Smjer: Telekomunikacije i informatika - četvrta nastavna godina, ak. g. 2006/2007. Datum: 19.01.2007.

PRVI MEĐUISPIT IZ PREDMETA *TEORIJA PROMETA*

GRUPA B

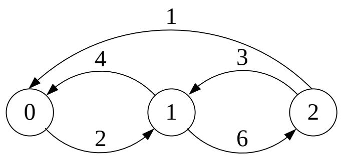
Zadatak 1. (20%) Dijagram stanja Markovljevog lanca s kontinuiranim parametrom prikazan je na slici ispod.

a) Napišite matricu gustoća prijelaza (infinitezimalnu matricu) za ovaj lanac.

b) Izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca rješavanjem jednadžbi globalne ravnoteže.

c) Izračunajte i skicirajte funkciju gustoće razdiobe slučajne varijable koja predstavlja vrijeme boravka lanca u stanju 1.

d) Izračunajte vjerojatnosti skoka između svih parova stanja.



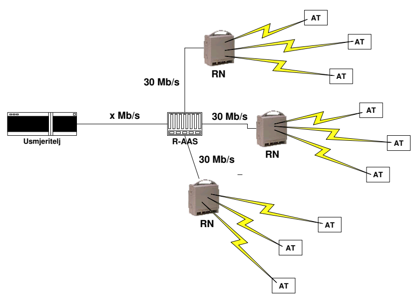
Zadatak 2. (20%) Promatrajte sustav posluživanja s 3 paralelna poslužitelja i spremnikom kapaciteta 2 jedinice. Vrijeme posluživanja u poslužiteljima je raspodijeljeno eksponencijalno s parametrom μ, a jedinice dolaze u sustav po Poissonovom procesu s intenzitetom λ.

a) Nacrtajte dijagram stanja Markovljevog lanca koji opisuje ovaj sustav i izračunajte stacionarne vjerojatnosti lanca.

b) Odredite izraz za opterećenje jednog poslužitelja.

c) Koristeći dobivene stacionarne vjerojatnosti odredite izraz za prosječan broj jedinica u cijelom sustavu.

Zadatak 3. (20%) BAS (*Broadband Acces System*) je pristupna mreža temeljena na radio prijenosu između korisnika i pristupnog čvora. Svaki korisnik posjeduje uređaj kojim komunicira s pristupnim čvorom. Taj čvor se zove AT (LMDS *Access Terminal*) (vidi sliku). Uređaj koji komunicira s AT-ovima korisnika na strani operatora



Slika 1: BAS

je RN (*Radio Node*). Pretpostavimo da RN koncentrira promet koji dolazi od korisnika i šalje ga čvoru R-AAS. Koncentriranje se izvodi spremanjem u određeni spremnik. RN je s R-AAS-om spojen linkom efektivnog kapaciteta 30 Mb/s. R-AAS koncentrira promet koji stiže od ostalih RN-ova i šalje ga usmjeritelju.

Korisnici u mrežu šalju IP pakete čija je duljina raspodijeljena eksponencijalno s očekivanjem 1000 bita (zanemarite granularnost). Svaki korisnik u prosjeku generira 1500 paketa u sekundi (po Poissonu). Koliki maksimalan broj korisnika smije biti spojen na jedan RN kako bi prosječno kašnjenje zbog koncentracije bilo manje od 1 ms ?

Zadatak 4. (20%) Određena pločica u telefonskoj centrali je trostruko redundantna i redundantni dijelovi rade u hladnoj rezervi. Pločica se ne mijenja dok se ne pokvare sva tri redundantna dijela (glavni i dva rezervna). Ako je prosječno vrijeme do otkazivanja jednog elementa 1 godina, izračunajte funkciju gustoće razdiobe vremena nakon kojeg će biti potrebno zamijeniti pločicu.

Zadatak 5. (20%) Liječnik vodi ordinaciju bez pomoći medicinske sestre zato što je ona otišla na godišnji odmor. Budući da ne može obavljati svoj dio posla i dio posla kojeg bi trebala obavljati medicinska sestra istovremeno, liječnik prvo primi pacijenta (pripremi njegov karton, provjeri zdravstvenu iskaznicu ...), a onda tek počinje obavljati pregled. Vremena pregleda i prijema su raspodijeljena eksponencijalno s očekivanjima 10 minuta. Koliki broj pacijenata čeka ispred vrata ordinacije ako je intenzitet dolazaka pacijenata 2 na sat ?

