VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

4. Primjeri diskretnih razdioba

FER, Zagreb

Marko NUFC

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Diskretna vjerojatnost
Cjelina 4 – Primjeri diskretnih razdioba

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

*****NAPOMENA*****

Zadaci koje NE treba rješavati su 1,2,5 i 6.zadatak !!

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka !

FORMULE:

4. PRIMJERI DISKRETNIH RAZDIOBA

GEOMETRIJSKA RAZDIOBA:

Ponavljamo pokus *do prve realizacije* događaja A. Slučajna varijabla X mjeri broj pokusa u *kojem se realizirao* događaj A.

Vjerojatnost: $\mathbf{p_k = P(X=k) = p\,(1-p)^{k-1}}$
$\mathbf{P_k = (P > k) = (1-p)^k = q^k}$

Karakteristična funkcija: $\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \mathbf{e^{itk} p q^{k-1}} = \mathbf{pe^{itk}} \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \left(\mathbf{qe^{itk}}\right)^{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{pe^{it}}}{\mathbf{1-qe^{it}}}$

Očekivanje: $\mathbf{E(X) = \frac{1}{p}}$

Odsustvo pamćenja: $\mathbf{P(X = k + m \mid X > k) = P(X = m)}$

BINOMNA RAZDIOBA:

Pokus koji ima dva ishoda: *uspjeh (p)* i *neuspjeh (q=1-p)*. Pokus ponavljamo *n* puta, te binomnom slučajnom varijablom mjerimo broj *uspjeha k* u tih *n* pokusa.
Oznaka: $\mathscr{B}$(n,p)

Vjerojatnost: $\mathbf{p_k = P(X=k)} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Karakteristična funkcija: $\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{e^{itk} p_k} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{e^{itk}} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} \mathbf{p^k q^{n-k}} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}} (\mathbf{pe^{it}})^{\mathbf{k}} \mathbf{q^{n-k}} = \mathbf{(pe^{it} + q)^n}$

Očekivanje: $\mathbf{E(X) = np}$
Disperzija: $\mathbf{D(X) = npq}$

Stabilnost binomne razdiobe: $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{X_1+X_2}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{X_1}}(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{X_2}}(\mathbf{t}) = \left(\mathbf{q + pe^{it}}\right)^{\mathbf{n_1+n_2}}$
Bernoullijeva slučajna varijabla: poprima samo dvije vrijednosti: 1 s vjerojatnošću *p*, 0 s vjerojatnošću *q*

POISSONOVA RAZDIOBA:

Granični slučaj binomne razdiobe kad broj pokusa neograničeno raste. Ulogu vjerojatnosti *p* pojavljivanja događaja zamjenjuje *intenzitet λ* pojavljivanja događaja.
Oznaka: $\mathscr{P}(\lambda)$

Vjerojatnost: $\mathbf{p_k = P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, e^{-\lambda}}$

Karakteristična funkcija: $\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \mathbf{e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} = \mathbf{e^{-\lambda}} \sum_{\mathbf{k=0}}^{\infty} \frac{(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{e^{it}})^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k!}} = \mathbf{e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}} = \mathbf{e^{\lambda_k (e^{it}-1)}}$

Očekivanje: $\mathbf{E(X) = \lambda}$
Disperzija: $\mathbf{D(X) = \lambda}$

Stabilnost Poissonove razdiobe: $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{X_1+X_2}}(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{X_1}}(\mathbf{t}) + \boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{X_2}}(\mathbf{t}) = \mathbf{e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}}$

ZADACI:

§ 4. Zadatci za vježbu

1. Slučajne varijable X_1 i X_2 su nezavisne, distribuirane po geometrijskom zakonu s parametrom q. Dokaži da vrijedi

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{1}{n+1},$$

($k = 0, 1, \dots, n$).

2. Neka je X broj pokusa u Bernoullijevoj shemi koje je potrebno izvesti do r-tog pojavljivanja događaja A (r fiksan broj). Dokaži da je

$$P(X = n) = \binom{n}{r-1} p^r q^{n-r+1}$$

($n \geqslant r$). Kažemo da X ima **negativnu binomnu razdiobu**. Provjeri da se za $r = 1$ dobiva geometrijska razdioba. Izračunaj $E(X)$ i $D(X)$.

3. U urni se nalazi n kuglica od kojih je samo jedna bijela. Izvlačimo na sreću jednu po jednu kuglicu iz urne (bez vraćanja). Neka X označava pokušaj u kojem je izvučena bijela kuglica. Odredi razdiobu i očekivanje varijable X.

4. Dokaži: ako je prolaznost studenta na nekom ispitu $40\,\%$, onda je matematičko očekivanje broja izlazaka na dotični ispit jednako 2.5.

