

# Upravljanje elektromotornim pogonima 2009/2010

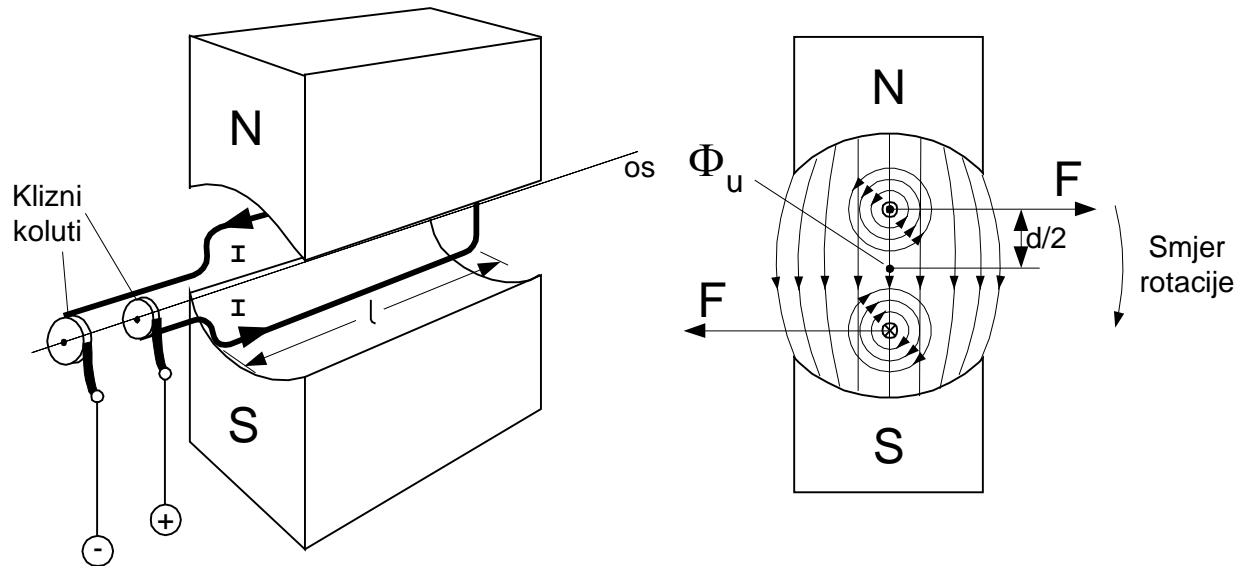
**Prof.dr.sc. Nedjeljko Perić**

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo  
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predavanje 2 – Istosmjerni motor – matematički model

## Istosmjerni motor s nezavisnom uzбудom

- Vrtnja svitka protječanog istosmjernom strujom u magnetskom polju:



- Zakretni moment motora:

$$M = F \cdot \frac{d}{2} + F \cdot \frac{d}{2} = F \cdot d \quad (2 - 1)$$

Sl.2.1. Načelo rada istosmjernog stroja

- Sila zakretanja proporcionalna je uzbudnom toku  $\Phi_u$  i struji  $I$  koja protječe kroz svitak:

$$F \sim \Phi_u \cdot I \Rightarrow M = k_1 \Phi_u \cdot I = K_m \Phi_u \cdot I, \quad (2 - 2)$$

$K_m$  - konstanta određena konstrukcijom stroja

## Istosmjerni motor s nezavisnom uzбудom

- Istodobno se u svitku inducira protuelektromotorna sila (napon)  $E$ :

$$E = Blv, \quad (2 - 3)$$

$$B = \frac{\Phi_u}{A} \quad \text{- magnetska indukcija, [ T ].}$$

$l$  - duljina svitka, [ m ].

