

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
F A K U L T E T
ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA
Z A V O D Z A
ELEKTROSTROJARSTVO
I AUTOMATIZACIJU

TEORIJA ELEKTRIČNIH STROJEVA I TRANSFORMATORA

Zadaci za vježbu:

TRANSFORMATORI

Autori:

Prof. dr. sc. **Zlatko Maljković**

Stjepan Stipetić, dipl. ing.

Zagreb, listopad 2008.

SADRŽAJ

1. OSNOVNA FIZIKALNA SLIKA	3
2. NADOMJESNA SHEMA I FAZORSKI DIJAGRAM	10
3. SPOJEVI TRANSFORMATORA	18
4. KORISNOST TRANSFORMATORA	25
5. AUTOTRANSFORMATOR I TIPSKA SNAGA	28
6. PARALELNI RAD	32
7. ZAGRIJAVANJE I ŽIVOTNI VIJEK TRANSFORMATORA	37
8. LITERATURA	41

1. OSNOVNA FIZIKALNA SLIKA

1.1. Odrediti magnetski tok, indukciju, struju magnetiziranja i induktivitet prigušnice, ako je jezgra od:

a) željeza ($\mu = 1/300 \text{ Vs/Am}$),

b) drveta ($\mu = \mu_0$).

$$D_{\text{sr}} = 0,4 \text{ m}$$

$$S = 0,001 \text{ m}^2$$

$$N = 1200$$

$$U = 220 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Rješenje:

Narinuti napon tjera struju kroz prigušnicu, a struja stvara magnetski tok u jezgri.

Promjenjivi magnetski tok inducira napon koji, uz zanemarenje otpora namota, drži protutežu naponu narinutom na prigušnicu. Struja je upravo tolikog iznosa da se formira tok zahtjevan po formuli:

$$U = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_{\text{maks}}$$

$$\Phi_{\text{maks}} = \frac{U}{4,44 \cdot f \cdot N} = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 1200} = \boxed{0,83 \cdot 10^{-3} \text{ Vs}}$$

$$B_{\text{maks}} = \frac{\Phi_{\text{maks}}}{S} = \frac{0,83 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = \boxed{0,83 \text{ T}}$$

Zakon protjecanja: $\oint H \cdot dl = N \cdot I$

$$H_{\text{maks}} \cdot l_{\text{sr}} = N \cdot I_{\text{maks}} = \Theta_{\text{maks}}$$

$$l_{\text{sr}} = D_{\text{sr}} \cdot \pi = 1,256 \text{ m}$$

$$\frac{B_{\text{maks}}}{\mu} \cdot l_{\text{sr}} = N \cdot I_{\text{maks}}$$

ILI

Ohmov zakon za magnetski krug:

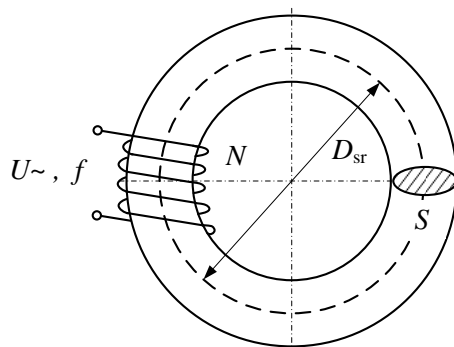
Magnetski tok jednak je omjeru protjecanja (magnetskog napona) i magnetskog otpora.

$$\Phi = \frac{NI}{R_{\text{m}}} = \frac{\Theta}{R_{\text{m}}}$$

$$R_{\text{m}} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l_{\text{sr}}}{S}$$

$$N \cdot I_{\text{maks}} = N \cdot I \cdot \sqrt{2} = \Phi_{\text{maks}} \cdot R_{\text{m}} = \Phi_{\text{maks}} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l_{\text{sr}}}{S} = \frac{B_{\text{maks}}}{\mu} \cdot l_{\text{sr}}$$

$$L = \frac{\psi_{\text{maks}}}{I_{\text{maks}}} = \frac{N \cdot \Phi_{\text{maks}}}{\sqrt{2} \cdot I} = \frac{N \cdot B_{\text{maks}} \cdot S}{\sqrt{2} \cdot I} = \frac{N \cdot S}{\sqrt{2} \cdot I} \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot N \cdot I \cdot \mu}{l_{\text{sr}}} = \frac{N^2 \mu S}{l_{\text{sr}}}$$



a) željezo: $\mu = \frac{1}{300} \text{ Vs/Am}$

$$I = \frac{B_{\text{maks}}}{\mu} \cdot l_{\text{sr}} \cdot \frac{1}{N \cdot \sqrt{2}} = \frac{0,83 \cdot 1,256}{\frac{1}{300} \cdot 1200 \cdot \sqrt{2}} = \boxed{0,184 \text{ A}}$$

$$L = \frac{N^2 \mu S}{l_{\text{sr}}} = \frac{1200^2 \cdot \frac{1}{300} \cdot 10^{-3}}{1,256} = \boxed{3,82 \text{ H}} \quad X = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L = 1200,1 \Omega$$

b) drvo: $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$ ($\mu_r = 1$)

$$I = \frac{B_{\text{maks}}}{\mu} \cdot l_{\text{sr}} \cdot \frac{1}{N \cdot \sqrt{2}} = \frac{0,83 \cdot 1,256}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1200 \cdot \sqrt{2}} = \boxed{488,8 \text{ A}}$$

$$L = \frac{N^2 \mu S}{l_{\text{sr}}} = \frac{1200^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-3}}{1,256} = \boxed{1,44 \text{ mH}} \quad X = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L = 452 \text{ m}\Omega$$

1.2. Prigušnica sa željeznom jezgrom iz prethodnog zadatka priključena je na istosmjerni napon. Otpor namota prigušnice iznosi 5Ω .

a) Na koji je napon potrebno priključiti prigušnicu da magnetska indukcija u jezgri bude iznosa kao maksimalna vrijednost indukcije pri izmjeničnom naponu 220 V, 50 Hz?

b) Kolika struja će poteći namotom, ako uz taj isti istosmjerni napon željeznu jezgru zamijenimo drvenom? Kolika će biti indukcija u tom slučaju?

$$B = B_{\text{maks}} = 0,83 \text{ T}$$

Rješenje:

$$a) \oint H \cdot dl = N \cdot I$$

$$H \cdot l_{\text{sr}} = N \cdot I = \Theta$$

$$\frac{B}{\mu} \cdot l_{\text{sr}} = N \cdot I$$

$$I = \frac{B \cdot l_{\text{sr}}}{\mu \cdot N} = \frac{0,83 \cdot 1,256}{\frac{1}{300} \cdot 1200} = \boxed{0,26 \text{ A}}$$

$$U = I \cdot R = 0,26 \cdot 5 = \boxed{1,3 \text{ V}}$$

b) Ako se željezna jezgra zamijeni drvenom, iznos struje se ne mijenja, budući da je ona diktirana narinutim naponom i otporom namota.

$$\boxed{I = 0,26 \text{ A}}$$

Međutim, mijenja se indukcija, budući da drvo ima znatno veći magnetski otpor od željeza.

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am} \quad (\mu_r = 1)$$

$$B = \frac{N \cdot I \cdot \mu}{l_{\text{sr}}} = \frac{1200 \cdot 0,26 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{1,256} = \boxed{0,31 \text{ mT}}$$

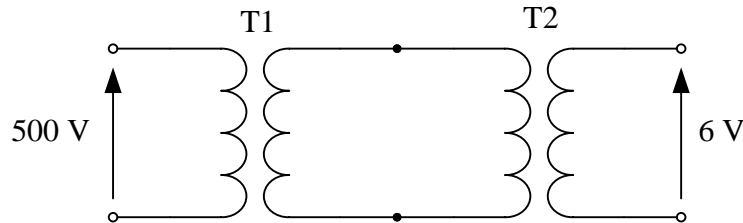
U ova dva zadatka vidljiva je razlika između istosmjernog i izmjeničnog magnetiziranja.

- 1.3. Dva transformatora građena iz jednakog materijala (jezgre, namoti) imaju sljedeće nazivne podatke:

T1: 10 kVA, 500/40 V, 50 Hz, $P_0 = 35$ W, $P_h/P_v = 2/3$,

T2: 12 kVA, 60/9 V, 60 Hz, $P_0 = 40$ W, $P_h/P_v = 1/2$.

Transformatori se koriste za transformaciju 500/6 V pri frekvenciji 50 Hz, a spojeni su prema slici. Koliki će biti ukupni gubici praznog hoda oba transformatora ako se može pretpostaviti da su gubici u željezu zbog histereze i zbog vrtložnih struja proporcionalni kvadratu indukcije?



T1: 10 kVA, 500/40 V, 50 Hz, $P_0 = 35$ W, $P_h/P_v = 2/3$

T2: 12 kVA, 60/9 V, 60 Hz, $P_0 = 40$ W, $P_h/P_v = 1/2$

Rješenje:

Gubici zbog histereze: $P_h = k_h f B^2$

Gubici zbog vrtložnih struja: $P_v = k_v f^2 B^2$

Ukupna transformacija: $\frac{U_1}{U_2} = \frac{500}{40} \frac{60}{9} = \frac{500}{6}$

Napon primaru transformatora T2 bit će jednak naponu na sekundaru transformatora T1 (to neće biti nazivni napon primara transformatora T2, nego niži)

$$U_{1T1} = 500 \text{ V}, U_{2T1} = 40 \text{ V} \rightarrow U_{1T2} = 40 \text{ V}$$

$$U_{2T2} = 40 \cdot \frac{9}{60} = 6 \text{ V}$$

$$P_{0T1} = P_{0nT1} = 35 \text{ W}$$

Napon je ovisan o frekvenciji i indukciji: $U = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B \cdot S$

$$\left. \begin{array}{l} U_{1nT2} = k f_n B_n \\ U_{1T2} = k f B \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B}{B_n} = \frac{U_{1T2}}{U_{1nT2}} \frac{f_n}{f} = \frac{40}{60} \frac{60}{50} = \frac{4}{5}$$

$$P_{hnT2} = \frac{1}{3} P_{0T2} = \frac{1}{3} \cdot 40 = 13,33 \text{ W}$$

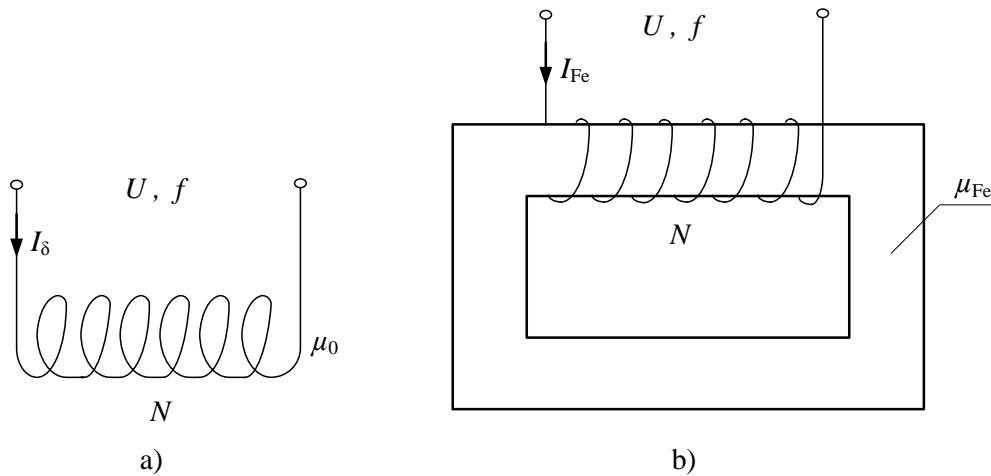
$$P_{vnT2} = \frac{2}{3} P_{0T2} = \frac{2}{3} \cdot 40 = 26,67 \text{ W}$$

$$P_{hT2} = \frac{f}{f_n} \left(\frac{B}{B_n} \right)^2 P_{hnT2} = \frac{50}{60} \left(\frac{4}{5} \right)^2 13,33 = 7,11 \text{ W}$$

$$P_{vT2} = \left(\frac{f}{f_n} \frac{B}{B_n} \right)^2 P_{vnT2} = \left(\frac{50}{60} \frac{4}{5} \right)^2 26,67 = 11,85 \text{ W}$$

$$P_0 = P_{0nT1} + P_{0T2} = P_{0nT1} + P_{hT2} + P_{vT2} = 35 + 7,11 + 11,85 = \boxed{53,96 \text{ W}}$$

- 1.4. Svitak sa N zavoja prema slici a) priključimo na izvor sinusoidalnog napona efektivne vrijednosti U , frekvencije f i kod toga teče svitkom struja efektivne vrijednosti I_δ .



- Kolika struja će teći kroz isti svitak ako se on nalazi na željeznoj jezgri (slika b) permeabilnosti $\mu_{Fe} \gg \mu_0$?
- Kolika će biti struja u slučaju a) ako se frekvencija napona udvostruči, a napon smanji na polovinu?
- Kolika struja bi tekla u slučaju relativne permeabilnosti jezgre $\mu_{Fe} = \infty$ (idealiziran slučaj)?

Rješenje:

Narinuti izmjenični napon: $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$

Magnetski otpor jezgre: $R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{S}$

Induktivitet svitka: $L = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \Lambda_m$

Reaktancija svitka kod frekvencije $\omega = 2\pi f$: $X = \omega L = \omega N^2 \Lambda_m$

Struja magnetiziranja: $I_\mu = \frac{U}{X} = \frac{U}{\omega N^2 \Lambda_m} = \frac{U}{\omega N^2} R_m = \frac{Ul}{\omega N^2 \mu S}$

Ampereov zakon: $\Theta = \oint H dl = \frac{U}{\omega N^2 \Lambda_m} N = \frac{U}{\omega N \Lambda_m}$

Ohmov zakon za magnetski krug: $\Phi = \frac{\Theta}{R_m} = \Theta \Lambda_m = \frac{U}{\omega N}$

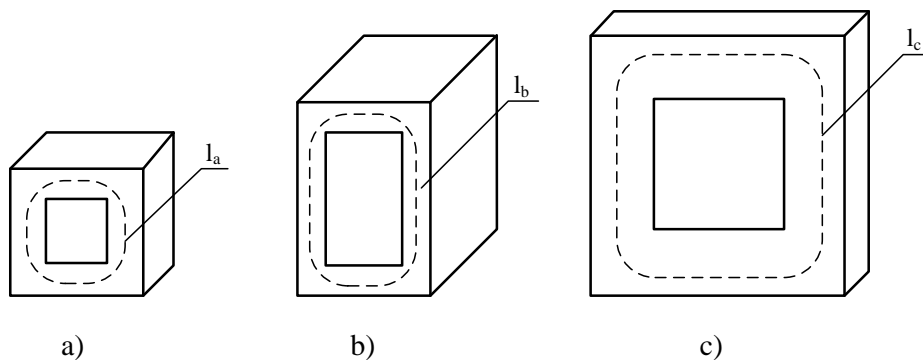
Maksimalna vrijednost toka: $\Phi_{maks} = \frac{U\sqrt{2}}{2\pi \cdot f \cdot N} = \frac{U}{4,44 f N} = B_{maks} \cdot S$

a) Željezo ima puno veću permeabilnost od zraka ($\mu_{Fe} \gg \mu_0$), dakle $I_{Fe} \ll I_\delta$

b) $I'_\mu = \frac{U'}{\omega' N^2} R_m = \frac{0,5U}{2\omega N^2} R_m = \frac{1}{4} \frac{U}{\omega N^2} R_m = \boxed{\frac{1}{4} I_\mu}$

c) $I''_\mu = 0$

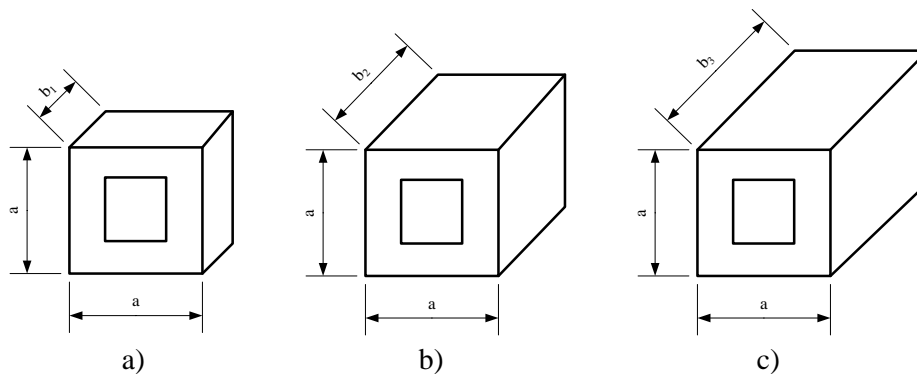
- 1.5. Tri magnetske jezgre geometrijskog oblika prema slici, izrađene su od transformatorskog lima jednakih svojstava, bez zračnog rasporeda, jednakog presjeka.



Koja jezgra treba za magnetiziranje najmanje amperzavoja ako je u sve tri jednaka indukcija?

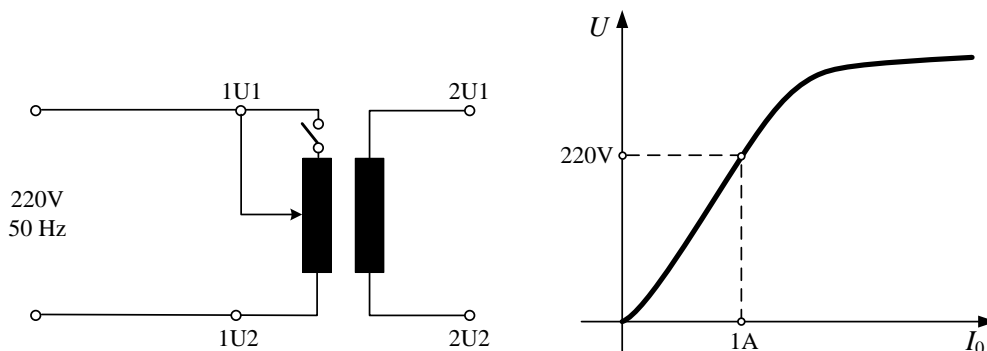
Najmanje amperzavoja za magnetiziranje treba prva jezgra.

- 1.6. Tri magnetske jezgre geometrijskog oblika prema slici, izrađene su od jednakog magnetskog materijala, bez zračnog rasporeda. Koja jezgra treba više amperzavoja za jednaku indukciju. Površine presjeka jezgri odnose se kao 1:2:3.



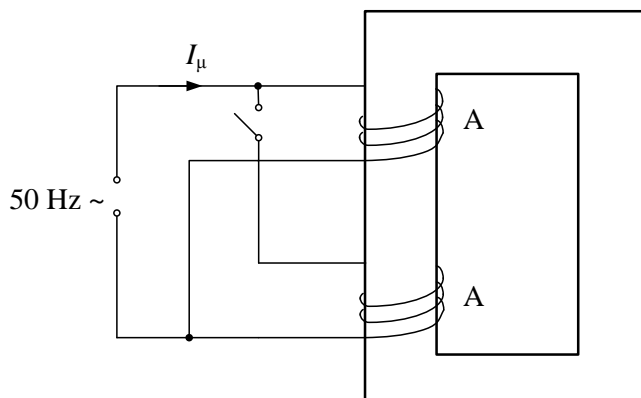
Sve tri jezgre trebaju jednako amperzavoja.

- 1.7. Kolika bi približno bila struja magnetiziranja, ako na primarnoj strani transformatora isključimo jednu polovinu zavoja? Karakteristika praznog hoda transformatora prikazana je na slici. Zanemarite radnu komponentu struje magnetiziranja ($I_0 = I_\mu$).



$$I'_\mu = 4A$$

- 1.8. Na magnetskoj jezgri nalaze se dva potpuno jednaka svitka A motana u istom smjeru. Priključimo li jedan svitak na izmjenični napon, iz mreže teče struja iznosa I_μ . Kolika će teći struja iz mreže ako zatvorimo sklopku odnosno priključimo oba svitka na isti izmjenični napon?



$$I_\mu$$

- 1.9. Prigušnica sa željeznom jezgrom uzima iz mreže struju 10 A pri nazivnom naponu 230 V, 50 Hz. Pri tome je indukcija u jezgri 1,6 T. Objasnite što bi se dogodilo sa strujom u namotu prigušnice ako bi izvadili željeznu jezgru, a ostavili priključak na 230 V, 50 Hz.

Dakle struja višestruko poraste, Bit će veća μ_{rFe} puta

- 1.10. Jednofazni transformator 10 kVA, 220/110 V, 50 Hz ima pri nazivnom naponu struju praznog hoda u iznosu 3 % nazivne struje i gubitke praznog hoda $P_0 = 70$ W pri čemu gubici zbog histereze čine 40 % gubitaka praznog hoda. Tijekom pokusa praznog hoda napon je mijenjan u rasponu od $0,8 U_n$ do $1,1 U_n$. Ako je radna komponenta struje praznog hoda zanemariva, kolika će biti struja praznog hoda pri naponu $1,1 U_n$? Koliki će u tom slučaju biti gubici praznog hoda ako su gubici zbog histereze proporcionalni kvadratu magnetske indukcije u jezgri? Krivulja magnetiziranja željeza jezgre je prikazana na slici. Višenaponski namot ima 500 zavoja, a presjek jezgre je $S = 13 \text{ cm}^2$. Zanemarite omski otpor namota i pretpostavite da je magnetska indukcija u svim dijelovima jezgre jednaka.

Rješenje:

$$\text{Struja praznog hoda: } I_0 = 0,03 \frac{S}{U} = 0,03 \frac{10^4}{220} = 1,364 \text{ A}$$

$$\text{Magnetska indukcija pri } U_n: B_{\text{maks}} = \frac{U_n}{4,44 f N S} = \frac{220}{4,44 \cdot 50 \cdot 500 \cdot 13 \cdot 10^{-4}} = 1,525 \text{ T}$$

$$\text{Magnetska indukcija pri } 1,1 U_n: B'_{\text{maks}} = \frac{1,1 U_n}{4,44 f N S} = \frac{1,1 \cdot 220}{4,44 \cdot 50 \cdot 500 \cdot 13 \cdot 10^{-4}} = 1,677 \text{ T}$$

$$\text{Permeabilnost na prvom dijelu krivulje: } B_{\text{maks}} = 1,525 \text{ T} \Rightarrow \mu = \frac{1,6}{850} = 1,88235 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

$$\text{Za drugi dio krivulje: } B - 1,6 = \frac{2 - 1,6}{10000 - 850} (H - 850)$$

$$B = 4,3716 \cdot 10^{-5} H + 1,5628$$

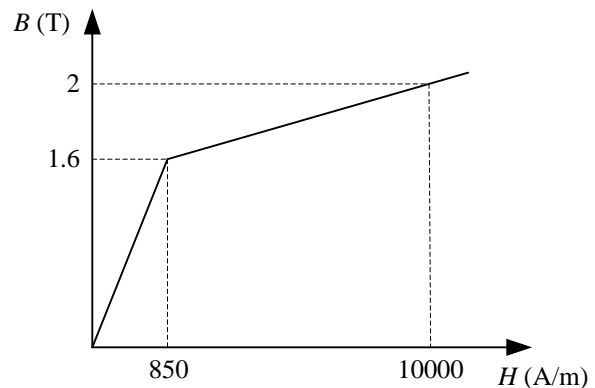
$$B' = 1,677 \text{ T} \Rightarrow H' = 2612,3 \text{ A/m}$$

$$\text{Permeabilnost na drugom dijelu krivulje: } \mu' = \frac{B'}{H'} = \frac{1,677}{2612,3} = 6,4196 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Na promjenu struje praznog hoda, utjecaj ima i povišeni napon i drugačija vrijednost X_0 .

$$\left. \begin{aligned} X_0 &= \frac{N^2}{R_m} = \mu \frac{N^2 S}{l} \\ I_0 &= \frac{U}{X_0}, I'_0 = \frac{1,1 U}{X'_0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{I'_0}{I_0} = \frac{1,1 X_0}{X'_0} = 1,1 \frac{\mu}{\mu'} \Rightarrow I'_0 = 1,1 I_0 \frac{\mu}{\mu'} = 1,1 \cdot 1,364 \cdot \frac{1,88235}{0,64196} = \boxed{4,4 \text{ A}}$$

$$P'_0 = \left(\frac{B'}{B} \right)^2 P_0 = \left(\frac{1,677}{1,525} \right)^2 70 = \boxed{84,65 \text{ W}}$$



2. NADOMJESNA SHEMA I FAZORSKI DIJAGRAM

- 2.1. Iz rezultata pokusa praznog hoda **jednofaznog transformatora**: $P_0 = 200 \text{ W}$, $I_0 = 1,2 \text{ A}$, $U_{1n} = 400 \text{ V}$, $U_2 = 36 \text{ V}$, i pokusa kratkog spoja: $P_k = 800 \text{ W}$, $U_k = 20 \text{ V}$, $I_{1n} = 100 \text{ A}$, treba odrediti parametre nadomjesne sheme R_0 , X_0 , R_k , X_k i koeficijent transformacije k .

$$P_0 = 200 \text{ W}$$

$$I_0 = 1,2 \text{ A}$$

$$U_{1n} = 400 \text{ V}$$

$$U_2 = 36 \text{ V}$$

$$P_k = 800 \text{ W}$$

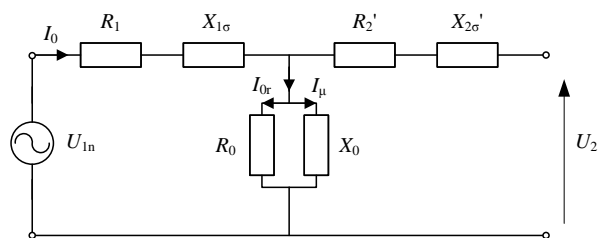
$$U_k = 20 \text{ V}$$

$$I_{1n} = 100 \text{ A}$$

Rješenje:

$$\text{Omjer transformacije: } k = \frac{U_{1n}}{U_2} = \boxed{11,1}$$

Nadomjesna shema za prazni hod:



$$\text{Otpor u poprečnoj grani (predstavlja gubitke u jezgri): } R_0 = \frac{U_{1n}^2}{P_0} = \frac{400^2}{200} = \boxed{800 \Omega}$$

$$\text{Radna komponenta struje praznog hoda (pokriva gubitke u jezgri): } I_{0r} = \frac{U_{1n}}{R_0} = \frac{400}{800} = 0,5 \text{ A}$$

$$I_{0r\%} = \frac{I_{0r}}{I_{1n}} = \frac{0,5}{100} = 0,5 \%$$

Jalova komponenta struje praznog hoda (struja magnetiziranja):

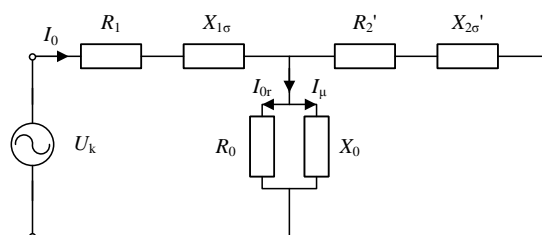
$$I_\mu = \sqrt{I_0^2 - I_{0r}^2} = \sqrt{1,2^2 - 0,5^2} = 1,09 \text{ A}$$

$$I_{\mu\%} = \frac{I_\mu}{I_{1n}} = \frac{1,09}{100} = 1,09 \%$$

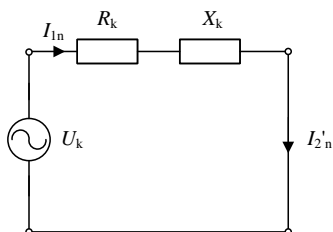
Glavna reaktancija:

$$X_0 = \frac{U_{1n}}{I_\mu} = \frac{400}{1,09} = \boxed{367 \Omega}$$

Nadomjesna shema za pokus kratkog spoja:



$U_k = 3 - 15\% U_n$, radna točka se nalazi nisko na linearnom dijelu krivulje magnetiziranja, struja magnetiziranja je jako mala, pa se poprečna grana može zanemariti:



$$\text{Impedancija kratkog spoja: } Z_k = \frac{U_k}{I_{1n}} = \frac{20}{100} = 0,2 \, \Omega$$

$$R_k = \frac{P_k}{I_{1n}^2} = \frac{800}{100^2} = \boxed{0,08 \, \Omega}$$

$$X_k = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2} = \sqrt{0,2^2 - 0,08^2} = \boxed{0,183 \, \Omega}$$

U prvoj aproksimaciji, možemo pretpostaviti:

$$X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = \frac{X_k}{2} = \boxed{0,0915 \, \Omega}$$

Ako nisu zadane stvarne, omske vrijednosti otpora namota primara i sekundara, ne može se izračunati dodatni otpor pa se vrijednosti R_1 i R'_2 računaju na sljedeći način:

$$R_1 = R'_2 = \frac{R_k}{2} = \frac{0,08}{2} = \boxed{0,04 \, \Omega}$$

Kod transformatora je također uobičajeno koristiti relativne vrijednosti (% , p.u.).

