Upravljanje elektromotornim pogonima 2009/2010

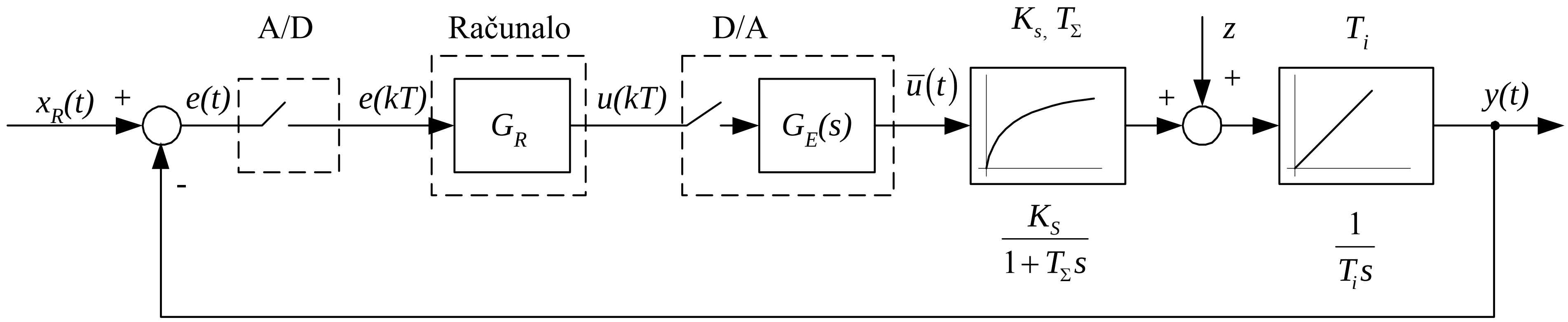
Prof.dr.sc. Nedjeljko Perić

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predavanje 4 – Primjena simetričnog optimuma u digitalnom upravljanju slijednim sustavima

Primjena simetričnog optimuma u digitalnom upravljanju slijednim sustavima

- Sustav upravljanja prikladan za primjenu simetričnog optimuma Sl. 4.1.:



Sl. 4.1

- Sustav upravljanja brzinom vrtnje istosmjernih elektromotornih pogona s podređenim upravljanjem strujom armature motora.
- Razmotrit će se sinteza diskretnog (digitalnog) regulatora.
- Rezultati provedene sinteze primijenit će se na upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona.

Preliminarna analiza sustava upravljanja

- Ekvivalentna diskretna prijenosna funkcija procesa dobiva se iz kontinuiranog procesa uz primjenu ekstrapolatora nultog reda (ZOH):

$$G_s(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{K_s}{1+T_\Sigma}\cdot\frac{1}{T_i s}\right\}. \qquad (4 - 1)$$

- **Odavde slijedi prijenosna funkcija u z području:**

$$G_s(z) = K_s\frac{T_\Sigma}{T_i}\left(\frac{T}{T_\Sigma}+e^{-T/T_\Sigma}-1\right)\frac{z-\dfrac{1-T/T_\Sigma e^{-T/T_\Sigma}-e^{-T/T_\Sigma}}{1-T/T_\Sigma-e^{-T/T_\Sigma}}}{(z-1)\left(z-e^{-T/T_\Sigma}\right)} \qquad (4 - 2)$$

- Sinteza vremenski diskretnog regulatora $G_R(z)$ PI djelovanja može se provesti na sljedeća dva načina:
  - Diskretizacijom PI regulatora
  - Primjenom bilinearne transformacije

Diskretizacija analognog PI regulatora

- Prijenosna funkcija PI regulatora u *s* – području:

$$G_R(s) = K_R \frac{1 + T_I s}{T_I s} = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \qquad (4 - 3)$$

- Uobičajeno se koristi, uz *T* <<, postupak diskretizacije zasnovan na:
    - Tustinovoj relaciji,
    - Pravokutnoj integraciji.

