Smjer: Telekomunikacije i informatika - četvrta nastavna godina, ak. g. 2006/2007. Datum: 20.11.2006.

PRVI MEĐUISPIT IZ PREDMETA *TEORIJA PROMETA*

GRUPA A

Zadatak 1. (20%) Slučajni eksperiment se sastoji od uzastopnog bacanja novčića dok ne ispadne glava. Bacanja novčića su neovisni događaji. Vjerojatnost da ispadne glava jednaka je vjerojatnosti da ispadne pismo. Jedna realizacija ovog eksperimenta može biti P, P, G, i tada kažemo da je glava ispala iz trećeg bacanja. Izračunajte vjerojatnost da:

a) glava ispadne u k-tom bacanju,

b) glava ispadne u parnom bacanju.

Zadatak 2. (20%) Neka je X kontinuirana slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom s parametrom λ. Slučajna varijabla Y je definirana izrazom:

$$Y = X^2.$$

Izračunajte razdiobu slučajne varijable Y.
(Napomena: Potrebno je izračunati gustoću razdiobe $f_Y(y)$ **za sve vrijednosti** $-\infty \leq y \leq \infty$.)

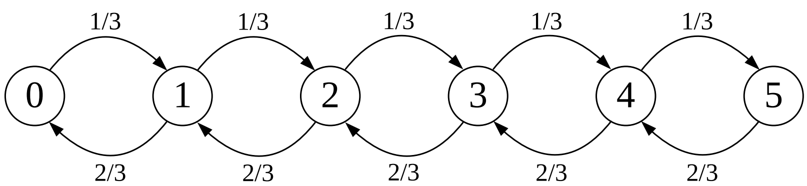
Zadatak 3. (20%) Neka je $X(t)$ stohastčki proces definiran izrazom:

$$X(t) = A \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right),$$

gdje su A i ω konstante, a φ slučajna varijabla jednoliko raspodijeljena u području $[-\pi, \pi]$. Pokažite da je ovaj proces stacionaran u širem smislu (WSS).

Zadatak 4. (20%) Prijenosni sustav sastoji se od n dionica. Vjerojatnost invertiranja (pogreške) jedinice je $0,1$, a nule $0,2$. Vjerojatnost pojave jedinice na ulazu u sustav je $0,6$, a nule $0,4$. Kolika je vjerojatnost pogreške bita na cijelom prijenosnom sustavu?

Zadatak 5. (20%) Na slici je prikazan dijagram stanja Markovljevog lanca diskretnog u vremenu.



a) Nadopunite prikazani dijagram.

b) Odredite matricu prijelaznih vjerojatnosti ovog lanca.

c) Izračunajte vektor stacionarnih vjerojatnosti stanja lanca.

d) Izračunajte očekivanje ovog stacionarnog procesa u stacionarnom stanju.

(Napomena: Prilikom računanja stacionarnih vjerojatnosti koristite onu metodu kojom ćete najlakše doći do rješenja).

Rješenje zadatka 1. (20%) a) Zadatak je najlakše riješiti ukoliko se uvede slučajna varijabla X koja je jednaka rednom broju bacanja u kojem se pojavila glava. Vjerojatnost da je iz k-tog bacanja ispala glava odgovara događaju $X = k$. Evidentno je da realizacija događaja $X = k$ odgovara događaju $PPP...PG$, gdje je broj događaja P jednak $k - 1$. Vjerojatnosti događaja P i G su $P(G) = P(P) = 1/2$. Budući da su događaji P i G međusobno neovisni, to je

$$P(PPP...PPG) = P(P) \cdot P(P) \ldots P(P) \cdot P(G) = (1/2)^{k-1} \cdot 1/2 = (1/2)^k.$$

Stoga je

$$P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

b) Vjerojatnost da je glava ispala iz parnog bacanja je jednaka:

$$\begin{aligned}
P(X = 2 \cup X = 4 \cup X = 6 \cup \cdots) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} X = 2 \cdot i\right) = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = 2 \cdot i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^{2i} = \sum_{i=1}^{\infty} (1/4)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (1/4)^i - 1 = \frac{1}{1 - 1/4} - 1 = 1/3.
\end{aligned}$$

Rješenje zadatka 2. (20%) Funkcija gustoće eksponencijalne razdiobe s parametrom λ je

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Funkcija povezanosti i njena inverzna funkcija je

$$g(x) = x^2, \quad \rightarrow \quad h(y) = \sqrt{y}.$$

Za $X \geq 0$ vrijedi da je i $Y \geq 0$. Stoga je

$$\left|\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Koristeći se jednadžbom za slučaj monotono rastućih funkcija $g(x)$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= f_X[h(y)] \cdot \left|\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y}\right| \\
&= \lambda e^{-\lambda h(y)} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}.
\end{aligned}$$

Budući da Y ne može poprimiti vrijednosti manje od 0, slijedi da je gustoća:

$$f_Y(y) = 0, \quad \text{za} \quad y < 0.$$

Rješenje je:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\sqrt{y}} e^{-\lambda\sqrt{y}}, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Rješenje zadatka 3. (20%) Potrebno je pokazati da je očekivanje konstantno, a autokorelacijska funkcija ovisi samo o razlici parametara.

