SINTEZA LINEARNIH SLIJEDNIH SUSTAVA PRIMJENOM PRAKTIČNIH OPTIMUMA

♦ Razrađuju se postupci sinteze temeljeni na dva praktična optimumima:

- optimum dvostrukog odnosa,
- modulni optimum.

♦ U postupku sinteze potrebno je odrediti strukturu i parametre:

- regulatora,
- pretkompenzatora (engl. *feedforward controller*).

Optimum dvostrukog odnosa

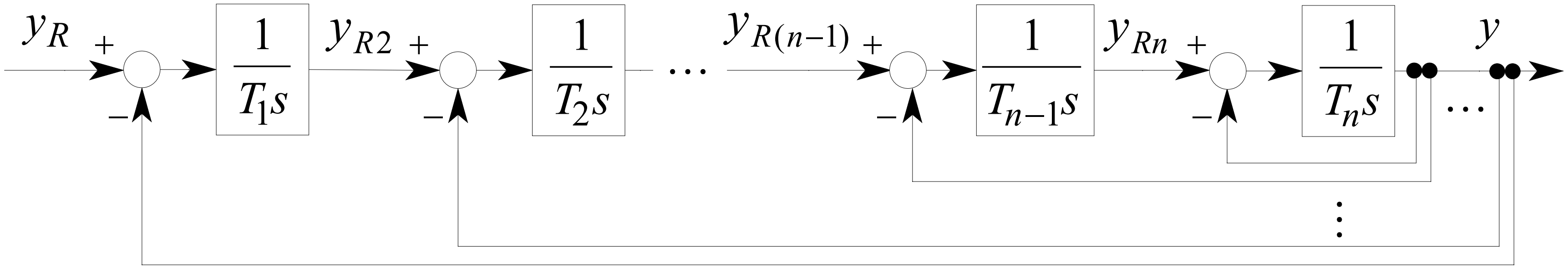
- njem. *Optimum der Doppelverhältnisse*, *Dämpfungsoptimum,*
- engl. *Double Ratios Optimum*, *Damping Optimum*,
- Cilj: pronalaženje analitičke veze između koeficijenata karakterističnog polinoma linearnog regulacijskog sustava proizvoljnog reda, takve da sustav ima optimalno prigušenje koje odgovara prigušenju $\zeta = \sqrt{2}/2$ oscilacijskog člana 2. reda.

Izvod optimuma dvostrukog odnosa

- Razmatra se linearni, vremenski nepromjenljivi, zatvoreni regulacijski SISO sustav, stacionarno točan, bez mrtvog vremena i bez nula prijenosne funkcije.
- Opći oblik prijenosne funkcije takvog sustava je:

$$\boxed{G(s) = \frac{y(s)}{y_R(s)} = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + 1}} \quad (3\text{-}1)$$

- Struktura danog sustava može se predočiti blokovskim dijagramom s n kaskadno spregnutih integralnih članova.



Sl. 3.1.

- Koeficijenti prijenosne funkcije i vremenske konstante $T_1,\ldots,T_n$ na međusobno su povezani općim izrazom:

$$a_i = \prod_{j=1}^{i} T_j = T_1 T_2 \cdots T_i \; ; \qquad i = 1,\ldots,n \tag{3-2}$$

- Odnosom vremenskih konstanti susjednih integralnih članova definirani su bezdimenzionalni **karakteristični odnosi**

$$D_i \overset{!}{=} \frac{T_i}{T_{i-1}} = \frac{a_i a_{i-2}}{a_{i-1}^2} \; , \qquad i = 2,\ldots,n \tag{3-3}$$

- Najpodređeniji krug kaskadne strukture sustava s prijenosnom funkcijom

$$G_n(s) = \frac{y(s)}{y_{Rn}(s)} = \frac{1}{T_n s + 1} \tag{3-4}$$

ima značenje sistemskog PT_1 člana sa **sistemskom vremenskom konstantom** T_n. Sistemskim se članom približno opisuje vladanje tzv. parazitnih članova procesa, čija se stanja ne reguliraju.

- Prijenosne funkcije otvorenog i zatvorenog kruga i-te kaskade poprimaju redom oblike:

$$\boxed{G_{oi}(s) \approx \frac{1}{T_i s(T_{i+1}s+1)} \quad , \qquad i = 1,\dots,n-1} \tag{3-5}$$

$$\boxed{G_{ci}(s) = \frac{y(s)}{y_{Ri}(s)} = \frac{G_{oi}(s)}{1+G_{oi}(s)} \approx \frac{1}{T_{i+1}T_i s^2 + T_i s + 1}} \tag{3-6}$$

Preuređenjem (3-6), uzimajući u obzir (3-3)

$$\boxed{G_{ci}(s) = \frac{1}{D_{i+1}T_i^2 s^2 + T_i s + 1} = \frac{1}{T_{oi}^2 s^2 + 2\zeta_{i+1}T_{oi}s + 1}} \tag{3-7}$$

odakle slijedi:

$$\boxed{D_i = \frac{1}{4\zeta_i^2}} \tag{3-8}$$

- **Optimalno prigušenje** sustava određeno je izborom:

$$\boxed{\zeta_i = \sqrt{2}/2 \quad \Rightarrow \quad D_i = 0{,}5 \Leftrightarrow D_i = \frac{1}{4\zeta_i^2}} \tag{3-9}$$

koji daje kvaziaperiodski oblik prijelazne funkcije oscilacijskog člana.

- Karakteristični polinom $A(s)$ sustava (3-1), primjenom (3-2) i (3-3) može se zapisati u obliku:

$$\boxed{\begin{aligned} A(s) &= T_n T_{n-1} \cdots T_1 s^n + T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1 s^{n-1} + \ldots + T_2 T_1 s^2 + T_1 s + 1 = \\ &= D_n D_{n-1}^2 \cdots D_2^{n-1} T_e^n s^n + D_{n-1} D_{n-2}^2 \cdots D_2^{n-2} T_e^{n-1} s^{n-1} + \ldots + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1 \end{aligned}} \tag{3-10}$$

pri čemu $T_e = T_1$ označava **<u>nadomjesnu vremensku konstantu</u>** ukupnog zatvorenog sustava nadomještenog prijenosnom funkcijom

$$\boxed{G_e(s) = G_1(s) \doteq \frac{1}{T_e s + 1}} \tag{3-11}$$

- Optimalan iznos karakterističnih odnosa iznosi:

$$\boxed{D_2 = D_3 = \ldots = D_n = 0{,}5} \tag{3-12}$$

- Veza nadomjesnih vremenskih konstanti pojedinih krugova kaskadne strukture sustava u općem i optimalnom obliku proizlazi iz sljedećih izraza (3-3) i (3-12):

$$\boxed{T_e = T_1 = \frac{1}{D_2}T_2 = \frac{1}{D_3 D_2}T_3 = \ldots = \frac{1}{D_i D_{i-1} \cdots D_2}T_i = \ldots = \frac{1}{D_n D_{n-1} \cdots D_2}T_n} \tag{3-13}$$

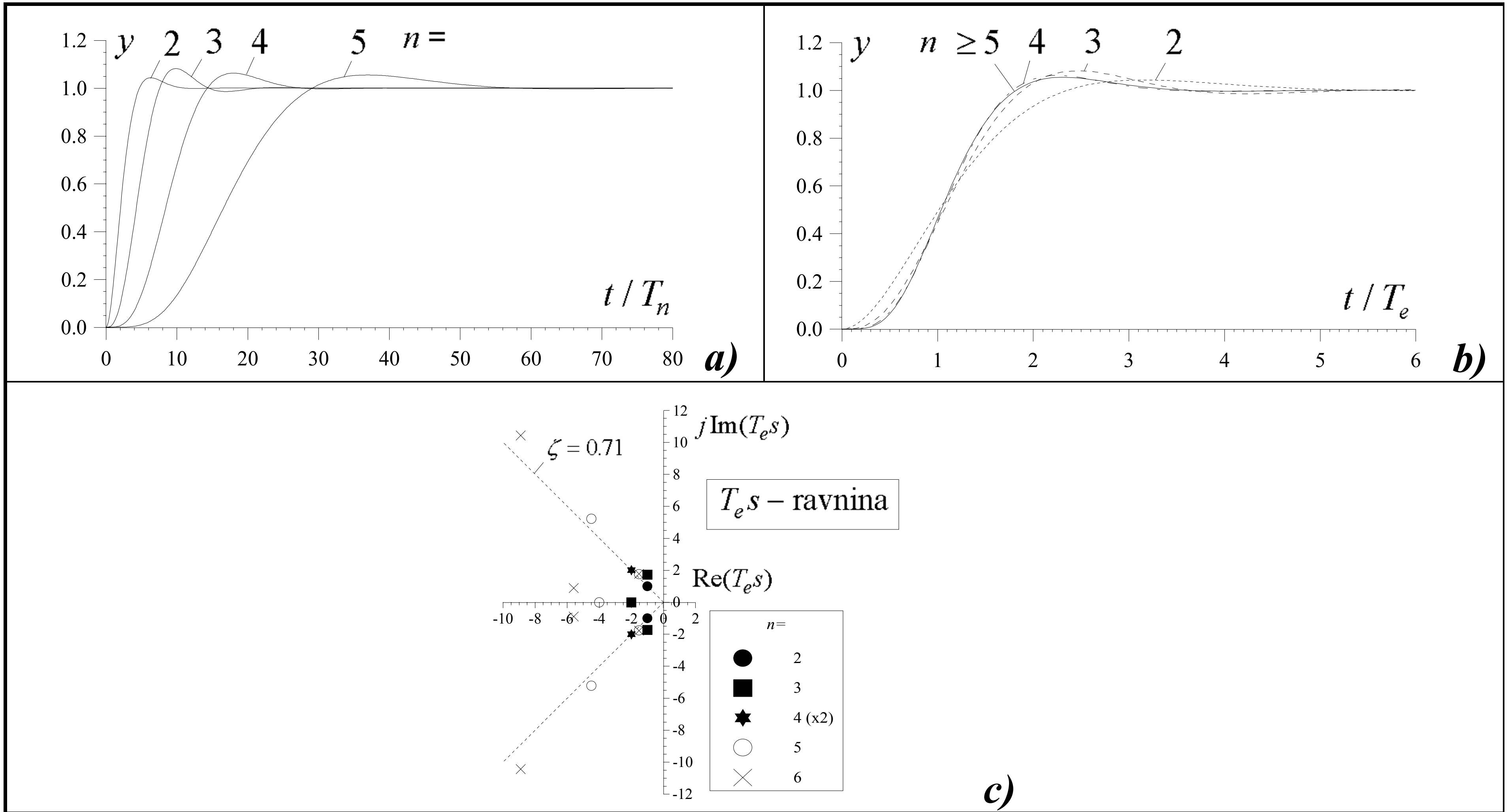
$$\boxed{T_e = T_1 = 2T_2 = 4T_3 = \ldots = 2^{i-1}T_i = \ldots = 2^{n-1}T_n} \tag{3-14}$$

- Dakle, svaki krug kaskadne strukture sustava ima dvostruko veće vrijeme odziva od njemu podređenog kruga.

