograničeni signal konačne energije, $x(t)$, $t \in \mathbf{R}$, čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad B Hz
  - $X(f) = 0$ za $|f| > B$
- u potpunosti je i na jednoznačan način opisan pomoću vrijednosti tog signala uzetih u diskretnim vremenskim trenucima $T_n = n/(2B)$

4 od 27

Teorem uzorkovanja u vremenskoj domeni (II)

- Drugi dio teorema odnosi se na **prijemnik**
- Pojasno ograničeni signal *x*(*t*) konačne energije čiji spektar ne sadrži frekvencijske komponente na frekvencijama iznad *B* Hz
  - $X(f) = 0$ za $|f| > B$
- moguće je u potpunosti i na jednoznačan način rekonstruirati na temelju poznavanja njegovih uzoraka uzetih u diskretnim trenucima međusobno razmaknutim za 1/(2*B*) sekundi
  - frekvencija 2B uzorak/s – Nyquistova frekvencija
  - (1/2B) [s] – Nyquistov interval uzorkovanja

5 od 27

Frekvencija uzorkovanja

- osnovni problem uzorkovanja – odabir adekvatne frekvencije uzorkovanja f_u
  - slijed uzoraka mora jednoznačno definirati izvorni analogni signal
- poželjno je da f_u bude što manja
  - tada je i broj uzoraka manji
- što su uzorci gušći, to je slijed uzoraka sve bliži originalnom analognom signalu
  - međutim, potrebno prenositi više uzoraka
  - rezultat: neučinkovito korištenje mrežnih resursa

 6 od 27

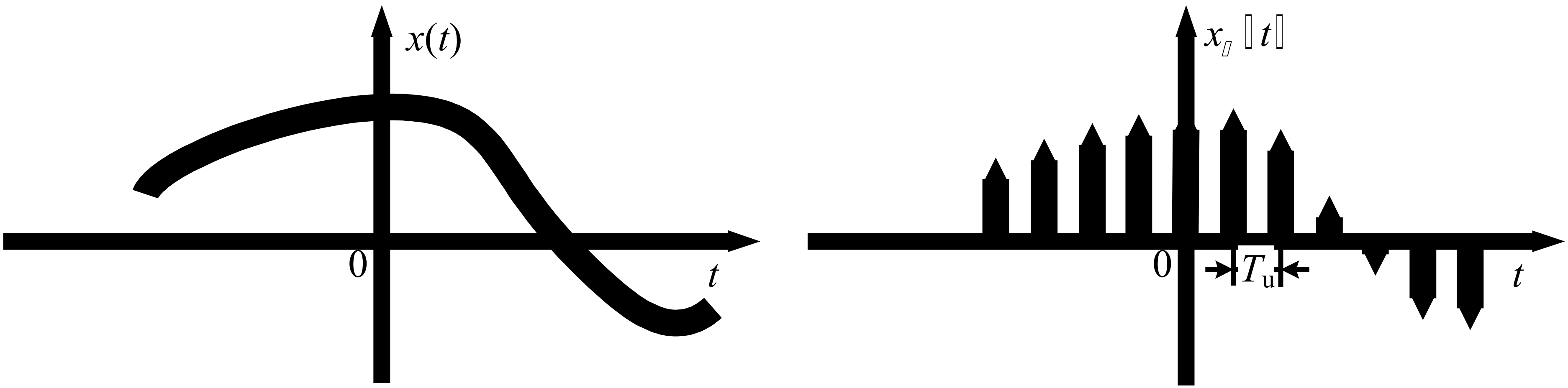
Dokaz teorema uzorkovanja

- promatrajmo proizvoljni signal $x(t)$ konačne energije, definiran za svaki $t \in \mathbf{R}$
- uzorci se uzimaju jednolikom frekvencijom
  - jedan uzorak svakih T_u sekundi
  - nastaje slijed uzoraka $\{x(nT_\mathrm{u})\}$, $n \in \mathbf{Z}$
  - T_u nazivamo period uzorkovanja
  - $f_\mathrm{u} = 1/T_\mathrm{u}$ je frekvencija uzorkovanja
  - idealno uzorkovanje: trajanje uzimanja uzorka $\Delta t \to 0$
- uzorkovani signal je slijed Diracovih impulsa

$$x_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,\delta(t - nT_u)$$

7 od 27

Proces uzorkovanja



- a) originalni kontinuirani signal
- b) njegova uzorkovana inačica
- Diracov impuls pomnožen koeficijentom $x(nT_u)$
  - aproksimiramo ga pravokutnim impulsom trajanja Δt i amplitude $x(nT_u)/\Delta t$

