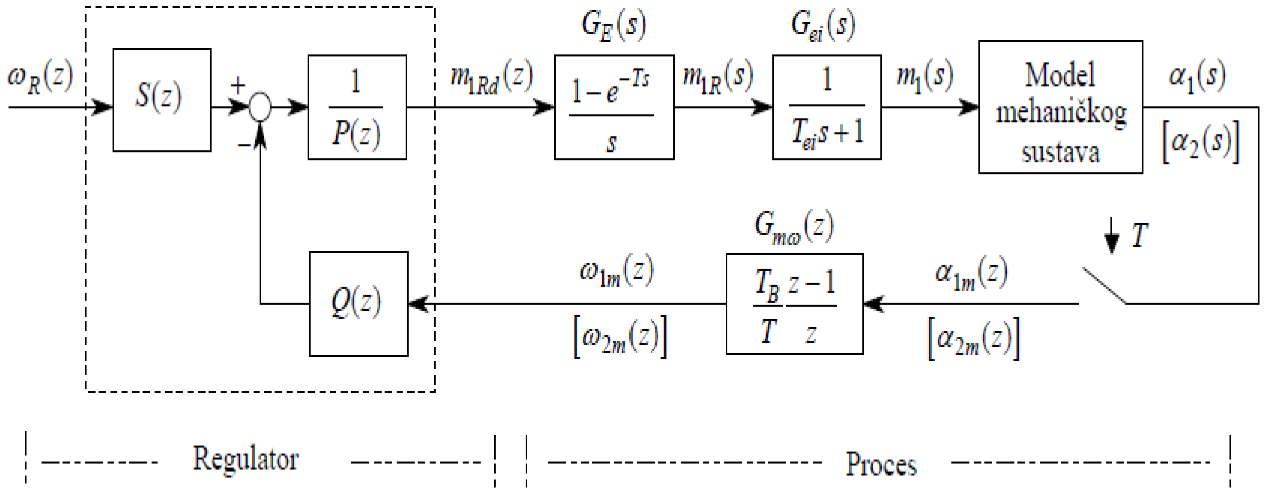
RJEŠENJE POLINOMSKE DIOPHANTOVE JEDNADŽBE- NUMERIČKI POSTUPCI

Uvod

Sustav regulacije koji je upravljan polinomskim regulatorom.



Slika 1 Regulacijski sustav

Upravljačka veličina regulatora:

$$m_{1Rd}(z) = \frac{S(z)}{P(z)} w_R(z) - \frac{Q(z)}{P(z)} w_m(z) \quad (1)$$

$$G_{p\alpha}(z) = \frac{\alpha_{2m}(z)}{m_{1Rd}(z)} = G_E G_{ei} G_{21} G_{\alpha w}(z) \quad (2)$$

$$G_{pw}(z) = \frac{w_{2m}(z)}{m_{1Rd}(z)} = G_{mw}(z) G_{p\alpha}(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3)$$

Prijenosna funkcija direktne grane kojoj je ulaz upravljačka veličina, a izlaz brzina okretanja na strani tereta.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4}{a_0 z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5}, a_5 = 0 \quad (4)$$

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_{clw}(z) = \frac{w_{2m}(z)}{w_R(z)} = \frac{B(Z)S(z)}{A(Z)P(z)+B(Z)Q(z)} = \frac{A_0(z)B_M(z)}{A_0(z)A_M(z)} \tag{5}$$

Modelska prijenosna funkcija:

$$G_M(z) = \frac{B_M(z)}{A_M(z)} \tag{6}$$

Red polinoma A_M je određen:

$$deg\, A_M = deg\, B_M + 1 = deg\, A = 5 \tag{7}$$

$$B_M(z) = \frac{A_M(z)}{B(1)} B(z) \tag{8}$$

Polinom $S(z)$ polinomskog regulatora se izračunava uvrštenjem (8) u (5)

$$S(z) = \frac{A_M(z)}{B(1)} A_0(z) \tag{9}$$

Polinomi P(Z) i Q(z) se računaju iz Diophantove jednadžbe:

$$A(z)P(z) + B(z)Q(z) = A_0(z)A_M(z) \tag{10}$$

Red regulatora najnižeg reda dobije se uz izbor:

$$\deg P = degQ = degS = degA_0 = 5 \tag{11}$$

Uvrštavanjem polinoma , sređivanjem i izjednačavanjem koeficijenata uz iste potencije, Diophantova jednadžba prelazi u sustav linearnih algebarskih jednadžbi.

