

# Upravljanje elektromotornim pogonima 2009/2010

**Prof.dr.sc. Nedjeljko Perić**

Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo  
Fakultet elektrotehnike i računarstva

Predavanje 13 – Sinteza linearnih sustava  
primjenom praktičnih optimuma

## Sinteza linearnih sustava primjenom praktičnih optimuma

- Razrađuju se postupci sinteze temeljeni na dva praktična optimumima:
  - optimum dvostrukog odnosa,
  - modulni optimum.
- U postupku sinteze potrebno je odrediti strukturu i parametre:
  - regulatora,
  - pretkompensatora (engl. *feedforward controller*).

### Optimum dvostrukog odnosa

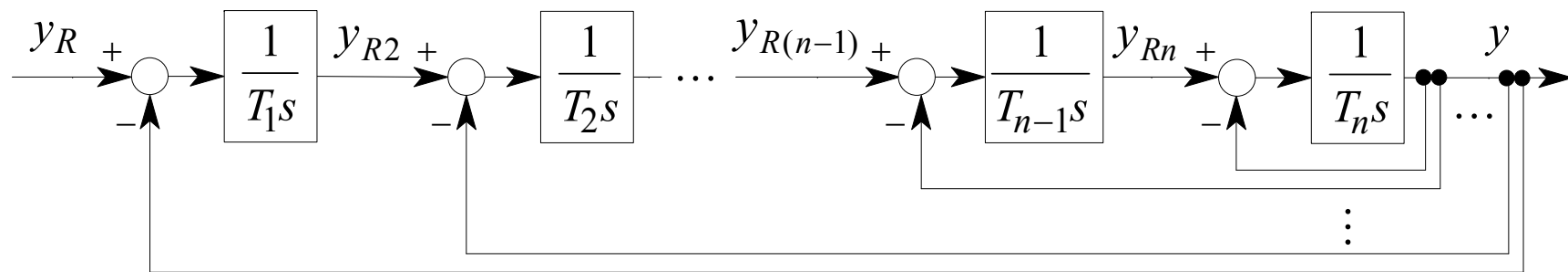
- njem. *Optimum der Doppelverhältnisse, Dämpfungsoptimum*,
- engl. *Double Ratios Optimum, Damping Optimum*,
- Cilj: pronalaženje analitičke veze između koeficijenata karakterističnog polinoma linearnog regulacijskog sustava proizvoljnog reda, takve da sustav ima optimalno prigušenje koje odgovara prigušenju  $\zeta = \sqrt{2} / 2$  oscilacijskog člana 2. reda.

## Izvod optimuma dvostrukog odnosa

- Razmatra se linearni, vremenski nepromjenljivi, zatvoreni regulacijski SISO sustav, stacionarno točan, bez mrtvog vremena i bez nula prijenosne funkcije.
- Opći oblik prijenosne funkcije takvog sustava je:

$$G(s) = \frac{y(s)}{y_R(s)} = \frac{1}{A(s)} = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + 1} \quad (13 - 1)$$

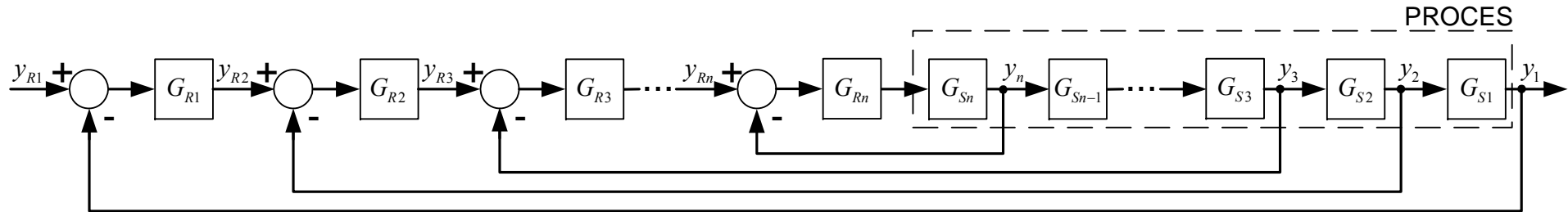
- Struktura danog sustava može se predočiti blokovskim dijagramom s  $n$  kaskadno spregnutih integralnih članova.



Sl. 13.1.

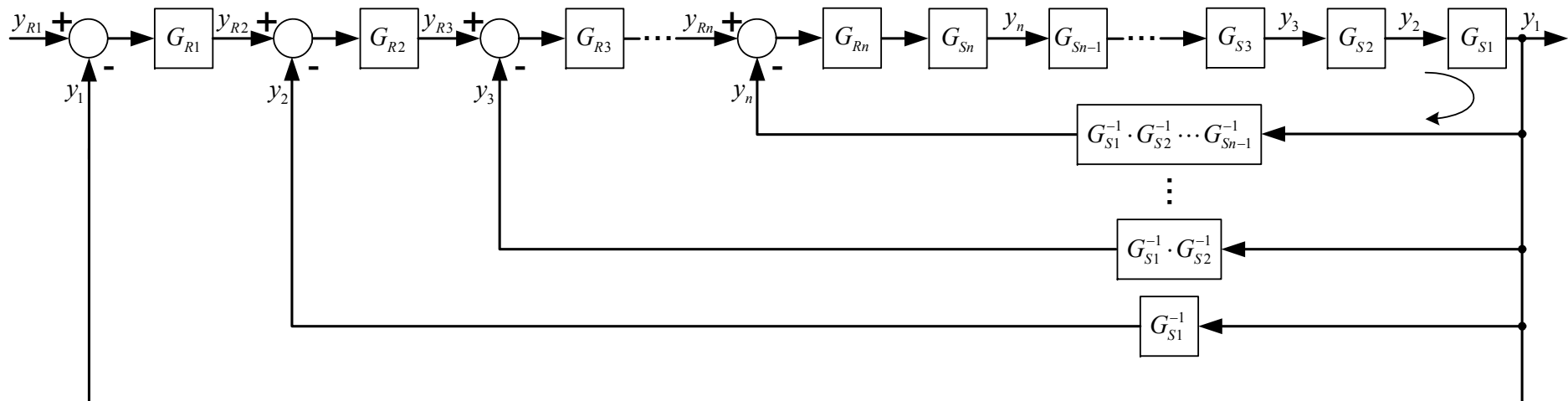
## Digresija

- Višepetljasti kaskadni sustav upravljanja:



Sl. 13.2.

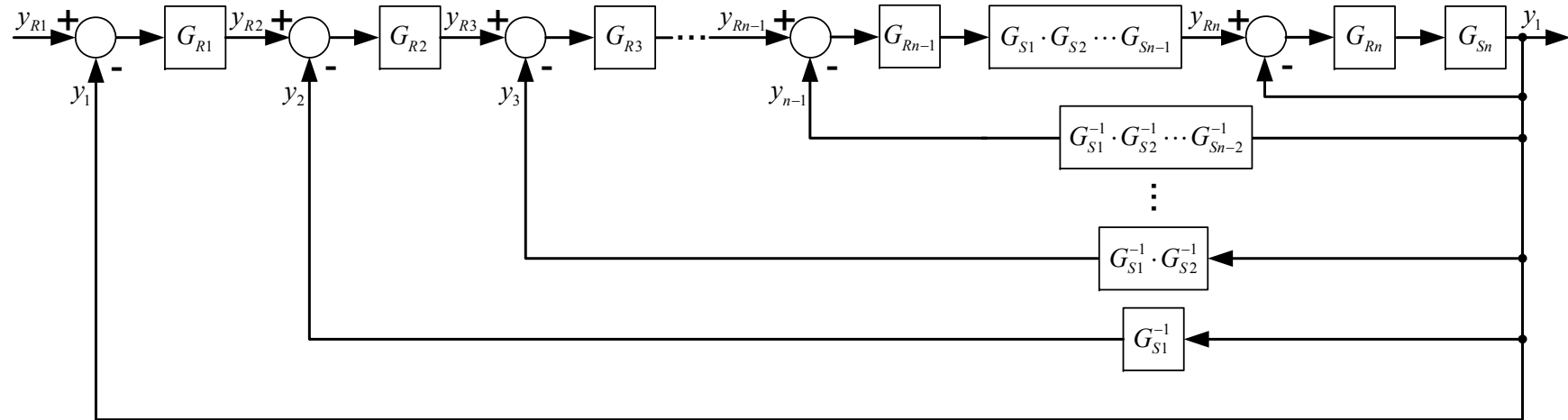
- Blokovskom algebrom dobije se:



Sl. 13.3.

## Digresija

- Iz slike 13.3. zatim slijedi:

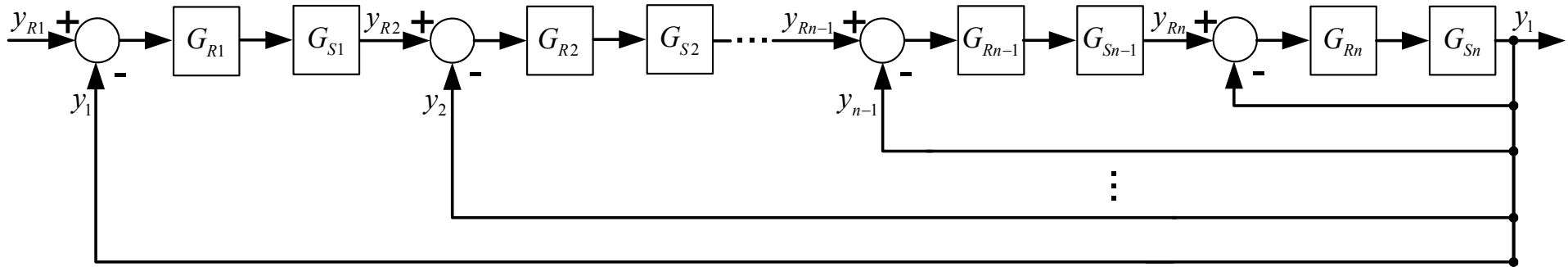


Sl. 13.4.

- Ovisno o tome da li je  $G_{Si}(s)$  PT1 ili PT2 član, primjenjuje se PI ili PID regulator:

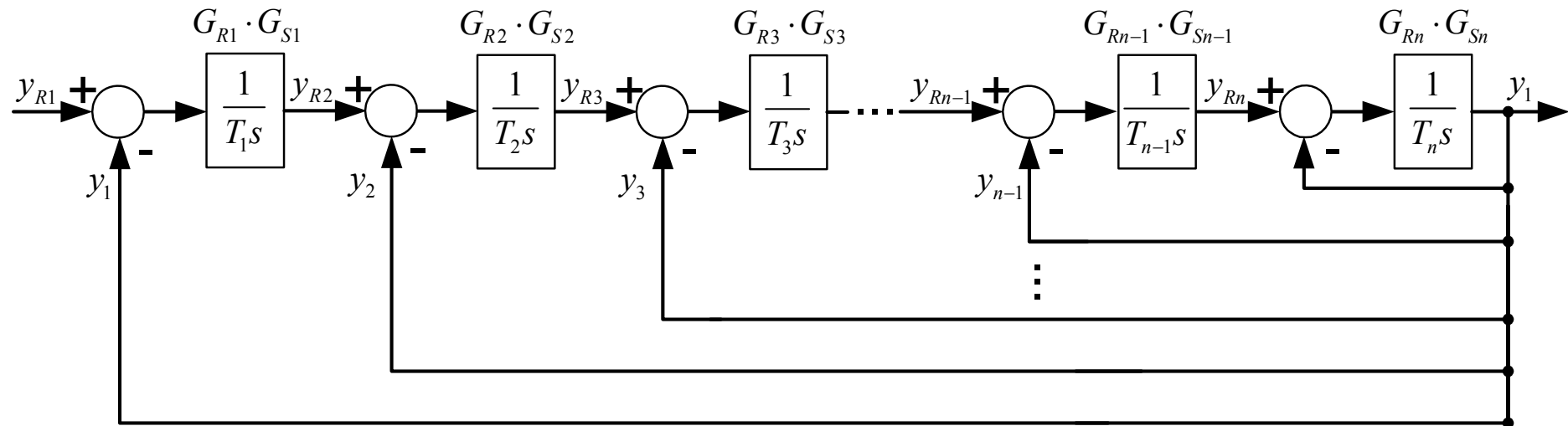
$$G_{Ri}(s) \cdot G_{Si}(s) = \frac{K_{Ri}}{T_{Ii}s} = \frac{1}{T_{i}s} \quad (13 - 2)$$