Svojstva Fourierove transformacije

- prvo svojstvo: $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0) \Leftrightarrow \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$
  - drugo svojstvo: funkcija $x_\delta(t)$ je umnožak funkcije $x(t)$ i beskonačnog slijeda Diracovih delta impulsa $\delta(t - nT_u)$
    - spektar od $x(t)$ je $X(f)$
    - spektar od slijeda $\delta(t - nT_u)$ - prvo svojstvo
  - $x_\delta(t)$ se preslikava u konvoluciju

$$X(f) * \left[f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_u)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\, f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-nf_u-\phi)\, d\phi =$$

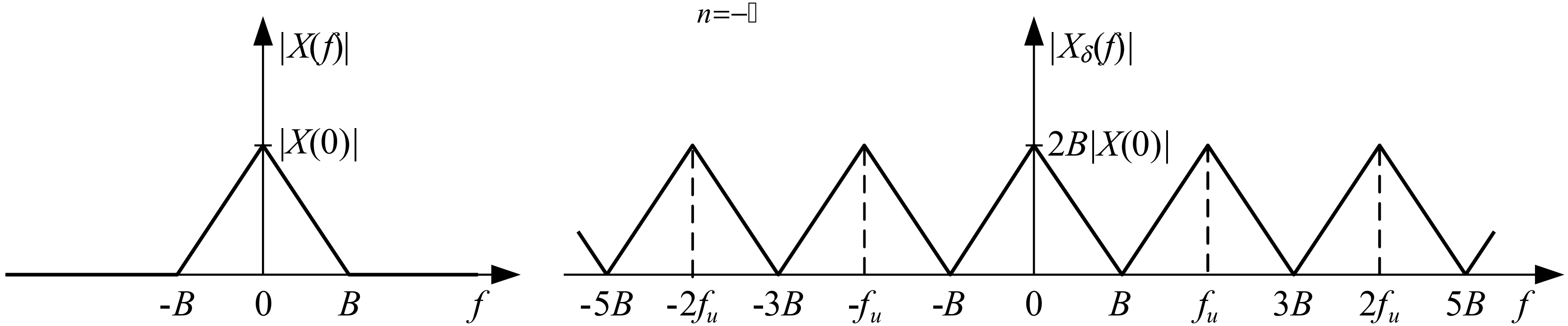
$$= f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\phi)\,\delta(f-nf_u-\phi)\, d\phi = f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f-nf_u),$$

9 od 27

Dokaz teorema uzorkovanja (nastavak)

- proces jednolikog uzorkovanja kontinuiranog signala konačne energije rezultira periodičkim spektrom čiji je period jednak frekvenciji uzimanja uzoraka

$$x_\delta(t) = f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_u)$$



a) b)

- a) amplitudni spektar signala pojasno ograničenog na pojas frekvencija (-*B*, *B*)
- b) amplitudni spektar uzorkovane inačice tog signala uzorkovane frekvencijom $f_u = 1/(2B)$

 10 od 27

Dokaz teorema uzorkovanja (nastavak)

- primijenimo Fourierovu transformaciju na obje strane izraza $$x_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,\delta(t - nT_u)$$
- iskoristimo svojstvo: $\delta(t - nT_u) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j2\pi n f T_u}$
- dobivamo: $$X_{\delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_u)\,e^{-j2\pi n f T_u}$$
- gornji se izraz naziva diskretna Fourierova transformacija (DFT)
- $X_{\delta}(f)$ je spektar signala $x_{\delta}(t)$

11 od 27

Dokaz teorema uzorkovanja (nastavak)

- pretpostavimo
  - $X(f) = 0$ za $|\,f\,| > B$ i $T_u = 1/(2B)$
- spektar od $x_\delta(t)$ je dan izrazom $X_\delta(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi n f / B}$
- koristeći izraz $x_\delta(t) \Leftrightarrow f_u \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - n f_u)$
- dobivamo $X_\delta(f) = f_u X(f) + f_u \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} X(f - m f_u)$
- ako vrijedi $X(f) = 0$ za $|\,f\,| > B$ i $f_u = 2B$
  - tada je $f_u \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} X(f - m f_u) = 0$

