

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna i vektorska modulacija

Do sada smo u području skalarnog upravljanja spomenuli

- pravokutnu modulaciju,
- modulaciju usporedbom nosećeg i modulirajućeg (upravljajućeg signala)
- i modulaciju reguliranjem struje izmjenjivača

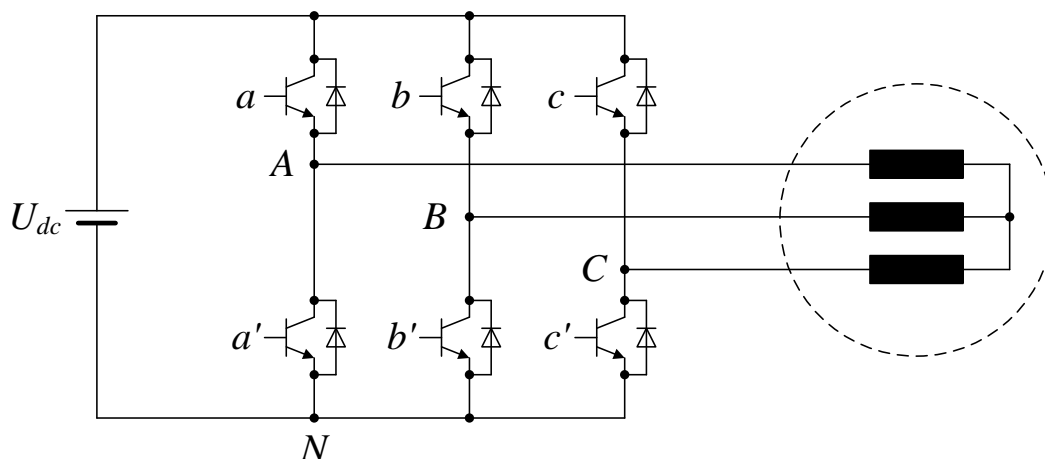
U sklopu vektorske regulacije detaljnije će biti izložena

- sinusna modulacija širine impulsa
- vektorska modulacija širine impulsa

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

- Struktura trofaznog izmjenjivača u mosnom spoju s utisnutim naponom prikazana je na sl.1. Cilj je oblikovanje **trofaznog izlaznog napona** te njegovo upravljanje kako po amplitudi tako i po frekvenciji.
- Oblik napona na izlazu iz pretvarača određuju **upravljački signali a, a', b, b', c i c'** .
- Kada je **gornji tranzistor u grani uključen** (a, b ili c je 1), **donji tranzistor u grani je isključen** (a', b' ili c' je 0).



Sl.1. Izmjenjivač s naponskim ulazom (utisnuti napon)

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

- Metoda sinusne modulacije širine impulsa zasniva se na usporedbi visokofrekvencijskog trokutastog signala nosioca u_{tr} i niskofrekvencijskog referentnog signala u_{ref} .
- Pri tome frekvenciju izlaznog napona određuje frekvencija referentnog signala u_{ref} , dok frekvenciju sklapanja određuje frekvencija signala nosioca u_{tr} .
- Frekvencija i amplituda signala u_{tr} u pravilu se drže konstantnima.
- Da bi se dobio trofazni simetrični izlaz, isti signal nosilac u_{tr} uspoređuje se s tri sinusna referentna signala u_{ref} koja su međusobno pomaknuta 120° .
- Ovisno o odnosu između signala nosioca i referentnog signala za pojedinu fazu određuje se upravljački signal za tu fazu:
 - ako je $u_{ref} > u_{tr}$ gornji tranzistor u grani je uključen, a donji je isključen
 - ako je $u_{ref} < u_{tr}$ donji tranzistor u grani je uključen, a gornji je isključen

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

- Faktor amplitudne modulacije m_a definira se kao omjer vršne vrijednosti upravljačkog (referentnog) signala i vršne vrijednosti signala nosioca
- Faktor frekvencijske modulacije m_f definira se kao omjer frekvencije signala nosioca i frekvencije upravljačkog signala

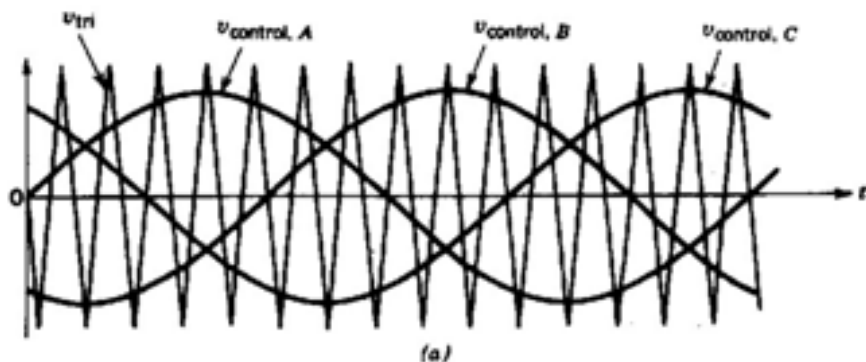
$$m_a = \hat{u}_{ref} / \hat{u}_{tr} \quad (1)$$

$$m_f = f_{tr} / f_{ref} \quad (2)$$

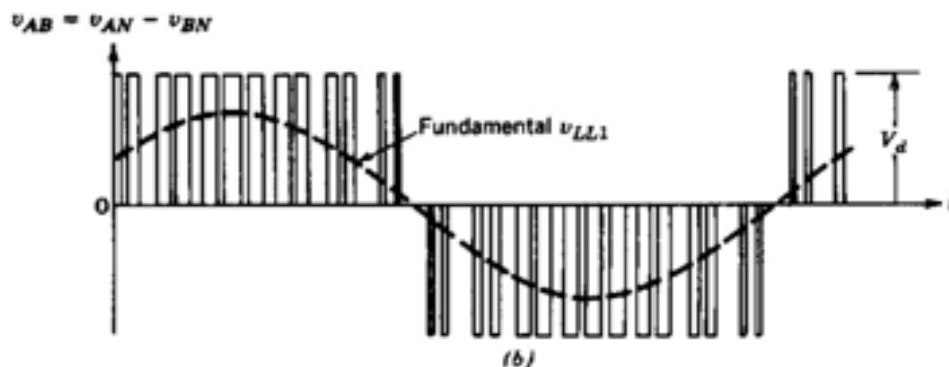
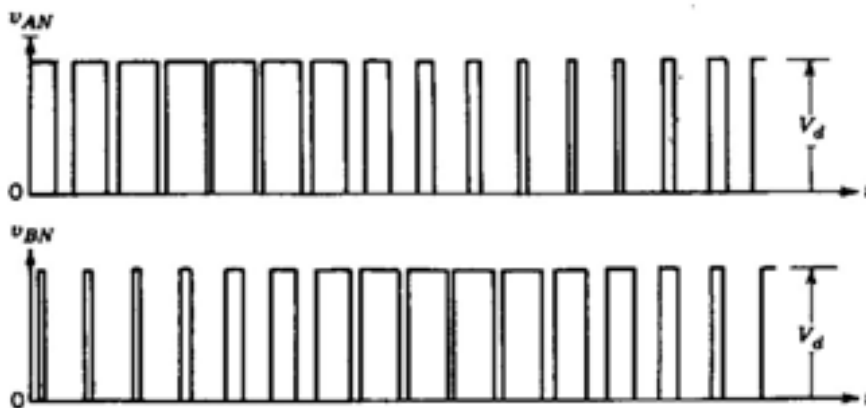
- Valni oblici faznog napona u_{AN} i u_{BN} , linijskog napona u_{AB} prikazani su na sl.2 za faktor frekvencijske modulacije $m_f = 15$ i faktor amplitudne modulacije $m_a = 0,8$.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija



Sl.2. Valni oblici napona kod sinusne modulacije



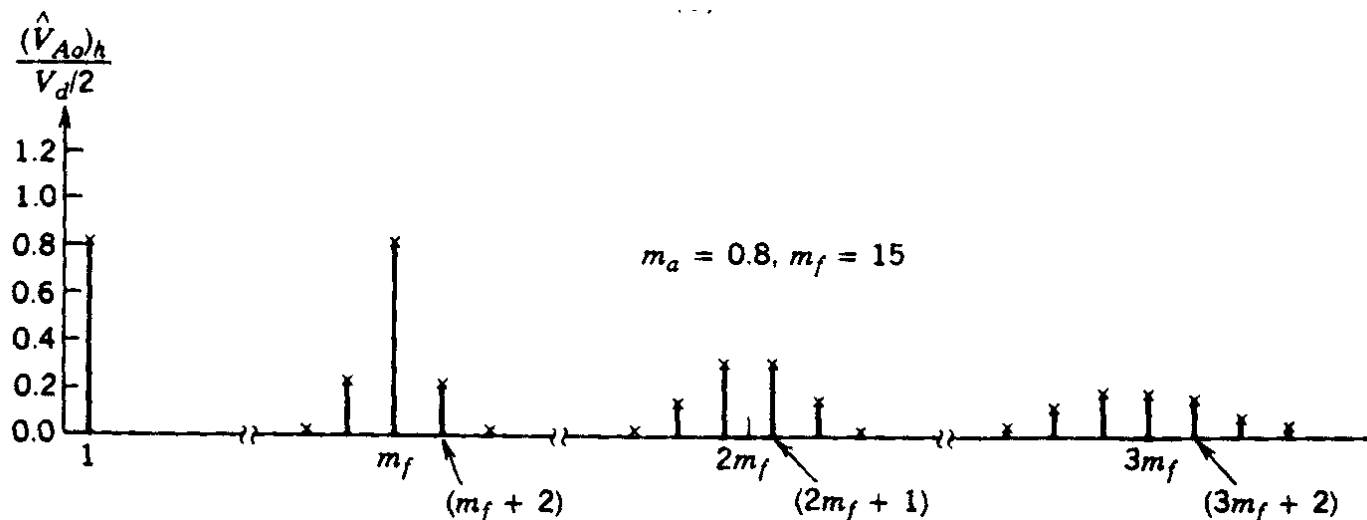
MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

Vršna vrijednost osnovnog harmonika faznog napona i efektivna vrijednost osnovnog harmonika linijskog napona iznose

$$(\hat{u}_a)_1 = m_a \cdot \frac{U_{dc}}{2} \quad (3)$$

$$(u_{ab})_1 = m_a \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot U_{dc}}{2 \cdot \sqrt{2}} \quad (4)$$



Harmonici "h" u odnosu na osnovni harmonik f1

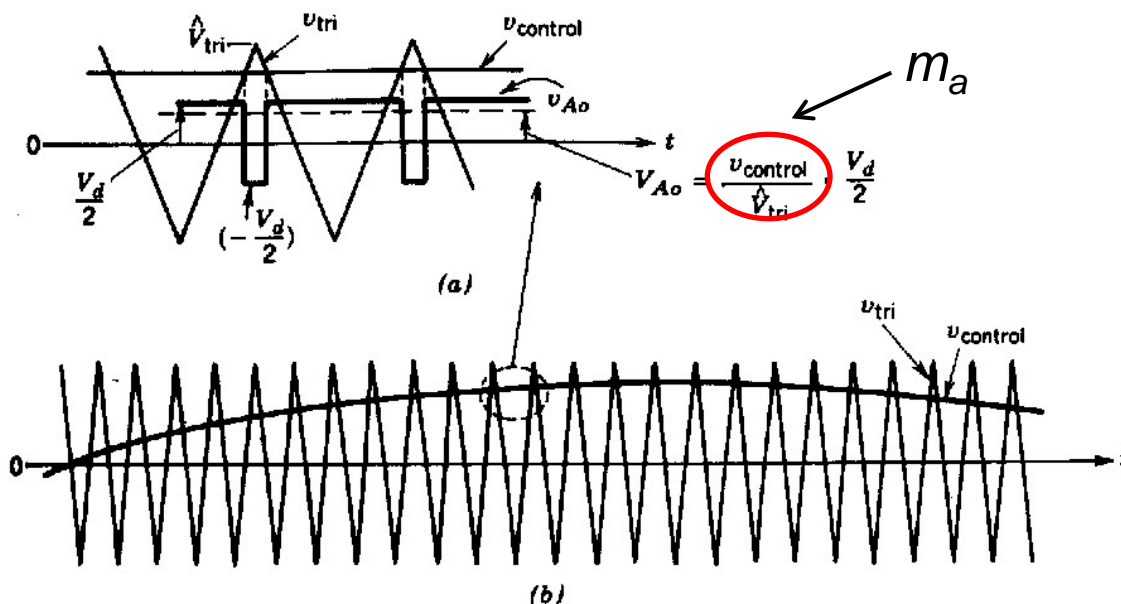
Sl.3. Harmonijski spektar izlaznog napona izmjenjivača prema sl.2.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

Na osnovi harmonijskog spektra linijskog napona u_{AB} moguće je doći do nekih važnih karakteristika (za faktor amplitudne modulacije $m_a \leq 1,0$)

- Uz pretpostavku da je m_f velik, u_{ref} se mijenja jako malo za vrijeme sklopne periode, tj. možemo ga uzeti konstantnim na sklopnoj periodi, sl.4.