Bazne vrijednosti su:

$$P_b = Q_b = S_b = \sqrt{3} U_n I_n = S_n \quad (\text{za jednofazni transformator: } S_n = U_n I_n) \quad \text{!!!!}$$

$$Z_b = \frac{U_{fn}}{I_{fn}} \cdot \frac{3U_{fn}}{3U_{fn}} = \frac{3U_{fn}^2}{3U_{fn} I_{fn}} = \frac{(\sqrt{3}U_{fn})^2}{S_n} = \frac{U_n^2}{S_n}$$

Sve vrijednosti nadomjesne sheme mogu se prikazati kao postotne vrijednosti:

$$Z_b = \frac{U_{1n}^2}{S_n} = \frac{400^2}{400 \cdot 100} = 4 \, \Omega$$

$$R_{0\%} = \frac{R_0}{Z_b} \cdot 100 \% = \frac{800}{4} \cdot 100 \% = \boxed{20000 \%}$$

$$\text{ILI } R_{0\%} = \frac{U_{1n}}{I_{or}} \cdot 100 \% = \frac{1}{0,005} \cdot 100 \% = \boxed{20000 \%}$$

$$X_{0\%} = \frac{X_0}{Z_b} \cdot 100 \% = \frac{367}{4} \cdot 100 \% = \boxed{9175 \%}$$

$$\text{ILI } X_{0\%} = \frac{U_{1n}}{I_{\mu}} \cdot 100 \% = \frac{1}{0,0109} \cdot 100 \% = \boxed{9175 \%}$$

$$R_{1\%} = R'_{2\%} = \frac{\frac{R_k}{Z_b}}{2} \cdot 100 \% = \frac{0,04}{4} \cdot 100 \% = \boxed{1,00 \%}$$

$$X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = \frac{\frac{X_k}{Z_b}}{2} \cdot 100 \% = \frac{0,0915}{4} \cdot 100 \% = \boxed{2,29 \%}$$

- 2.2. **Jednofazni transformator** 5 MVA, 20/0,6 kV ima pri 25 °C podatke: $P_k = 68$ kW, $R_1 = 0,4 \Omega$, $R_2 = 0,5 \text{ m}\Omega$, $u_k = 9 \%$, $I_\mu = 10I_{0r} = 1\% I_n$. Treba izračunati elemente nadomjesne sheme u % i nacrtati T nadomjesnu shemu preračunato na 75 °C.

$$S_n = 5 \text{ MVA}$$

$$20 / 0,6 \text{ kV}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_k = 68 \text{ kW} \\ R_1 = 0,4 \Omega \\ R_2 = 0,5 \text{ m}\Omega \\ u_k = 9 \% \end{array} \right\} 25^\circ\text{C}$$

$$I_\mu = 10I_{0r} = 1\% I_n$$

Rješenje:

$$\text{JEDNOFAZNI TRANSFORMATOR} \rightarrow I_{1n} = \frac{S_n}{U_{1n}} = \frac{5000}{20} = 250 \text{ A}$$

$$I_{2n} = I_{1n} \cdot \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = \frac{S_n}{U_{2n}} = \frac{5000}{0,6} = 8333,3 \text{ A}$$

$$u_{r25} = \frac{P_{k25}}{S_n} \cdot 100 = \frac{68}{5000} \cdot 100 = 1,36 \%$$

$$u_{\sigma 25} = u_{\sigma 75} = u_\sigma = \sqrt{u_{k25}^2 - u_{r25}^2} = \sqrt{9^2 - 1,36^2} = \boxed{8,90 \%}$$

$$\text{Faktor za preračunavanje na temperaturu } 75^\circ\text{C (za bakar): } b = \frac{235 + 75}{235 + 25} = 1,1923$$

Teretni gubici - gubici kratkog spoja (omski gubici u bakru namota i dodatni gubici):

$$P_k = P_{\text{Cu}} + P_{\text{dod}} = (R_{1,\text{Cu}} + R'_{2,\text{Cu}}) \cdot I_1^2 + P_{\text{dod}}$$

Gubici u bakru pri 25°C (i pri nazivnoj struji):

$$P_{\text{Cu}25} = I_{1n}^2 R_{1,25} + I_{2n}^2 R_{2,25} = 250^2 \cdot 0,4 + 8333,3^2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 59722 \text{ W}$$

Dodatni gubici su razlika između izmjerenih gubitaka i gubitaka u bakru namota:

$$P_{\text{dod}25} = P_{k25} - P_{\text{Cu}25} = 68000 - 59722 = 8278 \text{ W}$$

Gubici u bakru rastu s temperaturom, a dodatni gubici se smanjuju s temperaturom:

$$P_{\text{Cu}75} = P_{\text{Cu}25} \cdot 1,1923 = 71207 \text{ W}$$

$$P_{\text{dod}75} = \frac{P_{\text{dod}25}}{1,1923} = 6943 \text{ W}$$

$$P_{k75} = P_{\text{Cu}75} + P_{\text{dod}75} = 71207 + 6943 = 78150 \text{ W}$$

$$u_{r75} = \frac{P_{k75}}{S_n} \cdot 100 = \frac{78,150}{5000} \cdot 100 = \boxed{1,56 \%}$$

$$u_{k75} = \sqrt{u_{r75}^2 + u_\sigma^2} = \sqrt{1,56^2 + 8,9^2} = \boxed{9,03 \%}$$

Naponi u_r , u_σ , u_k jednaki su postotnim vrijednostima odgovarajućih otpora: R_k , X_k , Z_k .

$$X_{k\%} = \sqrt{Z_k^2 - R_k^2} = \sqrt{u_k^2 - u_r^2} = u_\sigma$$

$$\text{Dakle: } \boxed{R_{k\%} = 1,56 \%} \quad \boxed{X_{k\%} = 8,90 \%}$$

$$R_{k\%} = \frac{R_k}{Z_b} = \frac{\frac{P_k}{I_{ln}^2}}{\frac{U_{ln}^2}{S_n}} = \frac{P_k}{S_n} = u_r \quad Z_{k\%} = \frac{Z_k}{Z_b} = \frac{\frac{U_k}{I_{ln}}}{\frac{U_{ln}^2}{S_n}} = \frac{U_k}{U_{ln}} = u_k$$

$$Z_b = \frac{U_n^2}{S_n} = \frac{20000^2}{5000000} = 80 \, \Omega; \quad a = \left(\frac{U_{ln}}{U_{2n}} \right)^2 = \frac{100}{3}$$

Na temperaturi 75°C su elementi nadomjesne sheme sljedeći:

$$X_{k1\%} = X_{k2\%} = \frac{X_{k\%}}{2} = 4,45 \, \%$$

$$R_{1\%} = \frac{R_{lCu} \cdot b}{Z_b} = \frac{0,4 \cdot 1,923}{80} = 0,60 \, \%$$

$$R'_{2Cu\%} = \frac{R_{2Cu} \cdot b \cdot a}{Z_b} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,1923 \cdot \left(\frac{100}{3} \right)^2}{80} = 0,83 \, \%$$

$$R_{dod\%} = R_{k\%} - R_{1\%} - R'_{2Cu\%} = 1,56 - 0,6 - 0,83 = 0,13 \, \%$$

$$R'_{2\%} = R'_{2Cu\%} + R_{dod\%} = 0,96 \, \%$$

Na poprečnoj grani je nazivni primarni napon (100 %):

$$R_{0\%} = \frac{U_n}{I_{Or}} = \frac{1}{0,001} \cdot 100 = \boxed{100000 \, \%}$$

$$X_{0\%} = \frac{U_n}{I_\mu} = \frac{1}{0,01} \cdot 100 = \boxed{10000 \, \%}$$

- 2.3. Pri pokusu kratkog spoja trofaznog transformatora nazivnih podataka: 750 kVA, 10/0,4 kV, 50 Hz, Yd5 struja je iznosila 35 A pri naponu 500 V. Koliki je nazivni u_k u postocima?

$$S_n = 750 \, \text{kVA}$$

$$10/0,4 \, \text{kV} \quad f = 50 \, \text{Hz}$$

$$Yd5$$

$$I_k = 35 \, \text{A} \quad U_k = 500 \, \text{V}$$

Rješenje:

$$I_n = \frac{S_n}{\sqrt{3}U_n} = \frac{750 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 10^4} = 43,3 \, \text{A}$$

Struja kratkog spoja I_k izmjerena je u pokusu kratkog spoja pri naponu U_k , a ako se pokus povodi standardno, do struje kratkog spoja I_n , izmjereni napon će biti U_{kn} .

Naponi kratkog spoja se nalaze nisko na krivulji magnetiziranja, pa je odnos struja-napon linearan.

$$\frac{I_k}{I_n} = \frac{U_k}{U_{kn}} \Rightarrow U_{kn} = U_k \frac{I_n}{I_k} = 500 \frac{43,3}{35} = 618,57 \, \text{V}$$

$$u_k = \frac{U_{kn}}{U_n} \cdot 100 = \frac{618,57}{10000} 100 = \boxed{6,19\%}$$

- 2.4. **Trofazni transformator** 20 MVA, 33/11,5 kV, Dyn11, ima pri 75 °C podatke: $P_k = 72,89$ kW, $P_0 = 12,57$ kW, $u_k = 12,03$ %, $I_0 = 0,07$ % I_n i pri 23 °C: $R_{st1} = 0,155$ Ω, $R_{st2} = 0,0158$ Ω. Treba izračunati elemente nadomjesne sheme u % i nacrtati T nadomjesnu shemu za 75 °C.

$$S_n = 20 \text{ MVA}$$

$$33/11,5 \text{ kV Dyn11}$$

$$\left. \begin{array}{l} P_{in75} = 72,89 \text{ kW} \\ P_0 = 12,57 \text{ kW} \\ u_k = 12,03 \% \\ I_0 = 0,07 \% I_n \end{array} \right\} 75^\circ\text{C}$$

$$\left. \begin{array}{l} R_{st1} = 0,155 \Omega \\ R_{st2} = 0,0157 \Omega \end{array} \right\} 23^\circ\text{C}$$

Rješenje:

$$\text{TROFAZNI TRANSFORMATOR} \rightarrow I_{1n} = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_{1n}} = \frac{20 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 33 \cdot 10^3} = 349,9 \text{ A}$$

$$I_{2n} = I_{1n} \cdot \frac{U_{1n}}{U_{2n}} = \frac{S_n}{U_{2n}} = \frac{20 \cdot 10^6}{\sqrt{3} \cdot 11,5 \cdot 10^3} = 1004,1 \text{ A}$$

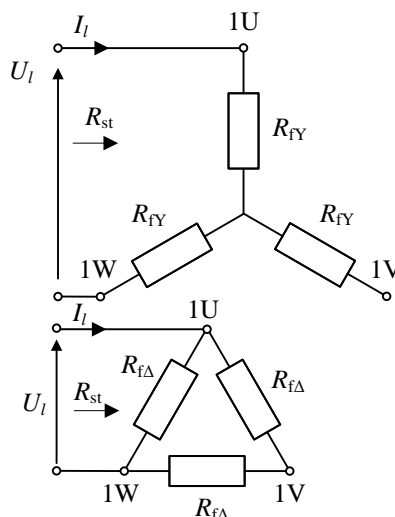
R_{st1} je otpor mjerjen između stezaljki (npr. 1U-1V). Otpor R_l u T-shemi, predstavlja otpor jedne faze nadomjesne zvijezde (R_{fY}), neovisno o tome kako je namot transformatora spojen.

Ako se mjeri otpor između stezaljki kod namota spojenog u zvijezdu (Y):

$$R_{st} = 2 \cdot R_{fY} \Rightarrow R_{fY} = \frac{R_{st}}{2}$$

Ako se mjeri otpor između stezaljki kod namota spojenog u trokut (Δ):

$$R_{st} = \frac{R_{f\Delta} \cdot 2R_{f\Delta}}{(R_{f\Delta} + 2R_{f\Delta})} = \frac{2}{3} R_{f\Delta} \Rightarrow R_{f\Delta} = \frac{3}{2} R_{st}$$



Transformacijom trokuta u zvijezdu, otpor se reducira s faktorom 1/3:

$$R_{fY} = \frac{1}{3} \cdot R_{f\Delta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} R_{st} \Rightarrow R_{fY} = \frac{R_{st}}{2}$$

Neovisno o spoju transformatora, otpor u T-shemi se iz mjenjenog podatka (otpora između dvije stezaljke) uvijek dobije na isti način, upola je manji.

Analogno razmišljanje vrijedi i za sekundar, osim što je otporu R'_2 osim preračunatog otpora R'_{2Cu} , sadržan i R_{dod} , dodatni otpor kojim se modeliraju dodatni gubici u transformatoru.

$$\text{Faktor promjene otpora s temperaturom: } b = \frac{235 + 75}{235 + 23} = 1,20155$$

$$P_{\text{tn}75} = P_{\text{Cu}75} + P_{\text{dod}75} = P_{\text{Cu}175} + P_{\text{Cu}275} + P_{\text{dod}75}$$

$$P_{\text{dod}75} = P_{\text{tn}75} - 3 \cdot I_{\text{ln}}^2 \cdot \frac{R_{\text{st}1}}{2} \cdot b - 3 \cdot I_{\text{2n}}^2 \cdot \frac{R_{\text{st}2}}{2} \cdot b = P_{\text{tn}75} - \frac{3}{2} \cdot b \cdot I_{\text{ln}}^2 \cdot R_{\text{st}1} - \frac{3}{2} \cdot b \cdot I_{\text{2n}}^2 \cdot R_{\text{st}2}$$

$$P_{\text{dod}75} = 72890 - \frac{3}{2} \cdot 1,20155 \cdot 349,9^2 \cdot 0,155 - \frac{3}{2} \cdot 1,20155 \cdot 1004,1^2 \cdot 0,0157$$

$$P_{\text{dod}75} = 72890 - \boxed{34202} - \boxed{28529} = \boxed{10159 \text{ W}}$$

$$Z_b = \frac{U_{\text{ln}}^2}{S_n} = \frac{33^2}{20} = \boxed{54,45 \Omega}$$

Otpori na temperaturi 75°C:

$$R_1 = R_{\text{ICu}} = \frac{R_{\text{st}1}}{2} \cdot b = \frac{0,155}{2} \cdot 1,20155 = 0,09312 \Omega = \boxed{0,171 \%}$$

$$R'_{2\text{Cu}} = \frac{R_{\text{st}2}}{2} \cdot b \cdot a = \frac{R_{\text{st}2}}{2} \cdot b \cdot \left(\frac{U_{\text{ln}}}{U_{\text{2n}}} \right)^2 = \frac{0,01570}{2} \cdot 1,20155 \cdot \left(\frac{33}{11,5} \right)^2 = 0,07767 \Omega$$

$$R_{\text{dod}} = \frac{\frac{P_{\text{dod}75}}{3}}{I_{\text{ln}}^2} = \frac{10159}{3 \cdot 349,9^2} = 0,02766 \Omega$$

$$R'_2 = R'_{2\text{Cu}} + R_{\text{dod}} = 0,07767 + 0,02766 = 0,10533 \Omega = \boxed{0,193 \%}$$

$$R_k = R_1 + R'_2 = 0,171 + 0,193 = \boxed{0,364 \%} = u_{r75}$$

$$u_{\sigma 75} = \sqrt{u_{k75}^2 - u_{r75}^2} = \sqrt{12,03^2 - 0,364^2} = \boxed{12,02 \%} = X_k$$

$$\text{Može se uzeti: } X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = \frac{X_k}{2} = \boxed{6,01 \%}$$

$$\text{Gubitke u željezu predstavlja: } R_0 = \frac{U_{\text{ln}}^2}{P_0} = \frac{33000^2}{12570} = 86635 \Omega = \boxed{159109 \%}$$

$$I_{0r} = \frac{U_{\text{lfm}}}{R_0} = \frac{\frac{33000}{\sqrt{3}}}{86635} = 0,212 \text{ A} = 0,06285 \%$$

$$I_\mu = \sqrt{I_0^2 - I_{0r}^2} = \sqrt{0,07^2 - 0,06^2} = 0,03082 \%$$

$$\text{Glavni magnetski tok predstavlja: } X_0 = \frac{U_{\text{lfm}}}{I_\mu} = \frac{\frac{33000}{\sqrt{3}}}{0,0003082 \cdot 349,9} = 176671 \Omega = \boxed{324464 \%}$$

Bilanca gubitaka:

$$P_0 = 12,57 \text{ kW} \rightarrow 14,7 \%$$

$$P_{\text{Cu}1} = 34,20 \text{ kW} \rightarrow 40,0 \%$$

$$P_{\text{Cu}2} = 28,53 \text{ kW} \rightarrow 33,4 \%$$

$$P_{\text{dod}} = 10,16 \text{ kW} \rightarrow 11,9 \%$$

$$P_g = 85,46 \text{ kW} \rightarrow 100 \%$$

2.5. Transformator ima podatke $U_{1n}/U_{2n} = 380/220$ V, 50 Hz, $u_r = 2,50$ %, $u_k = 4,55$ %. Koliki je pad napona u transformatoru ΔU , a koliki je iznos (U_2' u V i u %) za sljedeće pogonske slučajeve:

a) $\cos \varphi_T = 0,8$ ind; $I_2 = I_{2n}$?

b) $\cos \varphi_T = 0,6$ kap; $I_2 = 0,5 I_{2n}$?

$$U_{1n}/U_{2n} = 380/220 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$u_r = 2,50 \%$$

$$u_k = 4,55 \%$$

Rješenje:

$$u_\sigma = \sqrt{u_k^2 - u_r^2} = \sqrt{4,55^2 - 2,50^2} = 3,80 \%$$

$$\Delta u = \alpha \left[u_r \cos \varphi_T + u_\sigma \sin \varphi_T + 0,005 \alpha (u_\sigma \cos \varphi_T - u_r \sin \varphi_T)^2 \right]$$

a) $I_2 = I_{2n}$; $\cos \varphi_T = 0,8$ ind. $\rightarrow \sin \varphi_T = 0,6$

$$\alpha = \frac{S}{S_n} = \frac{I_2}{I_{2n}} \rightarrow \alpha = 1$$

$$\Delta u = \alpha \left[u_r \cos \varphi_T + u_\sigma \sin \varphi_T + 0,005 \alpha (u_\sigma \cos \varphi_T - u_r \sin \varphi_T)^2 \right]$$

$$\Delta u = 1 \cdot \left[2,50 \cdot 0,8 + 3,80 \cdot 0,6 + 0,005 \cdot \alpha \cdot (3,80 \cdot 0,8 - 2,50 \cdot 0,6)^2 \right]$$

$$\Delta u = 4,28 + 0,02 = \boxed{4,30 \%}$$

Budući da je $u_\sigma < 4\%$, vrijedi približna relacija:

$$\Delta u = \alpha [u_r \cos \varphi_T + u_\sigma \sin \varphi_T] = 2,50 \cdot 0,8 + 3,80 \cdot 0,6 = \boxed{4,28 \%}$$

Pokazuje se da je približna relacija dovoljno točna.

Gledano sa primara: $\Delta U = \Delta u \cdot U_{1n} = 0,0428 \cdot 380 = \boxed{16,26 \text{ V}}$

$$U_2' = 380 - 16,26 = 363,74 = \boxed{95,72 \%}$$

Gledano sa sekundara: $\Delta U = \Delta u \cdot U_{2n} = 0,0428 \cdot 220 = \boxed{9,42 \text{ V}}$

$$U_2 = 220 - 9,42 = 210,58 = \boxed{95,72 \%}$$

b) $I_2 = 0,5 \cdot I_{2n}$; $\cos \varphi_T = 0,6$ kap. $\rightarrow \sin \varphi_T = -0,8$

$$\alpha = \frac{S}{S_n} = \frac{I_2}{I_{2n}} \rightarrow \alpha = 0,5$$

$$\Delta u = 0,5 \cdot \left[2,50 \cdot 0,6 - 3,80 \cdot 0,8 + 0,005 \cdot 0,5 \cdot (3,80 \cdot 0,6 + 2,50 \cdot 0,8)^2 \right]$$

$$\Delta u = 0,5 \cdot [-1,54 + 0,05] = \boxed{-0,75 \%}$$

Približna relacija:

$$\Delta u = \alpha [u_{r\%} \cos \varphi_T + u_{\sigma\%} \sin \varphi_T] = 0,5 \cdot (-1,54) = -0,77 \%$$

Gledano sa primara: $\Delta U = \Delta u \cdot U_{1n} = -0,0077 \cdot 380 = -2,93 \text{ V}$

$$U'_2 = 380 + 2,93 = 382,93 = 100,77 \%$$

Gledano sa sekundara: $\Delta U = \Delta u \cdot U_{2n} = -0,0077 \cdot 220 = -1,69 \text{ V}$

$$U_2 = 220 + 1,69 = 221,69 = 101,77 \%$$

- 2.6. Trofazni transformator 400 kVA, 10/0,4 kV, Dyn5, ima pri 75 °C podatke: $P_k = 3767 \text{ W}$, $P_0 = 445 \text{ W}$, $u_k = 3,88 \%$, $I_0 = 0,13 \%$ I_n i pri 22 °C: $R_{st1} = 2,19 \Omega$, $R_{st2} = 0,0023 \Omega$. Treba izračunati elemente nadomjesne sheme u % i nacrtati T nadomjesnu shemu za 75 °C.

$$R_1 = 0,53 \%$$

$$R'_2 = 0,41 \%$$

$$X_{1\sigma} = X'_{2\sigma} = 1,88 \%$$

$$R_0 = 89888 \%$$

$$X_0 = 148685 \%$$

Bilanca gubitaka:

$$P_0 = 445 \text{ W} \rightarrow 10,6 \%$$

$$P_{Cu1} = 2114,4 \text{ W} \rightarrow 50,2 \%$$

$$P_{Cu2} = 1387,4 \text{ W} \rightarrow 32,9 \%$$

$$P_{dod} = 265,2 \text{ W} \rightarrow 6,3 \%$$

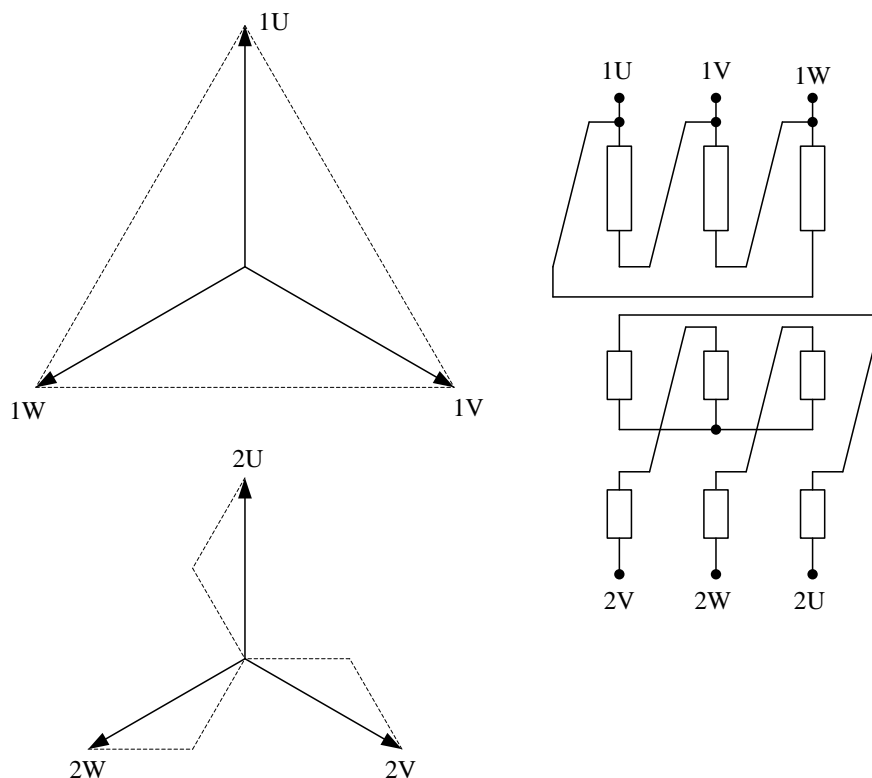
$$P_g = 4212 \text{ W} \rightarrow 100 \%$$

- 2.7. Pri pokusu kratkog spoja trofaznog transformatora nazivnih podataka: 630 kVA, 10/0,4 kV, 50 Hz, Yd5 struja je iznosila 25 A pri naponu 500 V. Koliki je nazivni u_k u postocima?

$$u_k = 7,27 \%$$

3. SPOJEVI TRANSFORMATORA

3.1. Nacrtajte shemu spoja transformatora Dz0 i označite stezaljke transformatora.



Sl. 3-1 Shema grupe spoja i dijagram napona

3.2. Nacrtajte shemu spoja transformatora Yz5 i označite stezaljke transformatora.

3.3. Nacrtajte shemu spoja transformatora Yd5 i označite stezaljke transformatora.

3.4. Trofazni transformator ima presjek jezgre 270 cm^2 (čisto željezo), a indukcija u jezgri iznosi $B_m = 1,5 \text{ T}$. Frekvencija mreže iznosi 50 Hz , a naponi za koje transformator treba namotati su $10000/400 \text{ V}$. Izračunati brojeve zavoja transformatora na strani visokog i niskog napona za slučajeve da je spoj transformatora:

- zvijezda - cik-cak Yz
- zvijezda - zvijezda Yy
- zvijezda - trokut Yd
- trokut - zvijezda Dy

Rješenje:

$$U = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot \Phi_m = 4,44 \cdot f \cdot N \cdot B_m \cdot S \rightarrow N = \frac{U}{4,44 \cdot f \cdot B_m \cdot S}$$

Fazni napon (napon na namotu) u D spoju je U_n .

Fazni napon (napon na namotu) u Y spoju je $\frac{U_n}{\sqrt{3}}$.

U z spoju ključna je polovica namota na kojoj je napon $\frac{U_n}{3}$.

a) Yz

$$N_1 = \frac{\frac{U_n}{\sqrt{3}}}{4,44 \cdot f \cdot B_m \cdot S} = \frac{\frac{10000}{\sqrt{3}}}{4,44 \cdot 50 \cdot 1,5 \cdot 0,027} = \frac{\frac{10000}{\sqrt{3}}}{8,991} = \boxed{642}$$

$$N_2 = 2 \cdot \frac{400}{8,991} = \boxed{30}$$

b) Yy

$$N_1 = \boxed{642}$$

$$N_2 = \frac{400}{\frac{\sqrt{3}}{8,991}} = \boxed{26}$$

c) Yd

$$N_1 = \boxed{642}$$

$$N_2 = \frac{400}{8,991} = \boxed{45}$$

c) Dy

$$N_1 = \frac{10000}{8,991} = \boxed{1112}$$

$$N_2 = \frac{400}{\frac{\sqrt{3}}{8,991}} = \boxed{26}$$

3.5. Primarna struja koju uzima trofazni transformator iz mreže iznosi 12 A, a napon na koji je transformator priključen iznosi 10 kV. Izračunajte linijski napon i struju na sekundaru transformatora za slučajeve da je transformator spojen:

e) zvijezda-zvijezda Yy

f) zvijezda-trokut Yd

g) trokut-zvijezda Dy

h) zvijezda-cik-cak Yz

Odnos broja zavoja primara i sekundara: $N_1/N_2 = 50$. (Struja praznog hoda se zanemaruje).

a) $\boxed{U_2 = 200 \text{ V}} \quad \boxed{I_2 = 600 \text{ A}}$

b) $\boxed{U_2 = 115,47 \text{ V}} \quad \boxed{I_2 = 1039 \text{ A}}$

c) $\boxed{U_2 = 346 \text{ V}} \quad \boxed{I_2 = 347 \text{ A}}$

d) $\boxed{U_2 = 173 \text{ V}} \quad \boxed{I_2 = 693 \text{ A}}$

- 3.6. Trofazni transformator snage $S = 250 \text{ kVA}$, $10000/400 \text{ V}$, Yz5 (prema slici) treba prespojiti na sekundaru tako da se dobije transformacija $10000/266 \text{ V}$. Nacrtajte shemu starog i novog spoja. Novi spoj napraviti tako da grupa spoja ostane 5.

