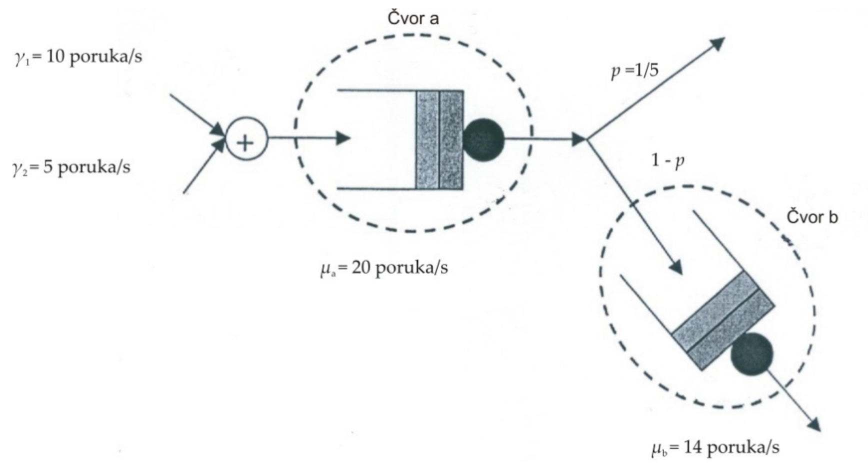
Mreže redova

1. Na slici je prikazana aciklična mreža redova bez povratnih veza. Dolazni procesi iz okoline mreže su neovisni i ravnaju se po Poissonovoj razdiobi sa srednjim brzinama γ_1 i γ_2. Prijenosna vremena poruka se ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim brzinama μ_a i μ_b. Izračunajte srednje kašnjenje poruke od ulaska do izlaska iz mreže.



Rješenje:

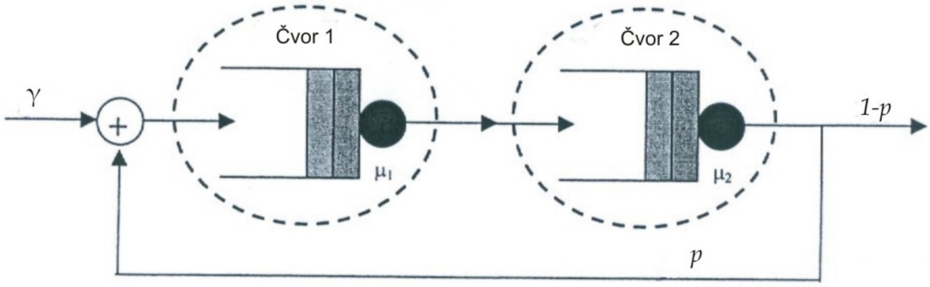
Vanjski Poissonovi dolasci su neovisni pa je i njihova suma Poissonov proces sa srednjom dolaznom brzinom $\gamma_1 + \gamma_2$ poruka/s. Čvor a je red M/M/1 s beskonačnim spremnikom i ulaznim intenzitetom prometa $\rho_a = (\gamma_1 + \gamma_2)/\mu_a = 15/20 = 3/4$ erl. Red je stabilan jer je $\rho_a < 1$. Srednji broj poruka u tom čvoru iznosi $N_a = \rho_a/(1 - \rho_a) = 3$. Pomoću Littleovog teorema odredimo srednje kašnjenje poruke u čvoru a: $T_a = N_a/(\gamma_1 + \gamma_2) = 1/5 = 0.2$ s. Izlazni proces iz čvora a je i dalje Poissonov sa srednjom brzinom $\gamma_1 + \gamma_2$ (Burkeov teorem). Takav Poissonov proces slučajno se djeli na poruke koje napuštaju mrežu s vjerojatnosti p i poruke koje se usmjeravaju prema čvoru b s vjerojatnošću $1 - p$. Ulazni proces u čvor b je i dalje Poissonov sa srednjom brzinom $(1 - p)(\gamma_1 + \gamma_2)$. Čvor b je red M/M/1 s intenzitetom prometa $\rho_b = (1 - p)(\gamma_1 + \gamma_2)/\mu_b = 6/7$ erl < 1 (stabilno). Srednji broj poruka u čvoru b je $N_b = \rho_b/(1 - \rho_b) = 6$ poruka, a srednje kašnjenje za čvor b je $T_b = N_b/[(1 - p)(\gamma_1 + \gamma_2)] = 1/2 = 0.5$ s.

