Sustavi $M/G/\infty$ i $GI/G/\infty$

1. Tijekom svake godine u jednom malom gradu otvore se tri slastičarnice. Slastičarnice posluju prosječno 10 godina. Koliki je srednji broj slastičarnica koje posluju 1. siječnja 2525. godine? Ako se vrijeme između otvaranja slastičarnica ravna po eksponencijalnoj razdiobi kolika je vjerojatnost da će 1. siječnja 2525. godine gradu biti točno 25 slastičarnica?

Rješenje:

Zadano je λ = 3 slastičarnica/godina i $1/\mu$ = 10 godina/slastičarnica. Pretpostavljajući da je dosegnuto stacionarno stanje očekivani broj slastičarnica je prema Littleovom teoremu $N = \lambda T = \lambda/\mu = 30$. Ako se vrijeme između otvaranja slastičarnica ravna po eksponencijalnoj razdiobi tada uz proizvoljnu razdiobu vremena posluživanja (sustav $M/G/\infty$) stacionarna vjerojatnost p_j da je j slastičarnica i dalje u bussinesu slijedi Poissonovu razdiobu s parametrom λ/μ:

$$p_j = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^j e^{-\lambda/\mu}}{j!} \quad \Rightarrow \quad p_{25} = \frac{(30)^{25} e^{-30}}{25!} \cong 0.05$$

Sustav $M/G/1$

2. Poslužiteljski sustav $M/M/1$ je opisan srednjim brzinama λ = 5 i μ = 8. Odredite parametre performansi N, N_Q, T i W za sustave (a) $M/M/1$, (b) $M/G/1$, (c) $M/D/1$ i (d) komentirajte rezultate.

Rješenje:

(a) $M/M/1$:
Uz $\sigma^2 = 1/\mu^2$ dobivamo:

$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5}{3}; \quad N_Q = N - \rho = \frac{25}{24}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{3}; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{5}{24}$$

(b) $M/G/1$:
Parametri λ i μ su isti, ali za razdiobu vremena posluživanja S imamo $E(S) = 1/\mu = 1/8$ i $\mathrm{var}(S) = \sigma^2 = 1/64$, $\rho = 5/8$:

$$N_Q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{25}{24}; \quad N = N_Q + \rho = \frac{5}{3}; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{5}{24}; \quad T = W + \frac{1}{\mu} = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

(c) $M/D/1$:
$E(S) = 1/\mu = 1/8$ i $\mathrm{var}(S) = \sigma^2 = 0$, $\rho = 5/8$:

$$N_Q = \frac{\sigma\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{25}{48}; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{5}{48}$$

(d) U sustavu $M/D/1$ tipični korisnik čeka u redu upola kraće nego u sustavu $M/M/1$ s identičnim brzinama dolazaka i posluživanja. Čak ako i ne smanjujemo srednje vrijeme posluživanja, smanjivanjem varijabilnosti vremena posluživanja smanjuje se veličina reda čekanja i vrijeme čekanja.

3. Prosječno u svakom satu 20 vozila dolazi u restoran brze prehrane (drive-in). Ako je srednje vrijeme posluživanja svakog vozila 2 minute koliko vozila će prosječno čekati u redu? Pretpostavite eksponencijalno međudolazno vrijeme.

4. Zadan je poslužiteljski sustav $M/G/1$.
   (a) Usporedite očekivano vrijeme čekanja u redu ako je razdioba vremena posluživanja (1) eksponencijalna, (2) konstanta i (3) Erlangova sa standardnom devijacijom jednakom polovici vrijednosti između vrijednosti za konstantni i eksponencijalni slučaj.
   (b) Kakve će biti posljedice na očekivano vrijeme čekanja u redu i očekivanu duljinu reda čekanja ako se oba parametra λ i μ udvostruče za razdiobe vremena posluživanja iz (a)?

