

Upravljanje elektromotornim pogonima 2009/2010

Prof.dr.sc. Nedjeljko Perić

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predavanje 1 – Poboljšanje vladanja sustava upravljanja pomoću
složenijih struktura

Cilj

- Razumjeti učinkovitost nadogradnje osnovne jedнопетljaste regulacijske strukture uvođenjem predupravljanja po poremećajnim veličinama procesa
- Razumjeti praktičnost primjene kaskadne strukture upravljanja u automatizaciji postrojenja i procesa kojom se može osigurati učinkovita kompenzacija poremećajnih veličina kao i dobro slijeđenje referentne veličine (uz određene dodatne funkcije)
- Ovladati praktičnim tehnikama sinteze regulatora u kaskadnoj strukturi upravljanja kao što su:
 - tehnički optimum i
 - simetrični optimum
- Stvoriti podloge za nadogradnju koncepta kaskadne strukture upravljanja s ciljem udovoljenja zahtjeva specifičnih u automatizaciji raznorodnih proizvodnih i radnih procesa

Složene strukture regulatora

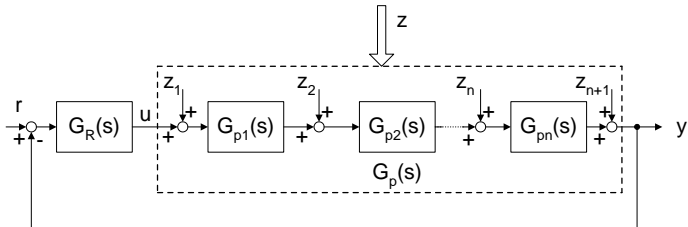
- Dosadašnja razmatranja odnosila su se na sustave **upravljanja s jednom povratnom vezom** (jednopoljaste regulacijske krugove)
- Uz pretpostavku da se na sustav upravljanja postavljaju **visoki dinamički zahtjevi** ($\sigma_m, t_a, t_\varepsilon, \dots$), procesi
 - koji se opisuju matematičkim modelima višeg reda, i/ili
 - s izraženim mrtvim vremenima, i/ili
 - na koje djeluju izražene smetnje

zahtijevaju **složene strukture regulatora** – visoki red polinoma u brojniku i nazivniku $G_R(s)$

- **Visoki red regulatora** $G_R(s)$ sučeljava se s **poteškoćama u realizaciji** te s **osjetljivošću na smetnje** (šum u mjernim signalima)
- Budući da su ovi **regulatori na modelima zasnovani regulatori**, oni su u pravilu **osjetljivi na promjene parametara procesa**

Poboljšanja regulacijskog vladanja

- **Moguća poboljšanja** regulacijskog vladanja najčešće se zasnivaju na:
 - **unaprijednoj kompenzaciji utjecaja smetnje** (unaprijednoj regulaciji smetnje, *engl.* feedforward control), gdje se utjecaj smetnje kompenzira prije nego što smetnja počne djelovati na reguliranu veličinu (vidi Sliku 1.1)
 - skraćanju putova signala između mjesta djelovanja poremećaja z i mjesta djelovanja upravljačke veličine u (u smjeru toka signala), što se postiže primjenom **višepetljaste kaskadne regulacije**



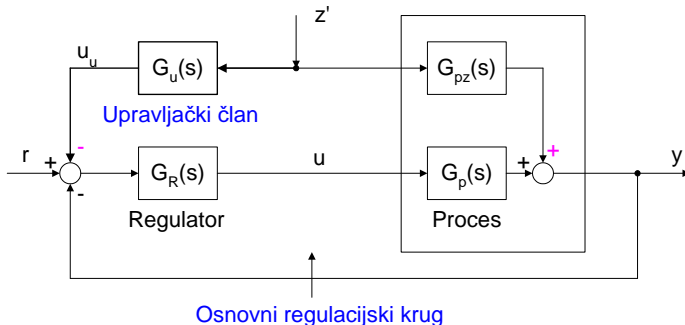
Slika 1.1: Prikaz djelovanja smetnji na proces

Unaprijedna kompenzacija utjecaja smetnje

- Unaprijedna kompenzacija utjecaja smetnje predstavlja proširenje osnovne strukture sustava upravljanja zasnovane na povratnoj vezi
- Utjecaj smetnje može se kompenzirati na jedan od dvaju načina:
 - preko regulatora,
 - preko izvršnog elementa

Kompenzacija smetnje preko regulatora

- Signal smetnje z' u ovoj se realizaciji dovodi preko upravljačkog člana $G_U(s)$ na ulaz regulatora (Slika 1.2)



Slika 1.2: Unaprijedna kompenzacija smetnje preko regulatora

- Pri tome je smetnju z' potrebno ili mjeriti ili estimirati (određivati na temelju lakše mjerljivih veličina procesa)

Projektiranje upravljačkog uređaja (1)

- Projektiranje upravljačkog uređaja zasniva se na blokovskom prikazu na [Slici 1.2](#):

$$Y(s) = [R(s) - Y(s) - Z'(s) \cdot G_u(s)] G_R(s) G_p(s) + Z'(s) G_{pz}(s) \quad (1-1)$$

- Iz (1-1) slijedi:

$$Y(s) = \frac{G_{pz}(s) - G_u(s) G_R(s) G_p(s)}{1 + G_R(s) G_p(s)} \cdot Z'(s) + \frac{G_R(s) G_p(s)}{1 + G_R(s) G_p(s)} \cdot R(s) \quad (1-2)$$

- Uvedimo oznake:

$$G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad G_p(s) = \frac{D(s)}{C(s)},$$

$$G_u(s) = \frac{B_u(s)}{A_u(s)}, \quad G_{pz}(s) = \frac{D_z(s)}{C_z(s)}$$

$$\deg[A(s)] = z, \quad \deg[B(s)] = w,$$

$$\deg[C(s)] = n, \quad \deg[D(s)] = m,$$

$$\deg[C_z(s)] = n_z, \quad \deg[D_z(s)] = m_z$$

Projektiranje upravljačkog uređaja (2)

- Uz navedene oznake izlaz $Y(s)$ je (radi lakšeg zapisa izostavlja se oznaka "(s)"):

$$Y = \frac{A_u A C D_z - B_u B D C_z}{A_u C_z (A C + B D)} \cdot Z' + \frac{B D}{A C + B D} \cdot R \quad (1-3)$$