Matrični zapis Diophantove jednadžbe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_4-1 & a_3-1 & a_2-1 & a_1-1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_5-a_1 & a_4-a_1 & a_3-a_1 & a_2-a_1 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ -a_2 & a_5-a_2 & a_4-a_2 & a_3-a_2 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_3 & -a_3 & a_5-a_3 & a_4-a_3 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ -a_4 & -a_4 & -a_4 & a_5-a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ -a_5 & -a_5 & -a_5 & -a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{c1}-a_1 \\ a_{c2}-a_2 \\ a_{c3}-a_3 \\ a_{c4}-a_4 \\ a_{c5}-a_5+1 \\ a_{c6}+a_1 \\ a_{c7}+a_2 \\ a_{c8}+a_3 \\ a_{c9}+a_4 \\ a_{c10}+a_5 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{12})$

Uz uvrštenje $a_5 = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_4-1 & a_3-1 & a_2-1 & a_1-1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ -a_1 & a_4-a_1 & a_3-a_1 & a_2-a_1 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ -a_2 & -a_2 & a_4-a_2 & a_3-a_2 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_3 & -a_3 & -a_3 & a_4-a_3 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ -a_4 & -a_4 & -a_4 & -a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{c1}-a_1 \\ a_{c2}-a_2 \\ a_{c3}-a_3 \\ a_{c4}-a_4 \\ a_{c5}+1 \\ a_{c6}+a_1 \\ a_{c7}+a_2 \\ a_{c8}+a_3 \\ a_{c9}+a_4 \\ a_{c10} \end{bmatrix} \quad \mathbf{(13)}$$

Koeficijenti a_{ci} na desnoj strani jednadžbe su koeficijenti karakterističnog polinoma zatvorenog kruga sustava.

$$A_c(z) = A_0(z)\, A_M(z) \qquad \mathbf{(14)}$$

Diophantska jednadžba se može kraće zapisati:

$$Ax = b \qquad \mathbf{(15)}$$

Regulator sadrži integrator te zbog toga vrijedi:

$$P(1) = 0 \qquad \mathbf{(16)}$$

Iz relacije (15) se dobije preostali parametar regulatora :

$$p_5 = -(1 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \tag{17}$$

Rješavanje matrične jednadžbe

Metode rješavanja sustava linearnih jednadžbi mogu se podijeliti u dvije osnovne skupine:

- Direktne metode - izračunavaju potpuno točan rezultat u konačnom broju koraka za bilo koji sustav linearnih jednadžbi koji ima rješenje. Međutim, ozbiljan nedostatak direktnih metoda su neprihvatljivo loše performanse u pogledu vremena i prostora potrebnog za izračun složenijih sustava. Metode koje spadaju u ovu skupinu su Cramerovo pravilo, Gaussova eliminacija, LR faktorizacija, Gauss-Jordanova metoda, Thomasov algoritam...
- Iterativne metode - u pravilu ne mogu izračunati potpuno točan rezultat u konačnom broju koraka, već su zamišljene tako da kreću od nekog pretpostavljenog rješenja i sa svakim korakom smanjuju za neku vrijednost udaljenost do točnog rješenja, odnosno pogrešku rješenja (ukoliko iterativni postupak konvergira). Izračun se zaustavlja u pravilu kada je pogreška rješenja manja od neke specificirane prihvatljive vrijednosti. Nedostatak im je u tome što nisu primjenjive na bilo koji problem koji se može izraziti sustavom linearnih jednadžbi, odnosno postoje sustavi linearnih jednadžbi za koje se ove metode uopće neće približavati točnom rješenju, odnosno za koji će divergirati. U ovu skupinu spadaju Jacobijeva metoda, Gaus-Seidelova...