Tustinova (Trapezna integracija)

- **Uz primjenu Tustinove relacije (trapezne integracije) dobije se:**

$$\frac{1}{s} = \frac{T}{2}\frac{z+1}{z-1} \qquad (4 - 4)$$

- Primjenom Tustinove relacije dobije se prijenosna funkcija diskretnog PI regulatora:

$$G_R(z) = K_R\left(1 + \frac{T}{2T_I}\right)\frac{z - \dfrac{2T_I - T}{2T_I + T}}{z-1}. \qquad (4 - 5)$$

Pravokutna integracija

- Uz primjenu pravokutne integracije dobije se sljedeća veza između varijabli *s* i *z*:

$$\frac{1}{s} = \frac{Tz}{z-1} \qquad (4 - 6)$$

- Uvrštavanjem u prijenosnu funkciju kontinuiranog PI regulatora dobije se:

$$G_R(z) = K_R\left(1 + \frac{T}{T_I}\right)\frac{z - \dfrac{T_I}{T_I + T}}{z-1} \qquad (4 - 7)$$

- U postupku sinteze regulacijskog kruga koriste se razni postupci.

Primjena bilinearne transformacije

- Relacija za bilinearnu transformaciju glasi:

$$\Omega = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z = \frac{1+\Omega T/2}{1-\Omega T/2}, \qquad (4 - 8)$$

odnosno:

$$\Omega = j\frac{2}{T}\underbrace{tg\frac{\omega T}{2}}_{v}, \qquad (4 - 9)$$

$$\Omega = j\frac{2}{T}v = j\omega^{*}, \qquad (4 - 10)$$

gdje ω^{*} predstavlja tzv. kvazifrekvenciju.

Primjena bilinearne transformacije

- Pri tome vrijede sljedeće relacije:

$$\omega^* = \frac{2}{T} tg \frac{\omega T}{2}, \Rightarrow \omega = \frac{2}{T} arctg \frac{\omega^* T}{2}. \qquad (4 - 11)$$

- Uz *T* << ($T \rightarrow 0$), vrijedi $\omega^* \rightarrow \omega$, odnosno $\Omega \rightarrow s$.

Dokaz:

$$\Omega = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \overset{z=e^{sT}}{\Rightarrow} = \frac{2}{T} \frac{e^{sT}-1}{e^{sT}+1}. \qquad (4 - 12)$$

- Razvojem u Taylorov red člana e^{sT} uz $T \rightarrow 0$, slijedi:

$$\lim_{T\to 0} \Omega = \lim_{T\to 0} \frac{2}{T} \frac{Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \cdots}{2 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \cdots} = \lim_{T\to 0} 2 \frac{s + \frac{Ts^2}{2} + \cdots}{2 + Ts + \frac{(Ts)^2}{2} + \cdots} = \frac{2}{2} \cdot s, \qquad (4 - 13)$$

$$\lim_{T\to 0} \Omega = s.$$

- Primjenom bilinearne transformacije mogu se koristiti frekvencijske metode sinteze linearnih kontinuiranih sustava (npr. Bodéov postupak sinteze).

Izrazi za parametre diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu

- U narednim razmatranjima izložit će se postupak određivanja parametara diskrektnog PI regulatora zasnovan na primjeni bilinearne transformacije.

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Primjena pravokutne integracije daje za prijenosnu funkciju PI regulatora (4 - 5) prema simetričnom optimumu:

$$G_R(z) = \frac{K_R}{a^*} \frac{z - a^*}{z - 1}, \qquad (4 - 14)$$

gdje je:

$$a^* = \frac{T_I}{T_I + T}. \qquad (4 - 15)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Za diskretni PI regulator (4 – 14) potrebno je odrediti K_R i T_I koji osiguravaju simetrične frekvencijske karakteristike otvorenog kvazikontinuiranog regulacijskog kruga.
- Za prijenosnu funkciju procesa s astatizmom 1. reda danu izrazom (4 - 2) dobije se:

$$G_s(z) = \frac{K_z}{T_i} \frac{z - z_0}{(z-1)(z-p_0)}, \tag{4 - 16}$$

gdje je:

$$K_z = K_s\left[T + T_\Sigma\left(e^{-T/T_\Sigma} - 1\right)\right], \tag{4 - 17}$$

$$z_0 = \frac{1 - T/T_\Sigma e^{-T/T_\Sigma} - e^{-T/T_\Sigma}}{1 - T/T_\Sigma - e^{-T/T_\Sigma}}, \tag{4 - 18}$$

$$p_0 = e^{-T/T_\Sigma}. \tag{4 - 19}$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Primjenom bilinearne transformacije (4 - 8) na izraz (4 - 14) za disketni PI regulator prema simetričnom optimumu slijedi::

$$G_R(\Omega)=\frac{K_R}{a^*}\frac{\dfrac{1+\dfrac{T\Omega}{2}}{1-\dfrac{T\Omega}{2}}-a^*}{\dfrac{1+\dfrac{T\Omega}{2}}{1-\dfrac{T\Omega}{2}}-1}=\frac{K_R}{a^*}\frac{\left(1-a^*\right)+\dfrac{T\Omega}{2}\left(1+a^*\right)}{T\Omega} \qquad (4 - 20)$$

- Nakon sređivanja dobije se:

$$G_R(\Omega)=\frac{K_R\left(1+a^*\right)}{2a^*}\frac{1+\dfrac{T\Omega}{2}\dfrac{1+a^*}{1-a^*}}{\dfrac{T\Omega}{2}\dfrac{1+a^*}{1-a^*}} \qquad (4 - 21)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Izraz (4 - 21) za PI regulator u kvazikontinuiranom području može se još prikazati i kao:

$$G_R(\Omega) = K_R' \frac{1 + T_I'\Omega}{T_I'\Omega}, \qquad (4 - 22)$$

gdje je:

$$K_R' = \frac{K_R\left(1 + a^*\right)}{2a^*} \Rightarrow K_R' = K_R\left(1 + \frac{T/2}{T_I}\right), \qquad (4 - 23)$$

$$T_I' = \frac{1 + a^*}{1 - a^*}\frac{T}{2} \Rightarrow T_I' = T_I + \frac{T}{2}. \qquad (4 - 24)$$

- Izraz (4 - 21) za PI regulator u kvazikontinuiranom području analogan je izrazu (4 - 3) za prijenosnu funkciju PI regulatora u *s* - području.

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Primjenom bilinearne transformacije (4 – 8) na izraz (4 – 16) za prijenosnu funkciju procesa u *z* – području slijedi:

$$G_s(\Omega) = \frac{K_z}{T_i} \frac{\dfrac{1+\dfrac{T\Omega}{2}}{1-\dfrac{T\Omega}{2}} - z_0}{\left(\dfrac{1+\dfrac{T\Omega}{2}}{1-\dfrac{T\Omega}{2}} - 1\right)\left(\dfrac{1+\dfrac{T\Omega}{2}}{1-\dfrac{T\Omega}{2}} - p_0\right)} \qquad (4 - 25)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Nakon sređivanja, konačni izraz za prijenosnu funkciju u kvazikontinuiranom području:

$$G_s(\Omega) = \frac{K_{z\Omega}}{T_i} \frac{\left(1 + b\frac{T\Omega}{2}\right)\left(1 - \frac{T\Omega}{2}\right)}{\left(1 + c\frac{T\Omega}{2}\right)T\Omega}, \qquad (4 - 26)$$

gdje je:

$$K_{z\Omega} = K_z \frac{1 - z_0}{1 - p_0} = K_s T, \qquad (4 - 27)$$

$$b = \frac{1 + z_0}{1 - z_0} = \frac{1 + e^{-T/T_\Sigma}}{1 - e^{-T/T_\Sigma}} - \frac{2T_\Sigma}{T}, \qquad (4 - 28)$$

$$c = \frac{1 + p_0}{1 - p_0} = \frac{1 + e^{-T/T_\Sigma}}{1 - e^{-T/T_\Sigma}} = b + \frac{2T_\Sigma}{T}. \qquad (4 - 29)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Izraz (4 – 26) za prijenosnu funkciju procesa može se prikazati i u obliku:

$$G_s(\Omega) = \underbrace{\frac{K_{z\Omega}}{\left(1 + c\frac{T\Omega}{2}\right)T_i\Omega}}_{\substack{\text{analogija s } G_s(s) \\ \text{(bez ZOH)}}} \underbrace{\frac{1}{T}\left(1 + b\frac{T\Omega}{2}\right)\left(1 - \frac{T\Omega}{2}\right)}_{\text{doprinos ZOH}} \qquad (4 - 30)$$

- Prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga u Ω - području prema (4 -22) i (4 - 30) glasi:

$$G_0(\Omega) = G_R(\Omega)G_s(\Omega) \qquad (4 - 31)$$

$$G_0(\Omega) = K_R' \frac{1 + T_I'\Omega}{T_I'\Omega} \frac{K_{z\Omega}}{T_i} \frac{\left(1 + b\frac{T\Omega}{2}\right)\left(1 - \frac{T\Omega}{2}\right)}{\left(1 + c\frac{T\Omega}{2}\right)T\Omega}, \qquad (4 - 32)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Konačni izraz nakon sređivanja glasi:

$$G_0(\Omega) = K_0 \frac{1}{T_I' T_i \Omega^2} \frac{(1 + T_I'\Omega)\left(1 + b\dfrac{T\Omega}{2}\right)\left(1 - \dfrac{T\Omega}{2}\right)}{1 + c\dfrac{T\Omega}{2}}, \qquad (4 - 33)$$

gdje je:

$$K_0 = \frac{K_R' K_{z\Omega}}{T} = K_R' K_s. \qquad (4 - 34)$$

- Uz dovoljno malo vrijeme uzorkovanja, prijenosna funkcija procesa u Ω - području može se zapisati kao:

$$G_0(\Omega) = K_0 \frac{1}{T_I' T_i \Omega^2} \frac{1 + T_I'\Omega}{1 + T_\Sigma^* \Omega} \qquad (4 - 35)$$

gdje je:

$$T_\Sigma^* = (c - b)\frac{T}{2} + \frac{T}{2}. \qquad (4 - 36)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Izraz je analogan izrazu $G_0(s)$ koji može poprimiti simetrične frekvencijske karakteristike otvorenog sustava.
- Kako je prema (4 - 26):

$$c - b = \frac{2T_\Sigma}{T} \qquad (4 - 37)$$

slijedi:

$$T_\Sigma^* = T_\Sigma + \frac{T}{2} \qquad (4 - 38)$$

- U izrazu (4 - 38) $\dfrac{T}{2}$ predstavlja doprinos ekstrapolatora nultog reda.

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Uz sljedeći izbor parametara regulatora:

$$T_I' = a^2 T_\Sigma^* \tag{4 - 39}$$

$$K_R' = \frac{1}{a}\frac{1}{K_s}\frac{T_i}{T_\Sigma^*} \tag{4 - 40}$$

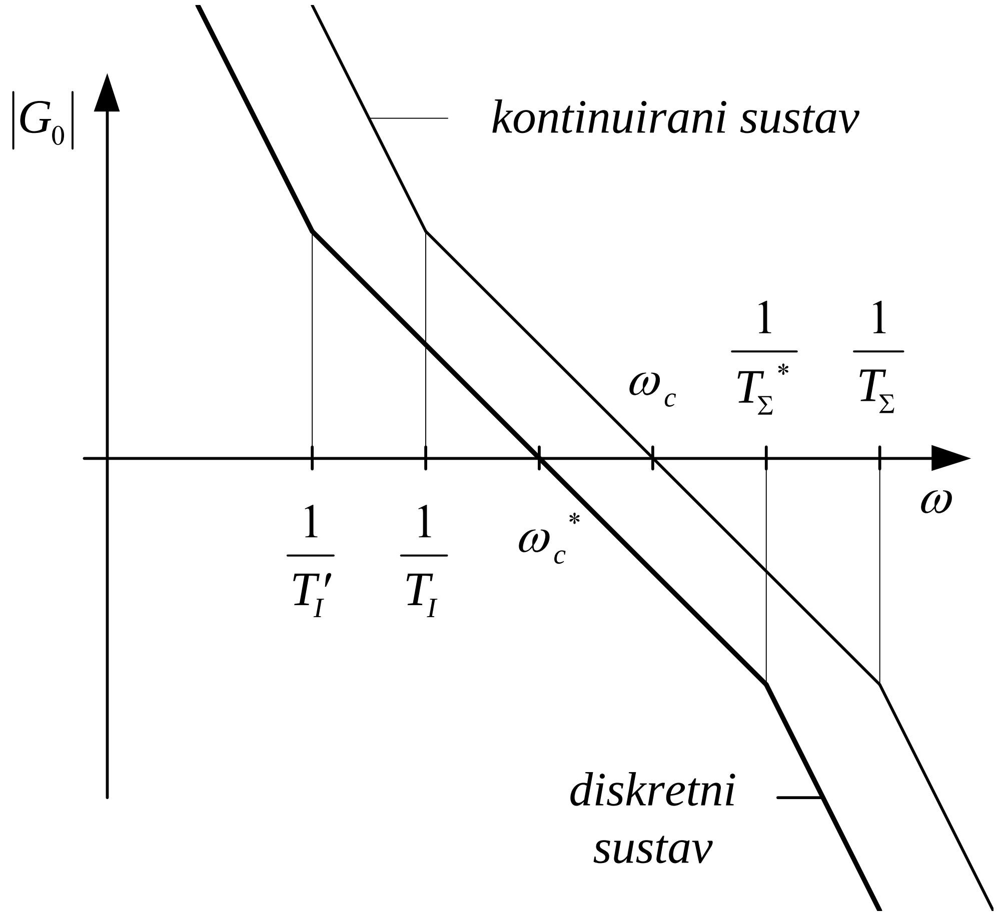
osigurane su simetrične kvazifrekvencijske karakteristike otvorenog sustava.

Pri čemu je:

$$\omega_c^* = \frac{1}{\sqrt{T_I' T_\Sigma^*}} = \frac{1}{a T_\Sigma^*} \text{ i } \omega_c^* < \omega_c \tag{4 - 41}$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Amplitudno-frekvencijska karakteristika prikazana je na slici 4.2.:



Sl. 4.2.

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu pravokutne integracije)

- Iz izraza (4 – 22), (4 – 39) i (4 – 40) za parametre PI regulatora slijedi:

$$T_I' = T_I + \frac{T}{2} \Rightarrow T_I = T_I' - \frac{T}{2} = a^2\left(T_\Sigma + \frac{T}{2}\right) - \frac{T}{2} \qquad (4 - 42)$$

$$K_R = K_R' \frac{T_I}{T_I + \frac{T}{2}} = \frac{1}{a}\frac{1}{K_s}\frac{T_i}{T_\Sigma^*}\frac{a^2 T_\Sigma^* - T/2}{a^2 T_\Sigma^*}. \qquad (4 - 43)$$

- Uz izbor $a = 2$ dobije se:

$$T_I = 4T_\Sigma + \frac{3}{2}T \qquad (4 - 44)$$

$$K_R = \frac{1}{2}\frac{1}{K_s}\frac{T_i}{T_\Sigma}\left(\frac{T_\Sigma}{T_\Sigma + \frac{T}{2}}\frac{4T_\Sigma + \frac{3}{2}T}{4T_\Sigma + 2T}\right) \qquad (4 - 45)$$

Parametri diskretnog PI regulatora prema simetričnom optimumu (uz primjenu trapezne integracije)