12 od 27

Dokaz teorema uzorkovanja (kraj)

- dakle, vrijedi: $X(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{2B}X_{\delta}(f), & -B\le f\le B\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$

- uvrstimo u prethodni izraz $X_{\delta}(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(\dfrac{n}{2B}\right)e^{-j\pi nf/B}$

- pa dobivamo $X(f)=\begin{cases}\dfrac{1}{2B}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x\left(\dfrac{n}{2B}\right)e^{-j\pi nf/B}, & -B\le f\le B\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$

- ako su $x[n/(2B)]$ poznate za svaki $n \in$ **Z** tada je $X(f)$ jednoznačno određen DFT-om
- $x(t)$ je inverzna Fourierova transformacija od $X(f)$
- dakle, $x(t)$ jednoznačno određen uzorcima

13 od 27

Rekonstrukcija signala

- Kako iz $\{x[n/(2B)]\}$ dobiti $x(t)$?

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-B}^{B} \frac{1}{2B} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) e^{-j\pi nf/B} e^{j2\pi ft} df$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \left(\frac{1}{2B}\right) \int_{-B}^{B} e^{j2\pi f\left(t-n/(2B)\right)} df$$

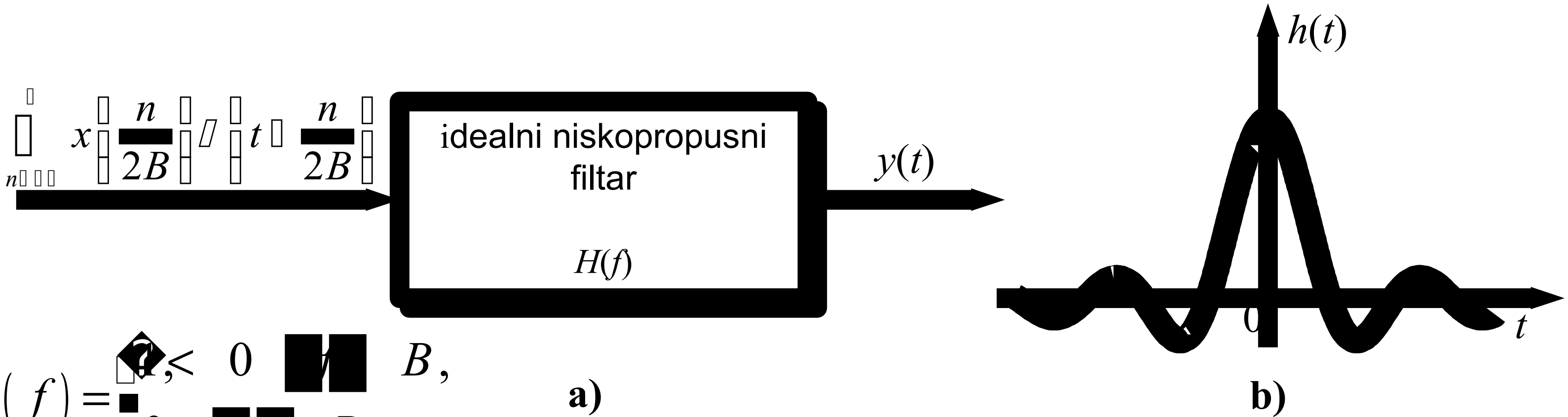
$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \left(\frac{\sin(2\pi Bt - n\pi)}{2\pi Bt - n\pi}\right), \quad -\infty < t < \infty$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bt - n), \quad -\infty < t < \infty$$