Sl.4. Sinusna širinsko-impulsna modulacija b) i uvećani dio sklopne periode a)

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

- Zakon izveden na sl.4. može se primijeniti na pojedinoj sklopnoj periodi.
- Srednja vrijednost napona grane A se mijenja iz periode u periodu po zakonu po kojem se mijenja referentni signal u_{ref} .
- Dakle, za $m_a < 1,0$, amplituda osnovnog harmonika se mijenja linearno s m_a (linearno područje rada).
- Amplitude pojedinih harmonika su gotovo neovisne o m_f , iako m_f određuje frekvencije na kojima se harmonici javljaju:

$$f_h = (j \cdot m_f \pm k) \cdot f_1 \quad (5)$$

- Ako j ima neparnu (parnu) vrijednost, harmonici postoje jedino za parne (neparne) k . [1]
- Uglavnom m_f treba biti višekratnik od 3 kako bi se eliminirali najdominantniji harmonici u linijskom naponu.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

- Stoga, ako se mijenja frekvencija signala u_{ref} , potrebno je mijenjati i frekvenciju signala nosioca, u_{tr} kako bi m_f ostao neparan cijeli broj (sinkronizirana ŠIM) .
- Ako je $m_f > 21$, amplitude subharmonika, koji su posljedica asinkrone ŠIM su male.
- Stoga, ako je m_f velik, moguća je asinkrona ŠIM, gdje frekvenciju signala u_{tr} držimo konstantnom dok mijenjamo frekvenciju signala u_{ref} .
- Ako izmjenjivač napaja takav teret kakav je izmjenični motor, subharmonici koji se javljaju oko nulte frekvencije ili pak na samoj nultoj frekvenciji, iako male amplitude mogu rezultirati s velikim strujama što je nepoželjno.
- Stoga bi asinkronu ŠIM trebalo izbjegavati.
- Da bi se povećala amplituda osnovnog harmonika izlaznog napona u_{AN} iznad $m_a U_{dc}/2$. potrebno je povećati faktor amplitudne modulacije m_a iznad 1, što rezultira premodulacijom (eng. *Overmodulation*)

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – sinusna modulacija

- Kada izmjenjivač radi u području premodulacije, amplituda osnovnog harmonika ne ovisi linearno o m_a .
- U ovom nelinearnom području, amplituda osnovnog harmonika ovisi o m_f , a frekvencijski spektar izlaznog napona je znatno nepovoljniji u odnosu na linearno područje rada.
- Bez obzira na vrijednost m_f , za nelinearni režim rada preporučuje se sinkrona ŠIM.
- Za vrijeme premodulacije ($m_a > 1$), bez obzira na vrijednosti m_f , treba se pridržavati pravila koja vrijede kad m_f ima malu vrijednost

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- Trofazni izmjenjivač ima osam mogućih sklopnih stanja gornjih tranzistora u granama (donji tranzistori su komplementarni gornjima): šest aktivnih i dva nulta sklopna stanja.
- Iznosi faznih napona U_{AN} , U_{BN} i U_{CN} za svih osam sklopnih stanja tranzistora, uz simetričan teret i napon istosmjernog međukruga U_{dc} , dani su u tablici 1 .

Tablica 1. Stanja sklopki izmjenjivača pri vektorskoj modulaciji

c	b	a	U_{AN}	U_{BN}	U_{CN}
0	0	0	0	0	0
0	0	1	$\frac{2U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$
0	1	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{2U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$
0	1	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{2U_{dc}}{3}$
1	0	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{2U_{dc}}{3}$
1	0	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{2U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$
1	1	0	$-\frac{2U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{3}$
1	1	1	0	0	0

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- Vektorska modulacija temelji se na prikazu faznih napona U_{AN} , U_{BN} i U_{CN} pomoću rezultirajućeg vektora u dvofaznom α - β sustav .
- Transformacija vektora napona iz trofaznog a - b - c sustava u dvofazni α - β ostvaruje se pomoću slijedećih izraza, Clarke transformacija (3→2).

$$\boxed{U_{\alpha} = U_a} \quad \boxed{U_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(U_b - U_c)} \quad (6)$$

- Iznosi α i β komponente napona za svih osam sklopnih stanja dani su u tablici 2 .
- Svako sklopno stanje moguće je predstaviti s odgovarajućim vektorom u α - β koordinatnom sustavu (šest aktivnih vektora i dva nul -vektora)
- Šest aktivnih vektora dijele α - β koordinatni sustav na šest sektora

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

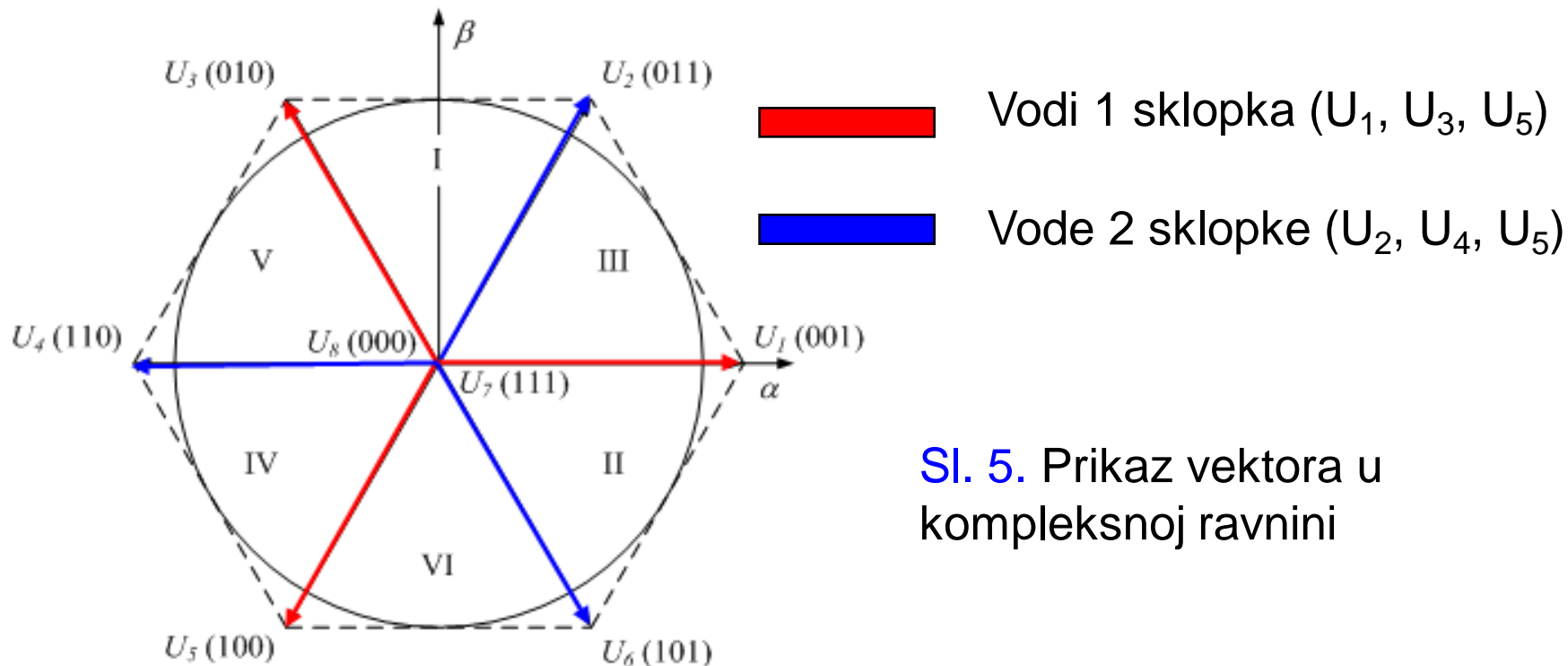
Tablica 2. Iznos α i β komponente napona za određeno sklopno stanje

