Sinteza linearnih slijednih sustava primjenom praktičnih optimuma

Prošireni optimum dvostrukog odnosa

1. Izvod proširenog optimuma dvostrukog odnosa

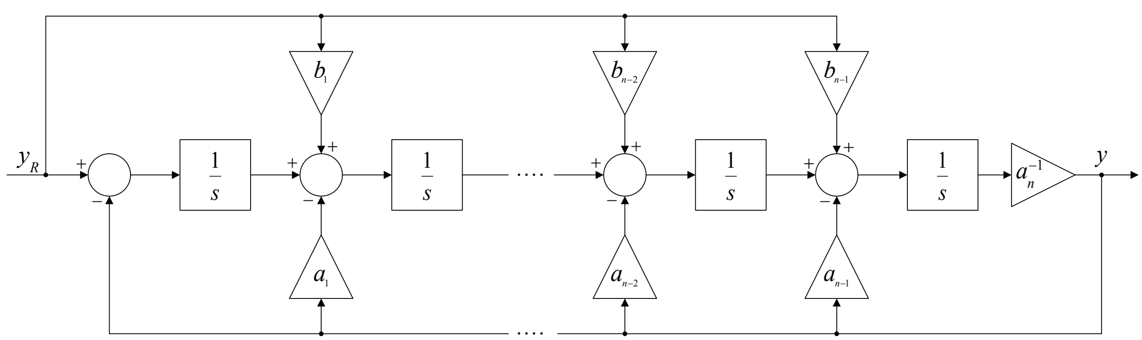
Optimum dvostrukog odnosa[1] ili optimum prigušenja[2] postavlja analitičke veze između koeficijenata karakteristične jednadžbe zatvorenog regulacijskog kruga, takve da sustav ima optimalno prigušenje koje odgovara relativnom prigušenju $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ oscilacijskog člana 2. reda. Opća prijenosna funkcija linearnog sustava n-tog reda bez konačnih nula je

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Y_R(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s^1 + 1} \tag{1}$$

Prošireni optimum dvostrukog odnosa[3] proširuje optimum dvostrukog odnosa na linearne sustave opisane prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Y_R(s)} = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + ... + b_1 s^1 + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s^1 + 1} \tag{2}$$

Blokovska struktura linearnog sustava danog relacijom (2) prikazana je slikom (1)



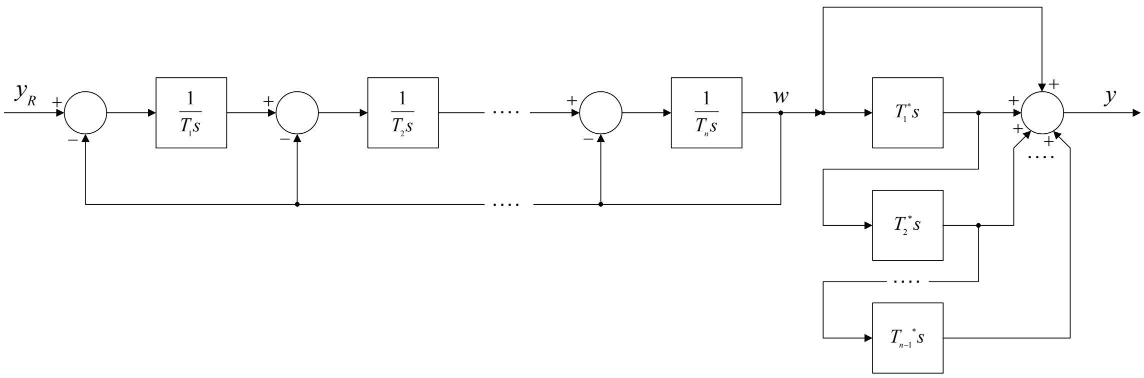
Slika 1: Blokovska shema linearnog sustava n-tog reda (2)

Kako na blokovskoj strukturi prikazanoj slikom (1) nisu vidljive vremenske konstante, to i nije najpogodniji prikaz takvog sustava. Na slici (2) prikazan je isti sustav u blokovskoj algebri, ali sa vidljivim vremenskim konstantama. Pri tome vrijede identiteti

$$a_q = \prod_{i=1}^{q} T_i = T_1 T_2 \cdots T_q \qquad 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

$$b_k = \prod_{i=1}^{k} T_i^* = T_1^* T_2^* \cdots T_k^* \qquad 1 \leq k < n \tag{4}$$

[1] engl. *Double Ratios Optimum*, njem. *Optimum der Doppelverhältnisse*
[2] engl. *Damping Optimum*, njem. *Dämpfungsoptimum*
[3] engl. *Extended Double Ratios Optimum*, njem. *Erweiterter Optimum der Doppelverhältnisse*



