Priredio: F. Kolonić

Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektrostrojarstvo i automatizaciju
Status: ***<u>nerecenzirano</u>***

Matematički model asinkronog stroja prilagođen VEKTORSKOM upravljanju

Dijelovi predavanja iz kolegija
Upravljanje elektromotornim pogonima

Zagreb, 2009/2010.

UVOD

Već dugi niz godina asinkronim strojevima (motorima) se daje prednost u različitim industrijskim primjenama zbog njihove robusne konstrukcije, sigurnosti u pogonu i niske cijene. Razvoj i pad cijena uređaja učinske (energetske) elektronike i razvoj komponenata za realizaciju digitalnog sustava upravljanja asinkronog stroja, omogućili su da asinkroni stroj preuzme vodeće mjesto u elektromotornim pogonima s promjenjivom brzinom vrtnje.

Kod elektromotornih pogona s asinkronim strojevima statičke i dinamičke karakteristike, kakve imaju regulirani istosmjerni elektromotorni pogoni, moguće je ostvariti upravljačkim tehnikama koje su zasnovane na orijentaciji koordinata u kojima se matematički opisuje stroj u smjeru vektora rotorskog toka. Kao uzor za ovakav pristup upravljanja poslužilo je načelo upravljanja istosmjernim strojem, kod kojeg se tokom i momentom upravlja potpuno neovisno (raspregnuto).

TRANSFORMACIJA TROFAZNIH VARIJABLI

Rezultantni vektor trofaznih varijabli

Skupu trofaznih varijabli f_a, f_b i f_c, koje mogu predstavljati trenutačne vrijednosti struja, napona ili ulančanih tokova, može se pridružiti rezultantni vektor $\bar{f}$. Jedini uvjet je da projekcija vektora $\bar{f}$ na pojedinu os trofaznog *abc* sustava daje trenutačnu vrijednost fazne veličine u toj osi, (slika 1.1). Vektori $\bar{f}_a$, $\bar{f}_b$ i $\bar{f}_c$ predstavljaju u prostoru orjentirane fazne veličine koje djeluju u osi pojedine faze, a modul im je jednak trenutnoj vrijednosti promatrane fazne veličine.

Rezultantni vektor $\bar{f}$ definiran je izrazom

$$\bar{f} = \frac{2}{3}\left(\bar{f}_a + \bar{f}_b + \bar{f}_c\right). \tag{1.1}$$

Ako trofaznom *abc* sustavu pridružimo kompleksnu ravninu tako da se njezina realna os poklapa s osi faze *a*, tada će biti

$$\bar{f}_a = f_a \tag{1.2}$$

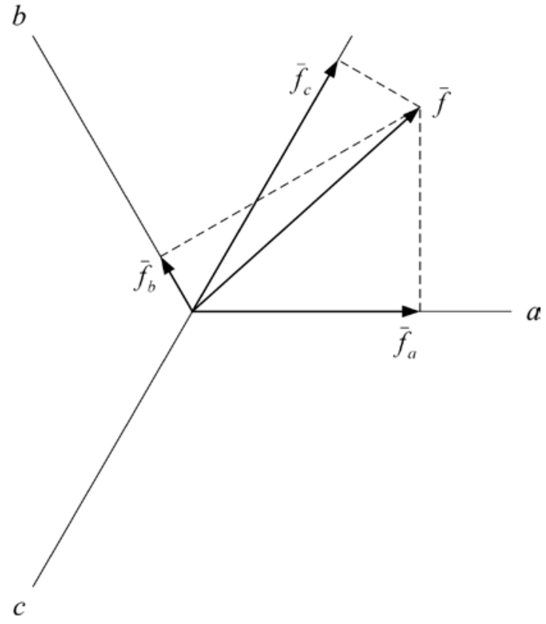
$$\bar{f}_b = \bar{a} f_b \tag{1.3}$$

$$\bar{f}_c = \bar{a}^2 f_c \tag{1.4}$$

gdje je

$$\bar{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{1.5}$$

$$\bar{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{1.6}$$



Slika 1.1 *Razlaganje rezultantnog vektora na komponente u trofaznom sustavu*

Kompleksni operatori $\bar{a}$ i $\bar{a}^2$ imaju značenje jediničnih vektora u smjeru osi b odnosno c. Veličine f_a, f_b i f_c su realni brojevi i nalaze se u realnoj osi kompleksne ravnine. Množenje tih veličina odgovarajućim jediničnim vektorom ima smisao njihove prostorne orijentacije u os dotične faze. Uvrštavanjem izraza (1.2), (1.3) i (1.4) u (1.1), kao funkcija trenutačnih vrijednosti faznih veličina dobije se rezultantni vektor

$$\bar{f} = \frac{2}{3}\left(f_a + \bar{a}f_b + \bar{a}^2 f_c\right). \tag{1.7}$$

Transformacija vektora iz trofaznog u dvofazni sustav (Clarkova transformacija)

Transformacija vektora iz trofaznog abc sustava u dvofazni $\alpha\beta$ sustav razmatra se uz pretpostavku da su ti sustavi međusobno nepomični. Ako se rezultantni vektor $\bar{f}$ izrazi pomoću dvofaznih $\alpha\beta$ i trofaznih abc varijabli (slika 1.2), dobije se izraz

$$\bar{f} = f_\alpha + jf_\beta = \frac{2}{3}\left(f_a + \bar{a}f_b + \bar{a}^2 f_c\right). \tag{1.8}$$

Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova na lijevoj i desnoj strani izraza (1.8) dobije se veza između dvofaznih i trofaznih varijabli,

$$f_\alpha = \frac{2}{3}\left[f_a - \frac{1}{2}\left(f_b + f_c\right)\right], \tag{1.9}$$

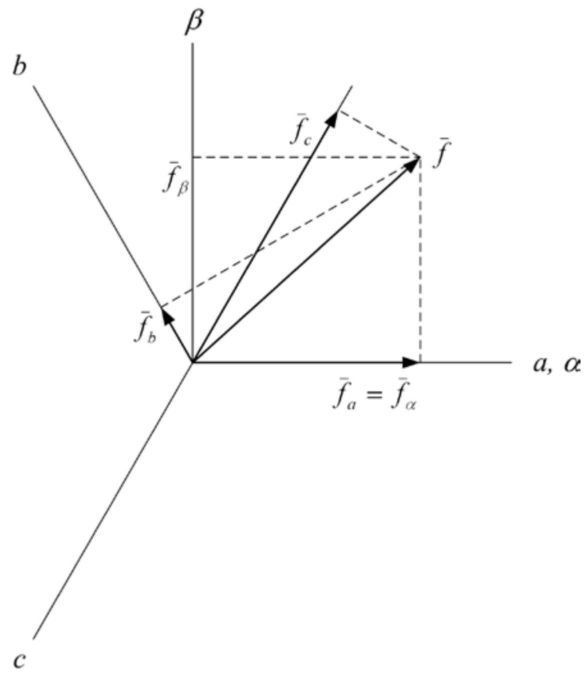
$$f_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(f_b - f_c\right). \tag{1.10}$$