5. Slučajna varijabla X poprima nenegativne cjelobrojne vrijednosti s vjerojatnostima

$$P(X = n) = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \qquad (a > 0)$$

(**Pascalova razdioba**). Izračunaj očekivanje i disperziju varijable X.

6. Hipergeometrijska razdioba. U urni se nalazi N kuglica, među kojima je M bijelih. Iz urne uzimamo na sreću n kuglica. Neka je X broj bijelih među njima. Odredi razdiobu varijable X.

7. U urni se nalazi N kuglica, među kojima je M bijelih. Izvlačimo na sreću n kuglica u modelu

a) s vraćanjem

b) bez vraćanja

Izračunaj očekivanje i disperziju broja bijelih kuglica u oba slučaja. Koja je disperzija manja?

* * *

8. Pokus se sastoji u bacanju triju kocki. Izračunaj vjerojatnost da se u 5 nezavisnih pokusa 2 puta pojave točno 3 jedinice.

9. Neka je X slučajna varijabla distribuirana po binomnom zakonu $B(n, p)$. Odredi parametre n i p ako je poznato $E(X) = 12$ i $D(X) = 4$.

10. U krug je upisan jednakostranični trokut. Izračunaj vjerojatnost da će se od 10 na sreću odabranih točaka unutar kruga barem dvije naći unutar trokuta.

11. Slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu $B(n, p)$. Odredi očekivanje i disperziju slučajne varijable $Y = e^{2X+1}$.

* * *

12. Slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu. Ako vrijedi $P(X = 1) = P(X = 2)$, izračunaj očekivanje $E(X)$ i vjerojatnost događaja $\{X \geqslant 4\}$.

13. Pretpostavimo da je 220 grešaka raspoređeno slučajno unutar knjige od 200 stranica. Odredi vjerojatnost da dana stranica sadrži

a) niti jednu grešku,
b) jednu grešku,
c) barem dvije greške.

14. Kolika je vjerojatnost da među 200 ljudi budu barem 4 ljevaka, ako ljevaka ima prosječno 1% ?

15. Vjerojatnost pogotka u cilj pri jednom hicu iznosi 0.001. Nađi vjerojatnost da od 5000 metaka barem dva pogode cilj.

16. Stroj proizvodi 99.8% ispravnih i 0.2% neispravnih proizvoda. Kolika je vjerojatnost da u uzorku od 500 proizvoda budu više od tri neispravna?

17. Pri prijemu neke poruke vjerojatnost pogrešnog prijema svakog pojedinog znaka iznosi 0.01. Kolika je vjerojatnost da u primljenoj poruci od 10 znakova
a) ne bude nijednog pogrešnog znaka,
b) budu barem dva pogrešna znaka?

18. Slučajna varijabla ima Poissonov zakon s parametrom λ. Izračunaj $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

19. Neki uređaj ima 2000 jednakih dijelova. Vjerojatnost kvara pojedinog dijela je 0.0005. Kolika je vjerojatnost da će se pokvariti više od tri dijela?

20. Ako je vjerojatnost da će pacijent pokazati lošu reakciju na lijek 0.001, odredi vjerojatnost da među 3000 ljudi 5 ili više pokazuje lošu reakciju na lijek.

21. Kamion prevozi na gradilište 4000 komada cigala. Vjerojatnost da se cigla pri prijevozu razbije je 0.005. Odredi vjerojatnost da kamion stigne na gradilište sa najmanje 10 i najviše 40 razbijenih cigala.

22. Na automatsku telefonsku centralu dolazi prosječno 90 poziva na sat. Uz pretpostavku da je broj poziva u bilo kojem vremenskom intervalu slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu, naći vjerojatnost da za 2 minute na centralu prispiju najmanje 5 poziva.

23. Pri korekturi knjige od 300 stranica primijećeno je 1100 grešaka. Koristeći Poissonovu razdiobu izračunaj vjerojatnost da se na pojedinoj stranici nalazi više od 3 greške. Koliki je najvjerojatniji broj grešaka na pojedinoj stranici?

24. Mjerenja su pokazala da radioaktivna tvar ispušta za 7.5 sekundi u prosjeku 3.87 α–čestica. Kolika je vjerojatnost da u toku 1 sekunde ta tvar ispusti barem jednu α–česticu, a kolika da u toku 1 sekunde ispusti najviše dvije α–čestice?

25. Broj rođenja dječaka odnosno djevojčica u toku jednog dana su nezavisne slučajne varijable s Poissonovom razdiobom, s parametrima λ_1 i λ_2. Ako je poznato da je u toku tog dana bilo ukupno n rođenja, kolika je vjerojatnost da je među njima bilo k dječaka?