

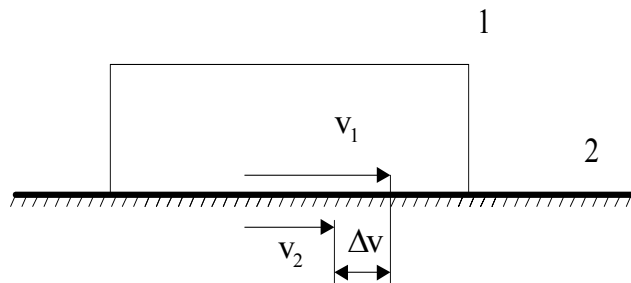
1. TRENJE

Definicija:

- Prema standardu DIN 5281, trenje se definira kao otpor koji se javlja između površina naližegavanja dvaju tijela i suprotstavlja se međusobnom gibanju bilo **klizanjem**, bilo **kotrljanjem** ili **valjanjem** (trenje gibanja - kinetičko trenje), ili onemogućuje gibanje (trenje mirovanja - statičko trenje).

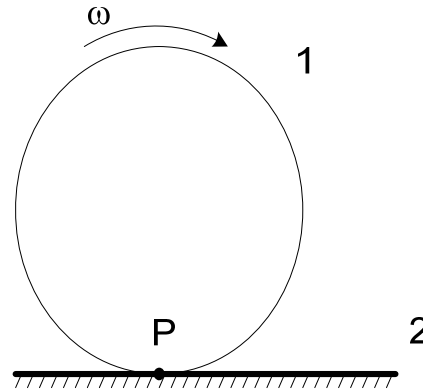
Tri su osnovne vrste trenja:

- **Trenje klizanja** javlja se kada translacijske komponente brzina v_1 i v_2 za točke dvaju tijela (1 i 2) u kontaktu nisu jednake, odnosno postoji relativna brzina među njima.



Slika 1.1 Trenje klizanja

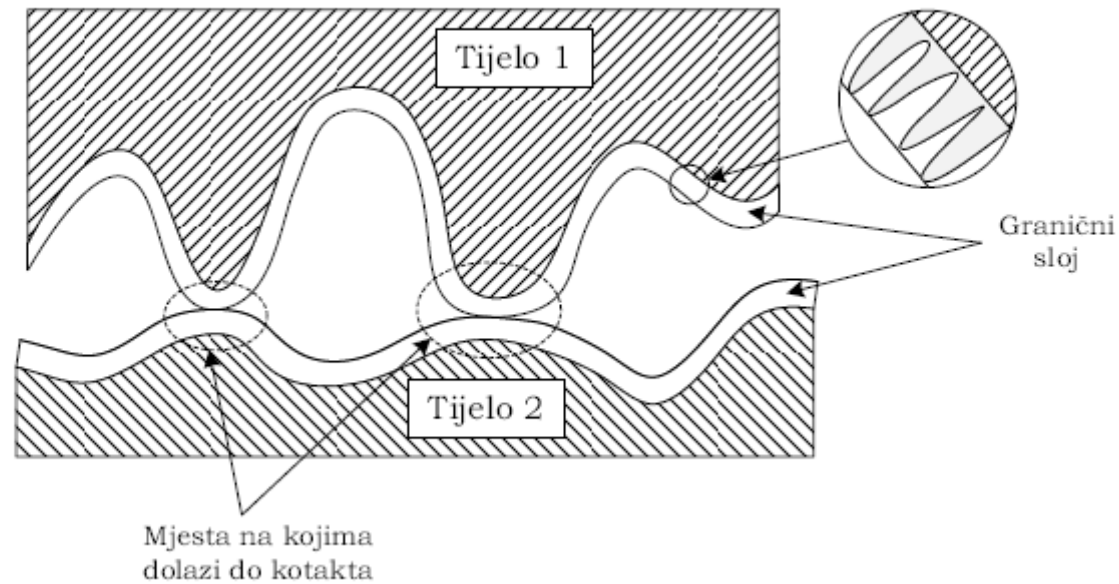
- **Trenje kotrljanja** javlja se u slučajevima kada je kontakt ostvaren u jednoj točki odnosno liniji (P).



Slika 1.2 Trenje kotrljanja

- Kod trenja kotrljanja nema izraženog statičkog trenja što se može objasniti „polaganim ulaženjem i izlaženjem u i iz kontakta“. Ovo je ujedno i osnovna razlika između trenja klizanja i trenja kotrljanja što značajno utječe na upravljanje slijednim sustavima.
- **Trenje valjanja** je kombinacija trenja klizanja i kotrljanja. Udio kotrljanja i klizanja unaprijed je određen kinematikom gibanja dvaju tijela koja su u kontaktu. Ovakav oblik trenja javlja se u valjnim ležajevima, među zubima zupčanika i sl.

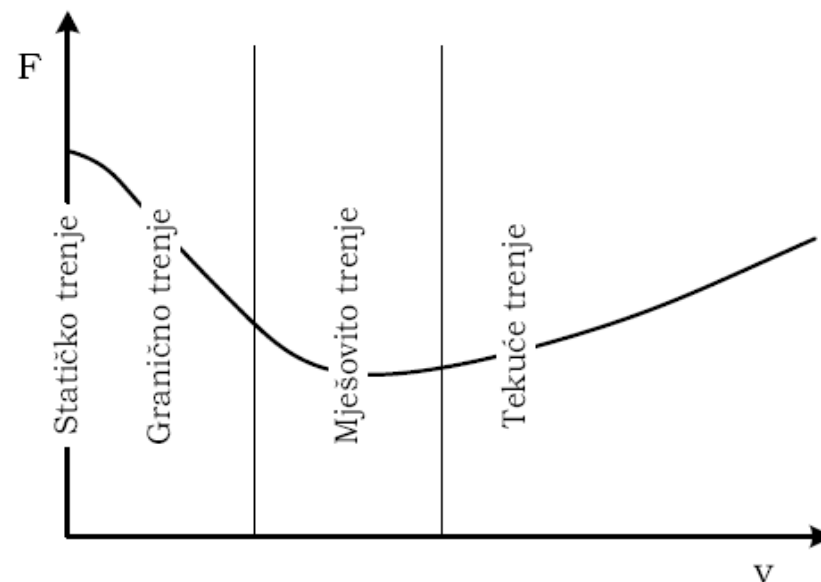
1.1 Priroda nastanka sile trenja



Slika 1.3 Mikroskopski pogled na dodirnu površinu dvaju tijela

- Kako bi se razumjela priroda nastanka trenja, potrebno je promatrati dodirnu površinu dvaju tijela na mikroskopskoj razini.
- Površina tijela je obično hrapava i prekrivena graničnim slojem **asperitnih vlakana**.
- Stvarni se kontakt između tijela ostvaruje preko niza asperitnih veza, a ne cijelom (geometrijskom) dodirnom površinom.

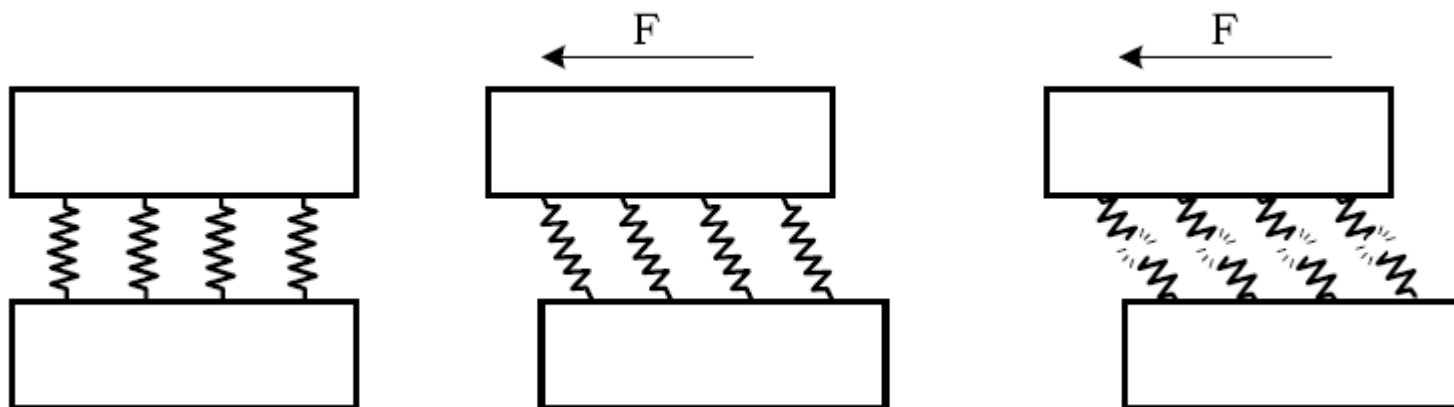
- Pod djelovanjem tangencijalne sile, izvana narinute, dolazi do smicanja asperitnih veza što rezultira njihovim elastičnim i plastičnim deformacijama
- Mehanizam stvaranja sile trenja tipično se može promatrati u četiri područja odnosno režima, ovisno o iznosu relativne brzine:
 - statičko trenje,
 - granično trenje,
 - mješovito trenje i
 - tekuće trenje



Slika 1.4 Četiri tipična područja na karakteristici ovisnosti sile trenja o relativnoj brzini

Statičko trenje

- Statičko trenje podrazumijeva da ne postoji relativno gibanje te stoga postoji izravan kontakt između dodirnih površina.
- Sa stanovišta upravljanja bitna karakteristika asperitnih veza je njihovo elastično savijanje. Ako je narinuta sila manja od čvrstoće asperitnih veza, sustav se ponaša kao da je među dodirne površine umetnuto niz opruga velike krutosti (slika 1.5).



Slika 1.5 Aproximacija dodirne površine dvaju tijela pomoću niza opruga u režimu statičkog trenja.

- Druga bitna karakteristika statičkog trenja je polagana plastična deformacija asperitnih vlakana. Kao posljedica polagane plastične deformacije kontaktna se površina među asperitima povećava s povećanjem vremena provedenog u mirovanju.
- Povećanje površine asperitnih veza rezultira većom čvrstoćom samih veza. Slijedi da će sila potrebna za razaranje asperitnih veza, odnosno pokretanje tijela, biti to veća što su dodirne površine više vremena provele u mirovanju.

Granično trenje

- U režimu **graničnog trenja** dolazi do relativnog gibanja, ali je zbog male brzine izgled kontakta sličan onom u slučaju statičkog trenja.
- Uloga maziva ne dolazi do izražaja, jer relativna brzina nije dovoljna da se izgradi potrebni film maziva koji bi razdvojio površine u kontaktu.
- Postojanje direktnog dodira graničnih slojeva, što u njima izaziva smično naprezanje. Smična čvrstoća graničnog sloja kao krute tvari je višestruko veća od one koja se javlja u mazivima kao fluidu, pa je i sila trenja koja se javlja u režimu graničnog trenja relativno velikog iznosa.
- Zbog izravnog kontakta, trošenje površina je intenzivno pa se vrijeme zadržavanja u ovom režimu nastoji svesti na najmanju moguću mjeru.

Mješovito trenje

- Porastom iznosa relativne brzine gibanja viskozna sila maziva je dovoljna da onemogući potpuno istiskivanje maziva iz područja kontakta. Povećanje količine maziva u području kontakta smanjuje površinu direktnog kontakta, a time i silu trenja.
- Količina maziva koja se nalazi u području kontakta ovisi o relativnoj brzini, viskoznosti maziva i geometrije kontaktnih površina.
- Ovo područje traje sve do trenutka kada relativna brzina naraste do iznosa potrebnog za formiranje mazivog filma čija je debljina veća od visine asperita. U tom trenutku dolazi do potpunog razdvajanja kontaktnih površina, a time i četvrtog režima, tekućeg trenja.

