Upravljanje elektromotornim pogonima Zadaci za pripremu završnog ispita

Zadatak 1. Tehnički optimum: Za zadani sustav upravljanja prikazan na Slici 1 potrebno je projektirati PI regulator sintezom u kontinuiranoj domeni, tako da regulacijski krug zadovoljava uvjete tehničkog optimuma. Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1 + T_1 s)(1 + T_{\Sigma} s)},$$

gdje je $K_p = 2, T_1 = 0.05 [s], T_{\Sigma} = 0.01 [s].$



Slika 1: Kontinuirani sustav upravljanja

Prijenosna funkcija otvorenog kruga zadanog sustava upravljanja je:

$$G_o(s) = \underbrace{K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s}}_{G_R(s)} \underbrace{\frac{K_p}{(1 + T_1 s)(1 + T_{\Sigma} s)}}_{G_p(s)}.$$

Parametri regulatora postavit će se tako da amplitudno-frekvencijska karakteristika zatvorenog regulacijskog kruga $|G_{cl}(j\omega)|$ ima konstantu vrijednost u čim širem frekvencijskom području. Ako se integralna vremenska konstanta PI regulatora postavi tako da kompenzira dominantnu vremensku konstantu procesa

$$T_I = T_1 = 0.05 [s],$$

prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga ima oblik PT2S člana:

$$G_{PT2S}(s) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_p^2} s^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s + 1},$$
 (1)

gdje je ω_n frekvencija neprigušenih oscilacija, ζ je relativno prigušenje, a K je statičko pojačanje PT2S člana. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga zadanog sustava upravljanja je:

$$G_{cl}(s) = \frac{K_o}{T_I T_{\Sigma} s^2 + T_I s + K_o}, \qquad K_o = K_R K_p,$$

pri čemu su frekvencija neprigušenih oscilacija ω_n i relativno prigušenje ζ ekvivaletnog PT2S člana definirane kao:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_o}{T_I T_{\Sigma}}}, \qquad \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{K_o} \frac{T_I}{T_{\Sigma}}}.$$

Izbor $\zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ predstavlja tehnički najprihvatljiviji izbor za većinu primjena $(\sigma_m=4.3\%)$. Pojačanje PI regulatora tada iznosi:

$$K_R = \frac{1}{2} \frac{1}{K_p} \frac{T_I}{T_{\Sigma}} = 1.25.$$

Zadatak 2. Simetrični optimum: Za zadani hibridni sustav upravljanja prikazan na Slici 2 potrebno je projektirati PI regulator sintezom u diskretnom području, tako da regulacijski krug zadovoljava uvjete simetričnog optimuma. Kod diskretizacije PI regulatora koristite aproksimaciju derivacije Eulerovom unazadnom diferencijom, a vrijeme diskretizacije T odaberite tako da bude za red veličine manje od nedominantne vremenske konstante procesa. Na izlazu iz digitalnog regulatora nalazi se D/A pretvornik izveden kao ekstrapolator nultog reda¹ prijenosne funkcije $G_E(s)$. Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{T_i s (1 + T_{\Sigma} s)},$$

gdje je $K_p = 2$, $T_i = 0.5$ [s], $T_{\Sigma} = 0.1$ [s].



Slika 2: Hibridni sustav upravljanja

Diskretizacijom PI regulatora primjenom aproksimacije derivacije Eulerovom unazadnom diferencijom $(s = \frac{z-1}{T_z})$ dobije se:

$$G_R(z) = \frac{K_R}{a^*} \frac{z - a^*}{z - 1}, \qquad a^* = \frac{T_I}{T_I + T}.$$
 (2)

Diskretizacijom procesa ZOH metodom

$$G_p(z) = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p(s)}{s} \right\},\tag{3}$$

uz zadano vrijeme diskretizacije $T=10\ [ms]$ dobije se:

$$G_p(z) = 0.00194 \frac{z + 0.9672}{(z - 1)(z - 0.9048)}$$

Da bi se mogla provesti sinteza u frekvencijskom području neophodna za izvod simetričnog optimuma, potrebno je uvesti bilinearnu transformaciju:

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}, \qquad \Omega = j\omega^*, \tag{4}$$

gdje je ω^* tzv. pseudofrekvencija za koju vrijedi:

$$\omega = \frac{2}{T}\arctan\left(\frac{T}{2}\omega^*\right),\tag{5}$$

gdje se jedinična kružnica z-ravnine preslikava u lijevu Ω -poluravninu. Sustav upravljanja se stoga može dizajnirati tako da se podešava vladanje kvazikarakterističnog kruga.

