

Uvod u mjeriteljstvo

Zadaci za vježbu - 1. ciklus

(pripremio V. Ćosić)

Zadatak 1.

Brzina prijenosa signala linijom je R , a ukupni sadržaj datoteka koje trebamo prenijeti S . Odredi vrijeme t za prijenos sadržaja u slučaju:

- (a) $R = 1218 \text{ Kibit/s}$, $S = 3 \cdot 10^6 \text{ B}$,
- (b) $R = 1024 \text{ Gibit/s}$, $S = 5 \cdot 10^8 \text{ B}$,
- (c) $R = 2048 \text{ Mibit/s}$, $S = 4 \cdot 10^4 \text{ Kibit}$,
- (d) $R = 1218 \text{ Eibit/s}$, $S = 8 \cdot 10^{12} \text{ GiB}$.

Zadatak 2.

Ako se u ispitivanom slučajnom uzorku nekog proizvoda nađe 12 neispravnih, tj. onih koji odstupaju od prosjeka više od $\pm 3\sigma$, pita se koliki je broj ukupno ispitanih komada u tom uzorku? Pritom je ustanovljeno da se i ispitivani uzorak i cjelokupna proizvodnja podvrgavaju normalnoj (Gaussovoj) razdiobi.

Zadatak 3.

U nekom ispitivanju velike serije otpornika nazivne vrijednosti 82Ω , utvrđeno je da je srednja vrijednost jednaka 85Ω . Ako je standardno odstupanje 1.5Ω , kolika je vjerojatnost da pri nasumičnom odabiru uzmemo otpornik:

- (a) vrijednosti manje od nazivne,
- (b) vrijednosti veće od nazivne?

Zadatak 4.

Marko mjeri otpor 100 otpornika. Dobio je sljedeće rezultate:

broj otpornika	14	19	34	22	11
otpor (Ω)	23.005	24.160	24.995	25.875	27.025

Odredite vjerojatnost da je vrijednost nasumce odabranog otpornika veća od nazivne vrijednosti od 26.125Ω . Kada bi vrijednosti otpora zapravo bile srednje aritmetičke sredine niza mjerenja, koliko bi bilo standardno odstupanje sredine i opća aritmetička sredina?

Zadatak 5.

Za analogni ampermetar kojim se mjeri struja, dana je korekcijska krivulja. Kolika je stvarna vrijednost struje ako je očitano 0.6 A ?

$I \text{ (A)}$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$I_K \text{ (mA)}$	0.75	-0.10	1.50	-0.50	1.00	2.00	-1.55	2.10

Zadatak 6.

Mjeri se duljina Orlandoovog lakta. Nakon 5 mjerenja dobiveni su sljedeći rezultati (u metrima):

i	1	2	3	4	5
l_i	0.5095	0.5098	0.5101	0.5100	0.5105

Odredite u kojem se intervalu nalazi μ uz vjerojatnost $P = 95\%$ ako je za danu vjerojatnost $t = 2.78$.

Zadatak 7.

Otpor jednog otpornika izmjeren je trima metodama: $U - I$ postupkom, digitalnim omometrom i usporedbom s poznatim otporom. Pritom su dobivene sljedeće aritmetičke sredine i pripadna standardna odstupanja sredine: 10.4578Ω ($10\text{m}\Omega$), 10.4780Ω ($11.3\text{m}\Omega$), 10.4623Ω ($9.5\text{m}\Omega$) i 10.4499Ω ($6.9\text{m}\Omega$). Koja je najvjerojatnija vrijednost tog otpornika?

Zadatak 8.

Na zadanom opsegu analogni voltmetar sigurno ne griješi više od koliko ako je:

- (a) r.t. 0.2 i mjerni opseg 4 V,
- (b) r.t. 0.05 i mjerni opseg 10 mV,
- (c) r.t. 1.5 i mjerni opseg 10 nV?

Zadatak 9.

