6. PRIMJERI NEPREKINUTIH RAZDIOBA

6.1. EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

→ neka je $Z \sim P(\lambda)$

→ ZANIMA NAS **VRIJEME DO POJAVE** SLJEDEĆE JEDINICE U SUSTAVU

→ eksponencijalna razdioba, direktno iz Poissona

→ tada je $Z_x \sim P(\lambda \cdot x)$ broj pojavljivanja u intervalu $[0, x]$

→ neka je X VRIJEME DO PRVE POJAVE PROMATRANOG DOGAĐAJA

– npr. vrijeme do kvara uređaja....

$$F(x) = P(X < x) = 1 - P(\overset{\text{nije stigla}}{Z_x = 0}) = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

→ pišemo, $X \sim \overset{\text{pisani E}}{E}(\lambda)$ i kažemo da X ima **EKSPONENCIJALNU RAZDIOBU** s parametrom λ

$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0}$$

→ jer je to VRIJEME do pojave jedinice u sustavu

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ → fja gustoće

→ OČEKIVANJE:

$$\boxed{E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda}}$$

..... parcijalna integracija SKORO SVAKE GODINE

→ DISPERZIJA:

$$\boxed{D(x) = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

→ KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\boxed{\vartheta_x(t) = \int_0^\infty e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}}$$

→ kao kod LaPlace-a prijućenje

→ OVE SVE IZVODE OBAVEZNO ZNATI ZA ISPIT!!

→ preko parcijalne ....

2.MI-08-3.) Očekivano ispravno vrijeme rada automobila je 3 godine.

a) Vjerojatnost da se pokvario tijekom prve godine?

→ od 0 do 1

$0 < x < 1$

$X \sim E\left(\frac{1}{3}\right)$ PAZI! $\rightarrow E(x) = 3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$

$P(x < 1) = ?$

$P(x < 1) = F(1) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 1} = \ldots =$

b) =||= tijekom treće godine?

→ između 2. i 3. god.

$P(2 < x < 3) = ?$

$P(2 < x < 3) = F(3) - F(2) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} - \left(1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 2}\right) = \ldots$

$\boxed{TM}$ „ODSUSTVO PAMĆENJA"

⇝ X ima EKSPONENCIJALNU razdiobu AKO I SAMO AKO vrijedi

$$P(X < x+t \mid X > t) = P(X < x)$$

Dokaz:

$\Rightarrow$

$$P(X < x+t \mid X > t) = \frac{P(t < X < x+t)}{P(X > t)} = \frac{F(x+t) - F(t)}{1 - F(t)} =$$

$$\left\{ F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \right\} = \frac{\cancel{1} - e^{-\lambda x - \lambda t} \cancel{-1} + e^{-\lambda t}}{\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda t})} = 1 - e^{-\lambda x} = F(x)$$

$$= P(X < x) \quad \text{T}$$

$\Leftarrow$ PMF T

2.MI-08-3.) * NASTAVAK *

$\lambda = \frac{1}{3}$

c) Vjerojatnost da se auto pokvari tijekom treće, ako prve dvije nije bio u kvaru?

$$P(2 < X < 3 \mid \underbrace{X > 2}_{\text{ako prve dvije nije bio u kvaru}}) \overset{TM}{=} P(X < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} \quad \text{(isto kao pod a)}$$

↳ U PRAKSI GLEDANO OVO BAŠ NEMA SMISLA !

4.DZ-4.) Ako je poznato da 40% uređaja radi ispravno 1 godinu, izr. vjer. da će od 50 takvih uređaja barem 40 raditi ispravno pola godine?

$$P(X>1) = 0.4 \qquad X \ldots \text{ vrijeme ispravnog rada}$$

$$1-F(1) = e^{-\lambda} = 0.4 \quad / \ln$$

$$\vdots$$

$$\lambda = -\ln 0.4$$

⟶ da ispravno radi pola godine:

$$P\left(X>\tfrac{1}{2}\right) = 1 - F\left(\tfrac{1}{2}\right) = 1 - \left(1 - e^{+\ln 0.4 \cdot \frac{1}{2}}\right) = 0.632$$

⟶ barem 40 radi ispravno → BINOMNA RAZDIOBA

$$Y \sim B(50,\ 0.632)$$

$$P(Y \geq 40) = \sum_{k=40}^{50} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=40}^{50} \binom{50}{k} 0.632^k (1-0.632)^{50-k} =$$

$$= 0.00834$$

⟹ ZA VELIKE n NE MOŽEMO POISSONA OVDJE KORISTITI!