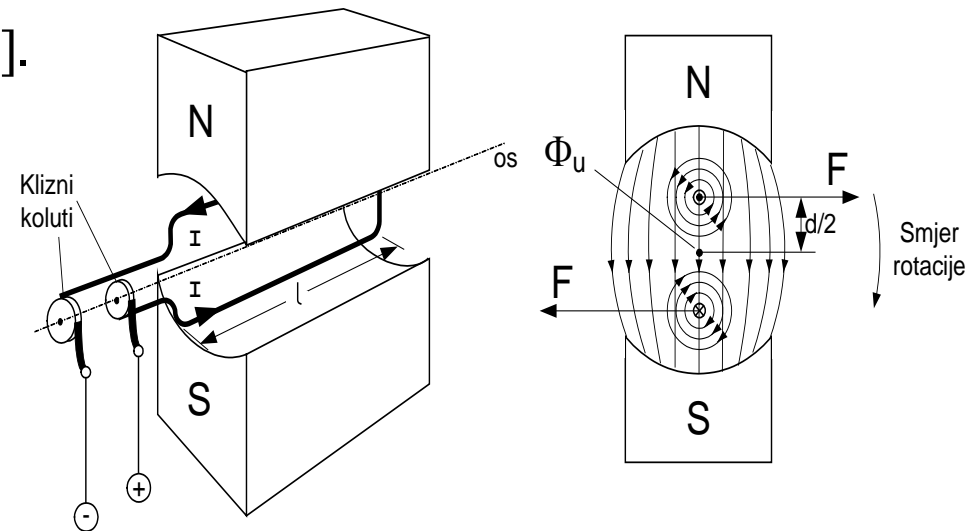
$$v = \frac{d}{2} \cdot \Omega \quad \text{- obodna brzina, [ m/s ],}$$

$\Omega$  - brzina vrtnje [ rad/s ].

- Iz (2 - 3) slijedi:

$$E = K_e \Phi_u \Omega, \quad (2 - 4)$$

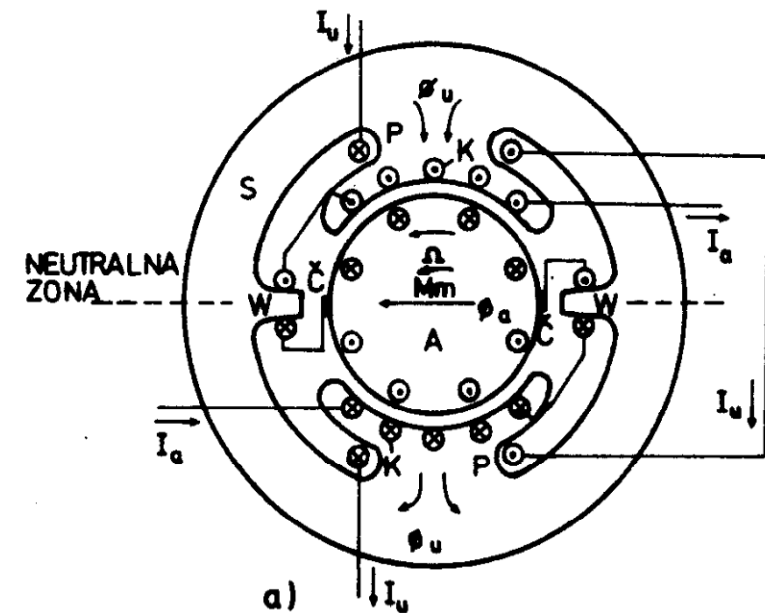
$K_e$  - konstanta određena konstrukcijom stroja