Na zadanom opsegu od 2 V uz očitavanje 1.5486 V i razlučivanje $6\frac{1}{2}$ znamenaka odredi G ako je:

- (a) $G = \pm(0.01\% \text{ of reading} + 0.05\% \text{ of range} + 15 \text{ digits})$,
- (b) $G = \pm(0.2\% \text{ of reading} + 25 \text{ digits})$.

Zadatak 10.

(a) Na zadanom opsegu od 5 V uz očitavanje 2.556 V i razlučivanje $4\frac{1}{2}$ znamenaka odredi G ako je $G = \pm(0.05\% \text{ of reading} + 30 \text{ digits})$.

(b) Na zadanom opsegu od 5 V uz očitavanje 2.556 V i razlučivanje $5\frac{3}{4}$ znamenaka odredi G ako je $G = \pm(0.2\% \text{ of reading} + 20 \text{ digits})$.

Zadatak 11.

Kolika je složena standardna nesigurnost ako je:

- (a) $U_s = 15.8476(28) \text{ V}$,
- (b) $m_s = 120.38(35) \text{ mg}$,
- (c) $l_s = 470.56558(0.00047) \text{ mm}$?

Zadatak 12.

Napon mjerimo digitalnim voltmetrom na opsegu 10 V, za koji proizvođač tvrdi da ne griješi više od $\pm(14 \cdot 10^{-5} \text{ of Rdg} + 17 \cdot 10^{-5} \text{ of Range})$ do 1 godine nakon posljednjeg umjeravanja i za laboratorijske temperaturne uvjete. Ako smo uzeli 15 uzoraka mjerenog napona te dobili aritmetičku sredinu 8.4287 V i standardno odstupanje 9.45 mV, koliki je efektivni stupanj slobode i proširena nesigurnost za razinu pouzdanosti 95%?

Zadatak 13.

Napon izvora izmjeren je 150 puta u istim uvjetima, digitalnim voltmetrom na opsegu sa $5\frac{1}{2}$ znamenke i granicama pogrešaka $\pm(0.1\% \text{ of Rdg} + 15 \text{ digits})$ na mjernom opsegu 20 V. Aritmetička sredina svih rezultata bila je 15.8 V, a izračunata mjerna nesigurnost aritmetičke sredine 25 mV. Koliko je pritom bilo standardno odstupanje (pojedine vrijednosti)?

Zadatak 14.

Istosmjernu snagu trošila određujemo mjerenjem napona i struje. Ako je napon od 115 V izmjeren uz pripadnu relativnu mjernu nesigurnost 0.1%, a struja 0.8 A uz pripadnu relativnu mjernu nesigurnost 0.25%, kolika je mjerna nesigurnost tako određene snage?

Zadatak 15.

Djelatna snaga trošila poznatog otpora određena je mjerenjem istosmjerne struje koja njime prolazi. Ako je relativna mjerna nesigurnost izmjerene struje 0.25%, a otpora 0.15%, kolika je relativna mjerna nesigurnost izmjerene snage?

Zadatak 16.

Snaga trošila određuje se mjerenjem napona i struje. Ako su zadane relativne mjerne nesigurnosti i efektivni stupnjevi slobode za napon i struju, 0.14% i $v_{\text{eff}U} = 22$ te 0.26% i $v_{\text{eff}I} = 13$, odredi proširenu nesigurnost snage za razinu pouzdanosti 95%.

Zadatak 17.

Snagu gubitaka na četveropolu mjerimo kao razliku snage na ulazu i snage na izlazu. Ako je snaga izmjerena vatmetrom W1 na ulazu u četveropol 352 W uz nesigurnost 2.7 W, a snaga na izlazu 312 W izmjerena vatmetrom W2 uz nesigurnost 2.1 W, kolika je relativna mjerna nesigurnost snage gubitaka?