Srednje kašnjenje poruke od ulaza do izlaza iz mreže redova može se odrediti (uz zanemarenje propagacijskog kašnjenja) kao:

$$T = pT_a + (1-p)(T_a + T_b) = T_a + (1-p)T_b = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} = 0.6\ \text{s}$$

2. Na slici je prikazana mreža redova spojenih u seriju (tandem) s povratnom vezom (ciklička mreža). Poruke koje dolaze iz okoline mreže u prvi čvor ravnaju se po Poissonovoj razdiobi sa srednjom brzinom dolazaka γ. Vremena posluživanja poruka u oba čvora su neovisna i ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim brzinama μ_1 i μ_2. Čvorovi imaju beskonačne spremnike, a usmjeravanje u izlaznom čvoru je stohastičko. Odredite:
(a) Uvjete stabilnosti za svaki čvor.

(b) Razdiobu vjerojatnosti stanja za svaki čvor.
(c) Srednji broj poruka u svakom čvoru.
(d) Srednje kašnjenje poruka od ulaska u mrežu do izlaska iz mreže (end-to-end).



Rješenje:

Zadana mreža u potpunosti zadovoljava uvjete Jacksonovog teorema: (1) spremnici su beskonačni, (2) usmjeravanje je stohastičko, (3) vanjski dolazni procesi iz okoline mreže su Poissonovi i međusobno neovisni i (4) razdiobe vremena posluživanja poruka su eksponenci-jalna i neovisna od čvora do čvora.

(a) Prema Jacksonovom teoremu svaki čvor je sustav M/M/1. Za svaku točku stapanja (sumiranja) prometnih tokova (u ovom zadatku postoji samo jedna takva točka) možemo napisati prometne jednadžbe srednjih brzina. Ako je λ ukupna srednja brzina dolazaka na ulaz čvora 1 tada, uz pretpostavku da je taj čvor stabilan, izlazna srednja brzina iz čvora 1 izosi također λ. To je ujedno srednja ulazna brzina u čvor 2. Čvor 1 je stabilan uz uvjet da je $\rho_1 = \lambda/\mu_1 < 1$ erl, a čvor 2 uz uvjet da je $\rho_2 = \lambda/\mu_2 < 1$ erl. λ određujemo iz jednadžbe za srednju brzinu:

$$\gamma + \lambda p = \lambda \Rightarrow \lambda = \gamma/(1-p)$$

Sada možemo odrediti intenzitete prometa za čvorove 1 i 2:

$$\rho_1 = \frac{\gamma}{(1-p)\mu_1}; \quad \rho_2 = \frac{\gamma}{(1-p)\mu_2}$$

(b) Vjerojatnost stanja u pojedinom čvoru ravna se po geometrijskoj razdiobi (sustav M/M/1). Ako s P_{n1} (P_{n2}) označimo vjerojatnost da se n_1 (n_2) poruka nalazi u čvoru 1 (čvoru 2) tada imamo:

$$P_{n1}(n) = (1-\rho_1)\rho_1^n, \quad P_{n2}(n) = (1-\rho_2)\rho_2^n, \quad n = 0,1,\ldots$$

Razdioba stanja za stanje mreže (n_1, n_2) ima produktni oblik $P_{n1,n2} = P_{n1} \times P_{n2}$.

(c) Srednji broj poruka u čvorovima 1 i 2 su redom $N_1 = \rho_1/(1-\rho_1)$ i $N_2 = \rho_2/(1-\rho_2)$.

(d) Srednja kašnjenja poruka u čvorovima 1 i 2 dobijemo primjenom Littleovog teorema:

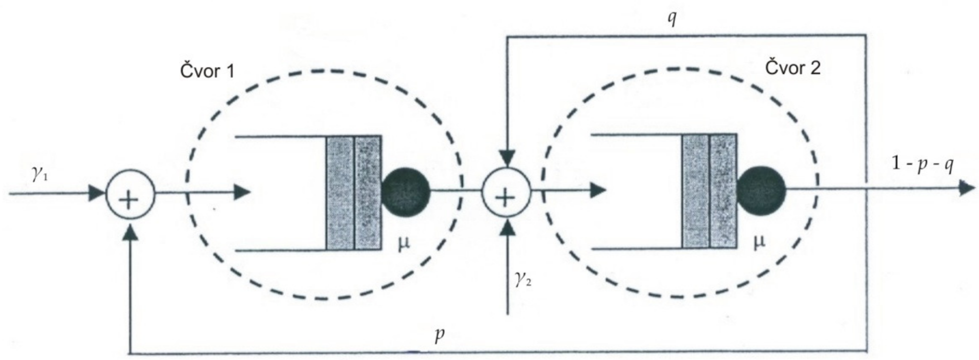
$$T_1 = \frac{N_1}{\lambda} = \frac{\rho_1}{\lambda(1-\rho_1)} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda}; \quad T_2 = \frac{N_2}{\lambda} = \frac{\rho_2}{\lambda(1-\rho_2)} = \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