Sl.2.1. Načelo rada istosmjernog stroja

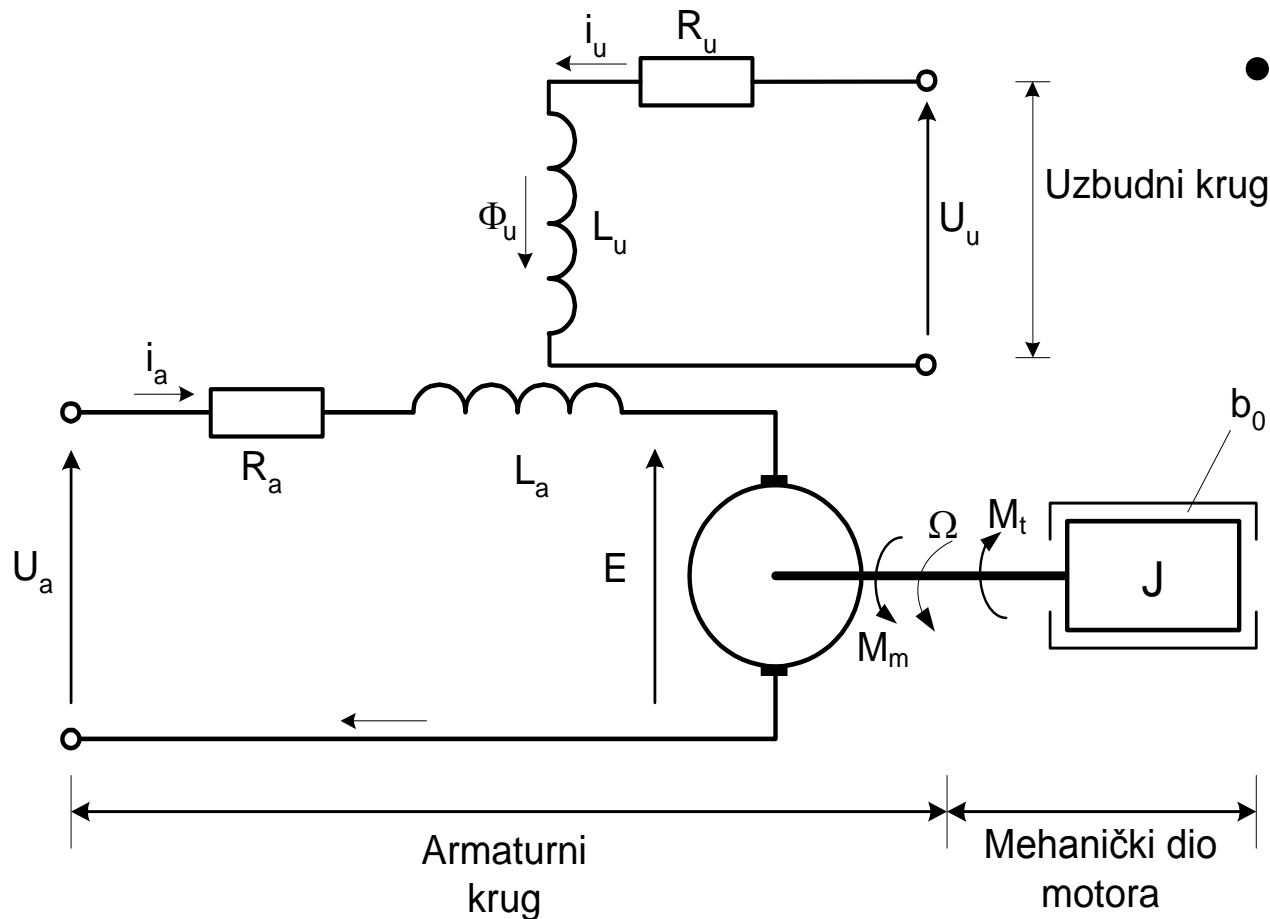
## Istosmjerni motor s nezavisnom uzbudom

- Na glavnim polovima **P** statora **S** nalaze se uzбудni namoti napajani uzbuđnim naponom  $U_u$  kroz koje teče struja uzbude  $I_u$ ; struja uzbude stvara uzbuđni tok (glavni magnetski tok)  $\Phi_u$ .
- U utorima armature **A** leže namoti koji se preko četkica **Č** i kolektora napajaju naponom armature  $U_a$ , te teče struja  $I_a$ . Rezultirajući tok armature  $\Phi_a$  poprečan je uzbuđnom toku (vektor toka  $\Phi_a$  zakrenut je za  $90^\circ$  el u odnosu na tok  $\Phi_u$ ). Tok  $\Phi_a$  znatno je manji od  $\Phi_u$  zbog velikog zračnog raspora.