Rješenja

Zadatak 1.

$$(a) R = 1218 \text{ Kibit/s} = 1218 \cdot 2^{10} \text{ bit/s}, S = 3 \cdot 10^6 \text{ B} = 24 \cdot 10^6 \text{ bit}$$

$$t = \frac{S}{R} = \frac{24 \cdot 10^6 \text{ bit}}{1218 \cdot 2^{10} \text{ bit/s}} = 19.243 \text{ s}$$

$$(b) R = 1024 \text{ Gibit/s} = 1024 \cdot 2^{30} \text{ bit/s}, S = 5 \cdot 10^8 \text{ B} = 40 \cdot 10^8 \text{ bit}$$

$$t = \frac{S}{R} = \frac{40 \cdot 10^8 \text{ bit}}{1024 \cdot 2^{30} \text{ bit/s}} = 3.638 \text{ ms}$$

$$(c) R = 2048 \text{ Mibit/s} = 2048 \cdot 2^{20} \text{ bit/s}, S = 4 \cdot 10^8 \text{ Kibit} = 4 \cdot 1024 \cdot 10^8 \text{ bit}$$

$$t = \frac{S}{R} = \frac{4 \cdot 1024 \cdot 10^8 \text{ bit}}{2048 \cdot 2^{20} \text{ bit/s}} = 190.735 \text{ s}$$

$$(d) R = 1218 \text{ Eibit/s} = 1218 \cdot 2^{60} \text{ bit/s}, S = 8 \cdot 10^{12} \text{ GiB} = 64 \cdot 2^{30} \cdot 10^{12} \text{ bit}$$

$$t = \frac{S}{R} = \frac{64 \cdot 2^{30} \cdot 10^{12} \text{ bit}}{1218 \cdot 2^{60} \text{ bit/s}} = 48.936 \text{ s}$$

Zadatak 2.

Vjerojatnost da su neispravni proizvodi izvan intervala $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ jednaka je 0.27%. Iz toga slijedi:

$$P_{\text{izvan}} = \frac{N_{\text{neispravnih}}}{N_{\text{ukupno}}} \rightarrow N_{\text{ukupno}} = \frac{12}{0.0027} = 4444$$

Zadatak 3.

Vrijedi da je $\mu = 85\Omega$ i $\sigma = 1.5\Omega$. Obzirom da je u pitanju velika serija otpornika, koristimo normalnu (Gaussovu) razdiobu. Za nazivnu vrijednost otpornika dobijemo:

$$R_{\text{nazivno}} = \mu - x = 85\Omega - x = 82\Omega \rightarrow x = 3\Omega$$

$$\frac{x}{\sigma} = \frac{3\Omega}{1.5\Omega} = 2 \rightarrow x = 2\sigma$$

$$R_{\text{nazivno}} = \mu - 2\sigma$$

(a) Promatramo interval za koji je $R < \mu - 2\sigma$. Ako se nalazimo izvan intervala $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$, vjerojatnost je jednaka 0.0455. Mi trebamo samo polovicu intervala pa dobijemo:

$$P_{R < R_{\text{nazivno}}} = \frac{0.0455}{2} = 2.275\%$$

(b) Promatramo interval za koji je $R > \mu + 2\sigma$. Samo od 100% oduzmemo vjerojatnost iz (a) dijela zadatka pa dobijemo:

$$P_{R > R_{\text{nazivno}}} = 1 - 0.02275 = 97.725\%$$

Zadatak 4.

Za dovoljno veliki n možemo μ procijeniti sa aritmetičkom sredinom, a σ sa standardnim odstupanjem.

$$\mu = \bar{R} = \frac{14 \cdot 23.005 + 19 \cdot 24.160 + 34 \cdot 24.995 + 22 \cdot 25.875 + 11 \cdot 27.025}{100} = 24.97465$$

Ostupanje je jednako

$$\sigma = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2} = 1.15038$$

Trebamo naći interval u kojemu se nalazi otpor veći od 26.125 Ω .

$$26.125 = \mu - x \rightarrow x = -1.15035$$

$$\frac{x}{\sigma} = -0.9999739 \approx -1 \rightarrow x = -\sigma$$

$$26.125 = \mu + \sigma$$

Potražimo kolika je vjerojatnost da se nalazimo izvan intervala $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ odnosno otpornik mora imati otpor veći od $\mu + \sigma$ i to podijelimo sa 2 pa je vjerojatnost jednaka:

$$P_{R > 26.125\Omega} = \frac{0.6827}{2} = 34.135\%$$

Zadatak 5.