Analiza optimiranog sustava

a) Analiza uz optimalan iznos svih karakterističnih odnosa

- Rezultati analize sustava (3-1), različitog reda n, s karakterističnim polinomom $A(s)$ (3-10) dani su na slici 3.2. Sve prijelazne funkcije, bez obzira na red sustava, imaju sličan kvaziaperiodski oblik. Takav oblik predstavlja rezultat optimalnog izbora između veće brzine odziva i manje oscilatornosti.



Sl. 3.2. Prijelazne funkcije u vremenu normiranom na sistemsku (T_n) ***a)****, odnosno nadomjesnu (T_e)* ***b)*** *vremensku konstantu, te položaj polova u normiranoj $T_e s$ ravnini* ***c)****.*

- Regulacijsko nadvišenje $\sigma_m < 8\%$, vrijeme porasta $t_1 < 2{,}4T_e$.
- Sporiji odziv sustava višeg reda. Svako povećanje reda sustava za 1, uz jednaku sistemsku vremensku konstantu T_n, udvostručuje vrijeme odziva.
- Dobro prigušenje optimiranog sustava (očituje se i kroz raspored polova).

b) Podešavanje prigušenja

♦ Ponekad je potrebno odstupiti od optimalnog prigušenja sustava određenog optimalnim izborom karakterističnih odnosa.

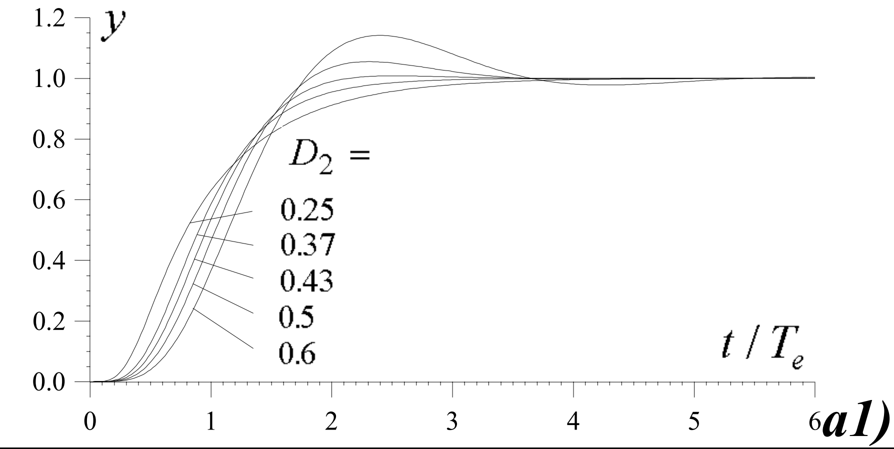
- Npr. kod pozicioniranja uobičajeno se ne dopušta nadvišenje (potrebno je ostvariti što brži odziv bez nadvišenja).
- U nekim se primjenama tolerira povećano nadvišenje i oscilatornost s ciljem postizanja bržeg odziva i kvalitetnijeg otklanjanja utjecaja poremećaja

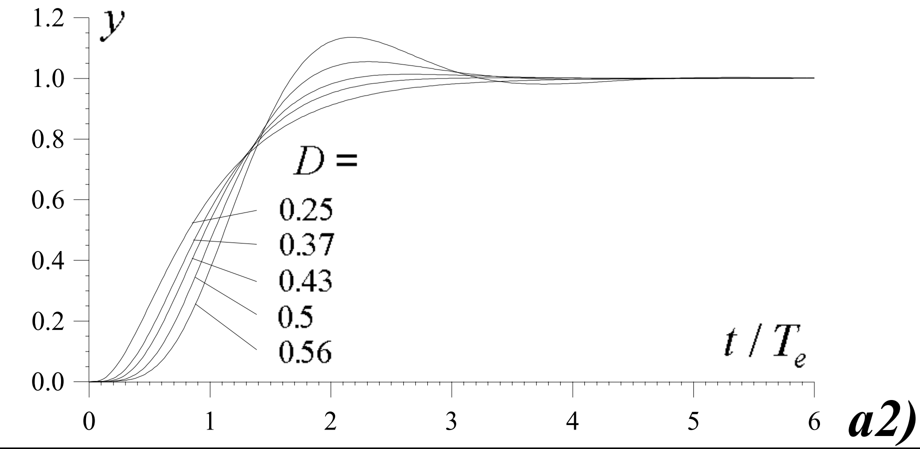
♦ Mogući način podešavanja prigušenja:

- promjenom samo dominantnog karakterističnog odnosa D_2.
- postavljanjem svih karakterističnih odnosa na jednak iznos D različit od 0,5.

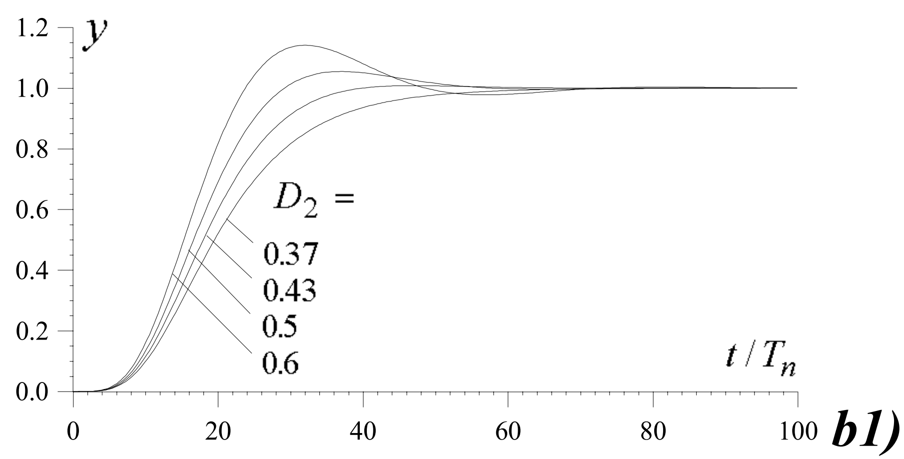
$n = 5$

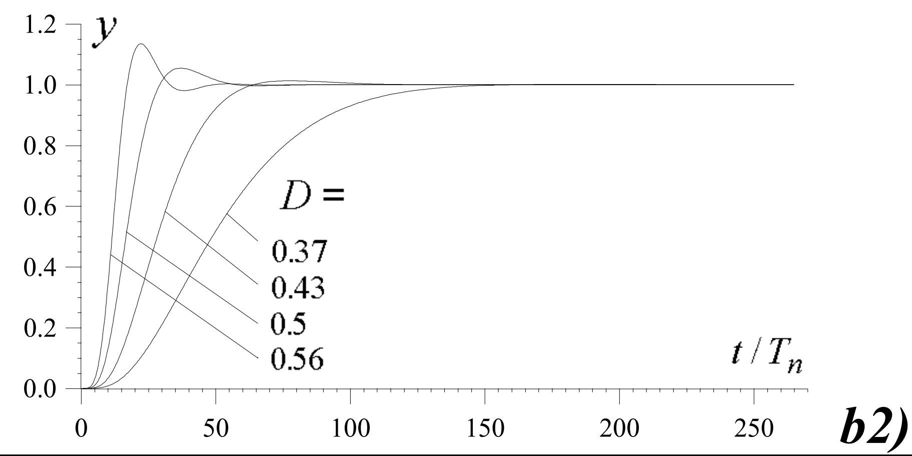
Promjena D_2; $D_3 = \ldots = D_n = 0.5$	Promjena $D = D_2 = \ldots = D_n$





Vrijeme normirano na nadomjesnu vremensku konstantu T_e





Vrijeme normirano na sistemsku vremensku konstantu T_n

Sl. 3.3.

- Smanjenjem $D_2 < 0{,}5$ povećava se prigušenje prijelazne funkcije, tj. smanjuje se njena oscilatornost i nadvišenje.
- **Granični aperiodski oblik** prijelazne funkcije dobije se uz $D_2 = 0{,}37$ (Sl. 3.3. a1 i a2).
- Odzivi, dani na slikama b1i b2) pokazuju da je besmisleno mijenjati iznos D < 0,5 svih karakterističnih odnosa, jer se tako značajno usporava odziv.
- Povećanjem $D_2 > 0{,}5$ smanjuje se prigušenje prijelazne funkcije, tj. povećava njena oscilatornost i nadvišenje. Približno jednako nadvišenje za oba načina podešavanja prigušenja postiže se uz različite iznose karakterističnih odnosa D i D_2 ($D < D_2$).
- Nasuprot prethodnom slučaju $D_2 = D < 0{,}5$, povoljniji (brži) odziv u vremenu normiranom na sistemsku vremensku konstantu T_n dobije se ukoliko se prigušenje podešava promjenom iznosa D svih karakterističnih odnosa.

c) Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

- U primjenama se često koristi **regulator reduciranog reda** kojim nije moguće nezavisno postaviti svih n-1 karakterističnih odnosa na optimalan iznos $D = 0{,}5$.

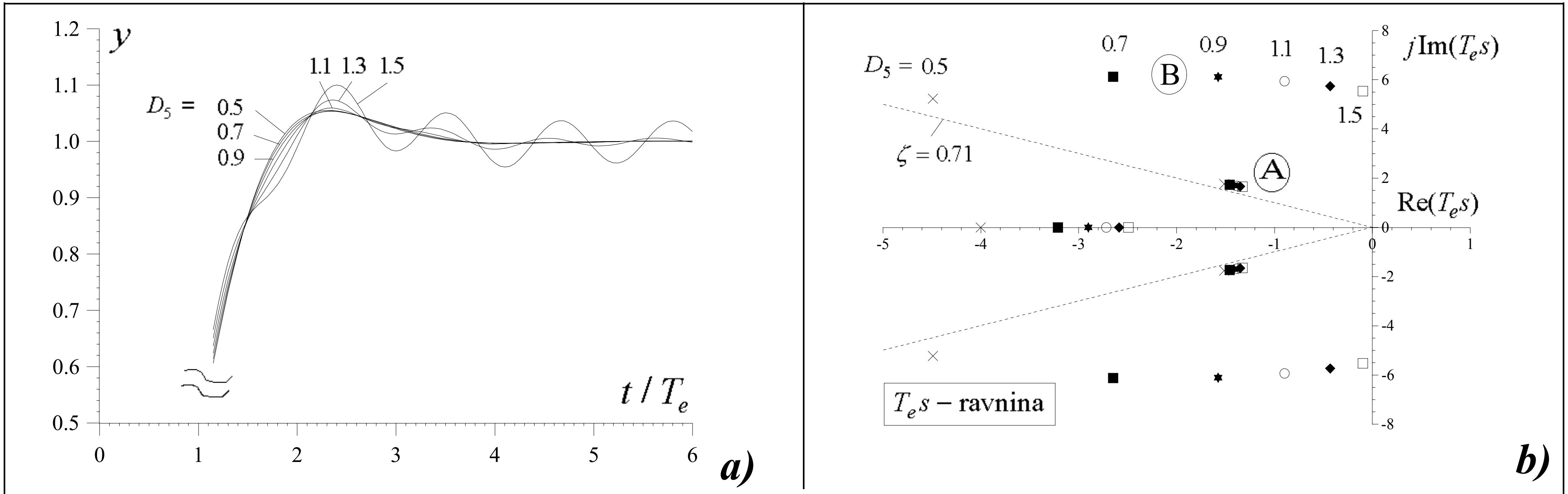
- Približno optimalno vladanje sustava može se postići tako da se optimiraju nadređeni krugovi kaskadne strukture sustava, koji dominantno određuju vladanje sustava.
- Po dominantnosti viši karakteristični odnosi D_2, … D_{l+1} postave se na iznos 0,5.
- Utjecaj podoptimalnog iznosa preostalih, po dominantnosti nižih karakterističnih odnosa D_{l+2}, …, D_n na kvalitetu vladanja sustava dan je na primjeru.