¹ engl. Zero-Order Hold (ZOH)

Prijenosna funkcija regulatora nakon uvođenja bilinearne transformacije je:

$$G_R(\Omega) = K_R' \frac{1 + T_I' \Omega}{T_I' \Omega},\tag{6}$$

gdje su parametri K_R' i T_I' definirani kao:

$$K'_R = \frac{K_R}{2a^*}(1+a^*), \qquad T'_I = \frac{T}{2}\frac{1+a^*}{1-a^*}.$$
 (7)

Prijenosna funkcija procesa nakon uvođenja bilinearne transformacije je:

$$G_p(\Omega) = \frac{K_p}{T_i} \frac{(1 + b\frac{T\Omega}{2})(1 - \frac{T\Omega}{2})}{\Omega(1 + c\frac{T\Omega}{2})},$$
(8)

gdje je $K_p = 2$, $T_i = 0.5$ [s], b = 0.0166, c = 20.

Za dovoljno malo vrijeme uzorkovanja T vrijede sljedeće aproksimacije:

$$\frac{1}{1+T\Omega} \approx 1 - T\Omega, \tag{9a}$$

$$\frac{1}{1 - T\Omega} \approx 1 + T\Omega. \tag{9b}$$

Primjenom poznatih aproksimacija (9) na prijenosnu funkciju (8) te grupiranjem nedominantnih vremenskih konstanti dobije se:

$$G_p(\Omega) = \frac{K_p}{1 + T_{\Sigma}^* \Omega} \frac{1}{T_i \Omega}, \qquad T_{\Sigma}^* = T_{\Sigma} + \frac{T}{2}, \tag{10}$$

gdje je nadomjesna vremenska konstanta $T_{\Sigma}^* = 0.105 [s].$

Prijenosna funkcija otvorenog kruga $G_o(\Omega)$ je:

$$G_o(\Omega) = K_R' \frac{1 + T_I' \Omega}{T_I' \Omega} \frac{K_p}{T_i \Omega (1 + T_{\Sigma}^* \Omega)}.$$
 (11)

Iz ovako izvedene prijenosne funkcije otvorenog kruga izvode² se izrazi za parametre PI regulatora prema simetričnom optimumu, pri čemu je daljna procedura identična kao i za kontinuirani sustav upravljanja:

$$K'_{R} = \frac{1}{a} \frac{1}{K_{p}} \frac{T_{i}}{T_{\Sigma}^{*}}, \qquad T'_{I} = a^{2} T_{\Sigma}^{*},$$
 (12)

gdje parametar a određuje fazno osiguranje sustava.

Za izbor parametra a=2, parametri PI regulatora u Ω -domeni su $K_R'=1.19$ i $T_I'=0.42$ [s]. Iz ovako dobivenih parametara lako se proračuna diskretna prijenosna funkcija traženog PI regulatora

$$G_R(z) = 1.20413 \frac{1 - 0.97647z^{-1}}{1 - z^{-1}},$$

iz čega dalje slijedi rekurzivni upravljački zakon regulatora:

$$u(k) = 0.83047 \Big(e(k) - e(k-1) \Big) + 0.97647 u(k-1).$$

²Detaljan izvod simetričnog optimuma proučiti u Predavanju 11: **Kaskadno upravljanje**

Zadatak 3. Optimum dvostrukog odnosa: Za zadani kontinuirani sustav upravljanja prikazan na Slici 3 potrebno je projektirati PI regulator sintezom u kontinuiranom području, tako da regulacijski krug zadovoljava uvjete optimuma dvostrukog odnosa. Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1 + T_{\Sigma}s)(1 + T_1s + T_2s)},$$

gdje je $K_p=2,\,T_\Sigma=0.5\ [s],\,T_1=0.08\ [s],\,T_2=0.002\ [s].$



Slika 3: Kontinuirani sustav upravljanja

Prijenosna funkcija otvorenog kruga regulacije je:

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \frac{K_p}{(1 + T_\Sigma s)(1 + T_1 s + T_2 s)},$$

a prijenosna funkcija zatvorenog kruga regulacije je:

$$G_{cl}(s) = \frac{1 + T_I s}{0.0005 \frac{T_I}{K_R} s^4 + 0.021 \frac{T_I}{K_R} s^3 + 0.29 \frac{T_I}{K_R} s^2 + \frac{T_I}{K_R} (K_R + 0.5) s + 1}.$$

Da bi se zadovoljili uvjeti optimuma dvostrukog odnosa, prijenosna funkcija zatvorenog kruga regulacije treba se svesti na sljedeći oblik:

$$G_m(s) = \frac{1}{D_n D_{n-1}^2 \cdots D_2^{n-1} T_e^n s^n + \dots + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1},$$
 (13)

gdje je n red sustava, T_e je nadomjesna vremenska konstanta zatvorenog kruga, dok parametri D_i za optimalan slučaj iznose:

$$D_i = 0.5, \qquad i = 2, \dots, n.$$
 (14)

Usporedbom nazivnika dobivene prijenosne funkcije zatvorenog kruga $G_{cl}(s)$, s nazivnikom prijenosne funkcije $G_m(s)$, dobije se sustav od 4 nelinearne jednadžbe s 3 nepoznanice (K_R, T_I, T_e) :

$$\begin{array}{lcl} \frac{T_{I}}{K_{R}}(K_{R}+0.5) & = & T_{e}, \\ 0.29\frac{T_{I}}{K_{R}} & = & D_{2}T_{e}^{2}, \\ 0.021\frac{T_{I}}{K_{R}} & = & D_{3}D_{2}^{2}T_{e}^{3}, \\ 0.0005\frac{T_{I}}{K_{R}} & = & D_{4}D_{3}^{2}D_{2}^{3}T_{e}^{4}. \end{array}$$

Bitno je istaknuti da su moguće situacije kada predloženi tip regulatora ne može zadovoljiti sve jednadžbe. U tom slučaju sustav se rješava tako da parametri regulatora prije svega zadovolje koeficijente koji se nalaze uz niže potencije od s, imajući na umu kako će se u tom slučaju dobiti suboptimalno rješenje.

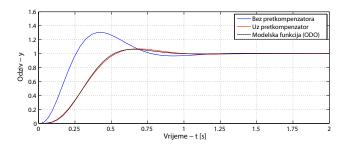
Rješavanjem prvih triju nelinearnih jednadžbi dobiju se traženi parametri regulatora i nadomjesna vremenska konstanta zatvorenog regulacijskog kruga:

$$K_R = 1.5021,$$
 $T_I = 0.2173 [s],$ $T_e = 0.2897 [s].$

Kako bi prijenosnu funkciju zatvorenog regulacijskog kruga $G_{cl}(s)$ još više približili prijenosnoj funkciji koja je definirana optimum dvostrukog odnosa $G_m(s)$, u referentnu granu dodaje se prefiltar:

$$G_{pk}(s) = \frac{1}{1 + T_I s}.$$

Na Slici 4 je prikazan odziv zadanog zatvorenog kruga regulacije na skokovitu pobudu $y_r(t) = \mu(t)$, sa i bez pretkompenzatora u referentnoj grani, kao i odziv prijenosne funkcije $G_m(s)$ uz $D_i = 0.5$ i $T_e = 0.2897$ [s].



Slika 4: Odziv sustava na skokovitu pobudu, optimum dvostrukog odnosa

Zadatak 4. Modulni optimum: Za zadani kontinuirani sustav upravljanja prikazan na Slici 5 potrebno je projektirati PI regulator sintezom u kontinuiranom području, tako da regulacijski krug zadovoljava uvjete modulnog optimuma. Prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(s) = \frac{K_p}{(1 + T_{\Sigma}s)(1 + T_1s + T_2s^2)},$$

gdje je $K_p=2,\,T_\Sigma=0.5$ [s], $T_1=0.08$ [s], $T_2=0.002$ [s].