Matrična jednadžba kakva je Diophantska može se riješiti na način da se pronađe inverz krajnje lijeve matrice A te se cijela jednadžba slijeva pomnoži s A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = inv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_4 - 1 & a_3 - 1 & a_2 - 1 & a_1 - 1 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \\ -a_1 & a_4 - a_1 & a_3 - a_1 & a_2 - a_1 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \\ -a_2 & -a_2 & a_4 - a_2 & a_3 - a_2 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -a_3 & -a_3 & -a_3 & a_4 - a_3 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ -a_4 & -a_4 & -a_4 & -a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_{c1} - a_1 \\ a_{c2} - a_2 \\ a_{c3} - a_3 \\ a_{c4} - a_4 \\ a_{c5} + 1 \\ a_{c6} + a_1 \\ a_{c7} + a_2 \\ a_{c8} + a_3 \\ a_{c9} + a_4 \\ a_{c10} \end{bmatrix}$$

(18)

,odnosno

$$x = A^{-1} b \tag{19}$$

Takav način rješavanja nije uobičajen jer se s lakšeg problema rješavanja sustava linearnih jednadžbi prešlo na teži problem određivanja inverza matrice i množenje matrice i vektora.

Jednostavniji način je svođenje sustava na ekvivalentni sustav s istim rješenjem koji ima lakše vidljiva rješenja te se stoga primjenjuju gore navedene metode.

U nastavku je razmatran opći sustav:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{20}$$

odnosno $Ax = b$ gdje je :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{21}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{23}$$

a razmatranja provedena ovdje mogu se primjeniti i na konkretan primjer Diophantske jednadžbe.

Gaussova eliminacija

Gaussovim eliminacijama sa zamjenama redaka odnosno pivotiranje može se riješiti svaki linearni sustav jednadžbi kojemu je matrica kvadratna i regularna. U praksi je parcijalno pivotiranje nužno i zbog numeričke stabilnosti.

Parcijalno pivotiranje se vrši tako da se u prvom stupcu ispod ključnog elementa nađe element koji je maksimalan po apsolutnoj vrijednosti, tj. nađe se:

$$|a_{k1}| = max_{i=1,\dots,n}|a_{i1}| \tag{24}$$

Tada se zamijene prva i k-ta jednadžba i novi a_{11} se uzima kao ključni element. Zatim se prva jednadžba redom množi s

$$-m_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}},\ i = 1, 2, \dots, n \tag{25}$$

i dodaje se redom drugoj, trećoj, n-toj jednadžbi sustava. Nakon sređivanja prvog stupca, postupak se ponavlja na matrici koja se dobije ako se izostavi prvi redak i prvi stupac. Postupak se nastavlja sve dok se ne dobije gornje trokutasti linearni sustav. Treba obratiti pažnju i na to da se transformiranjem matrice A mijenja i vektor b. Zabranjeno je također i množiti i dijeliti redak matrice proizvoljnim brojem jer parcijalno pivotiranje u tom slučaju nema smisla.

Nakon toga se vrši povratna supstitucija. Nakon Gaussovih eliminacija sustav poprima oblik:

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \tag{26}$$

Najdonja jednadžba ima jednu nepoznanicu te je njeno rješenje trivijalno. Gornja jednadžba ima dvije nepoznanice, ali jedna od nepoznanica je nepoznanica koja je izračunata u prethodnoj jednadžbi te stoga i ta jednadžba ima jednu nepoznanicu. Svaka gornja jednadžba sadrži jednu više nepoznanicu, ali n-1 nepoznanica je izračunata u prethodnim jednadžbama te se na taj način rješava n jednadžbi s jednom nepoznanicom.

LR faktorizacija

U praksi se inače ne primjenjuje Gaussove eliminacija već LR faktorizacija jer ima manji broj operacija kojima rješava linearni sustav jednadžbi što je u biti i Diophantova jednadžba.