Primjer

- Analizira se utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa D_5 i D_4 (l = 2) na vladanje sustava 5. reda (n = 5) optimiranog za $D_2 = D_3 = 0,5$.Vrijeme odziva sustava određeno je iznosom nadomjesne vremenske konstante T_e koja se računa prema izrazu:

$$T_e = 2^l \frac{T_n}{D_n D_{n-1} \cdots D_{l+2}} = \frac{4T_n}{D_5 D_4} = \frac{4T_n}{\Delta} . \qquad (3\text{-}15)$$

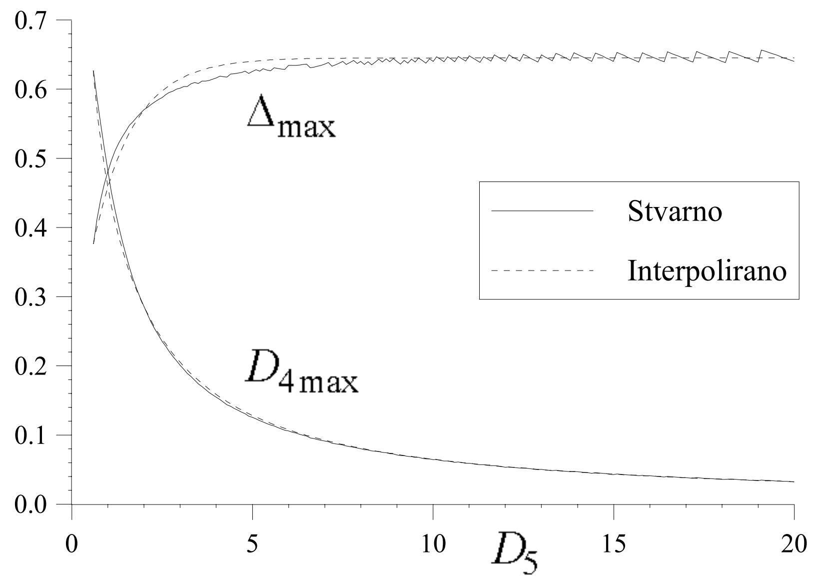
- Povećanjem iznosa najnižeg karakterističnog odnosa $D_5 > 0,5$, specijalno uz $D_4 = 0,5$, povećava se oscilatornost 4. kruga kaskadne strukture sustava što se odražava i na povećanu oscilatornost nadređenih krugova.
- Prijelazne funkcije sustava pokazuju (Sl. 3.4.a) da se odziv sustava gotovo ne mijenja ako je zadovoljena nejednakost $D_5 \leq D_{5\max} \approx 0,9$. Ovaj rezultat ima jasnu interpretaciju u položaju polova optimiranog sustava (Sl. 3.4.b).



*Utjecaj nedominantnog karakterističnog odnosa $D_5 \geq 0{,}5$ na kvalitetu vladanja sustava 5. reda optimiranog za $D_2 = D_3 = D_4 = 0{,}5$: **a)** prijelazne funkcije i **b)** položaj polova.*

Sl. 3.4.

- Granična vrijednost $D_{5\max}$ za dobro prigušen (kvaziaperiodski) odziv sustava dostiže se kada slabo prigušeni konjugirano-kompleksni par polova (B) preuzme dominaciju od približno konstantnog, dobro prigušenog para polova (A).
- Sustav zadržava dobro prigušen odziv i u slučaju da odnos D_5 neograničeno raste iznad $D_{5\max}$, ali samo ako istovremeno susjedni odnos D_4 pada (Sl. 3.5.)



Sl. 3.5.

- Granična ovisnost $D_{4\,max}(D_5)$ za dobro prigušen odziv (Sl. 3.5.) dobivena je numerički. Usporedno je prikazana i granična krivulja $\Delta_{max}(D_5) = D_{4\,max}(D_5) \cdot D_5$ koja se uz samo 5%-tno maksimalno odstupanje interpolira eksponencijalnom funkcijom

$$\boxed{\Delta_{max}(D_5) = \Delta_0 + (\Delta_1 - \Delta_0)(1 - e^{-\frac{D_5 - 0,6}{\delta_5}})} \qquad (3\text{-}16)$$

gdje je:

$$\Delta_0 = 0,376 \;, \quad \Delta_1 = 0,645 \;, \quad \delta_5 = 1,1 \;.$$

- U slučaju da najniži karakteristični odnos ima iznos $D_5 \leq 0{,}5$, pokazuje se da maksimalna vrijednost odnosa D_4 za dobro prigušen odziv sustava iznosi $D_{4\max} \approx 0{,}7$. Konačno se može zaključiti da će sustav 5. reda optimiran za $D_2 = D_3 = 0{,}5$ imati dobro prigušen (kvaziaperiodski) odziv ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

$$\boxed{0 < D_4 \leq D_{4\max} \approx 0{,}7} \tag{3-17}$$

$$\boxed{\Delta = D_4 D_5 < \Delta_{\max}(D_5)} \tag{3-18}$$

Optimiranje vremenski diskretnih sustava

a) Diskretni postupak sinteze

- Uz primjenu regulatora punog reda, npr. polinomskog regulatora, moguće je nezavisno postaviti položaj svih polova sustava.
- Sinteza se može provesti u diskretnom (z) području, pri čemu se polazi od karakterističnog polinoma sustava:

$$\boxed{A_d(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i) = \sum_{i=0}^{n} a_{di} z^i = a_{dn} z^n + a_{dn-1} z^{n-1} + \ldots + a_{d1} z + a_{d0}\,;\, a_{dn} = 1} \qquad (3\text{-}19)$$

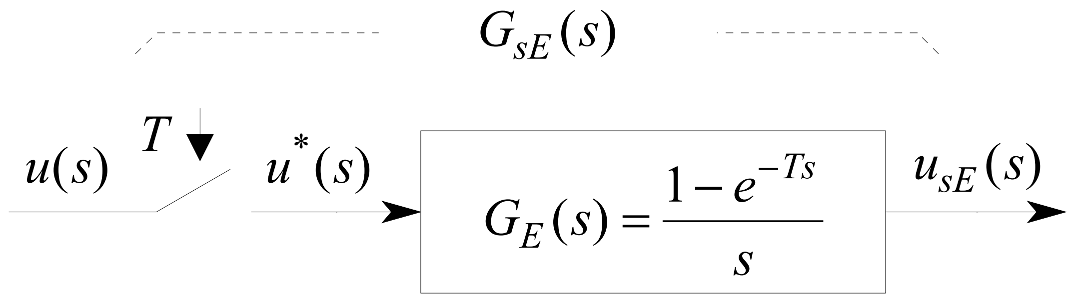
- Korijeni z_i polinoma $A_d(z)$ određuju se iz korijena s_i optimalnog polinoma $A(s)$ (3-10) prema:

$$\boxed{z_i = e^{Ts_i}\ ,\ \ A(s_i) = 0 \rightarrow s_i\ ,\ \text{za}\ \ i = 1,\ldots,n} \qquad (3\text{-}20)$$

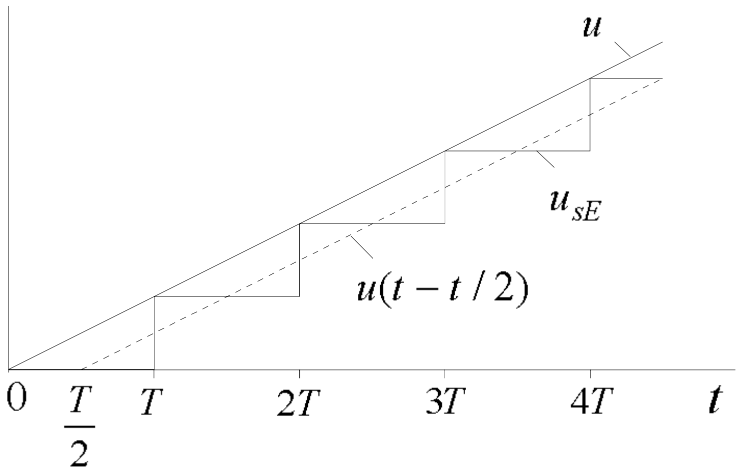
gdje je T vrijeme uzorkovanja.

b) Kvazikontinuirani postupak sinteze

- U slučaju primjene diskretnog regulatora reduciranog reda potrebno je postupak sinteze provesti u kontinuiranom (s) području.
- Prethodno se diskretni sustav nadomješta ekvivalentnim kontinuiranim sustavom.
- Element koji povezuje diskretni s kontinuiranim dijelom sustava je i ekstrapolator nultog reda. Odziv serijskog spoja idealnog impulsnog elementa i ekstrapolatora nultog reda na pobudnu funkciju linearnog porasta dan je na slici 3.6.
- Stepeničasti odziv karakterističan za diskretne sustave aproksimira se pravcem koji za pobudnim signalom kasni za $T/2$, te se aproksimira PT_1 članom.