Rješenje:

(a) Osnovni parametri za sustav $M/G/1$ su (Pollaczek-Khintchine):

$$N_Q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}; \quad N = N_Q + \rho; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$$

(1) $M/M/1$:
Možemo koristiti izraze za $M/G/1$ uz $\sigma = 1/\mu$:

$$W_{\text{exp}} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

(2) $M/D/1$:
Možemo koristiti izraze za $M/G/1$ uz $\sigma = 0$:

$$W_{\text{const}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

(3) $M/E_k/1$:
Možemo koristiti izraze za M/G/1 uz $\sigma = (½)(0 + 1/\mu) = 1/(2\mu) \Rightarrow \sigma^2 = 1/(4\mu^2) \Rightarrow k = 4$:

$$W_{\text{Erlang}} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+4}{8}\frac{\lambda}{\lambda(\mu-\lambda)} = \frac{5}{8}\frac{\lambda}{\lambda(\mu-\lambda)}$$

Dakle, vidimo da vrijedi: $W_{\text{exp}} = 2W_{\text{const}} = (8/5)W_{\text{Erlang}}$.

(b) Označimo s β koeficijente 1, 1/2 i 8/5 za eksponencijalnu, konstantnu i Erlangovu razdiobu u izrazima dobivenim u (a). Neka je $\lambda_b = 2\lambda_a$ i $\mu_b = 2\mu_a$. Sada imamo:

$$W_a = \beta\left[\frac{\lambda_a}{\mu_a(\mu_a-\lambda_a)}\right], \quad \beta \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\}$$

$$W_b = \beta\left[\frac{2\lambda_a}{2\mu_a(2\mu_a-2\lambda_a)}\right] = \frac{W_a}{2}$$

$$N_Q^b = \lambda_b W_b = 2\lambda_a W_a / 2 = \lambda_a W_a = N_Q^a$$

Vidimo da je očekivano vrijeme čekanja prepolovljeno, a očekivana duljina reda je ostala nepromijenjena.

5. Zadan je poslužiteljski sustav $M/G/1$ gdje je σ^2 varijanca vremena posluživanja. Uz svaku tvrdnju označite je li ona točna ili nije te obrazložite svoj odgovor.
   (a) Porastom σ^2 (uz fiksni λ i μ) porasti će N i N_Q dok će W i T ostati nepromjenjeni.
   (b) Kod izbora između sporog (mali μ i σ^2) i brzog (veliki μ i σ^2) poslužitelja spori je uvijek pobjednik jer osigurava manji N_Q.
   (c) Uz fiksni λ i μ vrijednost za N_Q je dvostruko veća kod eksponencijalne razdiobe vremena posluživanja nego kod konstantnog vremena posluživanja.
   (d) Između svih mogućih razdioba vremena posluživanja (uz fiksni λ i μ) eksponencijalna razdioba daje najveću vrijednost za N_Q.

Rješenje:

Za $M/G/1$ imamo (Pollaczek-Khintchine):

$$N_Q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}; \quad N = N_Q + \rho; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$$

(a) Pogrešno: rasti će N i N_Q, ali kad oni rastu tada rastu i W i T.
(b) Pogrešno: kad su μ i σ^2 mali, N_Q nije nužno mali.
(a) Točno: za eksponencijalno posluživanje je $N_Q = \rho^2/(1-\rho)$ jer je $\sigma^2 = 1/\mu^2$;
za konstantno posluživanje je $N_Q = \rho^2/[2(1-\rho)]$ jer je $\sigma^2 = 0$.
(d) Pogrešno: lako je pronaći razdiobu sa $\sigma^2 > 1/\mu^2$.

6. U poslužiteljskom sustavu s Poissonovim ulazom poslužitelj treba obaviti dva različita posla i to uzastopno jedan iza drugog tako da je ukupno vrijeme posluživanja korisnika jednako sumi vremena posluživanja pojedinih poslova (oni su statistički neovisni).
   (a) Pretpostavimo da se trajanje prvog posla ravna po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 3 minuta, a trajanje drugog posla po Erlangovoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 9 minuta i parametrom oblika $k = 3$. Koji model posluživanja treba koristiti da bi se opisao ovakav sustav?
   (b) Pretpostavimo da je dio (a) modificiran tako da se i trajanje prvog posla ravna po Erlangovoj razdiobi s parametrom oblika $k = 3$ (srednja vrijednost ostaje 3 minute). Koji model posluživanja treba koristiti da bi se opisao ovakav sustav?