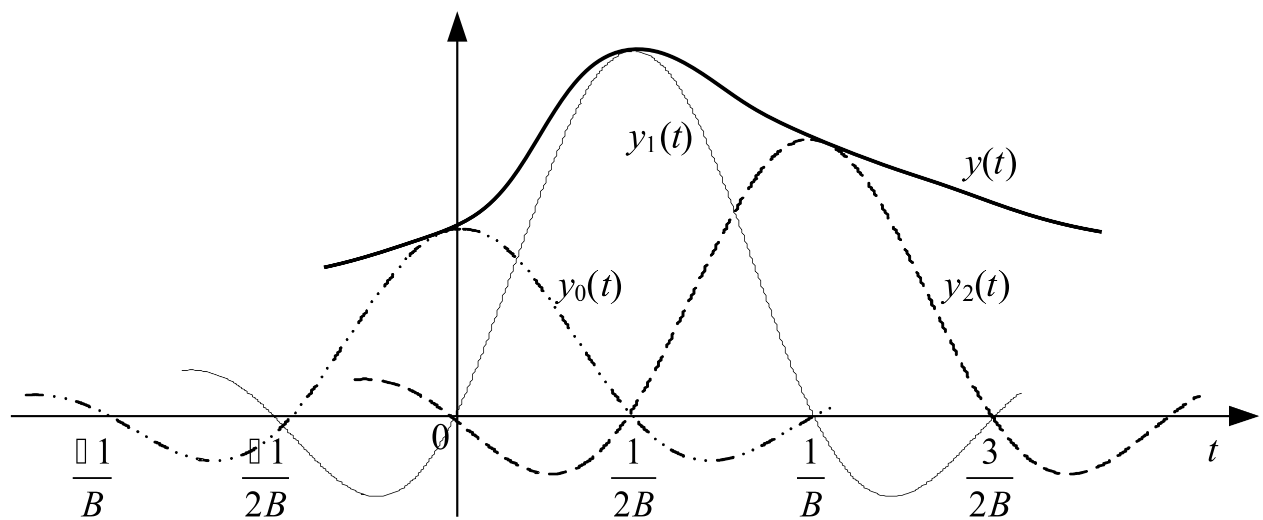
- $\operatorname{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$

14 od 27

Rekonstrukcija signala (II)



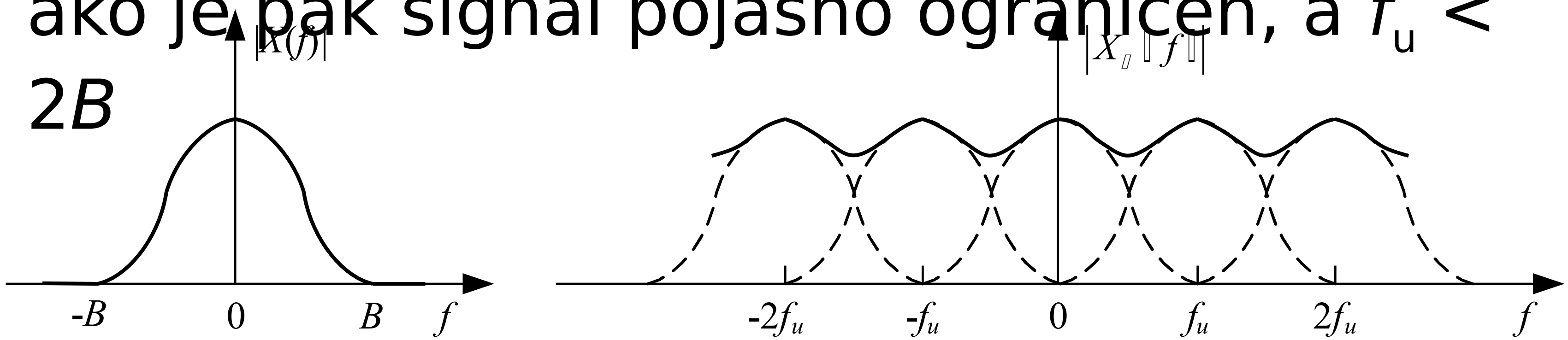
$$H(f)=\begin{cases}1, & |f|<B,\\ 0, & |f|>B.\end{cases}$$



15 od 27

Poduzorkovanje

- u praksi se uvijek odvija poduzorkovanje jer realni signali nisu striktno pojasno ograničeni
- ako je pak signal pojasno ograničen, a $f_u < 2B$



a) b)

  - rezultat poduzorkovanje je preklapanje spektara
    - iz izobličenog spektra nije moguće točno rekonstruirati izvorni signal