Sl. 3.6. a)



Sl. 3.6. b)

$$\boxed{G_{sE}(s) \approx e^{-sT/2} \approx \frac{1}{1+sT/2}} \qquad (3\text{-}21)$$

- U nadomjesnom kontinuiranom sustavu vremenska konstanta $T/2$ člana $G_{sE}(s)$ promatra se kao parazitna konstanta koja se zbraja s ostalim parazitnim vremenskim konstantama $T_{\Sigma i}$ otvorenog regulacijskog kruga:

$$\boxed{T_{\Sigma} = \frac{T}{2} + \sum_i T_{\Sigma i}} \qquad (3\text{-}22)$$

Prošireni optimum dvostrukog odnosa

- Optimum dvostrukog odnosa može se proširiti na linearne sustave opisane prijenosnom funkcijom proširenom nulama vidi (3-1):

$$G(s)=\frac{y(s)}{y_R(s)}=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+...+b_2s^2+b_1s+1}{a_ns^n+...+a_2s^2+a_1s+1}=\frac{T_{n-1}^*T_{n-2}^*\cdots T_1^*s^{n-1}+\ldots+T_2^*T_1^*s^2+T_1^*s+1}{T_nT_{n-1}\cdots T_1s^n+\ldots+T_2T_1s^2+T_1s+1} \qquad (3\text{-}23)$$

- Bez izvoda daje se skup jednadžbi proširenog optimuma dvostrukog odnosa:

$$\begin{aligned} T_1^2-2T_2T_1 &= T_1^{*2}-2T_2^*T_1^* \ , \\ &\vdots \\ T_i^2-2T_{i+1}T_i &= T_i^{*2}-2T_{i+1}^*T_i^* \ , \\ &\vdots \\ T_{n-1}^2-2T_nT_{n-1} &= T_{n-1}^{*\;2} \ . \end{aligned} \qquad (3\text{-}24)$$

odnosno:

$$a_i^2-2a_{i-1}a_{i+1}=\frac{a_{i-1}^2}{b_{i-1}^2}(b_i^2-2b_{i-1}b_{i+1}) \qquad (3\text{-}25)$$

- Zadovoljavanje jednadžbi (3-24) položaj polova prilagođava se položaju nule prijenosne funkcije (3-23) tako da sustav ima dobro prigušen odziv.

- Izjednačenjem desnih strana izraza (2-24) s nulom i zamjenom 2 s $1/D_{i+1}$ dobije opća jednadžba (3-3) standardnog oblika optimuma dvostrukog odnosa.

Modulni optimum

- Polazi od zahtjeva da amplitudno-frekvencijska karakteristika linearnog sustava proizvoljnog reda ima što širi propusni opseg bez rezonantnog izdizanja (njem. *Betragsoptimum*, engl. *Magnitude Optimum*).
- Modulni optimum poznat je još iz 1946. godine, a šire značenje dobiva u radu Keßlera iz 1955. godine.

Izvod

- Za linearne sustave opisane prijenosnom funkcijom (3-1) amplitudno-frekvencijska karakteristika

$$\boxed{M(\Omega) = |G(j\Omega)|} \qquad (3\text{-}26)$$

zadržat će vrijednost $M(0) = 1$ u širokom opsegu frekvencija, ako vrijedi:

$$\boxed{\lim_{\Omega \to 0} \frac{d^i M(\Omega)}{d\Omega^i} = 0 \ ; \quad i = 1, \ldots, l \ ; \quad 1 \leq l \leq n-1} \qquad (3\text{-}27)$$

- Umjesto ove pogodnije je koristiti relaciju:

$$\boxed{\lim_{\Omega^2 \to 0} \frac{d^i H(\Omega^2)}{d(\Omega^2)^i} = 0} \qquad (3\text{-}28)$$

gdje je:

$$\boxed{H(\Omega^2) = [M(\Omega)]^2 = G(j\Omega)G(-j\Omega) = \frac{1}{1+(a_1^2 - 2a_0a_2)\Omega^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)\Omega^4 + \ldots}} \qquad (3\text{-}29)$$

- Konačne jednadžbe standardnog oblika **modulnog optimuma** dobivene iz (3-28) i (3-29) glase:

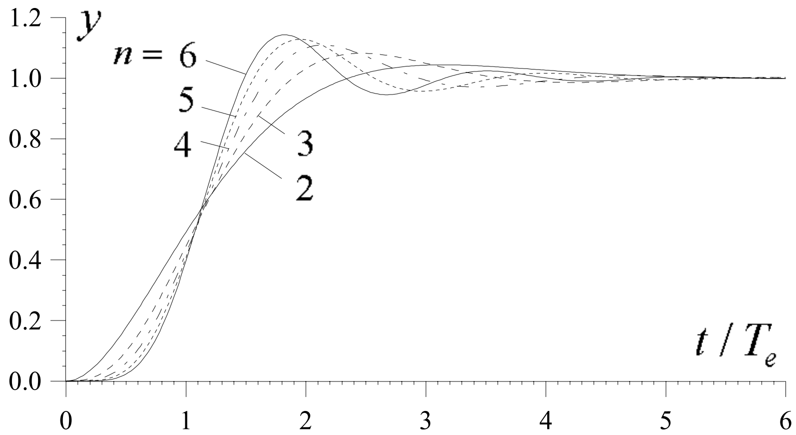
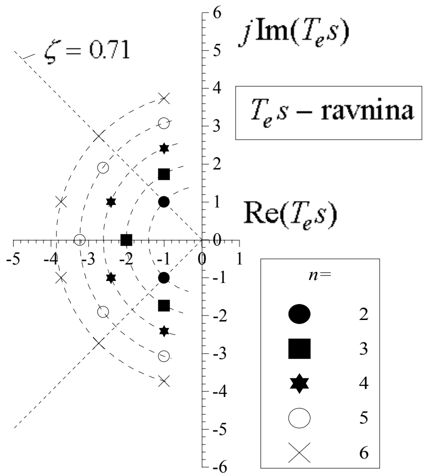
$$\boxed{\begin{array}{c} a_1^2 - 2a_0a_2 = 0 \ , \\ a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4 = 0, \\ a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6 = 0 \ , \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n = 0 \, . \end{array}} \qquad (3\text{-}30)$$

- U slučaju da je proces opisan prijenosnom funkcijom koja sadrži nule, dobiju se jednadžbe **proširenog modulnog optimuma**:

$$
\begin{aligned}
a_1^2 - 2a_0 a_2 &= b_1^2 - 2b_0 b_2 \ , \\
a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4 &= b_2^2 - 2b_1 b_3 + 2b_0 b_4 \ , \\
&\vdots \\
a_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j a_{i-j} a_{i+j} &= b_i^2 + 2\sum_{j=1}^{i} (-1)^j b_{i-j} b_{i+j} \\
&\vdots \\
a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n &= b_{n-1}^2 \ .
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}31)
$$

Analiza optimiranog sustava

- Prva i posljednja jednadžba standardnog oblika modulnog optimuma (3-30) ekvivalentne su odgovarajućim jednadžbama optimuma dvostrukog odnosa (3-3) i (3-12).
- Ova dva optimuma su ekvivalentna za sustave reda $n \leq 3$ (Sl. 3.2. i Sl. 3.7.).
- Za sustave reda $n > 3$ pojavljuju se dodatni članovi u izrazima (3-20) modulnog optimuma.
- Postupak optimiranja složeniji je nego u slučaju optimuma dvostrukog odnosa.

<table>
<tr><td colspan="2">Rezultati analize sustava različitog reda n projektiranih prema modulnom optimumu</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>prijelazne funkcije</td><td>položaj polova</td></tr>
</table>

Sl. 3.7.

- Dobiveni su polovi **Butterworthovog filtera** s karakterističnom frekvencijom $\Omega_L = \sqrt[n]{1/a_n}$.
- Rastom reda sustava n dio polova primiče se sve bliže imaginarnoj osi. Posljedica je slabljenje prigušenja optimiranog sustava, što se ogleda u povećanom iznosu karakterističnih odnosa $D_i > 0{,}5$ (vidi sljedeću tablicu).

Odnos	Red sustava n				
	2	3	4	5	6
D_2	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
D_3	-	0,5	0,586	0,618	0,634
D_4	-	-	0,5	0,618	0,667
D_5	-	-	-	0,5	0,634
D_6	-	-	-	-	0,5

- Povećani iznosi karakterističnih odnosa rezultiraju nešto bržim odzivom sustava u odnosu na primjenu optimuma dvostrukog odnosa.

Optimiranje vremenski diskretnih sustava

- Kao i kod optimuma dvostrukog odnosa moguć je izravan postupak optimiranja diskretnih sustava temeljen na **diskretnom obliku modulnog optimuma**.
- Neka je linearni diskretni sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$\boxed{G(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_m z^m+\ldots+b_2 z^2+b_1 z+b_0}{a_n z^n+\ldots+a_2 z^2+a_1 z+a_0}\quad,\qquad m<n} \tag{3-32}$$

- Primjena kriterija optimiranja (3-28) daje sljedeće konačne jednadžbe modulnog optimuma:

$$\boxed{\begin{array}{c}
K^2(a_1^*+2^2 a_2^*+\ldots+n^2 a_n^*)=b_1^*+2^2 b_2^*+\ldots+m^2 b_m^*\ ,\\
\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\
K^2(a_1^*+2^{2i} a_2^*+\ldots+n^{2i} a_n^*)=b_1^*+2^{2i} b_2^*+\ldots+m^{2i} b_m^*\ ,\\
\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\quad\vdots\qquad\vdots\\
K^2\left[a_1^*+2^{2(n-1)} a_2^*+\ldots+n^{2(n-1)} a_n^*\right]=b_1^*+2^{2(n-1)} b_2^*+\ldots+m^{2(n-1)} b_m^*\ .
\end{array}} \tag{3-33}$$

- Koeficijenti a_i^* i b_i^*, te pojačanje sustava K povezani su s koeficijentima prijenosne funkcije (3-22) diskretnog sustava preko izraza:

$$a_i^* = \sum_{j=0}^{n-i} a_j a_{j+i} = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \ldots + a_{n-i} a_n \,, \qquad i = 1,2,\ldots,n \,, \tag{3-34}$$

$$b_i^* = \sum_{j=0}^{m-i} b_j b_{j+i} = b_0 b_1 + b_1 b_2 + \ldots + b_{m-i} b_m \,, \qquad i = 1,2,\ldots,m, \tag{3-35}$$

$$K = G(1) = \frac{b_0 + b_1 + \ldots + b_m}{a_0 + a_1 + \ldots + a_n} \,. \tag{3-36}$$

Sinteza regulacijskog sustava

- Ovdje se uspoređuju prikazani optimumi i obrađuju neki zajednički aspekti njihove primjene, kao što su izbor strukture regulatora i s njim povezana odluka o primjeni standardnog ili proširenog oblika optimuma, te izbor vremena uzorkovanja.