- Iz (1-3) slijedi da je karakteristična jednačba sustava upravljanja s obzirom na smetnju:

$$A_u C_z (A C + B D) = 0, \quad (1-4)$$

a karakteristična jednačba s obzirom na vodeću veličinu

$$A C + B D = 0, \quad (1-5)$$

te su dakle vlastita gibanja različita

- U idealnom slučaju utjecaj smetnje se u cijelosti kompenzira uz (vidi (1-2) i (1-3)):

$$G_{pz} = G_u G_R G_p \rightarrow G_u = \frac{G_{pz}}{G_R G_p} = \frac{A C D_z}{B D C_z} \quad (1-6)$$

Projektiranje upravljačkog uređaja (3)

- Uz G_u odabran prema (1-6), prema (1-2) slijedi:

$$\frac{Y(s)}{Z'(s)} = \frac{G_{pz} - G_u G_R G_p}{1 + G_R G_p} = 0 \quad (1-7)$$

- Uz pretpostavku da je $w = z$ (isti red brojnika i nazivnika prijenosne funkcije regulatora), dobije se iz (1-6) **uvjet za realizaciju upravljačkog uređaja** kada se postiže potpuna kompenzacija smetnje:

$$m + n_z \geq m_z + n,$$

odnosno

$$(n - m) \leq (n_z - m_z) \quad (1-8)$$

- Prema tome, **polni višak prijenosne funkcije $G_p(s)$ treba biti manji ili jednak od polnog viška $G_{pz}(s)$**
- Za slučaj kad je $G_{pz} = G_p$ (tj. smetnja djeluje na ulazu procesa), slijedi $G_u = \frac{1}{G_R}$

Primjer 1.1: Upotreba I-regulatora uz djelovanje smetnje na ulaz procesa

- Za regulator I-tipa

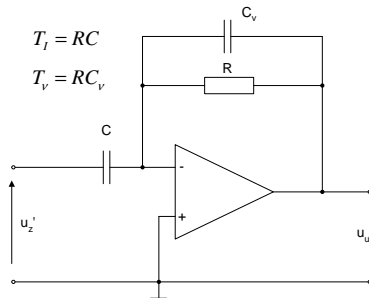
$$G_R(s) = \frac{1}{T_I s}$$

dobije se

$$G_U(s) = T_I s$$

- Približna (realna) izvedba upravljačkog uređaja (Slika 1.3) zasniva se na prijenosnoj funkciji:

$$G_U(s) = \frac{T_I s}{1 + T_V s}$$



Slika 1.3: Izvedba $G_U(s)$ u Primjeru 1.1

Primjer 1.2: Upotreba PI regulatora uz djelovanje smetnje na ulaz procesa

- Za regulator PI tipa

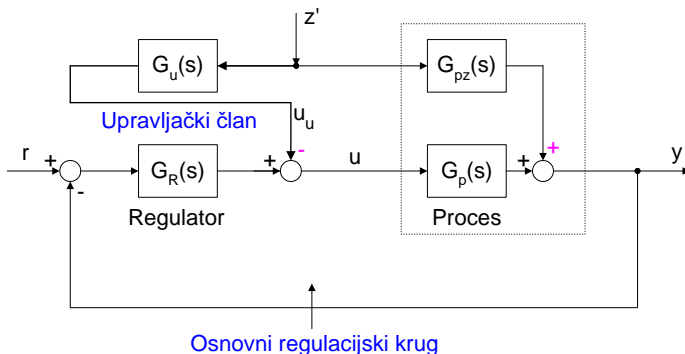
$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

proizlazi:

$$G_U(s) = \frac{1}{K_R} \frac{T_I s}{1 + T_I s}$$

Kompenzacija utjecaja smetnje neposredno preko izvršnog elementa

- Kompenzacija utjecaja smetnje preko izvršnog elementa prikazana je na Slici 1.4



Slika 1.4: Kompenzacija smetnje neposredno preko izvršnog člana

Projektiranje upravljačkog uređaja (1)

- Iz Slike 1.4 slijedi:

$$Y = [(R - Y)G_R - Z'G_u] \cdot G_p + Z'G_{pz},$$

odnosno

$$Y = \frac{G_{pz} - G_u G_p}{1 + G_R G_p} Z' + \frac{G_R G_p}{1 + G_R G_p} R, \quad (1-9)$$

$$Y = \frac{A[A_u C D_z - B_u D C_z]}{A_u C_z (AC + BD)} Z' + \frac{BD}{AC + BD} R \quad (1-10)$$

- Prema (1-3) i (1-10) evidentno je da su karakteristične jednadžbe u oba načina kompenzacije jednake
- Idealna kompenzacija** utjecaja smetnje preko izvršnog elementa slijedi iz (1-9):

$$G_{pz} = G_u G_p \rightarrow G_u = \frac{G_{pz}}{G_p} = \frac{C D_z}{D C_z} \quad (1-11)$$

Projektiranje upravljačkog uređaja (2)

- Iz (1-11) dobije se uvjet za realizaciju upravljačkog uređaja koji je identičan uvjetu (1-8) ($n - m \leq n_z - m_z$)
- Za slučaj $G_{pz} = G_p$ (smetnja djeluje na ulaz procesa) slijedi $G_u = 1$
- U slučaju da je $G_p(s)$ s neminimalno-faznim vladanjem ili ako je $G_{pz}(s)$ nestabilno dobio bi se prema (1-6) ili (1-11) nestabilni upravljački član (ne može se realizirati) pa kompenzacija utjecaja smetnje na prikazani način nije moguća
- U tim slučajevima može se koristiti statička kompenzacija (umjesto razmatrane dinamičke kompenzacije) pomoću proporcionalnog člana:

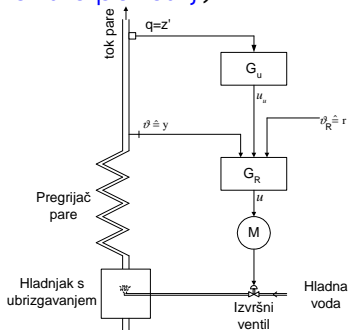
$$G_u = \frac{K_{pz}}{K_p}, \quad (1-12)$$

gdje je $K_{pz} = G_{pz}(0)$ i $K_p = G_p(0)$

- Napomena: Predupravljanje ne utječe na stabilnost sustava u slučaju linearnih procesa. Stoga se predupravljanje može dodati nakon što se podesi zatvoreni regulacijski krug