Ako je zadovoljen uvjet

$$f_a + f_b + f_c = 0, \tag{1.11}$$

onda se izraz (1.9) transformira u izraz

$$f_\alpha = f_a. \tag{1.12}$$



Slika 1.2 *Razlaganje rezultantnog vektora na komponente u dvofaznom i trofaznom sustavu*

Iz izraza (1.12) i (1.10) moguće je odrediti izraze za transformaciju vektora iz dvofaznog $\alpha\beta$ sustava u trofazni *abc* sustav. Pri tom se dobiju izrazi

$$f_a = f_\alpha, \tag{1.13}$$

$$f_b = -\frac{1}{2} f_\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} f_\beta, \tag{1.14}$$

$$f_c = -\frac{1}{2} f_\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} f_\beta, \tag{1.15}$$

Ako je ispunjen uvjet (1.11), dvofazne varijable u cijelosti opisuju vektor iz izvornog trofaznog sustava. Ako taj uvjet nije ispunjen, formalno nije moguća transformacija vektora iz trofaznog u dvofazni sustav, jer u tom slučaju vektor u trofaznom sustavu ima tri nezavisne varijable. Stoga, vektor i u sustavu u koji se transformira mora sadržavati treću, tzv. nultu varijablu f_0, koja je određena izrazom

$$f_0 = \frac{1}{3}\left(f_a + f_b + f_c\right). \tag{1.16}$$

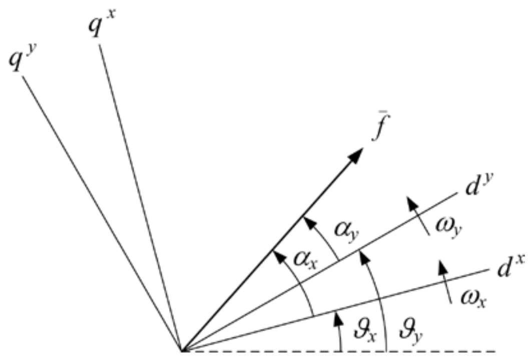
Trofazni asinkroni motor se u pravilu na mrežu spaja bez nul-vodiča, pa se u daljnjem razmatranju uzima da je nulta varijabla jednaka nuli.

Transformacija vektora između dvofaznih koordinatnih sustava s različitim brzinama rotacije (Parkova transformacija)

Na slici 1.3 prikazana su dva dvofazna koordinatna sustava $(dq)^x$ i $(dq)^y$ od kojih jedan rotira kutnom brzinom ω_x, a drugi kutnom brzinom ω_y. Vektor $\bar{f}$ se može izraziti pomoću komponenata u oba koordinatna sustava, pri čemu se dobije:

$$\bar{f}^{\,x} = f_d^{\,x} + jf_q^{\,x}, \tag{1.17}$$

$$\bar{f}^{\,y} = f_d^{\,y} + jf_q^{\,y}. \tag{1.18}$$



Slika 1.3 *Prikaz položaja rezultantnog vektora dvofaznih varijabli u različitim koordinatnim sustavima*

Na temelju slike 1.3 vektori $\bar{f}^{\,x}$ i $\bar{f}^{\,y}$ mogu se izraziti u eksponencijalnom obliku

$$\bar{f}^{\,x} = \left|\bar{f}\right|\cos(\alpha_x) + j\left|\bar{f}\right|\sin(\alpha_x) = \left|\bar{f}\right|e^{j\alpha_x}, \tag{1.19}$$

$$\bar{f}^{\,y} = \left|\bar{f}\right|\cos(\alpha_y) + j\left|\bar{f}\right|\sin(\alpha_y) = \left|\bar{f}\right|e^{j\alpha_y}, \tag{1.20}$$

pa veza između vektora $\bar{f}^{\,x}$ i $\bar{f}^{\,y}$ glasi

$$\bar{f}^{\,y} = \bar{f}^{\,x}e^{j(\alpha_y - \alpha_x)} = \bar{f}^{\,x}e^{j(\vartheta_y - \vartheta_x)}, \tag{1.21}$$

gdje je:

$$\vartheta_x = \int_0^t \omega_x \mathrm{d}t + \vartheta_x(0), \tag{1.22}$$

$$\vartheta_y = \int_0^t \omega_y \mathrm{d}t + \vartheta_y(0). \tag{1.23}$$

Izraz (1.20) predstavlja vektorski oblik jednadžbi transformacije varijabli iz sustava $(dq)^x$ u sustav $(dq)^y$. Nakon uvrštenja (1.17) i (1.18) u (1.21) dobije se

$$f_d^{\,y} + \mathrm{j}f_q^{\,y} = \left(f_d^{\,x} + \mathrm{j}f_q^{\,x}\right)\left[\cos\left(\vartheta_y - \vartheta_x\right) - \mathrm{j}\sin\left(\vartheta_y - \vartheta_x\right)\right], \tag{1.24}$$

odakle slijede jednadžbe transformacije koje definiraju vezu među varijablama u $(dq)^x$ i $(dq)^y$ koordinatnim sustavima:

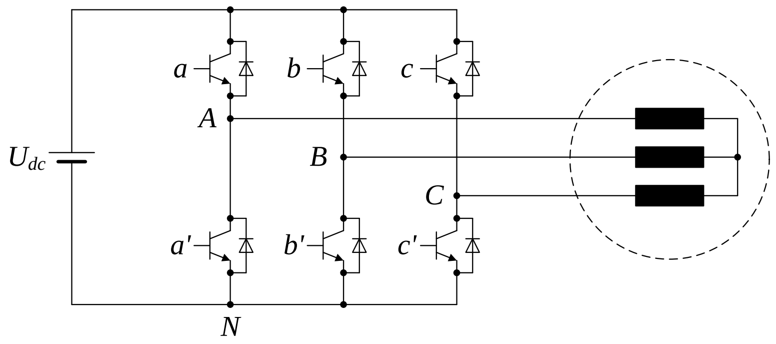
$$f_d^{\,y} = f_d^{\,x}\cos\left(\vartheta_y - \vartheta_x\right) + f_q^{\,x}\sin\left(\vartheta_y - \vartheta_x\right), \tag{1.25}$$

$$f_q^{\,y} = -f_d^{\,x}\sin\left(\vartheta_y - \vartheta_x\right) + f_q^{\,x}\cos\left(\vartheta_y - \vartheta_x\right). \tag{1.26}$$

Priredio: F. Kolonić

MODULACIJA ŠIRINE IMPULSA

Struktura trofaznog izmjenjivača u mosnom spoju s utisnutim naponom prikazana je na slici 2.1. Zadatak izmjenjivača je da na osnovi ulaznog istosmjernog napona oblikuje trofazni izlazni napon te da osigura njegovo upravljanje kako po amplitudi tako i po frekvenciji. Oblik napona na izlazu iz pretvarača određuju upravljački signali *a*, *a*', *b*, *b*', *c* i *c*'. Kada je gornji tranzistor u grani uključen (*a*, *b* ili *c* je "1"), donji tranzistor u grani je isključen (*a*', *b*' ili *c*' je "0").