Sl. 2.2. Načelna izvedba motora

## Nadomjesna shema istosmjernog motora

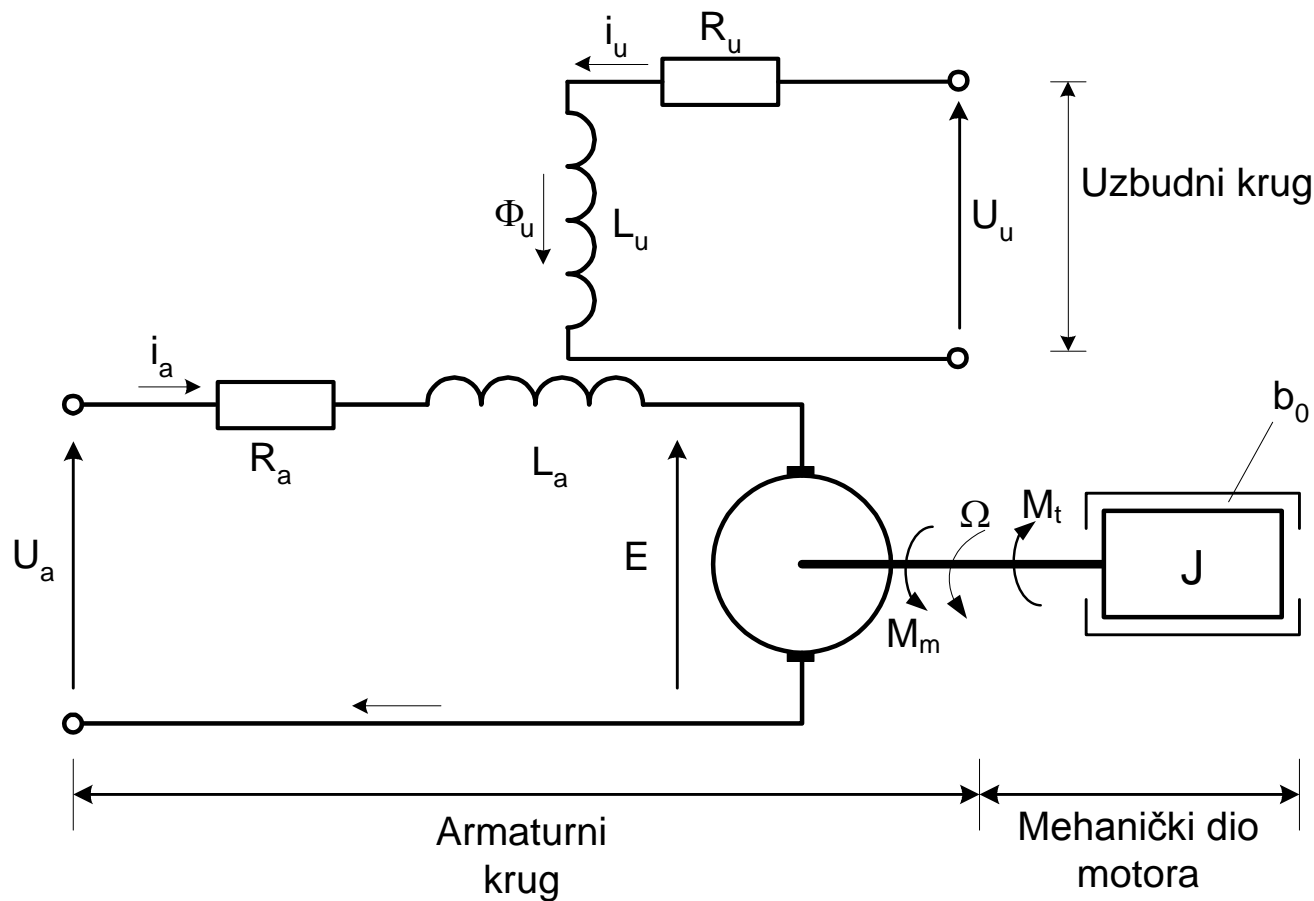


Sl. 2.3. Nadomjesna shema istosmjernog motora s nezavisnom uzbudom

### • Varijable motora:

- $U_u, U_a$  - napon uzbudnog i armaturnog kruga
- $i_u, i_a$  - struja uzbudnog i armaturnog kruga
- $\Phi_u$  - magnetski tok uzbudnog kruga
- $E$  - protuelektromotorna sila
- $M_m$  - razvijeni moment motora
- $\Omega$  - brzina vrtnje
- $M_f$  - moment trenja
- $M_t$  - moment tereta