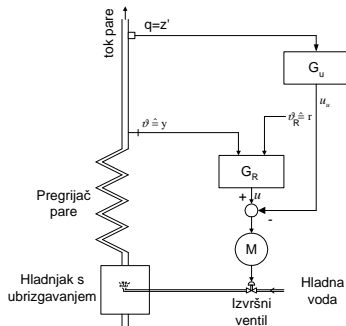
Primjer 1.3: Regulacija temperature pregrijača pare

- Regulirana veličina je temperatura pare $\vartheta \hat{=} y$ na izlazu iz pregrijača pare. Dotok rashladne vode u hladnjak s ubrizgavanjem određen je upravljačkom veličinom u . Promjena toka pare predstavlja smetnju $q = z'$ za regulacijski krug temperature pare (iznos smetnje ovisi o potrošnji)



Slika 1.5: Kompensacija utjecaja smetnje preko regulatora

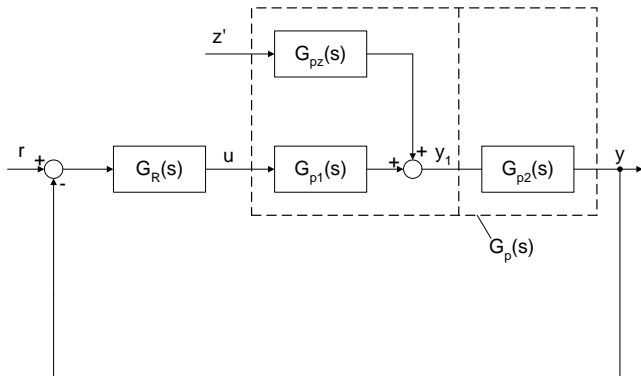
Upravljanje elektromotornim pogonima ::



Slika 1.6: Kompensacija utjecaja smetnje neposredno preko izvr. el.

Kaskadna regulacija (1)

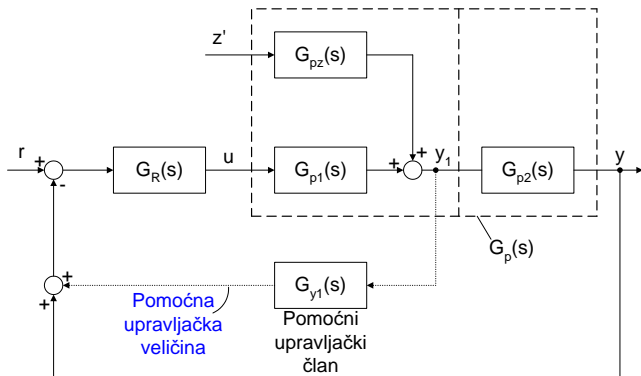
- Često je moguće proces promatrati kroz više parcijalnih, međusobno povezanih potprocesa
- Pretpostavimo da se proces može prikazati pomoću dva potprocesa (Slika 1.7)



Slika 1.7: Proces s dva potprocesa u sustavu upravljanja

Kaskadna regulacija (2)

- Prema Slici 1.7, osnovnoj jedнопетljastoj strukturi upravljanja dodaje se pomoćni upravljački član $G_{y1}(s)$ koji na temelju mjerenja pomoćne varijable y_1 tvori pomoćnu upravljačku veličinu



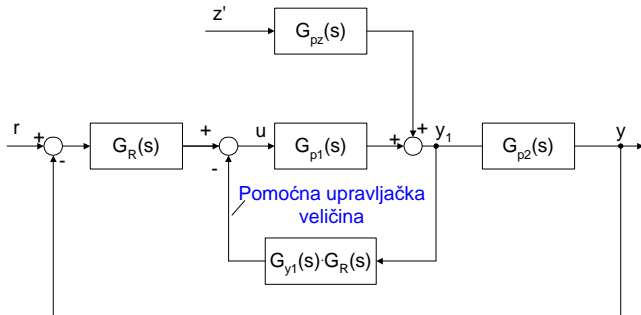
Slika 1.8: Sustav upravljanja nadograđen pomoćnim upravljačkim članom

Kaskadna regulacija (3)

- Pomoćnom upravljačkom veličinom korigira se signal povratne veze sustava
- Upravljački član $G_{y1}(s)$ treba imati sljedeća svojstva:
 - ne smije utjecati na stacionarno stanje, odnosno $G_{y1}(s)$ ima derivacijski karakter ("elastična povratna veza");
 - ima korekcijski karakter i doprinosi boljem dinamičkom vladanju sustava, uz relativno jednostavnu izvedbu regulatora $G_R(s)$;
 - ima **svojstvo predikcije**
- Regulacijska struktura prikazana na Slici 1.8 naziva se i **regulacijskom strukturom s pomoćnom upravljačkom veličinom**
- Obično se takva struktura ne realizira u suvremenim rješenjima sustava upravljanja

Kaskadna regulacija (4)

- Koristeći se pravilima blokovske algebre, blokovsku shemu na Slici 1.8 moguće je prikazati i na način kao na [Slici 1.9](#)

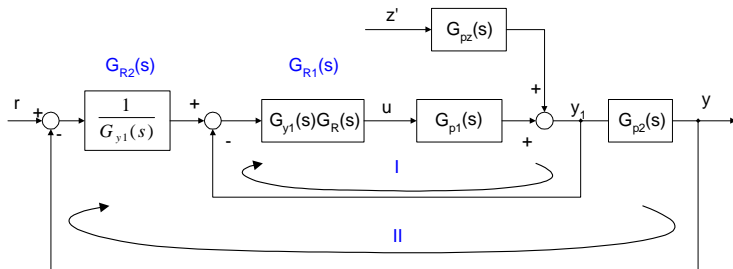


Slika 1.9: Blokovska shema ekvivalentna blokovskoj shemi na Slici 1.8

- Sustav na Slici 1.9 promatran izvana nije se promijenio u odnosu na sustav sa Slike 1.8 ($\frac{Y(s)}{R(s)}$ je nepromijenjen) – pri tome su samo neke unutarnje varijable izgubile svoj identitet