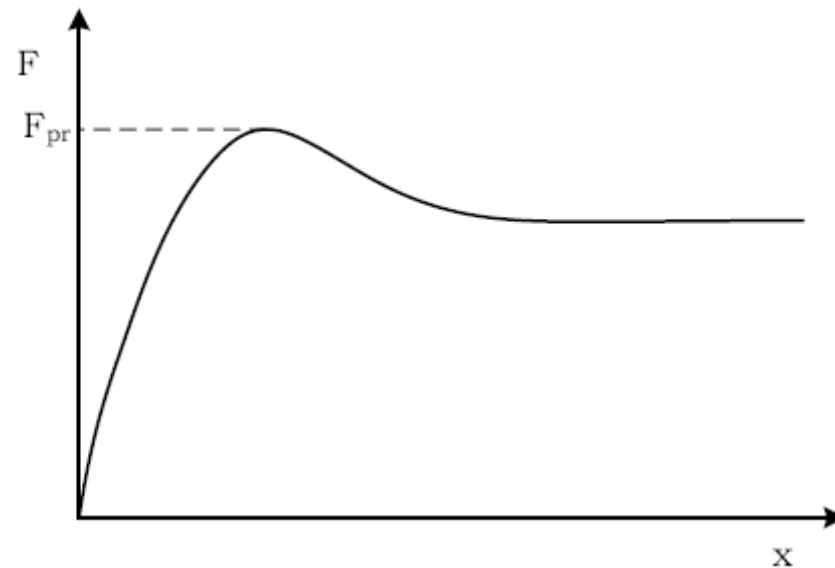
Tekuće trenje

- Priroda tekućeg trenja ovisi o tome radi li se o konformnom kontaktu, gdje se javlja hidrodinamičko trenje, ili nekonformnom kontaktu s elastohidrodinamičkim trenjem.
- U konformnom kontaktu, a zbog relativne brzine, mazivo se utiskuje u prostor između dvaju tijela, stvarajući film maziva koji je deblji od visine asperita pa je isključen bilo kakav kontakt između tijela.
- Smicanje u mazivu je višestruko manje od sila smicanja u graničnom sloju materijala, te je zbog toga trenje u režimu tekućeg trenja je minimalno.

- Kako je bilo kakav kontakt među dodirnim površinama isključen, trošenje je u ovom režimu zanemarivo.

1.2 Statičko trenje i prijelomna sila

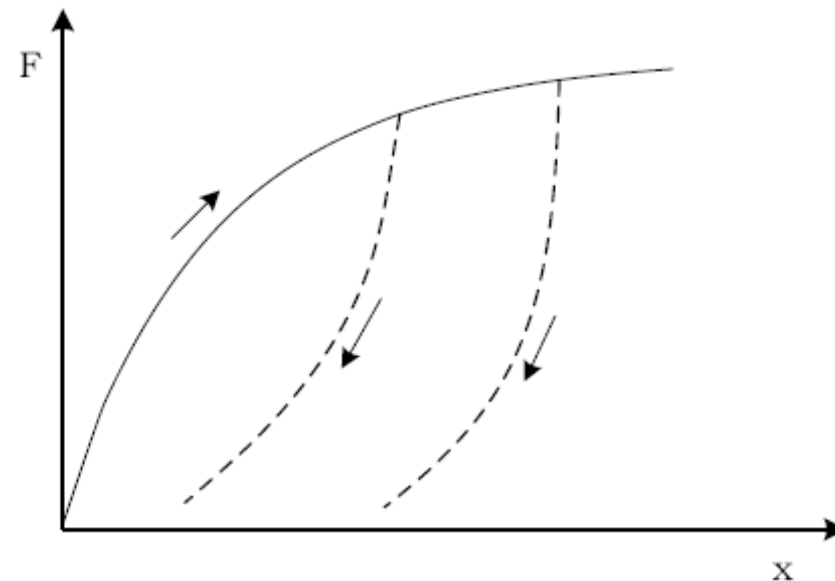
- Trenje koje postoji kada se tijelo nalazi u stanju mirovanja predstavlja **statičko trenje** odnosno **trenje mirovanja**.
- Kako bi se tijelo pokrenulo potrebno je primijeniti odgovarajuću vanjsku silu koja će savladati statičko trenje i ta se sila najčešće naziva **prekidnom silom** (engl. *break-away force*).
- Prijelaz tijela iz stanja mirovanja u stanje gibanja ne može se na zadovoljavajući način opisati funkcijom relativne brzine v . Umjesto toga, za opis ponašanja sile trenja u stanju mirovanja koristi se funkcija pomaka x (slika 1.6).



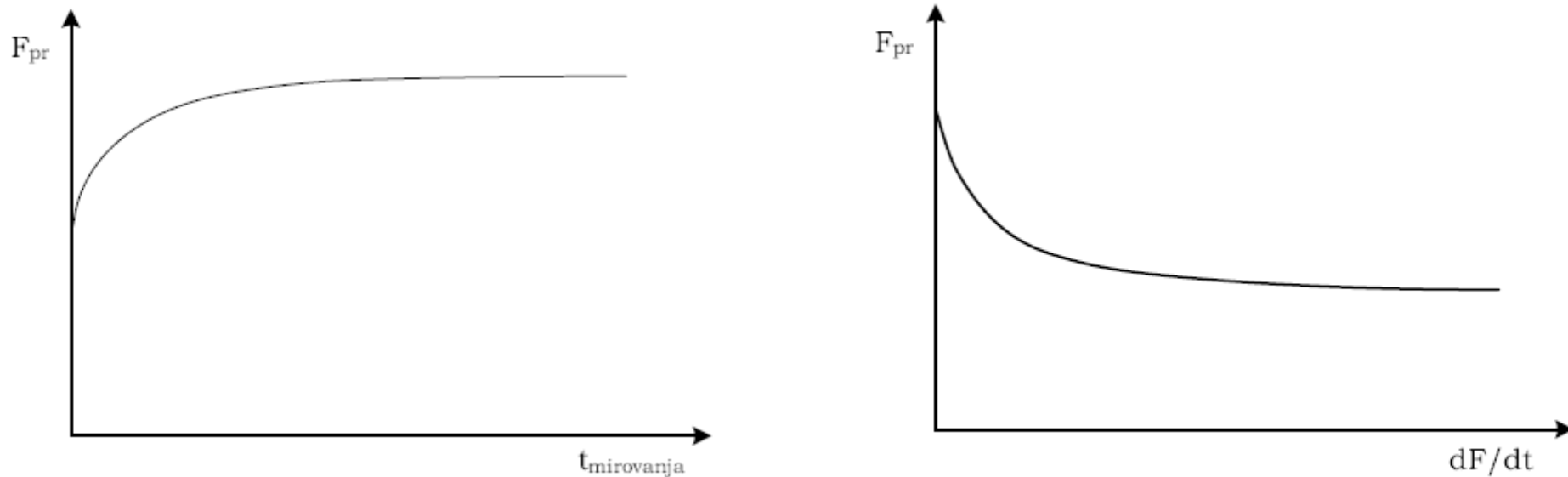
Slika 1.6 Ovisnost sile trenja o iznosu pomaka x

- U početnom dijelu karakteristike ovisnost sile trenja o pomaku x je skoro linearna te se stoga kontakt može aproksimirati nizom opruga kako je prikazano na slici 1.5.

- Nakon određenog iznosa pomaka x dolazi do pojave plastične deformacije asperitnih vlakana; nakon prestanka djelovanja vanjske sile pojavljuje se trajni pomak (slika 1.7), tj. proces deformacije vlakana je ireverzibilan (engl. *pre-sliding displacement*)



Slika 1.7 Ilustracija ireverzibilnosti procesa istezanja asperitnih vlakana



Slika 1.8 Ovisnost prekidne sile o vremenu koje je tijelo provelo u mirovanu i o vremenskoj derivaciji primjenjene sile.

- Iznos prekidne sile dodatno ovisi o vremenu provedenom u mirovanju (engl. *dwell time*) i pokazuje se da je prekidna sila to veća što je veće vrijeme koje je tijelo provelo u mirovanju (slika 1.8).
- Također, iznos prekidne sile ovisan je i o brzini primjene vanjske sile tj. o njenoj derivaciji (slika 1.8).

1.3 Modeli trenja

1.3.1 Statički modeli trenja

- Pod statičkim modelima trenja obično se podrazumijevaju modeli koji daju funkcijsku ovisnost sile trenja o relativnoj brzini dvaju tijela koja su u kontaktu.
- Za razliku od dinamičkih modela ovi modeli nemaju uključen nikakav oblik memorije.

Klasični modeli trenja

Coulombovo trenje (Coulomb, 1785.)

- Iznos sile trenja proporcionalan je normalnoj (okomitoj) sili i neovisan je o iznosu dodirne površine ($F_c = \mu F_N$), kako je to opisano sljedećim izrazom:

$$F = F_c \operatorname{sgn}(v). \quad (1-1)$$

- Neodređenost iznosa sile trenja za $v=0$ predstavlja najveći nedostatak ovog modela.

Viskozno trenje (Reynolds, 1866.)

- U 19. stoljeću s razvojem teorije hidrodinamike došlo se do opisa sile trenja prouzročene viskoznošću maziva. Ova se komponenta sile trenja obično naziva viskozним trenjem i opisana je sljedećim izrazom:

$$F_v = \sigma_2 v, \quad v \neq 0, \quad (1-2)$$

gdje je σ_2 koeficijent viskoznog trenja.

- S ciljem što boljeg slaganja s eksperimentalnim mjerenjima za opis viskoznog trenja ponekad se koristi i sljedeća modifikacija modela viskoznog trenja:

$$F_v = \sigma_2 |v|^{\delta_v} \operatorname{sgn}(v), \quad v \neq 0, \quad (1-3)$$

gdje je δ_v empirijski koeficijent čiji iznos ovisi o području primjene modela.

Statičko trenje (Morin, 1833.)

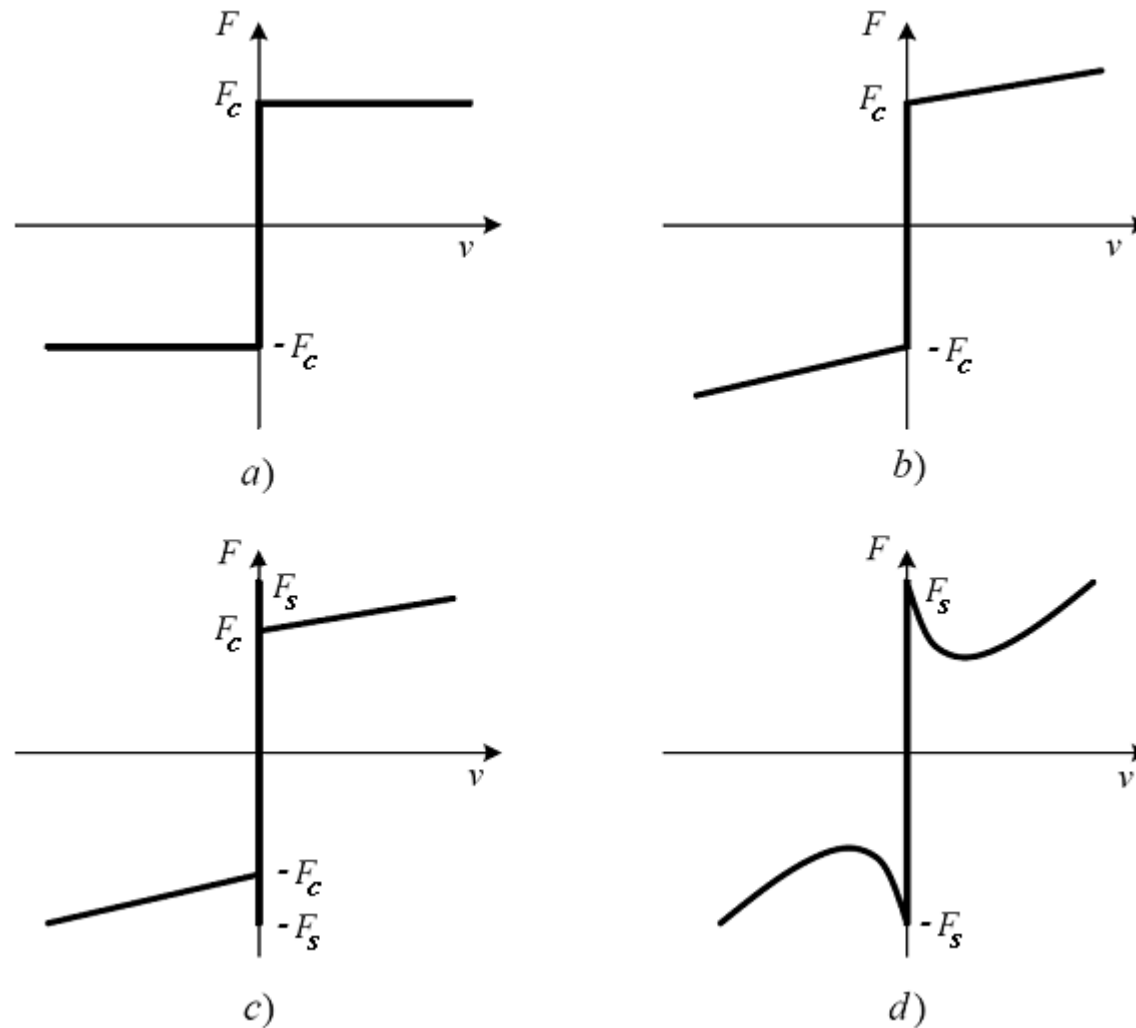
- Opis sile trenja kombinacijom Coulombovog i viskoznog trenja pretpostavlja da je apsolutni iznos sile trenja najmanji u mirovanju, tj. pri $v=0$.
- To je, međutim, u koliziji s eksperimentalnim podacima koji ukazuju da iznos sile trenja u mirovanju značajno premašuje iznos Coulombovog trenja F_C .
- Ako je tijelo u mirovanju, potrebna je vanjska sila jednaka ili veća od sile statičkog trenja (trenja mirovanja, engl. *stiction*) F_s da bi se tijelo počelo gibati.