Slika 2: Blokovska shema linearnog sustava (2) s vidljivim vremenskim konstantama

Postavljeni uvjet optimalnog prigušenja može se izraziti preko amplitudno-frekvencijske karakteristike zatvorenog regulacijskog kruga. Da bi sustav imao optimalno prigušenje, amplitudno-frekvencijska karakteristika ne smije imati rezonantno izdizanje te mora imati što širi propusni opseg

$$|G(\Omega)|^2 = G(j\omega) \cdot G(-j\omega) = 1 \tag{5}$$

Pri tome je bitno napomenuti kako uvjet prikazan relacijom (5) vrijedi samo za najoptimalnije prigušenje koje odgovara relativnom prigušenju $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Frekvencijska karakteristika linearnog sustava prikazanog relacijom (2) je

$$G(j\omega) = \frac{b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + b_1(j\omega)^1 + 1}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_1(j\omega)^1 + 1} \tag{6}$$

Nakon što se relacija (6) uvrsti u pretpostavljeni uvjet prikazan relacijom (5) dobije se

$$\frac{b_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + b_1(j\omega)^1 + 1}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + ... + a_1(j\omega)^1 + 1} \cdot \frac{b_{n-1}(-j\omega)^{n-1} + ... + b_1(-j\omega)^1 + 1}{a_n(-j\omega)^n + a_{n-1}(-j\omega)^{n-1} + ... + a_1(-j\omega)^1 + 1} = 1 \tag{7}$$

$$A_{2n}\omega^{2n} + A_{2n-2}\omega^{2n-2} + ... + A_2\omega^2 + 1 = B_{2n-2}\omega^{2n-2} + ... + B_2\omega^2 + 1 \tag{8}$$

Iz relacije (8) izvlači se sljedećih n uvjeta

$$A_2 = B_2 \qquad A_4 = B_4 \qquad ... \qquad A_{2n-2} = B_{2n-2} \qquad A_{2n} = 0 \tag{9}$$

Pri tome su polinomi A_{2k} i B_{2k} definirani na sljedeći način

$$A_{2k} = a_k^2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_{k-i}a_{k+i}(-1)^i, \qquad 1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \tag{10a}$$

$$A_{2n-2k} = a_{n-k}^2 + 2\sum_{i=1}^{k} a_{n-k-i}a_{n-k+i}(-1)^i, \qquad 1 \le k \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{10b}$$

$$B_{2k} = b_k^2 + 2\sum_{i=1}^{k} b_{k-i}b_{k+i}(-1)^i, \qquad 1 \le k \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \tag{11a}$$

$$B_{2n-2k} = b_{n-k}^2 + 2\sum_{i=1}^{k} b_{n-k-i}b_{n-k+i}(-1)^i, \qquad 1 \le k \le \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \tag{11b}$$

Kombinacijom relacija (9), (10) i (11) dobije se sljedeći skup jednadžbi za sustav n-tog reda

$$a_1^2 - 2a_0a_2 = b_1^2 - 2b_0b_2 \tag{12a}$$
$$a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4 = b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4 \tag{12b}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{n-2}^2 - 2a_{n-1}a_{n-3} + 2a_na_{n-4} = b_{n-2}^2 - 2b_{n-1}b_{n-3} \tag{12c}$$
$$a_{n-1}^2 - 2a_na_{n-2} = b_{n-1}^2 \tag{12d}$$

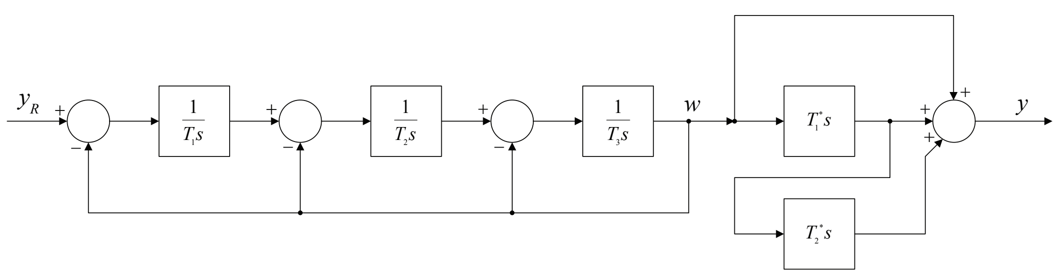
Prema relacijama (12) zaključujemo kako prošireni optimum dvostrukog odnosa zapravo postavlja nule regulatora prema zadanim nulama i polovima procesa kako bi se postiglo optimalno prigušenje. Pri tome će se dominantne vremenske konstante procesa uglavnom kompenzirati regulatorom.