LR faktorizacija matrice A:

$$A = LR \tag{27}$$

L je donje trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali, a R je gornje trokutasta matrica. Onda se linearni sustav

$$Ax = LRx = b, \tag{28}$$

rješava kao dva jednostavna linearna sustava. Označi li se $Rx = y$, sustavi su

$$Ly = b, \quad Rx = y \tag{29}$$

Prvi sustav je donje trokutasti, a drugi je gornje trokutasti. I ovdje se kao i kod Gaussovih eliminacija primjenjuje parcijalno pivotiranje. Umjesto matrice A faktorizira se permutirana matrica A, na način da bude PA, pri čemu je P matrica permutacije. Matrica permutacije u svakom retku i stupcu ima točno jednu jedinicu. Na početku procesa ona je jednaka jediničnoj matrici.

Na primjer, ako u LR faktorizaciji sustava s 3 jednadžbe zamijenimo prvi i treći redak, pa onda (trenutno) drugi i treći redak, onda će se matrica premutacije mijenjati na slijedeći način:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \textbf{(30)}$$

Umjesto pamćenja matrice premutacije, obično se pamti vektor p u kojemu je pozicija jedinice u odgovarajućem retku matrice. Ista permutacija zapamćena kao vektor bila bi:

$$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \textbf{(31)}$$

Na kraju je,

$$PA = LR \quad \textbf{(32)}$$

Sustav Ax = b se onda rješava tako da se pomnoži prvo s P. Dobiva se:

$$PAx = LRx = Pb \quad \textbf{(33)}$$

pri čemu je $b^{'} = Pb$ vektor koji ima permutirane komponente (permutacija P) vektora b. Postupak se na nastavlja s $LRx = b'$.

Jacobijeva metoda

Ako se matrica A se rastavi na sljedeći način

$$A = L + D + U \quad \textbf{(34)}$$

gdje *U* predstavlja strogo gornji trokutasti dio matrice *A* (bez dijagonale), *L* predstavlja strogo donji trokutasti dio matrice *A* (bez dijagonale), a *D* predstavlja dijagonalu matrice *A*. Tada se jednadžba

$$Ax = b \quad \textbf{(35)}$$

može zapisati u obliku:

$$(L + U + D)x = b \quad \textbf{(36)}$$

Ako ovu jednadžbu raspošemo tako da Dx ostane na lijevoj strani dolazi se do izraza:

$$Dx = b - (L + U)x \tag{37}$$

Ako gornju jednadžbu pomnožimo matricom D^{-1} (inverz dijagonalne matrice matrice *D se lako izračuna*) s lijeve strane dolazi se do izraza:

$$x = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x \tag{38}$$

Predpostavlja se da pri rješavanju ovakvog sustava početna matrica *A* nema nula na dijagonali, jer inače nije moguće izračunati D^{-1}. Ako matrica *A* ima nula na dijagonali potrebno je izvršiti neke elementarne transformacije nad matricom *A* tako da na na njezinoj dijagonali ostanu samo elementi različiti od nule, naravno iste transformacije je potrebno vršiti i nad matricama b i x. Iz prethodne jednadžbe jednostavno dobijamo Jacobievu iterativnu metodu u obliku:

$$x_{k+1} = D^{-1}b - D^{-1}(L + U)x_k \tag{39}$$

,gdje je *k* označava korak iteracije.

Do izraza za Jacobijev iterativni postupak može se doći i tako da i-tu jednadžbu zapišemo u sljedećem obliku:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = b_j , \tag{40}$$

Ako se *i*-ta jednadžba riješi po x_i, uz pretpostavku da ne mijenjaju ostale vrijednosti x, dolazi se do sljedeće relacije:

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_j}{a_{i,j}}, \tag{41}$$

Gornja jednadžba pretpostavka je za Jacobijevu iterativnu metodu u obliku:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j \neq i} a_{i,j} x_i^{(k)}}{a_{i,j}}, \tag{42}$$

gdje je k korak iteracije.

Iz gornje jednadžbe se vidi da se jednadžbe mogu rješavati bilo kojim redoslijedom jer njihovo riješavanje ne ovisi o rezultatima iz istog koraka iteracije. Iz ovog razloga se Jacobieva iterativna metoda još naziva metodom istovremenih promjena (*engl. method of simultaneous displacements*), jer se jednadžbe u principu mogu rješavati istovremeno (paralelno).