Rješenje:

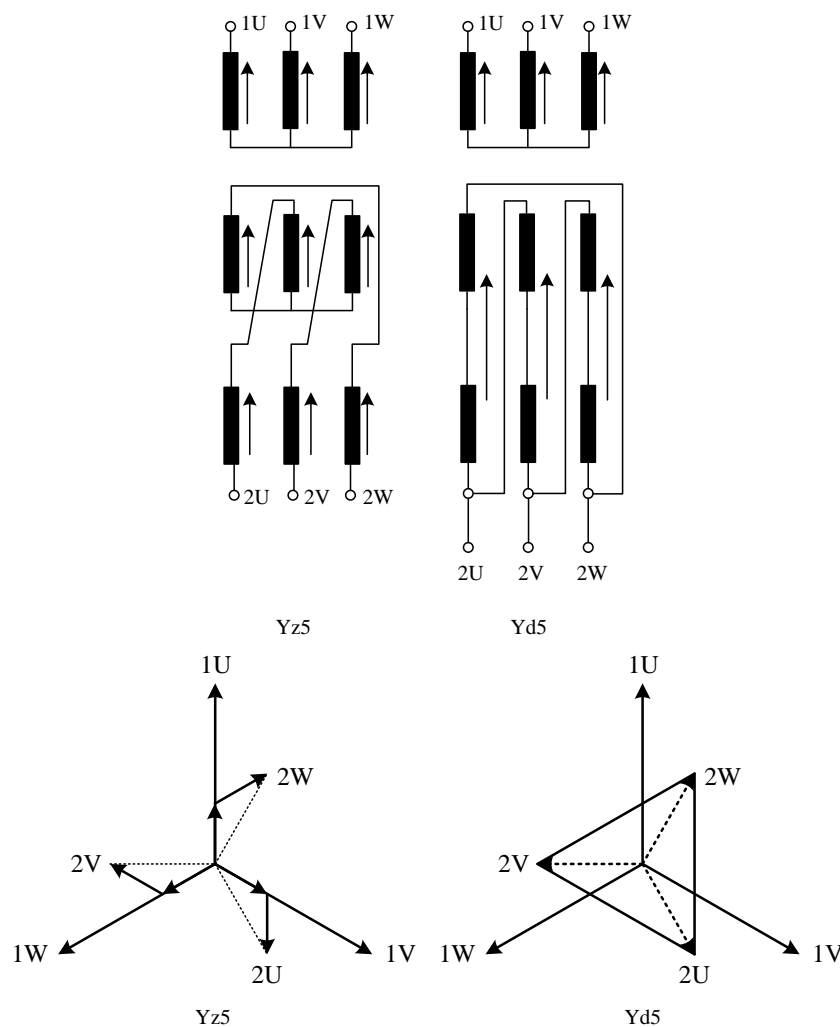
Sekundarni linijski napon:

$$U_2 = 400 \text{ V}$$

Sekundarni fazni napon: $U_{2f} = \frac{400}{\sqrt{3}} = 231 \text{ V}$

U jednoj polovini sekundarnog namota inducira se napon: $U_{z/2} = \frac{231}{\sqrt{3}} = 133 \text{ V}$

Budući da se traži sekundarni napon 266 V , treba dvije polovine namota sekundara koje su na istom stupu spojiti u seriju, a zatim faze spojiti u trokut, vodeći računa da se dobije grupa spoja Yd5.



Sl. 3-2 Shema grupe spoja i dijagram napona

- 3.7. Ako se transformatoru grupe spoja Yd11, 1000/400 V, kratko spoji primarna stezaljka 1U sa sekundarnom stezaljkom 2V i na primarnu stranu narine trofazni napon 500 V, koliki će biti napon između primarne stezaljke 1W i sekundarne 2U? Nacrtati dijagram napona.

Rješenje:

Ako se dvije stezaljke kratko spoje, dolaze na isti potencijal. Zato se na dijagramu napona crtaju kao jedna točka. Za spoj Yd11, prvo se crtaju naponi primara, spoj zvijezda, a nakon toga naponi sekundara, spoj trokut, počevši od stezaljke 2V, koja se poklapa sa 1U.

Da bi se dobio satni broj 11, linijski napon 2V-2W, mora biti pomaknut $11 \cdot 30 = 330^\circ$ u, negativnom smjeru, tj. 30° u pozitivnom smjeru.

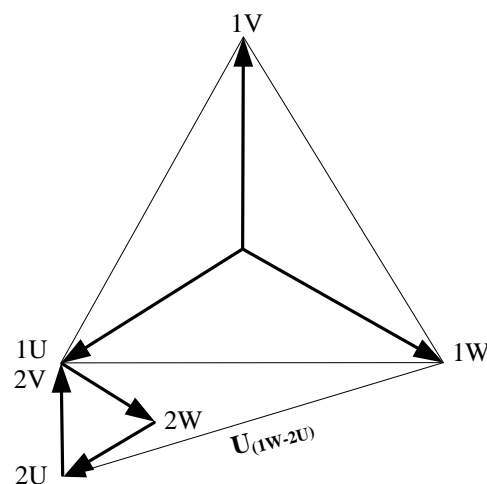
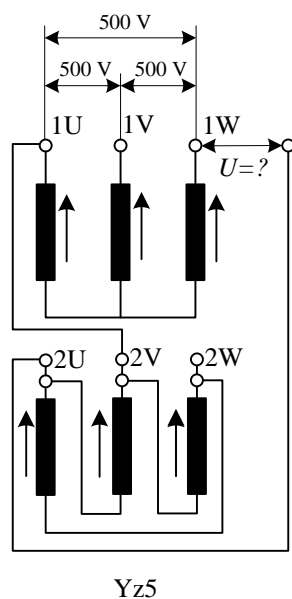
Nazivni sekundarni napon:

$$U_{2n} = U_{2fn} = 400 \text{ V}$$

Ako se narine $U_1 = 500 \text{ V}$:

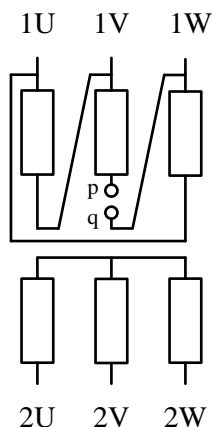
$$U_2 = 200 \text{ V}$$

$$U_{1W2U} = \sqrt{U_{1W1U}^2 + U_{2V2U}^2} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = \sqrt{500^2 + 200^2} = \boxed{538 \text{ V}}$$



Sl. 3-3 Shema grupe spoja i dijagrama napona

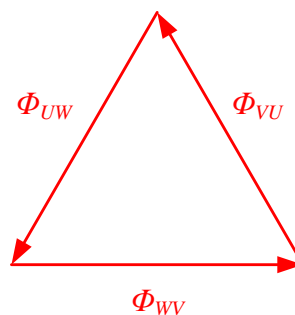
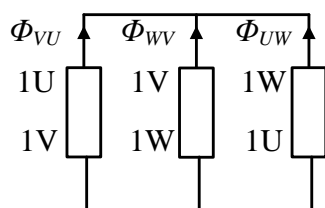
- 3.8. Trofazni trostupni transformator 10/0,4 kV, spoj Dy5, priključen je na trofaznu mrežu 10 kV. U namotu faze B došlo je do prekida prema slici. Koliki je napon U_{pq} u namotu prekinute faze? Koliki su naponi između stezaljki niženaponskog namota u praznom hodu U_{2U2V} , U_{2V2W} , U_{2W2U} ?



10/0,4 kV, Yd5

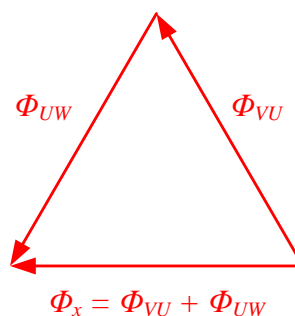
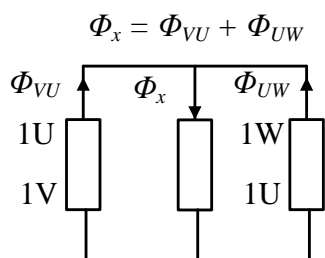
Rješenje:

Trostupni transformator s primarom u D spoju ima raspodjelu tokova po stupovima i u vektorsko-fazorskim dijagramima kao na slici:



Kad namot na srednjem stupu ostane bez napajanja zbog prekida u namotu, mijenja se raspodjela magnetskog toka po stupovima. Kroz srednji stup prolazi zbroj magnetskih tokova ostalih dvaju stupova i u njemu se inducira napon koji odgovara tom toku.

Tok je ustvari za pomaknut za 90° od odgovarajućeg napona, međutim ovdje se crtaju u istom smjeru jer je bitan samo položaj tokova međusobno.

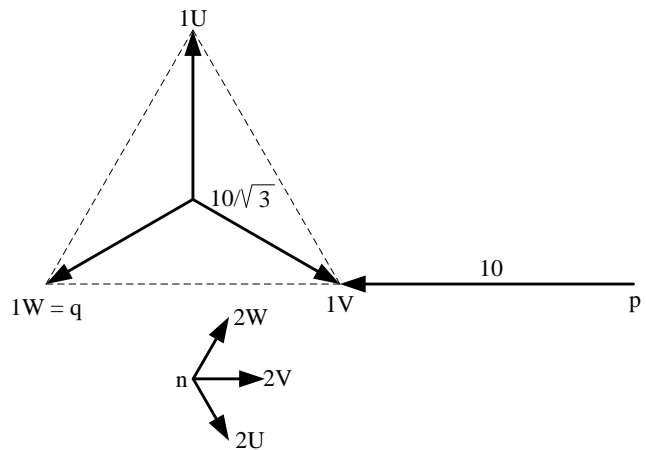


Konačni dijagram napona izgleda ovako:

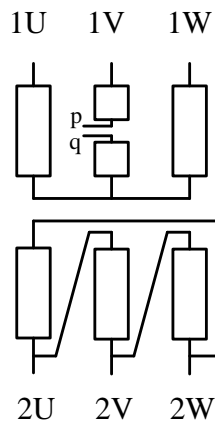
$$U_{pq} = 10 + 10 = \boxed{20 \text{ kV}}$$

$$U_{2U2V} = U_{2V2W} = \frac{400}{\sqrt{3}} = \boxed{231 \text{ V}}$$

$$U_{2W2U} = \boxed{400 \text{ V}}$$



- 3.9. Trofazni trostupni transformator 10/0,4 kV, spoj Yd5, priključen je na trofaznu mrežu 10 kV. U namotu faze B došlo je do prekida prema slici. Koliki je napon U_{pq} u namotu prekinute faze? Koliki su naponi između stezaljki niženaponskog namota u praznom hodu: U_{2U2V} , U_{2V2W} , U_{2W2U} ?



10/0,4 kV, Yd5

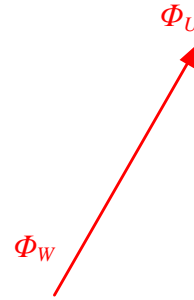
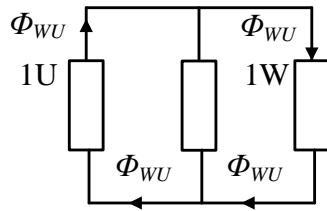
Rješenje:

Trostupni transformator s primarom u Y spoju ima raspodjelu tokova po stupovima i u vektorsko-fazorskim dijagramima kao na slici:



Kad namot na srednjem stupu ostane bez napajanja zbog prekida u namotu, mijenja se raspodjela magnetskog toka po stupovima. Namoti na prvom i trećem stupu serijski su spojeni na linijski napon U_{WU} .

Kroz srednji stup ne prolazi magnetski tok te se u njemu ne inducira napon.



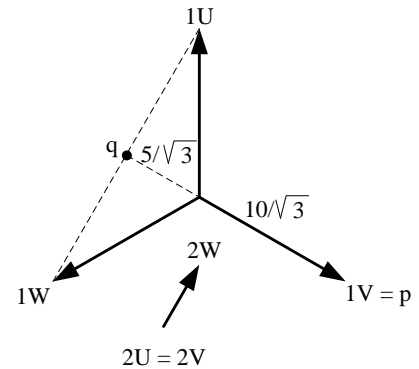
Konačni dijagram napona izgleda ovako:

$$U_{pq} = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \boxed{8,66 \text{ kV}}$$

$$U_{1Uq} = U_{1Wq} = \frac{10}{2} = \boxed{5 \text{ kV}}$$

$$U_{2U2V} = \boxed{0}$$

$$U_{2W2U} = U_{2W2V} = \frac{0,4}{\sqrt{3}} \cdot U_{1Uq} = \frac{0,4}{\sqrt{3}} \cdot 5000 = \boxed{115,47 \text{ V}}$$



- 3.10. Koliki napon se dobije između stezaljki 1V-2U trofaznog transformatora grupe spoja Yz11, ako se primarna stezaljka 1U kratko spoji sa sekundarnom stezaljkom 2W? Transformator je građen za 1000/400 V, a na njegove primarne stezaljke narinut je trofazni napon 1000 V. Zadatak riješiti analitički i grafički.

$$\boxed{U_{1V2U} = 1359 \text{ V}}$$

4. KORISNOST TRANSFORMATORA

4.1. Na jednofaznom transformatoru nazivne snage 200 kVA napravljeni su pokus praznog hoda i pokus kratkog spoja pri temperaturi 25° C. Rezultati pokusa su:

- Pokus praznog hoda: $U_{10} = U_{1n} = 10 \text{ kV}$, $I_0 = 1\% I_n$, $P_0 = 600 \text{ W}$,
 - Pokus kratkog spoja: $I_{1k} = I_{1n}$, $U_{1k} = 400 \text{ V}$, $P_k = 4000 \text{ W}$.
- a) Koliki je $\cos \varphi_2$ pri kojem u nazivno opterećenom transformatoru nema pada napona? Računati za temperaturu 75°C.
- b) Kolika je korisnost transformatora opterećenog teretom koji ima upravo izračunati $\cos \varphi_2$ pri čemu je radna komponenta transformirane snage jednaka po iznosu polovici nazivne snage transformatora?

$$S_n = 200 \text{ kVA}$$

$$\left. \begin{array}{l} U_0 = U_{1n} = 10 \text{ kV} \\ I_0 = 1\% I_n \\ P_0 = 600 \text{ W} \\ I_k = I_{1n} = 100 \text{ A} \\ U_k = 400 \text{ V} \\ P_k = 4000 \text{ W} \end{array} \right\} 25^\circ \text{C}$$

Rješenje:

$$u_{r25} = \frac{P_{k25}}{S_n} = \frac{4}{200} = 2,00\%$$

$$u_{k25} = \frac{U_k}{U_n} \cdot 100 = \frac{400}{10000} \cdot 100 = 4,00\%$$

$$u_{\sigma 25} = u_{\sigma 75} = \sqrt{u_{k25}^2 - u_{r25}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 3,46\%$$

Uz zanemarenje dodatnog otpora:

$$u_{r75} = \frac{235 + 75}{235 + 25} u_{r25} = \frac{310}{260} \cdot 2,00 = 2,38\% \rightarrow P_{k75} = 0,0238 \cdot 200000 = 4760 \text{ W}$$

$$u_{k75} = \sqrt{u_{r25}^2 + u_{\sigma 25}^2} = \sqrt{2,38^2 + 3,46^2} = 4,20\%$$

$$a) \Delta u_{75} = \alpha \cdot [u_{r75} \cos \varphi_2 + u_{\sigma 25} \sin \varphi_2] = 0$$

$$u_{r75} \cos \varphi_2 = -u_{\sigma 25} \sin \varphi_2$$

$$\tan \varphi_2 = -\frac{u_{r75}}{-u_{\sigma 25}} = -\frac{2,38}{3,46} = 0,68786$$

$$\varphi_2 = -34,52^\circ \rightarrow \boxed{\cos \varphi_2 = 0,824 \text{ kap.}}$$

$$b) \cos \varphi_2 = 0,824 \text{ kap.}; P = 0,5 S_n = 100 \text{ kW}$$

$$S = \frac{P}{\cos \varphi_2} = \frac{0,5 S_n}{0,824} = 0,607 S_n \rightarrow \alpha = 0,607$$

$$\eta = 1 - \frac{P_0 + \alpha^2 P_{k75}}{P} = 1 - \frac{600 + 0,607^2 \cdot 4760}{100000} = \boxed{97,646\%}$$

- 4.2. Trofazni transformator nazivne snage 100 kVA ima gubitke praznog hoda $P_0 = 350$ W i gubitke zbog tereta $P_{\text{tn}} = 1950$ W. Transformator je opterećen teretom čiji je $\cos\varphi_2 = 0,8$. Odredite koeficijent korisnog djelovanja η za:

c) $\alpha = 0,6$

d) $\alpha = 1$

Pri kojem opterećenju α će transformator imati maksimalnu korisnost? Kolika je nazivna korisnost?

$$S_n = 100 \text{ kVA}$$

$$P_0 = 350 \text{ W}$$

$$P_{\text{tn}} = 1950 \text{ W}$$

$$\cos\varphi_2 = 0,8$$

Rješenje:

$$\eta = 1 - \frac{P_0 + \alpha^2 P_{\text{tn}}}{\alpha S_n \cos\varphi_2}$$

a) $\alpha_1 = 0,6$

$$\eta_1 = 1 - \frac{P_0 + \alpha_1^2 P_{\text{tn}}}{S_n \cos\varphi_2} = 1 - \frac{350 + 0,6^2 \cdot 1950}{0,6 \cdot 100000 \cdot 0,8} = \boxed{97,808 \%}$$

b) $\alpha_2 = 1$

$$\eta_2 = 1 - \frac{P_0 + \alpha_2^2 P_{\text{tn}}}{S_n \cos\varphi_2} = 1 - \frac{350 + 1^2 \cdot 1950}{1 \cdot 100000 \cdot 0,8} = \boxed{97,125 \%}$$

Da bi se odredilo opterećenje α pri kojem transformator ima maksimalnu korisnost treba derivirati izraz za η po α i izjednačiti s nulom.

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \left(1 - \frac{P_0 + \alpha^2 P_{\text{tn}}}{\alpha S_n \cos\varphi_2} \right) = 0$$

$$-\frac{(\alpha S_n \cos\varphi_2) \cdot 2\alpha P_{\text{tn}} - (P_0 + \alpha^2 P_{\text{tn}}) \cdot (S_n \cos\varphi_2)}{(\alpha S_n \cos\varphi_2)^2} = 0$$

$$-\frac{S_n \cos\varphi_2 \cdot (2\alpha^2 P_{\text{tn}} - \alpha^2 P_{\text{tn}} - P_0)}{(\alpha S_n \cos\varphi_2)^2} = 0$$

$$-\frac{\alpha^2 P_{\text{tn}} - P_0}{\alpha^2 S_n \cos\varphi_2} = 0$$

$$\alpha^2 P_{\text{tn}} - P_0 = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{P_0}{P_{\text{tn}}}$$

$$\boxed{\alpha_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{\text{tn}}}}} \text{ za } \eta = \eta_{\text{maks}}$$

$$\alpha_{\text{maks}} = \sqrt{\frac{P_0}{P_{\text{tn}}}} = \sqrt{\frac{350}{1950}} = 0,4237$$

Maksimalna korisnost pri $\cos \varphi_2 = 0,8$

$$\eta_{\text{maks}} = 1 - \frac{P_0 + \alpha_{\text{maks}}^2 P_{\text{tn}}}{\alpha_{\text{maks}} S_n \cos \varphi_2} = 1 - \frac{350 + 0,4237^2 \cdot 1950}{0,4237 \cdot 100000 \cdot 0,8} = \boxed{97,935 \%}$$

Nazivna korisnost je korisnost pri nazivnom opterećenju i $\cos \varphi_2 = 1$

$$\eta_n = 1 - \frac{P_{\text{gn}}}{S_n} = 1 - \frac{P_{0n} + P_{\text{tn}}}{S_n} = 1 - \frac{350 + 1950}{100000} = \boxed{97,700 \%}$$

4.3. Dio podataka iz ispitnih protokola dvaju transformatora je sljedeći:

T1: 20 MVA, 110/36,75 kV, $u_k = 12,1 \%$, $P_0 = 21 \text{ kW}$, $P_k = 140 \text{ kW}$, $I_0 = 0,06 \%$ I_n

T2: 25 MVA, 110/20,8 kV, $u_k = 13,5 \%$, $P_0 = 14 \text{ kW}$, $P_k = 90 \text{ kW}$, $I_0 = 1,1 \%$ I_n

Izračunajte stupnjeve korisnosti pri nazivnom opterećenju za faktore snage 1 i 0,8.

Komentirajte razlike u navedenim podacima.

$$\eta_{1,1} = 99,195 \%$$

$$\eta_{1,0,8} = 98,994 \%$$

$$\eta_{2,1} = 99,584 \%$$

$$\eta_{2,0,8} = 99,480 \%$$

Transformator T2 u oba slučaja ima višu korisnost jer ima manje gubitke u odnosu na nazivnu snagu.

5. AUTOTRANSFORMATOR I TIPSKA SNAGA

5.1. Jednofazni transformator 10 kVA, 220/110 V, 50 Hz, ispitan je u kratkom spoju i praznom hodu. Rezultati ispitivanja su sljedeći:

- Pokus praznog hoda: $U_1 = 220$ V, 50 Hz, $P_0 = 250$ W,
- Pokus kratkog spoja: $U_{1k} = 27$ V, $I_{1k} = 45,4$ A, $P_k = 450$ W.

Transformator se prespoji u autotransformator **330/220 V**. Skicirajte spoj autotransformatora i označite nazivne napone i struje. Uz zanemarenje struje magnetiziranja i pretpostavku da su ukupni gubici u bakru podjednako raspodijeljeni na primarni i sekundarni namot izračunajte:

- prolaznu snagu S_a autotransformatora uzimajući u obzir da struja u pojedinim namotima ne smije prijeći nazivnu vrijednost određenu za dvonamotni transformator,
- napon kratkog spoja $u_{ka\%}$ autotransformatora,
- korisnost autotransformatora kod opterećenja sekundara nazivnom strujom uz $\cos \varphi_2 = 0,8$.

$$S_n = 10 \text{ kVA}$$

$$U_{1n} = 220 \text{ V}$$

$$U_{2n} = 110 \text{ V}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

$$P_0 = 250 \text{ W}$$

$$U_{1k} = 27 \text{ V}$$

$$I_{1n} = 45,4 \text{ A}$$

$$P_k = 450 \text{ W}$$

$$U_{1a} / U_{2a} = 320 / 220 \text{ V}$$

Rješenje:

$$a) U_{1a} = 330 \text{ V}$$

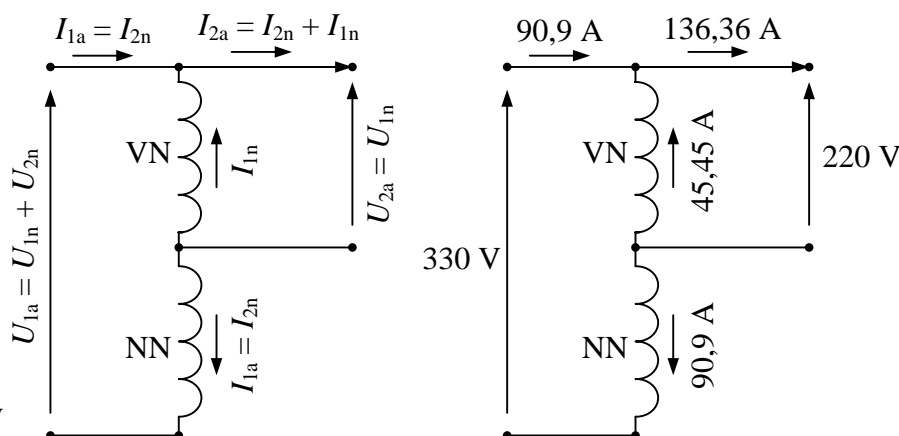
$$I_{1a} = \frac{S_n}{U_{2n}} = \frac{10^4}{110} = 90,91 \text{ A}$$

$$S_a = U_{1a} I_{1a} = 330 \cdot 90,91 = 30 \text{ kVA} \quad \text{ILI} \quad S_a = S_n \frac{U_{1a}}{U_{1a} - U_{2a}} = 10 \frac{330}{330 - 220} = \boxed{30 \text{ kVA}}$$

$$b) u_k = \frac{U_{1k}}{U_n} 100 = \frac{27}{220} 100 = 12,27 \%$$

$$u_{ka} = u_k \frac{U_{1a} - U_{2a}}{U_{1a}} = 12,27 \frac{330 - 220}{330} = \boxed{4,09 \%}$$

$$c) \eta_a = \frac{S_a \cos \varphi_2 - P_0 + P_k}{S_a \cos \varphi_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,8 - (250 + 450)}{30 \cdot 10^3 \cdot 0,8} = \boxed{0,9708}$$



- 5.2. Trofazni transformator 8 MVA, 35/10,5 kV, Yd5, $P_0 = 9,4$ kW, $P_t = 54$ kW, $u_k = 7\%$, treba prespojiti u autotransformator u spoju Ya0. Izračunajte odgovarajuće podatke (S_a , U_{1a}/U_{2a} , η , u_{ka}). Pretpostavite da namoti mogu izdržati naponska naprezanja autotransformatora, a izvodi namota strujna opterećenja autotransformatora.

$$S_n = 8 \text{ MVA}$$

$$35/10,5 \text{ kV}$$

$$P_0 = 9,4 \text{ kW}$$

$$P_k = 54 \text{ kW}$$

$$u_{k\%} = 7 \%$$

$$Yd5 \rightarrow Ya$$

Rješenje:

•Dvonamotni transformator:

$$I_{1n} = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_{1n}} = \frac{8000}{\sqrt{3} \cdot 35} = 131,97 \text{ A}$$

$$I_{2n} = \frac{S_n}{\sqrt{3} \cdot U_{2n}} = \frac{8000}{\sqrt{3} \cdot 10,5} = 439,89 \text{ A}$$

$$I_{2f} = \frac{I_{2n}}{\sqrt{3}} = 253,97 \text{ A}$$

$$\eta = 1 - \frac{P_g}{S_n} = 1 - \frac{9,4 + 54}{8000} = 99,208 \%$$

Za slučaj transformacije 35,2 kV / 18,2 kV:

•Autotransformator:

$$U_{1af} = \frac{35}{\sqrt{3}} + 10,5 = 30,71 \text{ kV}$$

$$U_{1a} = \sqrt{3} \cdot U_{1af} = \sqrt{3} \cdot 30,71 = 53,19 \text{ kV}$$

$$I_{1a} = I_{1n} = 131,97 \text{ A}$$

$$S_{1a} = \sqrt{3} \cdot U_{1a} I_{1a} = \sqrt{3} \cdot 53,19 \cdot 131,97 = 12,16 \text{ MVA}$$

$$U_{2af} = 10,5 \text{ kV}$$

$$U_{2a} = \sqrt{3} \cdot U_{2af} = \sqrt{3} \cdot 10,5 = 18,19 \text{ kV}$$

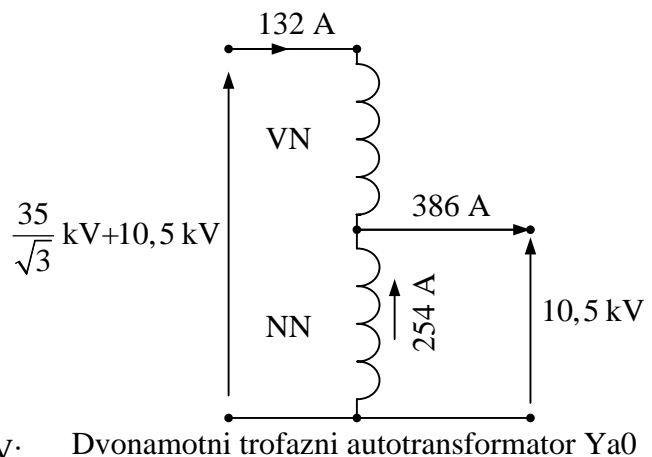
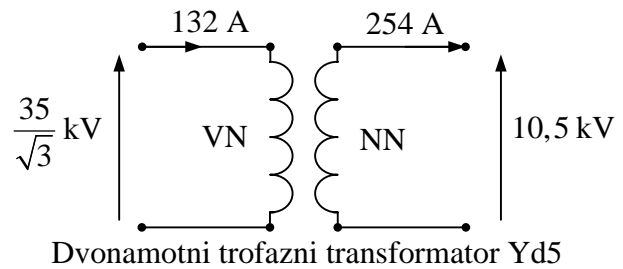
$$I_{2a} = I_{1n} + I_{2f} = 131,97 + 253,97 = 385,94 \text{ A}$$

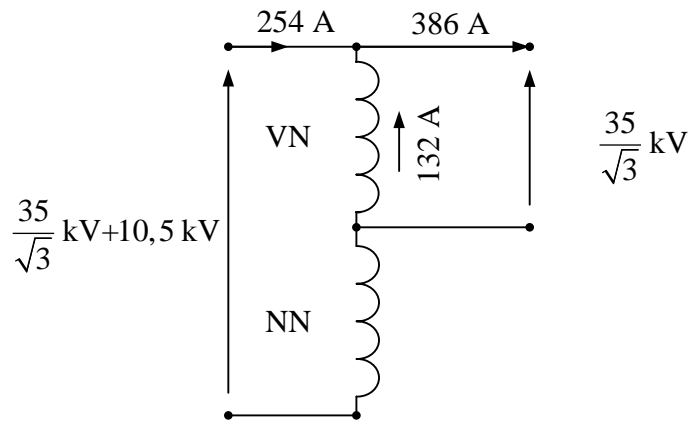
$$S_{2a} = \sqrt{3} \cdot U_{2a} I_{2a} = \sqrt{3} \cdot 18,19 \cdot 385,94 = 12,16 \text{ MVA}$$

$$S_a = S_T \cdot \frac{U_{1a}}{U_{1a} - U_{2a}} = 8 \cdot \frac{53,19}{53,19 - 18,19} = 12,16 \text{ MVA}$$

$$u_{ka} = u_k \cdot \frac{U_{1a} - U_{2a}}{U_{1a}} = 7 \cdot \frac{53,19 - 18,19}{53,19} = 4,61 \%$$

$$\eta_a = 1 - \frac{P_g}{S_{na}} = 1 - \frac{P_0 + P_t}{S_{na}} = 1 - \frac{9,4 + 54}{12156,9} = 99,478 \%$$





Dvonamotni trofazni autotransformator Ya0

Za slučaj transformacije 53,2 kV / 35 kV:

•Autotransformator:

$$\left. \begin{aligned} U_{1af} &= \frac{35}{\sqrt{3}} + 10,5 = 30,71 \text{ kV} \\ U_{1a} &= \sqrt{3} \cdot U_{1af} = \sqrt{3} \cdot 30,71 = 53,19 \text{ kV} \\ I_{1a} &= I_{2f} = 253,97 \text{ A} \\ S_{1a} &= \sqrt{3} \cdot U_{1a} I_{1a} = \sqrt{3} \cdot 53,19 \cdot 253,97 = 23,40 \text{ MVA} \end{aligned} \right\} \text{gledano s primara}$$

$$\left. \begin{aligned} U_{2af} &= \frac{U_{1n}}{\sqrt{3}} = \frac{35}{\sqrt{3}} = 20,21 \text{ kV} \\ U_{2a} &= \sqrt{3} \cdot U_{2af} = \sqrt{3} \cdot 20,21 = 35 \text{ kV} \\ I_{2a} &= I_{1n} + I_{2f} = 131,97 + 253,97 = 385,94 \text{ A} \\ S_{2a} &= \sqrt{3} \cdot U_{2a} I_{2a} = \sqrt{3} \cdot 35 \cdot 385,94 = 23,40 \text{ MVA} \end{aligned} \right\} \text{gledano sa sekundara}$$

$$S_a = S_T \cdot \frac{U_{1a}}{U_{1a} - U_{2a}} = 8 \cdot \frac{53,19}{53,19 - 35} = \boxed{23,40 \text{ MVA}} \left\} \text{preko tipske i prolazne snage}$$

$$u_{ka} = u_k \cdot \frac{U_{1a} - U_{2a}}{U_{1a}} = 7 \cdot \frac{53,19 - 35}{53,19} = \boxed{2,39 \%}$$

$$\eta_a = 1 - \frac{P_g}{S_{na}} = 1 - \frac{P_0 + P_t}{S_{na}} = 1 - \frac{9,4 + 54}{23396,0} = \boxed{99,729 \%}$$

		Dvonamotni	Autotransformator	
Prijenosni omjer	$U_{1a} / U_{2a} [\text{kV}]$	35 / 10,5	53,2 / 18,2	53,2 / 35
Prolazna snaga	$S_a [\text{MVA}]$	8,00	12,16	23,40
Napon kratkog spoja	$u_{ka} [\%]$	7,00	4,61	2,39
Korisnost	$\eta_a [\%]$	99,208	99,478	99,729

5.3. Jednofazni transformator 10 kVA, 220/110 V, 50 Hz, ispitan je u kratkom spoju i praznom hodu. Rezultati ispitivanja su sljedeći:

- Pokus praznog hoda: $U_1 = 220 \text{ V}$, 50 Hz , $P_0 = 250 \text{ W}$,
- Pokus kratkog spoja: $U_{1k} = 27 \text{ V}$, $I_{1k} = 45,4 \text{ A}$, $P_k = 450 \text{ W}$.