c	b	a	U_{α}	U_{β}	vektor
0	0	0	0	0	U_8
0	0	1	$\frac{2U_{dc}}{3}$	0	U_1
0	1	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_3
0	1	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_2
1	0	0	$-\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_5
1	0	1	$\frac{U_{dc}}{3}$	$-\frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}$	U_6
1	1	0	$-\frac{2U_{dc}}{3}$	0	U_4
1	1	1	0	0	U_7

- Vrhovi aktivnih vektora tvore pravilni šesterokut sa stranicama duljine $\frac{2U_{dc}}{3}$, dok su nul-vektori smješteni u ishodištu tog šesterokuta.
- Raspored aktivnih i pasivnih vektora u kompleksnoj ravnini prikazan je na slici 5.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – **vektorska modulacija**

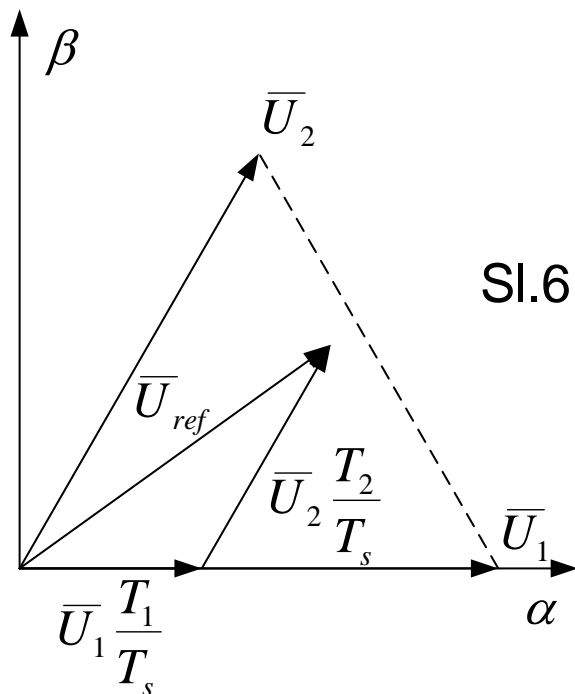


Sl. 5. Prikaz vektora u kompleksnoj ravnini

- Zadatak vektorske modulacije je da **aproksimira referentni vektor napona U_{ref}** odgovarajućom kombinacijom dva susjedna aktivna vektora i nul-vektora.
- Na sl.6. prikazan je **referentni vektor napona u sektoru III** i **aktivni vektori U_1 i U_2**

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija



Sl.6 Aproksimacija referentnog vektora napona U_{ref}

- Za svaki kratki period T_s srednja vrijednost na izlazu iz izmjenjivača treba biti jednaka srednjoj vrijednosti referentnog vektora napona U_{ref}

$$\boxed{\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} U_{ref} dt = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_1} U_1 dt + \frac{1}{T_s} \int_{T_1}^{T_1+T_2} U_2 dt = U_1 \frac{T_1}{T_s} + U_2 \frac{T_2}{T_s}} \quad (7)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- T_1 i T_2 predstavljaju vrijeme trajanja aktivnog vektora U_1 i U_2 , pri čemu mora biti zadovoljen uvjet $T_1 + T_2 \leq T_s$
- Ako se referentni vektor napona U_{ref} sporo mijenja unutar perioda T_s , izraz (7) nakon integracije poprima slijedeći oblik

$$U_{ref} = U_1 \frac{T_1}{T_s} + U_2 \frac{T_2}{T_s} \quad (8)$$

- Rastavljanjem referentnog i aktivnih vektora (U_1 i U_2) u izrazu (8) na realni i kompleksni dio dobije se (pogledati sl.5. i tablicu 2.)

$$U_\alpha + jU_\beta = \left(\frac{2}{3} U_{dc} \right) \frac{T_1}{T_s} + \left(\frac{U_{dc}}{3} + j \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}} \right) \frac{T_2}{T_s} \quad (9)$$

- Izjednačavanjem realnih i imaginarnih dijelova u (9) moguće je izraziti α i β komponentu napona

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

$$U_{\alpha} = \frac{2}{3} U_{dc} \frac{T_1}{T_s} + \frac{1}{3} U_{dc} \frac{T_2}{T_s} \quad (10)$$

$$U_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_{dc} \frac{T_2}{T_s} \quad (11)$$

- Iz izraza (10) i (11) može se odrediti vrijeme trajanja aktivnih vektora U_1 i U_2 potrebno za aproksimaciju referentnog vektora napona

$$T_1 = T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} U_{\alpha} - U_{\beta} \right) \quad (12)$$

$$T_2 = T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_{\beta} \quad (13)$$

- Na identičan način određuju se vremena trajanja aktivnih vektora i za ostale sektore.
- Izrazi za određivanje trajanja aktivnih vektora za sve sektore prikazani su u tablici 3.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- Vrijeme t_1 predstavlja vrijeme trajanja aktivnog vektora U_1 , U_3 ili U_5 (vektori koji predstavljaju sklopno stanje kod kojeg je uključen jedan tranzistor), dok vrijeme t_2 predstavlja vrijeme trajanja aktivnog vektora U_2 , U_4 ili U_6 (vektori koji predstavljaju sklopno stanje kod kojih su uključena dva tranzistora).
- Zašto se uvode ova vremena? Budući da se želi u vremenu T_s dobiti “vremenski simetrično raspoređeno” vođenje sklopki, onda se trajanje određenog sklopnog stanja (aktivnog vektora) raspoređuje po toj logici.
- Pri tome se uzima u obzir da simetrija obuhvaća ravnomjeran raspored sklopnih stanja u vremenu T_s , a to znači stanja kad je uklopljen samo jedan tranzistor (U_1 , U_3 , U_5) i stanja kada su uklopljena dva tranzistora (U_2 , U_4 , U_6), [slika 7.](#)

