Otvorene mreže

1. Analizirajte otvorenu Jacksonovu mrežu sastavljenu od N čvorova povezanih u prsten. Konfiguracija mreže je simetrična: nakon završetka posluživanja u nekom čvoru korisnik može ići u bilo koji od dva njegova susjeda s vjerojatnosti 0.3 ili napustiti mrežu s vjerojatnosti 0.4. Vanjske dolazne brzine za sve čvorove su jednake γ/N; srednja trajanje posluživanja u svim čvorovima su jednaka 1.
   Izračunajte ukupnu brzinu dolazaka u svaki čvor i uvjet koji γ mora zadovoljiti da bi mreža bila stabilna. Odredite ukupni srednji broj korisnika u mreži, srednje vrijeme odziva, ukupno srednje vrijeme potrebno za posluživanje pojedinog korisnika i ukupni srednji broj posluživanja pojedinog korisnika tijekom njegovog boravka u mreži.

2. U Jacksonovoj mrežin s tri čvora korisnici se usmjeravaju zadanom matricom usmjeravanja:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Postoje vanjski dolasci u čvorove 1 i 2 čije su brzine redom 3 i 2. Srednja trajanja posluživanja u čvorovima 1, 2 i 3 su redom 3, 10 i 4.
   Odredite srednji broj korisnika u svakom čvoru, te u čitavoj mreži. Odredite također srednje vrijeme prolaska R_1 i R_2 od povezanih čvorova 1 i 2 do napuštanja mreže.

3. Neka je vij prosječni broj posjeta koje će korisnik obaviti u čvoru j prije napuštanja mreže znajući da je bio u čvoru i. Pokažite da ti prosjeci zadovoljavaju skup jednadžbi:

$$v_{ii} = 1 + \sum_{k=1}^{N} q_{ik} v_{kj}, \qquad i = 1, 2, \dots N$$

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^{N} q_{ik} v_{kj}, \qquad i \neq j = 1, 2, \dots N$$

   Koristite te jednadže kod rješavanja Zadatka 2 te odredite srednji broj posjeta čvorovima 1 i 3 znajući da korisnik dolazi iz čvora 1. Usporedite rezultate s bezuvjetnim prosjecima v_1 i v_3 te objasnite nesklad dobivenih rezultata.

Zatvorene mreže

4. Stanje zatvorene mreže s N čvorova i K korisnika može se prikazati kao niz od N nula i K jedinica. Svaki čvor, počevši od prvog, prikazan je s '0' iza koje dolazi toliko '1' koliko je korisnika prisutnih u tom čvoru. Na primjer, za mrežu s tri čvora i pet korisnika, niz 01001111 opisuje stanje u kojem je u prvom čvoru jedan korisnik, u drugom nema korisnika i u trećem čvoru su četiri korisnika. Izvedite jednadžbu (19) koristeći činjenicu da je broj mogućih stanja jednak broju mogućih izbora za poziciju N - 1 nula između ukupno $K + N – 1$ pozicija nula i jedinica.

5. Normalizacijska konstanta G iz Gordon-Newellovog teorema ovisi o broju čvorova i broju korisnika. Da bi podcrtali eksplicitno tu ovisnost često se normalizacijska konstanta označava kao $G_N(K)$. Pretpostavimo da su svi čvorovi u mreži sastavljeni od jednog poslužitelja. Izraz (22) sada ima oblik

$$G_N(K) = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_K=K} \prod_{i=1}^{N} \rho_i^{n_i}$$

Podijelite desnu stranu na dvije sume: prva se proteže nad onim stanjima za koje je $n_N = 0$, a druga nad stanjima za koje je $n_N > 0$. Pokažite da se konačni izraz može napisati kao

$$G_N(K) = G_{N-1}(K) + \rho_N G_N(K-1)$$

Ova rekurzija sugerira efikasan algoritam za izračunavanje $G_N(K)$ počevši od početnih uvjeta $G_0(K) = 0$ ($K = 1,2,...$) i $G_N(0) = 1$ ($N = 1,2,...$).

6. Zadana je zatvorena mreža sastavljena od tri jednoposlužiteljska čvora. Korisnik nakon napuštanja čvora 1 ide u čvor 2 s vjerojatnosti 0.4 a u čvor 3 s vjerojatnosti 0.6. Iz čvora 2 korisnik uvijek ide u čvor 3. Iz čvora 3 ide u čvor 1 s vjerojatnosti 0.5 i napušta mrežu s vjerojatnosti 0.5; u ovom zadnjem slučaju, novi korisnik neposredno uđe u čvor 2 (ulazna točka je na grani od čvora 3 prema čvoru 2). U trenutku 0 dva su korisnika u mreži. Srednja vremena posluživanja u čvorovima 1, 2 i 3 su redom 2, 5 i 0.5. Odredite stacionarnu propusnost i srednje vrijeme odziva za tu mrežu. Identificirajte čvor zagušenja (usko grlo) i odredite gornju granicu za propusnost koju je moguće dosegnuti uvođenjem više korisnika u mrežu u trenutku 0.

7. U potpuno povezanoj zatvorenoj mreži s N čvorova i K korisnika svi članovi matrice usmjeravanja su jednaki: $p_{ij} = 1/N$ ($i,j = 1, 2,..., N$). Srednja vremena posluživanja u svim čvorovima su jednaka τ. Smjestite ulaznu točku na neku granu (npr. na povratnu granu od čvora 1 prema čvoru 1). Koristeći svojstvo simetričnosti modela izvedite izraze za sve prosječne mjere performansi.