U nastavku su prikazani primjeri postavljanja skupa jednadžbi sustava 3., 4. i 5. reda.

1.1. Sustav 3. reda

Linearni sustav 3. reda opisan je sljedećom prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{b_2s^2 + b_1s + 1}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s^1 + 1} \tag{13}$$



Slika 3: Blokovska shema linearnog sustava 3. reda (13)

Za linearni sustav 3. reda definiramo sljedeći skup jednadžbi

$$a_1^2 - 2a_0a_2 = b_1^2 - 2b_0b_2 \tag{14a}$$
$$a_2^2 - 2a_1a_3 = b_2^2 \tag{14b}$$
$$a_3^2 = 0 \tag{14c}$$

Zamjenom općih konstanti a_k i b_k odgovarajućim vremenskim konstantama dobije se

$$T_1^2 - 2T_1T_2 = T_1^{*2} - 2T_1^*T_2^* \tag{15a}$$
$$T_1^2(T_2^2 - 2T_2T_3) = T_1^{*2}(T_2^{*2}) \tag{15b}$$
$$T_1^2T_2^2T_3^2 = 0 \tag{15c}$$

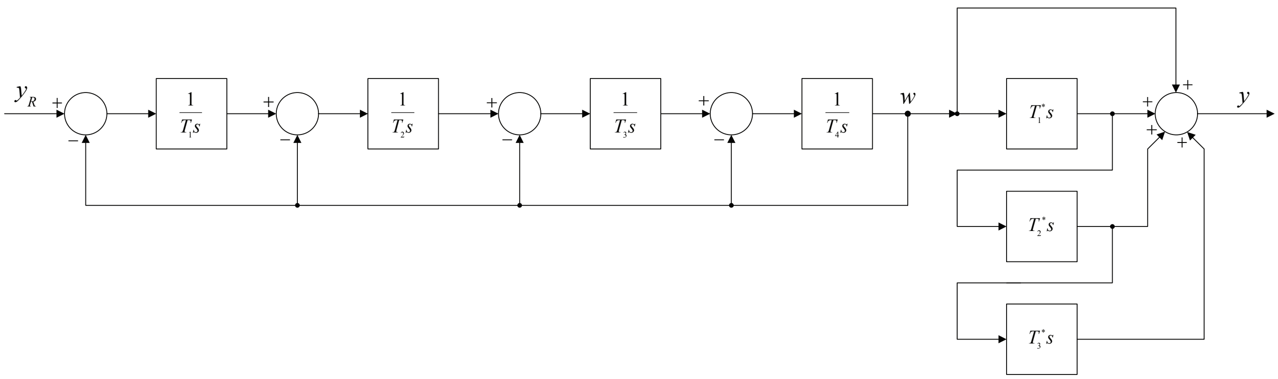
U relaciji (15b) obavit će se pokrata dominantne vremenske konstante T_1 s njoj vrlo bliskom (ali ne u potpunosti jednakom) vremenskom konstantom T_1^*. To isto se, radi veće preciznosti, neće napraviti u relaciji (15a). Konačno, skup jednadžbi koje vrijede za linearni sustav 3. reda je

$$T_1^2 - 2T_1T_2 = T_1^{*2} - 2T_1^*T_2^* \tag{16a}$$
$$T_2^2 - 2T_2T_3 = T_2^{*2} \tag{16b}$$

1.2. Sustav 4. reda

Linearni sustav 4. reda opisan je sljedećom prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s^1 + 1} \tag{17}$$



Slika 4: Blokovska shema linearnog sustava 4. reda (17)

Za linearni sustav 4. reda definiramo sljedeći skup jednadžbi

$$a_1^2 - 2a_0 a_2 = b_1^2 - 2b_0 b_2 \tag{18a}$$

$$a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4 = b_2^2 - 2b_1 b_3 \tag{18b}$$

$$a_3^2 - 2a_2 a_4 = b_3^2 \tag{18c}$$

$$a_4^2 = 0 \tag{18d}$$

Zamjenom općih konstanti a_k i b_k odgovarajućim vremenskim konstantama dobije se