Slika 5: Kontinuirani sustav upravljanja

Prijenosna funkcija otvorenog kruga regulacije je:

$$G_o(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} \frac{K_p}{(1 + T_{\Sigma} s)(1 + T_1 s + T_2 s)},$$

a prijenosna funkcija zatvorenog kruga regulacije je:

$$G_{cl}(s) = \frac{1 + T_I s}{0.0005 \frac{T_I}{K_R} s^4 + 0.021 \frac{T_I}{K_R} s^3 + 0.29 \frac{T_I}{K_R} s^2 + \frac{T_I}{K_R} (K_R + 0.5) s + 1}.$$

Da bi se zadovoljili uvjeti modulnog optimuma, prijenosna funkcija zatvorenog kruga regulacije treba se svesti na sljedeći oblik:

$$G_m(s) = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1},$$
(15)

gdje je n red sustava upravljanja. Pri tome vrijede sljedeći odnosi:

$$a_1^2 - 2a_0 a_2 = 0,$$

$$a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_0 a_4 = 0,$$

$$\vdots$$

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} a_n = 0.$$
(16)

Koeficijenti a_i prijenosne funkcije modulnog optimuma za razmatrani sustav upravljanja su:

$$a_4 = 0.0005 \frac{T_I}{K_R}, \quad a_3 = 0.021 \frac{T_I}{K_R}, \quad a_2 = 0.29 \frac{T_I}{K_R}, \quad a_1 = \frac{T_I}{K_R} (K_R + 0.5).$$

Uvrštavanjem tako dobivenih koeficijenata u sustav jednadžbi (16) te rješavanjem tako dobivenog sustava nelinearnih jednadžbi, dobiju se traženi parametri PI regulatora. Postavljeni sustav ima ukupno 3 rješenja, a u nastavku su navedena samo rješenja uz koje je zatvoreni krug regulacije stabilan:

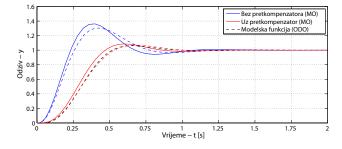
$$K_R = 1.701, T_I = 0.2036 [s].$$

Kao i kod slučaja optimuma dvostrukog odnosa, moguće je da odabrana struktura regulatora ne može zadovoljiti sve postavljene jednadžbe.

Moguće je i dodavanje prefiltra u referentnu granu, da bi se kompenzirala nula prijenosne funkcije zatvorenog kruga $G_{cl}(s)$ koju unosi PI regulator:

$$G_{pk}(s) = \frac{1}{1 + T_I s}.$$

Na Slici 6 je prikazan odziv zadanog zatvorenog kruga regulacije na skokovitu pobudu $y_r(t) = \mu(t)$, sa i bez pretkompenzatora u referentnoj grani. Na istoj slici su prikazani i odzivi dobiveni uz primjenu optimuma dvostrukog odnosa. Može se primjetiti kako za razmatrani sustav, optimum dvostrukog odnosa daje nešto bolje rezultate (dinamičke pokazatelje) u odnosu na modulni optimum.



Slika 6: Odziv sustava na skokovitu pobudu, usporedba modulnog optimuma i optimuma dvostrukog odnosa

Zadatak 5. Polinomski regulator: Na Slici 7 prikazan je sustav regulacije brzine vrtnje motora polinomskim regulatorom. Digitalni mjerni signal brzine motora ω_{1m} računa se diferenciranjem položaja mjerenog na strani motora α_{1m} :

$$G_{m\omega}(z) = \frac{\omega_{1m}(z)}{\alpha_{1m}(z)} = \frac{T_B}{T} \frac{z - 1}{z},\tag{17}$$

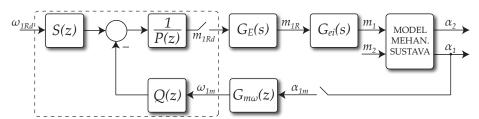
gdje je T vrijeme diskretizacije, a T_B ima značenje osnovne jedinice vremena uvedene za potrebe skaliranja veličina matematičkog modela. U nastavku se može pretpostaviti da je $T_B=1$ [s]. Analogna referentna vrijednost momenta m_{1R} dobiva se iz digitalne vrijednosti m_{1Rd} pomoću D/A pretvornika $G_E(s)$ koji je izveden kao ekstrapolator nultog reda. Kašnjenje zatvorenog kruga regulacije struje uzima se u obzir preko PT_1 člana $G_{ei}(s)$:

$$G_{ei}(s) = \frac{1}{T_{ei}s + 1}. (18)$$

gdje je nadomjensa vremenska konstanta zatvorenog kruga regulacije struje $T_{ei}=2\ [ms]$. Potrebno je projektirati polinomski regulator minimalne izvedbe sintezom u diskretnom području uz vrijeme diskretizacije $T=33.33\ [ms]$, pri čemu se treba osigurati stacionarna točnost s obzirom na referentnu vrijednost brzine vrtnje motora i moment tereta. Modelsku prijenosnu funkciju odaberite prema optimumu dvostrukog odnosa s nadomjesnom vremenskom konstantom $T_e=94.28\ [ms]$, a observer izaberite tako da se poremećaj kompenzira u najkraćem mogućem vremenu. Zadani su parametri dvomasenog elastičnog sustava:

$$T_{M1} = 0.1[s], \quad T_{M2} = 0.02[s], \quad c = 15, \quad d = 0.05,$$

gdje su T_{M1} i T_{M2} mehaničke vremenske konstante dvomasenog sustava, a c i d su konstante krutosti i prigušenja prijenosnog mehanizma.



Slika 7: Sustav upravljanja brzinom vrtnje motora (ili tereta) uz primjenu polinomskog regulatora

Kontinuirana prijenosna funkcija brzine vrtnje motora $\omega_1(s)$ prema momentu motora $m_1(s)$ je:

$$G_{\omega m}(s) = \frac{\omega_1(s)}{m_1(s)} = \frac{1 + 2\zeta_2 \Omega_{02}^{-1} s + \Omega_{02}^{-2} s^2}{T_{M\Sigma} s (1 + 2\zeta \Omega_0^{-1} s + \Omega_0^{-2} s^2)}$$
(19)

gdje su pojedini parametri prijenosne funkcije $G_{\omega m}(s)$ definirani kao:

$$T_{M\Sigma} = 0.12 [s], \quad \Omega_0 = 30 [s^{-1}], \quad \zeta = 0.05, \quad \Omega_{02} = 27.39 [s^{-1}], \quad \zeta_2 = 0.046.$$

Kontinuirana prijenosna funkcija položaja mjerenog na strani motora $\alpha_1(s)$ prema referentnoj vrijednosti momenta motora $m_{1R}(s)$ je:

$$G_p^*(s) = \frac{\alpha_1(s)}{m_{1R}(s)} = G_{ei}(s)G_{\omega m}(s)G_{\alpha\omega}(s).$$

S obzirom da sintezu polinomskog regulatora treba obaviti u diskretnom području, prijenosna funkcija $G_p^*(s)$ će se diskretizirati primjenom ZOH metode:

$$G_p^*(z) = \frac{\alpha_{1m}(z)}{m_{1Rd}(z)} = \frac{z - 1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{G_p^*(s)}{s} \right\}.$$
 (20)

Diskretna prijenosna funkcija procesa koja će se koristiti za daljnu sintezu polinomskog regulatora treba uključiti i prijenosnu funkciju mjernog člana brzine vrtnje motora na temelju mjerenja položaja na strani motora:

$$G_p(z) = \frac{\omega_{1m}(z)}{m_{1Rd}(z)} = G_p^*(z)G_{m\omega}(z).$$

Konačna diskretna prijenosna funkcija procesa je:

$$G_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.1454z^4 + 0.008724z^3 - 0.07588z^2 + 0.1637z + 0.001086z^2}{z^5 - 2.03z^4 + 1.935z^3 - 0.9048z^2}$$