Kaskadna regulacija (5)

- Shema sa Slike (1.9) može se dalje transformirati te se dobije sustav prikazan na Slici 1.10



Slika 1.10: Blokvska shema ekvivalentna blokovskoj shemi na Slici 1.9

Kaskadna regulacija (6)

- Sustav upravljanja sa Slike 1.10 ima dva regulacijska kruga (petlje):
 - I - pomoćni regulacijski krug (unutarnji regulacijski krug, podređeni regulacijski krug)
 - II - glavni regulacijski krug (vanjski regulacijski krug, nadređeni regulacijski krug)
- Regulacijska struktura prema Slici 1.10 naziva se kaskadnom strukturom upravljanja (kaskadnom regulacijom)
- U takvoj strukturi evidentna je hijerarhija:
 - Glavni regulator G_{R2} ne djeluje neposredno na izvršni element nego tvori referentnu (vodeću) veličinu za podređeni regulator G_{R1}
 - Utjecaj smetnje u podređenom regulacijskom krugu praktički se kompenzira u tom krugu
- Ako se mjeri više pomoćnih veličina u procesu (prikazanom kroz potprocese), onda se može dobiti višestruka kaskadna struktura upravljanja
- Kaskadna regulacijska struktura pokazuje određene sličnosti sa strukturom upravljanja zasnovanoj na varijablama stanja – za optimalni regulator stanja postoje povratne veze za sva stanja

Kaksadna regulacija (7)

- Iz Slike 1.10 slijedi:

$$Y = \left\{ \left[(R - Y) G_{R2} - \frac{Y}{G_{p2}} \right] G_{R1} G_{p1} + Z' G_{pz} \right\} G_{p2},$$

odnosno (uz izostavljanje oznake "(s)" radi jednostavnosti):

$$Y = \frac{G_{pz} G_{p2}}{1 + G_{R1} G_{p1} (1 + G_{R2} G_{p2})} Z' + \frac{G_{R1} G_{R2} G_{p1} G_{p2}}{1 + G_{R1} G_{p1} (1 + G_{R2} G_{p2})} R \quad (1-13)$$

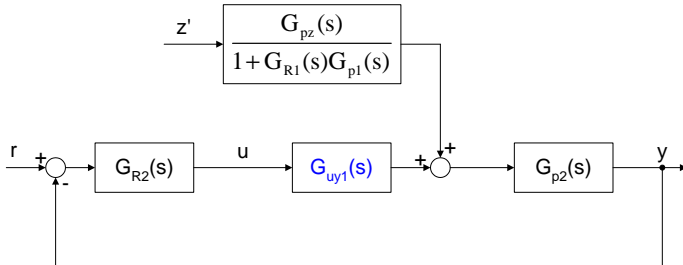
- Iz (1-13) evidentno je da **stabilnost sustava** (vidi karakterističnu jednadžbu) **ovisi i o podređenom regulacijskom krugu**
- Stoga je **prvi korak u sintezi** kaskadnog sustava upravljanja **sinteza podređenog kruga**

Kaskadna regulacija (8)

- Iz Slike 1.10 slijedi **prijenosna funkcija zatvorenog podređenog kruga** s obzirom na njegovu vodeću veličinu ($z' = 0$):

$$G_{uy1} = \frac{G_{R1}G_{p1}}{1 + G_{R1}G_{p1}} \quad (1-14)$$

- $G_{uy1}(s)$ predstavlja dio procesa glavnog regulacijskog kruga (Slika 1.11)



Slika 1.11: Shema glavnog regulacijskog kruga

Kaskadna regulacija (9)

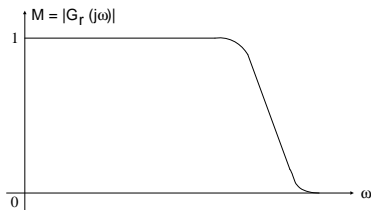
- Nakon obavljene sinteze podređenog regulacijskog kruga, problem sinteze vanjskog kruga svodi se na standardni problem sinteze jedнопетлјастог regulacijskog kruga (ako se radi o dvопетлјастој kaskadnoj strukturi)
- Podređeni regulacijski krugovi su obično brži od nadređenih, te se često prijenosna funkcija podređenog regulacijskog kruga može strukturno pojednostavniti pri sintezi nadređenog regulacijskog kruga
- Regulatori smješteni u pojedinim regulacijskim petljama obično su jednostavnije strukture (PID regulatori, ili iz njih izvedeni regulatori)
- Kaskadni se sustavi upravljanja vrlo često primjenjuju u automatizaciji raznih postrojenja i procesa gdje je potrebno imati dobru slijednu regulaciju te dobru čvrstu regulaciju (regulaciju smetnje)
- Također se nerijetko kaskadna regulacija kombinira s unaprijednom regulacijom po smetnji

Kaskadna regulacija (10)

- U primjenama kaskadnih sustava upravljanja afirmirali su se **praktični postupci** parametriranja regulatora:
 - tehnički optimum
 - simetrični optimum

Tehnički optimum (1)

- **Pretpostavka** za provedbu sinteze prema tehničkom optimumu (*engl.* magnitude optimum) jest da je **proces bez astatizma**

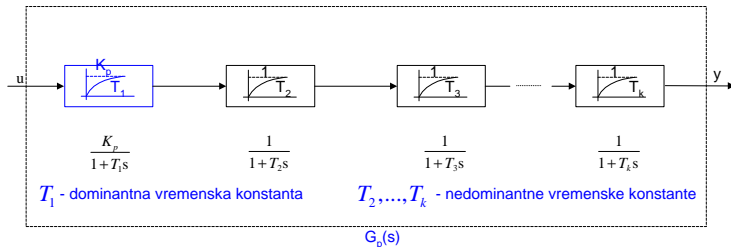


Slika 1.12: Amplitudno-frekvencijska karakteristika zatvorenog kruga kod primjene tehničkog optimuma

- Zasniva se na zahtjevima:
 - **amplitudno-frekvencijska karakteristika** zatvorenog regulacijskog kruga $|G_r(j\omega)|$ treba imati **konstantnu vrijednost** u čim širem frekvencijskom području (ω_b čim veće)
 - $|G_r(j\omega)|$ praktički **ne smije imati rezonantno uzdizanje** ($M = 1$ za sustave svedene na jediničnu povratnu vezu)
- Temeljem ovih zahtjeva postiže se **brzi, približno aperiodski odziv sustava upravljanja**