Srednje kašnjenje T poruke od ulaska u mrežu do izlaska iz mreže dobivamo kao:

$$T = \frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{2}\lambda T_k = \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{2} T_k = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{\mu_1-\lambda}+\frac{1}{\mu_2-\lambda}\right]$$

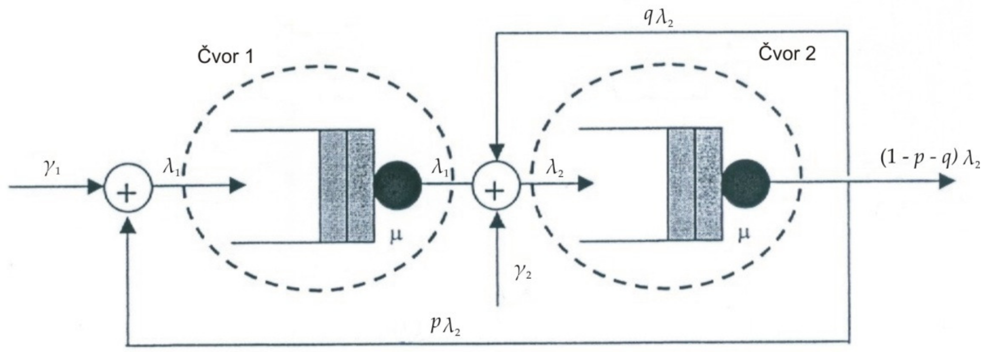
Treba uočiti da član u uglatim zagradama odgovara srednjem kašnjenju poruke kod svakog prolaska kroz čvorove 1 i 2, dok je multiplikacijski faktor $1/(1-p)$ broj višekratnog prolaska poruka kroz oba čvora kao rezultat postojanja povratne veze.

3. Za mrežu redova prikazanu na slici treba odrediti uvjete stabilnosti za različite čvorove (redove čekanja) i srednje kašnjenje poruke od ulaska do izlaska iz mreže. Ulazni tokovi iz okoline mreže su Poissonovi sa srednjim brzinama γ_1 i γ_2. Vremena posluživanja poruka su neovisna i ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi s jednakom srednjom brzinom μ u oba čvora. Čvorovi imaju beskonačne spremnike. Izlazni tok iz čvora 2 se slučajno dijeli tako da se s vjerojatnošću p vraća u čvor 1, a s vjerojatnošću q u čvor 2 ($0 < p, q < 1$).



Rješenje:

Uz uvjete stabilnosti srednje ulazne i izlazne brzine za svaki čvor su jednake. Ako s λ_1 i λ_2 označimo ukupne dolazne brzine za čvorove 1 i 2, tada možemo napisati jednadžbe srednjih brzina za sve točke stapanja (sumiranja) tokova u mreži.



$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 + p\lambda_2 \\ \lambda_2 = \gamma_2 + \lambda_1 + q\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\gamma_2 p + (1-p)\gamma_1}{1-p-q} \\ \lambda_2 = \dfrac{\gamma_1+\gamma_2}{1-p-q} \end{cases}$$

Uvjeti Jacksonovog teorema su ispunjeni pa čvorove 1 i 2 možemo proučavati kao modele M/M/1. Oba čvora su stabilna ako su ispunjeni uvjeti: $\rho_1 = \lambda_1/\mu < 1$ i $\rho_2 = \lambda_2/\mu < 1$. Srednji broj poruka u čvorovima 1 i 2 je

$$N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \quad \text{i} \quad N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

Srednje kašnjenje poruke od ulaska u mrežu do izlaska iz mreže može se dobiti primjenom Littleovog teorema na cijelu mrežu:

$$T = \frac{N_1 + N_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

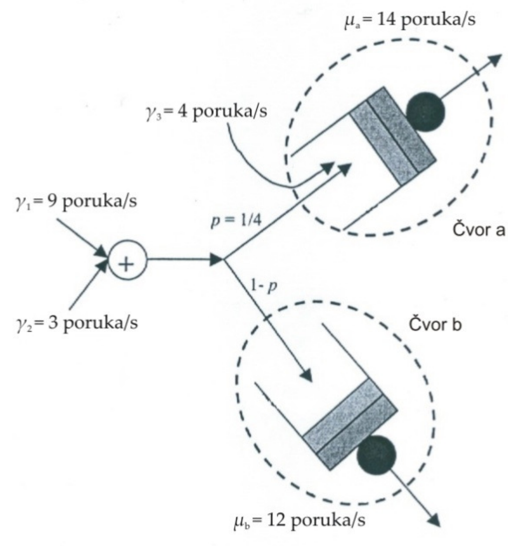
4. U telekomunikacijskoj (telefonskoj) mreži upravljanje prihvaćanjem poziva (veza) iz okoline mreže obavlja se odbacivanjem (blokiranjem) viška ponuđenog prometa. Uz poznatu vjerojatnost odbacivanja (blokiranja) poziva p_B, poznati ukupni ulazni promet čija je srednja brzina γ i ukupni srednji broj poziva u čitavoj mreži N potrebno je odrediti srednje kašnjenje kroz mrežu tipičnog prihvaćenog poziva.

Rješenje:

Primjenimo Littleov teorem na cijelu mrežu uz pretpostavku da su svi čvorovi (tj. redovi čekanja) stabilni a srednja brzina (intenzitet) dolazaka poziva u mrežu je $\gamma^* = \gamma(1 - p_B)$. Traženo kašnjenje je

$$T = \frac{N}{\gamma^*} = \frac{N}{\gamma(1-p_B)}$$

5. Za mrežu redova prikazanu na slici treba odrediti srednji broj poruka u svim redovima i ukupno srednje kašnjenje poruke od njenog ulaska do izlaska iz mreže. Ulazni procesi su Poissonovi i neovisni.



Rješenje:

Svi redovi u mreži su sustavi M/M/1 zato jer: (a) svi ulazni procesi su Poissonovi, (b) suma neovisnih Poissonovih procesa je Poissonov proces, (c) podjela je vjerojatnosna pa su podjeljeni procesi Poissonovi, (d) mreža je aciklična i (e) svi redovi imaju beskonačni spremnik (nema blokiranja).

Broj poruka N_a i N_b intenziteti prometa ρ_a i ρ_b u čvorovima a i b su za sustav M/M/1:

$$\lambda_a = \gamma_3 + p(\gamma_1 + \gamma_2), \quad \lambda_b = (1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\rho_a = \frac{\lambda_a}{\mu_a} = \frac{\gamma_3 + p(\gamma_1+\gamma_2)}{\mu_a} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} < 1, \quad \rho_b = \frac{\lambda_b}{\mu_b} = \frac{(1-p)(\gamma_1+\gamma_2)}{\mu_b} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} < 1$$

$$N_a = \frac{\rho_a}{1-\rho_a} = 1 \text{ poruka}, \ N_b = \frac{\rho_b}{1-\rho_b} = 3 \text{ poruka}$$

Oba su reda stabilna. Ukupan broj poruka u mreži je $N = N_a + N_b = 4$ poruka. Pomoću Littleovog teorema izračunavamo ukupno srednje kašnjenje poruke T od njenog ulaska do izlaska iz mreže:

$$T = N/\gamma = (N_a + N_b)/(\gamma_1 + \gamma_1 + \gamma_1) = 4/16 = 1/4 \text{ s}$$

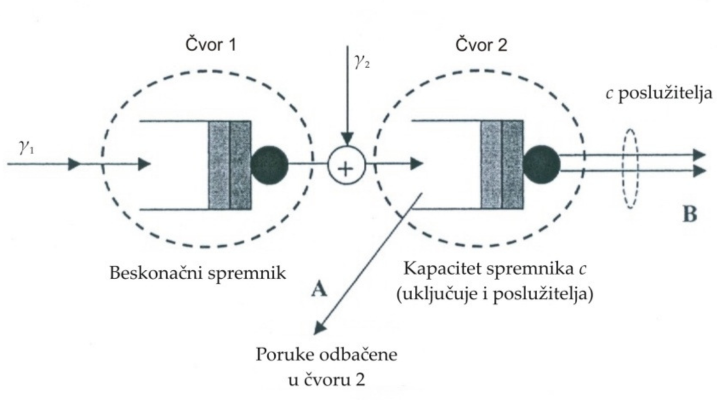
Srednje kašnjenje T može se također izračunati tako da se uzima u razmatranje težinska suma srednjih kašnjenja kroz pojedini red. Težina w_a za čvor a je vjerojatnost da novi dolazak (iz okoline mreže, tj. vanjski dolazak) prođe kroz čvor a. Slično je definirana i težina w_b za čvor b.

$$w_a = \frac{\lambda_a}{\gamma} = \frac{\gamma_3 + p(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}, \qquad w_b = \frac{\lambda_b}{\gamma} = \frac{(1-p)(\gamma_1+\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$$