S obzirom da brojnik procesa B(z) često sadrži nule koje se ne smiju kratiti polovima regulatora (unutarnja stabilnost sustava), brojnik modelske prijenosne funkcije $B_m(z)$ najčešće se odabire da bude jednak brojniku procesa. Nazivnik modelske prijenosne funkcije $A_m(z)$ odabire se prema optimumu dvostrukog odnosa pri čemu je deg $A_m = \deg A = n$. Polinom $A_m(z)$ može se zapisati kao:

$$A_m(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i) = (z - z_1) \cdots (z - z_5), \tag{21}$$

gdje se polovi z_i određuju preslikavanjem polova karakterističnog polinoma prema optimumu dvostrukog odnosa:

$$\alpha_{cl}(s) = D_n D_{n-1}^2 \cdots D_2^{n-1} T_e^n s^n + \dots + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1, \tag{22}$$

gdje je T_e zadana nadomjesna konstanta zatvorenog kruga. Polovi se iz s- u z- domenu preslikavaju prema standardnom zakonu preslikavanja $z_i = e^{s_i T}$. Promatrani sustav je 5. reda, pa je modelska prijenosna funkcija:

$$G_m(z) = \frac{0.1454z^4 + 0.008724z^3 - 0.07588z^2 + 0.1637z + 0.001086}{z^5 - 1.082z^4 + 0.4825z^3 - 0.06913z^2 + 0.01472z - 0.003493}$$

S obzirom da je postavljen zahtjev na najbržu moguću kompenzaciju poremećaja, observer je potrebno odabrati kao dead-beat. Red observera za minimalnu izvedbu polinomskog regulatora određuje se prema sljedećoj relaciji:

$$\deg A_o = \deg A - 1 + i,\tag{23}$$

gdje je i broj integratora uključenih u polinomski regulator. S obzirom da se također zahtjeva i stacionarna točnost u slučaju djelovanja momenta tereta, u

polinomski regulator potrebno je ugraditi integralno djelovanje, pa se prema tome odabire sljedeći observerski polinom:

$$A_{o}(z) = z^{5}$$
.

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga³ regulacije brzine vrtnje je:

$$G_{\omega,cl}(z) = \frac{B(z)S(z)}{A(z)P(z) + B(z)Q(z)} = \frac{B_M(z)}{A_M(z)} \frac{A_o(z)}{A_o(z)}.$$
 (24)

Nule i polovi zatvorenog kruga definirane su sljedećim relacijama:

$$B(z)S(z) = B_M(z)A_o(z). (25a)$$

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_M(z)A_o(z),$$
 (25b)

Iz dobivenih jednadžbi slijede uvjeti za redove polinoma P(z), Q(z), S(z):

$$\deg A_o = \deg P = \deg Q = \deg S,\tag{26}$$

pri čemu se treba uzeti u obzir da je u polinom P(z) već ugrađeno integralno djelovanje, stoga vrijedi:

$$P(z) = (z - 1)(z^4 + p_3z^3 + p_2z^2 + p_1z^1 + p_0).$$

Da bi se osigurala stacionarna točnost s obzirom na referentnu veličinu, prijenosna funkcija zatvorenog kruga treba imati jedinično statičko pojačanje. Kako bi se to osiguralo, u polinom S(z) se dodatno ugrađuje član $\frac{A_M(1)}{B(1)}$.

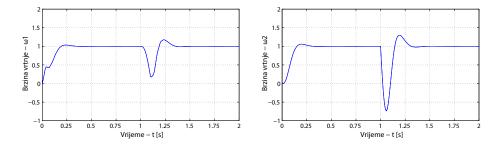
Konačni polinomi $P(z),\,Q(z),\,S(z)$ digitalnog polinomskog regulatora minimalne izvedbe uz ugrađeno integralno djelovanje su:

$$P(z) = +1.00z^5 + 1.26z^4 - 1.74z^3 - 1.96z^2 + 1.43z + 0.01$$

$$Q(z) = -2.14z^5 + 19.7z^4 - 24.1z^3 + 7.95z^2$$

$$S(z) = +1.41z^5$$

Na Slici 8 su prikazani odzivi brzine vrtnje na strani motora $\omega_1(t)$ i tereta $\omega_2(t)$ uz primjenu referentne vrijednosti brzine vrtnje motora $\omega_{1,R}=1\mu(t)$ i momenta tereta $m_2(t)=1\mu(t-1)$.



Slika 8: Odzivi brzine vrtnje na strani motora $\omega_1(t)$ i tereta $\omega_2(t)$

 $^{^3}$ Polinomi $A(z),\ A_M(z),\ A_o(z)$ i P(z) trebaju biti monički polinomi, odnosno koeficijent uz najvišu potenciju treba biti 1.