Tehnički optimum (2)

- Za daljnja razmatranja pretpostavimo strukturu procesa prikazanu na Slici 1.13 koja se sastoji od jednog aperiodskog člana s dominantnom vremenskom konstantom i njemu u seriju povezanih više aperiodskih članova s nedominantnim vremenskim konstantama



Slika 1.13: Struktura procesa pogodna za primjenu sinteze prema tehničkom optimumu

Tehnički optimum (3)

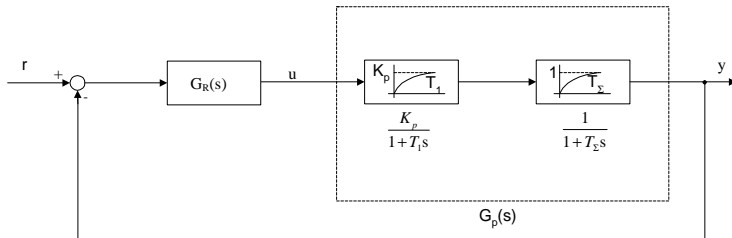
- Ako je:

$$T_2 + T_3 + \dots + T_k = T_\Sigma \ll T_1, \text{ npr. } T_1 > (5 \div 10) T_\Sigma,$$

onda se može primijeniti sljedeća **aproksimacija**:

$$\frac{1}{1 + T_2 s} \cdot \frac{1}{1 + T_3 s} \cdots \frac{1}{1 + T_k s} \approx \frac{1}{1 + (T_2 + T_3 + \dots + T_k) s} = \frac{1}{1 + T_\Sigma s} \quad (1-15)$$

- U tom se slučaju dobije regulacijski krug prikazan na **Slici 1.14**



Slika 1.14: Regulacijski krug pri sintezi prema tehničkom optimumu

Tehnički optimum (4)

- Za strukturu procesa na Slici 1.14 **preporuča se koristiti PI regulator:**

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}$$

- Integracijskom vremenskom konstantom kompenzira se dominantna vremenska konstanta procesa, tj. odabiremo:

$$T_I = T_1, \quad (1-16)$$

pa slijedi (uz $K_o = K_R K_p$ – kružno pojačanje):

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \frac{K_p}{1 + T_1 s} \frac{1}{1 + T_\Sigma s} = \frac{K_o}{T_I s (1 + T_\Sigma s)} \quad (1-17)$$

- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga s obzirom na vodeću veličinu glasi:

$$G_r(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{\frac{K_o}{T_I s (1 + T_\Sigma s)}}{1 + \frac{K_o}{T_I s (1 + T_\Sigma s)}} = \frac{K_o}{K_o + T_I s + T_I T_\Sigma s^2} \quad (1-18)$$

Tehnički optimum (5)

- Ako se prijenosna funkcija svede na opći oblik prijenosne funkcije drugog reda ($G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$), dobije se:

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + \frac{T_I s}{K_O} + \frac{T_I T_\Sigma s^2}{K_O}}, \quad (1-19)$$

iz čega slijedi:

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{T_I}{K_O}, \quad \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{T_I T_\Sigma}{K_O} \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_O}{T_I T_\Sigma}}, \quad (1-20)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \omega_n \frac{T_I}{K_O} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K_O}{T_I T_\Sigma}} \cdot \frac{T_I}{K_O} \rightarrow \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K_O} \frac{T_I}{T_\Sigma}}, \quad (1-21)$$

$$K_O = \frac{1}{4\zeta^2} \cdot \frac{T_I}{T_\Sigma}, \quad K_R = \frac{1}{4\zeta^2} \cdot \frac{1}{K_p} \cdot \frac{T_1}{T_\Sigma} \quad (1-22)$$

Tehnički optimum (6)

- Izbor $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ predstavlja tehnički najprihvatljiviji izbor za većinu primjena ($\sigma_m = 4.3\%$)
- Preporuča se

$$\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow K_R = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K_s} \cdot \frac{T_1}{T_\Sigma} \quad (1-23)$$

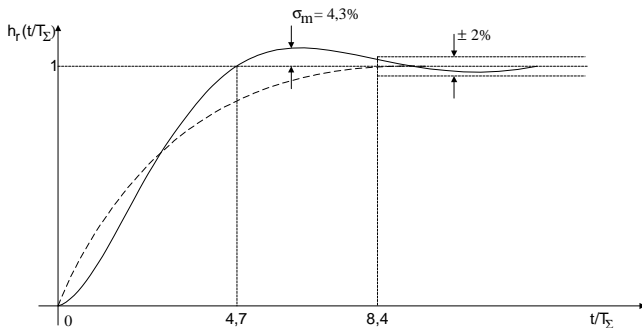
- Iz (1-19) za $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dobije se prijenosna funkcija zatvorenog sustava u kojem su parametri PI regulatora određeni prema tehničkom optimumu:

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + 2T_\Sigma s + 2T_\Sigma^2 s^2} \quad (1-24)$$

Tehnički optimum (7)

- Analitički izraz za **prijelaznu funkciju zatvorenog sustava** s obzirom na referentnu veličinu glasi (Slika 1.15):

$$h_r(t/T_\Sigma) = 1 - e^{-\frac{t}{2T_\Sigma}} \left(\cos \frac{t}{2T_\Sigma} + \sin \frac{t}{2T_\Sigma} \right) \quad (1-25)$$



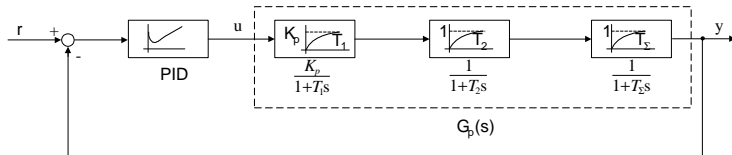
Slika 1.15: Prijelazna funkcija zatvorenog sustava upravljanja podešenog prema tehničkom optimumu

Tehnički optimum (8)