Stribeckovo trenje

- 1902. godine Stribeck je, umjesto diskontinuiranog prijelaza, uvodi kontinuirani prijelaz između statičkog i dinamičkog trenja. Ovaj se efekt obično u literaturi naziva Stribeckovim efektom. Najčešće se ovaj efekt opisuje funkcijom sljedećeg oblika:

$$F = \left(F_C + (F_s - F_C) e^{-\left(\frac{|v|}{v_s}\right)^\delta} \right) \cdot \text{sgn}(v), \quad (1-4)$$

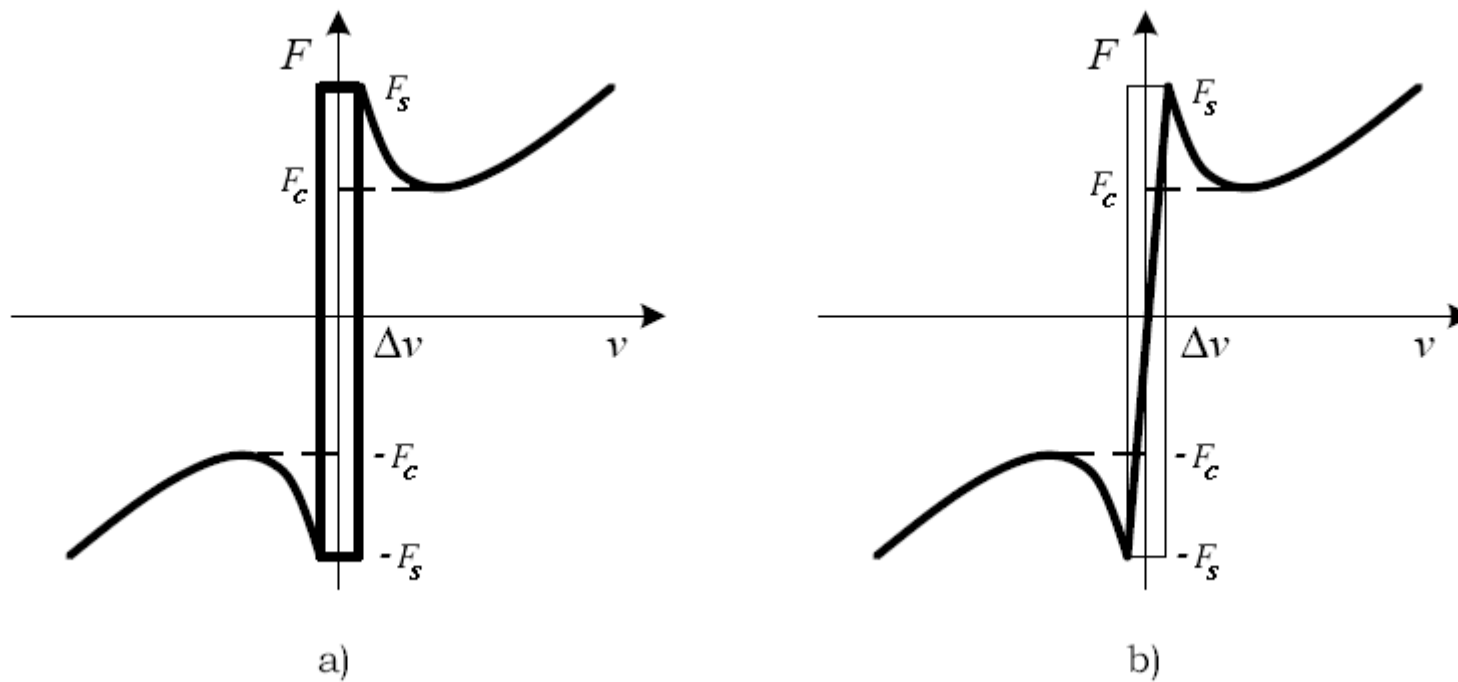
gdje je v_s Stribeckova brzina a δ empirijski koeficijent.



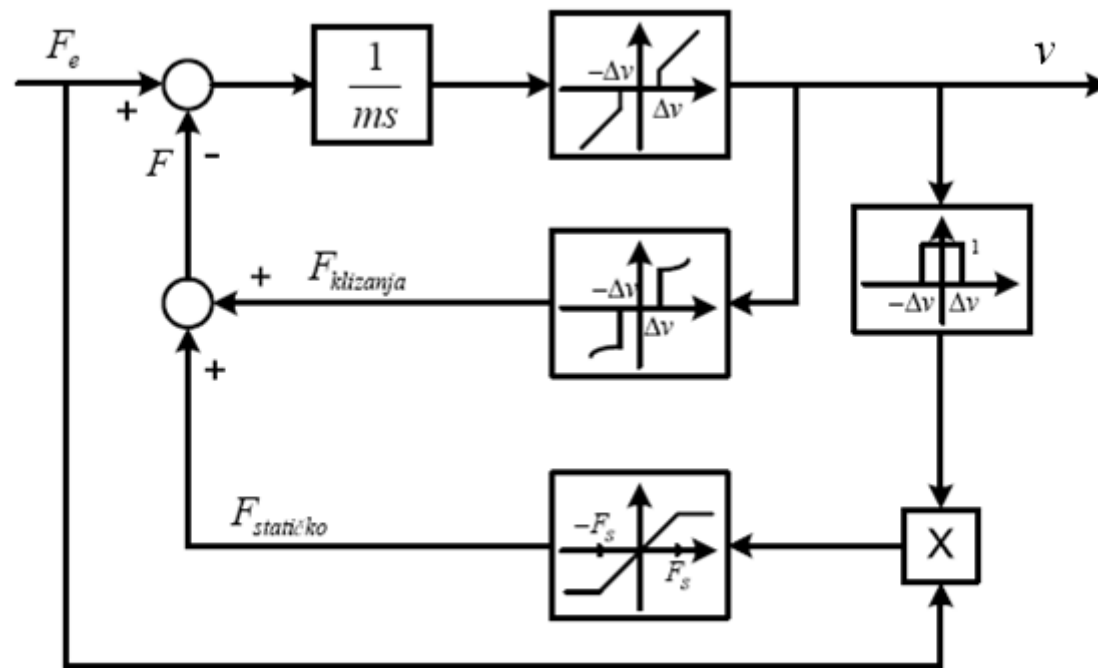
Slika 1.9 Klasični statički modeli trenja: a) Coulombovo trenje, b) Coulombovo + viskozno trenje, c) Coulombovo + viskozno trenje+statičko trenje, d) Stribeckovo+viskozno trenje

Karnoppov model trenja

- Osnovni nedostatak prethodno opisanih modela trenja, sa stajališta modeliranja i upravljanja, leži u činjenici da je potrebno detektirati slučajeve kada je relativna brzina jednaka nuli.
- Kako bi se izbjeglo često prekapćanje unutar spomenutog modela Karnopp je predložio korištenje zone neosjetljivosti, tj. intervala $|v| < \Delta v$. (slika 1.10 a))
- Ako je relativna brzina gibanja unutar tog intervala, smatra se da nema relativnog gibanja tijela u kontaktu (engl. *stick regime*).
- Kako postojanje zone neosjetljivosti nije fizikalno, često se koriste različite modifikacije ovog modela od kojih se najčešće koristi aproksimacija sile trenja vrlo strmim pravcem na intervalu $[-\Delta v, \Delta v]$ (slika 1.10 b))



Slika 1.10 Karnoppov model a) klasični i b) modificirani



Slika 1.11 Blokovska shema Karnoppova modela trenja

1.3.2 Dinamički modeli trenja

Armstrongov model

- S ciljem da se uzmu u obzir i određena dinamička svojstva pojave trenja, Armstrong je u svojem modelu uveo vremensku ovisnost statičkog trenja kao i Stribeckovog efekta.
- Predloženi model trenja sastoji se od dva podmodela: jednog za opis statičkog trenja i drugog za opis kinetičkog trenja tj. trenja klizanja.
- U režimu statičkog trenja sila je trenja opisana izrazom:

$$F(x) = \sigma_0 x \quad (1-5)$$

- U režimu kinetičkog trenja sila je opisana izrazom:

$$F(v, t) = \left(F_C + F_S(\gamma, t_d) \frac{1}{1 + (v(t - \tau_l) / v_s)^2} \right) \text{sgn}(v) + F_v \quad (1-6)$$

- Pritom funkcija $F_S(\gamma, t_d)$ opisuje ovisnost iznosa statičke sile trenja o vremenu provedenom u stanju mirovanja (pogledati sliku 1.8) i dana je izrazom:

$$F_S(\gamma, t_d) = F_{S,a} + (F_{S,\infty} - F_{S,a}) \frac{t_d}{t_d + \gamma} \quad (1-7)$$

gdje je σ koeficijent čvrstoće, t_d vrijeme koje je tijelo provelo u mirovanju, $F_{S,a}$ iznos Stribeckovog trenja na kraju prethodnog perioda klizanja, $F_{S,\infty}$ iznos Stribeckovog trenja nakon vrlo dugog perioda mirovanja tijela, τ_l vremenska konstanta trenja, γ - empirijski parametar modela.

- Nedostak je ovog modela potreba za mehanizmom prekapčanja između njegovih dvaju podmodela.
- Armstongov model ima sedam parametara koji se trebaju odrediti tijekom postupka identifikacije modela trenja, te se stoga ponekad u literaturi ovaj model nalazi i pod imenom "Model sa sedam parametara" (engl. seven parameters model).