Rješenje:

(a) $M/E_4/1$: Poissonov ulaz, Erlangovo posluživanje uz $\mu = 1/12$ i $k = 4$.
(b) $M/G/1$: Poissonov ulaz, općenito posluživanje uz srednju vrijednos 3 + 9 = 12 min ($\mu = 1/12$) i varijancu $\sigma^2 = 1/(k\mu_1^2) + 1/(k\mu_2^2) = (1/k)[1/\mu_1^2 + 1/\mu_2^2] = (1/3)(3^2 + 9^2) = 30$.

Napomene:

Erlangova razdioba E_k, srednja vrijednost i varijanca:

$$f(x) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\mu x} \quad (x \geq 0), \qquad E(X) = \frac{1}{\mu}, \qquad \sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$$

μ i k su pozitivni parametri, a k je još i cijeli broj (ako k nije cijeli broj govorimo o *gama razdiobi*). Parametar k opisuje stupanj varijabilnosti vremena posluživanja obzirom na srednju vrijednost i zove se *parametar oblika* ili *broj faza*. Pretpostavimo da su X_1, X_2,..., X_k neovisne slučajne varijable s identičnim eksponencijalnim razdiobama srednje vrijednosti $1/(k\mu)$. Tada slučajna varijabla $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ ima Erlangovu razdiobu s parametrima μ i k. Dakle, ukupno posluživanje korisnka može se razmatrati ne kao obavljanje jednog specificiranog posla već kao izvršavanje sekvencije of k poslova. Ako ti poslovi imaju eksponencijalnu razdiobu trajanja, tada će ukupno vrijeme posluživanja imati Erlangovu razdiobu. To će biti slučaj, primjerice, kad poslužitelj treba obaviti isti eksponencijalni posao k puta za svakog korisnika (zato takvo posluživanje ponekad zovemo *k-fazno*).

Erlangova razdioba često je jako dobra aproksimacija empirijski dobivenih razdioba vremena posluživanja. Primjerice, eksponencijalna i degenerirana (konstanta) razdioba specijalni su slučaj Erlangove za $k = 1$ i $k = \infty$. Za vrijednosti k između 1 i ∞ dobivaju se razdiobe sa srednjom vrijednosti $1/\mu$, modom $(k-1)/(k\mu)$ i varijancom $1/(k\mu^2)$.

Parametre za model $M/E_k/1$dobivamo kao specijalni slučaj modela $M/G/1$ u kojem je $\sigma^2 = 1/(k\mu^2)$.

$$N_Q = \frac{\lambda^2/(k\mu^2) + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$T = W + \frac{1}{\mu}$$

$$N = \lambda T$$

7. U sustav $M/G/1$ prosječno dolazi 10 korisnika u svakom satu. Pretpostavite da vrijeme posluživanja slijedi Erlangovu razdiobu s parametrom 1 korisnik/min i parametrom oblika 4.
(a) Odredite očekivani broj korisnika koji čekaju u redu.
(b) Odredite očekivano vrijeme koje će korisnik provesti u sustavu.
(c) Koji dio vremena je poslužitelj slobodan?

Rezultat: (a) 5/6 (b) 9 min (c) 1/3

8. Koristeći činjenicu da je $N_s = \lambda/\mu$ dokažite da je za sustav $M/G/1$ vjerojatnost zauzeća poslužitelja $\rho = \lambda/\mu$.

9. Međudolazna vremena kod sustava $M/G/1$ ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom λ, a vrijeme posluživanja ima funkciju gustoće vjerojatnosti $s(t)$. Neka je X_i broj korisnika prisutnih u sustavu nakon završetka posluživanja i-tog korisnika.