Usporedba optimuma dvostrukog odnosa i modulnog optimuma

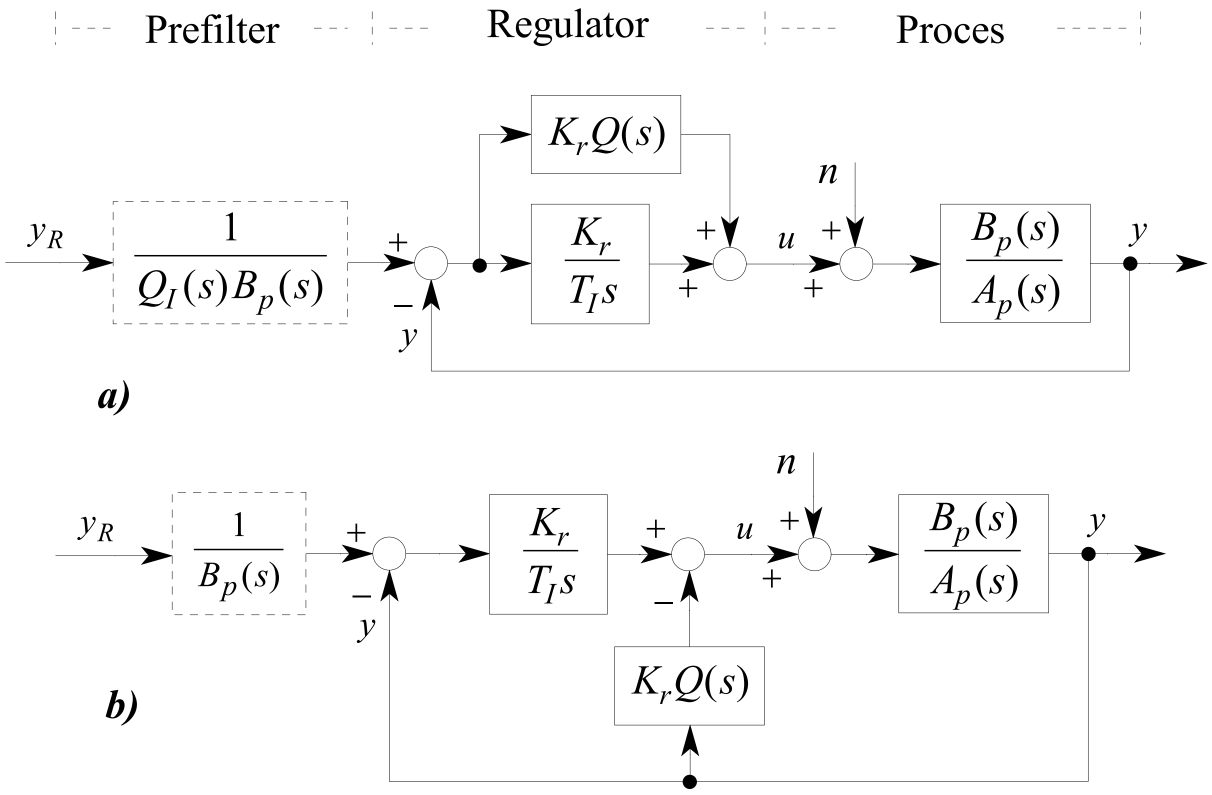
- Optimum dvostrukog odnosa i modulni optimum ekvivaltentni su za sustave reda $n \leq 3$.

- U primjenama treba dati prednost optimumu dvostrukog odnosa iz sljedeća dva razloga:

  - jednostavnost postupka sinteze sustava s regulatorom reduciranog reda,
  - potpuna fleksibilnost i jednostavnost podešavanja prigušenja i vremena odziva sustava promjenom iznosa karakterističnih odnosa
  - mogućnost algebarske analize optimiranog sustava temeljene na iznosima nedominantnih karakterističnih odnosa

Usporedba standardnog i proširenog oblika optimuma

- Klasična struktura linearnog kontinuiranog regulacijskog kruga s PID$_\nu$ regulatorom prikazana je blokovskom shemom na slici 3.8. a).



Sl. 3.8.

- PID$_\nu$ regulator se sastoji od integralnog člana $K_r/(T_I s)$ i proporcionalno-derivacijskog (PD) člana ν-tog reda predstavljenog polinomom

$$\boxed{Q(s) = 1 + q_1 s + q_2 s^2 + \ldots + q_\nu s^\nu} \tag{3-37}$$

- PID$_\nu$ regulator je ekvivalentan regulatoru stanja s pojačanjima $K_r q_i$.
- U grani referentne veličine regulacijskog kruga ugrađen je kao opcija prefilter, koji sadrži polinom $Q_I(s)$ definiran prema:

$$\boxed{Q_I(s) = 1 + T_I s Q(s)} \tag{3-38}$$

- Prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu y_R (bez prefiltera) i poremećajnu veličinu n jesu redom:

$$G(s) = \frac{y(s)}{y_R(s)} = \frac{K_r Q_I(s) B_p(s)}{T_I s A_p(s) + K_r Q_I(s) B_p(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \tag{3-39}$$

$$G_n(s) = \frac{y(s)}{n(s)} = \frac{T_I s B_p(s)}{T_I s A_p(s) + K_r Q_I(s) B_p(s)} = \frac{B_n(s)}{A(s)} \tag{3-40}$$

- Uz primjenu **<u>proširenog oblika</u>** optimuma dvostrukog odnosa (3-24) ili modulnog optimuma (3-31) nule regulatora razmještaju se u blizini dominantnih polova procesa, kompenzirajući tako njihov utjecaj na usporenje odziva regulacijskog kruga s obzirom na referencu.
- U specijalnom slučaju jednakosti svih polova i nula dolazi do njihovog kraćenja u prijenosnoj funkciji (3-39) zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu.
- U prijenosnoj funkciji (3-40) s obzirom na poremećajnu veličinu ne pojavljuju se nule koje bi pokratile dominantne polove procesa.
- Posljedica je spor odziv regulacijskog kruga s obzirom na poremećajnu veličinu.
- Povoljan odziv regulacijskog kruga s obzirom na poremećajnu veličinu postiže se optimiranjem položaja polova prijenosnih funkcija (3-39) i (3-40), ne vodeći računa o položaju nula.
- Nepovoljan utjecaj nula prijenosne funkcije (3-39) s obzirom na referencu ogleda se u izraženom forsiranju izvršne veličine u i velikom nadvišenju regulirane veličine y.

- Da bi se to spriječilo ugrađuje se **prefilter** u granu referentne veličine čiji polovi krate nule prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga.
- Realizacija prefiltera se pojednostavljuje, odnosno uz $B_p(s) = 1$ izbjegava, ako se primjeni **modificirana struktura regulatora** (Slika 3.8. b)) kod koje proporcionalna i derivacijska komponenta regulatora djeluje samo na signal povratne veze.
- Tako izveden regulator ne unosi nule u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga (3-39). Nedostatak primjene standardnog u odnosu na prošireni oblik optimuma je sporiji odziv regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu. No, ovaj se nedostatak otklanja ugradnjom **pretkompenzatora** u granu referentne veličine (Potpoglavlje 3.4).
- Ako su nule procesa (korijeni polinoma $B_p(s)$) nestabilne, odnosno slabo prigušene, tada je realizacija prefiltera nemoguća, odnosno problematična.
- U slučaju nepovoljnog utjecaja ovih nepokraćenih nula procesa neophodna je primjena proširenog oblika optimuma.

Izbor vremena uzorkovanja

- Vrijeme uzorkovanja bira se u skladu s parametrima matematičkog modela mehaničkog sustava (2-6).

- Frekvencija uzorkovanja $2\pi / T$ treba biti barem $N_1 = 6 - 12$ puta veća od frekvencije slabo prigušenih konjugirano-kompleksnih polova procesa:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{N_1 \Omega_0}} \qquad (3\text{-}41)$$

- Uz odabir $N_1 = 2\pi$ dobije se:

$$\boxed{T = \frac{1}{\Omega_0}} \qquad (3\text{-}42)$$

- S druge strane, vrijeme uzorkovanja bira se s obzirom na vrijeme odziva zatvorenog regulacijskog kruga, koje je određeno nadomjesnom vremenskom konstantom T_e.

- Vrijeme uzorkovanja T u tome slučaju treba biti $N_2 = 10 - 20$ puta manje od periode prigušenih oscilacija T_d zatvorenog regulacijskog kruga.

- Primjenom ovog pravila na proces (3-1) s karakterisitčnim polinomom (3-10) (uz aproksimaciju s prva tri člana) dobije se:

$$\boxed{T = \frac{T_d}{N_2} = \frac{2\pi}{N_2 \Omega_d} = \frac{4\pi D_2}{N_2 \sqrt{4D_2 - 1}} T_e} \tag{3-43}$$

- Ukoliko se uvrsti $D_2 = 0{,}5$ i $N_2 \approx 18$ dobije se:

$$\boxed{T_e = \frac{N_2 \sqrt{4D_2 - 1}}{4\pi D_2} T = 2\sqrt{2} T} \tag{3-44}$$

- Kod primjene kvazikontinuiranog postupka sinteze općenito je potrebno manje vrijeme uzorkovanja (veći faktori N_1 i N_2).

3.4. Sinteza slijednog sustava

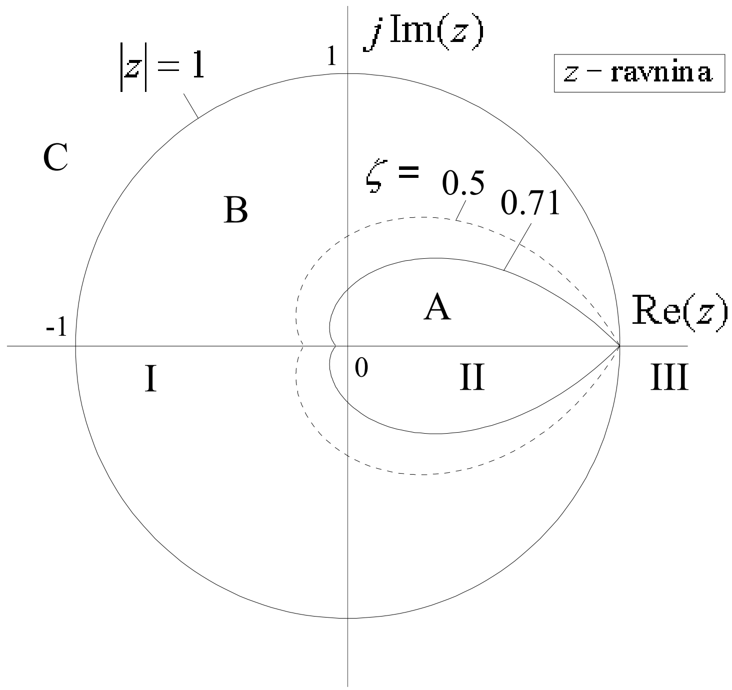
- Regulacijski krug proširuje se pretkompenzatorom s ciljem:
  - poboljšanja dinamičkog vladanja sustava s obzirom na referentnu veličinu
  - smanjenja pogreške slijeđenja referentne veličine.
- U narednom se izlaganju razvijaju postupci sinteze pretkompenzatora punog i reduciranog reda za regulacijski krug proizvoljnog reda optimiran prema optimumu dvostrukog odnosa.
- Također se provodi analiza utjecaja nula prijenosne funkcije diskretnog zatvorenog sustava.

Nule vremenski-diskretnog sustava

- n polova s_i, $i = 1, \ldots, n$, racionalne prijenosne funkcije vremenski kontinuiranog sustava n-tog reda preslikava se diskretizacijom sustava u n diskretnih polova z_i relacijom:

$$\boxed{z_i = e^{Ts_i}} \tag{3-45}$$

- Odziv diskretnog sustava je stabilan ako se svi polovi z_i nalaze unutar jedinične kružnice prikazane na slici 3.10.



Sl. 3.10.