## Digresija



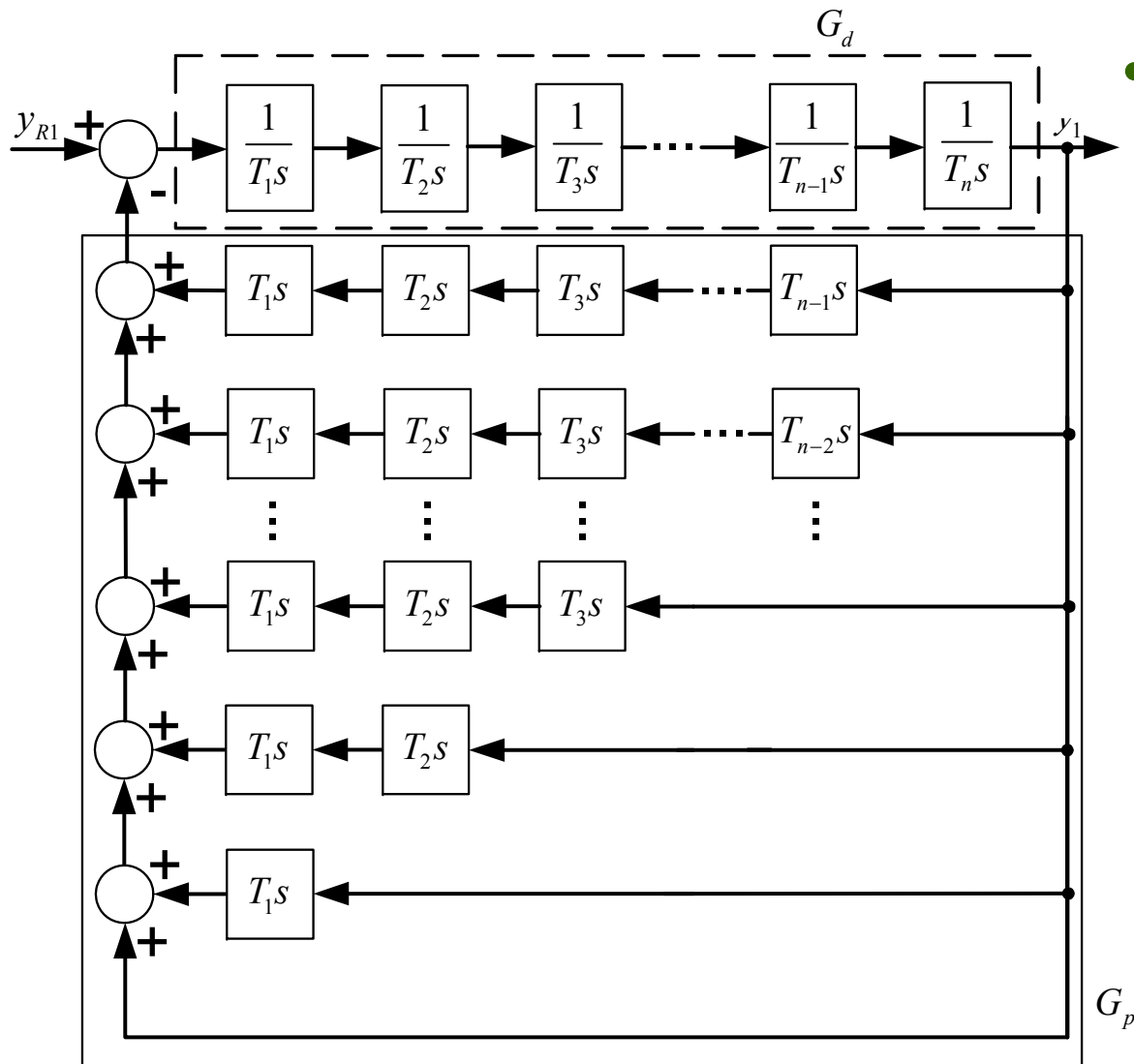
Sl. 13.5.

- Blokovskom algebrom dobije se:



Sl. 13.6.

## Digresija



- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga:

$$G_y(s) = \frac{y(s)}{y_{R1}(s)} = \frac{G_d(s)}{1 + G_d(s)G_{pv}(s)} \quad (13 - 3)$$

$$G_y(s) = \frac{\frac{1}{T_1 T_2 T_3 \dots T_n s^n}}{1 + \frac{1 + T_1 s + T_1 T_2 s^2 + \dots + T_1 T_2 \dots T_{n-1} s^{n-1}}{T_1 T_2 T_3 \dots T_n s^n}} \quad (13 - 4)$$

$$G_y(s) = \frac{1}{1 + T_1 s + T_1 T_2 s^2 + \dots + T_1 T_2 \dots T_n s^n} \quad (13 - 5)$$

Sl. 13.7.

## Izvod optimuma dvostrukog odnosa

- Koeficijenti prijenosne funkcije i vremenske konstante  $T_1, \dots, T_n$  međusobno su povezani općim izrazom:

$$a_i = \prod_{j=1}^i T_j = T_1 T_2 \cdots T_i ; \quad i = 1, \dots, n \quad (13 - 6)$$

- Odnosom vremenskih konstanti susjednih integralnih članova definirani su bezdimenzionalni karakteristični odnosi

$$D_i = \frac{T_i}{T_{i-1}} = \frac{a_i a_{i-2}}{a_{i-1}^2} , \quad i = 2, \dots, n \quad (13 - 7)$$

- Najpodređeniji krug kaskadne strukture sustava s prijenosnom funkcijom

$$G_n(s) = \frac{y(s)}{y_{Rn}(s)} = \frac{1}{T_n s + 1} \quad (13 - 8)$$

ima značenje sistemskog  $PT_1$  člana sa sistemskom vremenskom konstantom  $T_n$ . Sistemskim se članom približno opisuje vladanje tzv. parazitnih članova procesa, čija se stanja ne reguliraju.



## Izvod optimuma dvostrukog odnosa

- Prijenosne funkcije otvorenog i zatvorenog kruga  $i$ -te kaskade poprimaju redom oblike:

$$G_{oi}(s) \approx \frac{1}{T_i s (T_{i+1} s + 1)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (13 - 9)$$

$$G_{ci}(s) = \frac{y(s)}{y_{Ri}(s)} = \frac{G_{oi}(s)}{1 + G_{oi}(s)} \approx \frac{1}{T_{i+1} T_i s^2 + T_i s + 1} \quad (13 - 10)$$

Preuređenjem (13 - 10), uzimajući u obzir (13 - 7)

$$G_{ci}(s) = \frac{1}{D_{i+1} T_i^2 s^2 + T_i s + 1} = \frac{1}{T_{oi}^2 s^2 + 2\zeta_{i+1} T_{oi} s + 1} \quad (13 - 11)$$

odakle slijedi:

$$D_i = \frac{1}{4\zeta_i^2} \quad (13 - 12)$$

- Optimalno prigušenje** sustava određeno je izborom:

$$\zeta_i = \sqrt{2} / 2 \Rightarrow D_i = 0,5 \Leftrightarrow D_i = \frac{1}{4\zeta_i^2} \quad (13 - 13)$$

koji daje kvaziaperiodski oblik prijelazne funkcije oscilacijskog člana.

## Izvod optimuma dvostrukog odnosa

- Karakteristični polinom  $A(s)$  sustava (13 - 1), primjenom (13 - 6) i (13 - 7) može se zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} A(s) &= T_n T_{n-1} \cdots T_1 s^n + T_{n-1} T_{n-2} \cdots T_1 s^{n-1} + \dots + T_2 T_1 s^2 + T_1 s + 1 = \\ &= D_n D_{n-1}^2 \cdots D_2^{n-1} T_e^n s^n + D_{n-1} D_{n-2}^2 \cdots D_2^{n-2} T_e^{n-1} s^{n-1} + \dots + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1 \end{aligned} \quad (13 - 14)$$

pri čemu  $T_e = T_1$  označava nadomjesnu vremensku konstantu ukupnog zatvorenog sustava nadomještenog prijenosnom funkcijom

$$G_e(s) = G_1(s) = \frac{1}{T_e s + 1} \quad (13 - 15)$$

- Optimalan iznos karakterističnih odnosa iznosi:

$$D_2 = D_3 = \dots = D_n = 0,5 \quad (13 - 16)$$

## Izvod optimuma dvostrukog odnosa

- Veza nadomjesnih vremenskih konstanti pojedinih krugova kaskadne strukture sustava u općem i optimalnom obliku proizlazi iz sljedećih izraza (13 - 7) i (13 - 16):

$$T_e = T_1 = \frac{1}{D_2} T_2 = \frac{1}{D_3 D_2} T_3 = \dots = \frac{1}{D_i D_{i-1} \dots D_2} T_i = \dots = \frac{1}{D_n D_{n-1} \dots D_2} T_n \quad (13 - 17)$$

$$T_e = T_1 = 2T_2 = 4T_3 = \dots = 2^{i-1} T_i = \dots = 2^{n-1} T_n \quad (13 - 18)$$

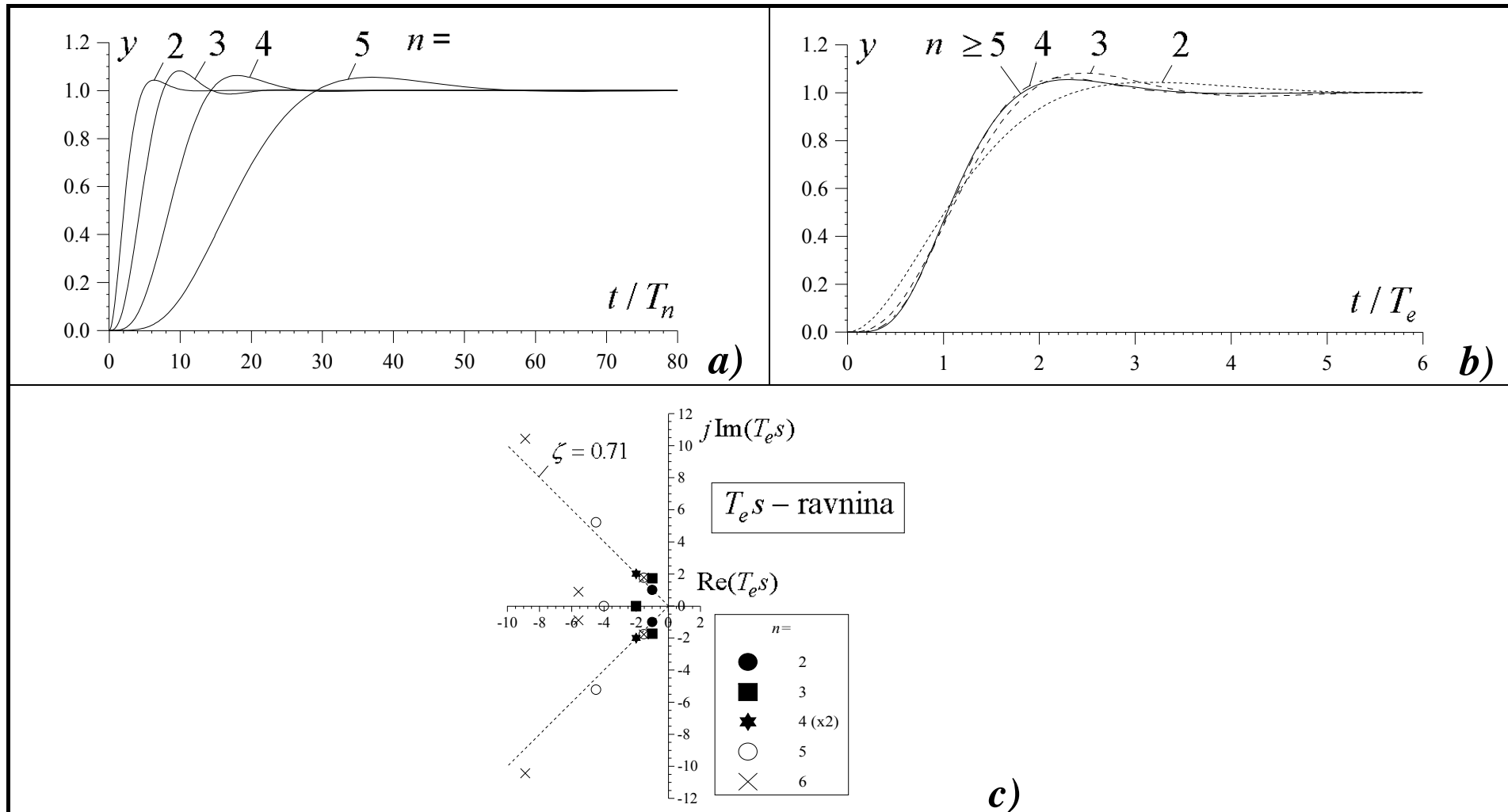
- Dakle, svaki krug kaskadne strukture sustava ima dvostruko veće vrijeme odziva od njemu podređenog kruga.