Rješenje zadatka 1. (20%) a) Infinitezimalna matrica je:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 4 & -10 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Dovoljno je postaviti dvije jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$\begin{aligned} 2\hat{p}_0 &= 4\hat{p}_1 + 1\hat{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = 2\hat{p}_0 - 4\hat{p}_1 \\ (6+4)\hat{p}_1 &= 2\hat{p}_0 + 3\hat{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{5}\hat{p}_0 + \frac{3}{10}\hat{p}_2 \\ 1 &= \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem druge u prvu jednadžbu dobivamo

$$\hat{p}_2 = 2\hat{p}_0 - \frac{4}{5}\hat{p}_0 - \frac{6}{5}\hat{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{11}{5}\hat{p}_2 = \frac{6}{5}\hat{p}_0 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{6}{11}\hat{p}_0$$

Uvrštavanjem izraza za $\hat{p}_2$ ponovno u drugu jednadžbu dobivamo

$$\hat{p}_1 = \frac{1}{5}\hat{p}_0 + \frac{6}{11}\frac{3}{10}\hat{p}_0 \Rightarrow \hat{p}_1 = \frac{4}{11}\hat{p}_0$$

Konačno uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo

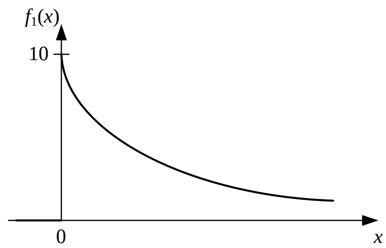
$$\hat{p}_0\left(1 + \frac{4}{11} + \frac{6}{11}\right) = 1 \Rightarrow \hat{p}_0 = \frac{11}{21}$$

Vektor stacionarnih vjerojatnosti je

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \frac{11}{21} & \frac{4}{21} & \frac{6}{21} \end{bmatrix}.$$

c) Budući da iz teorije znamo da je vrijeme zadržavanja lanca u stanju i raspodijeljeno po eksponencijalnoj razdiobi s parametrom $-q_{ii}$, neposredno slijedi:

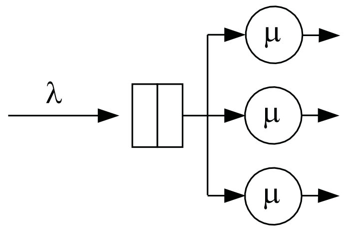
$$f_1(x) = \begin{cases} 10e^{-10x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

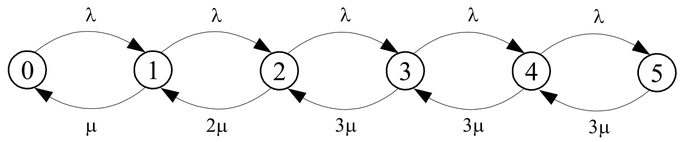


d) Vjerojatnost skoka iz stanja i u stanje j određeno je izrazom $\tilde{p}_{ij} = \frac{q_{ij}}{-q_{ii}}$. Budući da se traže vjerojatnosti svih skokova, rezultat je najlakše prikazati matrično:

$$[\tilde{p}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

Rješenje zadatka 2. (20%) a) Možemo definirati dijagram stanja kako je prikazano na slici.





Budući da se radi o jednodimenzionalnom lancu rađanja i umiranja, možemo postaviti sljedeće jednadžbe lokalne ravnoteže:

$$\lambda \hat{p}_0 = \mu \hat{p}_1 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{\lambda}{\mu}\hat{p}_0$$

$$\lambda \hat{p}_1 = 2\mu \hat{p}_2 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\hat{p}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \hat{p}_0$$

$$\lambda \hat{p}_2 = 3\mu \hat{p}_3 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_3 = \frac{\lambda}{3\mu}\hat{p}_2 = \frac{1}{2\cdot 3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \hat{p}_0$$

$$\lambda \hat{p}_3 = 3\mu \hat{p}_4 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_4 = \frac{\lambda}{3\mu}\hat{p}_3 = \frac{1}{2\cdot 3^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 \hat{p}_0$$