***Slika 2.1** Strukturni prikaz trofaznog izmjenjivača sa simetričnim teretom*

Sinusna modulacija širine impulsa

Metoda sinusne modulacije širine impulsa zasniva se na usporedbi visokofrekvencijskog trokutastog signala nosioca u_{tr} i niskofrekvencijskog referentnog signala u_{ref}. Pri tome frekvenciju izlaznog napona određuje frekvencija referentnog signala u_{ref}, dok frekvenciju sklapanja određuje frekvencija signala nosioca u_{tr}. Frekvencija i amplituda signala u_{tr} u pravilu se drže konstantnima.

Da bi se dobio trofazni simetrični izlaz, isti signal nosilac u_{tr} uspoređuje se s tri sinusna referentna signala u_{ref} koja su međusobno pomaknuta 120°. Ovisno o odnosu između signala nosioca i za svaku fazu se određuje upravljački signal prema pravilu:

ako je $u_{ref} > u_{tr}$ gornji tranzistor u grani je uključen, a donji je isključen,

ako je $u_{ref} < u_{tr}$ donji tranzistor u grani je uključen, a gornji je isključen.

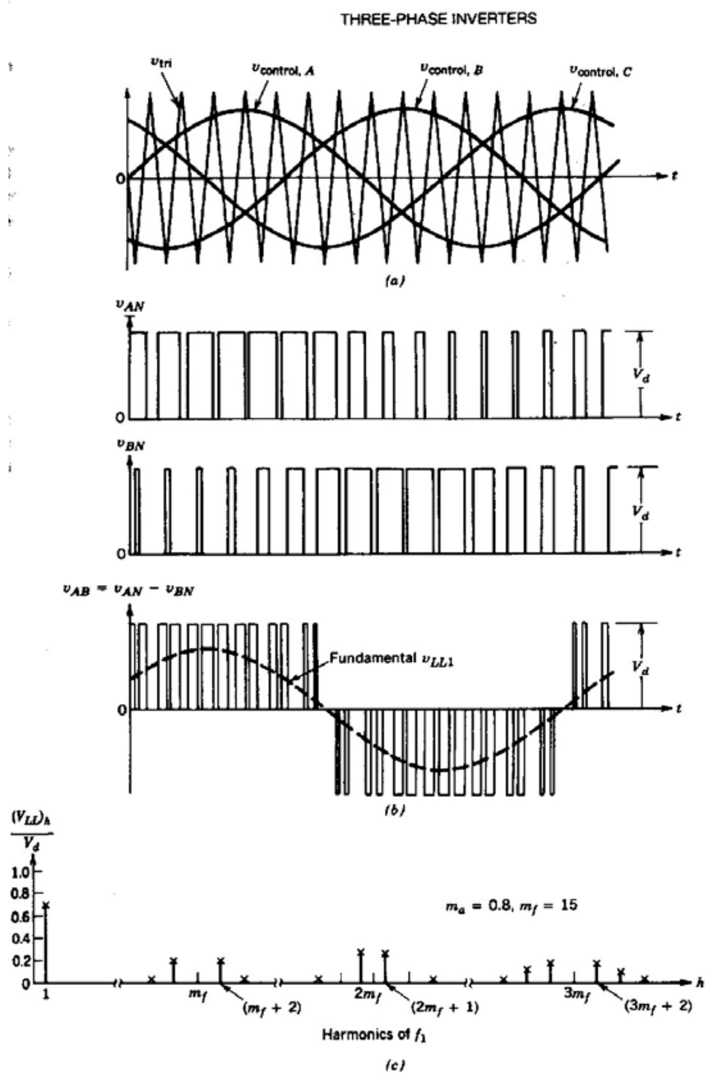
Valni oblici faznih napona u_{AN} i u_{BN}, linijskog napona u_{AB} i harmonijski spektar linijskog napona u_{AB} prikazani su na slici 2.2 za faktor frekvencijske modulacije m_f = 15 i faktor amplitudne modulacije m_a = 0,8. Isprekidanom linijom prikazan je osnovni harmonik napona u_{AB}.

Faktor amplitudne modulacije m_a definira se kao omjer vršne vrijednosti upravljačkog (referentnog) signala i vršne vrijednosti signala nosioca,

$$m_a = \frac{\hat{v}_{ref}}{\hat{v}_{tr}}, \quad (2.1)$$

a faktor frekvencijske modulacije m_f kao omjer frekvencije signala nosioca i frekvencije upravljačkog signala,

$$m_f = \frac{f_{tr}}{f_{ref}}. \quad (2.2)$$



Slika 2.2 *Princip upravljanja metodom sinusne modulacije širine impulsa*

U linearnom režimu rada kada je $m_a \leq 1{,}0$, amplituda osnovnog harmonika mijenja se linearno s m_a. Vršna vrijednost osnovnog harmonika faznog napona iznosi

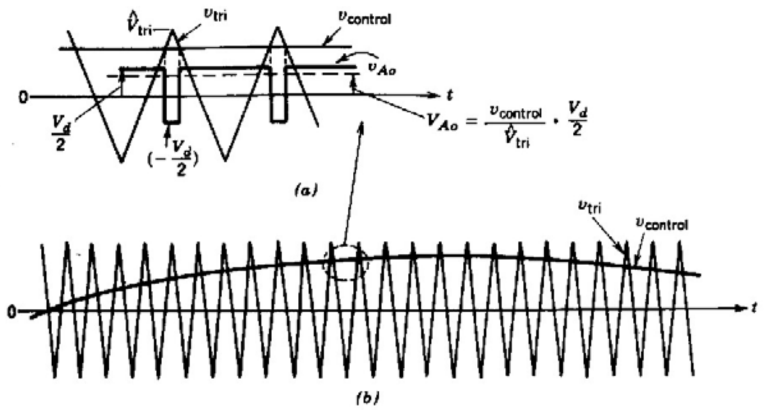
$$(\hat{u}_a)_1 = m_a \cdot \frac{U_{dc}}{2}, \quad (2.3)$$

iz čega proizlazi da efektivna vrijednost osnovnog harmonika linijskog napona iznosi

$$(\hat{u}_{ab})_1 = m_a \cdot \frac{\sqrt{3}\cdot U_{dc}}{2\cdot\sqrt{2}}. \tag{2.4}$$

Na osnovi harmonijskog spektra linijskog napona u_{AB} moguće je doći do nekih važnih karakteristika (za faktor amplitudne modulacije $m_a \leq 1{,}0$):

1) Uz pretpostavku da je m_f po iznosu velik, u_{ref} se mijenja jako malo za vrijeme sklopne periode, tj. može ga se uzeti konstantnim na sklopnoj periodi. Zakon izveden na slici 2.3 može se primijeniti na pojedinoj sklopnoj periodi. Srednja se vrijednost napona grane A mijenja iz periode u periodu po zakonu po kojem se mijenja referentni signal u_{ref}. Na osnovi ovog razmatranja može se zaključiti zašto je odabran sinusni oblik signala u_{ref}. Trenutačna srednja vrijednost napona u_{AN} odgovara upravo njegovom osnovnom harmoniku. Dakle, za $m_a < 1{,}0$, amplituda osnovnog harmonika se mijenja linearno s m_a (linearno područje rada).