## Analiza optimiranog sustava

### Analiza uz optimalan iznos svih karakterističnih odnosa

- Rezultati analize sustava (13 - 1), različitog reda  $n$ , s karakterističnim polinomom  $A(s)$  (13 - 14) dani su na slici 13.8. Sve prijelazne funkcije, bez obzira na red sustava, imaju sličan kvaziaperiodski oblik. Takav oblik predstavlja rezultat optimalnog izbora između veće brzine odziva i manje oscilatornosti.
- Regulacijsko nadvišenje  $\sigma_m < 8\%$ , vrijeme porasta  $t_1 < 2,4T_e$ .
- Sporiji odziv sustava višeg reda. Svako povećanje reda sustava za 1, uz jednaku sistemsku vremensku konstantu  $T_n$ , udvostručuje vrijeme odziva.
- Dobro prigušenje optimiranog sustava (očituje se i kroz raspored polova).

## Analiza uz optimalan iznos svih karakterističnih odnosa

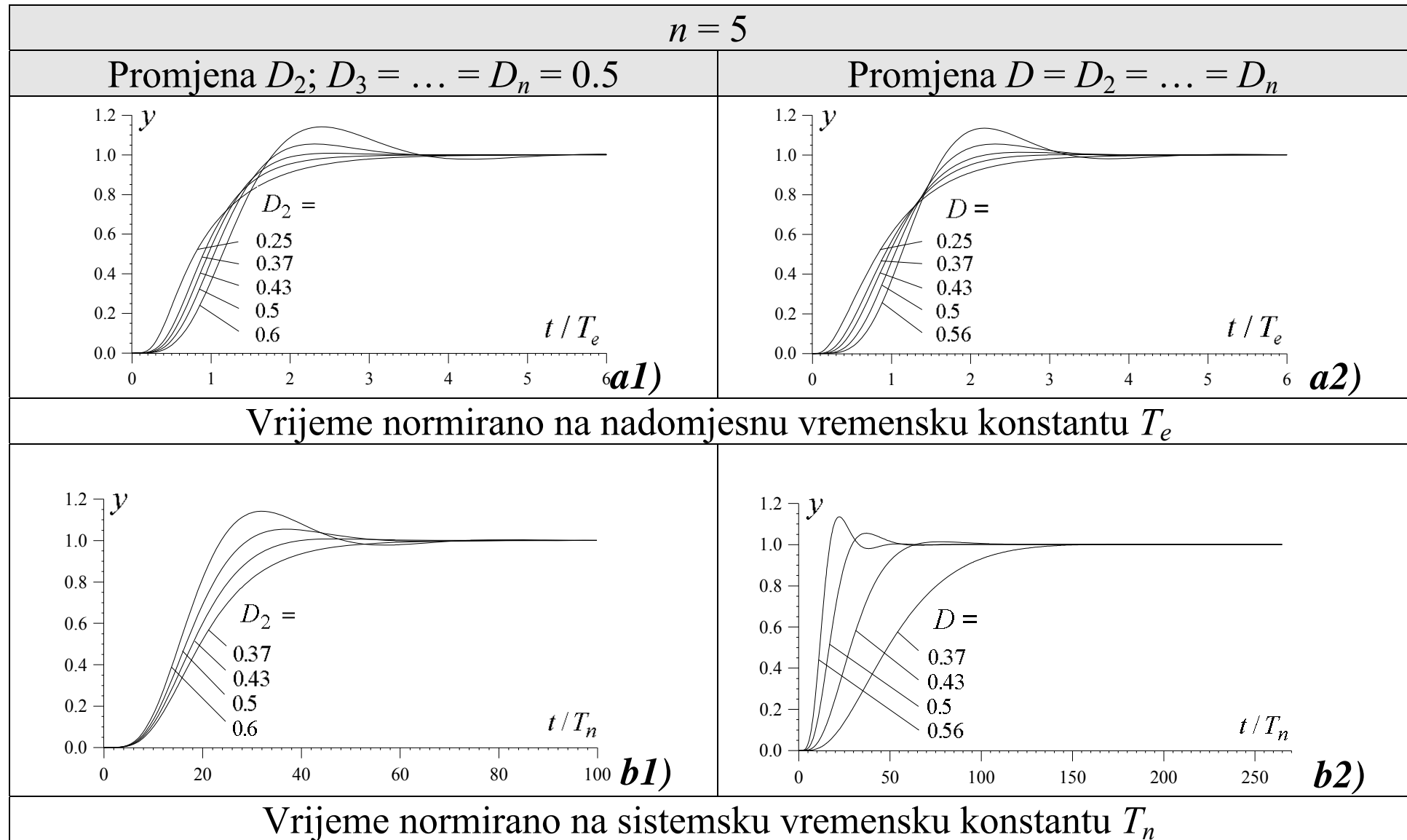


*Sl. 13.8. Prijelazne funkcije u vremenu normiranom na sistemsku ( $T_n$ ) **a)**, odnosno nadomjesnu ( $T_e$ ) **b)** vremensku konstantu, te položaj polova u normiranoj  $T_e s$  ravnini **c)**.*

## Podešavanje prigušenja

- Ponekad je potrebno odstupiti od optimalnog prigušenja sustava određenog optimalnim izborom karakterističnih odnosa.
- Npr. kod pozicioniranja uobičajeno se ne dopušta nadvišenje (potrebno je ostvariti što brži odziv bez nadvišenja).
- U nekim se primjenama tolerira povećano nadvišenje i oscilatornost s ciljem postizanja bržeg odziva i kvalitetnijeg otklanjanja utjecaja poremećaja
- Mogući način podešavanja prigušenja:
  - promjenom samo dominantnog karakterističnog odnosa  $D_2$ .
  - postavljanjem svih karakterističnih odnosa na jednak iznos  $D$  različit od 0,5.

## Podešavanje prigušenja



## Podešavanje prigušenja

- Smanjenjem  $D_2 < 0,5$  povećava se prigušenje prijelazne funkcije, tj. smanjuje se njena oscilatornost i nadvišenje.
- Granični aperiodski oblik prijelazne funkcije dobije se uz  $D_2 = 0,37$  (Sl. 13.9. a1 i a2).
- Odzivi, dani na slikama b1 i b2) pokazuju da je besmisleno mijenjati iznos  $D < 0,5$  svih karakterističnih odnosa, jer se tako značajno usporava odziv.
- Povećanjem  $D_2 > 0,5$  smanjuje se prigušenje prijelazne funkcije, tj. povećava njena oscilatornost i nadvišenje. Približno jednako nadvišenje za oba načina podešavanja prigušenja postiže se uz različite iznose karakterističnih odnosa  $D$  i  $D_2$  ( $D < D_2$ ).
- Nasuprot prethodnom slučaju  $D_2 = D < 0,5$ , povoljniji (brži) odziv u vremenu normiranom na sistemsku vremensku konstantu  $T_n$  dobije se ukoliko se prigušenje podešava promjenom iznosa  $D$  svih karakterističnih odnosa.



## Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

- U primjenama se često koristi regulator reduciranog reda kojim nije moguće nezavisno postaviti svih  $n-1$  karakterističnih odnosa na optimalan iznos  $D = 0,5$ .
- Približno optimalno vladanje sustava može se postići tako da se optimiraju nadređeni krugovi kaskadne strukture sustava, koji dominantno određuju vladanje sustava.
- Po dominantnosti viši karakteristični odnosi  $D_2, \dots, D_{l+1}$  postave se na iznos 0,5.
- Utjecaj podoptimalnog iznosa preostalih, po dominantnosti nižih karakterističnih odnosa  $D_{l+2}, \dots, D_n$  na kvalitetu vladanja sustava dan je na primjeru.

## Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

### Primjer

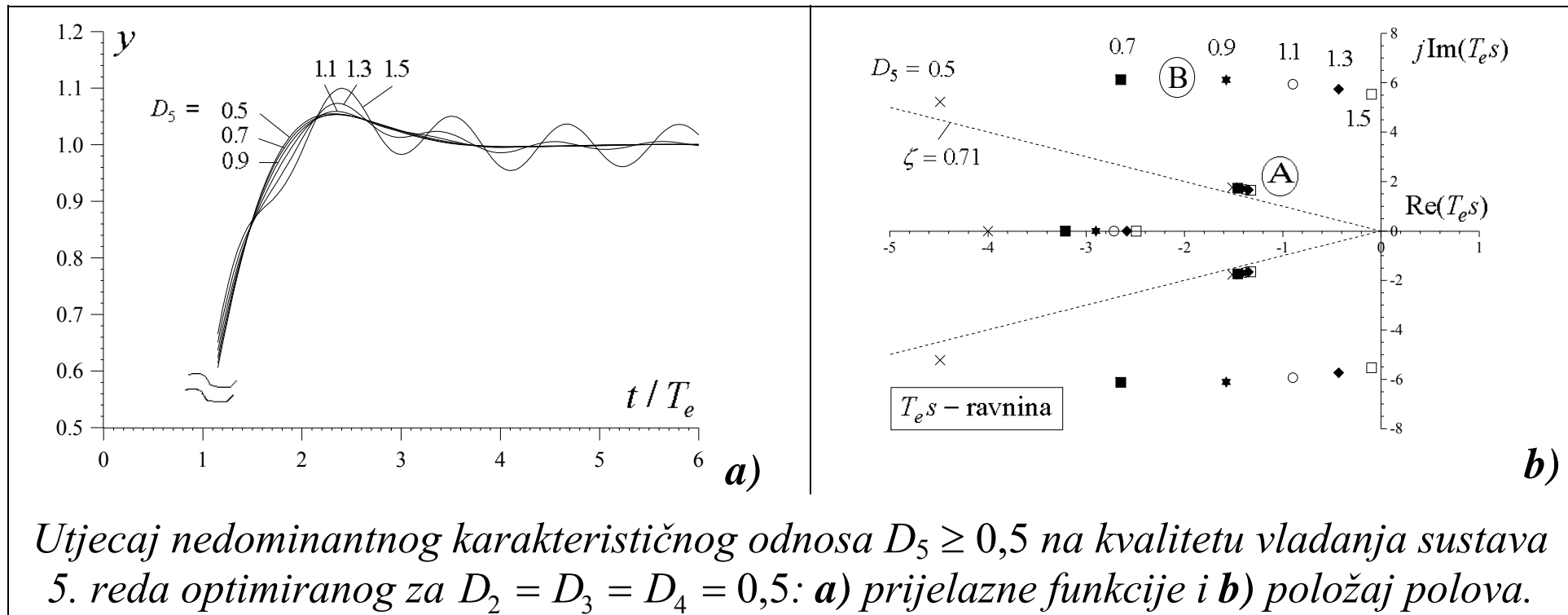
- ◆ Analizira se utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa  $D_5$  i  $D_4$  ( $l = 2$ ) na vladanje sustava 5. reda ( $n = 5$ ) optimiranog za  $D_2 = D_3 = 0,5$ . Vrijeme odziva sustava određeno je iznosom nadomjesne vremenske konstante  $T_e$  koja se računa prema izrazu:

$$T_e = 2^l \frac{T_n}{D_n D_{n-1} \cdots D_{l+2}} = \frac{4T_n}{D_5 D_4} = \frac{4T_n}{\Delta}. \quad (13 - 19)$$

- ◆ Povećanjem iznosa najnižeg karakterističnog odnosa  $D_5 > 0,5$ , specijalno uz  $D_4 = 0,5$ , povećava se oscilatornost 4. kruga kaskadne strukture sustava što se odražava i na povećanu oscilatornost nadređenih krugova.
- ◆ Prijelazne funkcije sustava pokazuju (Sl. 13.10.a) da se odziv sustava gotovo ne mijenja ako je zadovoljena nejednakost  $D_5 \leq D_{5\max} \approx 0,9$ . Ovaj rezultat ima jasnu interpretaciju u položaju polova optimiranog sustava (Sl. 13.10.b).

## Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

### Primjer



Utjecaj nedominantnog karakterističnog odnosa  $D_5 \geq 0,5$  na kvalitetu vladanja sustava 5. reda optimiranog za  $D_2 = D_3 = D_4 = 0,5$ : **a)** prijelazne funkcije i **b)** položaj polova.