$$T_1^2 - 2T_1 T_2 = T_1^{*2} - 2T_1^* T_2^* \tag{19a}$$

$$T_1^2(T_2^2 - 2T_2 T_3) = T_1^{*2}(T_2^{*2} - 2T_2^* T_3^*) \tag{19b}$$

$$T_1^2 T_2^2 (T_3^2 - 2T_3 T_4) = T_1^{*2} T_2^{*2} (T_3^{*2}) \tag{19c}$$

$$T_1^2 T_2^2 T_3^2 T_4^2 = 0 \tag{19d}$$

Uz pretpostavku da sustav 4. reda ima dvije dominantne vremenske konstante, radi jednostavnosti, u relacijama (19b) i (19c) obavit će se pokrata vremenskih konstanti T_1 i T_2 s njima bliskim vremenskim konstantama T_1^* i T_2^*. Pri tome se u relaciji (19b) neće obaviti pokrata vremenske konstante T_2. Konačno, skup jednadžbi koje vrijede za linearni sustav 4. reda je

$$T_1^2 - 2T_1 T_2 = T_1^{*2} - 2T_1^* T_2^* \tag{20a}$$

$$T_2^2 - 2T_2 T_3 = T_2^{*2} - 2T_2^* T_3^* \tag{20b}$$

$$T_3^2 - 2T_3 T_4 = T_3^{*2} \tag{20c}$$

1.3. Sustav n-tog reda

Iz skupa jednadžbi (16) i (20) induktivno možemo zaključiti da će za sustav n-tog reda vrijediti sljedeći skup jednadžbi

$$T_1^2 - 2T_1T_2 = T_1^{*2} - 2T_1^*T_2^* \tag{21a}$$
$$T_2^2 - 2T_2T_3 = T_2^{*2} - 2T_2^*T_3^* \tag{21b}$$
$$T_3^2 - 2T_3T_4 = T_3^{*2} - 2T_3^*T_4^* \tag{21c}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$T_{n-2}^2 - 2T_{n-2}T_{n-1} = {T_{n-2}^*}^2 - 2T_{n-2}^*T_{n-1}^* \tag{21d}$$
$$T_{n-1}^2 - 2T_{n-1}T_n = {T_{n-1}^*}^2 \tag{21e}$$

U nastavku je prikazana moguća opća jednadžba koja povezuje koeficijente a_k i b_k prijenosne funkcije linearnog sustava n-tog reda

$$a_i^2 - 2a_{i-1}a_{i+1} = b_i^2 - 2b_{i-1}b_{i+1} \qquad 1 \le i < n \tag{22}$$

Provjerimo ispravnost navedene opće jednadžbe. Za $i = 3$ dobije se

$$T_1^2T_2^2(T_3^2 - 2T_3T_4) = T_1^{*2}T_2^{*2}(T_3^{*2} - 2T_3^*T_4^*) \tag{23}$$

Primjećujemo kako relacija (23) ne odgovara relaciji (21c). Razlikuju se u tome što u relaciji (23) nije obavljena pokrata dominantnih vremenskih kostantni. Stoga je potrebna mala modifikacija opće jednadžbe prikazane relacijom (22)

$$a_i^2 - 2a_{i-1}a_{i+1} = \frac{a_{i-1}^2}{b_{i-1}^2}(b_i^2 - 2b_{i-1}b_{i+1}) \qquad 1 \le i < n \tag{24}$$

Ako sada provjerimo ispravnost relacije (24), za $i = 3$ dobije se

$$T_3^2 - 2T_3T_4 = T_3^{*2} - 2T_3^*T_4^* \tag{25}$$

Primjećujemo kako oblik dobivene relacije odgovara relacijama koje pripadaju skupu jednadžbi (21).

2. Optimum dvostrukog odnosa

Optimum dvostrukog odnosa vrlo se lako može izvesti iz proširenog optimuma dvostrukog odnosa. Naime, optimum dvostrukog odnosa definiran je za linearne sustave bez konačnih nula, pa su stoga vremenske konstante T_k^* jednake nuli. Ako ovo sada primjenimo na relaciju (21) dobije se skup jednadžbi koje vrijede za optimum dvostrukog odnosa, naravno, sve ovo uz pretpostavku da sustav parametriramo za najoptimalnije prigušenje koje odgovara relativnom prigušenju $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$T_1 = 2^1T_2 = 2^2T_3 = ... = 2^{n-1}T_n \tag{26}$$

Definiramo novu bezdimenzionalnu veličinu D_i koja označava omjer između susjednih vremenskih konstanti

$$D_i = \frac{T_i}{T_{i-1}} = 0.5 \qquad 2 \le i \le n \tag{27}$$

Literatura

[1] M. Zah, G. Brandenburg, *Das erweiterte Dämpfungsoptimum*, 1987.

[2] N. Perić, J. Deur, I. Petrović i D. Pavković, *Slijedni sustav s izraženom elastičnošću, zračnošću i trenjem*, Zagreb, 2005.