16 od 27

Kvantizacija uzoraka

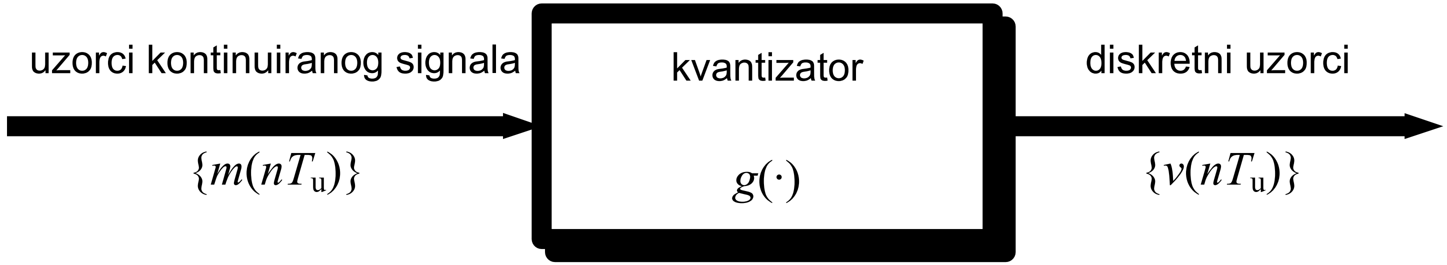
- nakon uzorkovanja kvantizacija je sljedeći korak u pretvorbi analognog u digitalni signal
  - analogni signal ima beskonačno mnogo mogućih vrijednosti amplitude
  - nije potrebno prenositi točne vrijednosti uzoraka
    - ljudska osjetila mogu detektirati samo konačne razlike između razina signala
  - originalni analogni signal je moguće aproksimirati signalom sastavljenim od diskretnih amplitudnih razina
    - odabiru se iz konačnog skupa po kriteriju minimalne pogreške u razlici između stvarnih i aproksimiranih vrijednosti signala
  - osnova tzv. *impulsno-kodne modulacije* (PCM)

17 od 27

Matematički model kvantizacije

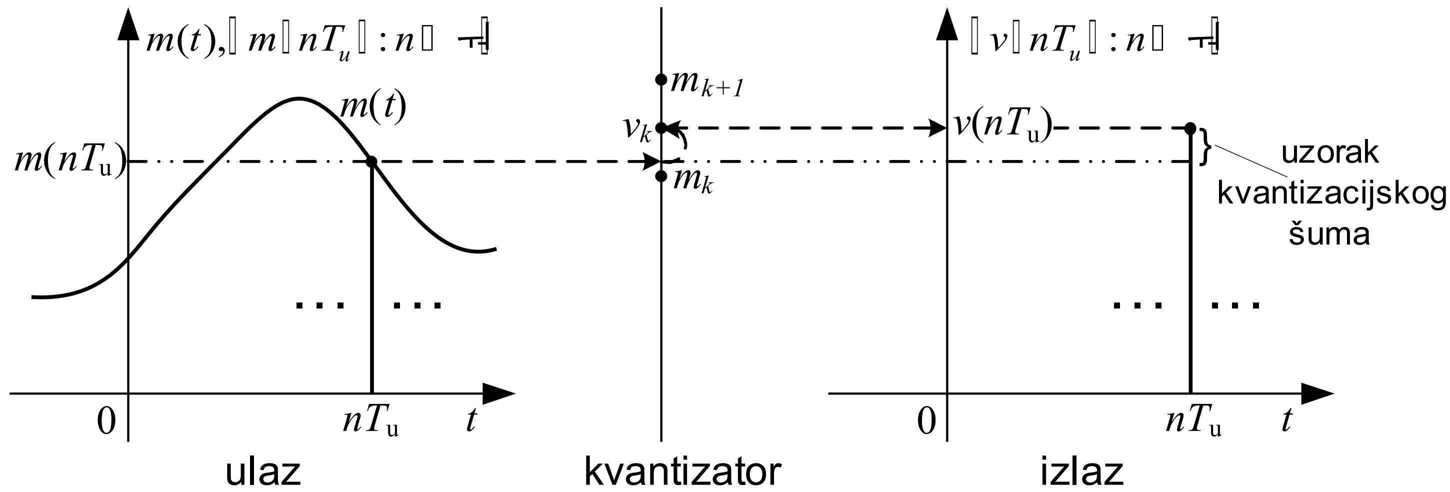
- amplitudni uzorci $m(nT_u)$ uzeti od $m(t)$ u nT_u, $n \in \mathbf{Z}$ se pretvaraju u diskretne amplitudne razine $v(nT_u)$
  - skupa mogućih razina je konačan
  - T_u je period uzorkovanja signala
  - pretpostavka: kvantizacijski proces je bezmemorijski i trenutan – ne koristi se u naprednijim postupcima
- neka je $m_k < m(nT_u) \leq m_k+1$, $k = 1, 2, ..., L$ i
- $m_k < v_k \leq m_k+1$, $k = 1, 2, \ldots, L$
  - L – broj stupnjeva amplitude kvantizatora (broj kvantizacijskih razina
- tada kvantizator preslikava $m(nT_u) \rightarrow v_k$