- Primjenom bilinearne transformacije (4 – 8) na izraz (4 – 5) za prijenosnu funkciju diskretnog PI regulatora dobivenog prema Tustinovoj relaciji dobije se:

$$G_R(\Omega) = K_R \frac{1+T_I\Omega}{T_I\Omega}, \qquad (4 - 46)$$

- Izraz je analogan prijenosnoj funkciji PI regulatora u s - području. Prema tome slijedi:

$$T_I = a^2 T_\Sigma^*, \qquad (4 - 47)$$

$$K_R = \frac{1}{a}\frac{1}{K_s}\frac{T_i}{T_\Sigma^*}. \qquad (4 - 48)$$

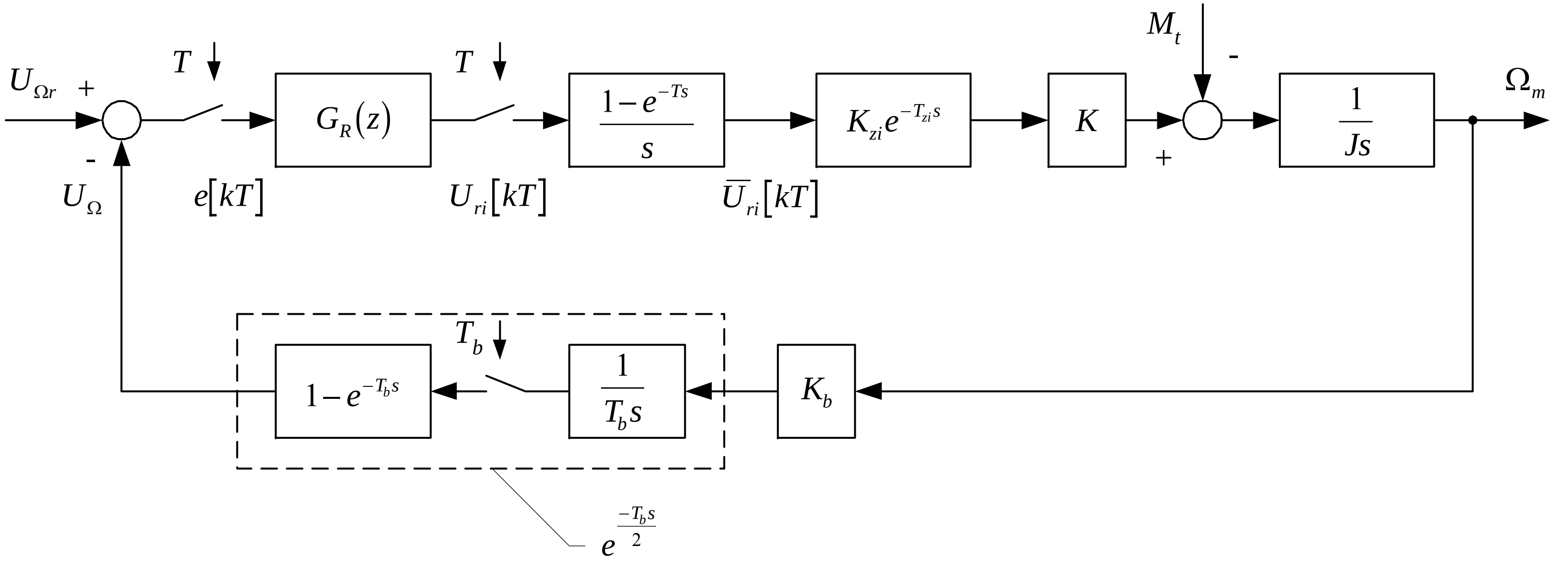
Uz izbor $a = 2$ dobije se:

$$T_I = 4T_\Sigma + 2T, \qquad (4 - 49)$$

$$K_R = \frac{1}{2}\frac{1}{K_s}\frac{T_i}{T_\Sigma}\left(\frac{T_\Sigma}{T_\Sigma + T/2}\right) \qquad (4 - 50)$$