Transformator se prespoji u autotransformator **330/110 V**. Skicirajte spoj autotransformatora i označite nazivne napone i struje. Uz zanemarenje struje magnetiziranja i pretpostavku da su ukupni gubici u bakru podjednako raspodijeljeni na primarni i sekundarni namot izračunajte:

- prolaznu snagu S_a autotransformatora uzimajući u obzir da struja u pojedinim namotima ne smije prijeći nazivnu vrijednost određenu za dvonamotni transformator,
- napon kratkog spoja $u_{ka\%}$ autotransformatora,
- korisnost autotransformatora kod opterećenja sekundara nazivnom strujom uz $\cos\varphi_2 = 0,9$.

$$S_a = 15 \text{ kVA}$$

$$u_{ka} = 8,18 \%$$

$$\eta_a = 0,9481$$

5.4. Kolika je tipska snaga tronamotnog trofaznog transformatora 100 / 100 / 33 MVA, 123 / 36,5 / 21 kV s regulacijskim namotom na VN strani +7,5 %, -5 %?

$$S_n = 100/100/33 \text{ MVA}$$

$$123/36,5/21 \text{ kV}$$

$$a_{\%} = 7,5 \%$$

$$b_{\%} = 5 \%$$

Rješenje:

Ako postoji treći namot nazivne snage S_3 tipska snaga je:

$$S_T = S_n \left(1 + \frac{a_{\%} + b_{\%}}{200} + \frac{S_3}{2S_n} \right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{7,5 + 5}{200} + \frac{33}{200} \right) = 122,75 \text{ MVA}$$

5.5. Kolika je tipska snaga trofaznog transformatora 100 MVA, 123 / 14,4 kV s regulacijskim namotom na VN strani $\pm 5\%$?

Rješenje:

Tipska snaga transformatora je nazivna snaga dvonamotnog transformatora bez regulacije.

Ako imamo mogućnost regulacije napona za +a % i -b % treba jednom namotu dodati a % zavoja, i presjek vodiča povećati za b % da bi pri tom nižem naponu struja bila veća za b %. Tipska snaga takvog transformatora (da nema regulacije) je približno:

$$S_T = S_n \left(1 + \frac{a_{\%} + b_{\%}}{200} \right) = 100 \cdot \left(1 + \frac{5 + 5}{200} \right) = 105 \text{ MVA}$$

6. PARALELNI RAD

6.1. Transformatori T1, T2 i T3 su spojeni paralelno.

T1: 150 kVA, $u_k = 3,5 \%$, $P_0 = 450 \text{ W}$, $P_t = 1600 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T2: 125 kVA, $u_k = 4,0 \%$, $P_0 = 350 \text{ W}$, $P_t = 1200 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T3: 100 kVA, $u_k = 4,5 \%$, $P_0 = 280 \text{ W}$, $P_t = 900 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

a) Ako su sva tri transformatora uključena, a jedan od transformatora je preopterećen za 10 % dok preostala dva nisu preopterećeni, koliku ukupnu snagu S prenose transformatori i koji transformator je preopterećen?

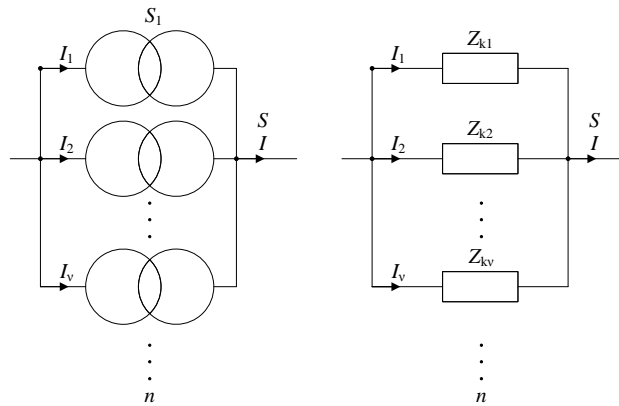
b) Koliko je dozvoljeno opterećenje te kolika je korisnost ove grupe transformatora pri dozvoljenom opterećenju i $\cos\varphi_2 = 1$?

T1: 150 kVA, $u_k = 3,5 \%$, $P_0 = 450 \text{ W}$, $P_t = 1600 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T2: 125 kVA, $u_k = 4,0 \%$, $P_0 = 350 \text{ W}$, $P_t = 1200 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T3: 100 kVA, $u_k = 4,5 \%$, $P_0 = 280 \text{ W}$, $P_t = 900 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

Rješenje:



Pretpostavka: paralelno spojeni transformatori imaju isti omjer R_k i X_k .

Ako se n transformatora spoji paralelno, kao na gornjoj slici, vrijedi:

$$I_1 Z_{k1} = I_2 Z_{k2} = \dots = I_v Z_{kv} = \dots = I_n Z_{kn} = I Z_k$$

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_v + \dots + I_n$$

$$Z_{ki} = \frac{U_n^2 \cdot u_{ki}}{100 \cdot S_{ni}}$$

$$\frac{1}{Z_k} = \frac{1}{Z_{k1}} + \frac{1}{Z_{k2}} + \dots + \frac{1}{Z_{kv}} + \dots + \frac{1}{Z_{kn}} = \frac{100}{U_n^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{S_{ni}}{u_{ki}} \right)$$

$$\frac{I_v}{I} = \frac{\frac{1}{Z_{kv}}}{\frac{1}{Z_k}} = \frac{S_v}{S} = \frac{\frac{100}{U_n^2} \cdot \frac{S_{nv}}{u_{kv}}}{\frac{100}{U_n^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{S_{ni}}{u_{ki}} \right)} = \frac{S_{nv}}{u_{kv} \left(\sum_{i=1}^n \frac{S_{ni}}{u_{ki}} \right)} \Rightarrow \frac{S_v}{S_{nv}} = \alpha_v = \frac{S}{u_{kv} \left(\sum_{i=1}^n \frac{S_{ni}}{u_{ki}} \right)}$$

Dakle, transformator s najmanjim Z_k tj. u_k imat će najveće opterećenje.

$$a) S_v = S_{nv} \frac{S}{u_{kv} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}}} = \alpha_v S_{nv}$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}} = \frac{150}{3,5} + \frac{125}{4} + \frac{100}{4,5} = \boxed{96,33 \text{ kVA}}$$

Transformator T1 će biti preopterećen, jer ima najmanji u_k .

$$1,1 \cdot S_{n1} = S \frac{S_{n1}}{u_{k1} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}}} \Rightarrow S = 1,1 \cdot u_{k1} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}} = 1,1 \cdot 3,5 \cdot 96,33 = \boxed{370,87 \text{ kVA}}$$

$$S_2 = 370,87 \frac{125}{4 \cdot 96,33} = \boxed{120,31 \text{ kVA}}$$

$$S_3 = 370,87 \frac{100}{4,5 \cdot 96,33} = \boxed{85,56 \text{ kVA}}$$

$$b) \alpha = 1 \rightarrow S_d = u_{kmin} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}} = 3,5 \left(\frac{150}{3,5} + \frac{125}{4} + \frac{100}{4,5} \right) = 337,16 \text{ kVA}$$

$$\alpha_1 = \frac{S_1}{S_{n1}} = \frac{\alpha S_d}{u_{kv} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}}} = \frac{\alpha \cdot u_{kmin} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}}}{u_{kv} \sum_{i=1}^3 \frac{S_{ni}}{u_{ki}}} = \alpha \frac{u_{kmin}}{u_{k1}} = 1 \cdot \frac{3,5}{3,5} = 1$$

$$\alpha_2 = \frac{S_2}{S_{n2}} = \frac{u_{kmin}}{u_{k2}} = \frac{3,5}{4,0} = 0,875$$

$$\alpha_3 = \frac{S_3}{S_{n3}} = \frac{u_{kmin}}{u_{k3}} = \frac{3,5}{4,5} = 0,778$$

$$\eta = 1 - \frac{P_{01} + \alpha_1^2 P_{t1} + P_{02} + \alpha_2^2 P_{t2} + P_{03} + \alpha_3^2 P_{t3}}{S_d \cdot \cos \varphi_2}$$

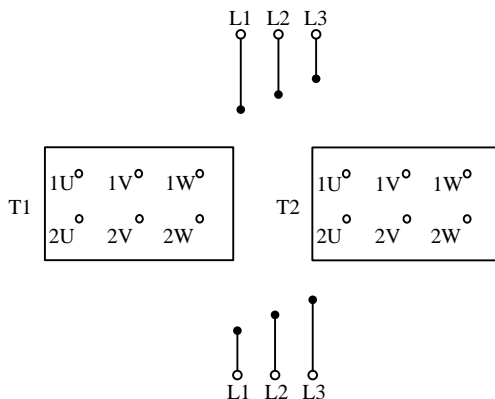
$$\eta = 1 - \frac{450 + 1^2 \cdot 1600 + 350 + 0,875^2 \cdot 1200 + 280 + 0,7778^2 \cdot 900}{337,16 \cdot 10^3 \cdot 1} = \boxed{0,9877}$$

6.2. Transformatore T1 i T2 treba spojiti paralelno na mrežu napona 10 kV:

T1: 75 kVA, $u_k = 4,0 \%$, $P_0 = 250 \text{ W}$, $P_t = 1100 \text{ W}$, Yd1, 10/0,4 kV

T2: 65 kVA, $u_k = 4,5 \%$, $P_0 = 200 \text{ W}$, $P_t = 900 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

Skicirajte način na koji je potrebno spojiti stezaljke transformatora da bi u paralelnom radu oba transformatora radila ispravno bez prespajanja namota unutar samih transformatora? Spoj transformatora objasnite pomoću dijagrama napona. Kako će se među transformatorima podijeliti opterećenje od 130 kVA?



T1: 75 kVA, $u_k = 4,0 \%$, $P_0 = 250 \text{ W}$, $P_t = 1100 \text{ W}$, Yd1, 10/0,4 kV

T2: 65 kVA, $u_k = 4,5 \%$, $P_0 = 200 \text{ W}$, $P_t = 900 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

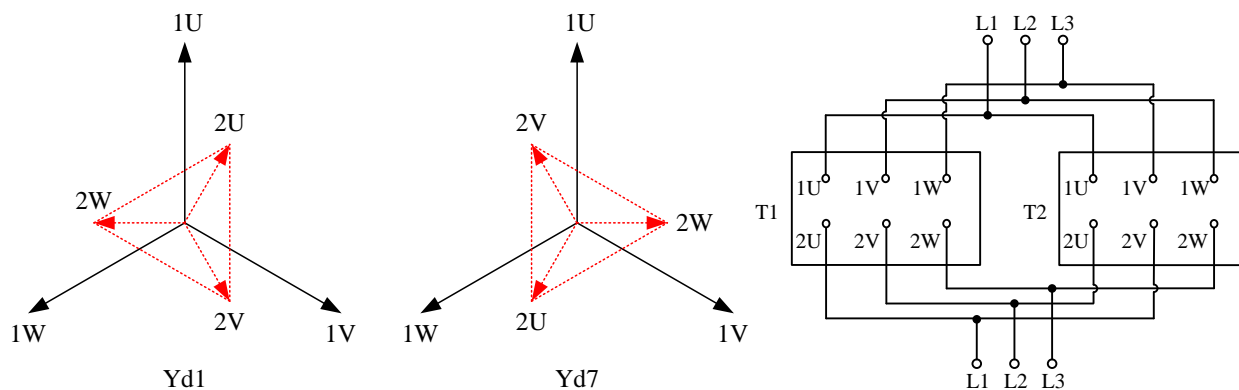
$S = 130 \text{ kVA}$

Rješenje:

$$S_1 = S \frac{S_{n1}}{u_{k1} \left(\frac{S_{n1}}{u_{k1}} + \frac{S_{n2}}{u_{k2}} \right)} = 130 \frac{75}{4 \left(\frac{75}{4} + \frac{65}{4,5} \right)} = \boxed{73,43 \text{ kVA}}$$

$$S_2 = S \frac{S_{n2}}{u_{k2} \left(\frac{S_{n1}}{u_{k1}} + \frac{S_{n2}}{u_{k2}} \right)} = 130 \frac{65}{4,5 \left(\frac{75}{4} + \frac{65}{4,5} \right)} = \boxed{56,57 \text{ kVA}}$$

Prilikom paralelnog spajanja, spoj i satni broj oba transformatora mora biti jednak. Spoj Yd7 se transformira u spoj Yd1 tako da se stezaljke 1V i 1W spoje tim redom sa stezaljkama 1W i 1V (zrcaljenje cijele slike oko osi 1U), a zatim i 2U i 2V spoje tim redom sa stezaljkama 2V i 2U (zrcaljenje slike sekundarnih napona oko osi 2W).



6.3. Transformatori T1, T2 i T3 su spojeni paralelno.

T1: 150 kVA, $u_k = 3,5 \%$, $P_0 = 450 \text{ W}$, $P_t = 1600 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T2: 125 kVA, $u_k = 4,0 \%$, $P_0 = 350 \text{ W}$, $P_t = 1200 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T3: 100 kVA, $u_k = 4,5 \%$, $P_0 = 280 \text{ W}$, $P_t = 900 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

- Ako su sva tri transformatora uključena, a jedan od transformatora je opterećen sa 90 % dok su preostala dva preopterećeni, koliku ukupnu snagu S prenose transformatori i koji transformatori su preopterećeni?
- Koliko je dozvoljeno opterećenje te kolika je korisnost ove grupe transformatora pri 80% dozvoljenog opterećenja i $\cos\phi_2 = 0,85$ kap.?

$$S = 390,14 \text{ kVA}$$

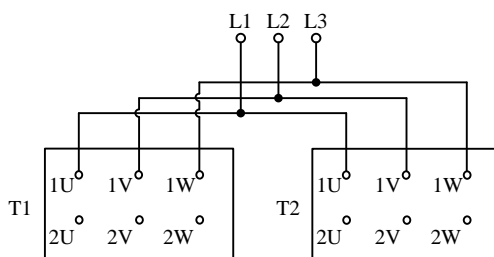
$$\eta = 0,9867$$

6.4. Transformatore T1 i T2 treba spojiti paralelno na mrežu napona 10 kV:

T1: 85 kVA, $u_k = 3,0 \%$, $P_0 = 280 \text{ W}$, $P_t = 1000 \text{ W}$, Yy2, 10/0,4 kV

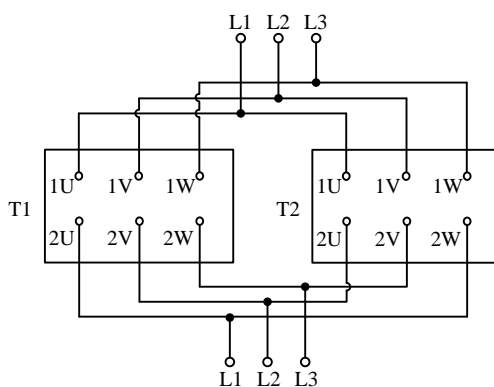
T2: 70 kVA, $u_k = 4,2 \%$, $P_0 = 210 \text{ W}$, $P_t = 950 \text{ W}$, Yy6, 10/0,4 kV

Skicirajte način na koji je potrebno spojiti sekundarne stezaljke transformatora da bi u paralelnom radu oba transformatora radila ispravno bez prespajanja namota unutar samih transformatora? Spoj transformatora objasnite pomoću dijagrama napona. Kako će se među transformatorima podijeliti opterećenje od 100 kVA?



$$S_1 = 62,96 \text{ kVA}$$

$$S_2 = 37,04 \text{ kVA}$$



6.5. Transformatori T1, T2 i T3 su spojeni paralelno.

T1: 75 kVA, $u_k = 3,6 \%$, $P_0 = 250 \text{ W}$, $P_t = 1100 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T2: 65 kVA, $u_k = 4,5 \%$, $P_0 = 200 \text{ W}$, $P_t = 900 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

T3: 60 kVA, $u_k = 4,8 \%$, $P_0 = 180 \text{ W}$, $P_t = 800 \text{ W}$, Yd7, 10/0,4 kV

Ako je potrebno prenijeti snagu od 123 kVA korištenjem samo dva transformatora, koja dva transformatora je potrebno priključiti da se postigne maksimalni η grupe transformatora pri traženom opterećenju uz $\cos\varphi_2 = 1$ i pri čemu nijedan transformator ne smije biti preopterećen? Koliko iznosi η za taj slučaj?

Mogu raditi samo T1 i T2, a da nijedan ne bude preopterećen.

$$\eta = 0,9836$$

7. ZAGRIJAVANJE I ŽIVOTNI VIJEK TRANSFORMATORA

7.1. Transformator je iz hladnog stanja opterećen konstantnim teretom. Nakon 1,4 sata izmjereno je zagrijanje transformatora od 30 K, a konačno zagrijanje kod tog tereta iznosi 60 K. Gubici transformatora su $P_0 = 2,6$ kW, $P_t = 9,1$ kW.

- Kolika je vremenska konstanta transformatora, ako se transformator promatra kao homogeno tijelo?
- Koliko bi bilo konačno zagrijanje transformatora kod 50 % većeg opterećenja u odnosu na ono kod kojeg konačno zagrijanje iznosi 60 K, ako dozvoljeno konačno zagrijanje namota pri nazivnom teretu iznosi 80 K?

$$t = 1,4 \text{ h}$$

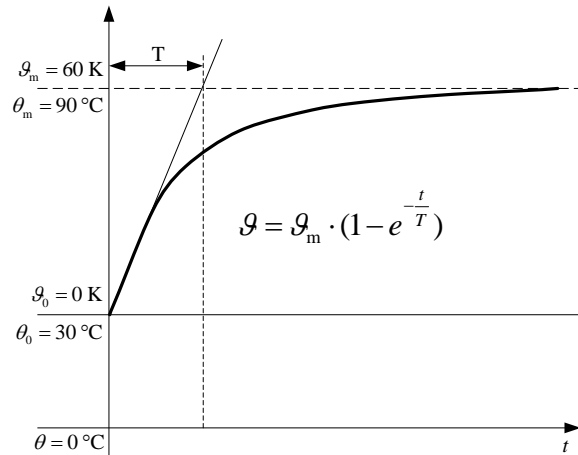
$$\left. \begin{array}{l} \vartheta_1 = 30 \text{ K} \\ \vartheta_{m1} = 60 \text{ K} \end{array} \right\} \alpha_1$$

$$\vartheta_{mn} = 80 \text{ K}$$

$$P_0 = 2,6 \text{ kW}$$

$$P_t = 9,1 \text{ kW}$$

Rješenje:



Općenita formula za zagrijavanje od neke početne nadtemperature ϑ_0 glasi:

$$\vartheta = \vartheta_0 + (\vartheta_m - \vartheta_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

a) Za zagrijavanje iz hladnog stanja:

$$\vartheta_1 = \vartheta_{m1} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \Rightarrow T = -\frac{t}{\ln\left(1 - \frac{\vartheta_1}{\vartheta_{m1}}\right)} = -\frac{1,4}{\ln\left(1 - \frac{30}{60}\right)} = \boxed{2,02 \text{ h}}$$

b) Konačno zagrijanje (ϑ_m) proporcionalno je ukupnim gubicima u transformatoru. Kod zagrijanja ϑ_1 konačno zagrijanje iznosi ϑ_{m1} , što se događa pri opterećenju α_1 .

$$\frac{\vartheta_{m1}}{\vartheta_{mn}} = \frac{P_0 + \alpha_1^2 P_t}{P_0 + P_t} = \frac{\frac{P_0}{P_t} + \alpha_1^2}{\frac{P_0}{P_t} + 1} \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{\frac{\vartheta_{m1}}{\vartheta_{mn}} \left(\frac{P_0}{P_t} + 1\right) - \frac{P_0}{P_t}} = \sqrt{\frac{60}{80} \left(\frac{2,6}{9,1} + 1\right) - \frac{2,6}{9,1}} = 0,8238$$

Kod zagrijanja ϑ_2 konačno zagrijanje iznosi ϑ_{m2} , što se događa pri opterećenju α_2 , 50% većem od opterećenja α_1 .

$$\frac{\vartheta_{m2}}{\vartheta_{m1}} = \frac{P_0 + (1,5\alpha_1)^2 P_t}{P_0 + \alpha_1^2 P_t} = \frac{1 + (1,5\alpha_1)^2 \frac{P_t}{P_0}}{1 + \alpha_1^2 \frac{P_t}{P_0}} = \frac{1 + (1,5 \cdot 0,8238)^2 \cdot \frac{9,1}{2,6}}{1 + 0,8238^2 \cdot \frac{9,1}{2,6}} = 1,88$$

$$\vartheta_{m2} = 1,88 \cdot \vartheta_{m1} = 1,88 \cdot 60 = \boxed{112,78 \text{ K}}$$

- 7.2. Trofazni uljni transformator 400 kVA, 10/0,4 kV, $u_k = 5\%$, $P_0 = 2250$ W, $P_h/P_v = 2/3$, $P_t = 5750$ W, 60 Hz se pri nazivnom opterećenju zagrijava za 105 K nadtemperature. Temperatura okoline je 40° C. Kolikom snagom se smije opteretiti ovaj transformator na mreži istog napona, ali frekvencije 50 Hz, ako je temperatura okoline 20° C? Pretpostavite da su gubici u željezu zbog histereze proporcionalni kvadratu indukcije.

$$S_n = 400 \text{ kVA}$$

$$10/0,4 \text{ kV}$$

$$P_{tn} = 5750 \text{ W}$$

$$P_{0n} = 2250 \text{ W}$$

$$u_k = 5\%$$

$$P_h / P_v = 2/3$$

$$\vartheta_{mn} = 105 \text{ K}$$

$$\theta_{okn} = 40^\circ \text{ C}$$

$$\theta_{okl} = 20^\circ \text{ C}$$

Rješenje:

Gubici zbog histereze i vrtložnih struja na nazivnom naponu, nazivne frekvencije 60 Hz:

$$P_h = k_h f B^2$$

$$P_v = k_v f^2 B^2$$

$$P_{hn} = \frac{2}{5} P_{0n} = \frac{2}{5} \cdot 2250 = 900 \text{ W}$$

$$P_{vn} = \frac{3}{5} P_{0n} = \frac{3}{5} \cdot 2250 = 1350 \text{ W}$$

Priključkom na nazivni napon, smanjene frekvencije, poveća se indukcija:

$$\left. \begin{aligned} U_{1n} &= k f_n B_n \\ U_{1n} &= k f B \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{B}{B_n} = \frac{f_n}{f} = \frac{60}{50} = \frac{6}{5}$$

Gubici zbog histereze i vrtložnih struja na nazivnom naponu, frekvencije 50 Hz:

$$P_h = \frac{f}{f_n} \left(\frac{B}{B_n} \right)^2 P_{hn} = \frac{50}{60} \left(\frac{6}{5} \right)^2 900 = 1080 \text{ W}$$

$$P_v = \left(\frac{f}{f_n} \frac{B}{B_n} \right)^2 P_{vn} = \left(\frac{50}{60} \frac{6}{5} \right)^2 1350 = 1350 \text{ W}$$

$$P_0 = P_h + P_v = 1080 + 1350 = 2430 \text{ W}$$

$$\vartheta_{mn} = 105 \text{ K}$$

Novo konačno zagrijanje:

$$\vartheta_{m1} = \vartheta_{mn} + \theta_{okn} - \theta_{okl} = 105 + 40 - 20 = 125 \text{ K}$$

$$\frac{\vartheta_{m1}}{\vartheta_{mn}} = \frac{P_0 + \alpha_1^2 P_{tn}}{P_{0n} + P_{tn}} \Rightarrow \alpha_1 = \sqrt{\frac{\vartheta_{m1}}{\vartheta_{mn}} \left(\frac{P_{0n}}{P_{tn}} + 1 \right) - \frac{P_0}{P_{tn}}} = \sqrt{\frac{125}{105} \left(\frac{2250}{5750} + 1 \right) - \frac{2430}{5750}} = 1,1107$$

$$S = \alpha_1 S_n = 1,1107 \cdot 400 = \boxed{444,3 \text{ kVA}}$$

7.3. Transformator ima sljedeće nazivne podatke:

$S_n = 4 \text{ MVA}$, $U_{1n} = 30 \text{ kV}$, $U_{2n} = 10 \text{ kV}$, $P_0 = 7 \text{ kW}$, $u_k = 6 \%$, $\eta = 0,9895$, $T = 2 \text{ sata}$.

