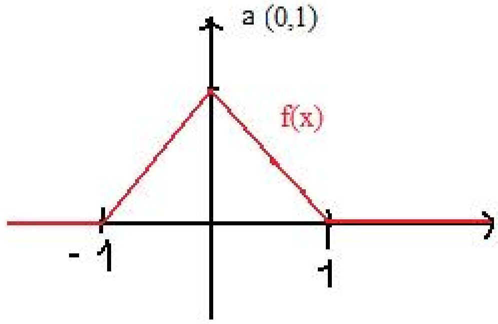
ŠESTI PUT ☺

$$y = \psi(X), \qquad g(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right|, \quad x = \psi^{-1}(y) \to to\ uvrštavamo\ u\ f(x)$$

Zadatak 1.



Na Mijevima dosad nije bilo zadano slikom kao u ovom zadatku ☺

Koji glasi:

Y = arctg X

g (y) = ?

Površina ispod cijele krivulje mora biti jedan; preko toga izračunamo točku a: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

$$P_{trokuta} = \frac{2a}{2} = 1$$

a = 1

čitamo sa slike:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \epsilon (0,1) \\ 1 + x, & x \epsilon (-1,0) \\ 0, & inače \end{cases}$$

Kad postoji inverzija, funkcija je injekcija i radimo sljedeće:

$$y = arctg\ X$$

$$x = tg\ y$$

Dobiveni x deriviramo po y: $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{cos^2 y}$

Granice ipsilona dobivamo tako da granice iksa uvrštavamo umjesto samoga iksa (koje su (-1,1) u ovom zadatku – sa slike): $y \epsilon \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$

$$g(y) = f(x) \cdot \frac{1}{cos^2 y}$$

$$g(y) = \begin{cases} (1 + tg\ y) \cdot \frac{1}{cos^2 y}, & y \in \left(\frac{-\pi}{4}, 0\right) \\ (1 - tg\ y) \cdot \frac{1}{cos^2 y}, & y \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

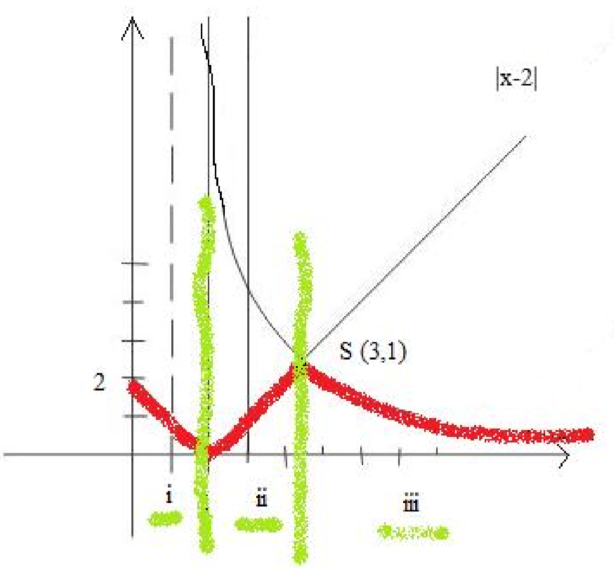
[u f(x) smo uvrstili x koji smo dobili inverzijom; ovo je gustoća od ipsilona i moramo imati samo ipsilone]

Zadatak 2.

Neka X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom 2. $X \sim E(2)$. Odredi funkciju gustoće i funkciju razdiobe od $Y = min\left\{|x-2|, \frac{4}{(x-1)^2}\right\}$ ⇒ zadatak 66 iz zadataka za vježbu – moglo bi takvo nešto doći na MIju.

Kod eksponencijalne razdiobe odmah znamo funkciju gustoće: $f(x) = 2e^{-2x}$, x>0

Eksponencijalna razdioba:
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$ $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$



Nacrtali smo obje funkcije iz zadanoga. Min određujemo tako da gledamo koja je funkcija ispod / dolje (ovo crveno).

Ovo zeleno su injektivni intervali na koje dijelimo funkciju jer ona nije injekcija (*injekcija = pravac siječe funkciju samo jednom*):

i) (0,2)
ii) (2,3)
iii) (3,∞)

Injektivni intervali:

i) $x \in (0,2),\ \ y \in (0,2)$

$y = x - 2 \quad \rightarrow \quad x = 2 - y$

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = |-1| = 1$

$g_1(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = 2 \cdot e^{-2(2-y)} \cdot 1$ | *(2-y) uvrštavamo umjesto x jer g mora biti funkcija samo od y*

$g_1(y) = 2e^{2y-4}$

ii) $x \in (2,3),\ \ y \in (0,1)$

$y = x - 2 \quad \rightarrow \quad x = y + 2$

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = 1$

$g_1(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = 2 \cdot e^{-2(y+2)} \cdot 1$ | *(y+2) uvrštavamo umjesto x jer g mora biti funkcija samo od y*

$g_1(y) = 2e^{-2y-4}$

iii) $x \in (3, \infty), \;\; y \in (0,1)$

$$y = \frac{4}{(x-1)^2} \;\rightarrow\; \pm\sqrt{y} = \frac{2}{x-1}$$

a) $x = 1 + \frac{2}{\sqrt{y}}$ jer uzimamo desni ogranak

b) $x = 1 - \frac{2}{\sqrt{y}}$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{\sqrt{y^3}} = \frac{1}{y\sqrt{y}}$$

$$g_3(x) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = 2 \cdot e^{-2(1+\frac{2}{\sqrt{7}})} \cdot \frac{1}{y\sqrt{y}}$$

Konačno rješenje (spajanje intervala po y):

$$g(y) = \begin{cases} g_1 + g_2 + g_3 & , \quad y \in (0,1) \\ g_1 & , \quad y \in (1,2) \end{cases}$$

FUNKCIJA RAZDIOBE G(y)=?