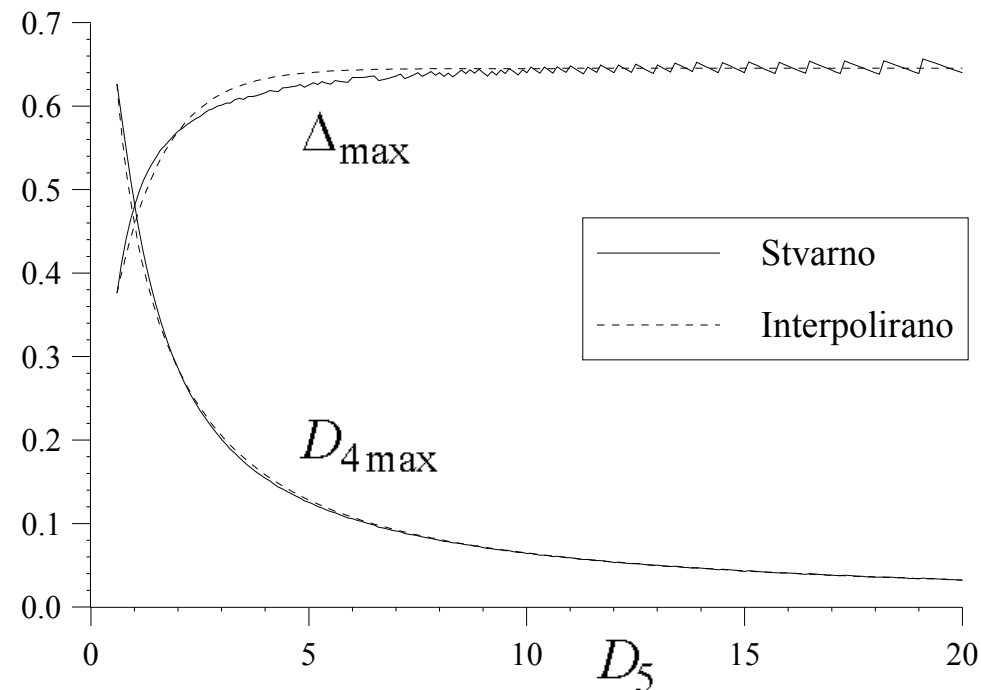
Sl. 13.10.

- Granična vrijednost  $D_{5\max}$  za dobro prigušen (kvaziaperiodski) odziv sustava dostiže se kada slabo prigušeni konjugirano-kompleksni par polova (B) preuzme dominaciju od približno konstantnog, dobro prigušenog para polova (A).

## Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

### Primjer

- Sustav zadržava dobro prigušen odziv i u slučaju da odnos  $D_5$  neograničeno raste iznad  $D_{5\max}$ , ali samo ako istovremeno susjedni odnos  $D_4$  pada (Sl. 13.11.)



Sl. 13.11.

## Utjecaj nedominantnih karakterističnih odnosa

### Primjer

- Granična ovisnost  $D_{4\max}(D_5)$  za dobro prigušen odziv (Sl. 13.11.) dobivena je numerički. Usporedno je prikazana i granična krivulja  $\Delta_{\max}(D_5) = D_{4\max}(D_5) \cdot D_5$  koja se uz samo 5%-tno maksimalno odstupanje interpolira eksponencijalnom funkcijom

$$\Delta_{\max}(D_5) = \Delta_0 + (\Delta_1 - \Delta_0)(1 - e^{-\frac{D_5 - 0,6}{\delta_5}}) \quad (13 - 20)$$

gdje je:

$$\Delta_0 = 0,376 \quad , \quad \Delta_1 = 0,645 \quad , \quad \delta_5 = 1,1 \quad .$$

- U slučaju da najniži karakteristični odnos ima iznos  $D_5 \leq 0,5$ , pokazuje se da maksimalna vrijednost odnosa  $D_4$  za dobro prigušen odziv sustava iznosi  $D_{4\max} \approx 0,7$ . Konačno se može zaključiti da će sustav 5. reda optimiran za  $D_2 = D_3 = 0,5$  imati dobro prigušen (kvaziaperiodski) odziv ako su zadovoljena sljedeća dva uvjeta:

$$0 < D_4 \leq D_{4\max} \approx 0,7 \quad (13 - 21)$$

$$\Delta = D_4 D_5 < \Delta_{\max}(D_5) \quad (13 - 22)$$

## Optimiranje vremenski diskretnih sustava

### Diskretni postupak sinteze

- Uz primjenu regulatora punog reda, npr. polinomskog regulatora, moguće je nezavisno postaviti položaj svih polova sustava.
- Sinteza se može provesti u diskretnom ( $z$ ) području, pri čemu se polazi od karakterističnog polinoma sustava:

$$A_d(z) = \prod_{i=1}^n (z - z_i) = \sum_{i=0}^n a_{di} z^i = a_{dn} z^n + a_{dn-1} z^{n-1} + \dots + a_{d1} z + a_{d0}; a_{dn} = 1 \quad (13 - 23)$$

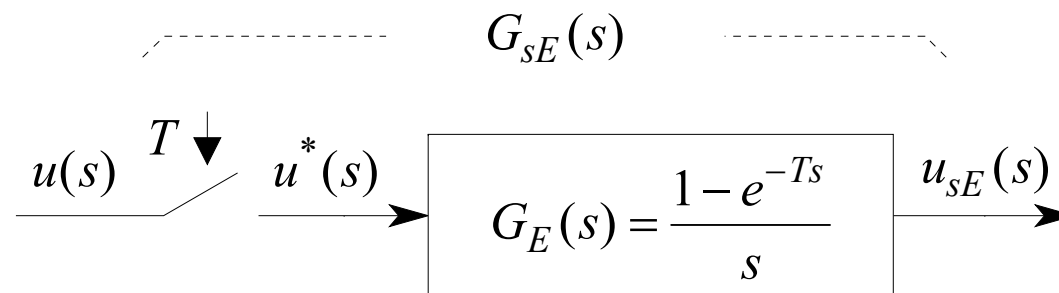
- Korijeni  $z_i$  polinoma  $A_d(z)$  određuju se iz korijena  $s_i$  optimalnog polinoma  $A(s)$  (13 - 14) prema:

$$z_i = e^{Ts_i}, \quad A(s_i) = 0 \rightarrow s_i, \quad \text{za } i = 1, \dots, n \quad (13 - 24)$$

gdje je  $T$  vrijeme uzorkovanja.

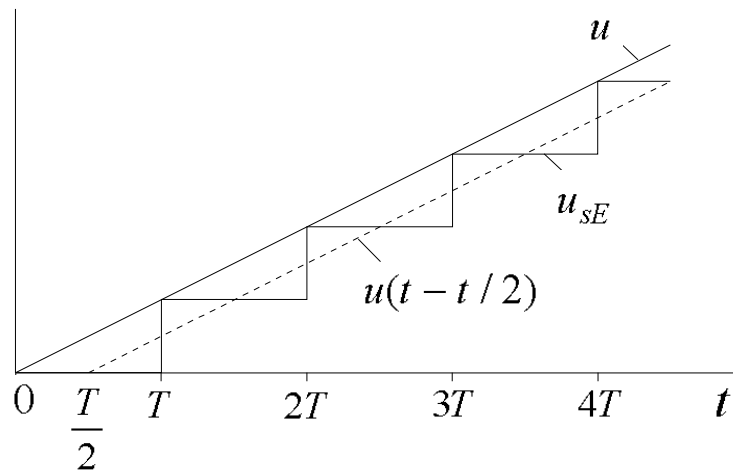
## Kvazikontinuirani postupak sinteze

- U slučaju primjene diskretnog regulatora reduciranog reda potrebno je postupak sinteze provesti u kontinuiranom ( $s$ ) području.
- Prethodno se diskretni sustav nadomješta ekvivalentnim kontinuiranim sustavom.
- Element koji povezuje diskretni s kontinuiranim dijelom sustava je i ekstrapolator nultog reda. Odziv serijskog spoja idealnog impulsnog elementa i ekstrapolatora nultog reda na pobudnu funkciju linearnog porasta dan je na slici 13.12.
- Stepeničasti odziv karakterističan za diskretne sustave aproksimira se pravcem koji za pobudnim signalom kasni za  $T / 2$ , te se aproksimira  $PT_1$  članom.



Sl. 13.12. a)

## Kvazikontinuirani postupak sinteze



Sl. 13.12. b)

$$G_{sE}(s) \approx e^{-sT/2} \approx \frac{1}{1 + sT/2} \quad (13 - 25)$$

- U nadomjesnom kontinuiranom sustavu vremenska konstanta  $T/2$  člana  $G_{sE}(s)$  promatra se kao parazitna konstanta koja se zbraja s ostalim parazitnim vremenskim konstantama  $T_{\Sigma i}$  otvorenog regulacijskog kruga:

$$T_{\Sigma} = \frac{T}{2} + \sum_i T_{\Sigma i} \quad (13 - 26)$$



## Prošireni optimum dvostrukog odnosa

- Optimum dvostrukog odnosa može se proširiti na linearne sustave opisane prijenosnom funkcijom proširenom nulama, vidi (13 - 1):

$$G(s) = \frac{y(s)}{y_R(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_2s^2 + b_1s + 1}{a_ns^n + \dots + a_2s^2 + a_1s + 1} = \frac{T_{n-1}^*T_{n-2}^* \dots T_1^*s^{n-1} + \dots + T_2^*T_1^*s^2 + T_1^*s + 1}{T_nT_{n-1} \dots T_1s^n + \dots + T_2T_1s^2 + T_1s + 1} \quad (13 - 27)$$

- Bez izvoda daje se skup jednačbi proširenog optimuma dvostrukog odnosa:

$$\begin{array}{cccc} T_1^2 - 2T_2T_1 & = & T_1^{*2} - 2T_2^*T_1^* & , \\ \vdots & & \vdots & \\ T_i^2 - 2T_{i+1}T_i & = & T_i^{*2} - 2T_{i+1}^*T_i^* & , \\ \vdots & & \vdots & \\ T_{n-1}^2 - 2T_nT_{n-1} & = & T_{n-1}^{*2} & . \end{array} \quad (13 - 28)$$

odnosno:

$$a_i^2 - 2a_{i-1}a_{i+1} = \frac{a_{i-1}^2}{b_{i-1}^2} (b_i^2 - 2b_{i-1}b_{i+1}) \quad (13 - 29)$$

## Prošireni optimum dvostrukog odnosa

- Zadovoljavanje jednadžbi (13 - 28) položaj polova prilagođava se položaju nule prijenosne funkcije (13 - 27) tako da sustav ima dobro prigušen odziv.
- Izjednačenjem desnih strana izraza (13 - 28) s nulom i zamjenom  $2$  s  $1/D_{i+1}$  dobije opća jednadžba (13 - 7) standardnog oblika optimuma dvostrukog odnosa.

## Modulni optimum

- Polazi od zahtjeva da amplitudno-frekvencijska karakteristika linearnog sustava proizvoljnog reda ima što širi propusni opseg bez rezonantnog izdizanja (njem. *Betragsoptimum*, engl. *Magnitude Optimum*).
- Modulni optimum poznat je još iz 1946. godine, a šire značenje dobiva u radu Keßlera iz 1955. godine.