Na hladnjake transformatora se ugrade ventilatori koji povećavaju efikasnost hlađenja za 50 %. Koji su novi nazivni podaci takvog transformatora (S'_n , P'_0 , P'_t , η' , u'_k , T') ako ga možemo promatrati kao homogeno tijelo?

$$S_n = 4 \text{ MVA}$$

$$30/10 \text{ kV}$$

$$P_0 = 7 \text{ kW}$$

$$u_k = 6 \%$$

$$\eta = 0,9895$$

$$T = 2 \text{ h}$$

Rješenje:

Maksimalna temperatura u transformatoru proporcionalna je gubicima, a obrnuto proporcionalna umnošku površine i efikasnosti hlađenja:

$$\left. \begin{aligned} \theta_{mn} &= \frac{P_g}{Ah} = \frac{P_0 + P_{tn}}{Ah} \\ \theta_{mn} &= \frac{P'_g}{Ah'} = \frac{P_0 + \alpha^2 P_{tn}}{A \cdot 1,5h} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_0 + \alpha^2 P_{tn} = 1,5(P_0 + P_{tn})$$

$$P_{gn} = (1 - \eta) S_n = (1 - 0,9895) \cdot 4 = 42 \text{ kW}$$

$$P_{tn} = P_{gn} - P_0 = 42 - 7 = 35 \text{ kW}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1,5(P_0 + P_{tn}) - P_0}{P_{tn}}} = \sqrt{\frac{1,5(7 + 35) - 7}{35}} = 1,2649$$

$$S' = \alpha S_n = 1,2649 \cdot 4 = \boxed{5,0596 \text{ MVA}}$$

$$P'_0 = P_0 = \boxed{7 \text{ kW}}$$

$$P'_t = \alpha^2 P_{tn} = 1,2649^2 \cdot 35 = \boxed{56 \text{ kW}}$$

$$\eta' = 1 - \frac{P'_g}{S'} = 1 - \frac{56 + 7}{5059,6} = \boxed{0,9875}$$

$$u'_k = \frac{I'Z'_k}{U'} 100 = \frac{\alpha IZ_k}{U} 100 = \alpha u_k = 1,2649 \cdot 6 = \boxed{7,589 \%}$$

$$T' = \frac{mc}{Sh'} = \frac{mc}{S \cdot 1,5h} = \frac{mc}{Sh} \frac{1}{1,5} = T \frac{1}{1,5} = 2 \cdot \frac{1}{1,5} = \boxed{1,333 \text{ h}}$$

- 7.4. Trofazni uljni transformator 8 MVA, 35/10,5 kV, Yd5, $u_k = 7\%$, $P_{\text{tn}}/P_0 = 5,5$ nazivno opterećen pri temperaturi okoline 40°C ima temperaturu najtoplije točke 118°C . Pri opterećenju 5 MVA transformator se u roku 3 sata zagrije iz hladnog stanja za 28 K. Kolika je toplinska vremenska konstanta transformatora? Ako je temperatura okoline 25°C , koje opterećenje transformatora (u MVA) se smije dozvoliti u trajnom radu da mu temperatura najtoplije točke ne prijeđe 118°C ?

$$T = 2,22 \text{ h}$$

$$S = 8,864 \text{ MVA}$$

- 7.5. Trofazni uljni transformator zagrijava se kod 50 % nazivnog opterećenja za 30 K u odnosu na temperaturu okoline, a pri nazivnom opterećenju za 65 K. Kod kojeg opterećenja u odnosu na nazivno će se transformator zagrijati iz hladnog stanja za 40 K u roku od 3 sata ako vremenska konstanta zagrijanja iznosi 2 sata?

$$\alpha = 0,843$$

8. LITERATURA

- [1.] A. Dolenc: *Transformatori*, Elektrotehnički fakultet Zagreb, 1965.
- [2.] D. Ban: *Zbirka zadataka iz transformatora*, Elektrotehnički fakultet Zagreb, 1971.
- [3.] A. E. Fitzgerald, C. Kingsley, S. D. Umans: *Electric Machinery*, McGraw-Hill, 1990.
- [4.] S. Chapman: *Electric machinery fundamentals*, McGraw-Hill, 1998.



FER

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
F A K U L T E T
ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA
Z A V O D Z A
ELEKTROSTROJARSTVO
I AUTOMATIZACIJU

TEORIJA ELEKTRIČNIH STROJEVA I TRANSFORMATORA

Zadaci za vježbu:

PROTJECANJA

Autori:

Prof. dr. sc. **Zlatko Maljković**

Stjepan Stipetić, dipl. ing.

Doc. dr.sc. **Damir Žarko**

Zagreb, studeni 2009.

- 1.1. Kolika mora biti amplituda sinusno raspoređenog protjecanja jednoga od faznih namota trofaznog 6-polnog stroja ako treba postići okretno polje indukcije u rasporu amplitude 0,9 T, a zračni je raspor 10 mm? Kolika je brzina vrtnje okretnog protjecanja ako je frekvencija faznih struja 50 Hz?

$$2p = 6$$

$$B_m = 0,9 \text{ T}$$

$$\delta = 10 \text{ mm}$$

$$f = 50 \text{ Hz}$$

Rješenje:

$$n = \frac{60f}{p} = \frac{60 \cdot 50}{3} = \boxed{1000 \text{ o/min}}$$

$$R'_{m\delta} = \frac{1}{\Lambda'_\delta} = \frac{\delta}{\mu_0} = \frac{\delta}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} \doteq 800 \cdot 10^3 \cdot \delta$$

$$\Theta_\delta = B_\delta \cdot R'_{m\delta} \doteq 800 \cdot 10^3 \cdot \delta \cdot B_\delta$$

Za magnetsku indukciju od 1 T u zračnom rasporu potrebno za svaki milimetar zračnog raspora po 800 A uzbuđenog protjecanja.

$$\Theta_\delta \doteq 800 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,9 = 7200 \text{ A (amperzavoja)}$$

Okretno protjecanje Θ_δ , stvoreno pulzirajućim protjecanjima triju faznih namota ima 3/2 veću amplitudu od protjecanja faznog namota Θ_{If} .

Dakle:

$$\Theta_{If} = \frac{2}{3} \Theta_\delta = \frac{2}{3} \cdot 7200 = \boxed{4800 \text{ A}}$$

Protjecanje stvaraju amperzavoji. Isti učinak primjerice daje 1000 zavoja kojima teče struja jakosti 1 A, ili 100 zavoja kojima teče struja jakosti 10 A. ($\Theta = NI$).

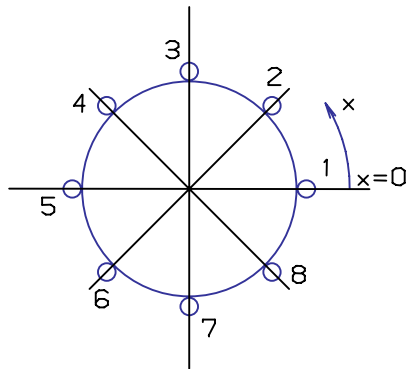
- 1.2. Kolika mora biti amplituda sinusno raspoređenog protjecanja jednoga od faznih namota trofaznog 10-polnog stroja ako treba postići okretno polje amplitude indukcije u rasporu 1,2 T, a zračni je raspor 5 mm? Kolika je brzina vrtnje okretnog protjecanja ako je frekvencija faznih struja 60 Hz?

$$\boxed{n = 720 \text{ o/min}}$$

$$\boxed{\Theta_{If} = 3200 \text{ A}}$$

1.3. U zračnom rasporu stroja indukcija je prostorno raspoređena prema izrazu $B = 0,9 \sin(\pi x / 0,32)$ T. Na rotoru duljine 0,5 m nalazi se 8 simetrično raspoređenih vodiča prema slici. Razmak između susjednih vodiča na obodu rotora je 0,16 m. Rotor se vrti brzinom 1000 o/min.

- a) Izvedite izraz za inducirani napon u jednom vodiču u ovisnosti o položaju i o vremenu.
b) Koliki je maksimalni inducirani napon između krajeva namota dobivenog najpovoljnijim spojem svih 8 vodiča?



$$B = 0,9 \sin\left(\frac{\pi}{0,32} x\right) = 0,9 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right)$$

$$l = 0,5 \text{ m}$$

$$N = 8$$

$$n = 1000 \text{ r/min}$$

$$\tau_u = 0,16 \text{ m}$$

$$a) \quad E_1 = Blv = Bl\omega \frac{D}{2} = Bl \frac{n \cdot \pi D}{30 \cdot 2} = \frac{1}{60} BlnD$$

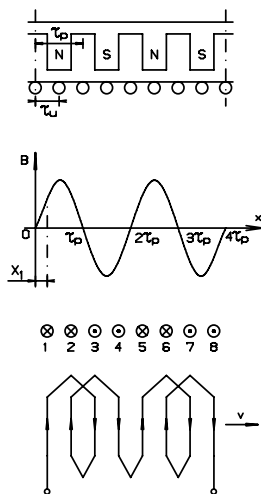
$$D\pi = N\tau_u = 8 \cdot 0,16 = 1,28 \text{ m}$$

$$D\pi = 2p\tau_p \Rightarrow 2p = \frac{D\pi}{\tau_p} = \frac{1,28}{0,32} = 4$$

$$E_1 = \frac{1}{60} \cdot 0,9 \cdot 0,5 \cdot 1000 \cdot 1,28 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{0,32} x\right) = 9,6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{0,32} x\right) = 9,6 \cdot \sin(9,82x)$$

$$\frac{\pi}{\tau_p} x = \frac{\pi}{\tau_p} vt = \frac{\pi}{\tau_p} \frac{D\pi n}{60} t = \frac{\pi}{0,32} \cdot \frac{1,28 \cdot 1000}{60} \cdot t = 209,4 \cdot t$$

$$\boxed{E_1 = 9,6 \cdot \sin(209,4 \cdot t)}$$



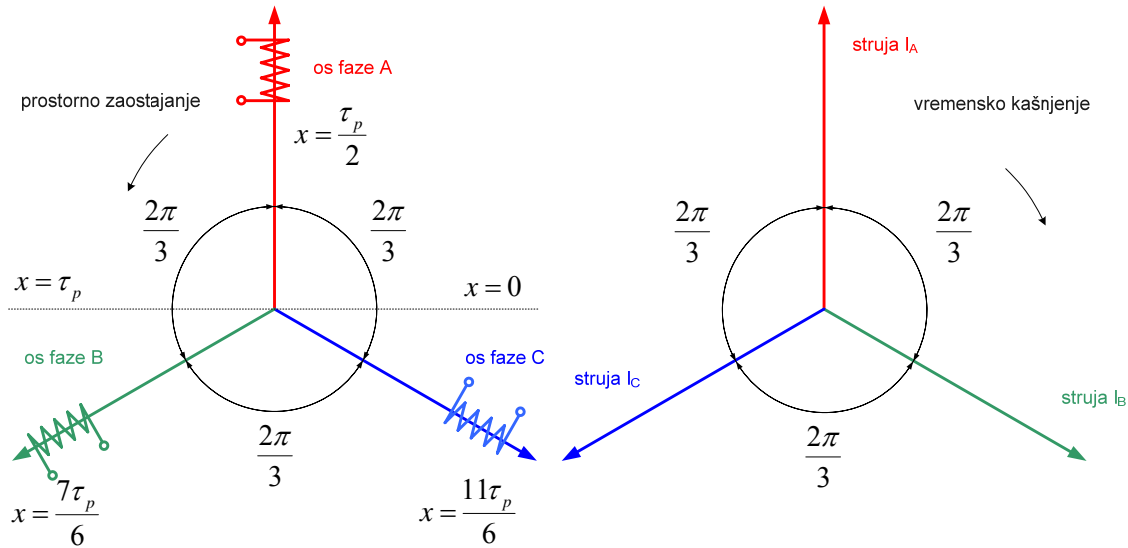
$$X_1 = \frac{\tau_u}{2} = \frac{\tau_p}{4}$$

$$E_m = NE_1 \quad (x = x_1)$$

$$E_m = 8 \cdot 9,6 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} \frac{\tau_p}{4}\right)$$

$$E_m = 8 \cdot 9,6 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \boxed{54,3 \text{ V}}$$

- 1.4. Za nacrtani raspored trofaznog namota i fazore struja treba nacrtati vektore komponenata direktnog i inverznog protjecanja za trenutak kad je struja faze C maksimalna.



Sl. 1. Raspored trofaznog namota i fazora struja i prostoru i vremenu

Rješenje:

Ako namotima A, B, C, prostorno pomaknutima za $2\pi/3$ (120°), teku izmjenične struje, vremenski pomaknute za $2\pi/3$ (120°). Kažemo da faza B prostorno zaostaje za fazom A, a struja i_B vremenski kasni za strujom i_A . U svakom se namotu stvaraju pulsirajuća protjecanja:

$$\Theta_{x,tA} = \Theta_{1A} \cos \omega t \sin \frac{\pi}{\tau_p} x$$

$$\Theta_{x,tB} = \Theta_{1B} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Theta_{x,tC} = \Theta_{1C} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{4\pi}{3}\right)$$

koja se mogu rastaviti na dva okretna, direktno i inverzno.

$$\begin{aligned} \Theta_{x,tA} &= \frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) + \frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t\right) \\ \Theta_{x,tB} &= \frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) + \frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{4\pi}{3}\right) + \\ \Theta_{x,tC} &= \frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) + \frac{1}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

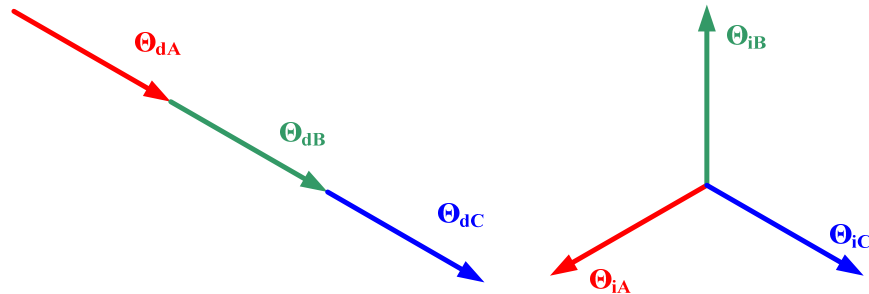
$$\sum \Theta_{x,tABC} = \Theta_d + \Theta_i = \frac{3}{2} \Theta_1 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) + 0$$

Ukupno protjecanje je okretno i sastavljeno od 3 direktna protjecanja svake faze, koja su u svakom trenutku na istom položaju u prostoru, dok inverzno iščezava.

Direktna protjecanja rotiraju ulijevo, u pozitivnom, direktnom smjeru, a inverzna udesno, u negativnom, inverznom smjeru. Struja faze C je maksimalna u trenutku $\omega t = 4\pi/3$.

Vrijedi da ukupno direktno protjecanje prostorno gleda u smjeru upravo one faze u kojoj struja ima maksimalnu vrijednost, dakle u ovom slučaju, u smjeru faze C.

Položaji vektora direktnog i inverznog protjecanja svake faze posebno prikazani su na sljedećoj slici.



Sl. 2. Rješenje zadatka, položaj direktnih i inverznih komponenti vektora protjecanja

To se može pokazati matematički:

os faze A postavljena je prostorno u smjeru $x = \frac{\tau_p}{2}$

pulsirajuće protjecanje faze A u trenutku $\omega t = \frac{4\pi}{3}$ iznosi:

$$\Theta_{x,tA} = \Theta_1 \cos \frac{4\pi}{3} \sin \frac{\pi}{\tau_p} \frac{\tau_p}{2} = -0,5\Theta_1$$

os faze B postavljena je prostorno u smjeru $x = \frac{7\tau_p}{6}$

pulsirajuće protjecanje faze B u trenutku $\omega t = \frac{4\pi}{3}$ iznosi:

$$\Theta_{x,tB} = \Theta_1 \cos \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} \frac{7\tau_p}{6} - \frac{2\pi}{3} \right) = \Theta_1 \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = -0,5\Theta_1$$

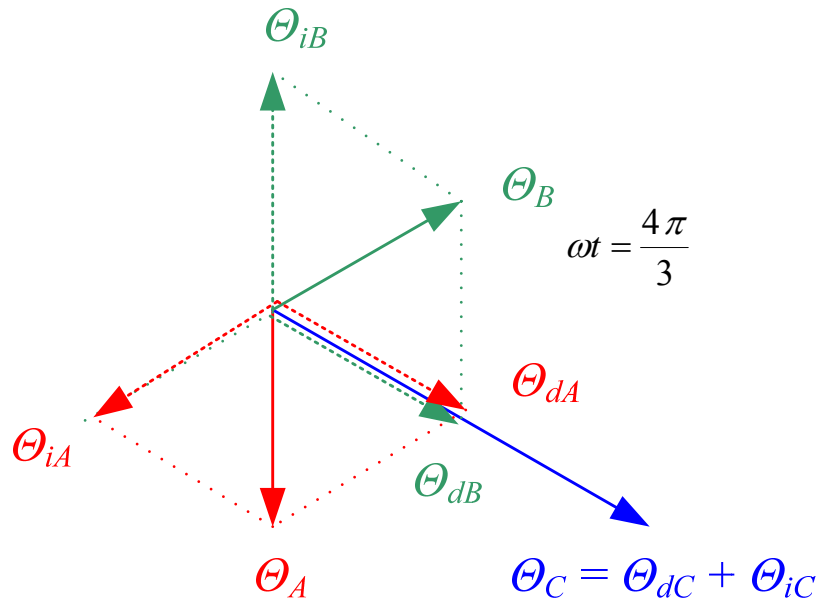
os faze C postavljena je prostorno u smjeru $x = \frac{11\tau_p}{6}$

pulsirajuće protjecanje faze C u trenutku $\omega t = \frac{4\pi}{3}$ iznosi:

$$\Theta_{x,tA} = \Theta_1 \cos \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} \right) \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} \frac{11\tau_p}{6} - \frac{4\pi}{3} \right) = \Theta_1 \cos(0) \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) = \Theta_1$$

Tako dobivamo stanje prikazano na sljedećoj slici. Iz njega se razabire smjer rezultantnog okretnog protjecanja. A svako pulsirajuće protjecanje može se rastaviti na dva okretna.

Primjerice, struja u fazi C stvara direktno i inverzno protjecanje koja gledaju u istom smjeru, struja u fazi B stvara direktno koje gleda u smjeru faze C, a inverzno u smjeru faze A.



Sl. 3. Položaj pulsirajućih protjecanja u zadanom trenutku

Isti dokaz moguće je sprovesti razlažući posebno inverzna i direktna protjecanja.

Sva 3 direktna protjecanja imaju konstantnu amplitudu $\frac{\Theta_1}{2}$, a gibaju se u prostoru istom brzinom gledajući uvijek u istom smjeru.

U trenutku $\omega t = 4\pi/3$ to je:

$$\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\tau_p}{6}, \text{ što je smjer osi faze C u prostoru.}$$

Sva 3 inverzna protjecanja imaju konstantnu amplitudu $\frac{\Theta_1}{2}$, a gibaju se u prostoru istom brzinom zadržavajući prostorni razmak od $4\pi/3$.

Za fazu A, u trenutku $\omega t = 4\pi/3$:

$$\frac{\pi}{\tau_p} x + \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{5\tau_p}{6} = \frac{7\tau_p}{6}, \text{ što je smjer osi faze B u prostoru.}$$

Za fazu B, u trenutku $\omega t = 4\pi/3$:

$$\frac{\pi}{\tau_p} x + \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\tau_p}{2}, \text{ što je smjer osi faze A u prostoru.}$$

Za fazu C, u trenutku $\omega t = 4\pi/3$:

$$\frac{\pi}{\tau_p} x + \frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{11\tau_p}{6}, \text{ što je smjer osi faze C u prostoru.}$$

Ako se znade ponašanje direktnog i inverznog protjecanja, zadatak se rješava praktički jednim potezom, crtajući dijagram. Međutim zbog kompleksne prirode pojma okretnog polja sproveden je i egzaktn matematički dokaz koristeći i pulsirajuće i okretna protjecanja.

- 1.5. Jednofazni namot stvara sinusno raspoređeno pulsirajuće protjecanje amplitude 200A. Prikažite ga s dva okretna protjecanja. Gdje se nalaze i kolike su njihove amplitude u trenutku kada je struja u namotu

- a) maksimalna?
b) jednaka nuli?

a) direktno 0^0 , 100A, inverzno 0^0 , 100A

b) direktno $+90^0$, 100A, inverzno -90^0 , 100A

- 1.6. Obod statora 6-polnog trofaznog asinkronog motora označen je geometrijskim stupnjevima počevši od osi faze A. Gdje će se nalaziti amplituda osnovnog harmonika okretnog protjecanja u trenutku kada je struja:

- a) faze A maksimalna?
b) faze B maksimalna?
c) faze C 50% maksimalne?

Kut izraziti u geometrijskim i električnim stupnjevima.

Os (amplituda) protjecanja se nađe u osi namota uvijek u trenutku kada struja tog namota ima maksimalnu vrijednost.

a) $i_A = I_m = I\sqrt{2}$, $\alpha_g = \alpha_{el} = 0^\circ$

b) $i_B = I_m = I\sqrt{2}$, $\alpha_{el} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\alpha_g = \frac{1}{p}\alpha_{el} = \frac{1}{3}120 = 40^\circ$

c) $i_C = \frac{I_m}{2} = \frac{I\sqrt{2}}{2}$, $\alpha_{el} = \frac{2\pi}{2} = 180^\circ$, $\alpha_g = \frac{1}{p}\alpha_{el} = \frac{1}{3}180 = 60^\circ$

- 1.7. Koliki se napon inducira u vodiču na obodu stroja promjera 1 m i dužine željeza 1 m, uz amplitudu indukcije u rasporu 1 T, i brzinu vrtnje 100 o/min?

$$D = 1 \text{ m}$$

$$l = 1 \text{ m}$$

$$B = 1, \text{ T}$$

$$n = 100 \text{ o/min}$$

Rješenje:

$$E = Blv$$

$$v = \omega \frac{D}{2} = \frac{n\pi}{30} \frac{D}{2} = 5,24 \text{ m/s}$$

$$E_m = Blv = \boxed{5,24 \text{ V}}$$

$$E_{ef} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \boxed{3,7 \text{ V}}$$

- 1.8. U simetričnom trofaznom namotu asinkronog stroja teku, po amplitudi, nesimetrične trofazne struje sljedećeg vremenskog oblika:

$$i_A = 140 \cos \omega t \quad i_B = 100 \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad i_C = 100 \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right)$$

Ako je amplituda protjecanja faza s manjom strujom označena sa 100%, kolike su amplitude direktnog i inverznog protjecanja cijelog sustava? Izvedite izraz za resultantno protjecanje.

$$\begin{aligned} \Theta_{x,t A} &= \Theta_{t A} \sin \frac{\pi}{\tau_p} x = \Theta_A \cos \omega t \cdot \sin \frac{\pi}{\tau_p} x = \frac{\Theta_A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) \\ &\quad + \frac{\Theta_A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t \right) \\ \Theta_{x,t B} &= \Theta_{t B} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{2\pi}{3} \right) = \Theta_B \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\Theta_B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) \\ &\quad + \frac{\Theta_B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \\ \Theta_{x,t C} &= \Theta_{t C} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{4\pi}{3} \right) = \Theta_C \cos \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \frac{4\pi}{3} \right) = \frac{\Theta_C}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) \\ &\quad + \frac{\Theta_C}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \Theta_{x,t} &= \Theta_{x,t A} + \Theta_{x,t B} + \Theta_{x,t C} = \frac{\Theta_A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) + \frac{\Theta_A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t \right) + \frac{\Theta_B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) + \\ &\quad + \frac{\Theta_B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) + \frac{\Theta_C}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) + \frac{\Theta_C}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \Theta_{x,t} &= \left(\frac{\Theta_A}{2} + \frac{\Theta_B}{2} + \frac{\Theta_C}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) + \frac{\Theta_A}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t \right) + \frac{\Theta_B}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \\ &\quad + \frac{\Theta_C}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \Theta_{x,t} &= \left(\frac{140}{2} + \frac{100}{2} + \frac{100}{2} \right) \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t \right) + \frac{140}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t \right) + \frac{100}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{4\pi}{3} \right) \\ &\quad + \frac{100}{2} \sin \left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\Theta_{x,t} = \Theta_d + \Theta_i = 170 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) + 20 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t\right)$$

- 1.9. Zadane su struje u sve tri faze stroja. Koliko iznosi resultantno protjecanje?

$$i_A = 20 \cdot \cos \omega t, \quad i_B = 12 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_C = 20 \cdot \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

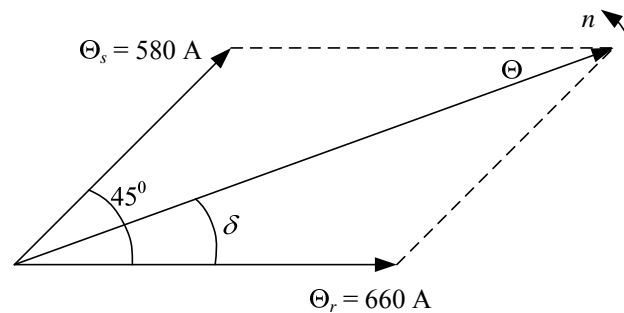
Prostorni pomak pojedinih faza je $i_A \Rightarrow 0 \quad i_B \Rightarrow \frac{2\pi}{3} \quad i_C \Rightarrow \frac{4\pi}{3}$.

$$\Theta_{x,t} = \Theta_d + \Theta_i = 26 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x - \omega t\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x + \omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- 1.10. Koliko u postocima treba povećati protjecanje da bi zadržali istu indukciju u zračnom rasporu ako se zračni raspor poveća od 0,25 na 0,3 mm? Zanimariti zasićenje u željezu.

$$\left. \begin{aligned} \Theta &= H_\delta \delta = \frac{B}{\mu_0} \delta \\ \Theta' &= \frac{B}{\mu_0} \delta' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Theta' - \Theta}{\Theta} = \left(\frac{\Theta'}{\Theta} - 1 \right) = \frac{\frac{B}{\mu_0} \delta'}{\frac{B}{\mu_0} \delta} - 1 = \frac{\delta'}{\delta} - 1 = \frac{0,3}{0,25} - 1 = \boxed{0,2, \text{ tj. } 20\%}$$

- 1.11. Sinusno raspoređena protjecanja 2-polnog stroja unutarnjeg promjera statora $D = 0,466$ m i aksijalne duljine $l = 0,235$ m predočena su vektorima prema slici. Koliki moment razvija stroj? Da li radi kao generator ili motor? Zračni raspor je konstantne duljine $\delta = 1,5$ mm. Smjer vrtnje rotora je pozitivan.



$$\Theta = \sqrt{\Theta_r^2 + \Theta_s^2 - 2\Theta_r \Theta_s \cos 135^\circ} = \sqrt{660^2 + 580^2 - 2 \cdot 660 \cdot 580 \cdot \cos 135^\circ} = 1146 \text{ A}$$

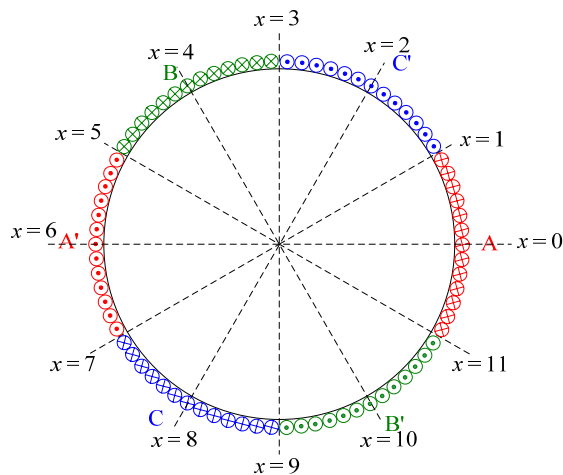
$$B = \frac{\mu_0}{\delta} \Theta = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{0,0015} \cdot 1146 = 0,96 \text{ T}$$

$$\delta = \arctan \frac{\Theta_s \sin 45^\circ}{\Theta_r + \Theta_s \cos 45^\circ} = \arctan \frac{580 \cdot \sin 45^\circ}{660 + 580 \cdot \cos 45^\circ} = 20,97^\circ$$

$$M_r = \frac{Dp\pi l}{2} B\Theta_r \sin \delta = \frac{0,466 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 0,235}{2} \cdot 0,96 \cdot 660 \cdot \sin 20,97^\circ = 39 \text{ Nm}$$

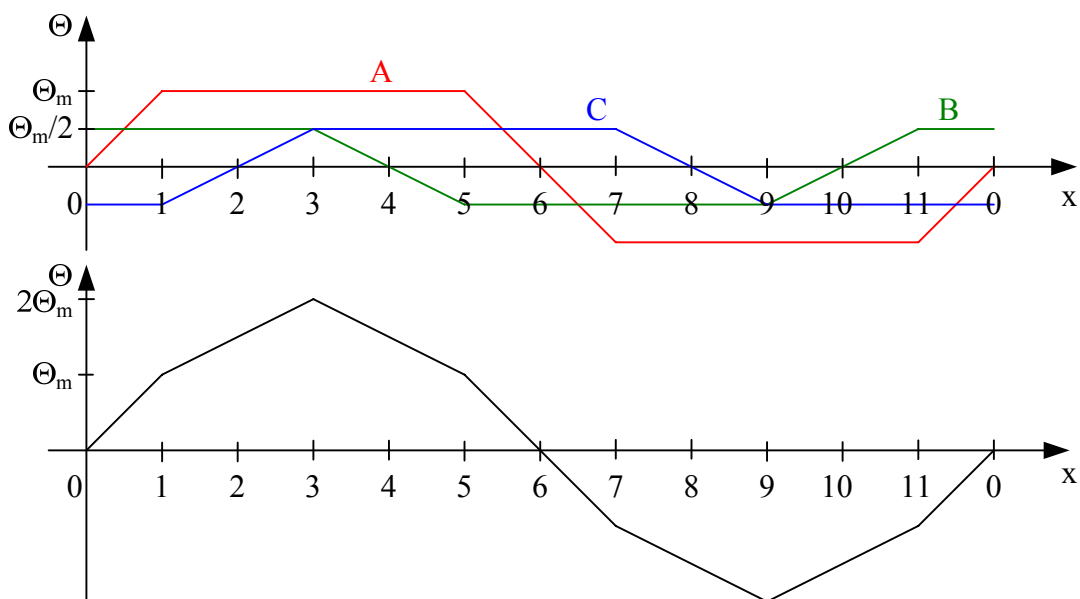
Smjer sile na rotor nastoji protjecanje rotora dovesti u os resultantnog protjecanja. Prema slici smjer djelovanja momenta se podudara sa smjerom vrtnje rotora, stoga stroj radi kao motor.