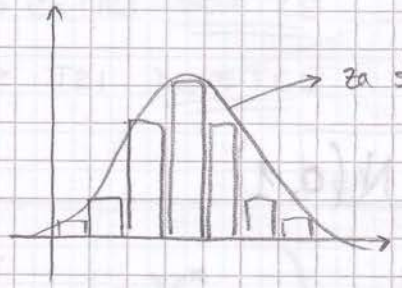
⟶ ako $n \to \infty$?

↳ GAUSSOVA RAZDIOBA ⟶

6.2. NORMALNA (GAUSSOVA) RAZDIOBA

→ najvažnija (neprekinuta) razdioba

→ granični slučaj velikog broja ponavljanja pokusa



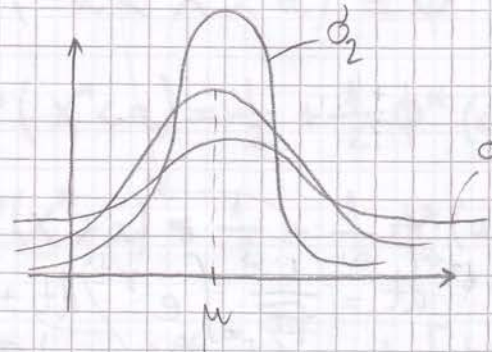
→ za što više bodova to je „glađe"

→ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

μ ..... OČEKIVANJE

σ^2 ..... VARIJANCA (DISPERZIJA)

σ ..... STANDARDNA DEVIJACIJA



$\sigma_1 > \sigma_2$ → veća raspršenost za σ_1 → ZVONOLIKA KRIVULJA

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}} \quad \boxed{x \in \mathbb{R}}$$

→ MORAMO ZNATI, IZVOD KAKO JE GAUSS DOŠAO DO TOGA – U NEKOM PARALELNOM SVEMIRU

FUNKCIJA GUSTOĆE

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ → NE MOŽEMO RAČUNATI POVRŠINU ISPOD KRIVULJE JER NE MOŽEMO TAJ INT. ELEMENTARNO RIJEŠITI

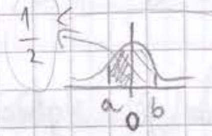
→ TABLICA NA KRAJU KNJIŽICE! → DONIJETI NA ISPIT!!

ONI KOJI NE VJERUJU:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \overset{Dz}{\cdots} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \right\} = \mu$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \overset{D.Z}{\cdots} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} = \left| u = x \quad du = x e^{-x^2} \right| \right\} = \sigma^2$$

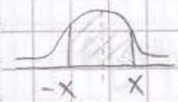
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



⟶ JEDINIČNA NORMALNA RAZDIOBA $X^* \sim N(0,1)$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{\text{parna fja}}$$



↳ simetričan interval

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \longrightarrow \Phi^*(x) \longrightarrow \text{TABLICE!}$$

„BILO JEDNE GODINE OVAJ IZVOD"

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(x)}$$

$\Phi(x)$ ... fja razdiobe normalne razdiobe $= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\Phi^*(x)$ ..... $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = P(-x < X < x) =$ U TABLICI npr.)

SASVIM RANDOM BROJKE

TABLICE

$$P(\underbrace{-0.31}_{\text{LIJEVI STUPAC}}\underbrace{4}_{\text{NAĆI POD ZNAMENKOM 4}} < X < 0.314) = \phi^*(0.314) = \overbrace{0.246478}^{\text{TABLICE}}$$

NE ZABORAVI NULA ISPRED !

D → DVIJE DEVETKE

Č → ČETIRI DEVETKE

T → TRI DEVETKE

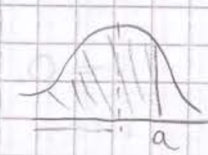
⋮

TABLICA

ZA $N(0,1)$!!