Slika 2.3 *Sinusna širinsko-impulsna modulacija*

2) Kod trofaznih izmjenjivača vodi se računa samo za harmonike koji se javljaju u linijskim naponima.
Viši harmonici pojavljuju se oko sklopne frekvencije i njenih višekratnika. Amplitude pojedinih harmonika su gotovo neovisne o m_f, iako m_f određuje frekvencije na kojima se harmonici javljaju:

$$f_h = (j \cdot m_f \pm k)\cdot f_1 \tag{2.5}$$

Ako j ima neparnu (parnu) vrijednost, harmonici postoje jedino za parne (neparne) k. Ako se razmatra samo m_f -ti harmonik (a isto se odnosi i na njegove neparne višekratnike), fazni odnos među tim harmonicima u naponima u_{AN} i u_{BN} je $(120\ m_f)^{\circ}$.

Ovaj fazni pomak će biti nula (višekratnik od 360°) ako je m_f neparan i višekratnik od 3. Na taj se način eliminira m_f-ti harmonik u linijskom naponu.

Tablica 2.1 *Iznos harmonika linijskog napona u ovisnosti o iznosu faktora amplitudne modulacije*

Table 8-2 Generalized Harmonics of v_{LL} for a Large and Odd m_f That Is a Multiple of 3.

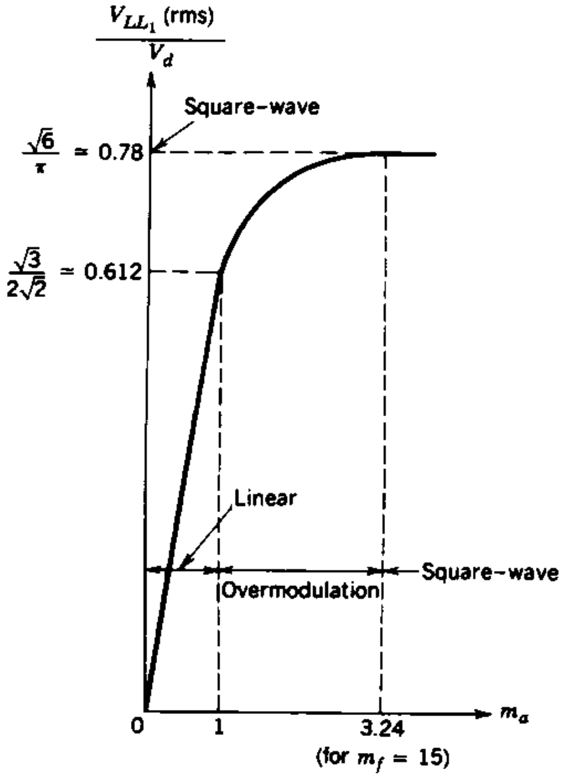
h \ m_a	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
1	0.122	0.245	0.367	0.490	0.612
$m_f \pm 2$	0.010	0.037	0.080	0.135	0.195
$m_f \pm 4$				0.005	0.011
$2m_f \pm 1$	0.116	0.200	0.227	0.192	0.111
$2m_f \pm 5$				0.008	0.020
$3m_f \pm 2$	0.027	0.085	0.124	0.108	0.038
$3m_f \pm 4$		0.007	0.029	0.064	0.096
$4m_f \pm 1$	0.100	0.096	0.005	0.064	0.042
$4m_f \pm 5$			0.021	0.051	0.073
$4m_f \pm 7$				0.010	0.030

Note: $(V_{LL})_h/V_d$ are tabulated as a function of m_a where $(V_{LL})_h$ are the rms values of the harmonic voltages.

3) Faktor m_f bi trebao biti neparan cijeli broj. Izbor neparne vrijednosti za m_f rezultira u simetrijama $f(-t) = f(t)$ te $f(t) = - f(t + T/2)$ koje se odnose na vremensko ishodište. Stoga su u tom slučaju prisutni samo neparni harmonici dok parni harmonici nestaju.
   Za male vrijednosti m_f ($m_f < 21$), za eliminaciju parnih harmonika treba se koristiti sinkronizirana ŠIM, a m_f treba biti neparan cijeli broj. Često m_f treba biti višekratnik od 3 kako bi se eliminirali najdominantniji harmonici u linijskom naponu. Stoga, ako se mijenja frekvencija signala u_{ref}, potrebno je mijenjati i frekvenciju signala u_{tr} kako bi m_f ostao neparan cijeli broj. Ako je $m_f > 21$, amplitude subharmonika, koji su posljedica asinkrone ŠIM-e, su male. Stoga, ako je m_f velik, moguća je asinkrona ŠIM-a gdje se frekvencija signala u_{tr} drži konstantnom dok se mijenja frekvencija signala u_{ref}. U svakom slučaju, ako izmjenjivač napaja takav teret kakav je izmjenični motor, subharmonici koji se javljaju oko nulte frekvencije ili pak na samoj nultoj frekvenciji, iako male amplitude, rezultirat će u velikim strujama što je nepoželjno. Stoga bi asinkronu ŠIM trebalo izbjegavati.

Da bi se povećala amplituda osnovnog harmonika izlaznog napona u_{AN} iznad $m_a \cdot U_{dc}/2$, potrebno je povećati faktor amplitudne modulacije m_a iznad 1, što rezultira premodulacijom (eng. *Overmodulation*), (slika 8). Kada izmjenjivač radi u tom (nelinearnom) području rada, amplituda osnovnog harmonika ne ovisi linearno o m_a, nego ovisi o m_f, a frekvencijski spektar izlaznog napona je znatno nepovoljniji u odnosu na linearno područje rada. Bez obzira na vrijednost m_f, za nelinearni režim rada preporučuje se sinkrona ŠIM. Ova se modulacija normalno koristi u pogonima s asinkronim strojem, dok se izbjegava za neprekidna energetska napajanja.