$$\lambda \hat{p}_4 = 3\mu \hat{p}_5 \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_5 = \frac{\lambda}{3\mu}\hat{p}_4 = \frac{1}{2\cdot 3^3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 \hat{p}_0$$

$$1 = \hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5$$

Iz dobivenih jednadžbi dobivamo vrijednost za $\hat{p}_0$, a time i sve ostale stacionarne vjerojatnosti:

$$\hat{p}_0 = \left[1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{18} + \frac{A^5}{54}\right]^{-1}$$

gdje je $A = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

b) Opterećenje jednog poslužitelja jednako je

$$\rho = \frac{\lambda_{ef}}{3\mu} = \frac{\lambda\left(1 - \hat{p}_5\right)}{3\mu} = \frac{A}{3}\,\frac{1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{18}}{1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{18} + \frac{A^5}{54}}$$

c) $\overline{N}$ dobivamo kao očekivanje slučajne varijable N koja odgovara stanju Markovljevog lanca u stacionarnom stanju:

$$\begin{aligned}\overline{N} &= E\left[N\right] = 0\hat{p}_0 + 1\hat{p}_1 + 2\hat{p}_2 + 3\hat{p}_3 + 4\hat{p}_4 + 5\hat{p}_5 \\ &= \frac{A + A^2 + \frac{A^3}{2} + \frac{2}{9}A^4 + \frac{5}{54}A^5}{1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{18} + \frac{A^5}{54}}\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 3. (20%) Svi korisnici koje pokriva LMDS RN šalju pakete po Poissonovu procesu. Ukupni dolazni tok je također Poissonov s intenzitetom koji je jednak zbroju intenziteta slanja paketa svih korisnika. RN djeluje kao koncentrator paketa koji dolaze. Koncentracija se vrši spremanjem dolaznih paketa u FIFO spremnik koji se poslužuje određenim intenzitetom. Dakle, radi se o sustavu M/M/1. Raspolažemo sljedećim podacima:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1500 \text{ erl/s} \qquad T_L = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \text{ s} \\ \bar{x} &= \frac{1000 \text{ bit}}{30\cdot 10^6 \text{ bit/s}} = \frac{1}{30\cdot 10^3} \text{ s} = \frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

Do maksimalnog broja korisnika dolazimo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-n\frac{\lambda}{\mu})} = \frac{1}{\mu - n\lambda} < T_L \\
\frac{1}{T_L} &< \mu - n\lambda \qquad n\lambda < \mu - \frac{1}{T_L} \\
n &< \frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{\lambda T_L} \\
n &< 19.33 \\
n_{max} &= 19 \text{ korisnika}
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 4. (20%) Budući da je vrijeme ispravnog rada sustava od tri pločice sastavljeno (jednako zbroju) od tri eksponencijalno raspodijeljena vremena s prosječnom vrijednošću (očekivanjem) 1 godinu, to se vrijeme ispravnog rada ravna po Erlangovoj razdiobi s parametrom $r = 3$, E_3. Koristeći se izrazom za gustoću razdiobe dobivamo da vrijeme do kvara sve tri pločice ($\tilde{x}$) ima razdiobu:

$$f_{\tilde{x}}(x) = \frac{3\frac{1}{3\,\text{god.}}\left(3\frac{1}{3\,\text{god.}}x\right)^2 e^{-3\frac{1}{3\,\text{god.}}x}}{2!}$$

Rješenje zadatka 5. (20%) Cijela ordinacija je sustav posluživanja čiji se poslužitelj sastoji od dva serijski spojena "eksponencijalna" poslužitelja (liječnik koji prihvaća pacijenta, i isti liječnik koji ga pregledava), svaki s očekivanjem 10 minuta. Budući da pacijent čeka ispred vrata ordinacije sve dok je prethodni u njoj, jasno je da se radi o sustavu posluživanja $M/E_2/1$, $r = 2$.

$$\frac{1}{2\mu} = 10 \text{ min} \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{20 \text{ min}}$$

Koristeći se podatkom da je $\lambda = 2/60$ pacijenata u minuti dobivamo:

$$\overline{N}_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu}^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}\left[1 + \frac{1}{r}\right] = 1 \text{ pacijent}$$