### Izvod

- Za linearne sustave opisane prijenosnom funkcijom (13 - 1) amplitudno-frekvencijska karakteristika

$$M(\Omega) = |G(j\Omega)| \quad (13 - 30)$$

zadržat će vrijednost  $M(0) = 1$  u širokom opsegu frekvencija, ako vrijedi:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{d^i M(\Omega)}{d\Omega^i} = 0 ; \quad i = 1, \dots, l ; \quad 1 \leq l \leq n - 1 \quad (13 - 31)$$

## Modulni optimum - izvod

- Umjesto ove pogodnije je koristiti relaciju:

$$\lim_{\Omega^2 \rightarrow 0} \frac{d^i H(\Omega^2)}{d(\Omega^2)^i} = 0 \quad (13 - 32)$$

gdje je:

$$H(\Omega^2) = [M(\Omega)]^2 = G(j\Omega)G(-j\Omega) = \frac{1}{1 + (a_1^2 - 2a_0a_2)\Omega^2 + (a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4)\Omega^4 + \dots} \quad (13 - 33)$$

- Konačne jednadžbe standardnog oblika **modulnog optimuma** dobivene iz (13 - 32) i (13 - 33) glase:

$$\begin{aligned} a_1^2 - 2a_0a_2 &= 0, \\ a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4 &= 0, \\ a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_0a_6 &= 0, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots & \\ a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n &= 0. \end{aligned} \quad (13 - 34)$$

## Modulni optimum - izvod

- U slučaju da je proces opisan prijenosnom funkcijom koja sadrži nule, dobiju se jednačbe proširenog modulnog optimuma:

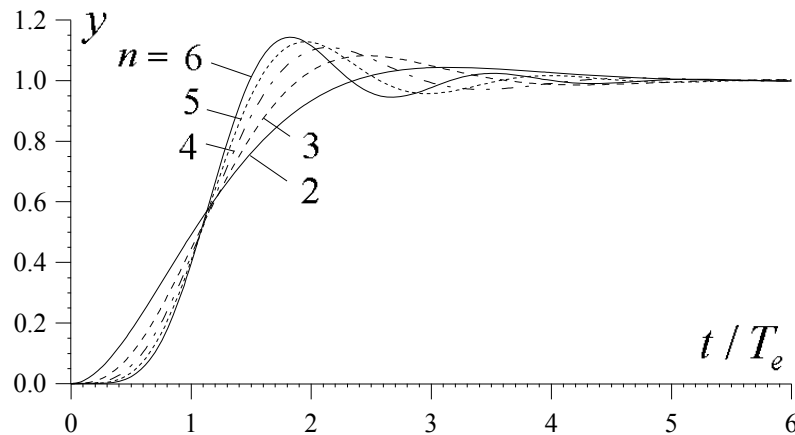
$$\begin{aligned}
 a_1^2 - 2a_0a_2 &= b_1^2 - 2b_0b_2 , \\
 a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_0a_4 &= b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4 , \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 a_i^2 + 2\sum_{j=1}^i (-1)^j a_{i-j}a_{i+j} &= b_i^2 + 2\sum_{j=1}^i (-1)^j b_{i-j}b_{i+j} \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n &= b_{n-1}^2 .
 \end{aligned} \tag{13 - 35}$$

## Analiza optimiranog sustava

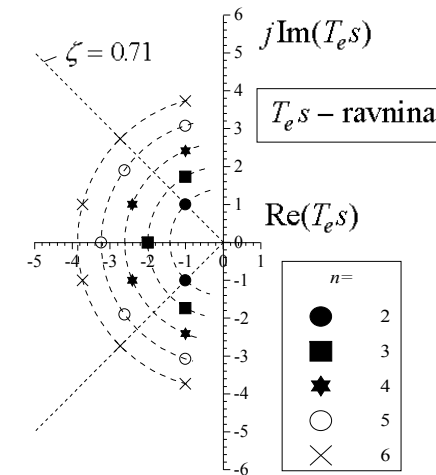
- Prva i posljednja jednađba standardnog oblika modulnog optimuma (13 - 34) ekvivalentne su odgovarajućim jednađbama optimuma dvostrukog odnosa (13 - 7) i (13 - 16).
- Ova dva optimuma su ekvivalentna za sustave reda  $n \leq 3$  (Sl. 13.8. i Sl. 13.13.).
- Za sustave reda  $n > 3$  pojavljuju se dodatni članovi u izrazima (13 - 24) modulnog optimuma.
- Postupak optimiranja složeniji je nego u slučaju optimuma dvostrukog odnosa.

## Analiza optimiranog sustava

Rezultati analize sustava različitog reda  $n$  projektiranih prema modulnom optimumu



*prijelazne funkcije*



*položaj polova*

Sl. 13.13.

- Dobiveni su polovi Butterworthovog filtera s karakterističnom frekvencijom  $\Omega_L = \sqrt[n]{1/a_n}$ .

## Analiza optimiranog sustava

- Rastom reda sustava  $n$  dio polova primiće se sve bliže imaginarnoj osi. Posljedica je slabljenje prigušenja optimiranog sustava, što se ogleda u povećanom iznosu karakterističnih odnosa  $D_i > 0,5$  (vidi sljedeću tablicu).

Odnos	Red sustava $n$				
	2	3	4	5	6
$D_2$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$D_3$	-	0,5	0,586	0,618	0,634
$D_4$	-	-	0,5	0,618	0,667
$D_5$	-	-	-	0,5	0,634
$D_6$	-	-	-	-	0,5

- Povećani iznosi karakterističnih odnosa rezultiraju nešto bržim odzivom sustava u odnosu na primjenu optimuma dvostrukog odnosa.



## Optimiranje vremenski diskretnih sustava

- Kao i kod optimuma dvostrukog odnosa moguć je izravan postupak optimiranja diskretnih sustava temeljen na **diskretnom obliku modulnog optimuma**.
- Neka je linearni diskretni sustav opisan sljedećom prijenosnom funkcijom:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{a_n z^n + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \quad m < n \quad (13 - 36)$$

- Primjena kriterija optimiranja (13 - 32) daje sljedeće konačne jednadžbe modulnog optimuma:

$$\begin{aligned} K^2(a_1^* + 2^2 a_2^* + \dots + n^2 a_n^*) &= b_1^* + 2^2 b_2^* + \dots + m^2 b_m^*, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ K^2(a_1^* + 2^{2i} a_2^* + \dots + n^{2i} a_n^*) &= b_1^* + 2^{2i} b_2^* + \dots + m^{2i} b_m^*, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ K^2[a_1^* + 2^{2(n-1)} a_2^* + \dots + n^{2(n-1)} a_n^*] &= b_1^* + 2^{2(n-1)} b_2^* + \dots + m^{2(n-1)} b_m^*. \end{aligned} \quad (13 - 37)$$

## Optimiranje vremenski diskretnih sustava

- Koeficijenti  $a_i^*$  i  $b_i^*$ , te pojačanje sustava  $K$  povezani su s koeficijentima prijenosne funkcije (13 - 26) diskretnog sustava preko izraza:

$$a_i^* = \sum_{j=0}^{n-i} a_j a_{j+i} = a_0 a_1 + a_1 a_2 + \dots + a_{n-i} a_n, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13 - 38)$$

$$b_i^* = \sum_{j=0}^{m-i} b_j b_{j+i} = b_0 b_1 + b_1 b_2 + \dots + b_{m-i} b_m, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13 - 39)$$

$$K = G(1) = \frac{b_0 + b_1 + \dots + b_m}{a_0 + a_1 + \dots + a_n}. \quad (13 - 40)$$

## Sinteza regulacijskog sustava

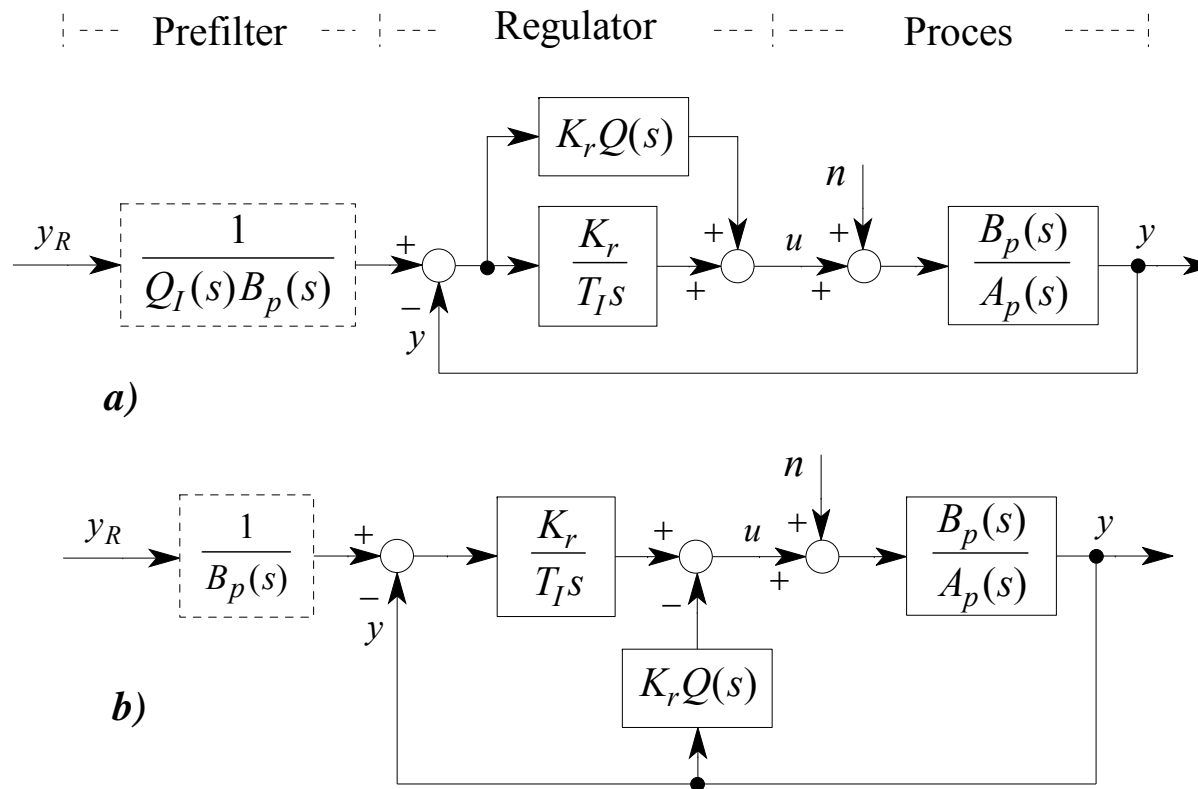
- Ovdje se uspoređuju prikazani optimumi i obrađuju neki zajednički aspekti njihove primjene, kao što su izbor strukture regulatora i s njim povezana odluka o primjeni standardnog ili proširenog oblika optimuma, te izbor vremena uzorkovanja.

### Usporedba optimuma dvostrukog odnosa i modulnog optimuma

- Optimum dvostrukog odnosa i modulni optimum ekvivalentni su za sustave reda  $n \leq 3$ .
- U primjenama treba dati prednost optimumu dvostrukog odnosa iz sljedeća dva razloga:
  - jednostavnost postupka sinteze sustava s regulatorom reduciranog reda,
  - potpuna fleksibilnost i jednostavnost podešavanja prigušenja i vremena odziva sustava promjenom iznosa karakterističnih odnosa
  - mogućnost algebarske analize optimiranog sustava temeljene na iznosima nedominantnih karakterističnih odnosa

## Usporedba standardnog i proširenog oblika optimuma

- Klasična struktura linearnog kontinuiranog regulacijskog kruga s  $\text{PID}_v$  regulatorom prikazana je blokovskom shemom na slici 13.14. a).



Sl. 13.14.

## Usporedba standardnog i proširenog oblika optimuma

- $PID_v$  regulator se sastoji od integralnog člana  $K_r / (T_I s)$  i proporcionalno-derivacijskog (PD) člana  $v$ -tog reda predstavljenog polinomom

$$Q(s) = 1 + q_1 s + q_2 s^2 + \dots + q_v s^v \quad (13 - 41)$$

- $PID_v$  regulator je ekvivalentan regulatoru stanja s pojačanjima  $K_r q_i$ .
- U grani referentne veličine regulacijskog kruga ugrađen je kao opcija prefilter, koji sadrži polinom  $Q_I(s)$  definiran prema:

$$Q_I(s) = 1 + T_I s Q(s) \quad (13 - 42)$$

- Prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu  $y_R$  (bez prefiltera) i poremećajnu veličinu  $n$  jesu redom:

$$G(s) = \frac{y(s)}{y_R(s)} = \frac{K_r Q_I(s) B_p(s)}{T_I s A_p(s) + K_r Q_I(s) B_p(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (13 - 43)$$

$$G_n(s) = \frac{y(s)}{n(s)} = \frac{T_I s B_p(s)}{T_I s A_p(s) + K_r Q_I(s) B_p(s)} = \frac{B_n(s)}{A(s)} \quad (13 - 44)$$

## Usporedba standardnog i proširenog oblika optimuma

- Uz primjenu **proširenog oblika** optimuma dvostrukog odnosa (13 - 28) ili modulnog optimuma (13 - 35) nule regulatora razmještaju se u blizini dominantnih polova procesa, kompenzirajući tako njihov utjecaj na usporenje odziva regulacijskog kruga s obzirom na referencu.
- U specijalnom slučaju jednakosti svih polova i nula dolazi do njihovog kraćenja u prijenosnoj funkciji (13 - 43) zatvorenog regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu.
- U prijenosnoj funkciji (13 - 44) s obzirom na poremećajnu veličinu ne pojavljuju se nule koje bi pokratile dominantne polove procesa.
- Posljedica je spor odziv regulacijskog kruga s obzirom na poremećajnu veličinu.
- Povoljan odziv regulacijskog kruga s obzirom na poremećajnu veličinu postiže se optimiranjem položaja polova prijenosnih funkcija (13 - 43) i (13 - 44), ne vodeći računa o položaju nula.
- Nepovoljan utjecaj nula prijenosne funkcije (13 - 43) s obzirom na referencu ogleda se u izraženom forsiranju izvršne veličine  $u$  i velikom nadvišenju regulirane veličine  $y$ .