SEKTOR	t_1	t_2
(III)T1 i T2	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta)$	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$
(I)T2 i T3	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta)$	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta)$
(V)T3 i T4	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta)$
(IV)T4 i T5	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta)$
(VI)T5 i T6	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta)$	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha - U_\beta)$
(II)T6 i T1	$T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} \frac{1}{2} (\sqrt{3}U_\alpha + U_\beta)$	$-T_s \frac{\sqrt{3}}{U_{dc}} U_\beta$

Tablica 3. Vremena trajanja sklopnih stanja u pojedinim sektorima

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- Nakon što se izračunaju vremena t_1 i t_2 , ostatak sklopne periode je namijenjen nultim vektorima U_8 i U_7 . Izrazi za t_1 i t_2 vrijede za sve tipove vektorske modulacije, dok smještaj nultih vektora U_8 i U_7 ovisi o tipu vektorske modulacije.
- Jednadžbe koje definiraju t_7 i t_8 su različite za svaku metodu, ali ukupno vrijeme trajanja nultog vektora mora zadovoljavati uvjet

$$t_{7,8} = T_s - T_1 - T_2 = t_7 + t_8 \quad (14)$$

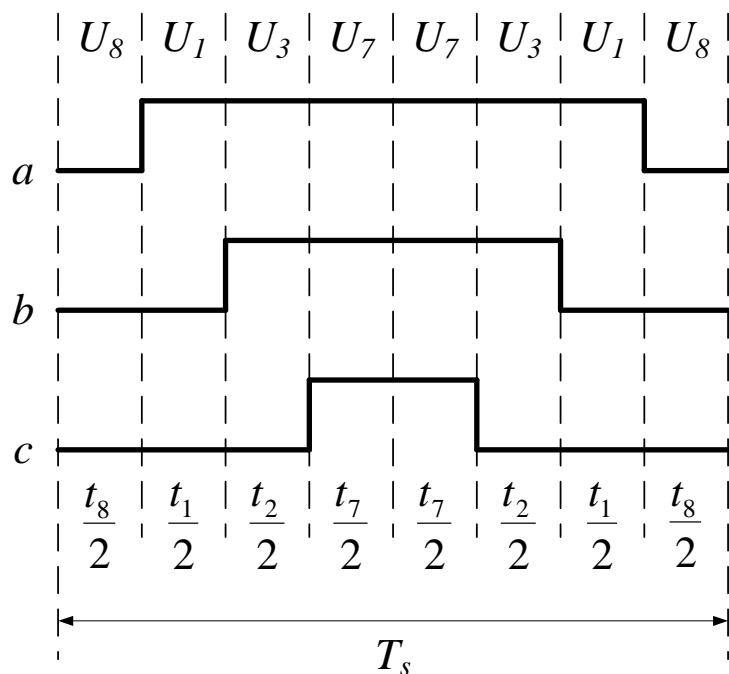
- Najpopularnija među vektorskim modulacijama širine impulsa je modulacija sa simetričnim smještajem nultih vektora, kod koje nul vektori U_7 i U_8 jednako traju (ostatak vremena dijele “po pola”)

$$t_7 = t_8 = \frac{T_s - t_1 - t_2}{2} \quad (15)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- Na sl.7. prikazani su valni oblici upravljačkih signala a , b i c unutar perioda T_s za sektor III.



Sl.7. Valni oblici upravljačkih signala a , b i c unutar perioda T_s

- Maksimalna veličina referentnog vektora napona koja se može prikazati odgovarajućim slijedom dva susjedna vektora mijenja se s položajem referentnog vektora

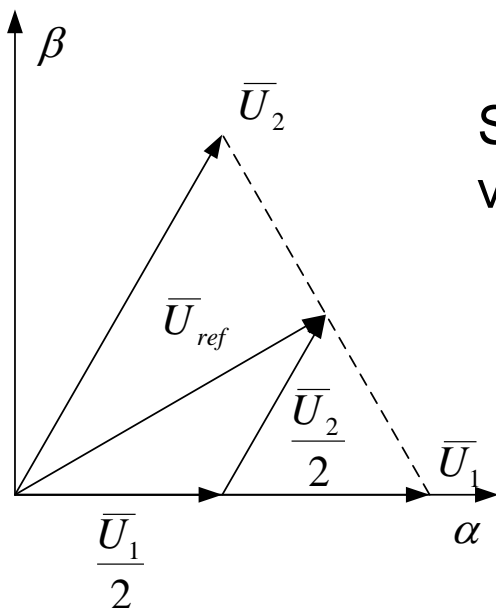
MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija

- Kada se referentni vektor nalazi točno između dva aktivna vektora njegova maksimalna vrijednost je najmanja.
- Za aproksimaciju referentnog vektora napona koji se nalazi u tom položaju, oba aktivna vektora moraju jednako trajati.
- Da bi bio zadovoljen uvjet $t_1 + t_2 \leq T_s$, trajanje aktivnih vektora mora biti manje ili jednako polovici periode T_s .
- Aproksimacija referentnog vektora napona koji se nalazi točno između dva aktivna vektora prikazana je na sl.8.

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Upravljanje sklopkama izmjenjivača – vektorska modulacija



Sl. 8. Maksimalna dopuštena duljina referentnog vektora napona

- Pomoću sl.8. može se odrediti maksimalna duljina referentnog vektora napona
- Da bi se referentni vektor mogao prikazati s dva susjedna aktivna vektora u svakom položaju, njegov modul ne smije biti veći od $U_{dc} / \sqrt{3}$