Očitano je $I = 0.6 \text{ A}$, pa je pripadna korekcija jednaka $I_K = 2 \text{ mA} = 0.002 \text{ A}$.
Stvarna vrijednost je jednaka:

$$I_{\text{stvarno}} = I + I_K = 0.602 \text{ A}$$

Zadatak 6.

$$\bar{I} = 0.50798$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = 0.0022665$$

$$s_{\bar{I}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.000566624$$

$$t \cdot s_{\bar{I}} = 0.00157521472$$

$$\bar{I} - 0.001575 \leq \mu \leq \bar{I} + 0.001575$$

Zadatak 7.

$$\bar{R}_s = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \bar{R}_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

$$p_i = \frac{K}{s_{x_i}^2}$$

$$\bar{R}_s = \frac{\frac{K\bar{R}_1}{s_{x_1}^2} + \frac{K\bar{R}_2}{s_{x_2}^2} + \frac{K\bar{R}_3}{s_{x_3}^2} + \frac{K\bar{R}_4}{s_{x_4}^2}}{\frac{K}{s_{x_1}^2} + \frac{K}{s_{x_2}^2} + \frac{K}{s_{x_3}^2} + \frac{K}{s_{x_4}^2}} = \frac{\frac{\bar{R}_1}{s_{x_1}^2} + \frac{\bar{R}_2}{s_{x_2}^2} + \frac{\bar{R}_3}{s_{x_3}^2} + \frac{\bar{R}_4}{s_{x_4}^2}}{\frac{1}{s_{x_1}^2} + \frac{1}{s_{x_2}^2} + \frac{1}{s_{x_3}^2} + \frac{1}{s_{x_4}^2}} = 10.4586 \Omega$$

Zadatak 8.

$$(a) G = \pm \frac{0.2 \cdot 4}{100} \text{ V} = \pm 8 \text{ mV}$$

$$(b) G = \pm \frac{0.05 \cdot 10}{100} \text{ mV} = \pm 5 \mu \text{V}$$

$$(c) G = \pm \frac{1.5 \cdot 10}{100} \text{ nV} = \pm 0.15 \text{ nV}$$

Zadatak 9.

$$(a) G = \pm (0.0001 \cdot 1.5486 + 0.0005 \cdot 2 + 0.000015) \text{ V} = \pm 0.00116986 \text{ V}$$

$$(b) G = \pm (0.002 \cdot 1.5486 + 0.000025) \text{ V} = \pm 0.0031222 \text{ V}$$

Zadatak 10.

$$(a) G = \pm(0.0005 \cdot 2.556 + 0.03) V = \pm 0.031278 V$$

$$(b) G = \pm(0.002 \cdot 2.556 + 0.002) V = \pm 0.007112 V$$

Zadatak 11.

$$(a) u_c(U_s) = 0.0028 V = 2.8 mV$$

$$(b) u_c(m_s) = 0.35 mg = 350 \mu g$$

$$(c) u_c(m_s) = 0.00047 mm = 470 nm$$

Zadatak 12.

Nesigurnost tipa A:

$$u_A^2(U) = \frac{s^2}{n} = \frac{(9.45 \cdot 10^{-3})^2}{15} = 5.9535 \cdot 10^{-6} V^2$$

Nesigurnost tipa B:

$$G = \pm(14 \cdot 10^{-5} \cdot 8.4287 + 17 \cdot 10^{-5} \cdot 10) V = \pm 2.880018 \cdot 10^{-3} V$$

$$a = 2.880018 \cdot 10^{-3} V$$

$$u_B^2(U) = \frac{a^2}{3} = 2.76483456 \cdot 10^{-6} V^2$$

Složena standardna nesigurnost:

$$u_C(U) = \sqrt{u_A^2(U) + u_B^2(U)} = 2.953 mV$$

Efektivni stupanj slobode:

$$v_{\text{effP}} = \frac{u_C^4(U)}{\frac{u_A^4(U)}{n-1} + \frac{u_B^4(U)}{\infty}} = 30$$