- Kao što je vidljivo iz (1-25) i Slike 1.15, odziv sustava isključivo ovisi o zbroju T_{Σ} nedominantnih (nekompenziranih) vremenskih konstanti
- Iz prijelazne funkcije (Slika 1.15) može se očitati:
 - $t_u \approx 4.7T_{\Sigma}$ – ulazno vrijeme (vrijeme porasta ($0 \div 100\%$))
 - $t_{2\%} \approx 8.4T_{\Sigma}$ – vrijeme ustaljivanja ($\varepsilon = \pm 2\%$)

Primjer 1.4: Proces s dvije dominantne vremenske konstante (1)

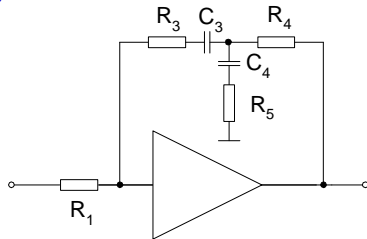
- Proces u regulacijskom krugu na Slici 1.16 upravlja se **PID regulatorom**



Slika 1.16: Regulacijski krug u Primjeru 1.4

- Pri tome su T_1 i T_2 dominantne vremenske konstante, a T_z je zbroj nedominantnih vremenskih konstanti regulacijskog kruga
- Potrebno je odrediti prijenosnu funkciju zatvorenog sustava $G_r(s)$ uz kompenzaciju dominantnih vremenskih konstanti procesa integracijskom i derivacijskom vremenskom konstantom regulatora

Primjer 1.4: Proces s dvije dominantne vremenske konstante (2)



Slika 1.17: Načelna shema realnog PID regulatora s operacijskim pojačalom

- Prijenosna funkcija PID regulatora sa Slike 1.17 glasi:

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \frac{1 + T_D s}{1 + T_\nu s},$$

gdje je $K_R = \frac{R_3}{R_1}$, $T_I = R_3 C_3$,
 $T_D = R_4 C_4$, $T_\nu = R_5 C_4$

- $T_\nu \ll T_D$ postiže se izborom $R_5 \ll R_4$
- Izborom, primjerice: $T_I = T_1$, $T_D = T_2$, te K_R prema (1-22) ($K_R = \frac{1}{2} \frac{1}{K_p} \frac{T_1}{T_\Sigma}$) dobije se:

$$G_r(s) = \frac{1}{1 + 2T_\Sigma s + 2T_\Sigma^2 s^2} \quad (1-26)$$

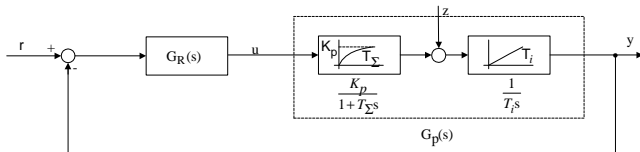
- Ovdje je u T_Σ uračunata i mala parazitna vremenska konstanta T_ν

Primjer 1.4: Proces s dvije dominantne vremenske konstante (3)

- Prijenosna funkcija (1-26) identična je prijenosnoj funkciji (1-24)
- Prema tome, prikladnim izborom strukture regulatora i prikladnim parametriranjem regulatora može se dobiti za različite strukture procesa jednako vladanje zatvorenog sustava

Simetrični optimum (1)

- **Pretpostavka** za primjenu simetričnog optimuma (*engl.* symmetrical optimum) (Kessler 1958.) jest da je **proces** **astatizmom 1. reda** (Slika 1.18):



Slika 1.18: Regulacijski krug prikladan za sintezu prema simetričnom optimumu

- T_Σ je zbroj nedominantnih vremenskih konstanata procesa
- Uz odabrani (**preporučeni**) regulator **PI** djelovanja $G_R(s) = K_R \frac{1+T_I s}{T_I s}$ dobije se prijenosna funkcija otvorenog kruga:

$$G_o(s) = K_R \frac{1+T_I s}{T_I s} \frac{K_p}{1+T_\Sigma s} \frac{1}{T_I s} = K_o \frac{1}{T_I T_I s^2} \cdot \underbrace{\frac{1+T_I s}{1+T_\Sigma s}}_{\text{fazno prethodjenje}} \quad (1-27)$$

Simetrični optimum (2)

- Da bi **sustav** upravljanja, čija je prijenosna funkcija otvorenog kruga (1-27), bio **stabilan**, mora vrijediti:

$$T_I > T_\Sigma \quad (1-28)$$

- Izraz za fazno-frekvencijsku karakteristiku za (1-27) glasi:

$$\varphi_o(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T_I - \arctg \omega T_\Sigma \quad (1-29)$$

- Maksimalna vrijednost fazno-frekvencijske karakteristike** (1-29) dobije se kako slijedi:

$$\frac{d\varphi_o(\omega)}{d\omega} = \frac{T_I}{1 + (\omega T_I)^2} - \frac{T_\Sigma}{1 + (\omega T_\Sigma)^2} = 0 \rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_I T_\Sigma}}, \quad (1-30)$$

odnosno

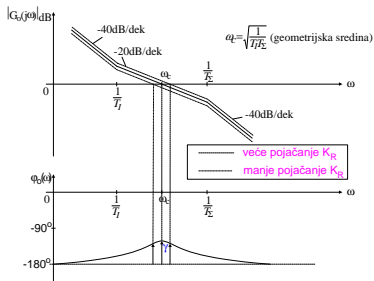
$$\varphi_o(\omega_m) = -180^\circ + \arctg \sqrt{\frac{T_I}{T_\Sigma}} - \arctg \sqrt{\frac{T_\Sigma}{T_I}} \quad (1-31)$$

Simetrični optimum (3)

- Ako se odabere da je presječna frekvencija

$$\omega_c = \omega_m \quad (1-32)$$

dobiju se **simetrična amplitudno-frekvencijska** i **simetrična fazno-frekvencijska** karakteristika kao na Slici (1.19)



- Iz fazno-frekvencijske karakteristike je vidljivo da se dobije maksimalno fazno osiguranje pri $\omega_m = \omega_c$
- Da bi se postigla simetričnost frekvencijskih karakteristika, tj. maksimalno fazno osiguranje, potrebno je da **parametri regulatora K_R i T_I** imaju točno određene vrijednosti

Slika 1.19: Frekvencijske karakteristike sustava – simetrični optimum

Simetrični optimum (4)