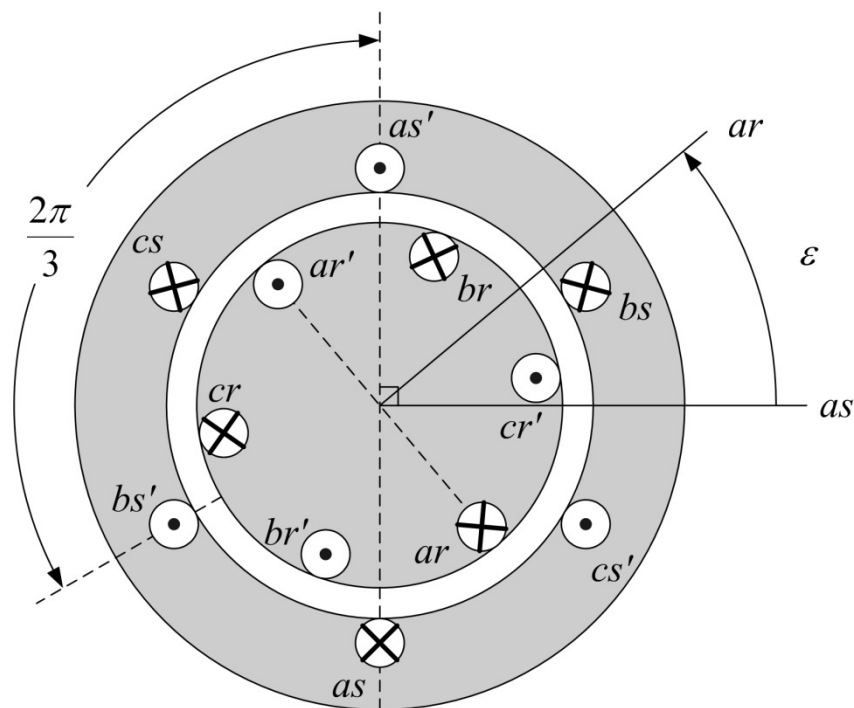
$$\boxed{|U_{ref}|_{\max} = \frac{1}{2}|U_1|\cos(30) + \frac{1}{2}|U_2|\cos(30) = \frac{U_{dc}}{\sqrt{3}}} \quad (16)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Kod vektorskog prikaza asinkronog stroja polazi se od sljedećih uobičajenih pretpostavki:
- motor je geometrijski i električki simetričan u svim fazama
 - zasićenje i gubici u željezu se zanemaruju
 - utjecaj potiskivanja struje u namotu statora i rotora se zanemaruje
 - raspodjela protjecanja i polja u zračnom rasporu je sinusna
 - otpori i induktiviteti uzimaju se kao koncentrirani parametri
- Poprečni presjek simetričnog asinkronog motora prikazan je na sl.9., gdje as predstavlja os namota faze a statora, ar predstavlja os namota faze a rotora, ε predstavlja kut između istoimenih namota na statoru i rotoru

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja



Sl.9. Poprečni presjek simetričnog asinkronog stroja

- Budući da se radi o **simetričnom trofaznom namotu na statoru i rotoru**, za fazne **otpore statora i rotora** vrijedi $R_{sa}=R_{sb}=R_{sc}=R_s$ (R_1), odnosno $R_{ra}=R_{rb}=R_{rc}=R_r$ (R_2)

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Naponske jednačbe statora i rotora asinkronog stroja zapisane u pripadnim koordinatnim sustavima, **statorskom (za stator)** i **rotorskom (za rotor)**, predstavljene su izrazima

$$\begin{aligned} u_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{d\psi_{sa}}{dt} & u_{sb} &= R_s i_{sb} + \frac{d\psi_{sb}}{dt} & u_{sc} &= R_s i_{sc} + \frac{d\psi_{sc}}{dt} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} u_{ra} &= R_r i_{ra} + \frac{d\psi_{ra}}{dt} & u_{rb} &= R_r i_{rb} + \frac{d\psi_{rb}}{dt} & u_{rc} &= R_r i_{rc} + \frac{d\psi_{rc}}{dt} \end{aligned} \quad (18)$$

- Neka je $L_{\sigma s}$ rasipni induktivitet faze statora, L_{ms} glavni induktivitet faze statora, a L_{sr} međui induktivitet između faze statora i rotora kada im se osi poklapaju
- U tom slučaju je veza između **ulančenih tokova** i **struja** statora stroja određena slijedećim izrazima:

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja ([statorski dio](#))

$$\psi_{sa} = (L_{\sigma s} + l_{ms})i_{sa} - \frac{1}{2}l_{ms}i_{sb} - \frac{1}{2}l_{ms}i_{sc} +$$
$$+ l_{sr} \cos(\varepsilon)i_{ra} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right)i_{rb} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right)i_{rc} \quad (19)$$

$$\psi_{sb} = -\frac{1}{2}l_{ms}i_{sa} + (L_{\sigma s} + l_{ms})i_{sb} - \frac{1}{2}l_{ms}i_{sc} +$$
$$+ l_{sr} \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right)i_{ra} + l_{sr} \cos(\varepsilon)i_{rb} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right)i_{rc} \quad (20)$$

$$\psi_{sc} = -\frac{1}{2}l_{ms}i_{sa} - \frac{1}{2}l_{ms}i_{sb} + (L_{\sigma s} + l_{ms})i_{sc} +$$
$$+ l_{sr} \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right)i_{ra} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right)i_{rb} + l_{sr} \cos(\varepsilon)i_{rc} \quad (21)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja ([rotorski dio](#))

- Veza između [ulančenih tokova](#) i [struja rotora](#) određena je izrazima

$$\begin{aligned}\psi_{ra} = & l_{sr} \cos(\varepsilon) i_{sa} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sb} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{sc} + \\ & + (L_{\sigma r} + l_{mr}) i_{ra} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rb} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rc}\end{aligned}\quad (22)$$

$$\begin{aligned}\psi_{rb} = & l_{sr} \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{sa} + l_{sr} \cos(\varepsilon) i_{sb} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sc} - \\ & - \frac{1}{2} l_{mr} i_{ra} + (L_{\sigma r} + l_{mr}) i_{rb} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rc}\end{aligned}\quad (23)$$

$$\begin{aligned}\psi_{rc} = & l_{sr} \cos\left(\varepsilon - \frac{2\pi}{3}\right) i_{sa} + l_{sr} \cos\left(\varepsilon + \frac{2\pi}{3}\right) i_{sb} + l_{sr} \cos(\varepsilon) i_{sc} \\ & - \frac{1}{2} l_{mr} i_{ra} - \frac{1}{2} l_{mr} i_{rb} + (L_{\sigma r} + l_{mr}) i_{rc}\end{aligned}\quad (24)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja ([prikaz rezultirajućim vektorom](#))

- Za rotorski krug je $L_{\sigma r}$ rasipni induktivitet faze rotora, a l_{mr} glavni induktivitet faze rotora
- Rezultirajući vektori fizikalnih veličina statora imaju oblik:

$$\bar{u}_s = \frac{2}{3} \left(u_{sa} + u_{sb} e^{j\frac{2\pi}{3}} + u_{sc} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \quad (25)$$

$$\bar{i}_s = \frac{2}{3} \left(i_{sa} + i_{sb} e^{j\frac{2\pi}{3}} + i_{sc} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \quad (26)$$

$$\bar{\psi}_s = \frac{2}{3} \left(\psi_{sa} + \psi_{sb} e^{j\frac{2\pi}{3}} + \psi_{sc} e^{j\frac{4\pi}{3}} \right) \quad (27)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Rezultirajući vektori **rotorskih fizikalnih veličina** imaju jednak oblik kao i **rezultirajući vektori statorskih fizikalnih veličina**, samo je indeks “s” zamijenjen **indeksom r** (zapis se odnosu rotorski koordinatni sustav!)
- Nakon uvođenja **rezultirajućih vektora (25-27)**, **naponske jednadžbe** statorskog i rotorskog kruga poprimaju slijedeće oblike

$$\boxed{\bar{u}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt}} \quad (28)$$

$$\boxed{\bar{u}_r = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt}} \quad (29)$$