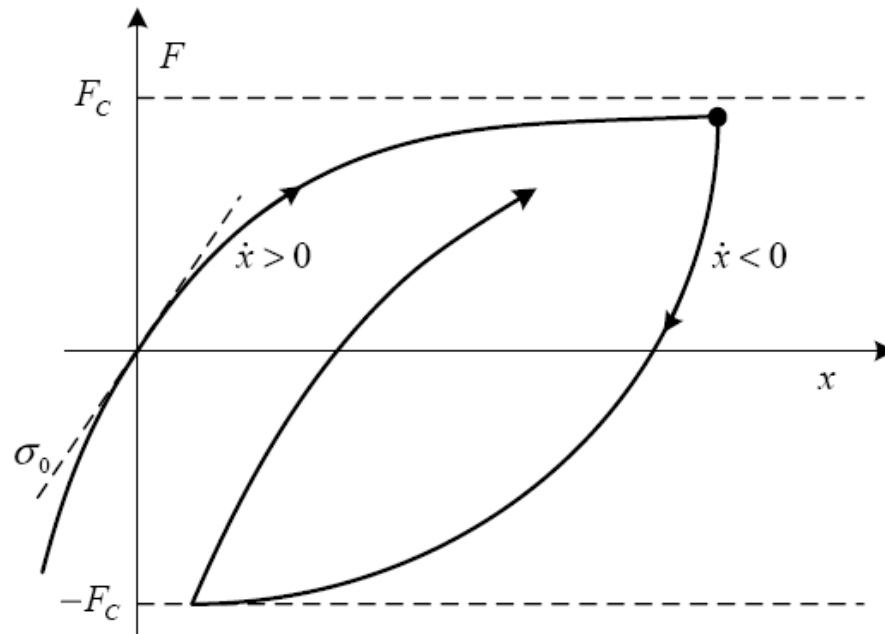
Dahlov model trenja (P. Dahl, Aerospace Corporation, 1968.)

- Model definira dinamičku ovisnost sile trenja o pomaku x nelinearnom diferencijalnom jednačbom prvog reda (*engl.* stress-strain curve):

$$\frac{dF}{dx} = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_C} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha, \quad (1-8)$$

gdje σ - koeficijent čvrstoće, α - koeficijent koji definira oblik krivulje

- Dahlovim modelom obuhvaćeno je:
 - Pomaci u području statičkog trenja (*engl.* presliding displacement)
 - Histerezna karakteristika trenja (slika 1.12)
 - Sila trenja ovisna je o pomaku x i predznaku brzine
- Osnovni je nedostatak Dahlova modela nemogućnost modeliranja:
 - Stribeckova efekta,
 - „Stick-Slip“ efekta.



Slika 1.12 Ovisnost sile trenja o pomaku prema Dahlovu modelu

- Za dobivanje modela u vremenskoj domeni, derivirajmo (1-8) po vremenu:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dx} \cdot v = \sigma \left(1 - \frac{F}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right)^\alpha \cdot v \quad (1-9)$$

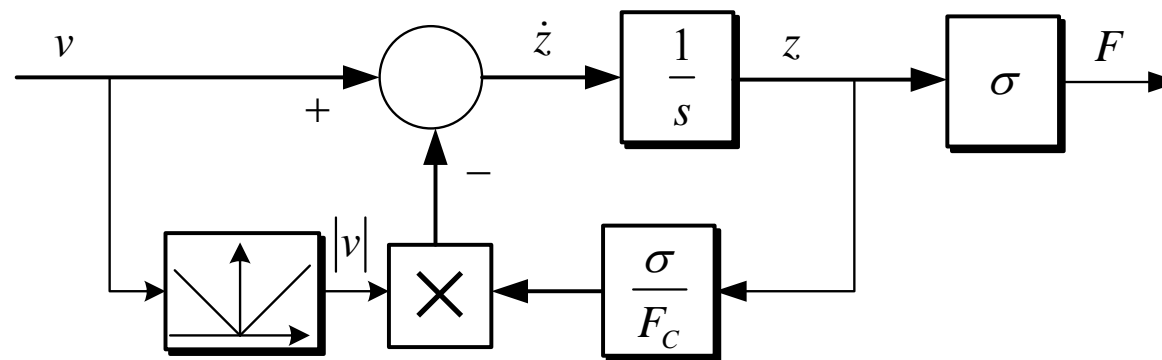
- Za $\alpha = 1$ prethodni se izraz može zapisati u obliku:

$$\frac{dF}{dt} = \sigma v - \frac{F}{F_C} |v|, \quad \left(\text{sgn}(v) = \frac{|v|}{v} \right) \quad (1-10)$$

- Uvođenjem pokrate $F = \sigma z$ slijedi:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_C} z \quad (1-11)$$

$$F = \sigma z \quad (1-12)$$



Slika 1.13 Blokowska shema Dahlova modela_za $\alpha = 1$

Analiza Dahlova modela u stacionarnom stanju

- Izjednačenjem vremenske derivacije sile trenja s nulom $\left(\frac{dz}{dt} = 0\right)$ slijedi:

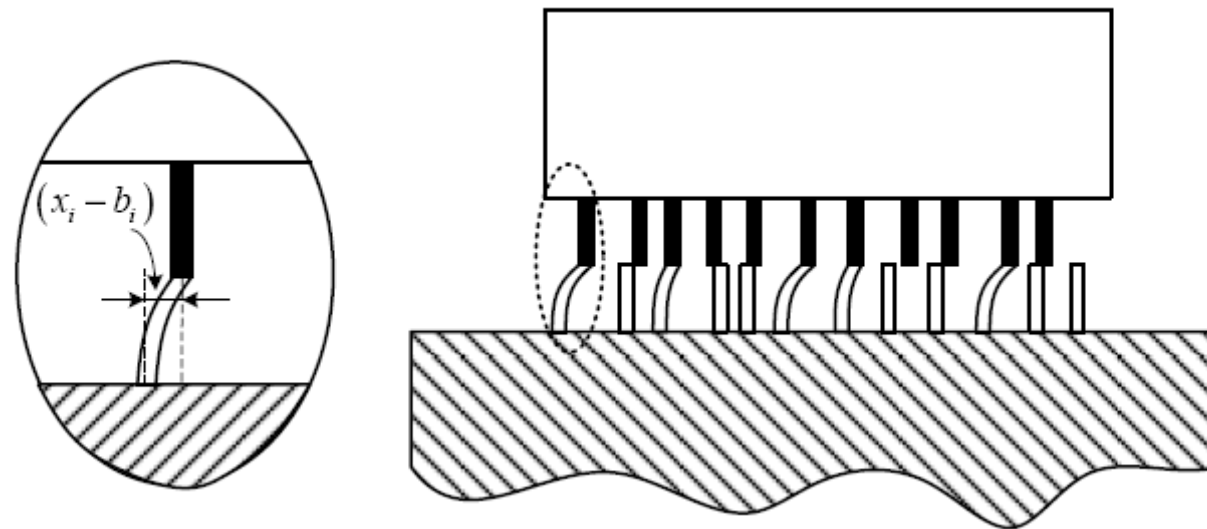
$$z = \frac{F_c}{\sigma} \operatorname{sgn}(v) \quad (1-13)$$

$$F = \sigma z = F_c \operatorname{sgn}(v) \quad (1-14)$$

- Prema tome, Dahlov model trenja u stacionarnom stanju identičan je Coulombovu modelu

Vlaknasti model trenja

- Vlaknasti model trenja temelji se na razmatranju pojava u kontaktu dvaju tijela na mikroskopskoj razini.
- Uslijed nepravilnosti dodirne površine dvaju tijela broj točaka u kojima se ostvaruje njihov kontakt kao i njihov raspored je slučajan. Pritom se pretpostavlja da se ovaj kontakt u svakoj od tih točaka ostvaruje preko niza elastičnih vlakana (slika 1.14).



Slika 1.14 Ilustracija vlaknastog modela trenja

- Prilikom relativnog gibanja dvaju tijela koja su u kontaktu dolazi do naprezanja tih vlakana (pretpostavimo N vlakana, $N=20-25$) i pritom se generira sila čiji je iznos:

$$F = \sum_{i=1}^N \sigma(x_i - b_i) \quad (1-15)$$

- Kad iznos naprezanja pojedine veze prijeđe njenu čvrstoću, dolazi do pucanja stare i uspostavljanja nove veze.
- Nova veza se javlja među vlaknima smještenima na pravcima koji su otklonjeni od pravca gibanja te ne omogućuju čvrstoću prethodne veze.
- Broj veza ovisi o relativnoj brzini među kontaktnim površinama. Kako je sila trenja izravno ovisna o broju veza, njezin iznos je u funkciji relativne brzine.
- Ovaj model dobro opisuje slučajni karakter trenja, ali je **neefikasan** s obzirom na veliko vrijeme računanja.

Model trenja zasnovan na cikličkom integriranju

- S ciljem skraćanja vremena računanja, a da se pritom zadrže dobra svojstva vlaknastog modela u opisu fenomena trenja, razvijen je model zasnovan na cikličkom integriranju (*engl. reset integrator model*).
- Umjesto kidanja postojećeg asperitnog vlakna nakon dostizanja kritičnog naprezanja, ovim se modelom veza vlakana zadržava, ali se pritom onemogućuje daljnji rast naprezanja vlakna.
- Model koristi posebnu varijablu koja određuje naprezanje u vlaknu:

$$\frac{dz}{dt} = \begin{cases} v, & z \leq z_m \\ 0, & z > z_m \end{cases} \quad (1-16)$$

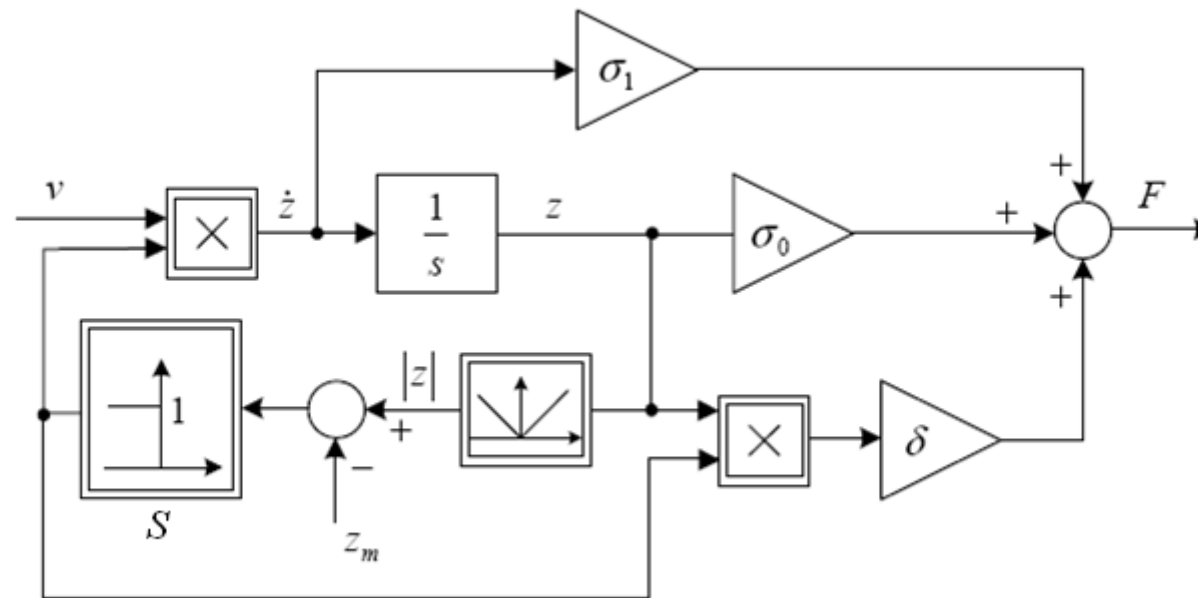
- Sila trenja dana je izrazom:

$$F = (1 + \delta(z))\sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} \quad (1-17)$$

pri čemu funkcija $\delta(z)$ određuje iznos sile trenja u području statičkog trenja (trenja mirovanja) i dana je izrazom:

$$\delta(z) = \begin{cases} \delta, & z \leq z_m \\ 0, & z > z_m \end{cases} \quad (1-18)$$

- Uvođenjem koeficijenta prigušenja σ_1 izbjegavaju se oscilacije u području statičkog trenja koje se javljaju kod "vlaknastog modela".



Slika 1.15 Blokova shema „reset integrator“ modela trenja

- „Reset integrator“ model trenja omogućuje znatno efikasniju simulaciju od vlaknastog modela ali je istovremeno diskontinuiran po varijabli z te je također potrebno provjeravati uvjet $|z| < z_m$.