- Neka je integracijska vremenska konstanta regulatora:

$$T_l = a^2 T_\Sigma, \quad (1-33)$$

pri čemu je a konstanta koju treba odrediti ($a > 1$ prema (1-28) jer $T_l > T_\Sigma$)

- Iz (1-29), (1-30) i (1-32), uz (1-33) slijedi izraz za fazno osiguranje:

$$\gamma = \varphi_0(\omega_c) + 180^\circ = \arctg \sqrt{\frac{T_l}{T_\Sigma}} - \arctg \sqrt{\frac{T_\Sigma}{T_l}}, \quad (1-34)$$

odnosno:

$$\gamma = \arctg a - \arctg \frac{1}{a} = \arctg \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \quad (1-35)$$

- Iz (1-35) dobije se:

$$a = \operatorname{tg} \gamma + \frac{1}{\cos \gamma} = \frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \quad (1-36)$$

Simetrični optimum (5)

- Iz (1-33) i (1-36) slijedi:

$$T_I = \left(\frac{1 + \sin \gamma}{\cos \gamma} \right)^2 T_\Sigma \quad (1-37)$$

- Za određivanje pojačanja regulatora K_R polazi se od izraza:

$$|G_o(j\omega_c)| = 1,$$

pa se iz (1-27) dobije:

$$|G_o(j\omega_c)| = \frac{K_0}{T_I T_I \omega_c^2} \frac{\sqrt{1 + (\omega_c T_I)^2}}{\sqrt{1 + (\omega_c T_\Sigma)^2}} = 1 \quad (1-38)$$

- Iz (1-38), uz (1-32) i (1-33) slijedi: ($\omega_c = \frac{1}{\sqrt{T_I T_\Sigma}} = \frac{1}{aT_\Sigma}$):

$$K_R = \frac{1}{a} \frac{1}{K_p} \frac{T_I}{T_\Sigma} \quad (1-39)$$

Simetrični optimum (6)

- Lako se može dokazati da vrijedi svojstvo simetričnosti:

$$\left| G_o(j\frac{\omega_c}{\omega}) \right| = \frac{1}{\left| G_o(j\frac{\omega}{\omega_c}) \right|}, \quad (1-40)$$

$$\varphi_0(\frac{\omega_c}{\omega}) = \varphi_0(\frac{\omega}{\omega_c}) \quad (1-41)$$

- Uvrštenjem (1-33) i (1-39) u (1-27) dobije se prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na referentnu veličinu:

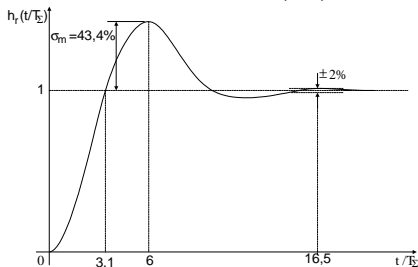
$$G_r(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{1 + a^2 T_\Sigma s}{1 + a^2 T_\Sigma s + a^3 T_\Sigma^2 s^2 + a^3 T_\Sigma^3 s^3} \quad (1-42)$$

- Za $a = 2$ slijedi fazno osiguranje $\gamma = 37^\circ$

Simetrični optimum (7)

- Iz (1-42), uz $a = 2$, dobije se prijelazna funkcija (Slika 1.20)

$$h_r\left(\frac{t}{T_\Sigma}\right) = 1 + e^{-\frac{t}{2T_\Sigma}} - 2e^{-\frac{t}{4T_\Sigma}} \cos \frac{\sqrt{3}}{4T_\Sigma} t \quad (1-43)$$



Slika 1.20: Prijelazna funkcija zatvorenog sustava upravljanja podešenog prema simetričnom optimumu

- Karakteristične veličine odziva sa Slike 1.20:

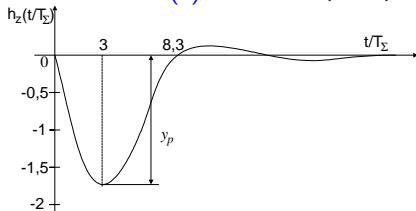
- $t_u \approx 3.1 T_\Sigma$ – ulazno vrijeme
- $t_m \approx 6 T_\Sigma$ – vrijeme prvog maksimuma
 $(t_m \approx \frac{3}{\omega_c} = \frac{3}{1/aT_\Sigma} \stackrel{a=2}{=} 6 T_\Sigma)$
- $t_{2\%} \approx 16.5 T_\Sigma$ – vrijeme ustaljivanja ($\varepsilon = \pm 2\%$)
- $t_r \approx 3.1 T_\Sigma$ – vrijeme porasta ($0 \div 100\%$)

Simetrični optimum (8)

- Prijenosna funkcija zatvorenog sustava s obzirom na smetnju z glasi:

$$G_{zz}(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)} = \frac{aT_{\Sigma}}{T_i} \frac{a^2 T_{\Sigma} s (1 + T_{\Sigma} s)}{1 + a^2 T_{\Sigma} s + a^3 T_{\Sigma}^2 s^2 + a^3 T_{\Sigma}^3 s^3} \quad (1-44)$$

- Za $z = -S(t)$ i $a = 2$ iz (1-44) dobije se prijelazna funkcija (Slika 1.21)

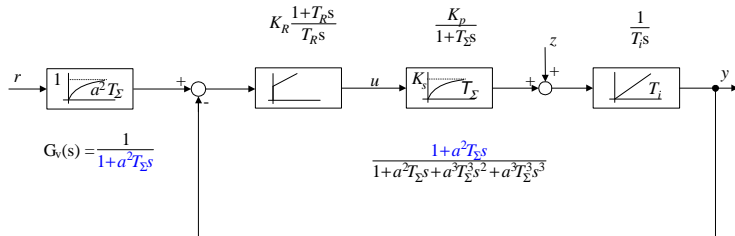


Slika 1.21: Prijelazna funkcija s obzirom na poremećaj

- Karakteristične veličine odziva sa Slike 1.21:
 - $y_p \approx 1.75 \frac{T_{\Sigma}}{T_i}$ – maksimalni “propad” regulirane veličine
 - $t_{mz} \approx 3T_{\Sigma}$ – vrijeme maksimalnog propada
 - $t_{1z} \approx 8.3T_{\Sigma}$ – ulazno vrijeme

