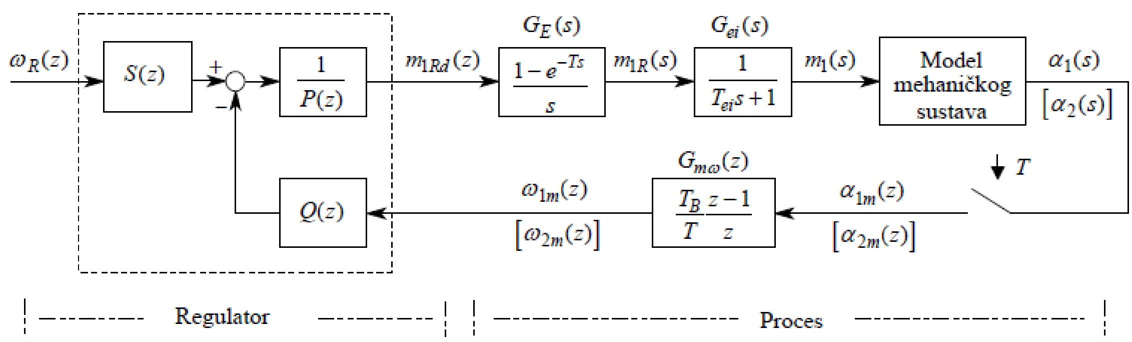
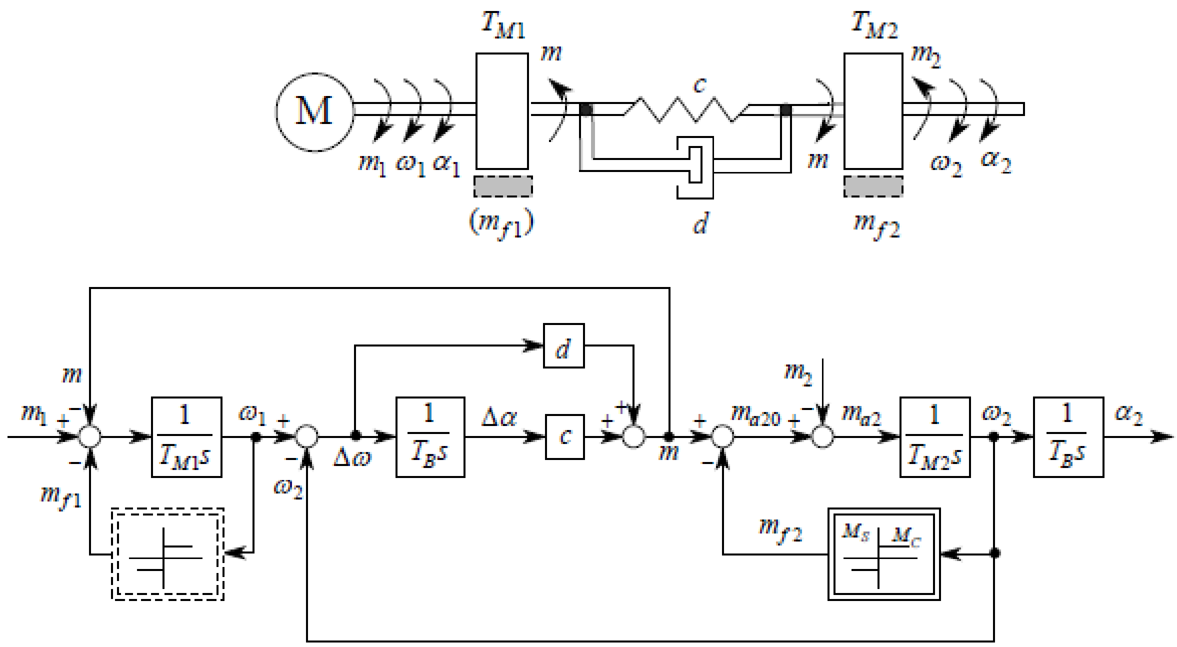
REGULACIJA BRZINE VRTNJE UZ PRIMJENU POLINOMSKOG REGULATORA : DOKAZ UVJETA KAUZALNOSTI