(a) Objasnite zašto je $X_1, X_2,...,X_k$,...Markovljev lanac.
(b) Objasnite zašto je $p_{ij} = P(X_{k+1} = j \mid X_k = i) = 0$ za $j < i - 1$.

(c) Objasnite zašto je za $i > 0$: $p_{i,i-1}$ = (vjerojatnost da nema dolazaka tijekom vremena posluživanja) i p_{ii} = (vjerojatnost da je došao jedan poziv tijekom vremena posluživanja), a za $j \geq i$: p_{ij} = (vjerojatnost da se $j - i + 1$ dolazaka pojavi tijekom vremena posluživanja).

(d) Objasnite zašto za $j \geq i - 1$ i $i > 0$ vrijedi:

$$p_{ij} = \int_0^\infty \frac{s(x)e^{-\lambda x}(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!} dx$$

Uputa: Vjerojatnost da je vrijeme posluživanja između x i $x + \Delta x$ je $s(x)\Delta x$. Znajući da je vrijeme posluživanja jednako x, vjerojatnost da će se $j - i + 1$ dolazaka pojaviti tijekom vremena posluživanja je

$$\frac{e^{-\lambda x}(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}$$

Sustavi s prioritetom: $M_i/G_i/1$/NPRP

10. Kopiraonica daje prioritet kraćim poslovima. Međudolazna vremena za svaku vrstu (prioritet) posla su eksponencijalna a prosječno u svakom satu dolazi 12 kraćih i 6 dužih poslova. Zadani su parametri za razdiobe posluživanja S_i za dvije vrste poslova (i = 1, 2): $E(S_1)$ = 2 min, $E(S_1^2)$ = 6 min^2 =1/600 h^2, $E(S_2)$ = 4 min, $E(S_2^2)$ = 18 min^2 =1/200 h^2. Odredite prosječno vrijeme boravka svakog posla u kopiraonici.

Rješenje:

Zadano: λ_1 = 12 posao/h, λ_2 = 6 posao/h, μ_1 = 30 posao/h, μ_2 = 15 posao/h. Za sustav $M_i/G_i/1$/MPRP definiramo $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$, $a_0 = 0$ i $a_k = \rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_k$. Također treba biti: $\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_n < 1$ (n je broj vrsta (prioriteta) poslova). Tako imamo ρ_1 =12/30 = 0.4, ρ_2 = 6/15 = 0.4 i $\rho_1 + \rho_2 < 1$ (postoji stacionarno stanje). Parametri performansi za sustav $M_i/G_i/1$/MPRP su:

W_k = očekivano stacionarno vrijeme čekanja krisnika prioriteta k u redu čekanja
T_k = očekivano stacionarno vrijeme boraka krisnika prioriteta k u sustavu
N_{Qk} = očekivani stacionarn broj krisnika prioriteta k koji čekaju u redu
N_k = očekivani stacionarn broj krisnika prioriteta k u sustavu

$$W_k = \frac{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k E(S_k^2)}{(1-a_{k-1})(1-a_k)}, \quad N_{Qk} = \lambda_k W_k$$

$$T_k = W_k + \frac{1}{\mu_k}, \qquad N_k = \lambda_k T_k$$

Uz $a_0 = 0$, $a_1 = 0.4$ i $a_2 = 0.4 + 0.4 = 0.8$ možemo odrediti tražene performanse:

$$W_1 = \frac{\dfrac{12\times\frac{1}{600}}{2}+\dfrac{6\times\frac{1}{200}}{2}}{(1-0)(1-0.4)} = \frac{1}{24} = 0.042\,\mathrm{h}$$

$$W_2 = \frac{\dfrac{12\times\frac{1}{600}}{2}+\dfrac{6\times\frac{1}{200}}{2}}{(1-0.4)(1-0.8)} = \frac{5}{24} = 5W_1 = 0.208\,\mathrm{h}$$

$$T_1 = W_1 + \frac{1}{\mu_1} = 0.042 + 0.033 = \frac{3}{40} = 0.075\,\mathrm{h}$$

$$T_2 = W_2 + \frac{1}{\mu_2} = 0.208 + 0.067 = \frac{11}{40} = 0.275\,\mathrm{h}$$

Kao što smo i očekivali dulji poslovi provedu znatno više vremena u kopiraonici nego kraći poslovi.