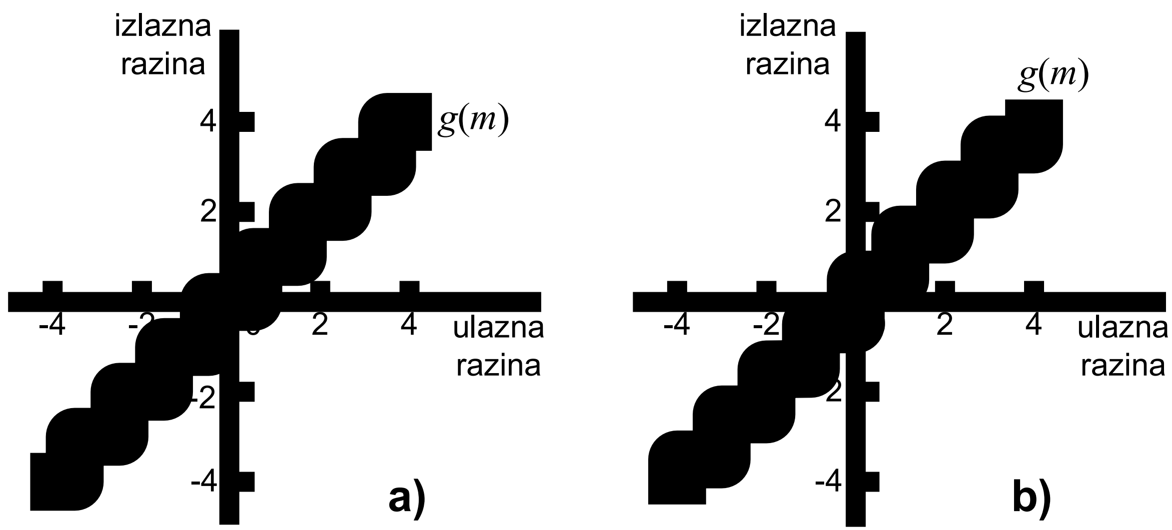
Kvantizator



- m_k – razine odlučivanja ili pragovi odluke
- $v_k+1 - v_k$ je korak kvantizacije
- $v = g(m)$ – kvantizacijska karakteristika
- najčešći slučaj u praksi: $v_k = (m_k + m_k+1)/2$
- ovisno o veličini koraka kvantizacija
  - jednolika kvantizacija – svi koraci jednaki
  - u suprotnom – nejednolika kvantizacija

Primjer kvantiziranja i jednolika kvantizacija





Kvantizacijski šum

- šum je razlika između $m(nT_u)$ i $v(nT_u)$
- ulaz u kvantizator kontinuirana slučajna varijabla M
- na izlazu kvantizatora diskretna slučajna varijabla V
  - vrijednosti od M i V su m, odnosno v, i vrijedi $v = g(m)$
- kvantizacijski šum – slučajna varijabla Q
  - vrijedi: $Q = M - V$, odnosno $q = m - v$
  - ako je $E[M] = 0$ i kvantizacijska karakteristika simetrična
  - vrijedi: $E[V] = E[Q] = 0$
- cilj: odrediti standardnu devijaciju kvantizacijskog šuma

Varijanca kvantizacijskog šuma

- pretpostavka:
  - amplitude ulaznog signala mogu poprimati kontinuirane vrijednosti iz intervala $(-m_{\max}, m_{\max})$
  - ako su amplitude ulaznog signala izvan tog intervala, nastupa preopterećenje kvantizatora i izobličenje
- korak kvantizacije $\Delta = 2m_{\max}/L$
- dakle, kvantizacijski šum je ograničen: $-\Delta/2 \le q \le \Delta/2$
  - ako je korak kvantizacije dovoljno mali
    - opravdano je pretpostaviti da slučajna varijabla Q ima jednoliku razdiobu

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & -\frac{\Delta}{2} < q \le \frac{\Delta}{2}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Varijanca kvantizacijskog šuma (II)