1) Struktura regulacijskog kruga



Slika 1 : blok dijagram kontrolne petlje po brzini



Slika 2 : model mehaničkog sustava

Polinomski regulator je opći linearni regulator dan u diskretnom Laplaceovom (z) području jednadžbom :

$$m_{1rd}(z) = \frac{S(z)}{P(z)} w_R(z) - \frac{Q(z)}{P(z)} w_m(z) \qquad (0)$$

Na slici 2 se nalazi model mehaničkog sustava čija se prijenosna funkcija nalazi u bloku „model mehaničkog sustava“ na slici 1. Prijenosna funkcija modela je sljedeća

$$G_1(s) = \frac{\alpha_1(s)}{m_1(s)} = \frac{1}{T_B(T_{M1}+T_{M2})s^2} \frac{\Omega_{02}^{-2}s^2 + 2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s + 1}{\Omega_0^{-2}s^2 + 2\zeta\Omega_0^{-1}s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{\alpha_2(s)}{m_1(s)} = \frac{1}{T_B(T_{M1}+T_{M2})s^2} \frac{2\zeta_2\Omega_{02}^{-1}s + 1}{\Omega_0^{-2}s^2 + 2\zeta\Omega_0^{-1}s + 1}$$

Otvoreni krug ima prijenosnu funkciju (povratna veza po brzini vrtnje tereta)

$$G_0(z) = G_{\mathrm{E}}\, G_{\mathrm{ei}}\, G_2 * \; G_{\mathrm{mw}}(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

gdje je $\quad deg\ A = 5 = deg\ B + 1$

što je očito iz regulacijskog kruga.

Zatvoreni krug ima prijenosnu funkciju

$$G_{cl}(z) = \frac{B(z)S(z)}{A(z)P(z) + B(z)Q(z)}$$

Modelska prijenosna funkcija koja određuje željeno ponašanje zatvorenog regulacijskog kruga je

$$G_M(z) = \frac{A_0(z)B_M(z)}{A_0(z)A_M(z)}$$

gdje je $A_0(z)$ observerski polinom i on ne utječe na vladanje regulacijskog kruga obzirom na referentnu veličinu. Modelska prijenosna funkcija je istoga reda kao i prijenosna funkcija procesa.

$$deg\ A_m = 5 = deg B_m + 1$$

Radi zadovoljenja uvjeta stacionarne točnosti modela vrijedi

$$B_M(z) = \frac{A_M(1)}{B(1)} B(z)$$

$$G_M(z) = \frac{\frac{A_M(1)}{B(1)} B(z)}{A_M(z)}$$

U stacionarnom stanju $\lim_{z\to 1} G_M(z) = 1$

Kako želimo da se naš zatvoreni krug ponaša poput modelske funkcije, možemo prijenosne funkcije izjednačiti te dobivamo :

$$G_{cl}(z) = \frac{B(z)S(z)}{A(z)P(z) + B(z)Q(z)} = \frac{A_0(z)B_M(z)}{A_0(z)A_M(z)} = G_M(z)$$

Dalje slijedi

$$B(z)S(z) = A_0(z)B_M(z) = A_0(z)\frac{A_M(1)}{B(1)}B(z) \qquad \rightarrow \qquad S(z) = A_0(z)\frac{A_M(1)}{B(1)}$$

te

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_0(z)A_M(z) \qquad (1)$$

Prethodna jednadžba se zove **Diophantova jednadžba.**

Uključivanje regulatora u krug se radi pomoću polinoma *P(z)* te je

$$P(z) = (z-1)^i P'(z) \qquad (2)$$

Najčešće se stavlja *i=1* jer se onda postiže stacionarna točnost regulacijskog kruga s obzirom na konstantan iznos momenta.