ZA ZADATKE

$$\boxed{\begin{aligned} &P(-a < X^* < a) = \phi^*(a) \\ &P(X^* < a) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\phi^*(a) \\ &P(X^* > a) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\phi^*(a) \\ &P(a < X^* < b) = \tfrac{1}{2}\left[\phi^*(b) - \phi^*(a)\right] \end{aligned}}$$



DOBRO ZAPAMTI !!

→ neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

→ moramo je svesti na $N(0,1)$

!

$$\boxed{X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

doista $E(x^*) = 0$, $D(x^*) = 1$ } trivić!

(iz svojstva $E(x)$ i $D(x)$)

4.DZ-7.) Neka je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 8 i odstupanjem 4. Izračunajte vjerojatnost da je X između 2 i 14.

odstupanje!! PAZI! σ^2!! $N(8, 16)$

$\mu = 8$, $\underline{\sigma = 4}$, $P(2 \leq X \leq 14) = ?$

$$P(2 \leq X \leq 14) = P\left(\frac{2-8}{4} \leq \frac{X-8}{4} \leq \frac{14-8}{4}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{3}{2} \leq X^* \leq \frac{3}{2}\right) = \Phi^*\left(\frac{3}{2}\right) = \text{TABLICA}$$

$$= 0.86639$$

! **NAPOMENA:**

$$\Phi^*\left(-\frac{1}{2}\right) = -\Phi^*\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow$$ NIJE SAMA PO SEBI VJEROJATNOST, ISPRED IMAMO JOŠ $\frac{1}{2} \mp \dots$

KAO NEPARNA FUNKCIJA!

2.MI-08-4.) b) Godišnja količina oborina je sluč. varijabla s očekivanjem $\mu = 370\ l/m^2$. Ako je vjerojatnost da ta količina bude između 10 i 730 l 0.9973, izračunaj vjerojatnost da godišnje bude više od 450 l/m^2.

$\mu = 370\ l/m^2$

$P(10 < X < 730) = 0.9973$

$P(X > 450) = ?$

$\sigma = ?$

$$P\left(\frac{10-370}{\sigma} < X^* < \frac{730-370}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{360}{\sigma} < X^* < \frac{360}{\sigma}\right)$$

PRONAĆI U TABLICI — IZ TABLICE, OBRNUTO

$$\phi^*\left(\frac{360}{\sigma}\right) = 0.9973 \Longrightarrow 3 \Rightarrow \frac{360}{\sigma} = 3 \Rightarrow \boxed{\sigma = 120}$$

- $P(X > 450) = P\left(X^* > \frac{450-370}{120}\right) = P\left(X^* > \frac{2}{3}\right) =$

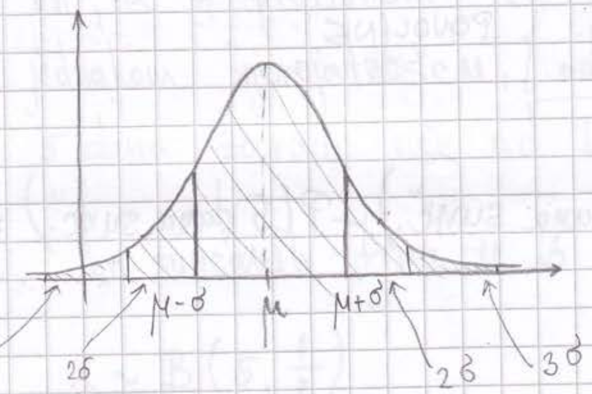
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{2}{3}\right) =$$

tablica! $\rightarrow 0.666$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0.4946 = 0.25$$

... PRAVILO 3σ ...