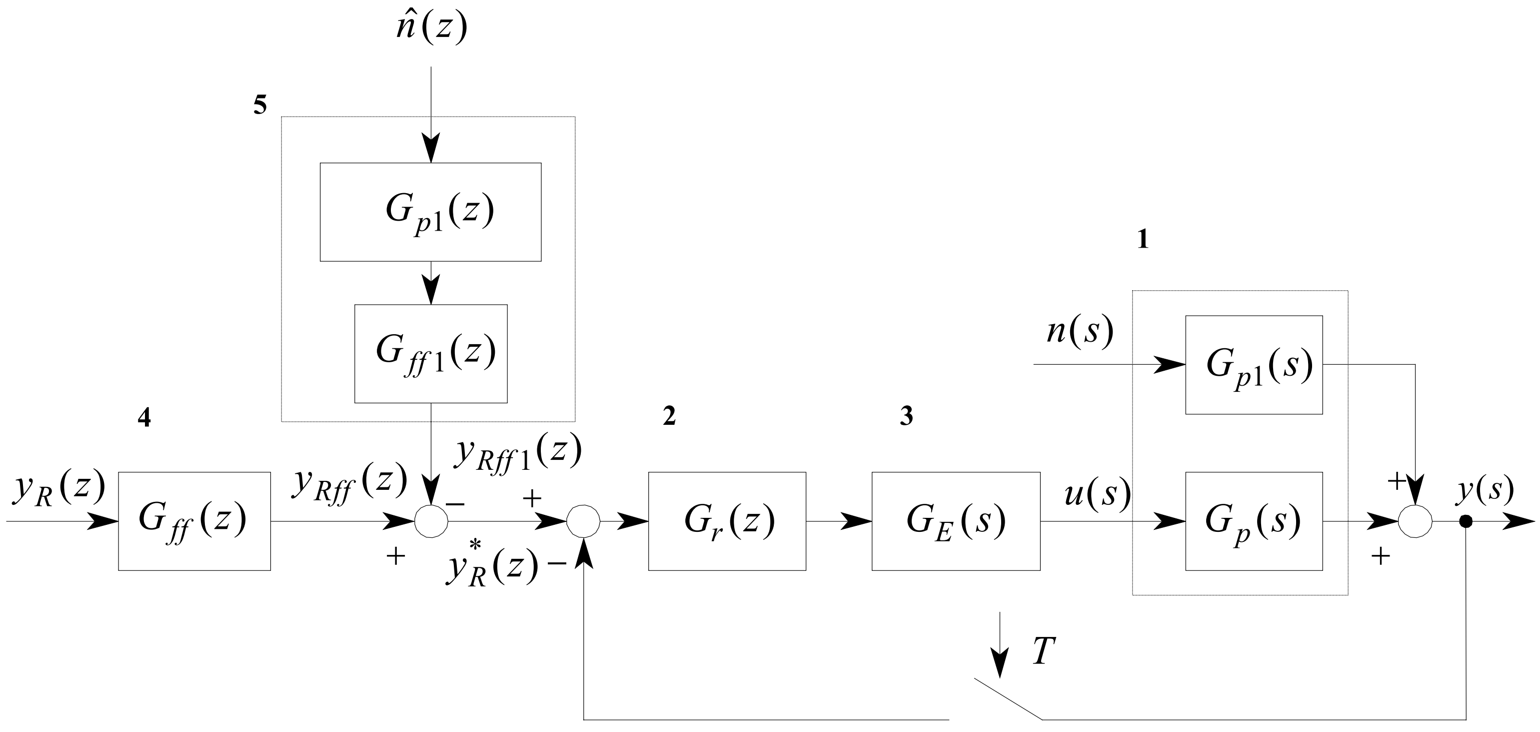
- Odziv je, k tome, dobro prigušen ako polovi leže u području prigušenja $\zeta > \zeta_{\min} = 0{,}7 \ldots 0{,}5$ (područje A na slici).

- Slabo prigušeni polovi (područje B) razmještaju se u lijevoj poluravnini kada je vrijeme uzorkovanja T relativno veliko.

- Ovi polovi izazivaju naglašene oscilacije odziva koje se izmjenjuju u svakom intervalu uzorkovanja (učinak "zvonjave", engl. *ringing effect*).
- Ukupno m nula racionalne prijenosne funkcije vremenski kontinuiranog sustava n-tog reda preslikava se diskretizacijom sustava u ukupno $n-1$ diskretnih nula.
- Od toga je m **izvornih nula**, dok preostalih $n-m-1$ nula jesu **dodatne nule** nastale procesom uzorkovanja.
- Dodatne se nule razmještaju u lijevoj z-poluravnini (obično na negativnom dijelu realne osi) , te po formalnoj analogiji s diskretnim polovima spadaju u slabo prigušene ili nestabilne nule.
- Za mala vremena uzorkovanja T dodatne su nule približno jednake nulama prijenosne funkcije dobivene diskretizacijom člana $1/s^{n-m}$.
- Slabo prigušene ili nestabilne diskretne nule, među koje su uključene praktički sve dodatne nule, ne smiju se kratiti polovima regulatora, prefiltera ili pretkompenzatora.

Struktura slijednog sustava

- Struktura slijednog sustava prikazana je blokovskom shemom na slici.



Sl. 3.11.

- Sustav se sastoji od **regulacijskog kruga** danog u digitalnoj izvedbi i linearnog digitalnog **pretkompenzatora** $G_{ff}(z)$ (engl. *feedforward controller*) smještenog u grani referentne veličine.

- Zadatak je pretkompenzatora:
  - ubrzanje odziva regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu y_R,
  - smanjenje pogreške slijeđenja referentne veličine.
- Dodatno se može ugraditi i pretkompenzator $G_{ff1}(z)$ s ciljem efikasne kompenzacije utjecaja poremećajne veličine n.
- Preduvjeti za to su mogućnost mjerenja ili estimacije poremećajne veličine n i poznavanje prijenosne funkcije procesa $G_{p1}(s)$ s obzirom na poremećajnu veličinu.
- Postupak sinteze oba pretkompenzatora je jednak.
- Sinteza slijednog sustava provodi se u dva temeljna koraka:
  - sinteza regulacijskog kruga
  - sinteza pretkompenzatora.
- Sa stanovišta jednostavnosti postupka optimiranja regulacijskog kruga i kvalitete vladanja s obzirom na poremećajnu veličinu pogodno je odrediti parametre regulatora primjenom **standardnog oblika optimuma dvostrukog odnosa** (potpoglavlje 3.3).

- Prijenosna funkcija optimiranog zatvorenog regulacijskog kruga glasi:

$$\boxed{G_{cl}(z) = \frac{y(z)}{y_R^*(z)} = \frac{B_{cl}(z)}{A(z)} = \frac{B_{cl}^+(z)B_{cl}^-(z)}{A(z)}} \tag{3-46}$$

- Polinom *A*(*z*) zadovoljava optimum dvostrukog odnosa.
- Nule prijenosne funkcije razvrstane su u dvije skupine:
  - nestabilne ili slabo prigušene nule (polinom $B_{cl}^-(z)$),
  - dobro prigušene nule uključene u polinom $B_{cl}^+(z)$.

- Kraćenje dobro prigušenih nula zatvorenog regulacijskog kruga i uvođenje novih, kompenzacijskih nula (preko polinoma B(z)) postiže se pretkompenzatorom s prijenosnom funkcijom:

$$\boxed{G_{ff}(z) = \frac{y_{Rff}(z)}{y_R(z)} = \frac{A_F(1)}{B_{cl}^-(1)} \frac{B(z)}{A_F(z)B_{cl}^+(z)}} \tag{3-47}$$

- Kraćenjem dobro prigušenih nula regulacijskog kruga pretkompenzator preuzima i ulogu prefiltera.
- Kompenzacijske nule kompenziraju utjecaj polova regulacijskog kruga sadržanih u polinomu $A(z)$, čime se ubrzava odziv slijednog sustava s obzirom na referentnu veličinu, odnosno smanjuje pogreška slijeđenja referentne trajektorije.

- U primjenama kod kojih referentna trajektorija nije unaprijed poznata (npr. vojne primjene) pretkompenzator (3-47) mora biti kauzalan.
- Radi toga je u prijenosnu funkciju pretkompenzatora (3-47) uključen polinom $A_F(z)$ reda:

$$\boxed{n_F = \deg A_F = \deg B - \deg B_{cl}^{+}} \tag{3-48}$$

- *Dead-beat* polinom $A_F(z) = z^{n_F}$ daje najjednostavniju realizaciju i neizmjenjen oblik odziva slijednog sustava s minimalnim unijetim kašnjenjem iznosa $n_F T$.
- Nedostatak *dead-beat* polinoma $A_F(z)$:
  - vrlo izraženo forsiranje izlaznog signala pretkompenzatora y_{Rff} i izvršnog signala u,

– velika osjetljivost slijednog sustava na šum u referentnom signalu y_R.

- Ovi nedostaci dolaze više do izražaja uz manje vrijeme uzorkovanja T.
- Uz relativno mala vremena uzorkovanja koristi se modificirani *dead-beat* polinom s jednim polom van ishodišta:

$$\boxed{A_F(z) = z^{n_F-1}\left(z - e^{-T/T_F}\right) = z^{n_F-1}(z - z_F)} \tag{3-49}$$

- Ako se zahtijeva jače filtrirajuće djelovanje polinoma $A_F(z)$ povoljno je svih n_F polova postaviti van ishodišta na iznose koje daje npr. Butterworthov filter.
- U primjenama kod kojih je referentna veličina unaprijed poznata (npr. roboti ili alatni strojevi) može se polinom $A_F(z)$ isključiti iz prijenosne funkcije prekompenzatora.
- Prijenosna funkcija slijednog sustava (prema (3-46) i (3-47)) glasi:

$$\boxed{G(z) = \frac{y(z)}{y_R(z)} = G_{ff}(z)G_{cl}(z) = \frac{A_F(1)}{B_{cl}^-(1)}\frac{B_{cl}^-(z)}{A_F(z)}\frac{B(z)}{A(z)}} \tag{3-50}$$

- Uvjet stacionarne točnosti sustava (3-50) je:

$$\boxed{B(1) = A(1)} \tag{3-51}$$

Pretkompenzator punog reda

- Optimalni pretkompenzator punog reda određen je trivijalnim izborom parametara:

$$\boxed{B(z) = A(z)} \tag{3-52}$$

- Nulama pretkompenzatora punog reda krate se svi polovi zatvorenog regulacijskog kruga (3-46)
- Tako se u potpunosti kompenzira utjecaj polova na usporenje odziva slijednog sustava.
- Izborom *dead-beat* polinoma $A_F(z)$, ukupna prijenosna funkcija sustava (3-50) prelazi u

$$\boxed{G(z) = G_{ff}(z)G_{cl}(z) = \frac{A_F(1)}{B^-(1)}\frac{B^-(z)}{A_F(z)} = \frac{1}{B_{cl}^-(1)}\frac{B_{cl}^-(z)}{z^{n_F}}} \tag{3-53}$$

- Tako projektirani sustav ima **vremenski optimalno (*dead-beat*) vladanje**:
  - aperiodski oblik prijelazne funkcije,
  - konačno vrijeme smirivanja u n_F koraka uzorkovanja.