Zbog uvjeta kauzalnosti vrijedi :

$$\deg A = \deg B + 1 \qquad (3)$$

$$\deg P \geq \deg Q \qquad (4)$$

$$\deg P \geq \deg S \qquad (5)$$

Uzima se da su polinomi $A_M(z)$, $A_0(z)$, $P(z)$ monici. $A_M(z)$ biramo da bude istog reda kao A(z) i zbog toga se dodaje polinom $A_0(z)$ da bi jednadžba (1) zadovoljavala uvjet rješivosti. $A_0(z)$ je najčešće oblika $A_0(z) = z^4(1 - e^{-T}/T_0)$ gdje se jedan pol izvan ishodišta koristi za filtriranje mjernog šuma.

Uvjet moničnosti :

Da bi polinom $A(z)P(z) + B(z)Q(z)$ bio moničan mora biti zadovoljeno

$$degA(z) + degP(z) > degB(z) + degQ(z) \quad (6)$$

Što je i očito iz relacija (3),(4) i (5).

Uvjet rješivosti Diophantske jednadžbe :

Broj parametara koji se pri rješavanju jednadžbe mogu **slobodno** izabrati iznosi

$$\deg P^{'} + \deg Q + 1 \quad (7)$$

,a bi se Diophantska jednadžba mogla riješiti u općem slučaju, treba vrijediti

$$\deg P^{'} + \deg Q + 1 \geq \deg A_0 + \deg A_M \quad (8)$$

Ako je zadovoljen uvjet moničnosti onda možemo pisati

$$\deg \ A + degP = \deg A_0 + \deg A_M \quad (9)$$

uvrštavanjem (9) na desnu stranu od (8)

$$\deg P^{'} + \deg Q + 1 \geq \deg \ A + degP \quad (10)$$

$$\deg P^{'} + \deg Q + 1 \geq \deg \ A + degP^{'} + i \quad (11)$$

odnosno

$$\deg Q \geq degA + i - 1 \quad (12)$$

Zbog kauzalnosti (0) mora vrijediti:

$$degP(z) \geq degQ(z) \quad (13)$$

$$degP^{'}(z) + i \geq degA(z) + i - 1 \quad (14)$$

$$degP^{'}(z) \geq degA(z) - 1 \quad (15)$$

Iz diophantske jednadžbe (1)

$$degA(z) + degP^{'}(z) + i = degA_0(z) + degA_M(z) \quad (16)$$

i relacije (15) slijedi

$$\boldsymbol{degA_0(z) \geq 2 * degA - degA_M - 1 + i} \quad \textbf{(4-67)}$$

Iz diophantske jednadžbe direktno možemo dobiti i stupanj polinoma P(z)

$$\deg \ A(z) + degP(z) = \deg A_0 + \deg A_M \quad (17)$$

$$\boldsymbol{degP(z) = \deg A_0 + \deg A_M - degA = degA_0} \quad \textbf{(4-68)}$$

Teorem o jednoznačnosti rješenja diophantske jednadžbe:

Neka je dana opća, rješiva, polinomska diophantova jednadžba oblika

$$AX + BY = C \qquad (18)$$

gdje su A,B,C poznati polinomi. Jednoznačno rješenje postoji ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta:

$$X < B \; ili \; Y < A \qquad (19)$$

Primijenjeno na našu diophantsku jednadžbu (1) zapisanu u malo modificiranome obliku

$$A(z)(z-1)^i P'(z) + B(z)Q(z) = A_0(z)A_M(z) \qquad (20)$$

iz teorema o jednoznačnosti diophantske jednadžbe dobivamo uvjete:

$$degP^{'}(z) < degB(z) \quad (21) \quad \text{ili}$$

$$degQ(z) < \deg[A(z)(z-1)^i] \quad (22)\text{ ,} \quad \text{odnosno}$$

$$\boldsymbol{degQ(z) < \deg A(z) + i} \quad \textbf{(4.69)}$$

Dakle, zadnja relacija nije uvjet kauzalnosti regulatora nego jednoznačnosti rješenja diophantske jednadžbe. Očito je da prvi uvjet (21) nije zadovoljen zbog relacije (15). X je jednak polinomu P'(z) jer je to nepoznati dio jednadžbe, dok je dio $(z-1)^i$ „pripojen“ polinomu A(z) jer je on određen.