- I veze između struja i ulančanih tokova se mogu izraziti pomoću rezultirajućih vektora

$$\boxed{\bar{\psi}_s = L_s \bar{i}_s + L_m \bar{i}_r e^{j\varepsilon}} \quad (30)$$

$$\boxed{\bar{\psi}_r = L_m \bar{i}_s e^{-j\varepsilon} + L_r \bar{i}_r} \quad (31)$$

$$\boxed{L_s = L_{\sigma s} + \frac{3}{2} l_{ms}} \quad (32)$$

(33)

$$\boxed{L_m = \frac{3}{2} l_{sr}}$$

$$\boxed{L_r = L_{\sigma r} + \frac{3}{2} l_{mr}} \quad (34)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Također vrijedi

$$\boxed{L_s = L_{\sigma s} + L_m} \quad (35)$$

$$\boxed{L_r = L_{\sigma r} + L_m} \quad (36)$$

- Izrazi (28) i (30) vrijede u **statorskom koordinatnom sustavu**, a izrazi (29) i (31) vrijede u **rotorskom koordinatnom sustavu**, pa između tih izraza nema izravne veze.
- Da bi se ti izrazi doveli u izravnu vezu nužno je **sve rezultirajuće vektore transformirati u zajednički koordinatni sustav**.
- U ovom slučaju **vektori se transformiraju u koordinatni sustav koji rotira proizvoljnom brzinom ω_k** .
- Transformacija vektora između **dvofaznih koordinatnih sustava s različitim brzinama rotacije** izvodi se pomoću izraza 1.21, (Materijali za učenje na web stranicama, str. 5.).

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Ako se pretpostavi da kut između statorskog i zajedničkog koordinatnog sustava iznosi ρ , tada kut između rotorskog i zajedničkog koordinatnog sustava iznosi $(\rho - \varepsilon)$, [sl.9a](#)
- Pri tome je ε kut između statorske i rotorske osi, [sl.9](#), pa vrijedi

$$\boxed{\bar{u}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} \cdot e^{-j\rho}} \quad (37)$$

$$\boxed{\bar{u}_r = R_r \bar{i}_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} \cdot e^{-j(\rho-\varepsilon)}} \quad (38)$$

- Vektori koji označavaju fizikalne veličine statora i rotora u zajedničkom koordinatnom sustavu definirani su slijedećim izrazima.

$$\boxed{\bar{u}_{sk} = \bar{u}_s e^{-j\rho}} \quad (39)$$

$$\boxed{\bar{u}_{rk} = \bar{u}_r e^{-j(\rho-\varepsilon)}} \quad (42)$$

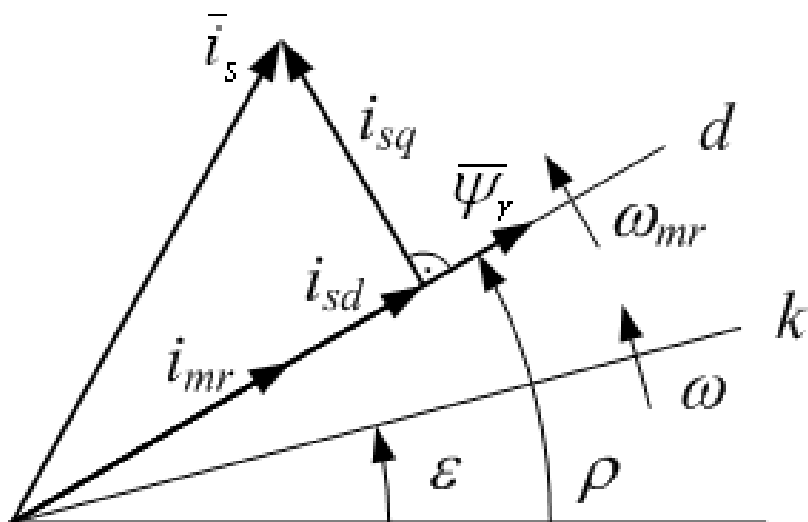
$$\boxed{\bar{i}_{sk} = \bar{i}_s e^{-j\rho}} \quad (40)$$

$$\boxed{\bar{i}_{rk} = \bar{i}_r e^{-j(\rho-\varepsilon)}} \quad (43)$$

$$\boxed{\bar{\psi}_{sk} = \bar{\psi}_s e^{-j\rho}} \quad (41)$$

$$\boxed{\bar{\psi}_{rk} = \bar{\psi}_r e^{-j(\rho-\varepsilon)}} \quad (44)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja



Sl.9.a) Odnosi među vektorima u modelu AS-a u koordinatnom sustavu toka rotora

- os zajedničkog koordinatnog sustava (ω_k) postavljena u os rotorskog polja=d-os (PROIZVOLJNO, SAMO ZA OVAJ PRIMJER , $\omega_k = \omega_{mr}!!$)
- kut između statorskog i zajedničkog koordinatnog sustava iznosi ρ .
- kut između rotorskog i zajedničkog koordinatnog sustava iznosi $(\rho - \varepsilon)$.
- kut između statorskog i rotorskog koordinatnog sustava iznosi ε
- os rotora k
- os zajedničkog koordinatnog sustava= os rotorskog polja=d-os

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Nakon transformacije **izrazi za napon statora i rotora u zajedničkom koordinatnom sustavu** poprimaju slijedeće oblike

$$\bar{u}_{sk} = \bar{i}_{sk} R_s + \frac{d\bar{\psi}_{sk}}{dt} + j\bar{\psi}_{sk} \omega_k \quad (45)$$

$$\bar{u}_{rk} = \bar{i}_{rk} R_r + \frac{d\bar{\psi}_{rk}}{dt} + j\bar{\psi}_{rk} (\omega_k - \omega) \quad (46)$$