$\rightsquigarrow$ neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



ZA SIM. INTERVAL

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = P(-1 < X^* < 1) = \phi^*(1) = 0.6827$$

$\rightsquigarrow$ za $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = \phi^*(2) = 0.9545$

$\rightsquigarrow$ konačno, za $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = \phi^*(3) = 0.9973 = 99{,}73\%$

... KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

$\rightsquigarrow$ Fourierova transformacija : $\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$ za $N(0,1)$

$\rightsquigarrow$ deriviramo $\vartheta(t)$ po $\frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \vartheta'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ix \underbrace{e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{} \underbrace{e^{itx}}_{u} \, dx \overset{\text{parc. int.}}{=} \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -t e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx =$$

$$= -t \cdot \vartheta(t)$$

$\Rightarrow \vartheta'(t) = -t \cdot \vartheta(t)$ $\{ y' = x \cdot y \rightarrow$ SEPARACIJA VARIJABLI.... $\}$

rješenje $\Longrightarrow$ dif. jed.

$$\boxed{\vartheta_{X^*}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}}$$

$\rightsquigarrow$ tada za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow X = \mu + \sigma X^*$

$$\vartheta_X(t) = \vartheta_{\mu+\sigma X^*}(t) = e^{it\mu}\, \vartheta_{X^*}(\sigma t)$$

$$\boxed{\vartheta_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}$$

$\Rightarrow$ OČEKIVANJE:

$$\boxed{E(X) = -i \cdot \vartheta'(0) = \mu}$$

$\Rightarrow$ DISPERZIJA:

$$\boxed{D(X) = \vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \sigma^2}$$

TM

„SVOJSTVO STABILNOSTI NORMALNE RAZDIOBE"

Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ NEZAVISNE !

Tada

$$\boxed{\alpha X_1 + \beta X_2 \sim N(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2,\ \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2)}$$

JAKO BITNO !

Dokaz: $\vartheta_{\alpha X_1+\beta X_2}(t) = \vartheta_{\alpha X_1}(t) \cdot \vartheta_{\beta X_2}(t) =$

$$= e^{it\alpha\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\alpha^2 t^2} \cdot e^{it\beta\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\beta^2 t^2} =$$

$$= e^{\text{"zbroj"}} = \dots = \text{Ⓣ}$$

4. DZ - 13.)

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(1,1) \\ Y \sim N(4,4) \\ Z \sim N(9,9) \end{array}\right\} \text{nezavisni}$$

$$P(X \leq 3Y - 2Z) = ?$$

$$P(X \leq 3Y-2Z) = P(X - 3Y + 2Z \leq 0) = P(W \leq 0)$$

$$W \sim N(\underbrace{1 - 3\cdot 4 + 2\cdot 9}_{=7}, \underbrace{1 + 9\cdot 4 + 4\cdot 9}_{=73})$$

$(-3)^2$ $\quad 2^2$

$$P\left(W^* \leq \frac{0-7}{\sqrt{73}}\right) = P(W^* \leq -0.819) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(-0.819) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\Phi^*\overset{\text{TABLIC}}{(0.819)}}_{0.587} = 0.206$$

2.MI - 4.)

Masa domaćih jabuka ima očekivanje 180 g sa devijacijom 20 g dok masa industrijskih ima očekivanje 220 g sa devijacijom 5 g. Jabučar Jan prodaje paket od 2 domaće i 2 industrijske jabuke. Izr. vjer. da je masa njegovog paketa između 820 g i 1000 g.

$$X \sim N(180, 20^2)$$
$$Y \sim N(220, 5^2)$$

$$P(820 \leq W < 1000) = ?$$

PAZI !!

$W = 2X + 2Y \longrightarrow$ NEE !!

$\rightsquigarrow$ kao da smo uzeli 1 domaću i 1 ind.
KLONIRALI ISTE TAKVE ! A TO JE KRIVO !

TRIK:

$W = X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 \longrightarrow$ RAZLIČITE JABUKE !

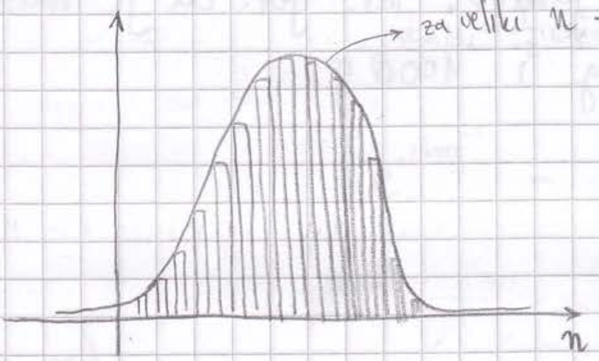
$$W \sim N(\underbrace{180+180+220+220}_{=800}, \underbrace{1^2 \cdot 20^2 + 1^2 \cdot 20^2 + 1^2 \cdot 25 + 1^2 \cdot 25}_{=850})$$

$$P(\underbrace{\frac{850-820}{\sqrt{850}}}_{0.686} < X^* < 6.86) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\phi^*(6.86)}_{1} - \underbrace{\phi^*(0.686)}_{0.50729}\right] =$$