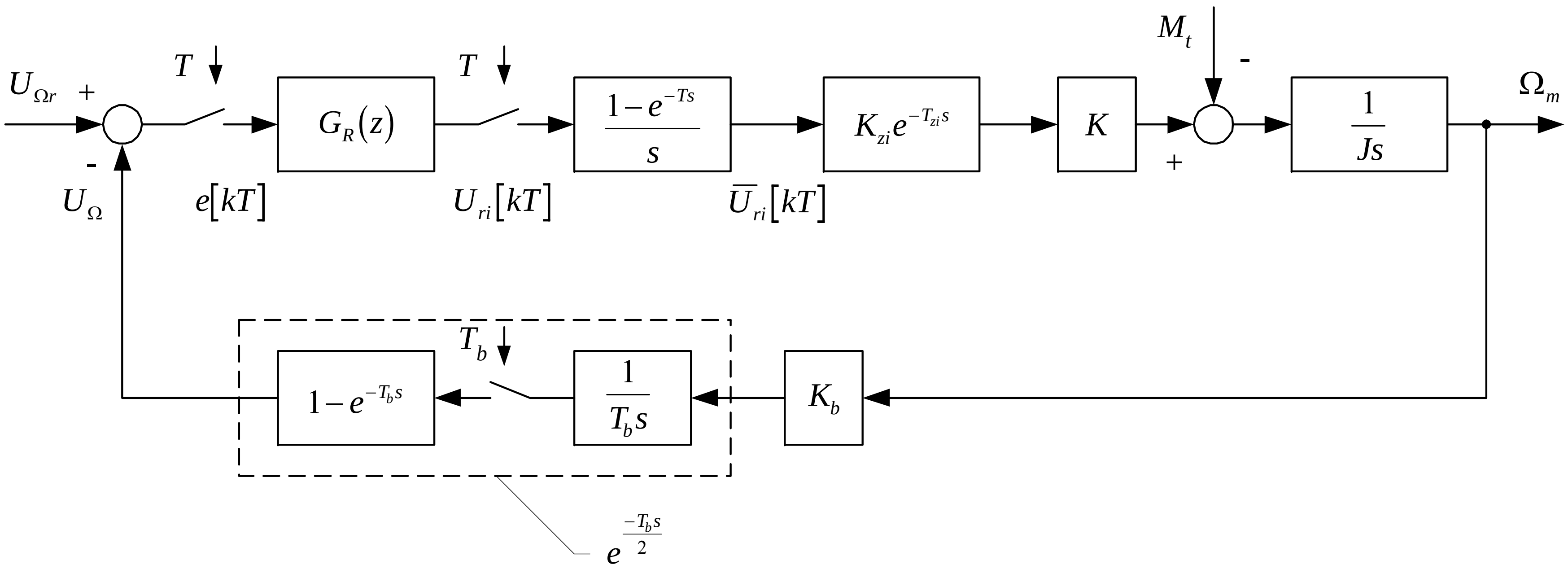
Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona

- Pretpostavlja se da je armaturni krug motora napajan iz trofaznog punoupravljivog mosnog spoja tiristora.
- Sinteza sustava upravljanja brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona provedena je uz sljedeće uvjete:
  - upravljanje strujom armature vremenski je optimalno;
  - mjerenje brzine vrtnje obavlja se pomoću inkrementalnog davača impulsa sinkronizirano s impulsima propaljivanja tiristora.