- Vektori tokova statora i rotora transformiraju se u zajednički koordinatni sustav na slijedeći način

$$\bar{\psi}_s = L_s \bar{i}_s + L_m \bar{i}_r e^{j\varepsilon} / \cdot e^{-j\rho} \quad (47)$$

$$\bar{\psi}_r = L_m \bar{i}_s e^{-j\varepsilon} + L_r \bar{i}_r / \cdot e^{-j(\rho-\varepsilon)} \quad (48)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Nakon transformacije izrazi za tok statora i rotora u zajedničkom koordinatnom sustavu poprimaju slijedeće oblike:

$$\overline{\psi}_{sk} = L_s \bar{i}_{sk} + L_m \bar{i}_{rk} \quad (49)$$

$$\overline{\psi}_{rk} = L_m \bar{i}_{sk} + L_r \bar{i}_{rk} \quad (50)$$

- Elektromagnetski moment može se izraziti pomoću vektorskog produkta rezultirajućeg vektora struje statora i rezultirajućeg vektora toka statora; ili pomoću vektorskog produkta rezultirajućeg vektora struje rotora i rezultirajućeg vektora toka rotora
- Ta dva momenta su istog iznosa, a suprotnog predznaka

$$\overline{m}_e = -\frac{3}{2} p \overline{\psi}_s \times \bar{i}_s = \frac{3}{2} p \overline{\psi}_r \times \bar{i}_r \quad (51)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Transformiranjem izraza (51) u proizvoljno rotirajući koordinatni sustav, **oba vektora zakrenu se za isti kut, pa se njihov vektorski produkt ne mijenja**. Iz toga slijedi da moment izražen pomoću struje i toka definiranih u zajedničkom koordinatnom sustavu ima oblik

$$\bar{m}_e = -\frac{3}{2} p \bar{\psi}_{sk} \times \bar{i}_{sk} = \frac{3}{2} p \bar{\psi}_{rk} \times \bar{i}_{rk} \quad (52)$$

- Uvođenjem izraza za tok statora (49), odnosno tok rotora (50) u izraz za moment (52), dobiva se:

$$\bar{m}_e = -\frac{3}{2} p L_m \bar{i}_{rk} \times \bar{i}_{sk} = \frac{3}{2} p L_m \bar{i}_{sk} \times \bar{i}_{rk} \quad (53)$$

MATEMATIČKI MODEL ASINKRONOG STROJA

Vektorski prikaz izmjeničnog stroja

- Ako se pretpostavi da se radi o kaveznom asinkronom motoru ($u_r = 0$) i ako se indeks k ispusti iz izraza (45), (46), (49), (50) i (53), vodeći računa da se **svi vektori nalaze u zajedničkom koordinatnom sustavu**, sustav jednačbi asinkronog motora u **zajedničkom koordinatnom sustavu** može se zapisati na slijedeći način:

$$\bar{u}_s = \bar{i}_s R_s + \frac{d\bar{\psi}_s}{dt} + j\omega_k \bar{\psi}_s \quad (54)$$

$$0 = \bar{i}_r R_r + \frac{d\bar{\psi}_r}{dt} + j(\omega_k - \omega) \bar{\psi}_r \quad (55)$$

$$\bar{\psi}_s = L_s \bar{i}_s + L_m \bar{i}_r \quad (56)$$

$$\bar{\psi}_r = L_m \bar{i}_s + L_r \bar{i}_r \quad (57)$$

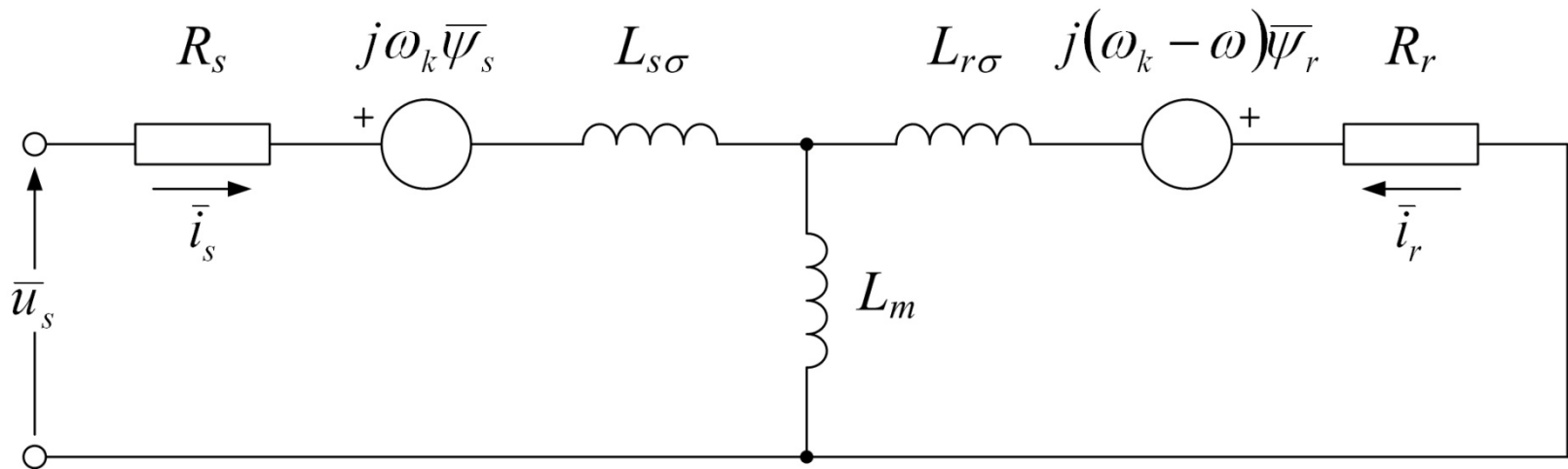
$$\bar{m}_e = -\frac{3}{2} p L_m \bar{i}_s \times \bar{i}_r \quad (58)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_e - m_t \quad (59)$$

$$\omega = p \omega_m \quad (60)$$

SUSTAVI **VEKTORSKOG** UPRAVLJANJA S ASINKRONIM KAVEZNIM STROJEM

Na osnovi izraza (54)-(60) izvodi se električna nadomjesna shema asinkronog motora u proizvoljno rotirajućem koordinatnom sustavu



Sl.10. Model asinkronog motora u dvofaznom sustavu koji rotira brzinom ω_k

LITERATURA

- [1] N. Mohan, W. P. Robbin, and T. Undeland, *Power Electronics: Converters, Applications, and Design*, 2nd ed. New York: Wiley, 1995.
- [2] B.K.Bose, *Modern Power Electronics and AC Drives*, 2005.
- [3] R. Krishnan, *Electric Motor Drives, Modeling, Anakysis and Control*, Prentice Hall, 2001.

KRAJ

Dodatak

- Ako se razmatra samo m_f -iti harmonik (a isto se odnosi i na njegove neparne višekratnike), fazni odnos među tim harmonicima u u_{AN} i u_{BN} je $(120 m_f)^\circ$.
- Ovaj fazni pomak će biti nula (višekratnik od 360°) ako je m_f neparan i višekratnik od 3, tj. na taj se način eliminira m_f -iti harmonik u linijskom naponu.