## Nadomjesna shema istosmjernog motora

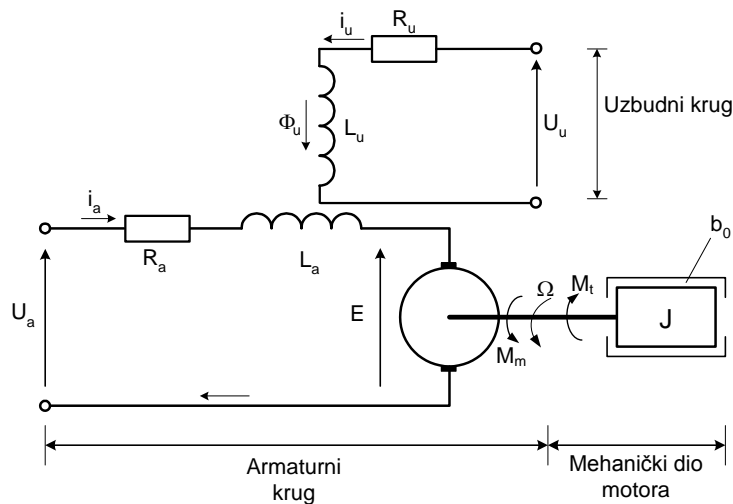


### ● Parametri motora:

- $R_a, L_a$  - otpor i induktivitet namota armaturnog kruga
- $R_u, L_u$  - otpor i induktivitet namota uzbuđenog kruga
- $J$  - moment inercije rotirajućih masa
- $N_u$  - broj zavoja uzbuđenog namota
- $b_0$  - koeficijent trenja u ležaju

Sl. 2.3. Nadomjesna shema istosmjernog motora s nezavisnom uzbuđom

## Nadomjesna shema istosmjernog motora



### • Uzbudni krug:

$$U_u = R_u i_u + N_u \frac{d\Phi_u}{dt} \quad (2 - 5)$$

- Za linearni donos između  $\Phi_u$  i  $i_u$ :

$$U_u = R_u i_u + L_u \frac{di_u}{dt} \quad (2 - 6)$$

- Općenito je ovisnost uzbudne struje o uzbudnom toku nelinearna:

$$i_u = f_2(\Phi_u) \quad (2 - 7)$$

### • Armatureni krug:

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E \quad (2 - 8)$$

$$E = K_e \Phi_u \Omega \quad (2 - 9)$$

- $K_e$  - konstrukcijska konstanta motora
- Razvijeni moment

$$M_m = K_m \Phi_m i_a \quad (2 - 10)$$

- Jednadžba ravnoteže momenata

$$M_m = M_t + M_f + J \frac{d\Omega}{dt} \quad (2 - 11)$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} - \text{dinamički moment}$$

- Općenito je:

$$M_t = f_1(\Omega) \quad (2 - 12)$$

(Ponekad je  $M_t = f_1(\Omega, \varphi)$ , gdje je  $\varphi$  zakret osovine motora)

## Nelinearni model istosmjernog motora

- Primjenom L - transformacije na prethodne linearne diferencijalne jednačbe (2 - 8), (2 - 11) i (2 - 5) dobije se:

$$I_a = \frac{K_a}{1 + T_a s} (U_a - E), \quad (2 - 13)$$

gdje je:

$$K_a = \frac{1}{R_a} \text{ - koeficijent "pojačanja" motora, [ A/V ],}$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} \text{ - armaturna (električka) vremenska konstanta, [ s ].}$$