Pretkompenzator reduciranog reda - sinteza u kontinuiranom području

Postupak:

- Prvo se određuje nadomjesna kontinuirana prijenosna funkcija diskretnog zatvorenog regulacijskog kruga.
- Nakon toga se optimirani kontinuirani pretkompenzator prevodi u diskretni oblik.

a) Nadomjesni kontinuirani slijedni sustav

- Karakteristični polinom $A(z)$ zatvorenog regulacijskog kruga s prijenosnom funkcijom n-tog reda transformira se u kontinuirani oblik prema izrazu:

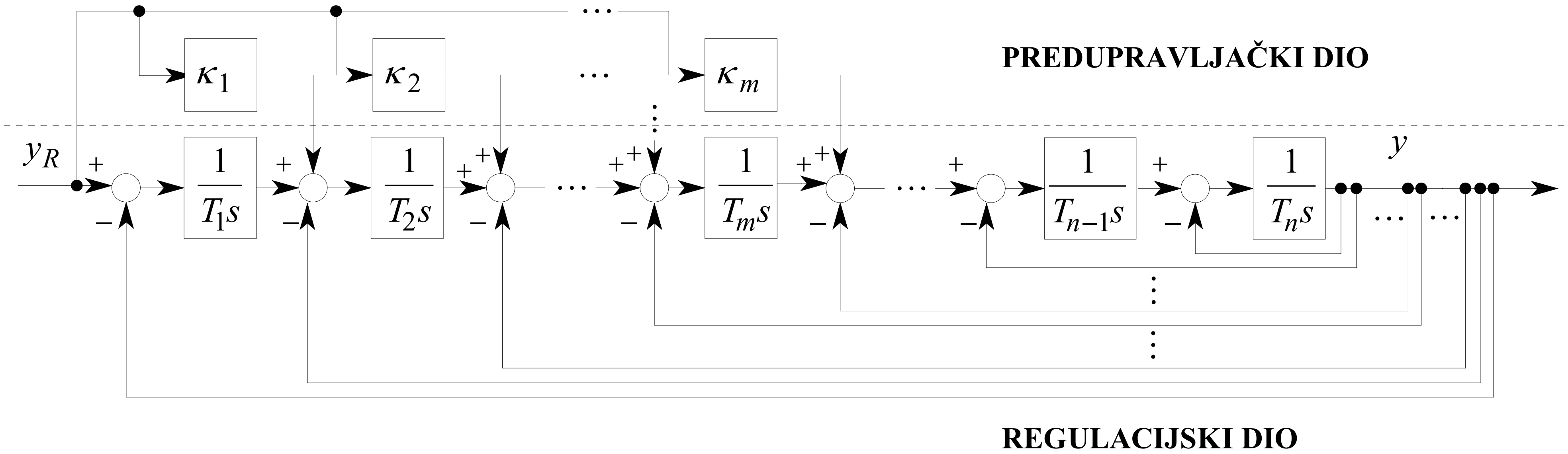
$$\boxed{A_c(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(s - s_i)}{\left|\prod_{i=1}^{n} s_i\right|} = \frac{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}{\left|s_1 s_2 \cdots s_n\right|} \;, \quad s_i = \frac{1}{T}\ln z_i < 0 \;, \quad A(z_i) = 0 \rightarrow z_i} \quad (3\text{-}54)$$

- Ovaj se korak sinteze izostavlja ako je prethodna sinteza regulacijskog kruga provedena primjenom kvazikontinuiranog postupka.

- Kompenzacijski polinom $B(z)$ diskretnog pretkompenzatora (3-47) reduciranog reda $m < n$ nadomješta se kontinuiranim kompenzacijskim polinomom $B_c(s)$.
- Ukupna prijenosna funkcija diskretnog slijednog sustava (3-50) nadomješta se kontinuiranom prijenosnom funkcijom:

$$\boxed{G_c(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_n s^n + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{D_n D_{n-1}^2 \cdots D_2^{n-1} T_e^n s^n + \ldots + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1}} \quad (3\text{-}55)$$

- Nadomjesna blokovska shema sustav regulacije s pretkompenzatorom reduciranog reda:



Sl. 3.12.

- Struktura slijednog sustava s danom prijenosnom funkcijom, dobije se proširenjem kaskadne strukture regulacijskog kruga (Sl. 3.1.) s predupravljačkim granama s pojačanjima:

$$\boxed{\kappa_i = \frac{b_i}{a_i}\ , \quad i = 1,\ldots,m} \qquad (3\text{-}56)$$

- Preko predupravljačkih grana pojačani referentni signal y_R prenosi se prema podređenim krugovima kaskadne strukture sustava. Tako se preskaču sporiji nadređeni krugovi i ubrzava odziv sustava s obzirom na referentnu veličinu.

b) Optimiranje pretkompenzatora

- Optimalni iznosi koeficijenata kompenzacijskog polinoma $B_c(s)$ u (3-55) određuju se rješenjem sustava nelinearnih algebarskih jednadžbi proširenog oblika modulnog optimuma. (3-31)
- Traženo je rješenje jednoznačno određeno zahtjevom da $B_c(s)$ bude *Hurwitzov* polinom, (nule pretkompenzatora leže u lijevoj polovini s-ravnine)
- Analitičko rješenje postoji samo za pretkompenzatore reda $m \leq 2$:

$m = 1$:

$$\boxed{b_1 = T_e\sqrt{1-2D_2}} \qquad (3\text{-}57)$$

$m = 2$:

$$\boxed{b_1 = T_e\sqrt{1-2D_2\left(1-\sqrt{1-2D_3+2D_4D_3^2D_2}\right)}} \qquad (3\text{-}58)$$

$$\boxed{b_2 = T_e^2 D_2\sqrt{1-2D_3+2D_4D_3^2D_2}} \qquad (3\text{-}59)$$

te za najviši koeficijent pretkompenzatora reda m=n-1:

$$b_{n-1} = T_e^{n-1}D_{n-1}D_{n-2}^2\cdots D_2^{n-2}\sqrt{1-2D_n} \qquad (3\text{-}60)$$

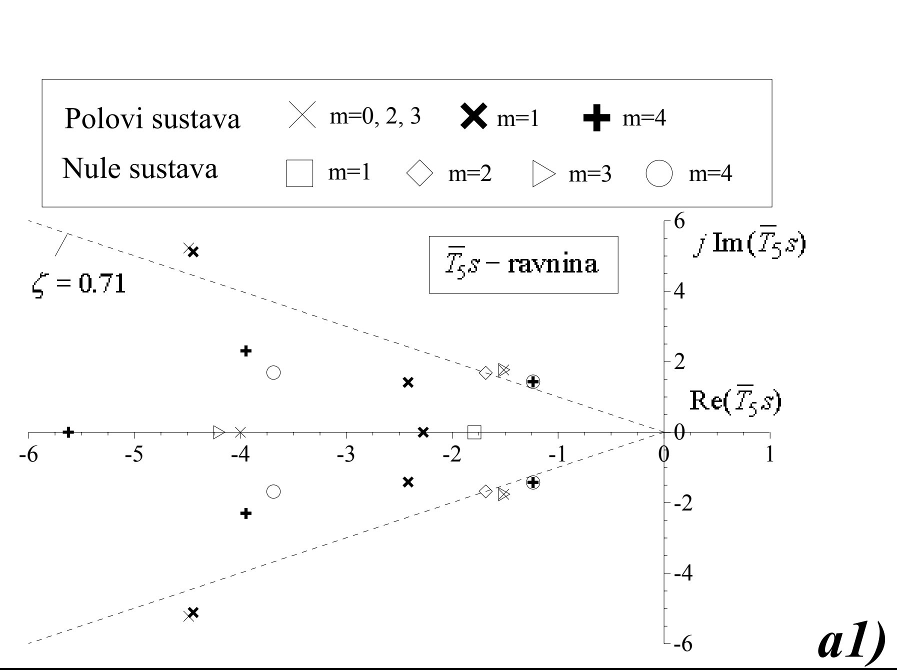
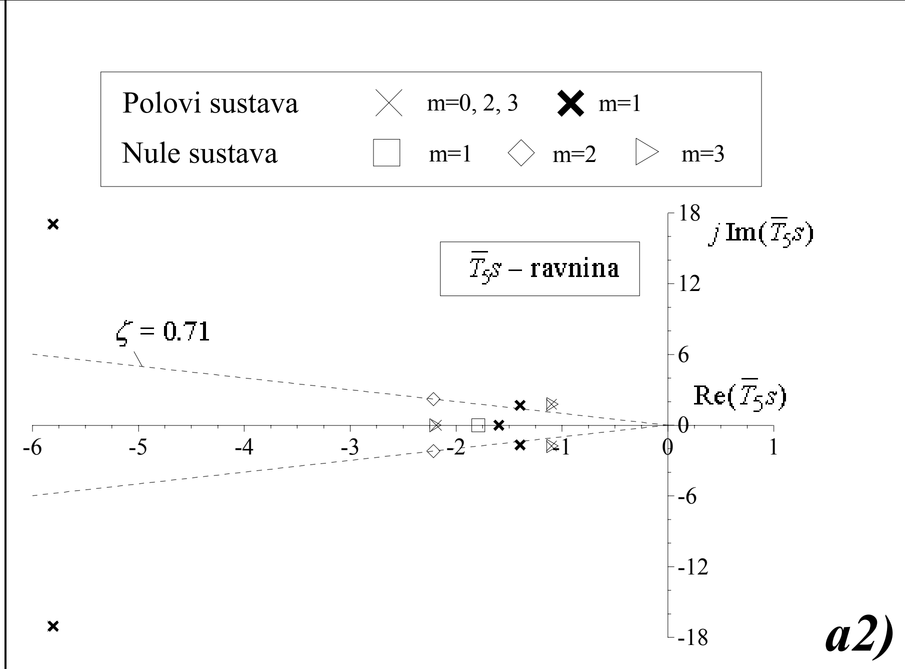
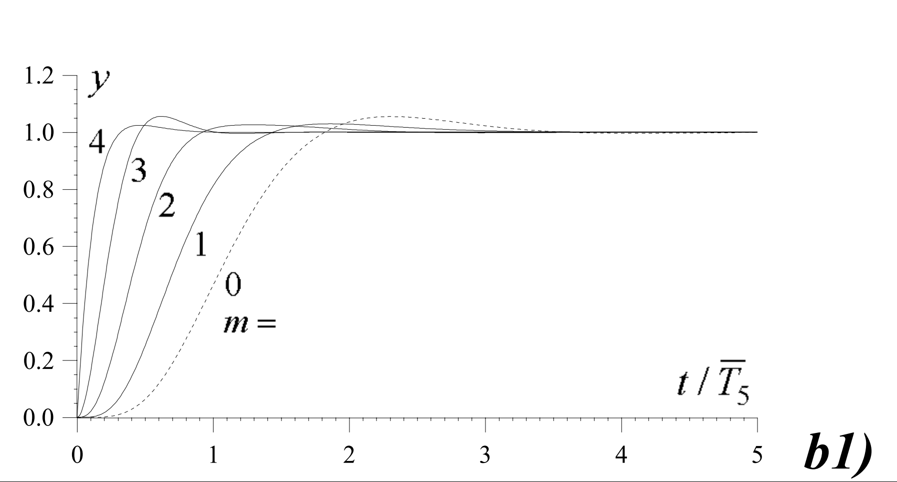
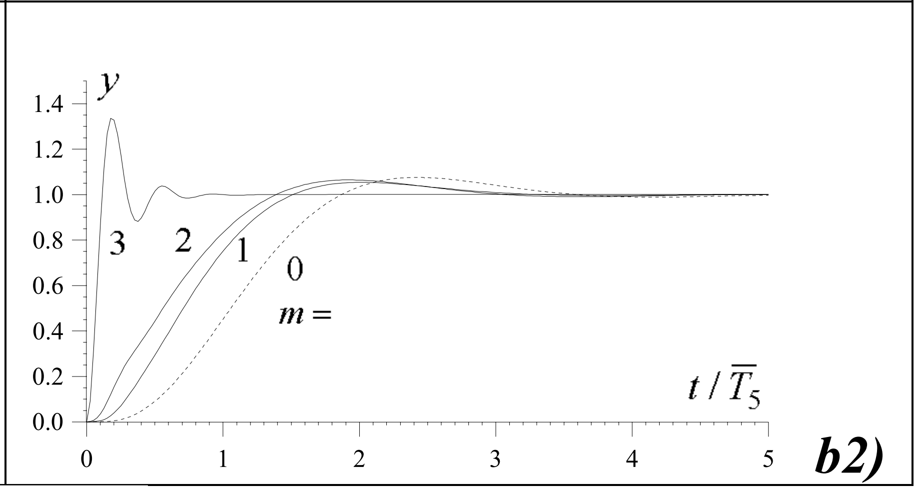
- Za pretkompenzator reda $m > 2$ dobiju se relativno složena implicitna rješenja, te se predlaže numerički postupak rješavanja sustava.
- Optimiranjem pretkompenzatora za regulacijski sustav s regulatorom punog reda podešenog prema optimumu dvostrukog odnosa (3-12) dobiju se iznosi predupravljačkih pojačanja $\kappa_1,\ldots,\kappa_m$ dani u narednoj tablici