- s obzirom da je $E[Q] = 0$, vrijedi:

$$\operatorname{var}(Q) = \sigma_Q^2 = E\left[Q^2\right] = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2 f_Q(q)\, dq$$

$$\operatorname{var}(Q) = \sigma_Q^2 = \frac{1}{\Delta}\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} q^2\, dq = \frac{\Delta^2}{12}$$

- uzorci se prije prijenosa kodiraju binarnim kodom i prenose binarnim signalom (dvije razine)
- *r* označava broj bita za opis svakog uzorka v_k
  - mora vrijediti: $L = 2^r$
    - $L > 2^r$ – ne možemo jednoznačno opisati sve uzorke
    - $L < 2^r$ – nepotrebna zalihost u kodiranju

Varijanca kvantizacijskog šuma (III)

- nadalje, $\Delta = 2m_{max}/2^{r}$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{\max}^2 \, 2^{-2r}$$

- neka je S srednja signala $m(t)$
- tada vrijedi:

$$\left(S/N\right) = \frac{S}{\sigma_Q^2} = \left(\frac{3S}{m_{\max}^2}\right) 2^{2r}$$

Primjer: kvantizacija sinusnog signala

- sinusni signal amplitude A_{m}
  - koristi sve razine za rekonstrukciju signala
  - srednja snaga signala na otporniku otpora 1 om $\quad P = \frac{A_m^2}{2}$
  - raspon amplituda na ulazu kvantizatora iznosi $2A_{\mathrm{m}}$
  - dakle, $m_{\mathrm{max}} = A_{\mathrm{m}}$

$$\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} A_m^2 2^{-2r}$$

$$\left(S/N \right) = \frac{A_m^2/2}{A_m^2 2^{-2r}/3} = \frac{3}{2}\left(2^{2r} \right)$$

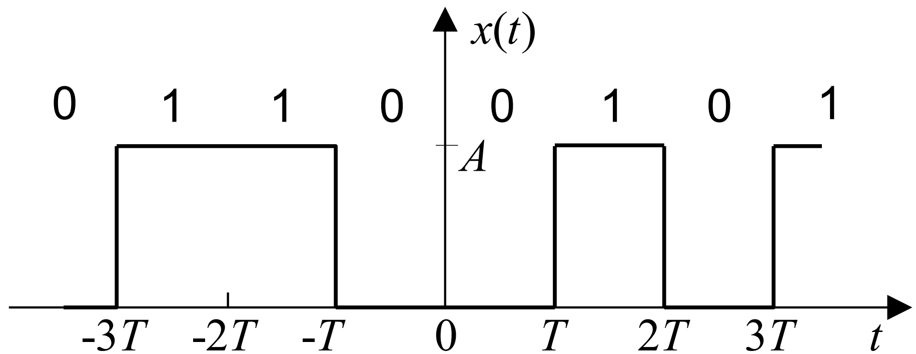
$$10\log_{10}\left(S/N \right) = 1{,}76 + 6{,}02\cdot r \left[\mathrm{dB} \right]$$

L	***r***	***S/N* [dB]**
32	5	31,8
64	6	37,8
128	7	43,8
256	8	49,8

Kodiranje kvantiziranih uzoraka

- kôd – pravilo dodjele sljedova simbola diskretnim kvantizacijskim razinama
  - kodna riječ – slijed simbola koji se dodjeljuje nekoj kvantizacijskoj razini
  - ako se prilikom kodiranja uzoraka koriste binarni simboli, tada se radi o binarnom kodu
  - pravilo kodiranja ovisi o vrsti komunikacijskog sustava
    - najčešće je određeno odgovarajućim preporukama, odnosno normama
  - primjer: na izlazu kvantizatora 4 kvantizacijske razine (L = 4): -3U, -U, U i 3U, U – napon u voltima
    - nužno koristiti 2 bita po svakoj razini
    - -3U → 11, -U → 10, U → 00 i 3U → 01

Unipolarni binarni signal



- uobičajeno pravilo je da se
  - binarnoj nuli pridjeljuje razina 0 [V]
  - binarnoj jedinici razina *A* [V]
- *T* – trajanje binarnih signalnih elemenata
  - ili trajanje bita, izraženo u sekundama
  - prijenosna brzina *R* = 1/*T* [bit/s]