LuGre model trenja

- LuGre model predstavlja proširenje Dahlova modela s ciljem opisivanja Stribeckova i „stick-slip“ efekta.
- Dahlov model ima oblik:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{F_C} z \quad (1-19)$$

$$F = \sigma z \quad (1-20)$$

- LuGre model umjesto Coulombove sile F_C uvodi nelinearnu Stribeckovu funkciju:

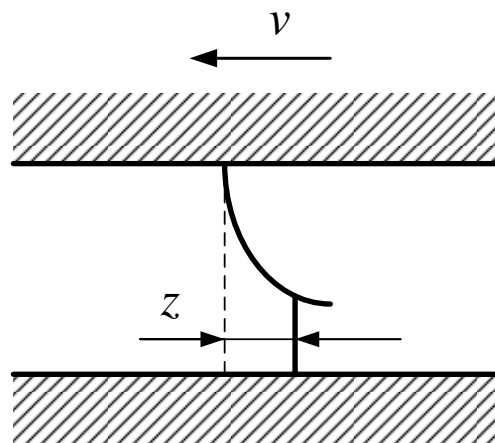
$$g(v) = F_C + (F_S - F_C) e^{-\left(\frac{v}{v_s}\right)^\delta} \quad (1-21)$$

- LuGre model, prema tome, glasi:

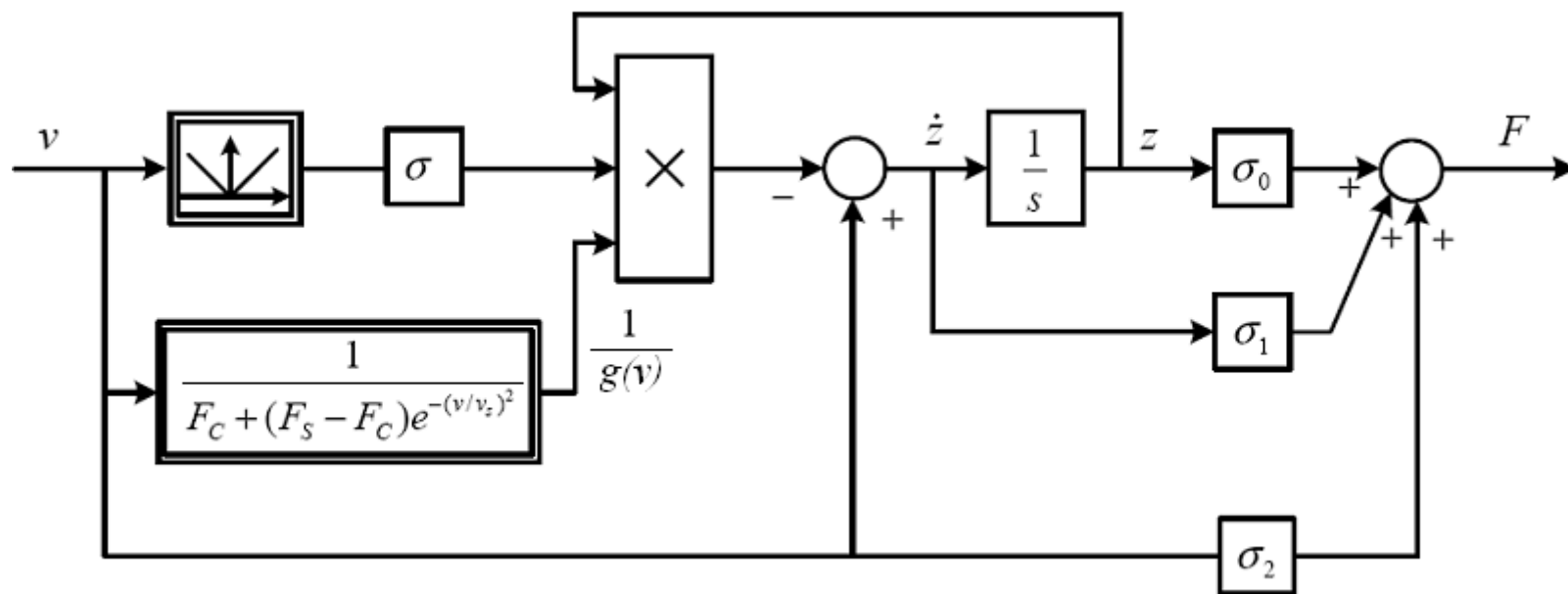
$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma |v|}{g(v)} z \quad (1-22)$$

$$F = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{dt} + \sigma_2 v \quad (1-23)$$

- Odabirom parametara δ i v_s mogu se dobiti različiti oblici Stribeckove funkcije kako bi se postiglo što bolje slaganje sa stvarnom karakteristikom trenja.
- Varijabla z predstavlja internu varijablu modela trenja koja se može interpretirati kao prosječno istežanje asperitnih vlakana u kontaktu dvaju tijela (slika 1.16).



Slika 1.16 Interpretacija interne varijable z LuGre modela trenja



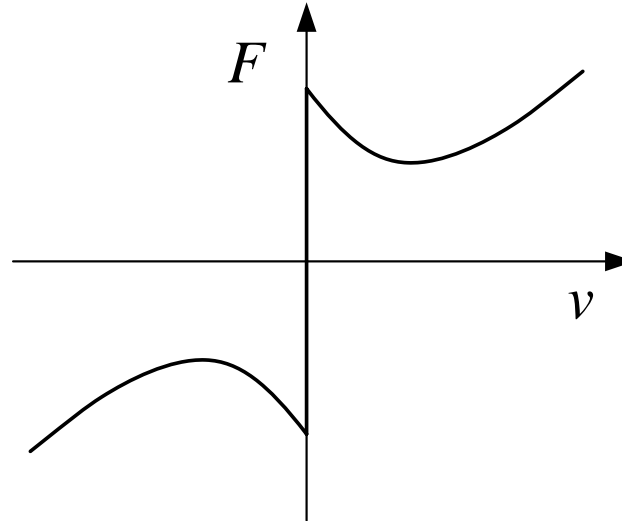
Slika 1.17 Blokovska shema LuGreova modela trenja

LuGre model u stacionarnom stanju

- Izjednačenjem vremenskih derivacija u LuGre modelu s nulom slijedi:

$$\frac{dz}{dt} = v - \frac{\sigma_0 |v|}{g(v)} z = 0 \Rightarrow z = \frac{g(v)}{\sigma_0} \operatorname{sgn}(v) \quad (1-24)$$

$$F = \sigma_0 z + \underbrace{\sigma_1 \frac{dz}{dt}}_{=0} + \sigma_2 v = g(v) \operatorname{sgn}(v) + \sigma_2 v \quad (1-25)$$



Slika 1.18 Statička karakteristika LuGreova modela trenja

Svojstvo pasivnost LuGreova modela trenja

- Neka je dan sustav:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u); \\ y &= h(x, u).\end{aligned}\tag{1-26}$$

i neka je za taj sustav definirana pozitivno definitna energetska funkcija $V(x)$ takva da vrijedi:

1. $V(x) = 0$, za $x = 0$
2. $V(x) \geq 0$, za $\forall x$

Za dani se sustav kaže da je pasivan s obzirom na energetske funkcije $V(x)$ ako je zadovoljena sljedeća nejednakost:

$$V(x(t)) - V(x(0)) \leq \int_0^t y^T(t)u(t)dt\tag{1-27}$$

- U slučaju da je funkcija $V(x)$ derivabilna, prethodni se uvjet svodi na:

$$\dot{V}(x(t)) \leq \int_0^t y^T(t)u(t)dt\tag{1-28}$$

- Ukupna energija spremljena u sustav manja je ili jednaka energiji dobavljenoj u sustav.

Dokaz pasivnosti za LuGreov model

- Neka energetska funkcija sustava ima oblik $V(z) = z^2 / 2$ (koja očito zadovoljava uvjete 1. i 2. s prethodnog slajda).
- Preslikavanje $\psi : v \rightarrow z$ je pasivno s obzirom na energetsku funkciju $V(z)$ budući da vrijedi:

$$V(t) - V(0) = \int_0^t \dot{V} dt = \int_0^t \frac{dV}{dz} \frac{dz}{dt} dz = \int_0^t z \frac{dz}{dt} dt = \int_0^t z \left(v - \frac{\sigma |v|}{g(v)} z \right) dt \quad (1-29)$$

$$V(t) - V(0) = \int_0^t \left(zv - \frac{\sigma |v|}{g(v)} z^2 \right) dt \leq \int_0^t zv dt \quad (1-30)$$

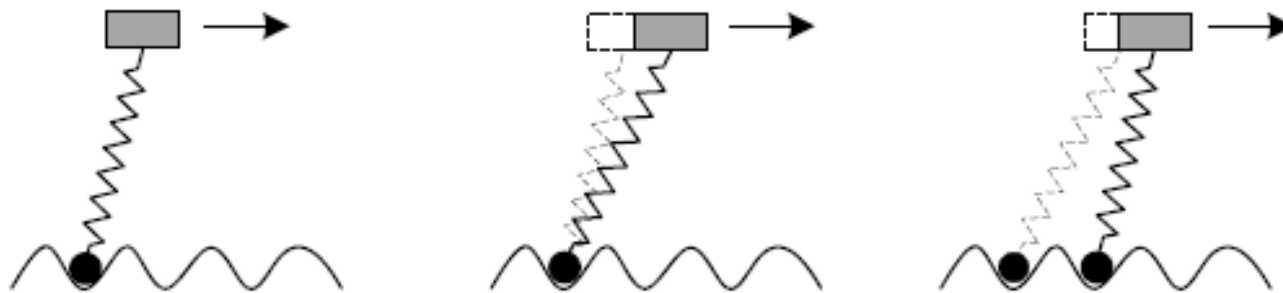
- Ovo je svojstvo modela vrlo bitno kod određenih postupka projektiranja nelinearnih sustava upravljanja procesima uz uzraženu pojavu trenja.

1.4 Negativni efekti trenja u sustavima upravljanja

- Ovisno o konkretnom problemu, fenomen trenja može općenito biti koristan ili štetan. Tako se kod sustava upravljanja proklizavanjem kotača vozila (ABS) odnosno kod sustava upravljanja vučnom silom nastoji maksimizirati iznos sile trenja te je pojava trenja u ovom slučaju korisna.
- S druge strane, u velikom broju industrijskih primjena postojanje trenja je izuzetno štetno. Ponajprije zbog njegovog postojanja dio se energije nepovratno gubi odnosno pretvara u toplinsku energiju smanjujući često pritom vijek trajanja komponenata sustava.
- Sa stajališta kvalitete upravljanja sustavima posebno su bitna dva vrlo bliska efekta povezana s pojavom trenja, a to su:
 - "stick-slip" efekt i
 - "hunting" efekt.

1.4.1 „Stick-slip“ efekt

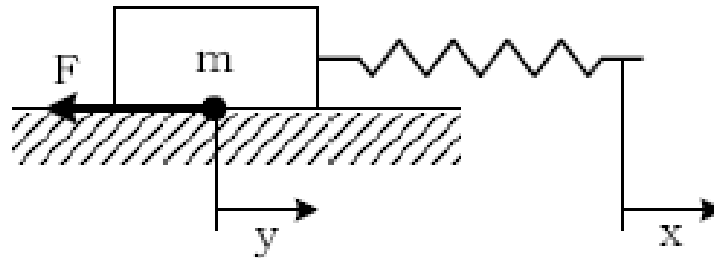
- Pod pojmom "stick-slip" efekta obično se podrazumijeva oscilatorno gibanje tijela koje nastaje kao posljedica naglog prelaska iz područja statičkog trenja (trenja mirovanja) u područje kinetičkog trenja (trenje klizanja).
- Zbog činjenice da je iznos statičkog trenja najčešće značajno veći od iznosa trenja u režimu klizanja prilikom prelaska iz režima statičkog u režim kinetičkog trenja dolazi do naglog smanjenja sile trenja.
- Promatrajući ovu pojavu na mikrorazini, može se zaključiti da je ovo smanjenje sile trenja posljedica kidanja asperitnih veza između dvaju tijela koja su u kontaktu što se događa nakon što vanjska sila premaši iznos prekidne sile F_{pr} .