T se dobiva primjenom Littleove formule na svaki čvor:

$$T = w_a T_a + w_b T_b = w_a \frac{N_a}{\lambda_a} + w_b \frac{N_b}{\lambda_b} = \frac{N_a + N_b}{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}.$$

6. Za mrežu redova prikazanu na slici znamo: (1) Dolazni procesi poruka za čvorove 1 i 2 su neovisni i ravnaju se po Poissonovoj razdiobi sa srednjim brzinama λ_1 i λ_2. (2) Čvor 1 ima beskonačni spremnik a vrijeme posluživanja poruka ravna se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom brzinom μ. (3) Čvor 2 ima spremnik veličine c, broj poslužitelja je c a vrijeme posluživanja ravna se po općoj razdiobi sa srednjom brzinom E[X]. Treba odrediti srednji broj poruka u svakom čvoru i srednje kašnjenje T od ulaska poruke u mrežu do trenutka njenog napuštanja mreže bilo u točki A ili u točki B.



Rješenje:

Čvor 1 je sustav M/M/1. Uz pretpostavku da je $\rho_1 = \gamma_1/\mu < 1$ Erl čvor 1 je stabilan a izlazni je proces i dalje Poissonov srednje brzine γ_1 (Burkeov teorem). Neovisni Poissonovi procesi srednjih brzina γ_1 i γ_2 sumiraju se na ulasku u čvor 2. Rezultirajući proces je i dalje Poissonov sa srednjom brzinom $\gamma_1 + \gamma_2$. Budući da se vrijeme posluživanja u čvoru 2 ravna po općoj razdiobi moguće je čvor 2 modelirati kao sustav s gubicima M/G/c/c koji je opisan s jednakom razdiobom vjerojatnosti kao i ekvivalentni Markovljev sustav M/M/c/c s intenzitetom prometa $\rho_2 = (\gamma_1 + \gamma_2)\mathrm{E}[X]$. Vjerojatnost blokiranja p_B za poruke koje dođu kad su svi poslužitelji zauzeti određuje se po poznatoj Erlang-B formuli.

Srednji brojevi poruka N_1 i N_2 u čvorovima 1 i 2 određeni su pomoću poznatih izraza za sustave M/M/1 i M/M/c/c:

$$N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \qquad N_2 = (1-p_\mathrm{B})\rho_2,\ p_\mathrm{B} = \frac{\rho_2^c}{c!\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho_2^i}{i!}}$$

Srednja kašnjenja T_1 i T_2 poruke prilikom njenog prolaska kroz čvor 1 i 2 dobivamo pomoću Littleovog teorema:

$$T_1 = \frac{N_1}{\gamma_1}, \qquad T_1 = \frac{N_2}{(1-p_\mathrm{B})(\gamma_1+\gamma_2)} \equiv \mathrm{E}[X]$$

Da bi odredili srednje kašnjenje poruke od ulaza do izlaza (A ili B) moramo razmatrati dva različita slučaja ovisna o mjestu ulaska poruke u mrežu:

1. Poruke ulaze u mrežu u čvoru 1: to se događa s vjerojatnošću $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$ a pripadno kašnjenje poruke je $T_1 + (1 - p_\mathrm{B})T_2$.
2. Poruke ulaze u mrežu u čvoru 2: to se događa s vjerojatnošću $\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ a pripadno kašnjenje poruke je $p_\mathrm{B}\times 0 + (1 - p_\mathrm{B})T_2 = (1 - p_\mathrm{B})T_2$.

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\left[T_1 + (1-p_\mathrm{B})T_2\right] + \frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\left[(1-p_\mathrm{B})T_2\right] \\
&= \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}T_1 + (1-p_\mathrm{B})T_2 \\
&= \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{N_1}{\gamma_1} + (1-p_\mathrm{B})\frac{N_2}{(\gamma_1+\gamma_2)(1-p_\mathrm{B})} \\
&= \frac{N_1+N_2}{\gamma_1+\gamma_2}
\end{aligned}$$

Gornji izraz za T mogli smo dobiti i primjenom Littleovog teorema na cijelu mrežu od dva čvora u kojoj je ukupno $N_1 + N_2$ poruka, a ukupna srednja brzina (vanjskih) dolazaka iznosi $\gamma_1 + \gamma_2$.

Uvrštavanjem vrijednosti za N_1 i N_2 srednje kašnjenje T možemo izraziti i kao:

$$T = \frac{N_1 + N_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1} + \rho_2 (1 - p_\mathrm{B})}{\gamma_1 + \gamma_2}$$