- 1.12. Trofazni namot zauzima obod stroja prema slici. Treba nacrtati protjecanje faza A, B i C te ukupno protjecanje u trenutku kada je struja faze A maksimalna. Pretpostavite da je struja jednoliko raspoređena unutar svake zone.



$$i_a = I_m \cos(\omega t), \quad i_b = I_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad i_c = I_m \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$t = 0 \Rightarrow i_a = I_m, \quad i_b = -\frac{I_m}{2}, \quad i_c = -\frac{I_m}{2}$$



- 1.13. Amplituda sinusno raspoređenog pulsirajućeg protjecanja jedne faze 3-faznog namota statora kad u njoj teče nazivna struja iznosi 250 A. Ako u sve 3 faze teku struje trofaznog sistema iznosa nazivne struje, kolika će biti amplituda okretnog protjecanja koje stvaraju?

$$\Theta_{\text{rez}} = 375 \text{ A}$$

- 1.14. Kolika je kutna brzina, a kolika brzina vrtnje (o/min) okretnog protjecanja 3-faznog 6-polnog namota napajanog iz mreže 50 Hz?

$$n = 1000 \text{ o/min}$$

$$\omega_m 104,72 \text{ rad/s}$$

- 1.15. Kolika je brzina vrtnje, a kolika kutna brzina okretnog polja 2-faznog 4-polnog stroja napajanog iz mreže 50 Hz?

$$n = 1500 \text{ o/min}$$

$$\omega_m 157,08 \text{ rad/s}$$

- 1.16. Amplituda sinusno raspoređenog pulsirajućeg protjecanja jedne faze 2-faznog namota statora iznosi 150 A. Ako u oba fazna namota teku 2-fazne struje isto tolikog iznosa, kakvo protjecanje rezultira, i kolika mu je amplituda?

$$\Theta_{\text{rez}} = 150 \text{ A}$$

- 1.17. U simetričnom 3-faznom namotu teku 3-fazne struje fazno razmaknute za 120° , ali je zbog nesimetrije napona mreže struja u jednoj fazi za 20% veća. Ako se amplituda protjecanja jedne faze s manjom strujom označi sa 100%, koliko je direktno i inverzno protjecanje čitavog sistema?

$$\Theta_d = 160 \%$$

$$\Theta_i = 10 \%$$

- 1.18. Ako označimo obod 6-polnog 3-faznog statora geometrijskim stupnjevima počev od osi faze 1, gdje će se nalaziti amplituda 3-faznog okretnog protjecanja u času kad je struja faze 1: a) maksimalna, b) nula, c) minimalna?

$$\text{a) } 0^\circ, \text{ b) } 30^\circ, \text{ c) } 60^\circ$$

- 1.19. Trofazni namot na statoru provrta 40 cm uzbuđen strujama frekvencije 50 Hz stvara okretno polje. Koliki put prevale amplituda okretnog protjecanja u rasporu kroz vrijeme potrebno da struja prijeđe 1 poluperiodu, ako je stroj: a) 2-polni, b) 6-polni?

$$\text{a) } \tau_p = 0,628 \text{ m}$$

$$\text{b) } \tau_p = 0,209 \text{ m}$$

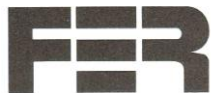
- 1.20. Koliki je geometrijski kut koji prevali amplituda okretnog polja uzbuđenog strujama frekvencije 50 Hz u vremenu trajanja 1 periode struje, ako je stroj: a) 2-polni, b) 4-polni?

a) $\alpha_g = 360^\circ$

b) $\alpha_g = 180^\circ$

- 1.21. Ako sinkroni stroj radi s kutom opterećenja 40° , koliki je stvarni kut zakreta rotora (geometrijski kut opterećenja), ako je sinkrona brzina stroja 300 o/min, frekvencija 60 Hz?

$$\alpha_g = 3,3^\circ$$



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
F A K U L T E T
ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA
Z A V O D Z A
ELEKTROSTROJARSTVO
I AUTOMATIZACIJU

TEORIJA ELEKTRIČNIH STROJEVA I TRANSFORMATORA

Zadaci za vježbu:

DINAMIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Autori:

Doc. dr. sc. **Damir Žarko**

Stjepan Stipetić, dipl. ing.

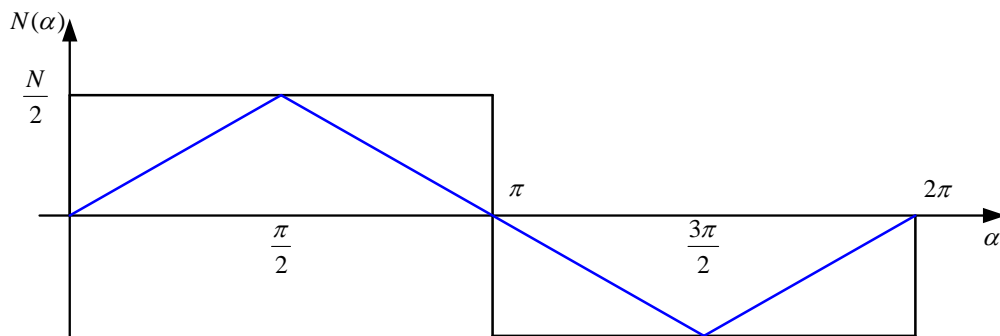
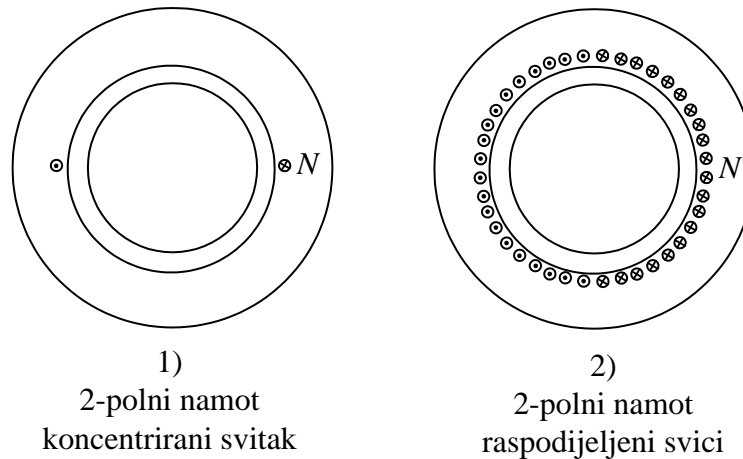
Zagreb, siječanj 2010.

1. FUNKCIJA NAMOTA

1.1. Za slučajeve 2-polnog namota s koncentriranim svitkom i 2-polnog namota sa svicima jednoliko raspoređenima po obodu stroja izračunajte:

- Omjer vlastitih induktiviteta.
- Omjer vlastitih induktiviteta uzevši u obzir samo prvi harmonik funkcije namota.
- Omjer struja potrebnih za istu maksimalnu vrijednost magnetske indukcije u zračnom rasporu

Svaki namot ima N zavoja spojenih u seriju. Duljina tračnog raspora je δ , radijus je r , a duljina jezgre znosi l . Skicirajte funkcije namota za oba slučaja.



Rješenje:

$$a) L_1 = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \int_0^{2\pi} (N_1(\alpha))^2 d\alpha = 4 \frac{\mu_0 r l}{\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N}{2}\right)^2 d\alpha = \frac{\mu_0 r l}{\delta} N^2 \frac{\pi}{2}$$

$$L_2 = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \int_0^{2\pi} (N_2(\alpha))^2 d\alpha = 4 \frac{\mu_0 r l}{\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{N}{\pi} \alpha\right)^2 d\alpha = \frac{\mu_0 r l}{\delta} N^2 \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{\frac{\mu_0 r l}{\delta} N^2 \frac{\pi}{2}}{\frac{\mu_0 r l}{\delta} N^2 \frac{\pi}{6}} = 3$$

$$\text{b) } N_{1,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N_1(\alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{N}{2} \sin \alpha d\alpha = \frac{2N}{\pi} - \text{osnovni harmonik}$$

$$N_{2,1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N_2(\alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{N}{\pi} \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{4N}{\pi^2} - \text{osnovni harmonik}$$

$$L_{1,1} = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \int_0^{2\pi} (N_{1,1} \sin \alpha)^2 d\alpha = \frac{\mu_0 r l}{\delta} N_{1,1}^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \frac{\mu_0 r l}{\delta} N_{1,1}^2 \pi = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \left(\frac{2N}{\pi} \right)^2 \pi$$

$$L_{1,1} = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \frac{4N^2}{\pi}$$

$$L_{2,1} = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \int_0^{2\pi} (N_{2,1} \sin \alpha)^2 d\alpha = \frac{\mu_0 r l}{\delta} N_{2,1}^2 \pi = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \left(\frac{4N}{\pi^2} \right)^2 \pi = \frac{\mu_0 r l}{\delta} \frac{16N^2}{\pi^3}$$

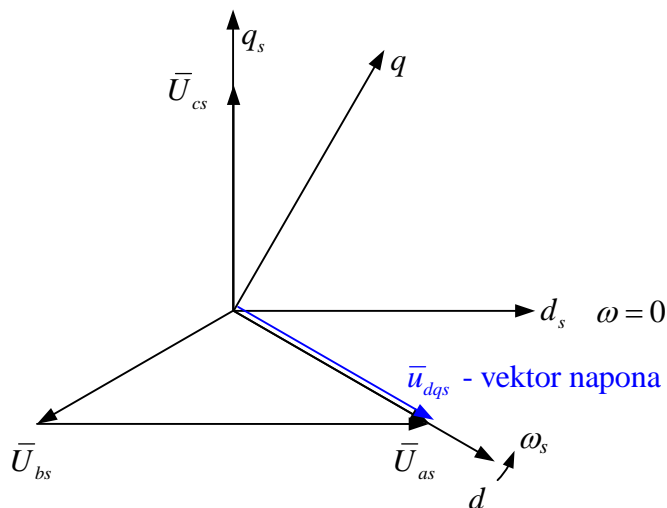
$$\frac{L_{1,1}}{L_{2,1}} = \frac{\frac{\mu_0 r l}{\delta} \frac{4N^2}{\pi}}{\frac{\mu_0 r l}{\delta} \frac{16N^2}{\pi^3}} = \frac{\pi^2}{4}$$

c) Budući da funkcije namota u oba slučaja imaju iste maksimalne vrijednosti, potrebna je ista struja da se postigne ista maksimalna vrijednost magnetske indukcije B .

$$\frac{i_1}{i_2} = 1$$

2. ASINKRONI STROJ

- 2.1. Izračunajte kompleksni vektor simetričnog trofaznog sustava napona statora asinkronog motora 400 V, 50 Hz u statorskom koordinatnom sustavu i sustavu koji rotira sinkronom brzinom vrtnje. Također izrazite d i q komponente vektora napona. Fazor napona faze A zadan je izrazom $U_{as} = U_m e^{-j\pi/6}$ gdje je U_m maksimalna vrijednost osnovnog harmonika faznog napona. Uzmite da je u trenutku $t = 0$ d -os rotirajućeg koordinatnog sustava pomaknuta za -30° u odnosu na d -os mirujućeg koordinatnog sustava (koja je pod 0°).



Rješenje:

a) statorski koordinatni sustav

Prema slajdu 36 i 37 sa predavanja:

$$\bar{u}_{dqs}^s = \bar{U}_{sp} e^{j\omega_s t} + \bar{U}_{sn}^* e^{-j\omega_s t}$$

$$\bar{U}_{sp} = \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a\bar{U}_{bs} + a^2\bar{U}_{cs})$$

$$\bar{U}_{sn} = \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a^2\bar{U}_{bs} + a\bar{U}_{cs}) = 0 \text{ za simetrični sustav}$$

$$\bar{U}_{as} = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}}; \quad \bar{U}_{bs} = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}; \quad \bar{U}_{cs} = \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

$$U = 400 \text{ V}$$

$$\bar{U}_{sp} = \frac{1}{3} \sqrt{2} \frac{U}{\sqrt{3}} e^{-j\frac{\pi}{6}} \left(1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}} e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}}$$

$$\bar{u}_{dqs}^s = \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} e^{j\omega_s t} = \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{j(\omega_s t - \frac{\pi}{6})} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 400 e^{j(\omega_s t - \frac{\pi}{6})} = 326,6 e^{j(\omega_s t - \frac{\pi}{6})} \text{ V}$$

$$\bar{u}_{dqs}^s = u_{ds}^s + j u_{qs}^s$$

$$\begin{aligned} u_{ds}^s &= 326,6 \cos\left(\omega_s t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ V} \\ u_{qs}^s &= 326,6 \sin\left(\omega_s t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ V} \end{aligned}$$

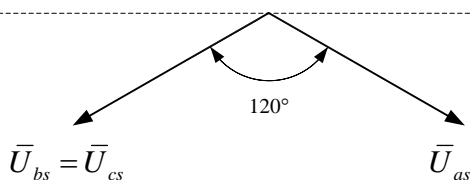
b) sinkrono rotirajući koordinatni sustav

Transformacija koordinata

$$\bar{u}_{dqs} = \bar{u}_{dqs}^s e^{-j\left(\omega_s t - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{j\left(\omega_s t - \frac{\pi}{6}\right)} e^{-j\left(\omega_s t - \frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}} U = 326,6 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} u_{ds} &= 326,6 \text{ V} \\ u_{qs} &= 0 \end{aligned}$$

2.2. Ponovite prethodni zadatak u slučaju kada je $\bar{U}_{ab} = \bar{U}_{ac}$ i $\bar{U}_{bc} = 0$. Fazor \bar{U}_a nalazi se pod -30° . U rotirajućem koordinatnom sustavu postavite direktnu komponentu napona u d os.



Rješenje:

a) statorski koordinatni sustav

$$\bar{U}_{as} = \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}}; \quad \bar{U}_{bs} = \bar{U}_{cs} = \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}}$$

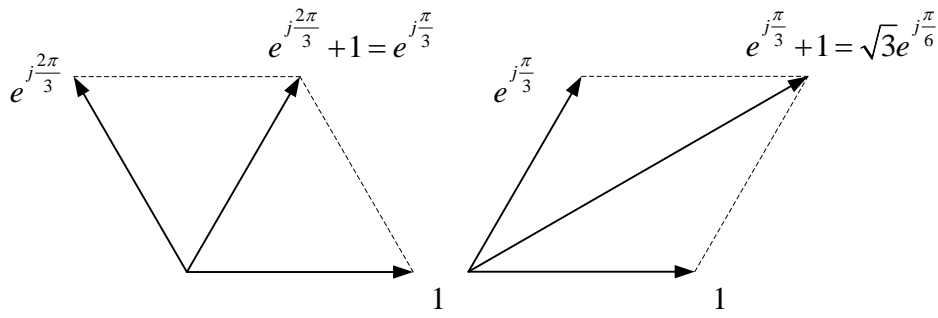
$$\bar{u}_{dqs}^s = \bar{U}_{sp} e^{j\omega_s t} + \bar{U}_{sn}^* e^{-j\omega_s t}$$

$$\bar{U}_{sp} = \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a \bar{U}_{bs} + a^2 \bar{U}_{cs}) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \left(1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{4\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \left(1 + 1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3} U = \frac{\sqrt{2}}{3} 400 = 188,56 \text{ V}$$

$$\bar{U}_{sn} = \frac{1}{3} (\bar{U}_{as} + a^2 \bar{U}_{bs} + a \bar{U}_{cs}) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \left(1 + e^{j\frac{4\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \left(1 + e^{j\frac{2\pi}{3}} + 1 \right) = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} U e^{-j\frac{\pi}{6}} \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3} U = \frac{\sqrt{2}}{3} 400 = 188,56 \text{ V}$$



$$\bar{u}_{dq_s}^s = \bar{U}_{sp} e^{j\omega_s t} + \bar{U}_{sn}^* e^{-j\omega_s t} = 188,56 \cdot e^{j\omega_s t} + 188,56 \cdot e^{-j\omega_s t} = 327,12 \cos(\omega_s t) \text{ V}$$

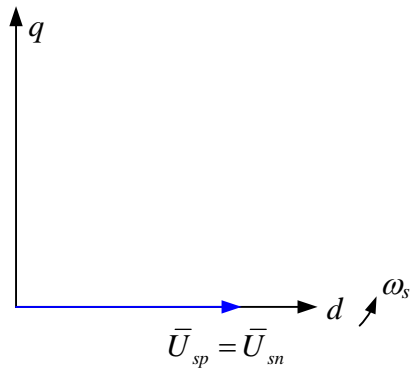
$$\bar{u}_{dq_s}^s = u_{ds}^s + j u_{qs}^s$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_{ds}^s &= 327,12 \cos(\omega_s t) \text{ V} \\ u_{qs}^s &= 0 \text{ V} \end{aligned}}$$

b) sinkrono rotirajući koordinatni sustav

$$\bar{u}_{dq_s}^s = \bar{u}_{dq_s}^s e^{-j\omega_s t} = (188,56 \cdot e^{j\omega_s t} + 188,56 \cdot e^{-j\omega_s t}) e^{-j\omega_s t} = 188,56 \cdot (1 + e^{-2j\omega_s t})$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_{ds}^s &= 188,56 [1 + \cos(2\omega_s t)] \text{ V} \\ u_{qs}^s &= -188,56 \sin(2\omega_s t) \text{ V} \end{aligned}}$$



- 2.3. Asinkroni motor 10 kW, 400 V, 50 Hz, 970 o/min, spoj Y, $\cos\varphi = 0,82$, $\eta = 0,92$ ima parametre nadomjesne sheme: $R_1 = 0,4 \Omega$, $R_2' = 0,5 \Omega$, $X_{\sigma 1} = 1,1 \Omega$, $X_{\sigma 2}' = 1,0 \Omega$, $X_m = 60 \Omega$. Ako nastane prekid u jednoj fazi motora, koliki moment bi motor razvijao i koliku struju iz mreže bi uzimao pri nazivnoj brzini vrtnje? Da li motor smije trajno raditi pri nazivnoj brzini vrtnje ako se napaja iz trofazne mreže uz prekid jedne faze?

Rješenje:

Metoda simetričnih komponenata

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$U_a = U_{ap} + U_{an} + U_{a0}$$

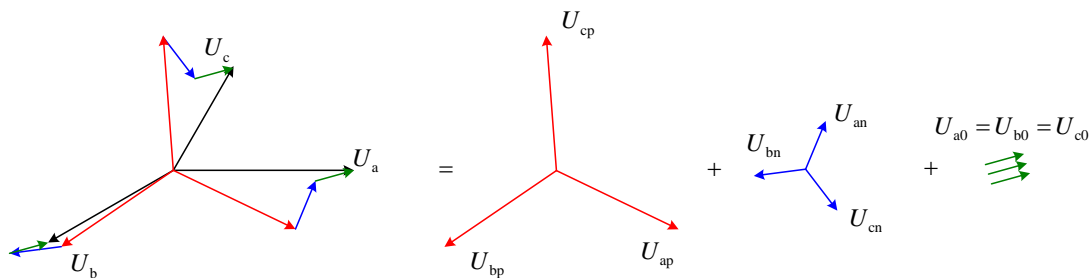
$$U_b = U_{bp} + U_{bn} + U_{b0} = a^2 U_{ap} + a U_{an} + U_{a0}$$

$$U_c = U_{cp} + U_{cn} + U_{c0} = a U_{ap} + a^2 U_{an} + U_{a0}$$

$$U_{ap} = \frac{1}{3} [U_a + a U_b + a^2 U_c]$$

$$U_{an} = \frac{1}{3} [U_a + a^2 U_b + a U_c]$$

$$U_{a0} = \frac{1}{3} [U_a + U_b + U_c]$$



$$I_c = -I_b$$

$$I_a = 0$$

$$I_{a0} = 0$$

$$I_a = I_{ap} + I_{an} = 0 \rightarrow I_{ap} = -I_{an}$$

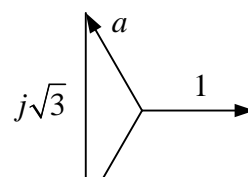
$$U = U_{ap} - U_{an} = \frac{1}{3} [U_a + a U_b + a^2 U_c] - \frac{1}{3} [U_a + a^2 U_b + a U_c] = \frac{1}{3} (a - a^2) (U_b - U_c)$$

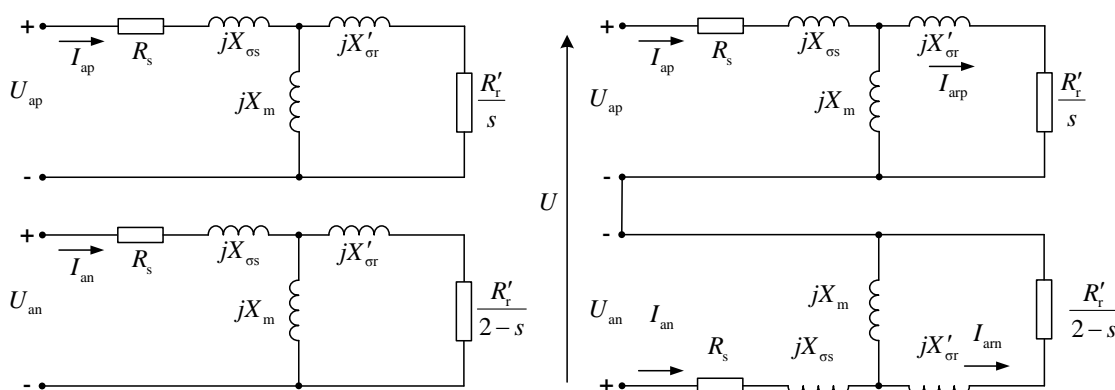
$$U = \frac{1}{3} j\sqrt{3} U_{bc} = j \frac{U_{bc}}{\sqrt{3}}$$

$$I_{ap} = \frac{1}{3} [I_a + a I_b + a^2 I_c] = \frac{1}{3} (a - a^2) I_b = j \frac{\sqrt{3}}{3} I_b = j \frac{I_b}{\sqrt{3}}$$

$$s_n = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{1000 - 970}{1000} = 0,03$$

$$s_p = s \quad s_n = \frac{-n_s - n}{-n_s} = \frac{n_s + n}{n_s} = \frac{2n_s - (n_s - n)}{n_s} = 2 - s$$





$$Z_p = R_s + jX_{\sigma s} + \frac{jX_m \left(jX'_{\sigma r} + \frac{R'_r}{s_n} \right)}{jX_m + jX'_{\sigma r} + \frac{R'_r}{s_n}} = 0,4 + j1,1 + \frac{j60 \left(j1 + \frac{0,5}{0,03} \right)}{j60 + j1 + \frac{0,5}{0,03}} = 16,6 \angle 21,87^\circ \Omega$$

$$Z_n = R_s + jX_{\sigma s} + \frac{jX_m \left(jX'_{\sigma r} + \frac{R'_r}{2-s_n} \right)}{jX_m + jX'_{\sigma r} + \frac{R'_r}{2-s_n}} = 0,4 + j1,1 + \frac{j60 \left(j1 + \frac{0,5}{2-0,03} \right)}{j60 + j1 + \frac{0,5}{2-0,03}} = 2,182 \angle 72,79^\circ \Omega$$

$$U = j \frac{U_{bc}}{\sqrt{3}} = j \frac{400}{\sqrt{3}} = 230,94 \angle 90^\circ \text{ V}$$

$$I_{ap} = \frac{U}{Z_p + Z_n} = \frac{230,94 \angle 90^\circ}{16,6 \angle 21,87^\circ + 2,182 \angle 72,79^\circ} = 12,79 \angle 62,75^\circ \text{ A}$$

$$I_{an} = -I_{ap} = 12,79 \angle -117,25^\circ \text{ A}$$

$$I_{a2p} = I_{ap} \frac{jX_m}{jX_m + jX'_{\sigma r} + \frac{R'_r}{s_n}}$$

$$M_p = m |I_{a2p}|^2 \frac{R'_r}{s_n \omega_s}$$

$$|I_{a2p}| = |I_{ap}| \frac{X_m}{\sqrt{\left(\frac{R'_r}{s_n} \right)^2 + (X_m + X'_{\sigma r})^2}} = 12,79 \frac{60}{\sqrt{\left(\frac{0,5}{0,03} \right)^2 + (60+1)^2}} = 12,14 \text{ A}$$

$$M_p = 3 \cdot 12,14^2 \frac{0,5}{0,03 \cdot 1000 \frac{\pi}{30}} = 70,33 \text{ Nm}$$

$$|I_{am}| = |I_{an}| \frac{X_m}{\sqrt{\left(\frac{R'_r}{2-s_n} \right)^2 + (X_m + X'_{\sigma r})^2}} = 12,79 \frac{60}{\sqrt{\left(\frac{0,5}{2-0,03} \right)^2 + (60+1)^2}} = 12,58 \text{ A}$$

$$M_n = m |I_{an}|^2 \frac{R'_r}{(2-s_n)\omega_s} = 3 \cdot 12,58^2 \frac{0,5}{(2-0,03) \cdot 1000 \frac{\pi}{30}} = 1,15 \text{ Nm}$$

$$M = M_p - M_n = 70,33 - 1,15 = 69,18 \text{ Nm}$$

$$I_a = I_{ap} + I_{an} = 0$$

$$I_b = \frac{\sqrt{3}}{j} I_{ap} = \sqrt{3} \angle -90^\circ \cdot 12,79 \angle 62,75^\circ = 22,16 \angle -27,25^\circ \text{ A}$$

$$I_c = -I_b = 22,16 \angle 152,75^\circ \text{ A}$$

$$I_n = \frac{P_{2n}}{\sqrt{3} U_n \cos \varphi \eta} = \frac{10 \cdot 10^3}{\sqrt{3} \cdot 400 \cdot 0,82 \cdot 0,92} = 19,13 \text{ A}$$

$$M_n = \frac{P_{2n}}{n_n \pi} 30 = \frac{10 \cdot 10^3}{970 \pi} 30 = 98,45 \text{ Nm}$$

$$P_2 = M \omega = 69,18 \cdot \frac{970 \pi}{30} = 7027 \text{ W}$$

$$P_1 = 3 \Re(U_{ap} I_{ap}^*) + 3 \Re(U_{ai} I_{ai}^*) = 3 \Re[(U_{ap} - U_{ai}) I_{ap}^*] = 3 \Re(U I_{ap}^*) \\ = 3 \Re(230,94 \angle 90^\circ \cdot 12,79 \angle -62,75^\circ) = 7878 \text{ W}$$

$$U_{ap} = I_{ap} Z_p = 12,79 \angle 62,75^\circ \cdot 16,6 \angle 21,87^\circ = 212,3 \angle 84,62^\circ \text{ V}$$

$$U_{an} = I_{an} Z_n = 12,79 \angle -117,25^\circ \cdot 2,182 \angle 72,79^\circ = 27,9 \angle -44,46^\circ \text{ V}$$

$$U_b = a^2 U_{ap} + a U_{an} = 1 \angle 240^\circ \cdot 212,3 \angle 84,62^\circ + 1 \angle 120^\circ \cdot 27,9 \angle -44,46^\circ = 204,03 \angle -28,04^\circ \text{ V}$$

$$U_c = a U_{ap} + a^2 U_{an} = 1 \angle 120^\circ \cdot 212,3 \angle 84,62^\circ + 1 \angle 240^\circ \cdot 27,9 \angle -44,46^\circ = 240 \angle -156,4^\circ \text{ V}$$

$$P_b = \Re(U_b I_b^*) = \Re(204,03 \angle -28,04^\circ \cdot 22,16 \angle 27,25^\circ) = 4520 \text{ W}$$

$$P_c = \Re(U_c I_c^*) = \Re(240 \angle -156,4^\circ \cdot 22,16 \angle -152,75^\circ) = 3358 \text{ W}$$

$$P_a = 0$$

$$P_1 = P_a + P_b + P_c = 7878 \text{ W}$$

2.4. Asinkroni motor s nazivnim podacima 100 kW, 400 V, 50 Hz, 4 pola ima parametre nadomjesne sheme zadane u jediničnim vrijednostima: $r_s = 0,015$, $x_{\sigma s} = 0,09$, $r'_r = 0,017$, $x'_{\sigma r} = 0,09$, $x_m = 3,2$. Pri nazivnom naponu i frekvenciji odredite:

- klizanje, brzinu vrtnje, moment, struju statora i faktor snage za nazivnu radnu točku. Izrazite brzinu vrtnje, moment i struju u jediničnim vrijednostima i stvarnim jedinicama,
- klizanje kod kojeg se postiže maksimalni moment i iznos maksimalnog momenta,
- struju i moment kratkog spoja izražene u jediničnim vrijednostima i relativno prema nazivnim vrijednostima,
- gubitke u statoru i rotoru u p.u. i W te korisnost u nazivnoj radnoj točki,
- klizanje pri nazivnom momentu u generatorskom režimu rada, struju statora i snagu na osovini stroja.