Za vrijeme premodulacije ($m_a > 1$), bez obzira na vrijednosti m_f, treba se pridržavati pravila koja vrijede kad m_f ima malu vrijednost.



Slika 2.4 *Ovisnost omjera efektivne vrijednosti linijskog napona i napona istosmjernog međukruga o faktoru amplitudne modulacije*

Vektorska modulacija širine impulsa (eng. *Space Vector PWM, SVPWM*)

Trofazni izmjenjivač ima osam mogućih sklopnih stanja gornjih tranzistora u granama (donji tranzistori su komplementarni gornjima); šest aktivnih i dva pasivna (nulta) sklopna stanja. Iznosi faznih napona U_{AN}, U_{BN} i U_{CN} za svih osam sklopnih stanja tranzistora, uz simetričan teret i napon istosmjernog međukruga U_{dc}, prikazani su u tablici 2.2.

Tablica 2.2 *Iznosi faznih napona za određeno sklopno stanje*

c	b	a	U_{AN}	U_{BN}	U_{CN}
0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\frac{2U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$
0	1	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{2U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$
0	1	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{2U_{dc}}{3}$
1	0	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{2U_{dc}}{3}$
1	0	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{2U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$
1	1	0	$-\frac{2U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$
1	1	1	0	0	0

Vektorska modulacija temelji se na prikazu faznih napona U_{AN}, U_{BN} i U_{CN} pomoću rezultantnog vektora u dvofaznom $\alpha\beta$ sustav. Transformacija vektora napona iz trofaznog *abc* sustava u dvofazni $\alpha\beta$ ostvaruje se pomoću izraza

$$U_\alpha = U_a, \tag{2.6}$$

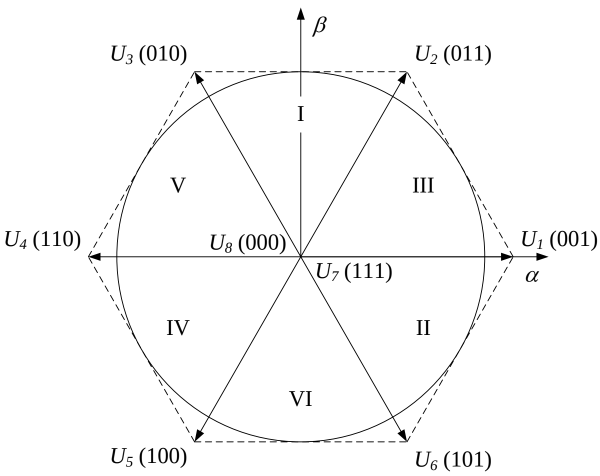
$$U_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(U_b - U_c\right). \tag{2.7}$$

Iznosi α i β komponente napona za svih osam sklopnih stanja dani su u tablici 2.3.

***Tablica 2.3** Iznos α i β komponente napona za određeno sklopno stanje*

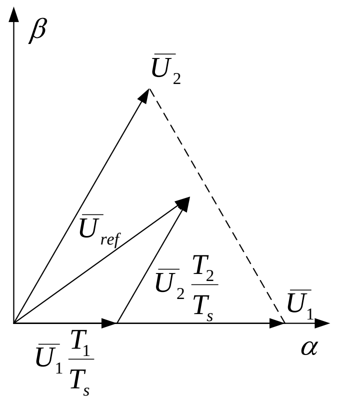
c	b	a	U_α	U_β	vektor
0	0	0	0	0	U_8
0	0	1	$\frac{2U_{dc}}{3}$	0	U_1
0	1	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_3
0	1	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_2
1	0	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_5
1	0	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_6
1	1	0	$-\frac{2U_{dc}}{3}$	0	U_4
1	1	1	0	0	U_7

Svako sklopno stanje moguće je predstaviti s odgovarajućim vektorom u $\alpha\beta$ koordinatnom sustavu (šest aktivnih vektora i dva nulta vektora). Šest aktivnih vektora dijele $\alpha\beta$ koordinatni sustav na šest sektora. Vrhovi aktivnih vektora tvore pravilni šesterokut sa stranicama duljine $2U_{dc}/3$, dok su nulti (pasivni) vektori smješteni u ishodištu tog šesterokuta. Raspored aktivnih i pasivnih vektora u kompleksnoj ravnini prikazan je na slici 2.5.



***Slika 2.5** Prikaz vektora u kompleksnoj ravnini*

Zadatak vektorske modulacije je da aproksimira referentni vektor napona U_{ref} s odgovarajućom kombinacijom dva susjedna aktivna i nulta vektora. Na slici 2.6. prikazan je referentni vektor napona u sektoru III i aktivni vektori U_1 i U_2.



Slika 2.6 *Aproksimacija referentnog vektora napona* U_{ref}

Za svaki kratki period T_s (vrijeme uzorkovanja digitalnog sustava) srednja vrijednost na izlazu iz izmjenjivača treba biti jednaka srednjoj vrijednosti referentnog vektora napona U_{ref}, pa vrijedi

$$\frac{1}{T_s}\int_0^{T_s} U_{ref}\mathrm{d}t = \frac{1}{T_s}\int_0^{T_1} U_1\mathrm{d}t + \frac{1}{T_s}\int_{T_1}^{T_1+T_2} U_2\mathrm{d}t = U_1\frac{T_1}{T_s} + U_2\frac{T_2}{T_s}, \tag{2.8}$$

gdje T_1 i T_2 predstavljaju vremena trajanja aktivnog vektora U_1 i U_2, pri čemu mora biti zadovoljen uvjet $T_1 + T_2 \le T_s$. Ako se referentni vektor napona U_{ref} sporo mijenja unutar perioda T_s, izraz (2.8) nakon integracije poprima oblik

$$U_{ref} = U_1\frac{T_1}{T_s} + U_2\frac{T_2}{T_s}. \tag{2.9}$$

Rastavljanjem referentnog i aktivnih vektora u izrazu (2.9) na realni i kompleksni dio, dobije se

$$U_\alpha + jU_\beta = \left(\frac{2}{3}U_{dc}\right)\frac{T_1}{T_s} + \left(\frac{U_{dc}}{3} + j\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}\right)\frac{T_2}{T_s}, \tag{2.10}$$

pri čemu su realni i imaginarni dio vektora

$$U_\alpha = \frac{2}{3}U_{dc}\frac{T_1}{T_s} + \frac{1}{3}U_{dc}\frac{T_2}{T_s}, \tag{2.11}$$

$$U_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}U_{dc}\frac{T_2}{T_s}. \tag{2.12}$$

Iz izraza (2.11) i (2.12) mogu se odrediti vremena trajanja T_1 i T_2 aktivnih vektora U_1 i U_2 potrebnih za aproksimaciju referentnog vektora napona i ona iznose,

$$T_1 = T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta\right), \tag{2.13}$$

$$T_2 = T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta . \tag{2.14}$$

Na identičan način određuju se vremena trajanja aktivnih vektora i za ostale sektore, (T_2 i T_3),. (T_3 i T_4) itd. Izrazi za određivanje trajanja aktivnih vektora za sve sektore prikazani su u tablici 2.4. Vrijeme t_1 predstavlja vrijeme trajanja aktivnog vektora U_1, U_3 ili U_5 (vektori koji predstavljaju sklopno stanje kod kojeg je uključen jedan tranzistor), dok vrijeme t_2 predstavlja vrijeme trajanja aktivnog vektora U_2, U_4 ili U_6 (vektori koji predstavljaju sklopno stanje kod kojih su uključena dva tranzistora).

