VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

9. Zakon velikih brojeva i centralni granični teorem

FER, Zagreb

Marko NUFC

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Slučajne varijable

Cjelina 9 – Zakon velikih brojeva i centralni granični teorem

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

*****NAPOMENA*****

Zadaci KOJE TREBA rješavati su od 1.-6. zadatka, ostali zadaci su teoretskog tipa.

Zadaci koji nedostaju: -

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka!

FORMULE:

9. ZAKON VELIKIH BROJEVA I CENTRALNI GRANIČNI TEOREM

Konvergencija po vjerojatnosti: $\boldsymbol{lim_{n\to\infty} P(|X_n - Y| > \varepsilon) = 0}$

NEJEDNAKOSTI:

Nejednakost Markova:

Ako X poprima nenegativne vrijednosti, onda za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

L_p nejednakost:

Za svaku slučajnu varijablu X s očekivanjem m_X: $P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X-m_X|^p}{\varepsilon^p}$

Nejednakost Čebiševa:

Posebince za p=2 vrijedi

$$P(|X - m_X| \geq \varepsilon) \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

ZAKON VELIKIH BROJEVA:

Slabi zakon velikih brojeva:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) \to 0, \quad kad\ n \to \infty$$

Jaki zakon velikih brojeva:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to m$$

CENTRALNI GRANIČNI TEOREM:

Centralni granični teorem (C.G.T.):

X_n niz identičkih distribuiranih nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem m i disperzijom σ^2.

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0.1)$$

Teorem Moivre-Laplace:

Normirana binomna razdioba teži po distribuciji k jediničnoj normalnoj razdiobi

$$\frac{\mathcal{B}(n,p) - np}{\sqrt{npq}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

ZADACI:

§ 9. Zadatci za vježbu

1. Slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje $E(X) = 1$ i standardnu devijaciju $\sigma(X) = 0.2$. Ocijeni vjerojatnost događaja $A = \{0.5 < X < 1.5\}$.

2. Broj sunčanih dana u nekom gradu u toku jedne godine je slučajna varijabla sa matematičkim očekivanjem 75 dana. Pokaži da je vjerojatnost da u toku jedne godine u tom gradu ne bude više od 200 sunčanih dana veća od $\frac{5}{8}$.

3. Nenegativna slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje $E(X) = 1$ i standardnu devijaciju $\sigma(X) = 0.4$. Da li događaj $A = \{0 < X < 3\}$ ima vjerojatnost veću od 90% ?

4. Matematičko očekivanje i standardna devijacija brzine vjetra na nekoj visini su jednaki: $E(X) = 25$ km/h, $\sigma(X) = 4.5$ km/h. Kolika se brzina vjetra može očekivati na toj visini sa vjerojatnošću ne manjom od 0.9 ?

5. Nenegativna slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje $E(X) = 1$ i standardnu devijaciju $\sigma(X) = 0.4$. Pokaži da je vjerojatnost događaja $A = \{X < 3\}$ veća od 95% !

6. Ocijeni vjerojatnost da odstupanje proizvoljne slučajne varijable od njezinog očekivanja nije veće od 3σ, gdje je σ devijacija te varijable. Kolika je ta vjerojatnost ako slučajna varijabla ima normalnu razdiobu?

7. Neka su X_1, $X_2, \ldots$ nezavisne identički distribuirane slučajne varijable s konačnim očekivanjem $a = E(X_1)$ i disperzijom $\sigma^2 = D(X_1)$. Dokaži da tada vrijedi

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \to a,$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2 \to \sigma^2,$$

kad $n \to \infty$.

* * *

8. Pokaži da binomna razdioba $B(n,p)$ u graničnom prelazu $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = a$ (konstanta) prelazi u Poissonovu $P(a)$.

9. Neka je $X_1, X_2, \dots$ niz nezavisnih identički distribuiranih slučajnih varijabli koje uzimaju vrijednosti 0 ili 1 s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$. Neka je $X = 0, X_1X_2\dots$ binarni prikaz broja X. Dokaži da X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,1]$.

10. Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu $[-1,1]$. Dokaži, s pomoću Levyjevog teorema

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{3n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

* * *

11. Neka su $X_1, X_2, \dots$ nezavisne slučajne varijable, s Poissonovom razdiobom, $X_k \sim P(\lambda_k)$. Ako je $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$, dokaži da

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0,1).$$

* * *

12. Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe

$$f(x) = 1 - |x|, \qquad |x| < 1.$$

Odredi njezinu karakterističnu funkciju.

13. Odredi karakterističnu funkciju slučajne varijable X čija je gustoća razdiobe

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi x^2}.$$

14. Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće $f(x) = a \cdot \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Odredi karakterističnu funkciju i pomoću nje očekivanje i disperziju slučajne varijable X.

15. Odredi karakterističnu funkciju slučajne varijable X zadane gustoćom

$$f(x) = e^{-x}, \qquad x > 0$$

Izračunaj $E(X^n)$.

16. Neka X ima jediničnu normalnu razdiobu, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Koristeći karakterističnu funkciju, izračunaj $E(X^n)$, $n \in \mathbf{N}$.

17. Odredi karakterističnu funkciju $\varphi_X(t)$ slučajne varijable X zadane gustoćom

$$f(x) = \tfrac{1}{2} e^{-|x-1|}, \qquad x \in \mathbf{R}$$

te izračunaj njezino očekivanje.

18. Zadana je karakteristična funkcija

$$\vartheta(t) = e^{iat - b|t|}.$$

Odredi gustoću razdiobe pripadne slučajne varijable.

19. Pokaži da funkcija

$$\vartheta(t) = \begin{cases} \sqrt{1-t^2}, & |t| \leqslant 1, \\ 0, & |t| > 1. \end{cases}$$

nije karakteristična funkcija niti jedne razdiobe.

20. Pokaži da je

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kt,$$

($a_k > 0$, $\sum a_k = 1$) karakteristična funkcija i odredi pripadnu razdiobu.

21. Izračunaj vjerojatnost događaja $A = \{X + Y > 0\}$, ako su X i Y nezavisne slučajne varijable zadane svojim karakterističnim funkcijama

$$\vartheta_X(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos t),$$

$$\vartheta_Y(t) = \frac{1}{4}(3 + \cos t).$$

22. Neka je $\vartheta_X(t) = \cos^2 t$ karakteristična funkcija slučajne varijable X. Ako je $Y = X + X^2$, odredi karakterističnu funkciju $\vartheta_Y(t)$ varijable Y.

* * *

23. Bochnerov teorem. ϑ $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ je karakteristična funkcija neke slučajne varijable ako i samo ako zadovoljava uvjete:

a) $\vartheta(0) = 1$,

b) ϑ je neprekinuta,

c) ϑ je pozitivno definitna, tj. za svaki $n \in \mathbf{N}$, sve brojeve $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{C}$, $t_1, \dots, t_n \in \mathbf{R}$ vrijedi

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j \overline{z_k} \vartheta(t_j - t_k) \geqslant 0.$$

Provjeri nužnost ovih uvjeta: karakteristična funkcija varijable X zadovoljava gornje uvjete. (Dokaz dovoljnosti vrlo je složen.)

24. Neka su $\{\vartheta_k\}$ karakteristične funkcije te $a_k > 0$, $\sum a_k = 1$. Pokaži da je i $\vartheta = \sum a_k \vartheta_k$ karakteristična funkcija.

25. Neka je ϑ karakteristična funkcija. Dokaži da su funkcije

$$t \mapsto e^{\vartheta(t) - 1},$$

$$t \mapsto \frac{1}{2 - \vartheta(t)}$$

također karakteristične funkcije.

26. Neka je ϑ karakteristična funkcija. Pokaži da je i

$$t \mapsto \frac{1}{t}\int_0^t \vartheta(u)\,du$$

također karakteristična funkcija.

27. Dokaži sljedeće svojstvo karakterističnih funkcija:

$$|\vartheta(t+h) - \vartheta(t)| \leqslant \sqrt{2(1 - \operatorname{Re}\vartheta(h))}.$$

28. Ako za neki $T > 0$ karakteristična funkcija ϑ ima svojstvo $\vartheta(T) = 1$, dokaži da je tada ϑ periodička funkcija, te da je T njezin period.