U stacionarnom stanju za bazne vrijednosti napona i struja se mogu koristiti efektivne vrijednosti umjesto maksimalnih kao u slučaju općeg dinamičkog modela.

Rješenje:

$$P_B = P_{2n} = 100 \text{ kW}$$

$$U_B = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230 \text{ V}$$

$$I_B = \frac{P_B}{3U_B} = \frac{100 \cdot 10^3}{3 \cdot 230} = 144,93$$

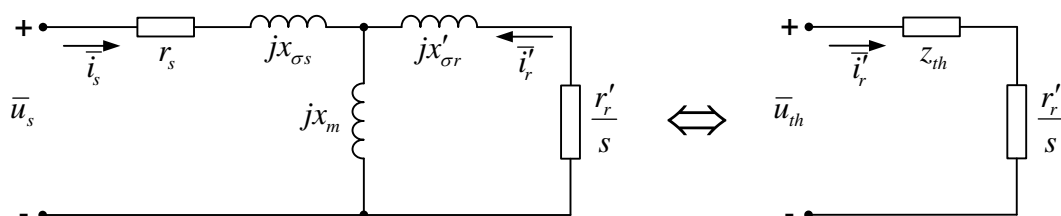
$$\omega_B = 2\pi f = 2\pi \cdot 50 = 314,16 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{mB} = \frac{\omega_B}{p} = \frac{314,16}{2} = 157,08 \text{ rad/s}$$

$$Z_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{3U_{fn}^2}{P_{2n}} = \frac{3 \left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{100 \cdot 10^3} = 1,6 \Omega$$

$$M_B = \frac{P_B}{\omega_{mB}} = p \frac{P_n}{\omega_s} = 2 \frac{100 \cdot 10^3}{2\pi 50} = 636,6 \text{ Nm}$$

a) Za rješavanje nadomjesne sheme korisno je upotrijebiti Theveninov teorem.



$$z_{th} = jx'_{\sigma r} + \frac{jx_m(r_s + jx_{\sigma s})}{jx_m + r_s + jx_{\sigma s}} = j0,09 + \frac{j3,2(0,015 + j0,09)}{j3,2 + 0,015 + j0,09} = 0,0142 + j0,1776 = 0,178 \angle 85,43^\circ$$

$$\bar{u}_s = 1 \angle 0^\circ$$

$$\bar{u}_{th} = \frac{\bar{u}_s}{r_s + j(x_{\sigma s} + x_m)} jx_m = \frac{1 \angle 0^\circ}{0,015 + j(0,09 + 3,2)} j3,2 = 0,9726 \angle 0,26^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} M_n &= |\vec{i}'_r|^2 \frac{r'_r}{s_n} = \frac{1}{1-s_n} \\ |\vec{i}'_r| &= \frac{|\vec{u}_{th}|}{\sqrt{\left(r_{th} + \frac{r'_r}{s_n}\right)^2 + x_{th}^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{|\vec{u}_{th}|^2}{\left(r_{th} + \frac{r'_r}{s_n}\right)^2 + x_{th}^2} \frac{r'_r}{s_n} = \frac{1}{1-s_n}$$

$$s_n^2 \left(r_{th}^2 + x_{th}^2 + |\vec{u}_{th}|^2 r'_r \right) + s_n \left(2r_{th} r'_r - |\vec{u}_{th}|^2 r'_r \right) + r_r'^2 = 0$$

$$s_n^2 (0,0142^2 + 0,1776^2 + 0,9726^2 \cdot 0,017) + s_n (2 \cdot 0,0142 \cdot 0,017 - 0,9726^2 \cdot 0,017) + 0,017^2 = 0$$

$$0,0478s_n^2 - 0,0156s_n + 2,89 \cdot 10^{-4} = 0 \Rightarrow \boxed{s_n = 0,0197}$$

$$M_n = \frac{1}{1-s_n} = \frac{1}{1-0,0197} = \boxed{1,02}$$

$$\omega_{mn} = 1 - s_n = 1 - 0,0197 = \boxed{0,9803}$$

$$z = r_s + jx_{\sigma s} + \frac{jx_m \left(jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_n} \right)}{jx_m + jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_n}} = 0,015 + j0,09 + \frac{j3,2 \left(j0,09 + \frac{0,017}{0,0197} \right)}{j3,2 + j0,09 + \frac{0,017}{0,0197}} = 0,8657 \angle 25,88^\circ$$

$$|\vec{i}_{sn}| = \frac{|\vec{u}_s|}{|z|} = \frac{1}{0,8657} = \boxed{1,155}$$

$$\cos \varphi_n = \cos 25,88^\circ = \boxed{0,9}$$

$$\omega_{mn} = \omega_{mB} \omega_{mn(pu)} = 157,08 \cdot 0,9803 = \boxed{153,98 \text{ rad/s}} \Rightarrow n = \omega_{mn} \frac{30}{\pi} = 153,98 \frac{30}{\pi} = \boxed{1470,45 \text{ o/min}}$$

$$M_n = M_B M_{n(pu)} = 636,6 \cdot 1,02 = \boxed{649,3 \text{ Nm}}$$

$$|\vec{I}_{sn}| = I_B |\vec{i}_{sn}| = 144,93 \cdot 1,155 = \boxed{167,4 \text{ A}}$$

b) Maksimalni (prekretni) moment se postiže kada je zadovoljen uvjet

$$\frac{r'_r}{s_{pr}} = |z_{th}| \Rightarrow s_{pr} = \frac{r'_r}{|z_{th}|} = \frac{0,017}{0,178} = \boxed{0,0955}$$

$$|\vec{i}'_r| = \frac{|\vec{u}_{th}|}{\sqrt{\left(r_{th} + \frac{r'_r}{s_{pr}}\right)^2 + x_{th}^2}} = \frac{0,9726}{\sqrt{\left(0,0142 + \frac{0,017}{0,0955}\right)^2 + 0,1776^2}} = 3,716$$

$$M_{pr} = |\vec{i}'_r|^2 \frac{r'_r}{s_{pr}} = 3,716^2 \frac{0,017}{0,0955} = \boxed{2,46}$$

c) Kratki spoj $s = 1$ $|\vec{i}'_r| = \frac{|\vec{u}_{th}|}{\sqrt{(r_{th} + r'_r)^2 + x_{th}^2}} = \frac{0,9726}{\sqrt{(0,0142 + 0,017)^2 + 0,1776^2}} = \boxed{5,394}$

$$M_k = |\vec{i}'_r|^2 r'_r = 5,394^2 \cdot 0,017 = \boxed{0,4946}$$

$$\frac{M_k}{M_n} = \frac{0,4946}{1,02} = \boxed{0,485}$$

$$z_k = r_s + jx_{\sigma s} + \frac{jx_m(jx'_{\sigma r} + r'_r)}{jx_m + jx'_{\sigma r} + r'_r} = 0,015 + j0,09 + \frac{j3,2(j0,09 + 0,017)}{j3,2 + j0,09 + 0,017} = 0,18 \angle 80,07^\circ$$

$$|\bar{i}_{sk}| = \frac{|\bar{u}_s|}{|z_k|} = \frac{1}{0,18} = \boxed{5,546}$$

$$\frac{|\bar{i}_{sk}|}{|\bar{i}_{sn}|} = \frac{5,546}{1,155} = \boxed{4,8}$$

$$d) |\bar{i}_{sn}|^2 r_s = 1,155^2 \cdot 0,015 = \boxed{0,02}$$

$$|\bar{i}'_r| = \frac{|\bar{u}_{th}|}{\sqrt{\left(r_{th} + \frac{r'_r}{s_n}\right)^2 + x_{th}^2}} = \frac{0,9726}{\sqrt{\left(0,0142 + \frac{0,017}{0,0197}\right)^2 + 0,1776}} = 1,0868$$

$$|\bar{i}'_r|^2 r'_r = 1,0868^2 \cdot 0,017 = \boxed{0,02}$$

$$|\bar{I}_{sn}|^2 R_s = |\bar{i}_{sn}|^2 r_s \cdot P_B = 0,02 \cdot 100 \cdot 10^3 = \boxed{2000 \text{ W}}$$

$$|\bar{I}'_r|^2 R'_r = |\bar{i}'_r|^2 r'_r \cdot P_B = 0,02 \cdot 100 \cdot 10^3 = \boxed{2000 \text{ W}}$$

$$\eta = \frac{P_{2n}}{|\bar{u}_{sn}| |\bar{i}_{sn}| \cos \varphi_n} = \frac{1}{1 \cdot 1,155 \cdot 0,9} = \boxed{0,962}$$

$$M_{ng} = -M_n = -1,02$$

$$M_{ng} = |\bar{i}'_r|^2 \frac{r'_r}{s_{ng}} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|\bar{u}_{th}|^2}{\left(r_{th} + \frac{r'_r}{s_{ng}}\right)^2 + x_{th}^2} \frac{r'_r}{s_{ng}} = M_{ng}$$

$$s_{ng}^2 (r_{th}^2 + x_{th}^2) M_{ng} + s_{ng} (M_{ng} 2r_{th} r'_r - |\bar{u}_{th}|^2 r'_r) + M_{ng} r'^2_r = 0$$

$$-1,02(0,0142^2 + 0,1776^2) s_{ng}^2 + (-1,02 \cdot 2 \cdot 0,0142 \cdot 0,017 - 0,9726^2 \cdot 0,017) s_{ng} - 1,02 \cdot 0,017^2 = 0$$

$$0,03238 s_{ng}^2 + 0,016574 s_{ng} + 2,9478 \cdot 10^{-4} = 0 \Rightarrow \boxed{s_{ng} = -0,01845}$$

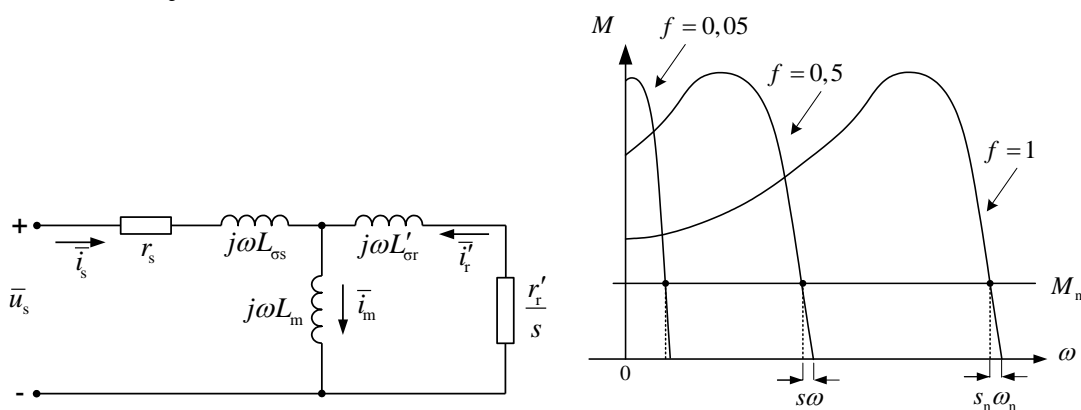
$$P_{2g} = M_{ng} \omega_{mg} = M_{ng} (1 - s_{ng}) = -1,02 \cdot (1 + 0,01845) = 1,0388$$

$$z_g = r_s + jx_{\sigma s} + \frac{jx_m \left(jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_{ng}} \right)}{jx_m + jx'_{\sigma r} + \frac{r'_r}{s_{ng}}} = 0,015 + j0,09 + \frac{j3,2 \left(j0,09 - \frac{0,017}{0,01845} \right)}{j3,2 + j0,09 - \frac{0,017}{0,01845}} = 0,8902 \angle 153^\circ$$

$$|\bar{i}_{sg}| = \frac{|\bar{u}_s|}{|z_g|} = \frac{1}{0,8902} = \boxed{1,123}$$

2.5. Asinkroni motor 75 kW, 400 V, 4 pola, 50 Hz, napajan je iz pretvarača s konstantnim omjerom napona i frekvencije. Parametri motora u jediničnim vrijednostima su: $r_s = 0,01$, $r_r' = 0,012$, $x_{gs} = x_{gr}' = 0,1$, $x_m = 3$. Nazivno klizanje motora iznosi $s_n = 0,014$. Odredite:

- Moment i struju armature uz nazivni omjer U/f i nazivnu kliznu frekvenciju $s\omega = s_n\omega_n$ pri $f = 0,5$ i $f = 0,05$.
- Napon na koji je potrebno priključiti motor da razvije nazivni moment pri nazivnoj kliznoj frekvenciji za slučajeve $f = 0,5$ i $f = 0,05$. Odredite korisnost u tim radnim točkama.
- Kliznu frekvenciju koju je potrebno podesiti da motor razvije nazivni moment uz napone i frekvencije kao u a)



Rješenje:

a)

$$z_n = r_s + jx_{gs} + \frac{jx_m \left(jx_{gr}' + \frac{r_r'}{s_n} \right)}{jx_m + jx_{gr}' + \frac{r_r'}{s_n}} = 0,01 + j0,1 + \frac{j3 \left(j0,1 + \frac{0,012}{0,014} \right)}{j3 + j0,1 + \frac{0,012}{0,014}} = 0,8564 \angle 28,07^\circ \text{ p.u.}$$

$$u_{sn} = 1 \angle 0^\circ \text{ p.u.}$$

$$i_{sn} = \frac{u_{sn}}{z_n} = \frac{1 \angle 0^\circ}{0,8564 \angle 28,07^\circ} = 1,1676 \angle -28,07^\circ \text{ p.u.}$$

$$M_n = \frac{1}{1 - s_n} = \frac{1}{1 - 0,014} = 1,014 \text{ p.u.}$$

$$f = 0,5$$

$$\frac{U}{f} = \frac{U_n}{f_n} \rightarrow U = \frac{f}{f_n} U_n = 0,5 U_n \rightarrow u = 0,5 \text{ p.u.}$$

$$s\omega = s_n \omega_n \rightarrow s = \frac{\omega}{\omega_n} s_n = \frac{1}{0,5} s_n = 2 s_n = 2 \cdot 0,014 = 0,028$$

$$\omega = 0,5$$

$$z = r_s + jx_{cs} \cdot \omega + \frac{jx_m \cdot \omega \left(jx'_{gr} \cdot \omega + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \omega \right)}{jx_m \cdot \omega + jx'_{gr} \cdot \omega + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \omega} = 0,01 + j0,1 \cdot 0,5 + \frac{j3 \cdot 0,5 \left(j0,1 \cdot 0,5 + \frac{0,012}{0,014} \cdot 0,5 \right)}{j3 \cdot 0,5 + j0,1 \cdot 0,5 + \frac{0,012}{0,014} \cdot 0,5}$$

$$z = 0,4326 \angle 27,76^\circ \text{ p.u.}$$

$$i_{s(0,5)} = \frac{u}{z} = \frac{0,5 \angle 0^\circ}{0,4326 \angle 27,76^\circ} = 1,1557 \angle -27,76^\circ \text{ p.u.}$$

$$i_{r(0,5)} = -i_{s(0,5)} \frac{jx_m \cdot \cancel{\omega}}{jx_m \cdot \cancel{\omega} + jx'_{gr} \cdot \cancel{\omega} + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \cancel{\omega}} = 1,1557 \angle -27,76^\circ \frac{j3}{j3 + j0,1 + \frac{0,012}{0,014}} =$$

$$i_{r(0,5)} = 1,078 \angle 167,7^\circ \text{ p.u.}$$

$$M_{0(,5)} = i_{r(0,5)}^2 \frac{r'_r}{s\omega} = 1,078^2 \frac{0,012}{0,028 \cdot 0,5} = 0,996$$

$$f = 0,05$$

$$u = 0,05 \text{ p.u.}$$

$$s\omega = s_n \omega_n \rightarrow s = \frac{\omega}{\omega_n} s_n = \frac{1}{0,05} s_n = 20 s_n = 2 \cdot 0,014 = 0,28$$

$$\omega = 0,05$$

$$z = r_s + jx_{cs} \cdot \omega + \frac{jx_m \cdot \omega \left(jx'_{gr} \cdot \omega + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \omega \right)}{jx_m \cdot \omega + jx'_{gr} \cdot \omega + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \omega}$$

$$z = 0,01 + j0,1 \cdot 0,05 + \frac{j3 \cdot 0,05 \left(j0,1 \cdot 0,05 + \frac{0,012}{0,014} \cdot 0,05 \right)}{j3 \cdot 0,05 + j0,1 \cdot 0,05 + \frac{0,012}{0,014} \cdot 0,05} = 0,0514 \angle 23,08^\circ \text{ p.u.}$$

$$i_{s(0,05)} = \frac{u}{z} = \frac{0,05 \angle 0^\circ}{0,0514 \angle 23,08^\circ} = 0,9728 \angle -23,08^\circ \text{ p.u.}$$

$$i_{r(0,05)} = -i_{s(0,05)} \frac{jx_m \cdot \cancel{\omega}}{jx_m \cdot \cancel{\omega} + jx'_{gr} \cdot \cancel{\omega} + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \cancel{\omega}} = 0,9728 \angle -23,08^\circ \frac{j3}{j3 + j0,1 + \frac{0,012}{0,014}} =$$

$$i_{r(0,05)} = 0,9073 \angle 172,38^\circ \text{ p.u.}$$

$$M_{(0,05)} = i_{r(0,05)}^2 \frac{r'_r}{s\omega} = 0,9073^2 \frac{0,012}{0,28 \cdot 0,05} = 0,7057 \text{ p.u.}$$

b)

$$f = 0,5$$

$$s\omega = s_n \omega_n, \quad M = M_n$$

$$s = \frac{\omega}{\omega_n} s_n = \frac{1}{0,5} s_n = 2 s_n = 2 \cdot 0,014 = 0,028$$

$$M_{0,(5)} = i_{r(0,5)}^2 \frac{r'_r}{s\omega} = i_{r(0,5)}^2 \frac{r'_r}{s_n \omega_n} = M_n \rightarrow i_{r(0,5)} = \sqrt{M_n \cdot \frac{s_n \omega_n}{r'_r}} = \sqrt{1,0142 \cdot \frac{0,014 \cdot 1}{0,012}} = 1,0878$$

$$|i_{s(0,5)}| = |i_{r(0,5)}| \left| \frac{jx_m \cdot \cancel{\phi}}{jx_m \cdot \cancel{\phi} + jx'_{or} \cdot \cancel{\phi} + \frac{r'_r}{s_n \omega_n} \cdot \cancel{\phi}} \right| = 1,0878 \left| \frac{j3 + j0,1 + \frac{0,012}{0,014}}{j3} \right| = 1,1662$$

$$|z| = 0,4326$$

$$|u_s| = |i_{s(0,5)}| \cdot |z| = 0,5045$$

$$\eta_{0,5} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{(1-s)i_{r(0,5)}^2 \frac{r'_r}{s}}{u_s \cdot i_{s(0,5)} \cdot \cos \varphi} = \frac{(1-0,028) \cdot 1,0878^2 \frac{0,012}{0,028}}{0,5045 \cdot 1,1662 \cdot \cos(27,76^\circ)} = 0,9468$$

$$f = 0,05$$

$$s = \frac{\omega}{\omega_n} s_n = \frac{1}{0,5} s_n = 2s_n = 2 \cdot 0,014 = 0,28$$

$$i_{r(0,05)} = \sqrt{M_n \cdot \frac{s_n \omega_n}{r'_r}} = \sqrt{1,0142 \cdot \frac{0,014 \cdot 1}{0,012}} = 1,0878$$

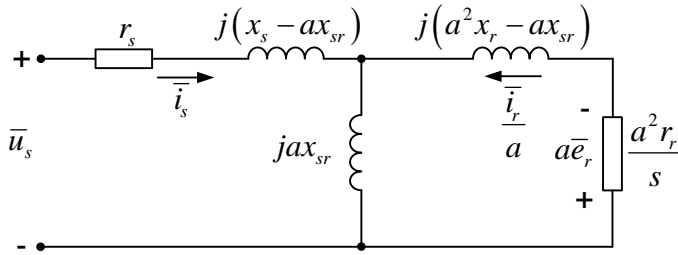
$$|i_{s(0,05)}| = 1,1662$$

$$|z| = 0,0514$$

$$u_s = |i_{s(0,05)}| \cdot |z| = 1,1662 \cdot 0,0514 = 0,0599$$

$$\eta_{0,05} = \frac{P_2}{P_1} = \frac{(1-s)i_{r(0,05)}^2 \frac{r'_r}{s}}{u_s \cdot i_{s(0,05)} \cdot \cos \varphi} = \frac{(1-0,28) \cdot 1,0878^2 \frac{0,012}{0,28}}{0,0599 \cdot 1,1662 \cdot \cos(23,08^\circ)} = 0,5682$$

- 2.6. Trofazni asinkroni motor 75 kW, 400 V, 4 pola, 50 Hz ima sljedeće jedinične parametre: $r_s = 0,015$, $r'_r = 0,015$, $x_{\sigma s} = x'_{\sigma r} = 0,1$, $x_m = 3,0$. motor je napajan iz strujno reguliranog pretvarača promjenjivog napona i frekvencije. Odredite vrijednost $|\bar{u}_s|$, $|\bar{i}_s|$, $|\bar{i}_{sM}|$, $|\bar{i}_{s\psi}|$ za slučaj vektorskog upravljanja u stacionarnom stanju uz nazivni tok rotora i nazivni moment pri frekvenciji $f = 0,25$ p.u. Pretpostavite da tok rotora ima isti iznos kao u slučaju pogona motora s nazivnim momentom pri $f = 50$ Hz tj. $f = 1$ p.u. Nazivno klizanje motora iznosi $s_n = 0,0177$. Potrebno je transformirati opći oblik nadomjesne sheme u T/2 shemu i voditi računa o tome da su rotorski parametri već zadani reducirani na statorsku stranu korištenjem omjera broja zavoja $w_s f_{ns1} / w_r f_{nr1}$.



Rješenje:

Treba odabrati:

$$a = \frac{x_{sr}}{x_r} = \frac{x_{sr}}{x_r} \frac{\left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2}{\left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2} = \frac{x_{sr}}{x'_r} \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} = \frac{x_m}{x'_r} \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}}$$

$$k = \frac{4}{\pi p^2} \frac{\mu_0 r_0 l}{\delta} - \text{konstantni član zajednički u svim izrazima}$$

$$x_m = \frac{3}{2} x_{ms} = \frac{3}{2} k (w_s f_{ns1})^2 \quad x_{sr} = \frac{3}{2} x_{msr} = \frac{3}{2} k (w_s f_{ns1} w_r f_{nr1})$$

$$x'_r = x'_{\sigma r} + x_m \quad x_r = x_{\sigma r} + \frac{3}{2} x_{mr} = x_{\sigma r} + \frac{3}{2} k (w_r f_{nr1})^2$$

$$ax_{sr} = \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \frac{x_m}{x'_r} x_{sr} = \frac{x_m}{x'_r} \cdot \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \cdot \frac{3}{2} k (w_s f_{ns1} w_r f_{nr1}) = \frac{x_m}{x'_r} \cdot \frac{3}{2} k (w_s f_{ns1})^2 = \frac{x_m}{x'_r} \cdot x_m = \frac{x_m^2}{x'_r}$$

$$x_s - ax_{sr} = x_s - \frac{x_m^2}{x'_r}$$

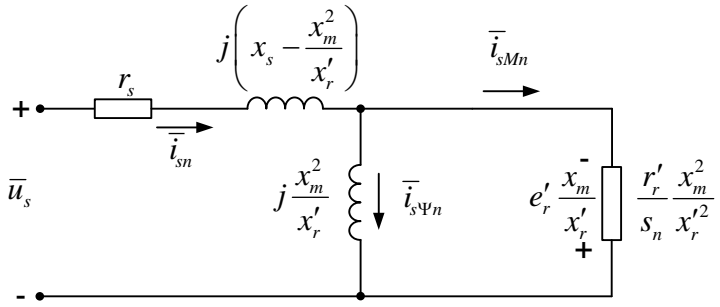
$$a^2 x_r - ax_{sr} = \left(\frac{x_m}{x'_r} \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2 \left(x_{\sigma r} + \frac{3}{2} x_{mr} \right) - \frac{x_m^2}{x'_r} = \left[\underbrace{\left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2 x_{\sigma r}}_{x'_{\sigma r}} + \underbrace{\frac{3}{2} \left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2 x_{mr}}_{x_{ms}} \right] \left(\frac{x_m}{x'_r} \right)^2 - \frac{x_m^2}{x'_r}$$

$$= x'_r \left(\frac{x_m}{x'_r} \right)^2 - \frac{x_m^2}{x'_r} = 0$$

$$\frac{a^2 r_r}{s} = \left(\frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} \right)^2 r_r \left(\frac{x_m}{x'_r} \right)^2 \frac{1}{s} = \frac{r'_r x_m^2}{s x_r'^2}$$

$$\frac{\bar{i}_r}{a} = \frac{w_r f_{nr1}}{w_s f_{ns1}} \bar{i}_r' \frac{x'_r}{x_m} = \bar{i}_r' \frac{x'_r}{x_m}$$

$$ae_r = \frac{w_s f_{ns1}}{w_r f_{nr1}} e_r' \frac{x_m}{x'_r} = e_r' \frac{x_m}{x'_r}$$



$$f = f_n = 1 \text{ p.u.}$$

$$M_n = \frac{1}{1 - s_n} = \frac{1}{1 - 0,0177} = 1,018$$

$$M_n = |\bar{i}_{sMn}|^2 \frac{r'_r x_m^2}{s_n x_r'^2} \Rightarrow |\bar{i}_{sMn}| = \sqrt{M_n \frac{s_n x_r'^2}{r'_r x_m^2}} = 1,1326$$

$$x'_r = x'_{\sigma r} + x_m = 0,1 + 3 = 3,1$$

$$x_s - \frac{x_m^2}{x'_r} = x_{\sigma s} + x_m - \frac{x_m^2}{x'_r} = 0,1 + 3 - \frac{3^2}{3,1} = 0,19677$$

$$|z| = \left| r_s + j \left(x_s - \frac{x_m^2}{x'_r} \right) + \frac{j \frac{x_m^2}{x'_r} \cdot \frac{r'_r x_m^2}{s_n x_r'^2}}{j \frac{x_m^2}{x'_r} + \frac{r'_r x_m^2}{s_n x_r'^2}} \right| = \left| r_s + j \left(x_s - \frac{x_m^2}{x'_r} \right) + \frac{j \frac{r'_r x_m^2}{s_n x_r'^2}}{j + \frac{r'_r}{s_n} \frac{1}{x_r'^2}} \right| =$$

$$|z| = \left| 0,015 + j0,19677 + \frac{j \frac{0,015}{0,0177} \frac{3^2}{3,1^2}}{j + \frac{0,015}{0,0177} \frac{1}{3,1^2}} \right| = 0,8524$$

$$|\bar{u}_s| = 1$$

$$|\bar{i}_{sn}| = \frac{|\bar{u}_s|}{|z|} = \frac{1}{0,8524} = 1,173$$

$$|\bar{i}_{s\Psi n}| = \sqrt{|\bar{i}_{sn}|^2 - |\bar{i}_{sMn}|^2} = \sqrt{1,173^2 - 1,1326^2} = 0,3056$$

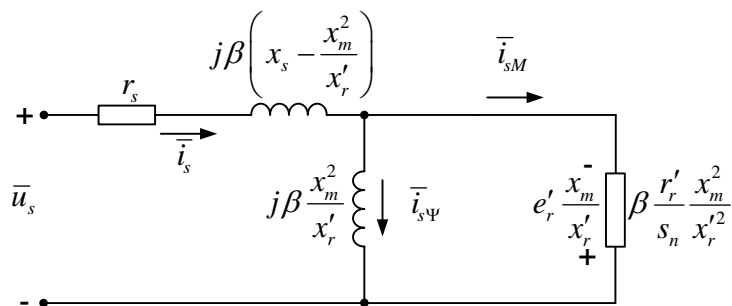
$$f = 0,25 = \beta$$

Klizne frekvencije pri $f = 1$ i $f = 0,25$ ostaju jednake, tj. $s_n \cdot 1 = s\beta \Rightarrow s = \frac{s_n}{\beta}$

Sve reaktancije u nadomjesnoj shemi se množe s β jer su zadane za $f = f_n = 1 \text{ p.u.}$

$$M = M_n = \frac{|\bar{i}_{sM}|^2 \beta \frac{r'_r x_m^2}{s_n x_r'^2}}{\beta} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{snaga okretnog} \\ \text{polja u p.u.} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{sinkrona} \\ \text{brzina u p.u.} \end{array} \right|} = |\bar{i}_{sM}|^2 \frac{r'_r x_m^2}{s_n x_r'^2} \Rightarrow |\bar{i}_{sM}| = |\bar{i}_{sMn}| = 1,1326$$

$$\frac{x_m}{x'_r} |e'_m| = |\bar{i}_{s\Psi n}| \frac{x_m^2}{x'_r} \Rightarrow |e'_m| = |\bar{i}_{s\Psi n}| x_m$$



U p.u. sustavu $|e_r'| = \omega_{s,p.u.} \cdot |\Psi_m| \Rightarrow |\Psi_m| = |\bar{i}_{s\Psi n}| x_m$ za $f = 1$ p.u.