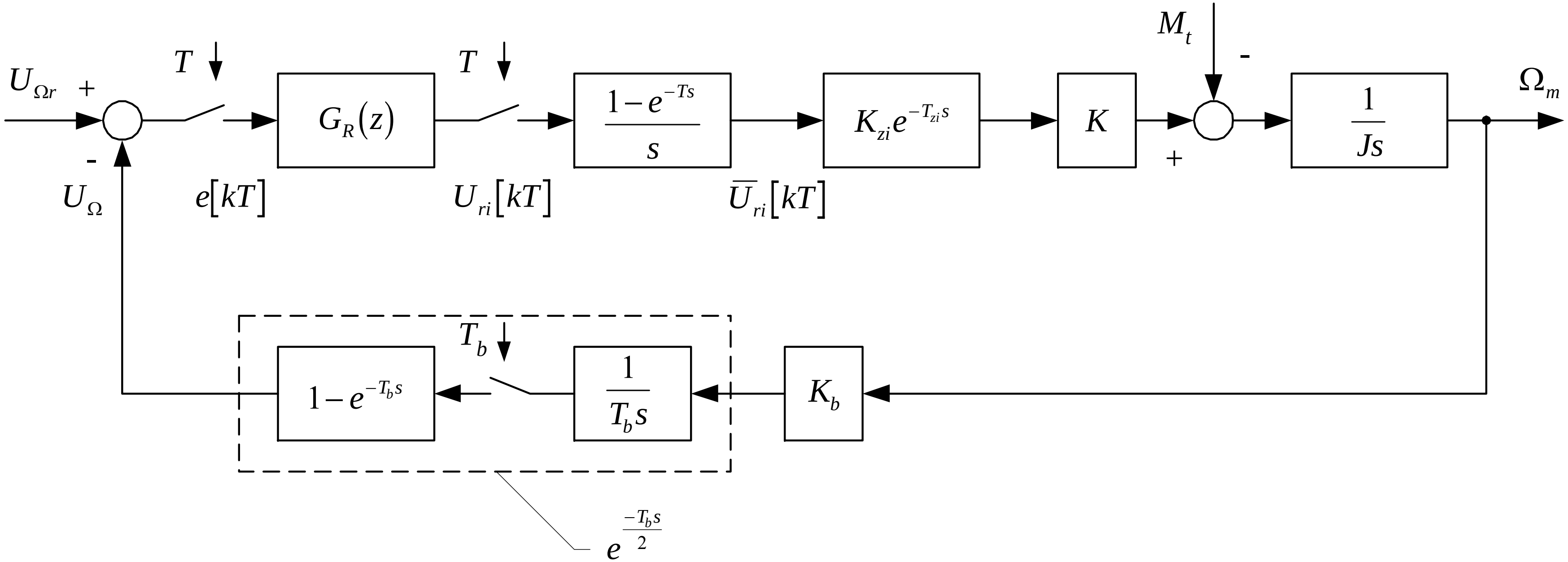
Sl. 4.3.

Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona



- Pokazuje se da je (Sl. 4.3.):
  - nadomjesno mrtvo vrijeme vremenski optimalnog sustava upravljanja strujom armature $T_{zi} = T$,
  - nadomjesno mrtvo vrijeme digitalnog mjernog člana brzine vrtnje zasnovanog na P/T postupku $T_{mb} = T_b / 2 = T / 2$.

Upravljanje brzinom vrtnje istosmjernog elektromotornog pogona



- Prema tome, slijedi da je:

$$T_\Sigma = \frac{3}{2}T, \qquad (4 - 51)$$

- Odnosno za vremensku konstantu T_Σ^* dobije se:

$$T_\Sigma^* = \frac{3}{2}T + \frac{T}{2} = 2T. \qquad (4 - 52)$$

Primjena pravokutne integracije

- Parametri PI regulatora, prema (4 - 42), (4 - 44) i (4 - 51) i prema slici 4.3:

$$T_I = a^2 2T - \frac{T}{2}. \quad (4 - 53)$$

$$K_R = \frac{1}{a} \frac{K_a K}{K_{zi} K_b} \frac{T_m}{2T} \frac{a^2 2T - T/2}{a^2 2T}. \quad (4 - 54)$$

- Uz izbor $a = 2$, dobije se:

$$T_I = 7,5T, \quad (4 - 55)$$

$$K_R = \frac{1}{2} \frac{K_a K}{K_{zi} K_b} \frac{T_m}{2T} \frac{7,5}{8}. \quad (4 - 56)$$

Primjena trapezne integracije

- Parametri PI regulatora, prema (4 - 47), (4 - 48) i (4 - 51) i prema slici 4.3:

$$T_I = a^2 2T. \qquad (4 - 57)$$

$$K_R = \frac{1}{a}\frac{K_a K}{K_{zi} K_b}\frac{T_m}{2T}. \qquad (4 - 58)$$

- Uz izbor $a = 2$, dobije se:

$$T_I = 8T, \qquad (4 - 59)$$

$$K_R = \frac{1}{2}\frac{K_a K}{K_{zi} K_b}\frac{T_m}{2T}. \qquad (4 - 60)$$