Slika 1.19 Ilustracija „stick-slip“ efekta

PRIMJER 1.1: Simulacija „stick-slip“ efekta

U svrhu ilustracije "stick-slip" efekta razmotrit će se jednostavan mehanički sustav koji se sastoji od tijela mase m koje se nalazi na podlozi i na njega vezane elastične opruge (slika 1.20). Sila trenja F između tijela i podloge opisana je LuGre modelom trenja.



Slika 1.20 Simulacija „stick-slip“ efekta

Pretpostavimo da se desni kraj opruge kreće brzinom $\dot{x}(t) = v_0$.

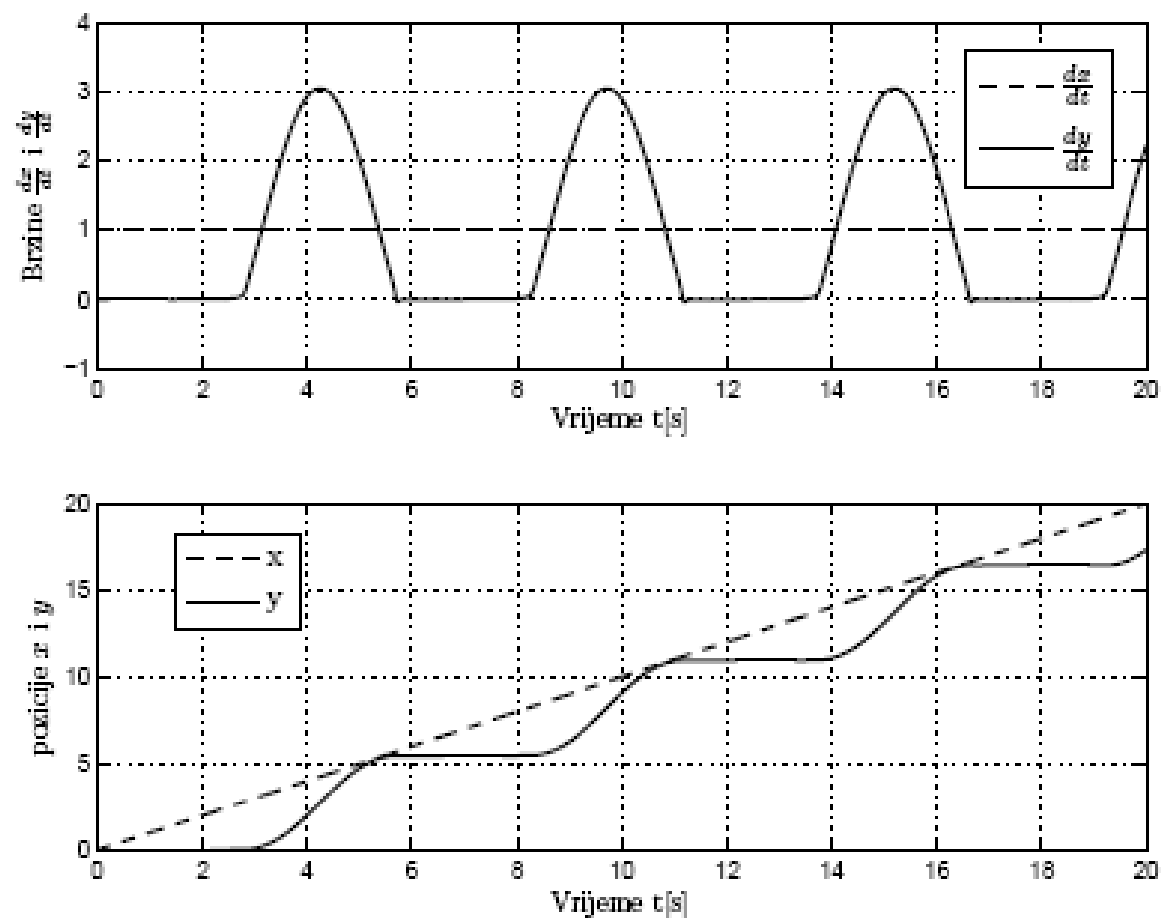
Na temelju II Newtonog zakona mogu se zapisati jednačbe gibanja tijela:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= v_0; \\ l &= x - y;\end{aligned}\tag{1-31}$$

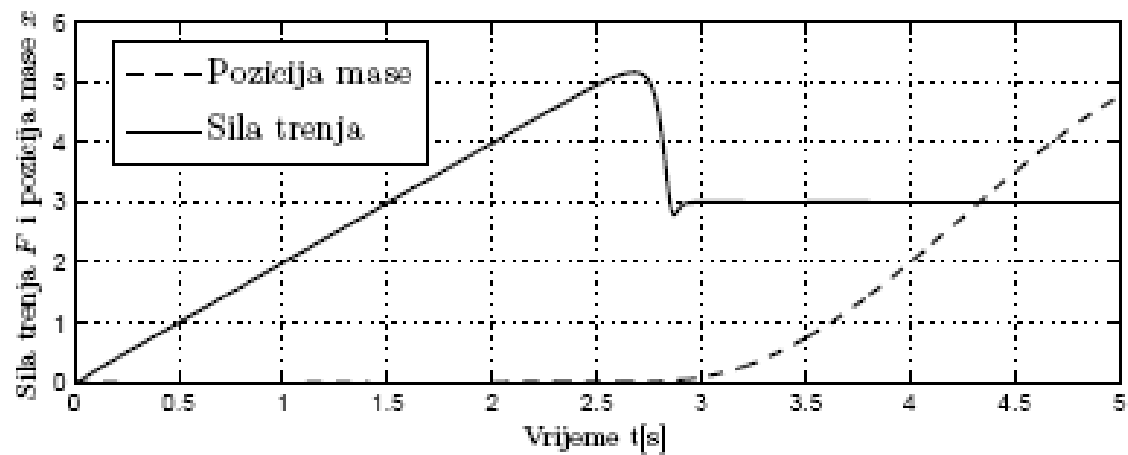
$$\begin{aligned}\frac{dl}{dt} &= v_0 - \frac{dy}{dt}; \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} &= kl - F.\end{aligned}\tag{1-32}$$

Parametri simulacije dani su u tablici 1.

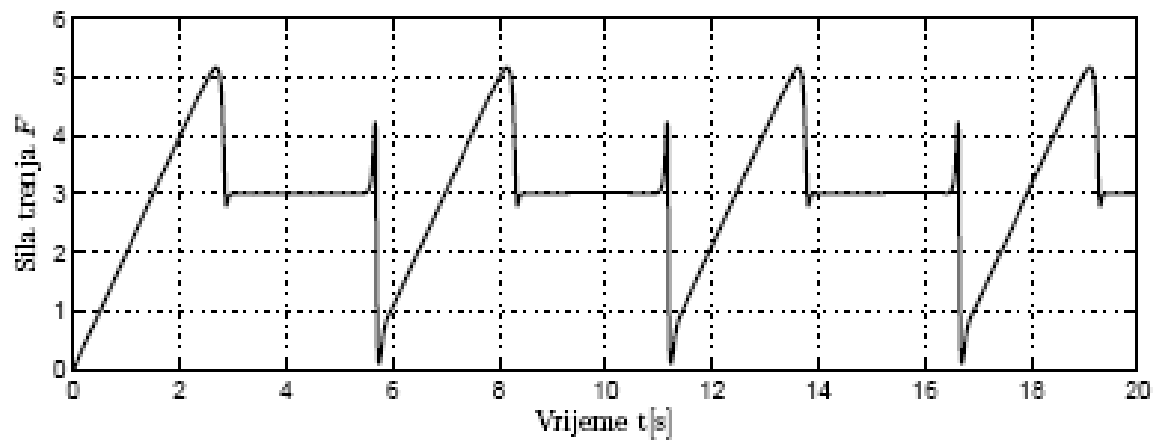
Tablica 1: Parametri simulacije	
Parametar	Vrijednost
m	1
k	2
v_0	1
v_s	0.1
μ_c	0.3
μ_s	0.6
σ_0	1000
σ_1	42.167



Slika 1.21 Brzina i pozicija mase tijekom simulacije



Slika 1.22 Sila trenja i pozicija mase m tijekom simulacije (detaljan prikaz)



Slika 1.23 Sila trenja tijekom simulacije

1.4.2 „Hunting“ efekt

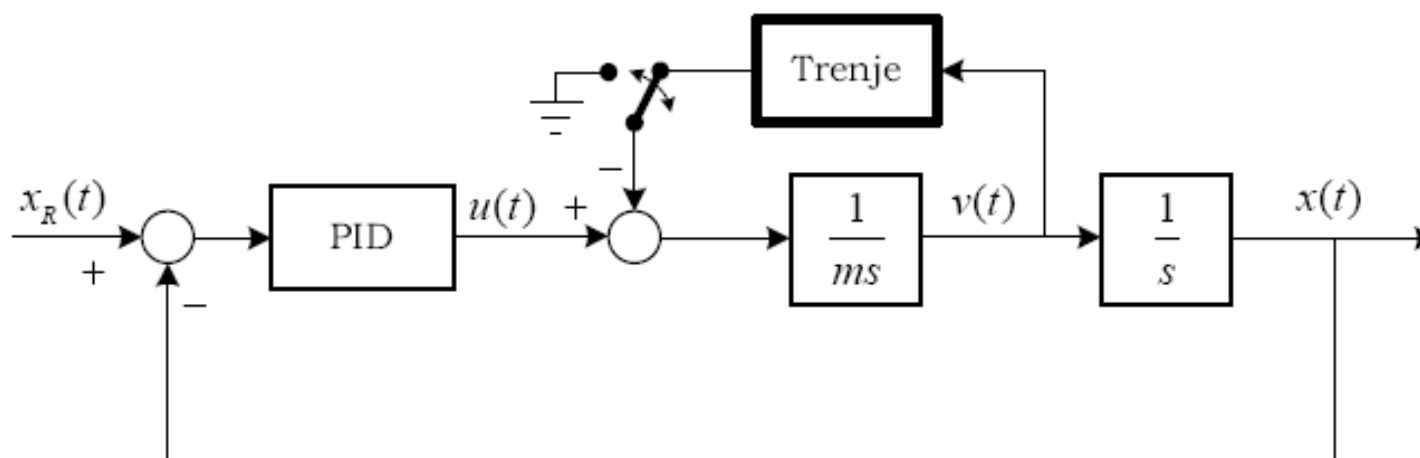
- Prethodni je primjer ilustrirao efekt koji se javlja pri niskim relativnim brzinama kada se asperitne veze stignu nanovo uspostaviti što rezultira cikličnim izmjenjivanjem režima statičkog i kinetičkog trenja.
- Prelazak između pojedinih režima trenja ostvaren je pomoću vanjske sile tj. sile opruge.
- U sustavima upravljanja elektromotornim pogonima umjesto opruge ta će promjena režima trenja biti prouzročena integralnim djelovanjem regulatora, ukoliko se radi o regulaciji pozicije elektromotornog pogona.
- To će rezultirati nemogućnošću postizanja točnosti u ustaljenom stanju, što se obično naziva "**hunting**" efektom.