Sustavi s prioritetom: $M_i/M/c$/NPRP

11. Policijska postaja ima pet policijskih vozila. Policijska postaja dobiva dvije vrste poziva: žurne pozive (prioritet 1) i uobičajene (prioritet 2). Međudolazna vremena za svaku vrstu (prioritet) poziva ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi s prosječno 10 žurnih i 20 običnih poziva primljenih tijekom jednog sata. Svaka vrsta poziva ima eksponencijalno vrijeme posluživanja sa srednjom vrijednosti 8 minuta (uzmite da je u prosjeku 6 od 8 minuta trajanje vožnje od policijske stanice do pozvanog mjesta i natrag). Žurni pozivi su višeg prioriteta. U prosjeku, koliko će vremena proći od prijema običnog poziva do dolaska policijskog vozila?

Rješenje:

Zadano: $c = 5$, $\lambda_1 = 10$ poziv/h, $\lambda_2 = 20$ poziv/h, $\mu = 60/8 = 7.5$ poziv/h.
Za sustav $M_i/M/c$/NPRP je očekivano stacionarno vrijeme čekanja krisnika prioriteta k u redu čekanja W_k, a n je broj vrsta korisnika (prioriteta):

$$W_k = \frac{P(j\ge c)}{c\mu(1-a_{k-1})(1-a_k)}, \quad a_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{c\mu} < 1 \quad (k\ge 1), \quad a_0 = 0$$

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j}{c\mu}$$

$P(j\ge c)$ određujemo kao i za sustav $M/M/c$:

$$P(j\ge c) = \frac{(c\rho)^c p_0}{c!(1-\rho)}$$

Uz ρ = (10 + 20)/(5×7.5) = 0.8, a_0 = 0, a_1 = 10/37.5 = 0.267, a_2 = (10 + 20)/37.5 = 0.8. Za c = 5 i ρ = 0.8 dobivamo $P(j \geq 5)$ = 0.55. Za običan poziv imamo:

$$W_2 = \frac{0.55}{5(7.5)(1-0.267)(1-0.8)} = \frac{0.55}{5.5} = 0.1\,\mathrm{h} = 6\ \mathrm{min}$$

Prosječno vrijeme od prijema običnog poziva do dolaska vozila je W_2 + (1/2)(ukupno trajanje vožnje za pojedini poziv) = 6 + 3 = 9 minuta.

Sustavi s prioritetom: $M_i/M/1$/PRP

12. U sveučilišnom računskom centru fakultetske obrade (prioritet 1) imaju prednost nad studentskim obradama (prioritet 2). Duljine svake vrste obrade sljede eksponencijalnu razdiobu sa srednjom vrijednosti 30 s. U svakom satu u prosjeku dođe 10 fakultetskih i 50 studentskih obrada. Koliko je prosječno vrijeme od predaje do završetka studentske obrade? Pretpostavite da su međudolazna vremena eksponencijalna.

Rješenje:

Zadano: λ_1 = 1/6 obrada/min, λ_2 = 5/6 obrada/min, μ = 2 obrada/min. Za sustav $M_i/M/1$/PRP je očekivano stacionarno vrijeme boraka krisnika tipa k u sustavu T_k definirano kao:

$$T_k = \frac{1}{\mu(1-a_{k-1})(1-a_k)}, \quad a_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{\mu} < 1 \quad (k \geq 1), \quad a_0 = 0$$

Dobivamo:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{1/6}{2} = \frac{1}{12}, \quad a_2 = \frac{1}{12} + \frac{5/6}{2} = \frac{1}{2}$$

$$T_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{12}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)} = \frac{12}{11}\ \mathrm{min} = 1.09\ \mathrm{min}$$

Prosječno 1.09 min studentska obrada provede u računskom centru.