Tablica 2.4 *Vremena trajanja sklopnih stanja u pojedinim sektorima*

Sektor	t_1	t_2
T1 i T2 (III)	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta\right)$	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$
T2 i T3 (I)	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta\right)$	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta\right)$
T3 i T4 (V)	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta\right)$
T4 i T5 (IV)	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta\right)$
T5 i T6 (VI)	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta\right)$	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta\right)$
T1 i T6 (II)	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta\right)$	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$

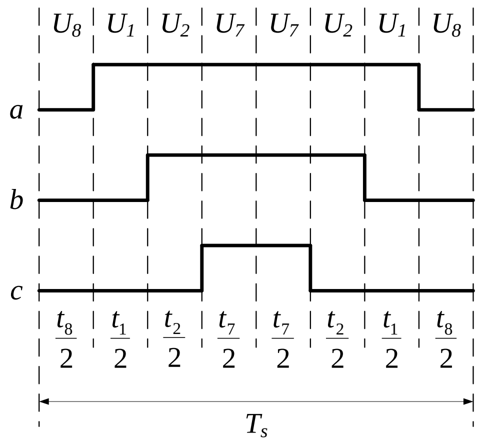
Nakon što se izračunaju vremena t_1 i t_2, ostatak sklopne periode je namijenjen nultim vektorima U_8 i U_7. Izrazi za t_1 i t_2 vrijede za sve tipove vektorske modulacije, dok smještaj nultih vektora U_8 i U_7 ovisi o tipu vektorske modulacije. Jednadžbe koje definiraju t_7 i t_8 su različite za svaku metodu, ali ukupno vrijeme trajanja nultog vektora mora zadovoljavati uvjet

$$t_{7,8} = T_s - T_1 - T_2 = t_7 + t_8 . \tag{2.15}$$

Najpopularnija među vektorskim modulacijama širine impulsa je modulacija sa simetričnim smještajem nultih vektora u vremenu T_s, kod koje nulti vektori U_7 i U_8 jednako traju

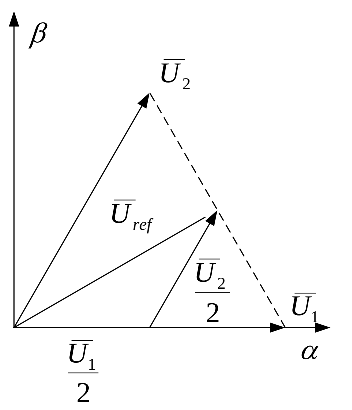
$$t_7 = t_8 = \frac{T_s - t_1 - t_2}{2}. \tag{2.16}$$

Na slici 2.7 prikazani su valni oblici upravljačkih signala *a*, *b* i *c* unutar perioda T_s za sektor III, prema slici 2.5.



Slika 2.7 *Valni oblici upravljačkih signala a, b i c unutar perioda* T_s

Maksimalna veličina referentnog vektora napona koja se može prikazati odgovarajućim slijedom dva susjedna vektora mijenja se s položajem referentnog vektora. Kada se referentni vektor nalazi točno između dva aktivna vektora, njegova maksimalna vrijednost je najmanja. Za aproksimaciju referentnog vektora napona koji se nalazi u tom položaju, oba aktivna vektora moraju jednako trajati. Da bi bio zadovoljen uvjet $t_1 + t_2 \leq T_s$, trajanje aktivnih vektora mora biti manje ili jednako polovici periode T_s. Aproksimacija referentnog vektora napona koji se nalazi točno između dva aktivna vektora prikazana je na slici 2.8.



Slika 2.8 *Maksimalna dopuštena duljina referentnog vektora napona*

Prema slici 2.8. moguće je odrediti maksimalnu duljinu referentnog vektora napona i ona iznosi

$$\left|U_{ref}\right|_{\max} = \frac{1}{2}\left|U_1\right|\cos(30) + \frac{1}{2}\left|U_2\right|\cos(30) = \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}. \tag{2.17}$$

Da bi se referentni vektor mogao prikazati s dva susjedna aktivna vektora u svakom položaju, njegov modul ne smije biti veći od $U_{dc} / \sqrt{3}$.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG MOTORA U DVOFAZNOM KOORDINATNOM SUSTAVU KOJI ROTIRA PROIZVOLJNOM BRZINOM

Matematički model asinkronog motora uobičajeno se razmatra uz slijedeće pretpostavke:

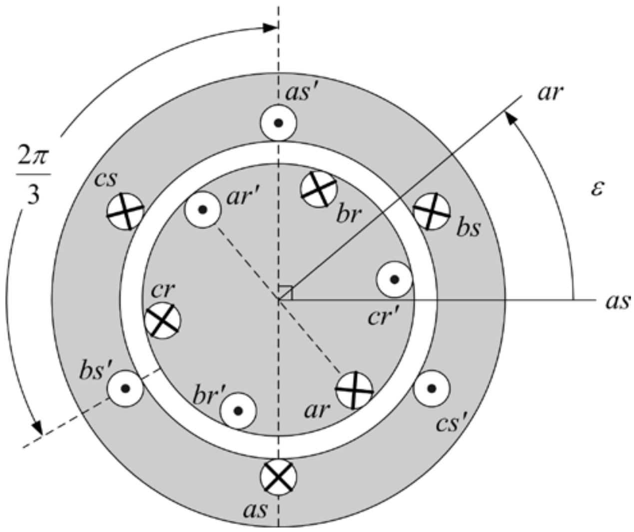
- motor je geometrijski i električki simetričan u svim trima fazama
- zasićenje i gubici u željezu se zanemaruju
- utjecaj potiskivanja struje u namotu statora i rotora se zanemaruje
- raspodjela protjecanja i polja u zračnom rasporu je sinusna
- otpori i induktiviteti uzimaju se kao koncentrirani parametri