$$f_\varphi(\varphi) = \begin{cases} -\pi \leq \varphi \leq \pi & \frac{1}{2\pi} \\ \text{drugdje} & 0 \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[A\cdot\cos(\omega t+\varphi)] = A\cdot E[\cos(\omega t+\varphi)] = \\
&= A\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\omega t+\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}\,d\varphi = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_X(t,t+s) &= E[X(t)\cdot X(t+s)] = A^2\cdot E[\cos(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\omega s+\varphi)] \\
&= A^2\cdot E\left\{\cos(\omega t+\varphi)\left[\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega s)-\sin(\omega t+\varphi)\sin(\omega s)\right]\right\} \\
&= A^2\cdot E\left[\cos^2(\omega t+\varphi)\cos(\omega s)-\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)\sin(\omega s)\right] \\
&= A^2\cos(\omega s)E\left[\cos^2(\omega t+\varphi)\right]-A^2\sin(\omega s)E\left[\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)\right]
\end{aligned}
$$

$$
E\left[\cos^2(\omega t+\varphi)\right] = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\omega t+\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos(2\omega t+2\varphi)}{2}\,d\varphi = \frac{1}{2}
$$

$$
E\left[\cos(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\sin(2\omega t+2\varphi)\,d\varphi = 0
$$

$$
R_X(t,t+s) = \frac{A^2}{2}\cos(\omega s)
$$

Rješenje zadatka 4. (20%) Neka G označava događaj "došlo je do pogreške bita", Z_1 "na ulazu je 1" i Z_0 "na ulazu je 0".

$$
\begin{aligned}
P\{G\} &= P\{G\cap U\} = P\{G\cap(Z_1+Z_0)\} = \\
&= P\{G\cap Z_1\}+P\{G\cap Z_0\} = P\{G|Z_1\}\cdot P\{Z_1\}+P\{G|Z_0\}\cdot P\{Z_0\}.
\end{aligned}
$$

Jasno je da je $P\{Z_1\}=0,6$, $P\{Z_0\}=0,4$, a $P\{G|Z_1\}$ i $P\{G|Z_0\}$ su elementi matrice $\mathbf{P}^n$, gdje je $\mathbf{P}$ matrica prijelaza jednog sustava.

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}
$$

Potencija $\mathbf{P}^n$ može se naći metodom spektralne dekompozicije ili metodom dijagonalizacije.

$$
|\mathbf{P}-\lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 0,8-\lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,9-\lambda \end{vmatrix} = (0,8-\lambda)\cdot(0,9-\lambda)-0,2\cdot 0,1 =
$$

$$
= \lambda^2-1,7\cdot\lambda+0,7 = 0
$$

Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobivamo svojstvene vrijednosti:

$$
\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0,7.
$$

Slijede i svojstveni vektori:

$$
\begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad 0,8x_1+0,2x_2 = x_1 \quad\rightarrow\quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7x_1 \\ 0,7x_2 \end{bmatrix} \quad\rightarrow\quad 0,8x_1+0,2x_2 = 0,7x_1 \quad\rightarrow\quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0,1 \end{bmatrix}
$$

Dijagonalna matrica $\mathbf{D}$ i matrica $\mathbf{S}$ su:

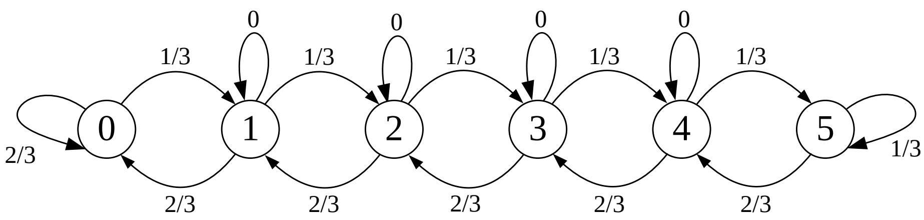
$$
\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -0,2 \\ 1 & 0,1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{0,3}\begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Slijedi:

$$
\mathbf{P}^n = \mathbf{S}\cdot\mathbf{D}^n\cdot\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{0,3}\begin{bmatrix} 0,1+0,2\cdot 0,7^n & 0,2-0,2\cdot 0,7^n \\ 0,1-0,1\cdot 0,7^n & 0,2+0,1\cdot 0,7^n \end{bmatrix}.
$$

Konačno je:

$$
P\{G\} = 0,6\cdot\frac{0,1}{0,3}[1-0,7^n]+0,4\cdot\frac{0,2}{0,3}[1-0,7^n] = \frac{14}{30}\cdot[1-0,7^n].
$$



Rješenje zadatka 5. (20%) a) Nadopunjeni dijagram Markovljevog lanca je:

b) Matrica prijelaznih vjerojatnosti je:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

c) Mogu se postaviti sljedeće jednadžbe:

$$\begin{aligned}
\hat{p}_0 &= \hat{p}_0\frac{2}{3} + \hat{p}_1\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_1 = \frac{1}{2}\hat{p}_0 \\
\hat{p}_1 &= \hat{p}_0\frac{1}{3} + \hat{p}_2\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_2 = \frac{1}{4}\hat{p}_0 \\
\hat{p}_2 &= \hat{p}_1\frac{1}{3} + \hat{p}_3\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_3 = \frac{1}{8}\hat{p}_0 \\
\hat{p}_3 &= \hat{p}_2\frac{1}{3} + \hat{p}_4\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_4 = \frac{1}{16}\hat{p}_0 \\
\hat{p}_4 &= \hat{p}_3\frac{1}{3} + \hat{p}_5\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \hat{p}_5 = \frac{1}{32}\hat{p}_0
\end{aligned}$$

Odnosno

$$\hat{p}_i = \frac{1}{2^i}\hat{p}_0, \quad i = 0, \ldots, 5.$$

$$\hat{p}_0 + \hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5 = 1$$

$$\hat{p}_0 = \left[\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^i\right]^{-1} = \frac{32}{63}.$$

d) Ako se s X_n označi stanje procesa u n-tom koraku, onda je $E[X_n]$:

$$E[X_n] = \sum_{i=0}^{5} i \cdot \hat{p}_0 = \frac{32}{63}\sum_{i=0}^{5} i \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{57}{63}$$