1

Budući da za $f = 0,25$ mora biti $|\Psi_n| = |\Psi_m|$, odatle slijedi da je $|\bar{i}_{s\Psi}| = |\bar{i}_{s\Psi n}| = 0,03056$

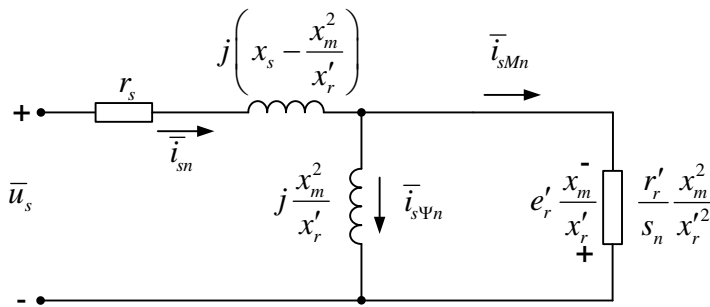
$$|\bar{i}_s| = \sqrt{|\bar{i}_{s\Psi}|^2 + |\bar{i}_{sM}|^2} = |\bar{i}_{sn}| = 1,173$$

$$|z| = \left| r_s + j\beta \left(x_s - \frac{x_m^2}{x_r'} \right) + \frac{j\beta \frac{r_r'}{s_n} \frac{x_m^2}{x_r'^2}}{j + \frac{r_r'}{s_n} \frac{1}{x_r'^2}} \right| = \left| 0,015 + j0,25 \cdot 0,19667 + \frac{j0,25 \cdot \frac{0,015}{0,0177} \frac{3^2}{3,1^2}}{j + \frac{0,015}{0,0177} \frac{1}{3,1^2}} \right| = 0,2231$$

$$|\bar{u}_s| = |\bar{i}_{sn}| \cdot |z| = 1,173 \cdot 0,2231 = 0,2617$$

2.7. Asinkroni motor s nazivnim podacima 50 kW, 400 V, 50 Hz, 2 pola ima parametre nadomjesne sheme zadane u jediničnim vrijednostima: $r_s = 0,018$, $x_{\sigma} = 0,09$, $r'_r = 0,022$, $x'_{\sigma r} = 0,09$, $x_m = 3,5$. Nazivno klizanje motora iznosi 0,02575. Za slučaj vektorskog upravljanja motorom odredite u stacionarnom stanju:

- komponente struja statora $i_{s\psi}$ i i_{sM} za slučaj pogona s 50 % nazivnog momenta uz nazivni magnetski tok. Za navedeno opterećenje također odredite ukupnu struju statora i_s i kliznu frekvenciju $s\omega$. Izračunajte napon statora ako je frekvencija 15 Hz.
- komponente struja statora $i_{s\psi}$ i i_{sM} kojima se postiže maksimalni moment pri čemu ukupna struja statora ne smije biti veća od struje u a) dijelu zadatka. Odredite taj maksimalni moment.



Rješenje:

a)

$$M_n = \frac{1}{1-s_n} = \frac{1}{1-0,02575} = 1,0264$$

$$M = 0,5M_n = 0,5 \cdot 1,0264 = 0,5132$$

Na linearnom dijelu momentne karakteristike pri nazivnoj frekvenciji vrijedi

$$\frac{M}{s} = \frac{M_n}{s_n} \Rightarrow s = s_n \frac{M}{M_n} = 0,02575 \cdot 0,5 = 0,012875$$

$$\beta = f_{pu} = \frac{15}{50} = 0,3$$

Klizna frekvencija ostaje ista pri 50 Hz i 15 Hz, tj.

$$s\omega_s = s_{15\text{Hz}}\beta = 0,012875 \cdot 1 = \boxed{0,012875}$$

$$M = \frac{|\bar{i}_{sM}|^2 \beta \frac{x_m^2}{x_r'^2} \frac{r'_r}{s_{15\text{Hz}}\beta}}{\beta\omega_s} = \frac{|\bar{i}_{sM}|^2 \beta \frac{x_m^2}{x_r'^2} \frac{r'_r}{s\omega_s}}{\beta\omega_s} = |\bar{i}_{sM}|^2 \frac{x_m^2}{x_r'^2} \frac{r'_r}{s}$$

$$x'_r = x'_{\sigma r} + x_m = 0,09 + 3,5 = 3,59$$

$$x_s = x_{\sigma s} + x_m = 0,09 + 3,5 = 3,59$$

$$|\bar{i}_{sM}| = \sqrt{M \frac{x_r'^2}{x_m^2} \frac{s}{r'_r}} = \sqrt{0,5132 \cdot \frac{3,59^2}{3,5^2} \frac{0,012875}{0,022}} = \boxed{0,5621}$$

Na nazivnoj frekvenciji vrijedi:

$$\frac{x_m^2}{x_r'} |\bar{i}_{s\psi}| = \frac{x_m^2}{x_r'^2} \frac{r'_r}{s} |\bar{i}_{sM}| \Rightarrow |\bar{i}_{s\psi}| = \frac{1}{x_r'} \frac{r'_r}{s} |\bar{i}_{sM}|$$

Na frekvenciji 15 Hz vrijedi :

$$|\bar{i}_{s\psi}| = \frac{1}{\beta x'_r s_{15\text{Hz}}} |\bar{i}_{sM}| = \frac{1}{x'_r s} |\bar{i}_{sM}| = \frac{1}{3,59} \frac{0,022}{0,012875} 0,5621 = \boxed{0,2675}$$

$$|\bar{i}_s| = \sqrt{|\bar{i}_{sM}|^2 + |\bar{i}_{s\psi}|^2} = \sqrt{0,5621^2 + 0,2675^2} = \boxed{0,6225}$$

$$z = r_s + j\beta \left(x_s - \frac{x_m^2}{x'_r} \right) + \frac{j\beta \frac{x_m^2}{x'_r} \beta \frac{x_m^2}{x_r'^2} \frac{r'_r}{s_{15\text{Hz}} \beta}}{j\beta \frac{x_m^2}{x'_r} + \beta \frac{x_m^2}{x_r'^2} \frac{r'_r}{s_{15\text{Hz}} \beta}}$$

$$= 0,018 + j0,3 \left(3,59 - \frac{3,5^2}{3,59} \right) + \frac{j0,3 \frac{3,5^2}{3,59} 0,3 \frac{3,5^2}{3,59^2} \frac{0,022}{0,012875}}{j0,3 \frac{3,5^2}{3,59} + 0,3 \frac{3,5^2}{3,59^2} \frac{0,022}{0,012875}} = 0,4808 \boxed{30,27^\circ}$$

$$|\bar{u}_s| = |\bar{i}_s| |z| = 0,6225 \cdot 0,4808 = \boxed{0,2993}$$

b)

$$M = \frac{x_m^2}{x'_r} |\bar{i}_{sM}| |\bar{i}_{s\psi}| \left\{ \Rightarrow M = \frac{x_m^2}{x'_r} |\bar{i}_{sM}| \sqrt{|\bar{i}_s|^2 - |\bar{i}_{sM}|^2} \right.$$

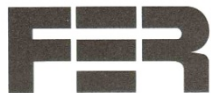
$$\left. |\bar{i}_s|^2 = |\bar{i}_{sM}|^2 + |\bar{i}_{s\psi}|^2 \right\}$$

$$\frac{dM}{d|\bar{i}_{sM}|} = \frac{x_m^2}{x'_r} \left(\sqrt{|\bar{i}_s|^2 - |\bar{i}_{sM}|^2} - |\bar{i}_{sM}| \frac{|\bar{i}_{sM}|}{\sqrt{|\bar{i}_s|^2 - |\bar{i}_{sM}|^2}} \right) = \frac{x_m^2}{x'_r} \frac{|\bar{i}_s|^2 - 2|\bar{i}_{sM}|^2}{\sqrt{|\bar{i}_s|^2 - |\bar{i}_{sM}|^2}} = 0$$

$$|\bar{i}_s|^2 - 2|\bar{i}_{sM}|^2 = 0 \Rightarrow |\bar{i}_s| = \sqrt{2} |\bar{i}_{sM}| \Rightarrow |\bar{i}_{sM}| = \frac{|\bar{i}_s|}{\sqrt{2}} = \frac{0,6225}{\sqrt{2}} = \boxed{0,4402}$$

$$|\bar{i}_{s\psi}| = \sqrt{|\bar{i}_s|^2 - |\bar{i}_{sM}|^2} = \sqrt{|\bar{i}_s|^2 - \frac{|\bar{i}_s|^2}{2}} = \frac{|\bar{i}_s|}{\sqrt{2}} = \boxed{0,4402}$$

$$M_{\max} = \frac{x_m^2}{x'_r} |\bar{i}_{sM}| |\bar{i}_{s\psi}| = \frac{3,5^2}{3,59} 0,4402 \cdot 0,4402 = \boxed{0,6612}$$



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
F A K U L T E T
ELEKTROTEHNIKE
I RAČUNARSTVA
Z A V O D Z A
ELEKTROSTROJARSTVO
I AUTOMATIZACIJU

TEORIJA ELEKTRIČNIH STROJEVA I TRANSFORMATORA

Zadaci za vježbu:

SINKRONI MOTORI S TRAJNIM MAGNETIMA

Autori:

Prof. dr. sc. Damir Žarko

Stjepan Stipetić, dipl. ing.

Zagreb, prosinac 2012.

1.1. Sinkroni motor trajnim magnetima nazivnih podataka 150 kW, 400 V, 50 Hz, 4 pola ima parametre zadane u jediničnim vrijednostima: $R_s = 0,03$, $X_{\sigma s} = 0,05$, $X_{md} = 0,2$, $X_{mq} = 0,5$, Nazivni napon motora iznosi $U_s = 1,0$.

- a) Ako se vektorom struje upravlja tako da je $I_{ds}^r = 0$ ($\gamma = 0$), a $I_s = I_{qs}^r = 1$, izračunajte razvijeni moment, faktor snage $\cos \varphi$ i inducirani napon u praznom hodu E_0 ako je frekvencija jednaka nazivnoj ($f = 1,0$) uz nazivni napon motora.
- b) Uz istu amplitudu struje I_s , frekvenciju i napon E_0 kao u a) dijelu zadatka, izračunajte $I_{ds}^r, I_{qs}^r, \gamma$ i U_s kojima se postiže maksimalni moment u stacionarnom stanju te vrijednost tog momenta.

Rješenje:

a)

$$X_d = X_{md} + X_{\sigma s} = 0,2 + 0,05 = 0,25$$

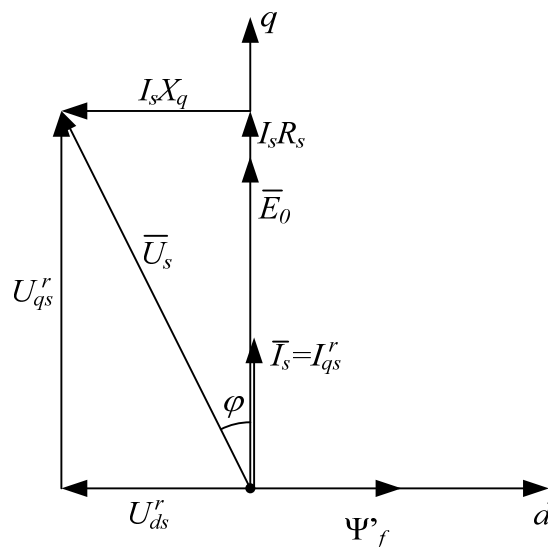
$$X_q = X_{mq} + X_{\sigma s} = 0,5 + 0,05 = 0,55$$

$$E_0 = \sqrt{U_s^2 - (I_s X_q)^2} - I_s R_s$$

$$= \sqrt{1^2 - (1 \cdot 0,55)^2} - 1 \cdot 0,03 = \boxed{0,805}$$

$$M_{em} = \frac{1}{\omega} E_0 I_{qs}^r = \frac{1}{1} E_0 I_s = 0,805 \cdot 1 = \boxed{0,805}$$

$$\cos \varphi = \frac{E_0 + I_s R_s}{U_s} = \frac{0,805 + 1 \cdot 0,03}{1,0} = \boxed{0,835}$$



b)

$$M_{em} = \frac{1}{\omega} \left[E_0 I_s \cos \gamma + \frac{1}{2} (X_d - X_q) I_s^2 \sin(2\gamma) \right]$$

$$\frac{dM_{em}}{d\gamma} = \frac{1}{\omega} \left[-E_0 I_s \sin \gamma + (X_d - X_q) I_s^2 \cos(2\gamma) \right]$$

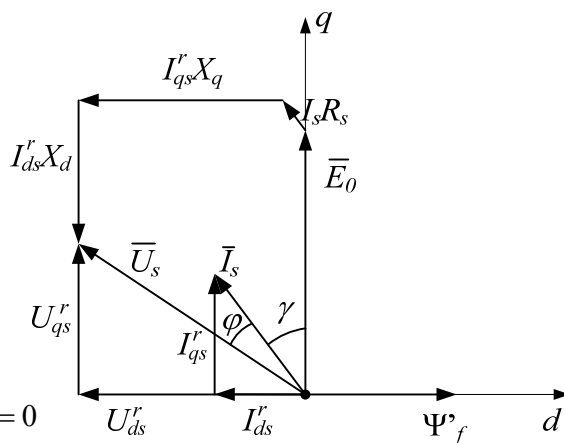
$$\cos(2\gamma) = \cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma = 1 - 2 \sin^2 \gamma$$

$$\frac{dM_{em}}{d\gamma} = \frac{1}{\omega} \left[-E_0 I_s \sin \gamma + (X_d - X_q) I_s^2 (1 - 2 \sin^2 \gamma) \right] = 0$$

$$2(X_d - X_q) I_s^2 \sin^2 \gamma + E_0 I_s \sin \gamma - (X_d - X_q) I_s^2 = 0$$

$$2(0,25 - 0,55) 1^2 \sin^2 \gamma + 0,805 \cdot 1 \sin \gamma - (0,25 - 0,55) 1^2 = 0$$

$$0,6 \sin^2 \gamma - 0,805 \sin \gamma - 0,3 = 0$$



$$(\sin \gamma)_{1,2} = \frac{0,805 \pm \sqrt{0,805^2 + 4 \cdot 0,6 \cdot 0,3}}{2 \cdot 0,6}$$

$$\sin \gamma = -0,3039 \Rightarrow \boxed{\gamma = -17,69^\circ}$$

$$\begin{aligned} M_{em} &= \frac{1}{\omega} \left[E_0 I_s \cos \gamma + \frac{1}{2} (X_d - X_q) I_s^2 \sin(2\gamma) \right] \\ &= \frac{1}{1} \left[0,805 \cdot 1 \cdot \cos(-17,69^\circ) + \frac{1}{2} (0,25 - 0,55) \cdot 1^2 \sin(-2 \cdot 17,69^\circ) \right] = \boxed{0,8539} \end{aligned}$$

$$I_{ds}^r = I_s \sin \gamma = 1 \cdot \sin(-17,69^\circ) = \boxed{-0,3039}$$

$$I_{qs}^r = I_s \cos \gamma = 1 \cdot \cos(-17,69^\circ) = \boxed{0,9527}$$

$$\begin{aligned} U_s &= \sqrt{(E_0 + I_{qs}^r R_s + I_{ds}^r X_d)^2 + (I_{ds}^r R_s - I_{qs}^r X_q)^2} \\ &= \sqrt{(0,805 + 0,9527 \cdot 0,03 - 0,3039 \cdot 0,25)^2 + (-0,3039 \cdot 0,03 - 0,9527 \cdot 0,55)^2} = \boxed{0,9264} \end{aligned}$$

- 1.2. Sinkroni motor trajnim magnetima na površini rotora ima nazivne podatke 12 kW, 400 V, 28 A, 50 Hz, 8 polova, 1800 o/min, $L_d = L_q = 2,6$ mH. Statorski otpor se može zanemariti.
- Izračunajte reaktanciju X_d u jediničnim vrijednostima.
 - Pri brzinama vrtnje manjima ili jednakima nazivnoj vektorom struje se upravlja tako da je $I_{ds}^r = 0$ ($\gamma = 0$), a $I_s = I_{qs}^r$. Skicirajte vektorski dijagram motora u nazivnoj radnoj točki, izračunajte inducirani napon E_0 i nazivni moment motora.
 - Pri brzinama većima od nazivne motorom se upravlja u režimu slabljenja polja tako da je statorski napon jednak nazivnom, a faznim pomakom vektora struje u odnosu na q os se generira negativna komponenta struje u d osi pomoću koje se slabi polje magneta. Cilj je održati nazivnu struju i nazivni napon pri zadanoj brzini vrtnje većoj od nazivne. Ako je potrebno vrtjeti motor brzinom 2430 o/min, odredite moment koji će motor razvijati pri toj brzini uz $U_s = 1,0$ i $I_s = 1,0$. Skicirajte vektorski dijagram i izračunajte komponente vektora struje I_{ds}^r i I_{qs}^r .

Rješenje:

a)

$$S_B = \sqrt{3} U_n I_n = \sqrt{3} \cdot 400 \cdot 28 = 19399 \text{ W}$$

$$U_B = \frac{400}{\sqrt{3}} = 230 \text{ V}$$

$$I_B = \frac{S_B}{3U_B} = \frac{19399}{3 \cdot 230} = 28,11 \text{ A}$$

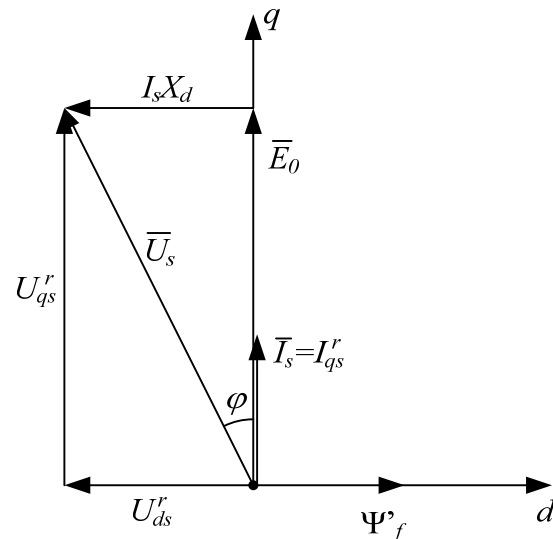
$$f = \frac{pn}{60} = \frac{4 \cdot 1800}{60} = 120 \text{ Hz}$$

$$\omega_B = 2\pi f = 2\pi \cdot 120 = 754 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{mB} = \frac{\omega_B}{p} = \frac{754}{4} = 188,5 \text{ rad/s}$$

$$Z_B = \frac{U_B}{I_B} = \frac{3U_{fn}^2}{S_n} = \frac{3 \left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right)^2}{19399} = 8,2478 \Omega$$

$$X_d = \frac{L_d \omega_s}{Z_B} = \frac{2,6 \cdot 10^{-3} \cdot 754}{8,2478} = \boxed{0,2377}$$



b)

$$I_s = 1,0, U_s = 1,0$$

$$E_{0n} = \sqrt{U_s^2 - (I_s X_d)^2} = \sqrt{1^2 - (1 \cdot 0,2377)^2} = 0,9713$$

$$M_{em} = \frac{E_{0n} I_{qs}^r}{\omega} = \frac{E_n I_s}{\omega} = \frac{0,9713 \cdot 1}{1} = \boxed{0,9713}$$

c)

Inducirani napon E_0 će narasti u omjeru brzina vrtnje. U istom omjeru će narasti i sinkrona reaktancija jer porastom sinkrone brzine raste i frekvencija statorskikh napona i struja.

$$\omega = \frac{\omega_m}{\omega_{mB}} = \frac{n}{n_n} = \frac{2430}{1800} = 1,35$$

$$E_{0\omega} = E_{0n} \cdot 1,35 = 0,9713 \cdot 1,35 = 1,311$$

$$X_{d\omega} = X_d \cdot 1,35 = 0,2377 \cdot 1,35 = 0,3209$$

$$U_s^2 = (E_{0\omega} + I_{ds}^r X_{d\omega})^2 + (I_{qs}^r X_{d\omega})^2$$

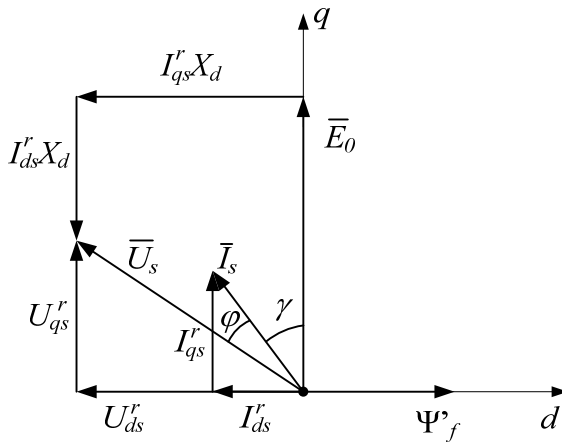
$$I_s^2 = (I_{ds}^r)^2 + (I_{qs}^r)^2 \Rightarrow (I_{qs}^r)^2 = I_s^2 - (I_{ds}^r)^2$$

$$U_s^2 = E_{0\omega}^2 + 2E_{0\omega} X_{d\omega} I_{ds}^r + X_{d\omega}^2 (I_{ds}^r)^2 + (I_{qs}^r X_{d\omega})^2 - X_{d\omega}^2 (I_{ds}^r)^2$$

$$I_{ds}^r = \frac{U_s^2 - E_{0\omega}^2 - (I_{qs}^r X_{d\omega})^2}{2E_{0\omega} X_{d\omega}} = \frac{1^2 - 1,311^2 - (1 \cdot 0,3209)^2}{2 \cdot 1,311 \cdot 0,3209} = \boxed{-0,9766}$$

$$I_{qs}^r = \sqrt{I_s^2 - (I_{ds}^r)^2} = \sqrt{1^2 - 0,9766^2} = \boxed{0,215}$$

$$M_{em} = \frac{E_{0\omega} I_{qs}^r}{\omega} = \frac{1,311 \cdot 0,215}{1,35} = \boxed{0,209}$$



- 1.3. Motorom iz prethodnog zadatka treba upravljati tako da se pri nazivnoj brzini vrtnje i nazivnoj struji postigne faktor snage $\cos \varphi = 1$. Izračunajte položaj vektora struje u odnosu na q os (kut γ), napon statora U_s i moment motora u toj radnoj točki. Skicirajte vektorski dijagram. Zanimarite statorski otpor, gubitke trenja i ventilacije te gubitke u željezu.

Rješenje :

Iz prethodnog zadatka:

$$E_{0n} = 0,9713.$$

$$U_s I_s = E_0 I_s \cos \gamma = E_0 I_{qs}^r$$

$$U_s^2 = (E_0 + I_{ds}^r X_d)^2 + (I_{qs}^r X_d)^2$$

$$I_s^2 = (I_{ds}^r)^2 + (I_{qs}^r)^2$$

$$\frac{E_0^2 [I_s^2 - (I_{ds}^r)^2]}{I_s^2} = E_0^2 + 2E_0 X_d I_{ds}^r + X_d^2 (I_{ds}^r)^2 + X_d^2 I_s^2 - X_d^2 (I_{ds}^r)^2$$

$$E_0^2 - \frac{E_0^2}{I_s^2} (I_{ds}^r)^2 = E_0^2 + 2E_0 X_d I_{ds}^r + X_d^2 I_s^2$$

$$\frac{E_0^2}{I_s^2} (I_{ds}^r)^2 + 2E_0 X_d I_{ds}^r + X_d^2 I_s^2 = 0 \Rightarrow \left(\frac{E_0}{I_s} I_{ds}^r + X_d I_s \right)^2 = 0$$

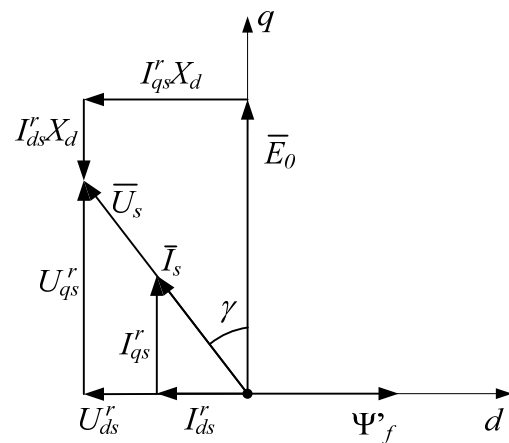
$$I_{ds}^r = -\frac{X_d I_s^2}{E_0} = -\frac{0,2377 \cdot 1}{0,9713} = 0,245$$

$$I_{qs}^r = \sqrt{1^2 - 0,245^2} = 0,970$$

$$\tan \gamma = \frac{I_{ds}^r}{I_{qs}^r} = \frac{0,245}{0,97} \Rightarrow \gamma = 14,2^\circ$$

$$U_s = \frac{E_0 I_{qs}^r}{I_s} = \frac{0,9713 \cdot 0,97}{1} = 0,942$$

$$M_{em} = \frac{1}{\omega} E_0 I_{qs}^r = \frac{1}{1} 0,9713 \cdot 0,97 = 0,942$$



- 1.4. Motor s površinskim trajnim magnetima ima parametre zadane u jediničnim vrijednostima: $E_0 = 0,8$, $X_d = 0,4$, $R_s = 0,05$, $\omega_s = 1$. Motor je napajan iz elektroničkog energetskog pretvarača s regulacijom struje armature koji koristi senzor za određivanje položaja rotora u povratnoj vezi i na taj način održava položaj vektora struje takav da je $\gamma = 0$. Odredite:
- Struje i napone statora kojima se postižu momenti 1,0, 0,5 i 0 pri frekvenciji $\omega = \omega_s = 1$.
 - Ponovite sve pod a) za slučaj kada je $\omega = 0,5$.
 - Ponovite sve pod a) za slučaj kada je $\omega = 0$.

Rješenje:

a)	b)	c)
$I_s = 1,25$	$I_s = 1,25$	$I_s = 1,25$
$U_s = 1,0$	$U_s = 0,526$	$U_s = 0,0625$
$I_s = 0,625$	$I_s = 0,625$	$I_s = 0,625$
$U_s = 0,868$	$U_s = 0,449$	$U_s = 0,03125$
$I_s = 0$	$I_s = 0$	$I_s = 0$
$U_s = 0,8$	$U_s = 0,4$	$U_s = 0$

- 1.5. Za sinkroni motor s površinskim trajnim magnetima iz prošlog zadatka su naponske i strujne granice za rad iznad nazivne brzine jednake $U_s = 1,0$ p.u. i $I_s = 1,25$ p.u. Odredite:
- najveću brzinu koju ovaj motor može postići neovisno o razvijenom momentu uz kut $\gamma = 0$.
 - struju i moment pri $\omega = 1,2$ p.u uz $I_s = I_{qs}^r$.
 - najveću brzinu koju ovaj motor može postići i kut γ koji odgovara toj brzini ako je kut γ odabran tako da se maksimizira brzina praznog hoda
 - najveći moment koji motor može ostvariti i odgovarajući kut γ pri brzini $\omega = 1,2$.

Rješenje:

a)

$$\omega_{\max} = 1,25 \text{ p.u.}$$

b)

$$I_s = 0,411$$

$$M_{em} = 0,329$$

c) $\omega = 3,33$

d)

Uz zanemarenje statorskog otpora:

$$\gamma = -14,17^\circ$$

$$M_{em} = 0,970$$

Bez zanemarenja statorskog otpora:

$$\gamma = -19,02^\circ$$

$$M_{em} = 0,945$$