PRIMJER 1.2: Ilustacija "hunting" efekta

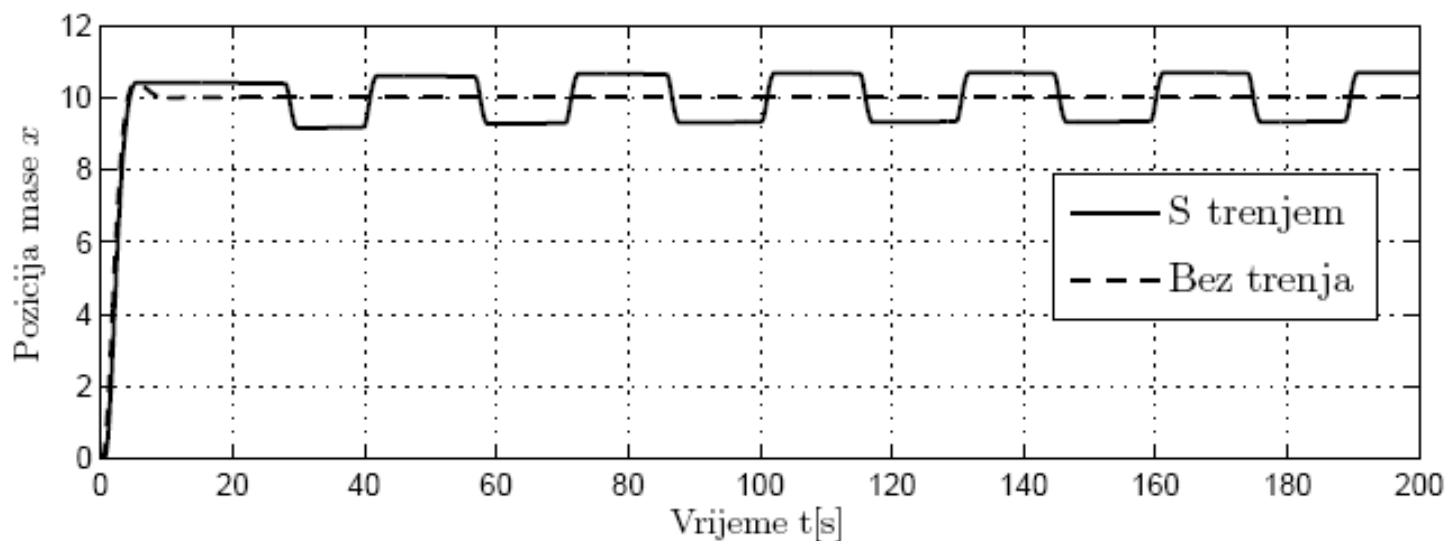
Sustav regulacije pozicije mase na podlozi uz korištenje PID regulatora prikazan je na slici 2.21. Parametri PID regulatora određeni su na temelju nominalnog modela procesa koji ne uključuje trenje. U sklopu ovog primjera provedene su dvije skupine simulacija i to:

- (i) bez utjecaja sile trenja i
- (ii) (ii) uz utjecaj sile trenja.

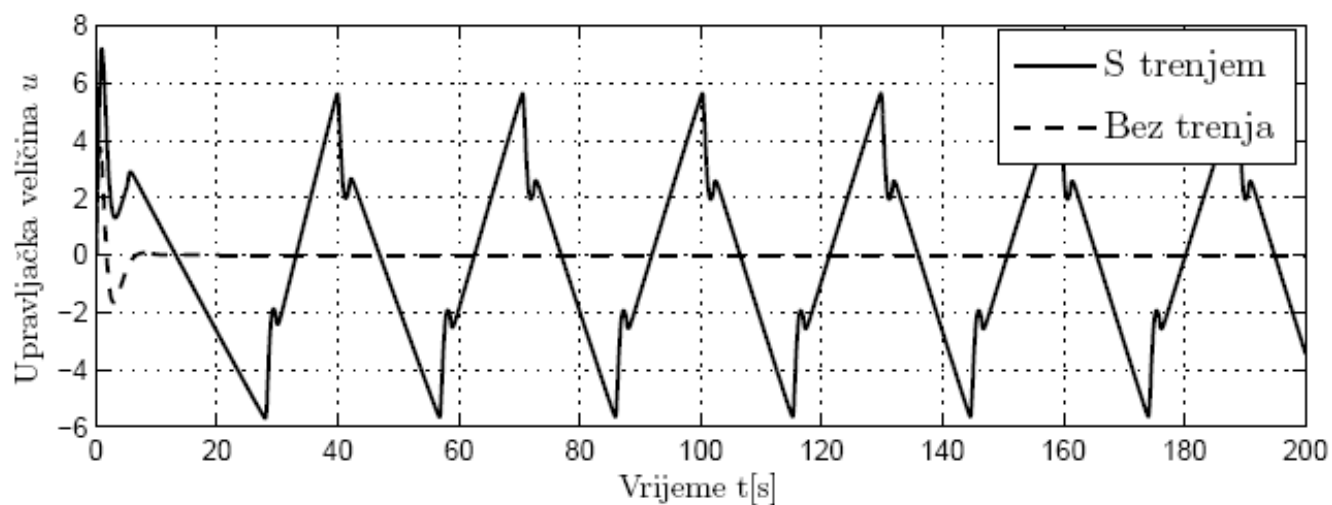
Za modeliranje sile trenja korišten je LuGre model trenja. Svi parametri procesa jednaki su onima iz prethodnog primjera.



Slika 1.24 Sustav upravljanja položajem mase na podlozi

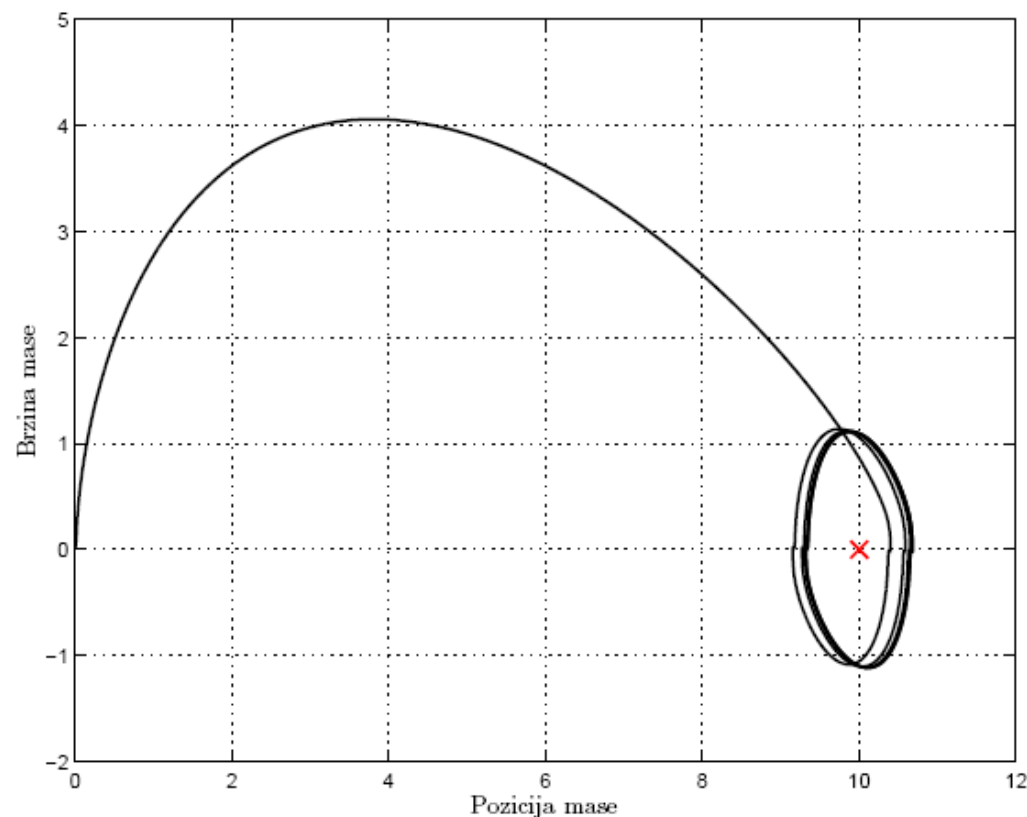


Slika 1.25 Odziv pozicije mase u slučaju korištenja PID regulator



Slika 1.26 Odziv upravljačkog signala $u(t)$ u slučaju korištenja PID regulatora

- Djelovanje sile trenja rezultira trajnim oscilacijama regulirane veličine (položaja mase) oko njene referentne vrijednosti.
- Ovakva se pojava obično u teoriji nelinearnih sustava naziva **graničnim ciklusom** (engl. *limit cycle*) budući da fazna trajektorija sustava završava u zatvorenoj krivulji.



Slika 1.27 Fazna trajektorija sustava iz primjera 1.2

1.5 Kompenzacija utjecaja trenja

- Posljedice djelovanja trenja u sustavima upravljanja:
 - Gubici energije koja se troši na savladavanje sile trenja;
 - Onemogućavanje postizanja visoke kvalitete upravljanja

Svi postupci kompenzacije općenito se mogu klasificirati u tri skupine:

- Otklanjanje uzroka trenja
 - U ovu skupinu spadaju postupci kao što su dodavanje različitih aditiva mazivima koji se koriste (npr. u ležajevima) kojim se osigurava smanjenje trenja i korištenje različitih hardverski preinaka na elektromehaničkom sustavu kako bi se smanjio utjecaj trenja.
- Nemodelski postupci kompenzacije trenja.
- Na modelu zasnovani postupci kompenzacije trenja.

1.5.1 Nemodelski postupci kompenzacije trenja

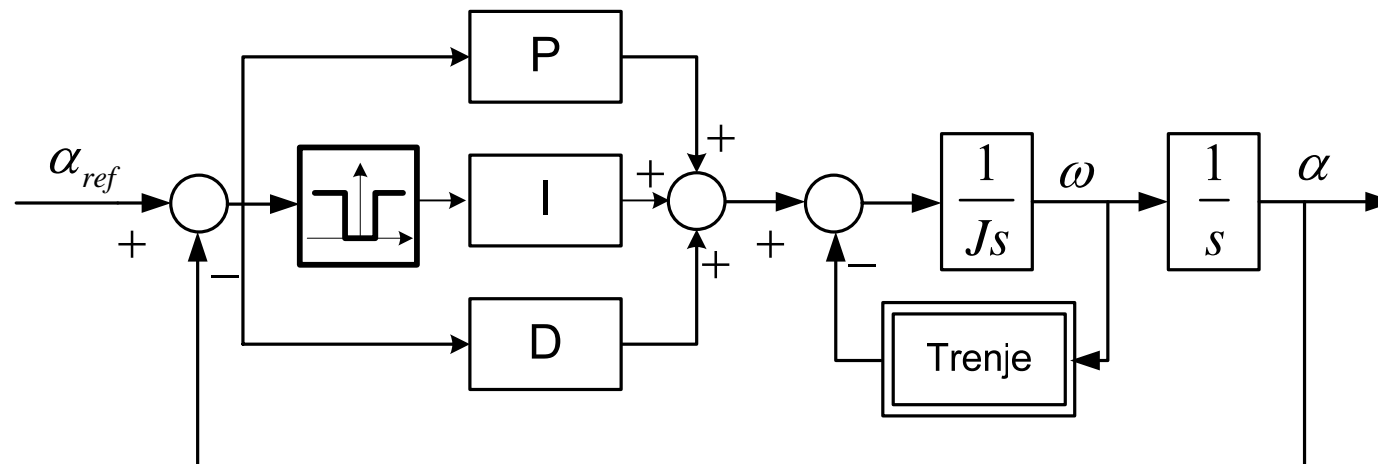
- Ovi postupci ne zahtijevaju eksplicitno poznavanje modela trenja.
- U nastavku je dan pregled najvažnijih postupaka koji spadaju u ovu skupinu

Modifikacija integralnog djelovanja

- Integralno se djelovanje općenito uvodi s ciljem eliminacije pogreške u stacionarnom stanju ali u sustavima s prisutnim trenjem može prouzročiti efekt „hunting-a“ i/ili rezultirati značajnim iznosima nadvišenja u prijelaznoj pojavi.
- Razlog tomu leži u obliku karakteristike trenja odnosno u značajnom smanjenju iznosa sile trenja pri prijelazu iz područja statičkog u područje kinetičkog trenja.
- Ideja je ovih postupaka da se tijekom rada sustava (on-line) mijenja ponašanje integralnog člana regulatora.