## Usporedba standardnog i proširenog oblika optimuma

- Da bi se to spriječilo ugrađuje se **prefilter** u granu referentne veličine čiji polovi krate nule prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga.
- Realizacija prefiltera se pojednostavljuje, odnosno uz  $B_p(s) = 1$  izbjegava, ako se primjeni **modificirana struktura regulatora** (Slika 13.14. b)) kod koje proporcionalna i derivacijska komponenta regulatora djeluje samo na signal povratne veze.
- Tako izveden regulator ne unosi nule u prijenosnoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga (13 - 43). Nedostatak primjene standardnog u odnosu na prošireni oblik optimuma je sporiji odziv regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu. No, ovaj se nedostatak otklanja ugradnjom **pretkompenzatora** u granu referentne veličine (vidi Potpoglavlje 3.4 u skripti „Slijedni sustavi s izraženom elastičnošću, zračnošću i trenjem“).
- Ako su nule procesa (korijeni polinoma  $B_p(s)$ ) nestabilne, odnosno slabo prigušene, tada je realizacija prefiltera nemoguća, odnosno problematična.
- U slučaju nepovoljnog utjecaja ovih nepokraćenih nula procesa neophodna je primjena proširenog oblika optimuma.

## Izbor vremena uzorkovanja

- Vrijeme uzorkovanja bira se u skladu s parametrima matematičkog modela mehaničkog sustava (**vidi Predavanje 12**)
- Frekvencija uzorkovanja  $2\pi / T$  treba biti barem  $N_1 = 6 - 12$  puta veća od frekvencije slabo prigušenih konjugirano-kompleksnih polova procesa:

$$T = \frac{2\pi}{N_1 \Omega_0} \quad (13 - 45)$$

- Uz odabir  $N_1 = 2\pi$  dobije se:

$$T = \frac{1}{\Omega_0} \quad (13 - 46)$$

- S druge strane, vrijeme uzorkovanja bira se s obzirom na vrijeme odziva zatvorenog regulacijskog kruga, koje je određeno nadomjesnom vremenskom konstantom  $T_e$ .



## Usporedba standardnog i proširenog oblika optimuma

- Vrijeme uzorkovanja  $T$  u tome slučaju treba biti  $N_2 = 10 - 20$  puta manje od periode prigušenih oscilacija  $T_d$  zatvorenog regulacijskog kruga.
- Primjenom ovog pravila na proces (13 - 1) s karakterističnim polinomom (13 - 14) (uz aproksimaciju s prva tri člana) dobije se:

$$T = \frac{T_d}{N_2} = \frac{2\pi}{N_2 \Omega_d} = \frac{4\pi D_2}{N_2 \sqrt{4D_2 - 1}} T_e \quad (13 - 47)$$

- Ukoliko se uvrsti  $D_2 = 0,5$  i  $N_2 \approx 18$  dobije se:

$$T_e = \frac{N_2 \sqrt{4D_2 - 1}}{4\pi D_2} T = 2\sqrt{2} T \quad (13 - 48)$$

- Kod primjene kvazikontinuiranog postupka sinteze općenito je potrebno manje vrijeme uzorkovanja (veći faktori  $N_1$  i  $N_2$ ).

## Sinteza sustava

- Regulacijski krug proširuje se pretkompenzatorom s ciljem:
  - poboljšanja dinamičkog vladanja sustava s obzirom na referentnu veličinu
  - smanjenja pogreške slijeđenja referentne veličine.
- U narednom se izlaganju razvijaju postupci sinteze pretkompenzatora punog i reduciranog reda za regulacijski krug proizvoljnog reda optimiran prema optimumu dvostrukog odnosa.
- Također se provodi analiza utjecaja nula prijenosne funkcije diskretnog zatvorenog sustava.

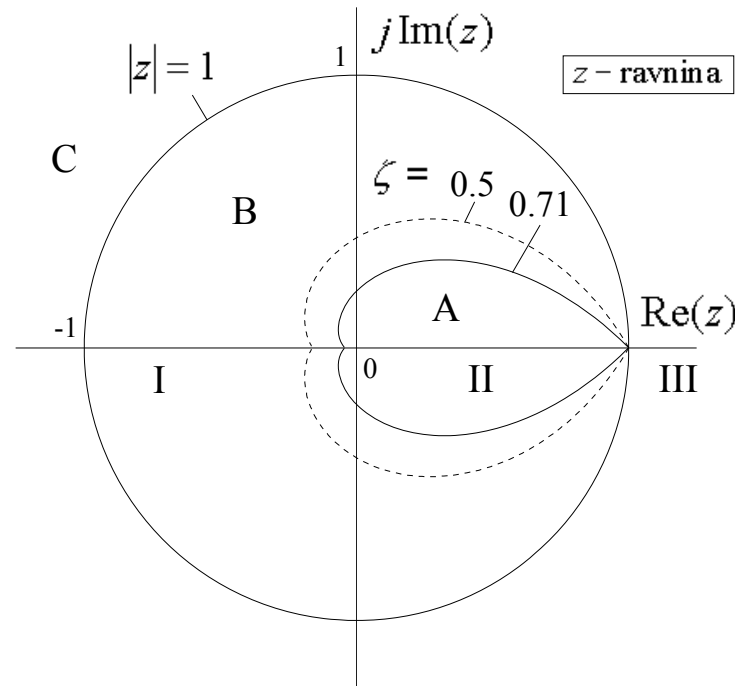
### Nule vremenski-diskretnog sustava

- $n$  polova  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , racionalne prijenosne funkcije vremenski kontinuiranog sustava  $n$ -tog reda preslikava se diskretizacijom sustava u  $n$  diskretnih polova  $z_i$  relacijom:

$$z_i = e^{Ts_i} \quad (13 - 49)$$

- Odziv diskretnog sustava je stabilan ako se svi polovi  $z_i$  nalaze unutar jedinične kružnice prikazane na slici 13.15.

## Nule vremenski-diskretnog sustava



Sl. 13.15.

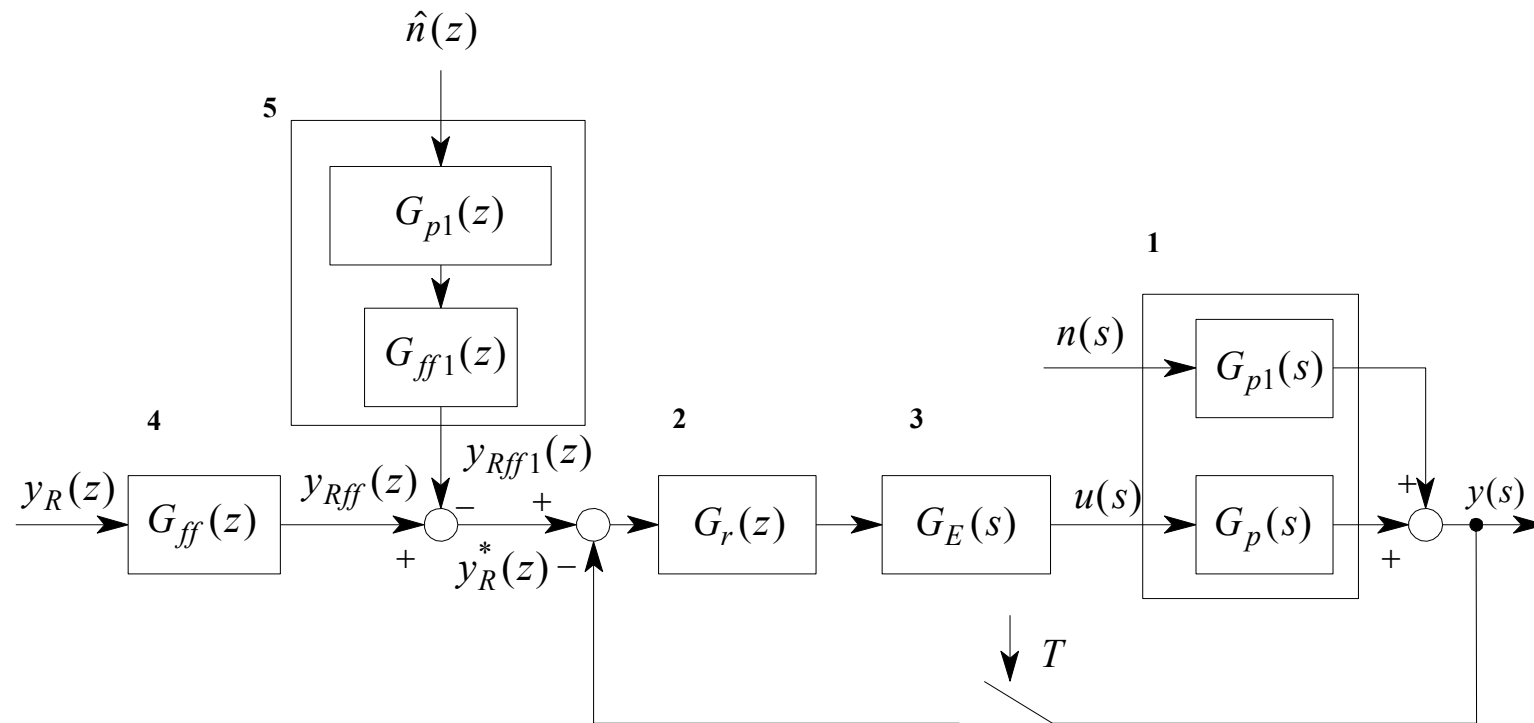
- Odziv je, k tome, dobro prigušen ako polovi leže u području prigušenja  $\zeta > \zeta_{\min} = 0,7 \dots 0,5$  (područje **A** na slici 13.15).
- Slabo prigušeni polovi (područje **B**) razmještaju se u lijevoj poluravnini kada je vrijeme uzorkovanja **T** relativno veliko.

## Nule vremenski-diskretnog sustava

- Ovi polovi izazivaju naglašene oscilacije odziva koje se izmjenjuju u svakom intervalu uzorkovanja (učinak "zvonjave", engl. *ringing effect*).
- Ukupno  $m$  nula racionalne prijenosne funkcije vremenski kontinuiranog sustava  $n$ -tog reda preslikava se diskretizacijom sustava u ukupno  $n - 1$  diskretnih nula.
- Od toga je  $m$  **izvornih nula**, dok preostalih  $n - m - 1$  nula jesu **dodatne nule** nastale procesom uzorkovanja.
- Dodatne se nule razmještaju u lijevoj  $z$ -poluravnini (obično na negativnom dijelu realne osi), te po formalnoj analogiji s diskretnim polovima spadaju u slabo prigušene ili nestabilne nule.
- Za mala vremena uzorkovanja  $T$  dodatne su nule približno jednake nulama prijenosne funkcije dobivene diskretizacijom člana  $1 / s^{n-m}$ .
- Slabo prigušene ili nestabilne diskretne nule, među koje su uključene praktički sve dodatne nule, ne smiju se kratiti polovima regulatora, prefiltera ili pretkompenzatora.

## Struktura sustava

- Struktura sustava prikazana je blokovskom shemom na slici 13.16.



Sl. 13.16.

- Sustav se sastoji od **regulacijskog kruga** danog u digitalnoj izvedbi i linearnog digitalnog **prekompensatora**  $G_{ff}(z)$  (engl. *feedforward controller*) smještenog u grani referentne veličine.

## Struktura sustava

- Zadatak je pretkompensatora:
  - ubrzanje odziva regulacijskog kruga s obzirom na referentnu veličinu  $y_R$ ,
  - smanjenje pogreške slijeđenja referentne veličine.
- Dodatno se može ugraditi i pretkompensator  $G_{ff1}(z)$  s ciljem efikasne kompenzacije utjecaja poremećajne veličine  $n$ .
- Preduvjeti za to su mogućnost mjerenja ili estimacije poremećajne veličine  $n$  i poznavanje prijenosne funkcije procesa  $G_{p1}(s)$  s obzirom na poremećajnu veličinu.
- Postupak sinteze oba pretkompensatora je jednak.
- Sinteza sustava provodi se u dva temeljna koraka:
  - sinteza regulacijskog kruga
  - sinteza pretkompensatora.
- Sa stanovišta jednostavnosti postupka optimiranja regulacijskog kruga i kvalitete vladanja s obzirom na poremećajnu veličinu pogodno je odrediti parametre regulatora primjenom standardnog oblika optimuma dvostrukog odnosa (vidi Potpoglavlje 3.3 u skripti „Slijedni sustavi s izraženom elastičnošću, zračnošću i trenjem“).