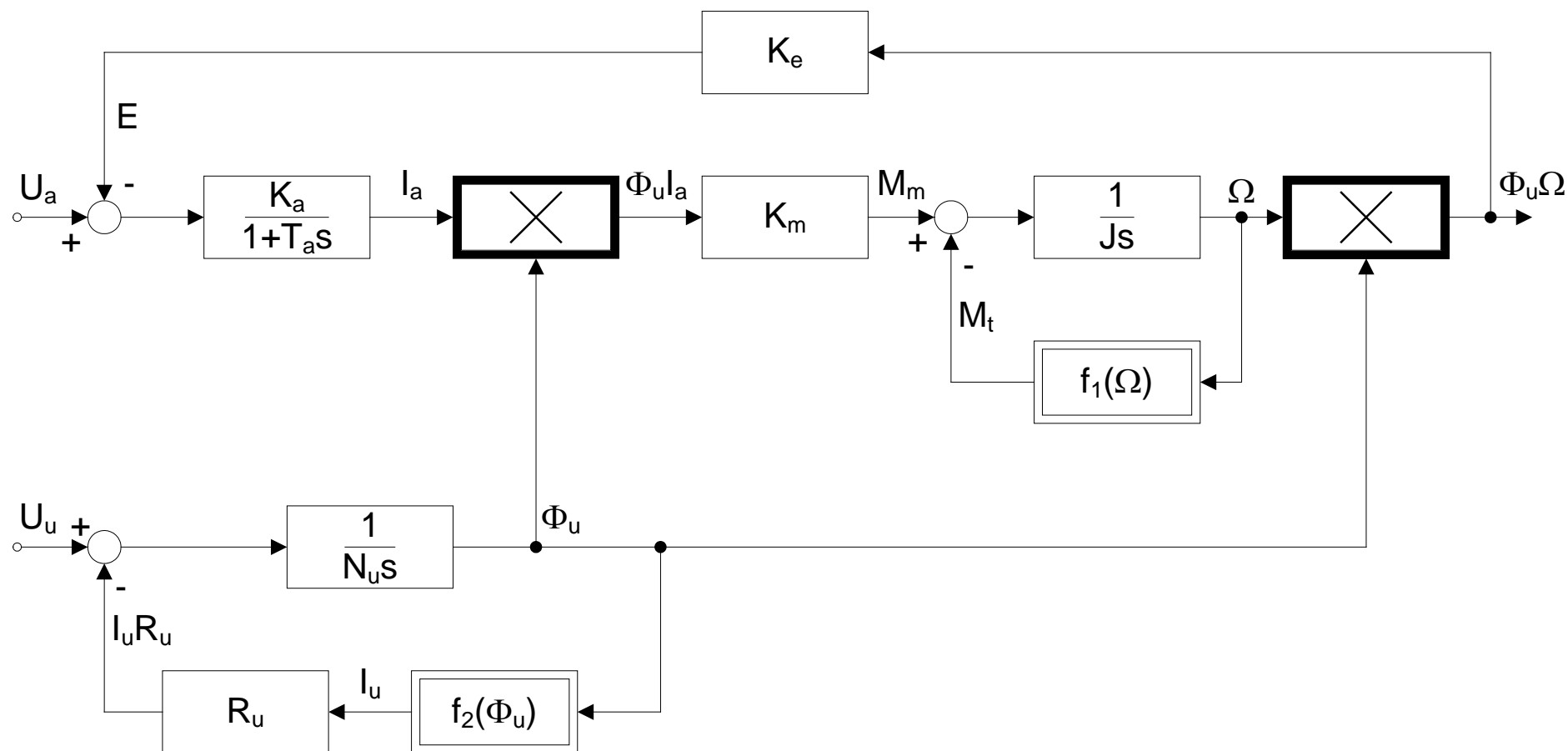
$$\Omega = \frac{1}{J_s} (M_m - M_t), \quad (2 - 14)$$

$$\Phi_u = \frac{1}{N_u s} (U_u - R_u I_u). \quad (2 - 15)$$

- Iz (2 - 13), (2 - 14) i (2 - 15) dobije se strukturni blokovski prikaz istosmjernog motora s nezavisnom uzбудom.