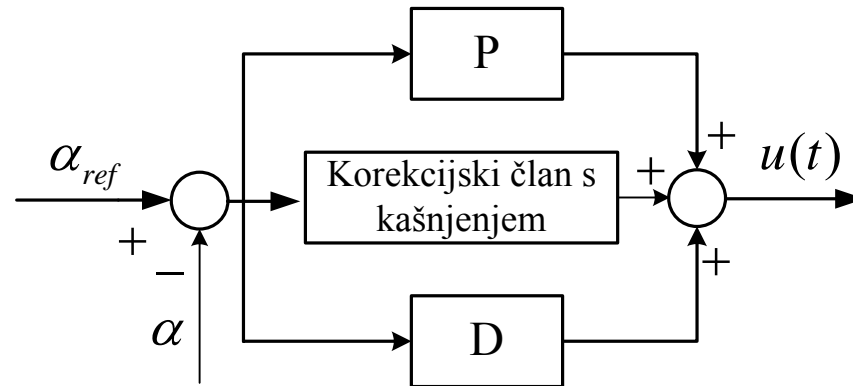
- Postoji više različitih postupaka modifikacije integralnog djelovanja kojima se eliminira/reducira utjecaj trenja na kvalitetu upravljanja:

- **Uvođenje zone neosjetljivosti.** Na ulazu u integralni član PID regulatora dodaje se nelinearni element zone neosjetljivosti čime se zaustavlja njegovo daljnje integriranje kada pogreška pozicioniranja padne na dovoljno mali iznos. Time se eliminira „hunting“ efekt ali se istovremeno narušava točnost sustava.



Slika 1.28. Modifikacija integralnog djelovanja uvođenjem zone neosjetljivosti

- **Korekcijski član s faznim kašnjenjem.** Uvođenje korekcijskog člana s faznim kašnjenjem s velikim pojačanjem umjesto integralnog djelovanja rezultira sličnim efektom kao zona neosjetljivosti ali se pritom ne unose nelinearni efekti u sustav.



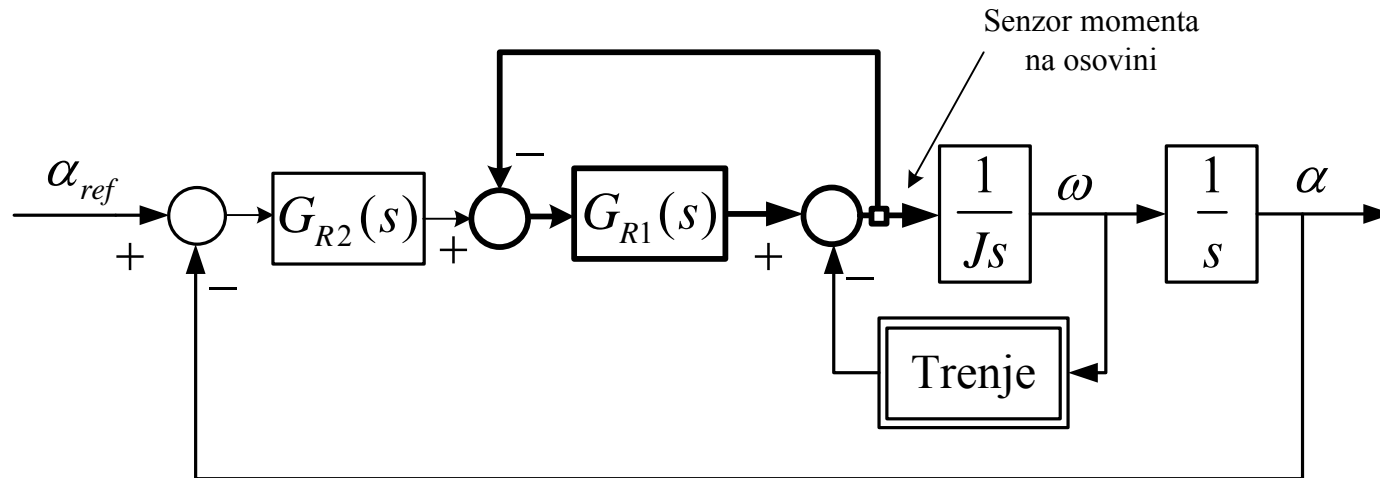
Slika 1.29. Modifikacija integralnog djelovanja uvođenjem korekcijskog člana s kašnjenjem

- **Resetiranje integratora.** Ovaj se postupak provodi u slučajevima kada je statičko trenje značajno većeg iznosa od kinetičkog te se kao posljedica integralnog djelovanja može pojaviti veliko nadvišenje u prijelaznoj pojavi. Kako bi se ono reduciralo ili eliminiralo (posebice tamo gdje ono nije dopušteno) može se koristiti postupak resetiranja čime se izlaz iz integralnog člana isključuje kada se detektira izlazak iz područja statičkog trenja.

- **Množenje izlaza iz integratora s predznakom brzine.** Koristi se za eliminaciju problema vezanih za promjenu smjera brzine kada sila trenja naglo mijenja predznak (sa iznosa F_C na $-F_C$ ili obrnuto).

Višepetljaste strukture upravljanja

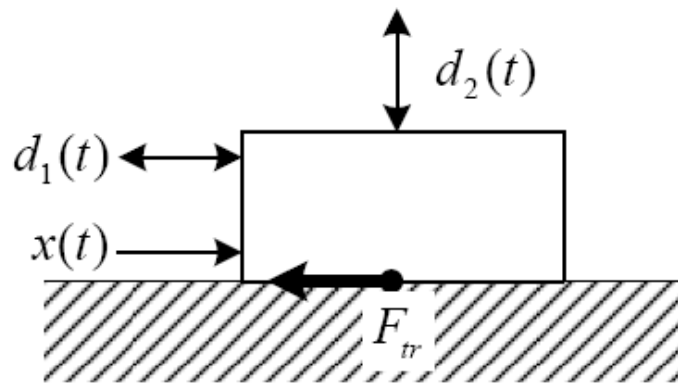
- Ideja je ovog postupka korištenje brze podređene petlje po momentu na osovini radnog mehanizma. Zbog velike brzine djelovanja, zatvorena podređena petlja ponašat će se skoro kao idealni izvor momenta (slika 1.30).
- Najbitniji preduvjet za korištenje ove strukture jest mjerljivost momenta na osovini radnog mehanizma, čime se unutarnjom petljom obuhvaća točka djelovanja trenja u sustavu.
- Zbog brzine unutarnje petlje poremećaji koji djeluju na sustav, tj. trenje, kompenziraju se unutar podređene petlje te se njihovo djelovanje ne vidi na reguliranoj veličini, tj. poziciji radnog mehanizma.
- Umjesto senzora momenta u ovim se strukturama može koristiti i senzor ubrzanja.
- U novije vrijeme za mjerenje momenta i/ili ubrzanja sve veću primjenu imaju MEMS senzori (engl. Micro ElectroMechanical systems, MEMS).



Slika 1.30 Kaksadna struktura kompenzacije trenja

Korištenje dither signal

- Jedan od najstarijih i najjednostavnijih kompenzacija utjecaja trenja jest korištenje tzv. dither signala. To je visokofrekvencijski signal koji se obično dodaje upravljačkom signalu a što ima za posljedicu onemogućavanje zadržavanja sustava u području statičkog trenja.
- Pritom je ovdje bitno spomenuti da postoji značajna razlika između djelovanja dither signala paralelno odnosno okomito na smjer sile trenja.

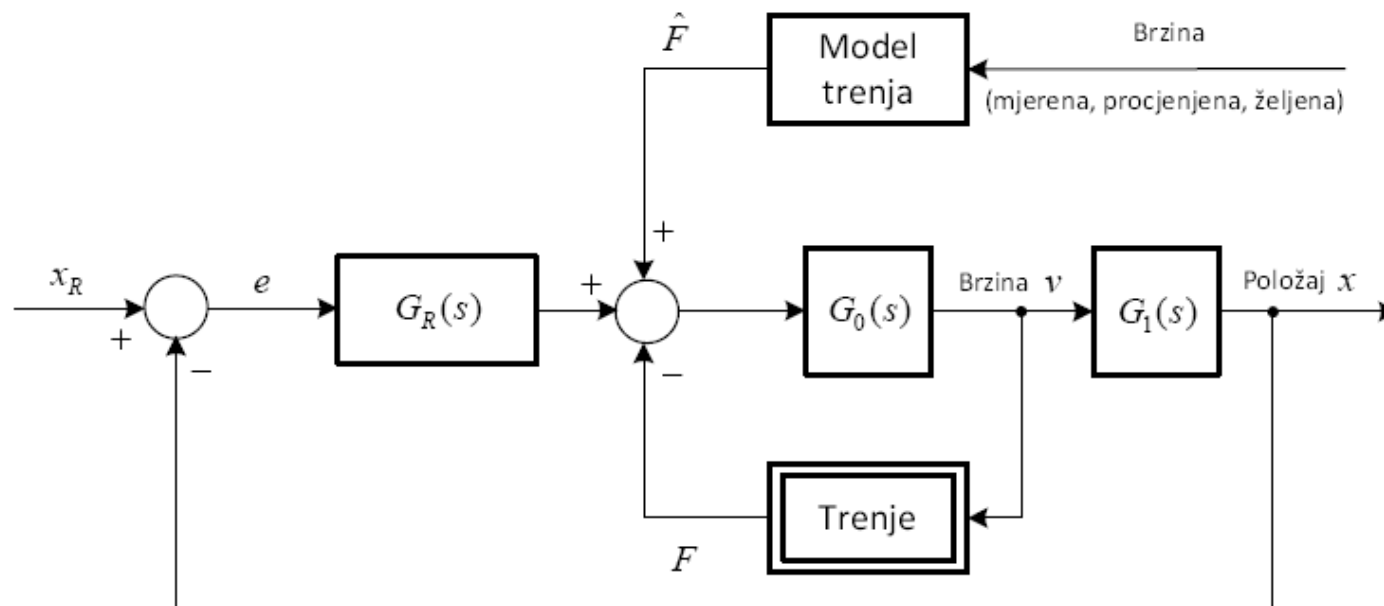


Slika 1.31 Tipovi dither signala

- Ako je djelovanje dither signala paralelno sili trenja ($d_1(t)$) tada je efekt njegovog uvođenja usrednjavanje nelinearne funkcije trenja.
- Ako je pritom frekvencija dither signala veća od odgovarajućih lomnih frekvencija dominantnih dinamika sustava tada se na izlaznom signala neće vidjeti negativni efekti dodavanja ovog signala.
- S druge strane djelovanje dither signala okomito sili trenja ($d_2(t)$) ima za posljedicu smanjenje koeficijenta trenja. Ovaj se tip dither signala uobičajeno generira korištenjem mehaničkih vibratora.

1.5.2 Na modelu zasnovana kompenzacija trenja

- Ideja je ovih postupka da se na temelju poznatog modela trenja generira dodatak upravljačkom signalu kojim se kompenzira utjecaj trenja na kvalitetu upravljanja.
- Kao ulaz u model trenja može se koristiti **mjerena brzina**, **estimirana brzina** ili **željena brzina**.



Slika 1.32 Načela shema kompenzacije trenja zasnovane na modelu trenja

- Preuvjeti za korištenje na modelu zasnovanih struktura kompenzacije trenja:
 - Točan model trenja,
 - Odgovarajuća dinamička svojstva aktuatora, tj. dovoljno velik propusni pojas. Ovaj je zahtjev bitan zbog činjenice da su pojave vezane uz trenje vrlo brze te stoga i aktuator mora biti vrlo „brz“ ako se želi kvalitetno kompenzirati utjecaj trenja,
 - Čvrsta sprega između aktuatora i elemenata sustava s trenjem. Time se osigurava da sila trenja bude praktički proporcionalna upravljačkom signalu.
- Adaptivni postupci kompenzacije trenja
 - **Neizravno adaptivno upravljanje.** Kod ovih se postupaka on-line estimiraju parametri modela trenja na temelju kojeg se određuju parametri regulatora.
 - Prednost ovih postupaka je mogućnost verifikacije estimiranog modela trenja prije njegovog korištenja u upravljačkoj petlji.
 - **Izravno adaptivno upravljanje.** Na temelju mjerenih signala radi se izravna adaptacija parametara regulatora kako bi se minimizirala pogreška slijeđenja referentne vrijednosti.
 - Nadzor postupka adaptacije u ovom je slučaju znatno složeniji.