## Struktura sustava

- Prijenosna funkcija optimiranog zatvorenog regulacijskog kruga glasi:

$$G_{cl}(z) = \frac{y(z)}{y_R^*(z)} = \frac{B_{cl}(z)}{A(z)} = \frac{B_{cl}^+(z)B_{cl}^-(z)}{A(z)} \quad (13 - 50)$$

- Polinom  $A(z)$  zadovoljava optimum dvostrukog odnosa.
- Nule prijenosne funkcije razvrstane su u dvije skupine:
  - nestabilne ili slabo prigušene nule (polinom  $B_{cl}^-(z)$ ),
  - dobro prigušene nule uključene u polinom  $B_{cl}^+(z)$ .
- Kraćenje dobro prigušenih nula zatvorenog regulacijskog kruga i uvođenje novih, kompenzacijskih nula (preko polinoma  $B(z)$ ) postiže se pretkompenzatorom s prijenosnom funkcijom:

$$G_{ff}(z) = \frac{y_{Rff}(z)}{y_R(z)} = \frac{A_F(1)}{B_{cl}^-(1)} \frac{B(z)}{A_F(z)B_{cl}^+(z)} \quad (13 - 51)$$

## Struktura sustava

- Kraćenjem dobro prigušenih nula regulacijskog kruga pretkompensator preuzima i ulogu prefiltera.
- Kompenzacijske nule kompenziraju utjecaj polova regulacijskog kruga sadržanih u polinomu  $A(z)$ , čime se ubrzava odziv sustava s obzirom na referentnu veličinu, odnosno smanjuje pogreška slijeđenja referentne trajektorije.
- U primjenama kod kojih referentna trajektorija nije unaprijed poznata (npr. vojne primjene) pretkompensator (13 - 51) mora biti kauzalan.
- Radi toga je u prijenosnu funkciju pretkompensatora (13 - 51) uključen polinom  $A_F(z)$  reda:

$$n_F = \deg A_F = \deg B - \deg B_{cl}^+ \quad (13 - 52)$$

- *Dead-beat* polinom  $A_F(z) = z^{n_F}$  daje najjednostavniju realizaciju i neizmjenjen oblik odziva sustava s minimalnim unijetim kašnjenjem iznosa  $n_F T$ .
- Nedostatak *dead-beat* polinoma  $A_F(z)$ :
  - vrlo izraženo forsiranje izlaznog signala pretkompensatora  $y_{Rff}$  i izvršnog signala  $u$ ,
  - velika osjetljivost sustava na šum u referentnom signalu  $y_R$ .



## Struktura sustava

- Ovi nedostaci dolaze više do izražaja uz manje vrijeme uzorkovanja  $T$ .
- Uz relativno mala vremena uzorkovanja koristi se modificirani *dead-beat* polinom s jednim polom van ishodišta:

$$A_F(z) = z^{n_F-1} (z - e^{-T/T_F}) = z^{n_F-1} (z - z_F) \quad (13 - 53)$$

- Ako se zahtijeva jače filtrirajuće djelovanje polinoma  $A_F(z)$  povoljno je svih  $n_F$  polova postaviti van ishodišta na iznose koje daje npr. Butterworthov filter.
- U primjenama kod kojih je referentna veličina unaprijed poznata (npr. roboti ili alatni strojevi) može se polinom  $A_F(z)$  isključiti iz prijenosne funkcije prekompenzatora.
- Prijenosna funkcija sustava (prema (13 - 50) i (13 - 51)) glasi:

$$G(z) = \frac{y(z)}{y_R(z)} = G_{ff}(z) G_{cl}(z) = \frac{A_F(1) B_{cl}^-(z) B(z)}{B_{cl}^-(1) A_F(z) A(z)} \quad (13 - 54)$$

- Uvjet stacionarne točnosti sustava (13 - 54) je:

$$B(1) = A(1) \quad (13 - 55)$$

## Pretkompenzator punog reda

- Optimalni pretkompenzator punog reda određen je trivijalnim izborom parametara:

$$B(z) = A(z) \quad (13 - 56)$$

- Nulama pretkompenzatora punog reda krate se svi polovi zatvorenog regulacijskog kruga (13 - 50)
- Tako se u potpunosti kompenzira utjecaj polova na usporenje odziva sustava.
- Izborom *dead-beat* polinoma  $A_F(z)$ , ukupna prijenosna funkcija sustava (13 - 54) prelazi u

$$G(z) = G_{ff}(z)G_{cl}(z) = \frac{A_F(1)}{B^-(1)} \frac{B^-(z)}{A_F(z)} = \frac{1}{B_{cl}^-(1)} \frac{B_{cl}^-(z)}{z^{n_F}} \quad (13 - 57)$$

- Tako projektirani sustav ima vremenski optimalno (*dead-beat*) vladanje:
  - aperiodski oblik prijelazne funkcije,
  - konačno vrijeme smirivanja u  $n_F$  koraka uzorkovanja.

## Pretkompenzator reduciranog reda - sinteza u kontinuiranom području

### Postupak:

- Prvo se određuje nadomjesna kontinuirana prijenosna funkcija diskretnog zatvorenog regulacijskog kruga.
- Nakon toga se optimirani kontinuirani pretkompenzator prevodi u diskretni oblik.

### Nadomjesni kontinuirani sustav

- Karakteristični polinom  $A(z)$  zatvorenog regulacijskog kruga s prijenosnom funkcijom  $n$ -tog reda transformira se u kontinuirani oblik prema izrazu:

$$A_c(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}{\left| \prod_{i=1}^n s_i \right|} = \frac{(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n)}{|s_1 s_2 \cdots s_n|}, \quad s_i = \frac{1}{T} \ln z_i < 0, \quad A(z_i) = 0 \rightarrow z_i$$

(13 - 58)

## Nadomjesni kontinuirani sustav

- Ovaj se korak sinteze izostavlja ako je prethodna sinteza regulacijskog kruga provedena primjenom kvazikontinuiranog postupka.
- Kompenzacijski polinom  $B(z)$  diskretnog pretkompenzatora (13 - 51) reduciranog reda  $m < n$  nadomješta se kontinuiranim kompenzacijskim polinomom  $B_c(s)$ .
- Ukupna prijenosna funkcija diskretnog sustava (13 - 54) nadomješta se kontinuiranom prijenosnom funkcijom:

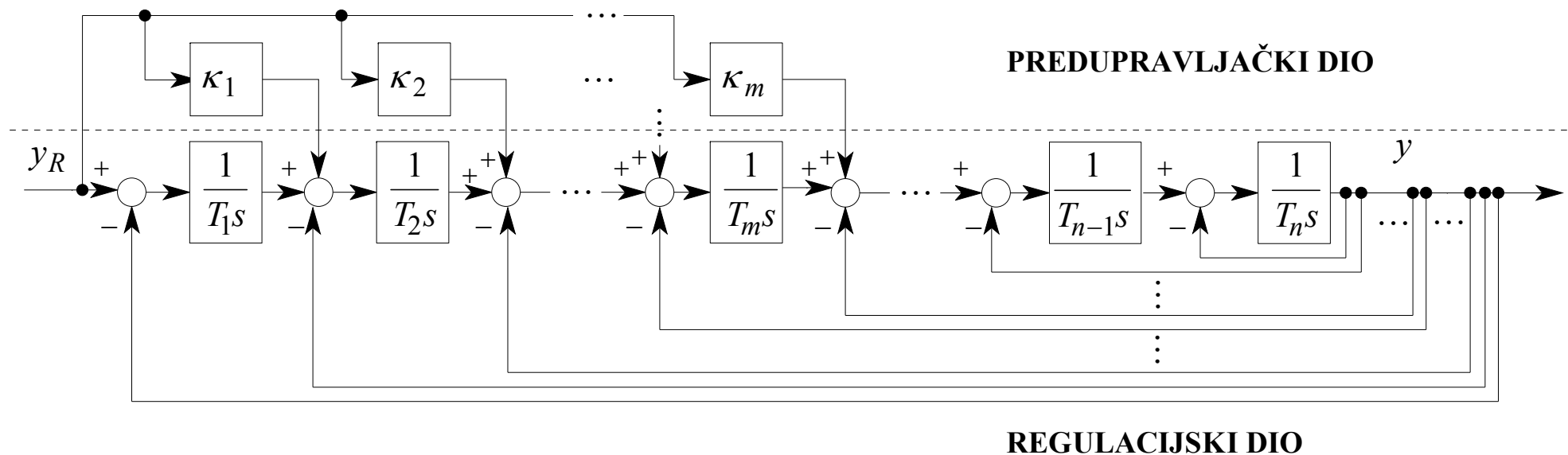
$$G_c(s) = \frac{B_c(s)}{A_c(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + 1} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + 1}{D_n D_{n-1}^2 \dots D_2^{n-1} T_e^n s^n + \dots + D_2 T_e^2 s^2 + T_e s + 1} \quad (13 - 59)$$

- Struktura sustava s danom prijenosnom funkcijom, dobije se proširenjem kaskadne strukture regulacijskog kruga (Sl. 13.1.) s predupravljačkim granama s pojačanjima:

$$\kappa_i = \frac{b_i}{a_i}, \quad i = 1, \dots, m \quad (13 - 60)$$

## Nadomjesni kontinuirani sustav

- Nadomjesna blokovska shema sustava regulacije s pretkompenzatorom reduciranog reda:



Sl. 13.17.

- Preko predupravljačkih grana pojačani referentni signal  $y_R$  prenosi se prema podređenim krugovima kaskadne strukture sustava. Tako se preskaču sporiji nadređeni krugovi i ubrzava odziv sustava s obzirom na referentnu veličinu.

## Optimiranje pretkompenzatora

- Optimalni iznosi koeficijenata kompenzacijskog polinoma  $B_c(s)$  u (13 - 59) određuju se rješenjem sustava nelinearnih algebarskih jednačbi proširenog oblika modulnog optimuma. (13 - 31)
- Traženo je rješenje jednoznačno određeno zahtjevom da  $B_c(s)$  bude *Hurwitzov* polinom, (nule pretkompenzatora leže u lijevoj polovini  $s$ -ravnine)
- Analitičko rješenje postoji samo za pretkompenzatore reda  $m \leq 2$ :

$m = 1$ :

$$b_1 = T_e \sqrt{1 - 2D_2} \quad (13 - 61)$$

$m = 2$ :

$$b_1 = T_e \sqrt{1 - 2D_2 \left( 1 - \sqrt{1 - 2D_3 + 2D_4 D_3^2 D_2} \right)} \quad (13 - 62)$$

$$b_2 = T_e^2 D_2 \sqrt{1 - 2D_3 + 2D_4 D_3^2 D_2} \quad (13 - 63)$$

te za najviši koeficijent pretkompenzatora reda  $m=n-1$ :

$$b_{n-1} = T_e^{n-1} D_{n-1} D_{n-2}^2 \cdots D_2^{n-2} \sqrt{1 - 2D_n} \quad (13 - 64)$$

- Za pretkompenzator reda  $m > 2$  dobiju se relativno složena implicitna rješenja, te se predlaže numerički postupak rješavanja sustava.