Tablica *Optimalni iznosi predupravljačkih pojačanja* $\kappa_1,\ldots,\kappa_m$ *kontinuiranog pretkompenzatora različitog reda m za slijedne sustave različitog reda* $n = 2,\ldots,6$.

n	m	κ_1	κ_2	κ_3	κ_4	κ_5
$n \geq 2$	1	0,447	-	-	-	-
3	2	0,669	0,447	-	-	-
$n \geq 4$	2	0,595	0,354	-	-	-
4	3	0,828	0,686	0,447	-	-
5	3	0,799	0,638	0,354	-	-
5	4	0,914	0,836	0,688	0,447	-
6	3	0,796	0,634	0,348	-	-
6	4	0,900	0,809	0,638	0,354	-
6	5	0,957	0,916	0,836	0,688	0,447

- Raspored polova i nula i prijenosne funkcije optimiranog sustava 5. reda prikazani su na slici 3.14. (vrijeme t i Laplaceov operator s normirani su s obzirom na vremensku konstantu $\overline{T}_n = T_n / 0{,}5^{n-1}$ $(n = 5)$)

Kompenzator reda *m*

Regulator punog reda	Regulator reduciranog reda
	
	

Sl. 3.14.

- Nule pretkompenzatora razmještaju se u blizini dominatnih polova zatvorenog regulacijskog kruga.
- Kompenzacijom utjecaja dominantnih polova smanjuje se vrijeme porasta prijelazne funkcije slijednog sustava i to približno za dvostruko sa svakim povećanjem reda pretkompenzatora.
- Pritom se zadržava povoljan kvaziaperiodski oblik prijelazne funkcije s nadvišenjem ne većim od 6%.

c) Realizacija pretkompenzatora

Pretkompenzator reduciranog reda - sinteza u diskretnom području

- Prijenosna funkcija slijednog sustava (3-50) uz zanemarenje utjecaja nedominantnog člana poprima sljedeći oblik:

$$\boxed{G(z) = G_{cl}(z)G_{ff}(z) / G_x(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}} \quad (3\text{-}61)$$

gdje je $G_x(z) = \dfrac{A_F(1)B_{cl}^-(z)}{B_{cl}^-(1)A_F(z)}$ (prema 3-50)

- Primjena uvjeta točnosti sustava u stacionarnom stanju ($B(1) = A(1)$) (3-51)

$$\boxed{b_0 + b_1 + \ldots + b_{m-1} + b_m = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_\Sigma} \quad (3\text{-}62)$$

- Optimalni iznosi koeficijenata kompenzacijskog polinoma $B(z)$ određuju se primjenom jednadžbi diskretnog oblika modulnog optimuma.

- Ove jednadžbe tvore sustav algebarskih jednadžbi po traženim koeficijentima kompenzacijskog polinoma $B(z)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{m-3} & b_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-4} & b_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \\ \vdots \\ b_m^* \\ a_\Sigma \end{bmatrix} \tag{3-63}$$

gdje je:

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & m^2 \\ 1^4 & 2^4 & \dots & m^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2m} & 2^{2m} & \dots & m^{2m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 1^4 & 2^4 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2m} & 2^{2m} & \dots & n^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \tag{3-64}$$

- Analitičko rješenje ovog sustava postoji samo za pretkompenzatore 1. ili 2. reda:

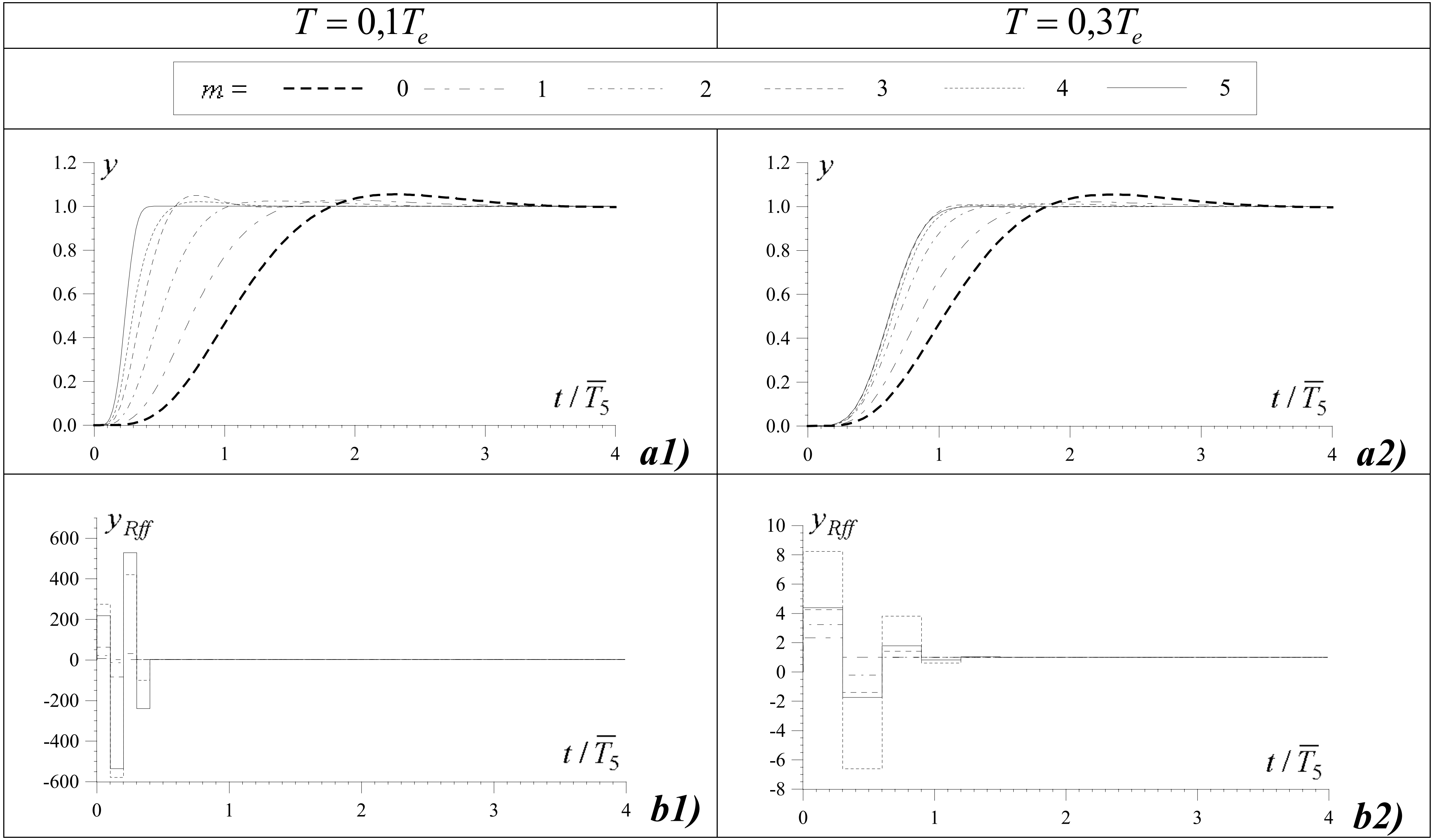
$$m = 1: \qquad b_{0,1} = \frac{a_\Sigma \mp \sqrt{a_\Sigma^2 - 4b_1^*}}{2} \; ;$$

$$m = 2: \qquad b_1 = \frac{a_\Sigma - \sqrt{a_\Sigma^2 - 4b_1^*}}{2} \, , \tag{3-65}$$

$$b_2 = \frac{a_\Sigma - b_1 + \sqrt{(a_\Sigma - b_1)^2 - 4b_2^*}}{2} \, ,$$

$$b_0 = a_\Sigma - b_1 - b_2 \; .$$

- Optimalni parametri pretkompenzatora reda $m > 2$ računaju se numeričkim postupkom, npr. kao funkcija u MATLAB-u.
- Prijelazne funkcije optimiranog slijednog sustava 5. reda prikazane su na slici 3.15 za različiti red pretkompenzatora m i dva različita vremena uzorkovanja T.



Sl. 3.15.

- Prijelazna funkcija sustava s pretkompenzatorom punog reda ima vremenski optimalan aperiodski oblik s konačnim vremenom smirivanja u n koraka uzorkovanja.
- Prijelazne funkcije sustava s pretkompenzatorom reduciranog reda $m < n$ omeđene su prijelaznim funkcijama vremenski optimalnog i nekompenziranog sustava.
- Povećanjem vremena uzorkovanja proporcionalno raste vrijeme odziva vremenski optimalnog sustava.

Primjer: Osjetljivost slijednog sustava na pogreške modeliranja zatvorenog regulacijskog kruga.