Imamo dva načina: 1) $\int g(y)dy$ - najčešće bude brutalan integral s puno supstitucija, stoga moramo znati i drugi način:

2) po definiciji: $G(y) = P(Y < y)$ - y je neka fiksirana točka na grafu

Fiksiramo ipsilon iz intervala (0,2). Najprije točku ispod jedinice (pravac siječe sve dijelove grafa), zatim iznad (pravac siječe samo jedan dio).

i)

$$y \in (0,1): \quad G(y) = P(Y < y) = (Gledamo\ za\ koje\ X\ to\ vrijedi)$$
$$= P(2 - y < X < y + 2) + P\left(X > \frac{2}{\sqrt{y}} + 1\right)$$
$$\rightarrow (isključivo\ ipsiloni\ preko\ kojih\ izražavamo\ ikseve)$$
$$= \; [F(Y+2) - F(2-y)] + \left[1 - F(\frac{2}{\sqrt{y}} + 1)\right]$$

F(x) kod eksponencijalne razdiobe znamo: $F(x) = 1 - e^{-2x}$

$$G(y) = 1 - e^{-2(y+2)} - 1 + e^{-2(2-y)} + 1 - 1 + e^{-2(\frac{2}{\sqrt{y}}+1)} \; = \; -e^{-2y-4} + e^{-4+2y} + e^{-\frac{4}{\sqrt{y}}-2}$$

ii)

$$y \in (1,2): \quad G(y) = P(Y < y) = P(X > 2 - y) = 1 - F(2 - y) = 1 - 1 + e^{-2(2-y)} = e^{2y-4}$$

Kao što vidimo, kod g(y) i G(y) u konačnom rješenju u oba intervala imamo jednako sumanada ☺

Jedina teorija koja je zadnje dvije godine bila na Mijevima je eksponencijalna i normalna razdioba i nosila je 8b.

Zadatak 3 (MI)

Vrijeme boravka Simonice na Farmi je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom s očekivanjem 3 tjedna.

a) Kolika ja vjerojatnost da će Simonica ispasti s Farme ***tijekom*** drugog tjedna?

b) Kolika je vjerojatnost da ispadne nakon trećeg tjedna?

a) $E(x) = 3 = \frac{1}{\lambda} \rightarrow X \sim E\left(\frac{1}{3}\right)$

$P(1 < X < 2) = tijekom = F(2) - F(1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}2} - 1 + e^{-\frac{1}{3}1} = e^{-\frac{1}{3}} - e^{-\frac{2}{3}}$

b) $P(X > 3) = 1 - F(3) = 1 - 1 + e^{-\frac{1}{3}3} = e^{-1}$

NORMALNA RAZDIOBA (pomoću 3 forumule koje će biti niže napisane i tablicom možemo riješiti sve zadatke)

$X \sim N(a, \sigma^2)$

Najprije svodimo na jediničnu razdiobu: $\frac{x-a}{\sigma} \sim N(0,1)$ (dokaz toga je već bio na Miju)

Tri formule:

$$P(X < u_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(u_1)$$

$$P(X > u_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(u_1)$$

$$P(u_1 < X < u_2) = \frac{1}{2} \cdot [\Phi^*(u_2) - \Phi^*(u_1)]$$

4DZ8ZAD

$X \sim N(3, \sigma^2)$ $ako\ je\ P(X < 5) = 0.6915, kolika\ je\ vjerojatnost\ da\ je\ X\ između - 1\ i\ 6?$

$E(X) = 3$

$D(X) = \sigma^2$

Najprije računamo σ iz P(X<5):

$$P(X < 5) = P\left(\frac{X-3}{\sigma} < \frac{5-3}{\sigma}\right) = P\left(\tilde{X} < \frac{2}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \Phi^*\left(\frac{2}{\sigma}\right) = 0.6915$$

$$\Phi^*\left(\frac{2}{\sigma}\right) = \left(0.6915 - \frac{1}{2}\right) \cdot 2$$

$$= 0.383\ (u\ tablici\ gledamo\ broj\ 38292\ jer\ ima\ najmanje\ odstupanje\ od\ traženog)$$

$$\frac{2}{\sigma} = 0.500 \rightarrow\ \sigma = 4$$

$$P(-1 < X < 6) = P\left(\frac{-1-3}{4} < \tilde{X} < \frac{6-3}{4}\right) = P\left(-1 < \tilde{X} < 0.75\right) = \frac{1}{2}[\Phi^*(0.75) - \Phi^*(-1)]$$

$$= \frac{1}{2}[\Phi^*(0.75) + \Phi^*(1)] = 0.61472$$

$$\boxed{\Phi^*\ je\ neparna\ funkcija:\ \Phi^*(-u) = -\Phi^*(u)}$$