## Optimiranje pretkompenzatora

- Optimiranjem pretkompenzatora za regulacijski sustav s regulatorom punog reda podešenog prema optimumu dvostrukog odnosa (13 - 16) dobiju se iznosi predupravljačkih pojačanja  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  dani u narednoj tablici 13.1

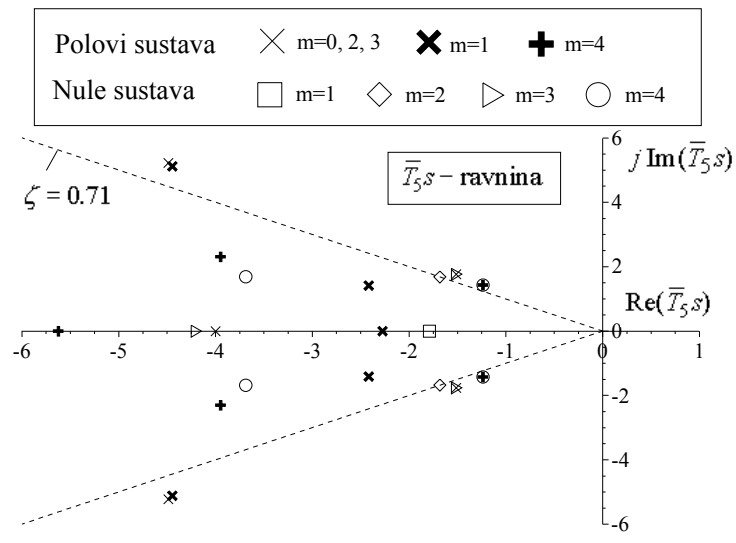
***Tablica 13.1** Optimalni iznosi predupravljačkih pojačanja  $\kappa_1, \dots, \kappa_m$  kontinuiranog pretkompenzatora različitog reda  $m$  za sustave različitog reda  $n = 2, \dots, 6$ .*

$n$	$m$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\kappa_4$	$\kappa_5$
$n \geq 2$	1	0,447	-	-	-	-
3	2	0,669	0,447	-	-	-
$n \geq 4$	2	0,595	0,354	-	-	-
4	3	0,828	0,686	0,447	-	-
5	3	0,799	0,638	0,354	-	-
5	4	0,914	0,836	0,688	0,447	-
6	3	0,796	0,634	0,348	-	-
6	4	0,900	0,809	0,638	0,354	-
6	5	0,957	0,916	0,836	0,688	0,447

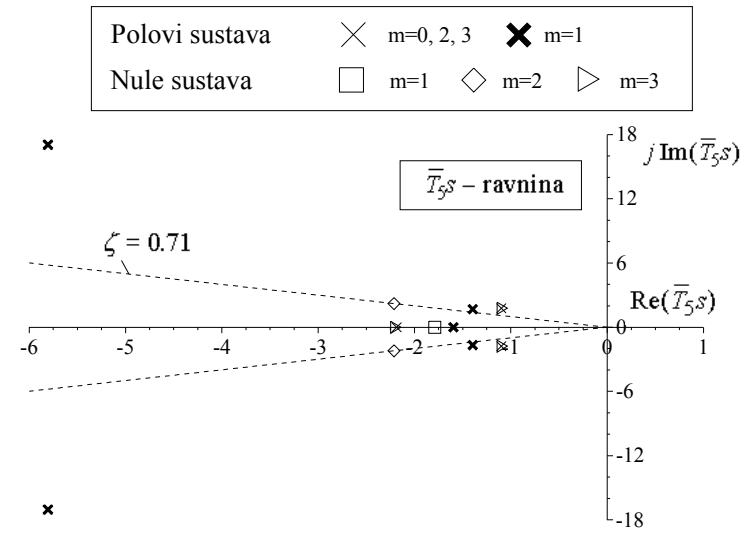
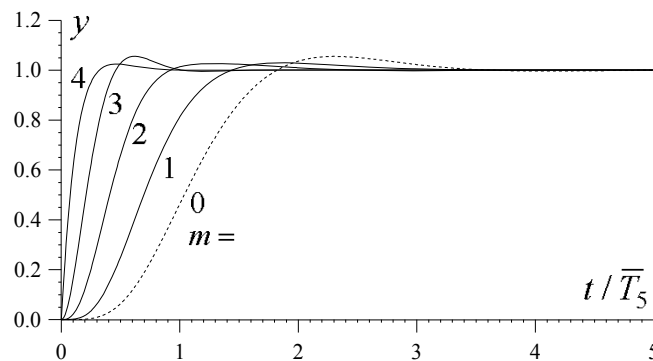
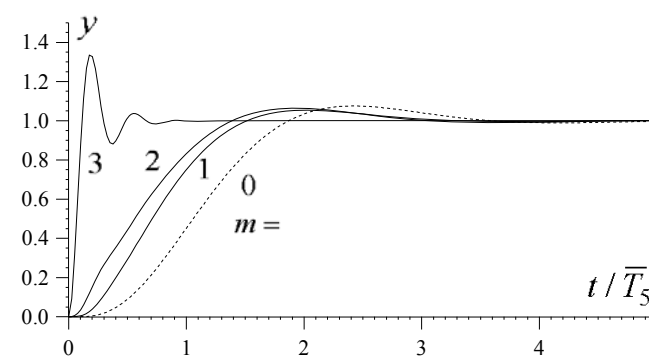
# Optimiranje pretkompenzatora

## Kompenzator reda $m$

### Regulator punog reda


**a1)**

### Regulator reduciranog reda


**a2)**

**b1)**

**b2)**



## Optimiranje pretkompenzatora

- Raspored polova i nula i prijenosne funkcije optimiranog sustava 5. reda prikazani su na slici 13.18. (vrijeme  $t$  i Laplaceov operator  $s$  normirani su s obzirom na vremensku konstantu  $\bar{T}_n = T_n / 0,5^{n-1}$  ( $n = 5$ ))
- Nule pretkompenzatora razmještaju se u blizini dominantnih polova zatvorenog regulacijskog kruga.
- Kompenzacijom utjecaja dominantnih polova smanjuje se vrijeme porasta prijelazne funkcije sustava i to približno za dvostruko sa svakim povećanjem reda pretkompenzatora.
- Pritom se zadržava povoljan kvaziaperiodski oblik prijelazne funkcije s nadvišenjem ne većim od 6%.

## Pretkompenzator reduciranog reda - sinteza u diskretnom području

- Prijenosna funkcija sustava (13 - 54) uz zanemarenje utjecaja nedominantnog člana poprima sljedeći oblik:

$$G(z) = G_{cl}(z)G_{ff}(z) / G_x(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \quad (13 - 65)$$

gdje je  $G_x(z) = \frac{A_F(1)B_{cl}^-(z)}{B_{cl}^-(1)A_F(z)}$  (prema 13-57)

- Primjena uvjeta točnosti sustava u stacionarnom stanju ( $B(1) = A(1)$ ) (13 - 55)

$$b_0 + b_1 + \dots + b_{m-1} + b_m = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_\Sigma \quad (13 - 66)$$

- Optimalni iznosi koeficijenata kompenzacijskog polinoma  $B(z)$  određuju se primjenom jednadžbi diskretnog oblika modulnog optimuma.

## Pretkompenzator reduciranog reda - sinteza u diskretnom području

- Ove jednadžbe tvore sustav algebarskih jednadžbi po traženim koeficijentima kompenzacijskog polinoma  $B(z)$  :

$$\begin{bmatrix} 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} \\ 0 & 0 & b_0 & \dots & b_{m-3} & b_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{m-4} & b_{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{m-1} \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \\ \vdots \\ b_m^* \\ a_\Sigma \end{bmatrix} \quad (13 - 67)$$

gdje je:

$$\begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_m^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & m^2 \\ 1^4 & 2^4 & \dots & m^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2m} & 2^{2m} & \dots & m^{2m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & \dots & n^2 \\ 1^4 & 2^4 & \dots & n^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{2m} & 2^{2m} & \dots & n^{2m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (13 - 68)$$

## Pretkompensator reduciranog reda - sinteza u diskretnom području

- Analitičko rješenje ovog sustava postoji samo za pretkompensatore 1. ili 2. reda:

$$m = 1: \quad b_{0,1} = \frac{a_{\Sigma} \mp \sqrt{a_{\Sigma}^2 - 4b_1^*}}{2} ;$$

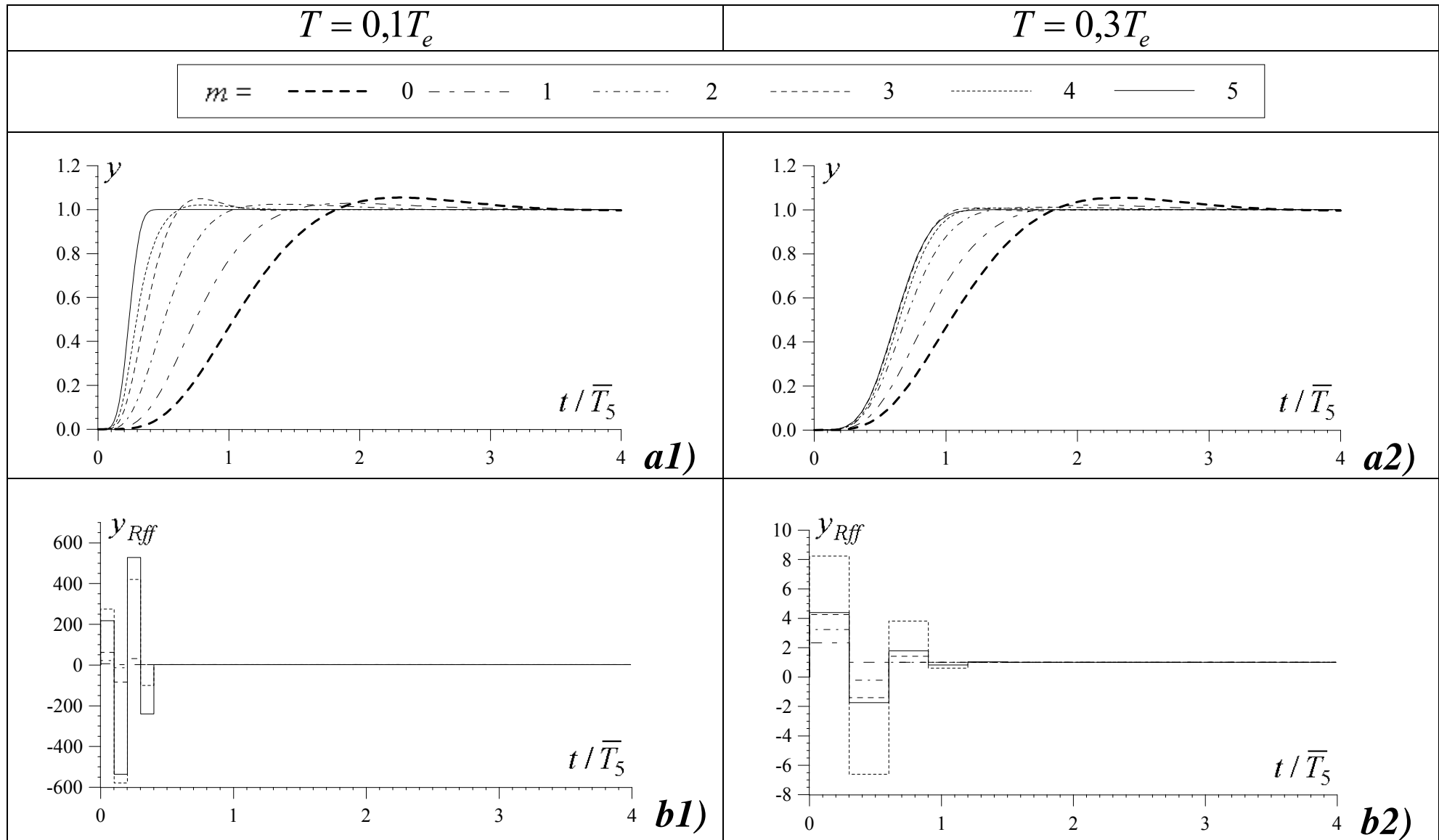
$$m = 2: \quad b_1 = \frac{a_{\Sigma} - \sqrt{a_{\Sigma}^2 - 4b_1^*}}{2} , \quad (13 - 69)$$

$$b_2 = \frac{a_{\Sigma} - b_1 + \sqrt{(a_{\Sigma} - b_1)^2 - 4b_2^*}}{2} ,$$

$$b_0 = a_{\Sigma} - b_1 - b_2 .$$

- Optimalni parametri pretkompenzatora reda  $m > 2$  računaju se numeričkim postupkom, npr. kao funkcija u MATLAB-u.
- Prijelazne funkcije optimiranog sustava 5. reda prikazane su na slici 13.19 za različiti red pretkompenzatora  $m$  i dva različita vremena uzorkovanja  $T$ .

# Pretkompenzator reduciranog reda - sinteza u diskretnom području



## Pretkompensator reduciranog reda - sinteza u diskretnom području

- Prijelazna funkcija sustava s pretkompensatorom punog reda ima vremenski optimalan aperiodski oblik s konačnim vremenom smirivanja u  $n$  koraka uzorkovanja.
- Prijelazne funkcije sustava s pretkompensatorom reduciranog reda  $m < n$  omeđene su prijelaznim funkcijama vremenski optimalnog i nekompenziranog sustava.
- Povećanjem vremena uzorkovanja proporcionalno raste vrijeme odziva vremenski optimalnog sustava.

Primjer: Osjetljivost sustava na pogreške modeliranja zatvorenog regulacijskog kruga.