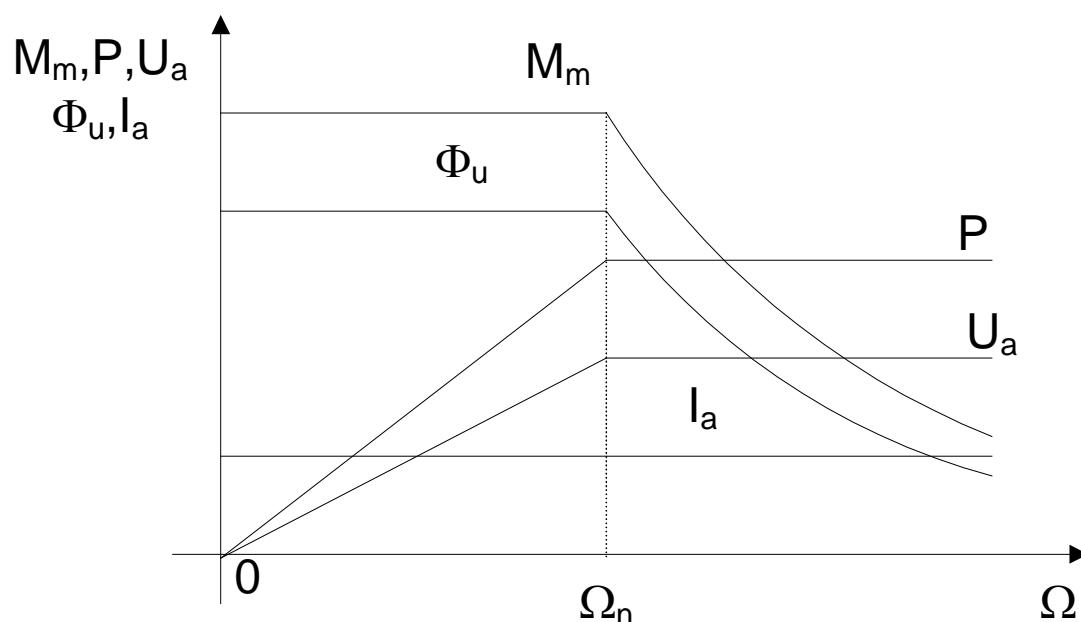
## Nelinearni model istosmjernog motora



Sl. 2.4.

## Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog motora

- Brzina vrtnje motora može se upravljati promjenom napona armature i promjenom napona uzbude
- U "**kombiniranoj**" regulaciji (Sl 2.5.):



- ♦ promjenom napona armature upravlja se do nazivne brzine vrtnje  $\Omega_n$  (pri tome je  $\Phi_u = \Phi_{un}$ );
- ♦ promjenom napona uzbude upravlja se iznad  $\Omega_n$  slabljenje polja); pri tome je napon armature konstantan.

## Linearizirani model istosmjernog motora

- Ovo postaje evidentnim prema sljedećem razmatranju:

$$\begin{aligned}
 U_a &= E + R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} \stackrel{\text{stac. stanje}}{\Rightarrow} U_a = E + R_a I_a \\
 U_a &= K_e \Phi_u \Omega + R_a I_a \\
 \Omega &= \frac{U_a - R_a I_a}{K_e \Phi_u} \\
 \Omega &\sim \frac{U_a}{K_e \Phi_u}
 \end{aligned}
 \tag{2 - 16}$$

- Za daljnja razmatranja pretpostavit ćemo

$$U_a = konst. \Rightarrow \Phi_u = konst.$$

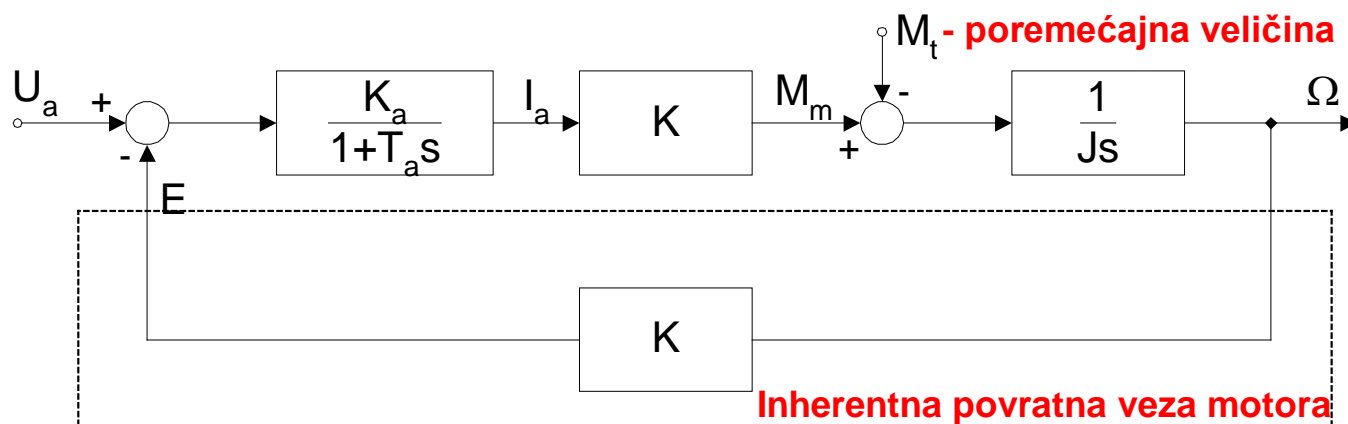
pa izrazi (2 – 9) i (2 – 10) postaju:

$$E = K \Omega \tag{2 - 17}$$

$$M_m = K i_a \tag{2 - 18}$$

- U tom slučaju blokovska shema sa Sl. 2.4 poprima oblik Sl. 2.6

## Linearizirani model istosmjernog motora



Sl. 2.6. Blokovska shema upavljanja brzinom vrtnje promjenom napona armature

- Iz Sl. 2.6 dobije se:

$$\frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{1}{K} \frac{1}{1 + T_m s + T_a T_m s^2}, \quad (\text{uz } M_t(s) = 0) \quad (2 - 15)$$

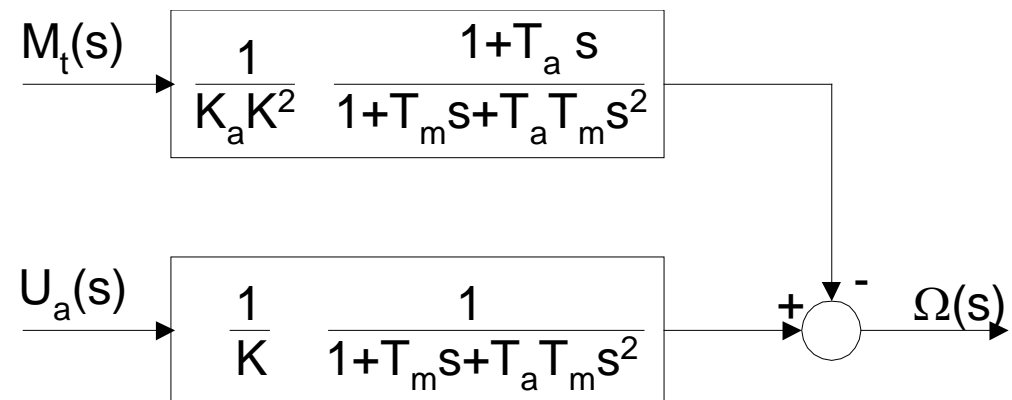
$$\frac{\Omega(s)}{M_t(s)} = -\frac{1}{K_a K^2} \frac{1 + T_a s}{1 + T_m s + T_a T_m s^2}, \quad (\text{uz } U_a(s) = 0) \quad (2 - 16)$$

## Linearizirani model istosmjernog motora

gdje je:

$$T_m = \frac{JR_a}{K^2} = \frac{J}{K_a K^2} \quad \text{- elektromehanička vremenska konstanta, [ s ].}$$

*Blokovski prikaz (Sl. 2.7.):*



- Ako se promatra struja armature kao regulirana veličina onda je:

$$I_a(s) = \frac{K_a T_m s}{1 + T_m s + T_a T_m s^2} U_a(s) + \frac{1}{K} \frac{1}{1 + T_m s + T_a T_m s^2} M_t(s). \quad (2 - 17)$$

## Linearizirani model istosmjernog motora

- Prepoznaje se opći oblik prijenosne funkcije 2. reda:

$$G(s) = \frac{K_s}{1 + a_1 s + a_2 s^2} \hat{=} \frac{K_s}{1 + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad (2 - 18)$$

gdje je:

$\omega_n$  - prirodna frekvencija neprigušenih oscilacija,  $[s^{-1}]$ ,  $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_a T_m}}$

$\zeta$  - relativni koeficijent prigušenja,  $\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_m}{T_a}}$