Poprečni presjek simetričnog asinkronog motora prikazan je na slici 3.1. gdje *as* predstavlja os namota faze *a* statora, *ar* predstavlja os namota faze *a* rotora, ε predstavlja kut između istoimenih namota na statoru i rotoru. Budući da se radi o simetričnom trofaznom namotu na statoru i rotoru, za fazne otpore statora i rotora vrijedi $R_{sa} = R_{sb} = R_{sc} = R_s$, odnosno $R_{ra} = R_{rb} = R_{rc} = R_r$. Naponske jednadžbe statora asinkronog motora (u prirodnom, statorskom, koordinatnom sustavu) dane su izrazima:

$$u_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sa}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.1}$$

$$u_{sb} = R_s i_{sb} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sb}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.2}$$

$$u_{sc} = R_s i_{sc} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sc}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.3}$$



Slika 3.1 *Poprečni presjek simetričnog asinkronog motora*

Naponske jednadžbe rotora (u prirodnom, rotorskom, koordinatnom sustavu) asinkronog motora dane su izrazima:

$$u_{ra} = R_r i_{ra} + \frac{\mathrm{d}\psi_{ra}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.4}$$

$$u_{rb} = R_r i_{rb} + \frac{\mathrm{d}\psi_{rb}}{\mathrm{d}t}, \tag{3.5}$$

$$u_{rc} = R_r i_{rc} + \frac{\mathrm{d}\psi_{rc}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.6}$$

Veza između ulančanih tokova i struja statora određena je slijedećim izrazima:

$$\begin{aligned}\psi_{sa} &= (L_{\sigma s} + l_{ms}) i_{sa} - \frac{1}{2} l_{ms} i_{sb} - \frac{1}{2} l_{ms} i_{sc} + \\ &+ l_{sr}\cos(\varepsilon) i_{ra} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{rb} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{rc}\end{aligned}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\psi_{sb} &= -\frac{1}{2} l_{ms} i_{sa} + (L_{\sigma s} + l_{ms}) i_{sb} - \frac{1}{2} l_{ms} i_{sc} + \\ &+ l_{sr}\cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{ra} + l_{sr}\cos(\varepsilon) i_{rb} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{rc}\end{aligned}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\psi_{sc} &= -\frac{1}{2} l_{ms} i_{sa} - \frac{1}{2} l_{ms} i_{sb} + (L_{\sigma s} + l_{ms}) i_{sc} + \\ &+ l_{sr}\cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{ra} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{rb} + l_{sr}\cos(\varepsilon) i_{rc}\end{aligned}, \tag{3.9}$$

gdje je $L_{\sigma s}$ rasipni induktivitet faze statora, l_{ms} glavni induktivitet faze statora, a l_{sr} međuinduktivitet između faze statora i rotora kada im se osi poklapaju.

Veza između ulančanih tokova i struja rotora određena je izrazima

$$\begin{aligned}\psi_{ra} &= l_{sr}\cos(\varepsilon) i_{sa} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sb} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{sc} + \\ &+ (L_{\sigma r} + l_{mr}) i_{ra} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rb} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rc}\end{aligned}, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\psi_{rb} &= l_{sr}\cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{sa} + l_{sr}\cos(\varepsilon) i_{sb} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sc} - \\ &- \frac{1}{2} l_{mr} i_{ra} + (L_{\sigma r} + l_{mr}) i_{rb} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rc}\end{aligned}, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\psi_{rc} &= l_{sr}\cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sa} + l_{sr}\cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{sb} + l_{sr}\cos(\varepsilon) i_{sc} \\ &- \frac{1}{2} l_{mr} i_{ra} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rb} + (L_{\sigma r} + l_{mr}) i_{rc}\end{aligned}, \tag{3.12}$$

gdje je $L_{\sigma r}$ rasipni induktivitet faze rotora, a l_{mr} glavni induktivitet faze rotora. Rezultantni vektori fizikalnih veličina statora imaju oblik:

$$\bar{u}_s = \frac{2}{3}\left(u_{sa} + u_{sb}e^{j\frac{2\pi}{3}} + u_{sc}e^{j\frac{4\pi}{3}}\right), \tag{3.13}$$

$$\bar{i}_s = \frac{2}{3}\left(i_{sa} + i_{sb}e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_{sc}e^{j\frac{4\pi}{3}}\right), \tag{3.14}$$

$$\bar{\psi}_s = \frac{2}{3}\left(\psi_{sa} + \psi_{sb}e^{j\frac{2\pi}{3}} + \psi_{sc}e^{j\frac{4\pi}{3}}\right). \tag{3.15}$$

Rezultantni vektori rotorskih fizikalnih veličina imaju jednak oblik kao i rezultantni vektori statorskih fizikalnih veličina, samo je indeks s zamijenjen indeksom r. Nakon uvođenja rezultantnih vektora naponske jednadžbe statorskog i rotorskog kruga poprimaju oblike:

$$\bar{u}_s = R_s\bar{i}_s + \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}_s}{\mathrm{d}t}, \tag{3.16}$$

$$\bar{u}_r = R_r\bar{i}_r + \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}_r}{\mathrm{d}t}. \tag{3.17}$$

I veze između struja i ulančanih tokova se mogu izraziti pomoću rezultantnih vektora,

$$\bar{\psi}_s = L_s\bar{i}_s + L_m\bar{i}_r e^{j\varepsilon}, \tag{3.18}$$

$$\bar{\psi}_r = L_m\bar{i}_s e^{-j\varepsilon} + L_r\bar{i}_r, \tag{3.19}$$

gdje su

$$L_s = L_{\sigma s} + \frac{3}{2}l_{ms}, \tag{3.20}$$

$$L_m = \frac{3}{2}l_{sr}, \tag{3.21}$$

$$L_r = L_{\sigma r} + \frac{3}{2}l_{mr}. \tag{3.22}$$

Za induktivitete statora i rotora vrijede izrazi

$$L_s = L_{\sigma s} + L_m, \tag{3.23}$$

$$L_r = L_{\sigma r} + L_m. \tag{3.24}$$

Izrazi (3.16) i (3.18) vrijede u statorskom koordinatnom sustavu, a izrazi (3.17) i (3.19) vrijede u rotorskom koordinatnom sustavu, pa između tih izraza nema izravne veze. Da bi se ti izrazi doveli u izravnu vezu nužno je sve rezultantne vektore transformirati u zajednički koordinatni sustav. U ovom slučaju vektori se transformiraju u koordinatni sustav koji rotira proizvoljnom brzinom ω_k. Transformacija vektora između dvofaznih koordinatnih sustava s različitim brzinama rotacije izvodi se pomoću izraza (1.21). Ako se pretpostavi da kut između statorskog i zajedničkog koordinatnog sustava (proizvoljno smješten u os magnetskog polja) iznosi ρ, (slika 4.2), tada kut između rotorskog i zajedničkog koordinatnog sustava iznosi (ρ - ε). Vrijede izrazi

$$\bar{u}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}_s}{\mathrm{d}t} \quad \Big/ \cdot e^{-j\rho} \ , \tag{3.25}$$

$$\bar{u}_r = R_r \bar{i}_r + \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}_r}{\mathrm{d}t} \quad \Big/ \cdot e^{-j(\rho-\varepsilon)} \ . \tag{3.26}$$