Jacobijeva metoda se može opisati prikladnim pseudokodom:

```
    Rješenje
Jacobi(A,b,x⁰,zadani_uvjet_konvergencije)
    {
      prethodni_x = x0
      radi
      {
        za(i=1..n)  // iteriraj po svim jednadžbama
        {
          x[i]=0;
          za(j=1..n,j≠i)   // rješi svaku jednadžbu
          {
            x[i] += A[i,j]*prethodni_x[j]
          }
          x[i] = (b[i]-x[i])/a[i,i]
        }
        prethodni_x = x
        izračunaj(uvjet_konvergencije)
      }

dok(uvjet_konvergencije>zadani_uvjet_konvergencije)
      vrati x
    }
```

Gauss-Seidelova metoda

Ako se uzme Jacobijeva metoda, ali se doda pravilo da se jednadžbe obavezno uzimaju jedna iza druge u nizu, te se ranije izračunate nepoznanice u *k*-tom koraku koriste čim su dostupne, dobiva se Gauss-Seidelova metoda definirana jednadžbom izračunavanja bilo koje nepoznanice x_i u *k*-tom koraku iteracije:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right]}{a_{ii}} \qquad \textbf{(43)}$$

Gauss-Seidelova metoda se može opisati prikladnim pseudokodom:

```
Gauss-Seidel(A,b,x⁰,zadani_uvjet_konvergencije)
{
  radi
  {
    za(k=1,2...)
    {
      za(i=1..n)
      {
           Γ=0
           Za  (j=1,2,...,i-1)

                r = r + a_ij x_j^(k)

           Za  (j=i+1,...n)

                r = r + a_ij x_j^(k-1)

          x_i^(k) = (b_i − r) / a_ii

      }
    }

  }
  izračunaj(uvjet_konvergencije)
dok(uvjet_konvergencije>zadani_uvjet_konvergencije)
  vrati x
}
```

Konvergencija

Da bi se odredilo da li će navedene iterativne metode sigurno kovergirati za neki sustav linearnih jednadžbi, dovoljno je promatrati sadržaj matrice ***A***. Metode će sigurno konvergirati ako je zadovoljen barem jedan od sljedeća dva kriterija:

- Matrica ***A*** je strogo dijagonalno dominantna po retcima.
- Matrica ***A*** je slabo dijagonalno dominantna po retcima i ireducibilna.

S tim da vrjede sljedeće definicije:

- **Strogo dijagonalno dominantna matrica** je matrica *A* za koju je apsolutna vrijednost svake vrijednosti na dijagonali veća od sume apsolutnih vrijednosti svih ostalih vrijednosti u tom retku. Za strogo dijagonalno dominantnu matricu vrijedi:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ , za\ sve\ i \qquad \textbf{(44)}$$

- **Slabo dijagonalno dominantna matrica** je matrica *A* za koju je apsolutna vrijednost svake vrijednosti na dijagonali veća ili jednaka od sume apsolutnih vrijednosti svih ostalih vrijednosti u tom retku osim za jedan redak u kojem je vrijednosti na dijagonali veća od sume apsolutnih vrijednosti svih ostalih vrijednosti u tom retku. Za slabo dijagonalno dominantnu matricu vrijedi:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \ , za\ najmanje\ jedan\ i \qquad \textbf{(45)}$$

- **Ireducibilna matrica** je matrica za koju ne postoji takva permutacijska matrica da vrijedi:

$$PAP^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right], \qquad \textbf{(46)}$$

Pri čemu su A11 i A22 kvadratni blokovi reda manjeg od n, tj. Matrica je ireducibilna ako ne postoji matrica permutacija P za koju je PAP^T blok gornjetrokutasta matrica.

Međutim ako matrica A ne zadovoljava navedene kriterije ne znači nužno da algoritam divergira jer su navedeni kriteriji dovoljni ali ne i nužni uvjeti.