Iz tablice očitamo da je za taj stupanj slobode $t_p = 2.04$. Konačno je proširena nesigurnost jednaka:

$$U_p(U) = t_p u_C(U) = 6.024 mV$$

Zadatak 13.

$$G = \pm(0.001 \cdot 15.8 + 0.0015) \text{ V} = \pm 0.0173 \text{ V} \rightarrow a = 0.0173 \text{ V}$$

$$u_C^2(U) = u_A^2(U) + u_B^2(U) \rightarrow u_A^2(U) = u_C^2(U) - u_B^2(U)$$

$$u_A^2(U) = \frac{s^2}{n} \rightarrow s = \sqrt{n \cdot u_A^2(U)}$$

$$s = \sqrt{n \cdot [u_C^2(U) - u_B^2(U)]} = \sqrt{150 \left[0.025^2 - \frac{0.0173^2}{3} \right]} = 0.28068 \text{ V}$$

Zadatak 14.

$$P = U \cdot I = 92 \text{ W}$$

$$u_C(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{I^2 u^2(U) + U^2 u^2(I)}$$

$$u_{CR}(P) = \frac{u_C(P)}{P} = \frac{u_C(P)}{\sqrt{U^2 I^2}} = \sqrt{\frac{I^2 u^2(U)}{U^2 I^2} + \frac{U^2 u^2(I)}{U^2 I^2}} = \sqrt{\frac{u^2(U)}{U^2} + \frac{u^2(I)}{I^2}}$$

$$u_{CR}(P) = \sqrt{u_{CR}^2(U) + u_{CR}^2(I)}$$

$$u_C(P) = u_{CR}(P) \cdot P = \sqrt{u_{CR}^2(U) + u_{CR}^2(I)} \cdot P = 0.2477 \text{ W}$$

Zadatak 15.

$$P = I^2 \cdot R$$

$$u_C(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{4I^2 R^2 u^2(I) + I^4 u^2(R)}$$

$$u_{CR}(P) = \frac{u_C(P)}{P} = \frac{u_C(P)}{\sqrt{I^4 R^2}} = \sqrt{\frac{4I^2 R^2 u^2(I)}{I^4 R^2} + \frac{I^4 u^2(R)}{I^4 R^2}} = \sqrt{\frac{4u^2(I)}{I^2} + \frac{u^2(R)}{R^2}}$$

$$u_{CR}(P) = \sqrt{4u_{CR}^2(I) + u_{CR}^2(R)} = 0.52\%$$

Zadatak 16.

Vrijedi:

$$u_{CR}(P) = \sqrt{u_{CR}^2(U) + u_{CR}^2(I)} = 2.953 \cdot 10^{-3}$$

Efektivni stupanj slobode:

$$v_{effP} = \frac{u_{CR}^4(P)}{\frac{u_{CR}^4(U)}{v_{effU}} + \frac{u_{CR}^4(I)}{v_{effI}}} = 20.6076$$

Iz tablice očitamo da je za taj stupanj slobode $t_p = 2.09$. Konačno je proširena nesigurnost jednaka:

$$U_{pR}(P) = t_p u_{CR}(P) = 6.1717 \cdot 10^{-3} = 0.62\%$$

Zadatak 17.

$$P_g = P_1 - P_2$$

$$u_C(P_g) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial P_g}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)} = \sqrt{u_C^2(P_1) + u_C^2(P_2)}$$

$$u_{CR}(P_g) = \frac{u_C(P_g)}{P_g} = \frac{\sqrt{u_C^2(P_1) + u_C^2(P_2)}}{P_1 - P_2} = 0.0855 = 8.55\%$$