NEMA U TABLICI

$$= 0.246$$

APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE NORMALNOM



$\boxed{\text{TM}}$ „MOIVRE - LAPLACE - PRVI CENTRALNI GRANIČNI TEOREM"

$$B(n,p) \approx N(np, np(1-p)) \quad (\text{za dovoljno velik } n)$$

PAMTI:

⟿ ponekad već za $n = 10$ dobra aproksimacija (u praksi $n > 20$ ...)

⟿ što je p bliže 50 % to je bolja aproksimacija !

Zad.) Dugogodišnjim praćenjem, vjerojatnost da je upisana cura je 23 %. Kolika je vjerg. da od 600 novoupisanih studenata bude barem 143 cura ?

$$\left.\begin{array}{l} p = 23\,\% \\ n = 600 \end{array}\right\} B(600, 0.23) \approx N(\overset{n\cdot p}{138}, \overbrace{138\cdot 0.77}^{106.26})$$

$P(X \geq 143) = ?$

$$P(X \geq 143) = P\left(X^* \geq \frac{143-138}{\sqrt{106.26}}\right) = P(X^* \geq 0.485) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\underbrace{\phi^*(0.485)}_{0.3723}\right] = 0.314$$ II

⇝ za vježbu na ovaj način riješiti onaj zad. sa ljevorukim ljudima u populaciji

2.MI - (11-5.) U testu s 30 pitanja sva su pitanja na TOČAN-NETOČAN. Ako odgovaramo na sreću, izr. vjeroj. da smo na barem 16 odgovorili točno.

n mali, p točno 50 % → da bude dobra aproks.

$$X \sim B\left(30, \frac{1}{2}\right)$$

$$P(X \geq 16) = \sum_{k=16}^{30} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \{\text{KALKULATOR}\} =$$

$$= \sum_{k=16}^{30} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{30-k} =$$

$$= 0.4278$$

⇝ BEZ KALK. → NAMA NA TESTU!

⇒ preko aproksimacije: $X \sim B\left(30, \frac{1}{2}\right) \approx N(15, 7.5)$

$$P(X \geq 16) = P(X^* \geq 0.365) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*(0.365) = 0.3575$$

LOŠE!!

⇒ proširujemo interval:

za 0.5 uvijek!

$$P(X \geq 15.5) = P(X^* \geq 0.1826) = \cdots$$

$$= 0.4275$$

⇝ OD NAS SE ZA $n < 50$ OČEKUJE DA PROŠIRIMO INTERVAL!

4.DZ - 19.) Vjerojat. realizacije događaja A je 10 %. Koliko puta moramo ponoviti pokus da bi se događaj A realizirao barem 5 puta s vjerojatnosti 80 %?

$p = 10\% = 0.1$

80 %, barem 5 puta

$n = ?$

$X \sim B(n, 0.1)$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \dots - P(X=4) = 0.8$

$\Rightarrow$ NE MOŽE SE IZLUČITI n IZ OVOGA !

b)

$X \sim B(n, 0.1) \approx P(0.1n) \rightarrow$ aproks. Poissonom

$P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) \dots - P(X=4) = 0.8 \rightarrow$ NE MOŽE, NIKAKO

c) APROKSIMACIJA NORMALNOM

$X \sim B(n, 0.1) \approx N(0.1n, 0.09n)$

$P(X \geq 5) = P\left(X^* \geq \frac{5-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{5-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) = 0.8$

neparna

$\Rightarrow \phi^*\left(\frac{5-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) = -0.6$ → SUPROTNO TRAŽENJE U TABLICI

$\frac{0.1n-5}{\sqrt{0.09n}} = 0.842 \quad \Big|^2$

... kvadratna ... $n_1 = 72$, $n_2 = 35$?? $\boxed{n = 72}$