Vektori koji označavaju fizikalne veličine statora i rotora u zajedničkom koordinatnom sustavu definirani su slijedećim izrazima:

$$\bar{u}_{sk} = \bar{u}_s e^{-j\rho} , \tag{3.27}$$

$$\bar{i}_{sk} = \bar{i}_s e^{-j\rho} , \tag{3.28}$$

$$\bar{\psi}_{sk} = \bar{\psi}_s e^{-j\rho} , \tag{3.29}$$

$$\bar{u}_{rk} = \bar{u}_r e^{-j(\rho-\varepsilon)} , \tag{3.30}$$

$$\bar{i}_{rk} = \bar{i}_r e^{-j(\rho-\varepsilon)} , \tag{3.31}$$

$$\bar{\psi}_{rk} = \bar{\psi}_r e^{-j(\rho-\varepsilon)} . \tag{3.32}$$

Nakon transformacije izrazi za napon statora i rotora u zajedničkom koordinatnom sustavu poprimaju oblik

$$\bar{u}_{sk} = \bar{i}_{sk} R_s + \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}_{sk}}{\mathrm{d}t} + j\bar{\psi}_{sk}\omega_k , \tag{3.33}$$

$$\bar{u}_{rk} = \bar{i}_{rk} R_r + \frac{\mathrm{d}\bar{\psi}_{rk}}{\mathrm{d}t} + j\bar{\psi}_{rk}\left(\omega_k - \omega\right) . \tag{3.34}$$

Ako se na izraze (3.18) i (3.19) primijeni operator rotacije kuta ρ i ρ-ε, prema izrazima

$$\bar{\psi}_s = L_s \bar{i}_s + L_m \bar{i}_r e^{j\varepsilon} \quad \Big/ \cdot e^{-j\rho} , \tag{3.35}$$

$$\bar{\psi}_r = L_m \bar{i}_s e^{-j\varepsilon} + L_r \bar{i}_r \quad \Big/ \cdot e^{-j(\rho-\varepsilon)} , \tag{3.36}$$

nakon te transformacije dobiju se izrazi za tok statora i rotora u zajedničkom koordinatnom sustavu u obliku

$$\bar{\psi}_{sk} = L_s \bar{i}_{sk} + L_m \bar{i}_{rk} , \tag{3.37}$$

$$\bar{\psi}_{rk} = L_m \bar{i}_{sk} + L_r \bar{i}_{rk} . \tag{3.38}$$

Elektromagnetski moment može se izraziti pomoću vektorskog produkta rezultantnog vektora struje statora i rezultantnog vektora toka statora ili pomoću vektorskog produkta rezultantnog vektora struje rotora i rezultantnog vektora toka rotora. Ta dva momenta su istog iznosa, a suprotnog predznaka, pa vrijedi da je

$$\overline{m}_e = -\frac{3}{2} p \overline{\psi}_s \times \overline{i}_s = \frac{3}{2} p \overline{\psi}_r \times \overline{i}_r \,. \tag{3.39}$$

U izrazu (3.39) p predstavlja broj pari polova asinkronog motora. Transformiranjem izraza (3.39) u proizvoljno rotirajući koordinatni sustav, oba vektora zakrenu se za isti kut, pa se njihov vektorski produkt ne mijenja. Iz toga slijedi da moment izražen pomoću struje i toka definiranih u zajedničkom koordinatnom sustavu ima oblik

$$\overline{m}_e = -\frac{3}{2} p \overline{\psi}_{sk} \times \overline{i}_{sk} = \frac{3}{2} p \overline{\psi}_{rk} \times \overline{i}_{rk} \tag{3.40}$$

Uvođenjem izraza za tok statora (3.37), odnosno tok rotora (3.38) u izraz za moment (3.40), dobije se

$$\overline{m}_e = -\frac{3}{2} p\left(L_s \overline{i}_{sk} + L_m \overline{i}_{rk}\right) \times \overline{i}_{sk} = \frac{3}{2} p\left(L_m \overline{i}_{sk} + L_r \overline{i}_{rk}\right) \times \overline{i}_{rk} \,. \tag{3.41}$$

Kako je vektorski produkt kolinearnih vektora jednak nuli, izraz za moment poprima oblik

$$\overline{m}_e = -\frac{3}{2} p L_m \overline{i}_{rk} \times \overline{i}_{sk} = \frac{3}{2} p L_m \overline{i}_{sk} \times \overline{i}_{rk} \,. \tag{3.42}$$

Ako se pretpostavi da se radi o kaveznom asinkronom motoru ($\overline{u}_r = 0$) i ako se indeks k ispusti iz izraza (3.33), (3.34), (3.37), (3.38) i (3.42), vodeći računa da se svi vektori nalaze u zajedničkom koordinatnom sustavu, sustav jednadžbi asinkronog motora u zajedničkom koordinatom sustavu može se zapisati na slijedeći način:

$$\overline{u}_s = \overline{i}_s R_s + \frac{\mathrm{d}\overline{\psi}_s}{\mathrm{d}t} + j\omega_k \overline{\psi}_s \,, \tag{3.43}$$

$$0 = \overline{i}_r R_r + \frac{\mathrm{d}\overline{\psi}_r}{\mathrm{d}t} + j(\omega_k - \omega)\overline{\psi}_r \,, \tag{3.44}$$

$$\overline{\psi}_s = L_s \overline{i}_s + L_m \overline{i}_r \,, \tag{3.45}$$

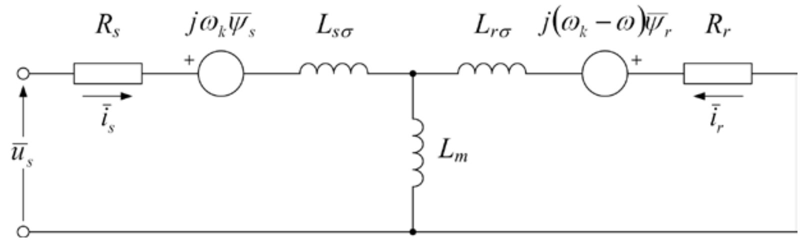
$$\overline{\psi}_r = L_m \overline{i}_s + L_r \overline{i}_r \,, \tag{3.46}$$

$$\overline{m}_e = -\frac{3}{2} p L_m \overline{i}_s \times \overline{i}_r \,, \tag{3.47}$$

$$J \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = m_e - m_t \,, \tag{3.48}$$

$$\omega = p\omega_m \,, \tag{3.49}$$

Na temelju izraza (3.43) – (3.46) izvodi se električna nadomjesna shema asinkronog motora u proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu (slika 3.2).



Slika 3.2 *Model asinkronog motora u dvofaznom sustavu koji rotira brzinom* ω_k