Simetrični optimum (9)

- Na temelju prijelaznih funkcija h_r i h_z može se konstatirati
 - odziv sustava na vodeću veličinu je brz, ali s velikim regulacijskim nadvišenjem σ_m
 - postigne se veoma brza kompenzacija utjecaja smetnje
- Kompenzacija regulacijskog nadvišenja efikasno se može postići ugradnjom prefiltira u granu referentne veličine (Slika 1.22)



Slika 1.22: Regulacijski krug podešen prema simetričnom optimumu, s prefiltrom

Simetrični optimum (10)

- Prijenosna funkcija prefiltra je:

$$G_v = \frac{1}{1 + a^2 T_\Sigma s} \quad (1-45)$$

- Pri tome se **kompensiraju nule prijenosne funkcije** (1-42), dok se **polovi ne mijenjaju**
- Nakon kompenzacije nula prijenosne funkcije zatvorenog sustava, s regulatorom podešenim prema simetričnom optimumu dobije se:

$$G_r(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + a^2 T_\Sigma s + a^3 T_\Sigma^2 s^2 + a^3 T_\Sigma^3 s^3} \quad (1-46)$$

- Polovi prijenosne funkcije (1-46) su:

$$s_{p1} = -\frac{1}{aT_\Sigma}, \quad s_{p23} = -\frac{1}{aT_\Sigma} \left[\frac{a-1}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2} \right] \quad (1-47)$$

Simetrični optimum (11)

- Za $a = 3$ je (trostruki pol):

$$s_{p1} = s_{p2} = s_{p3} = -\frac{1}{3T_{\Sigma}} \quad (1-48)$$

- Za $1 < a < 3$ dobije se:

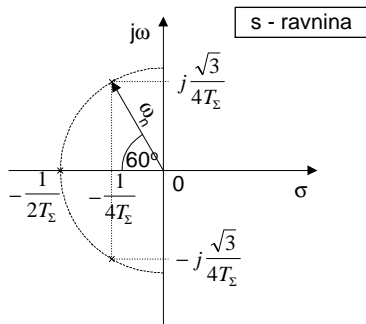
$$s_{p1} = -\frac{1}{aT_{\Sigma}}, \quad s_{p23} = -\frac{1}{aT_{\Sigma}} \left[\frac{a-1}{2} \pm j\sqrt{1 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2} \right] = -\frac{1}{aT_{\Sigma}} e^{\pm j\alpha}, \quad (1-49)$$

gdje je:

$$\alpha = \arccos \frac{a-1}{2} = \arccos \zeta$$

Simetrični optimum (12)

- Za $\alpha = 2$ dobije se razmještaj polova u kompleksnoj s -ravnini kao na Slici 1.23



- Raspored polova isti je kao i za Butterworthov filter trećeg reda
- Uočimo da je (Slika 1.23):

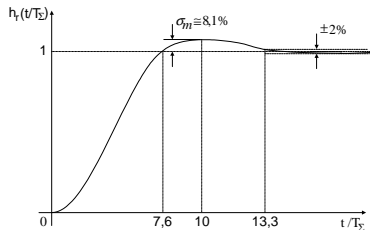
$$\omega_n = \frac{1}{2T_\Sigma}$$

Slika 1.23: Raspored polova zatvorenog sustava upravljanja uz $\alpha = 2$

Simetrični optimum (13)

- Za prijenosnu funkciju (1-46) uz $\alpha = 2$ dobije se prijelazna funkcija h_r prikazana Slikom 1.24, a čiji je analitički oblik:

$$h_r(t/T_\Sigma) = 1 - e^{-t/2T_\Sigma} - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/4T_\Sigma} \sin \frac{\sqrt{3}}{4T_\Sigma} t \quad (1-50)$$

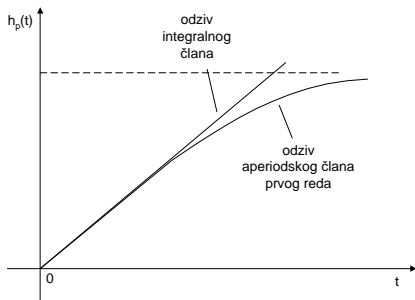


Slika 1.24: Prijelazna funkcija sustava upravljanja podešenog prema simetričnom optimumu, uz dodan prefiltar

- Karakteristične veličine odziva sa Slike 1.24:
 - $t_u \approx 7.6T_\Sigma$ – ulazno vrijeme
 - $t_m \approx 10T_\Sigma$ – vrijeme prvog maksimuma
 - $t_{2\%} \approx 13.3T_\Sigma$ – vrijeme ustaljivanja ($\varepsilon = \pm 2\%$)
- Budući da se prefiltar $G_V(s)$ ne nalazi u zatvorenoj petlji, ostaju sačuvana dobra svojstva sustava u pogledu brze kompenzacije utjecaja smetnje

Simetrični optimum (14)

- Ako je u procesu sa statičkim svojstvima dominantna vremenska konstanta izrazito velikog iznosa, tada se može primijeniti aproksimacija (Slika 1.25):



$$\frac{1}{1 + T_1 s} \approx \frac{1}{T_1 s} \quad (1-51)$$

- U takvim se slučajevima može također primijeniti simetrični optimum (u modificiranom obliku)

Slika 1.25: Aproksimacija PT_1 -člana I-članom

Zaključak

- Nadogradnjom osnovne jednopetljaste regulacijske strukture predupravljanjem po poremećajnim veličinama procesa značajno se može kompenzirati utjecaj poremećajnih veličina
- Koncept kaskadnog višepetljastog upravljanja hijerarhijski je koncept svojstven uređenim i organiziranim sustavima
- Koncept kaskadnog višepetljastog upravljanja afirmirao se u automatizaciji raznih proizvodnih i radnih procesa jer osigurava učinkovitu kompenzaciju poremećajnih veličina procesa kao i dobro slijeđenje referentne veličine (uz određene dodatne funkcije)
- U kaskadnim sustavima upravljanja afirmirali su se praktični postupci sinteze regulatora – tehnički optimum i simetrični optimum
- Tehnički se optimum primjenjuje za upravljanje procesima sa statičkim svojstvima
- Simetrični se optimum primjenjuje za upravljanje procesima s astatičkim svojstvima