# ZAVRŠNI ISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

17.06.2013.

**1.** (**5 bodova**)
Baca se kocka. Slučajna varijabla $X$ poprima vrijednost koja je jednaka dvostrukom broju od broja okrenutog na kocki, dok slučajna varijabla $Y$ poprima vrijednost 0 kad je broj okrenut na kocki paran, a vrijednost 1 kad je okrenuti broj neparan. Izračunajte koeficijent korelacije $r(X, Y)$.

**2.** (**5 bodova**)
Slučajni vektor $(X, Y)$ zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = C(x + y), \qquad \text{za} \;\; 0 \le x \le 2,\, 0 \le y \le 2.$$

Izračunajte konstantu $C$ te gustoću slučajne varijable $Z = \frac{Y}{X}$.

**3.** (**4 boda**)
Broj sunčanih dana u nekom gradu u tijeku jedne godine je slučajna varijabla s matematičkim očekivanjem 75 dana. Pokažite da je vjerojatnost da u tijeku jedne godine u tom gradu ne bude više od 200 sunčanih dana veća od $\frac{5}{8}$.

**4.** (**6 bodova**)
**a)** Dokažite da za nepristranu procjenu disperzije uzorka $\widehat{s}^2$ uz nepoznato očekivanje vrijedi

$$\widehat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right).$$

**b)** Na temelju vrijednosti slučajnog uzorka volumena 20 za varijablu $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma)$ dobivene su vrijednosti

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 160, \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 1451.$$

Izračunajte 90%-tni jednostrani interval za disperziju.

**5.** (**5 bodova**)

**a)** Definirajte kvantil reda $p$, za $p \in \langle 0, 1 \rangle$ i funkciju razdiobe $F$.

**b)** Dokažite da za kvantile jedinične normalne razdiobe vrijedi

$$u_p = -u_{1-p}.$$

**c)** Izračunajte kvantil $u_{0.233}$ standardne normalne razdiobe koristeći isključivo tablicu 1. jedinične normalne razdiobe (za funkciju $\Phi^*$).

**6.** (**3 boda**)

Broj pristiglih automobila na naplatne kučice je Poissonova slučajna varijabla $\mathcal{P}(\lambda)$. Bilježen je broj pristiglih automobila u svakom satu tijekom jednog dana i dobivena je srednja vrijednost $\overline{x} = 66$. Odredite 90%-tni interval povjerenja za parametar $\lambda$.

**7.** (**7 bodova**)

**a)** Uređaj za punjenje boca od 1000 ml vodom radi sa standardnom devijacijom $\sigma = 5$ ml. Uzorak od 100 napunjenih boca dao je srednju vrijednost $\overline{x} = 997$ ml. Provjerite uz nivo značajnosti 0.05 hipotezu da uređaj puni boce sa smanjenom količinom vode u odnosu na deklariranu. Pretpostavlja se da je količina vode u bocama distribuirana po normalnoj razdiobi.

**b)** Na drugom uređaju istog tipa (za punjenje boca od 1000 ml vodom i $\sigma = 5$ ml) uzorak od 80 napunjenih boca dao je srednju vrijednost $\overline{y} = 1001$ ml. Provjerite uz nivo značajnosti 0.05 hipotezu da ova dva uređaja pune boce sa jednakom količinom vode.

**8.** (**5 bodova**)

Pet novčića bačeno je istovremeno 128 puta i svaki put je zabilježen broj grbova:

| broj grbova | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_j$ | 4 | 21 | 43 | 38 | 17 | 5 |

Pomoću $\chi^2$ testa provjerite uz nivo značajnosti 5% slažu li se dobiveni rezultati s hipotezom o ispravnosti svih novčića.

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica.**
**Ispit se piše 120 minuta.**

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ VISa
17.06.2013.

**1.**

$$r(X,Y) = -\sqrt{\frac{3}{35}}$$

**2.**

$$C = 8,\ g(z) = \begin{cases} \frac{1}{3}(z+1), & z \in [0,1] \\ \frac{1}{3z^3}(z+1), & z \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

**3.**

Nej. Markova $P(X \geq 200) \leq \dfrac{75}{200} \implies P(X < 200) \geq \dfrac{5}{8} \implies P(X \leq 200) > \dfrac{5}{8}$

**4.**

**a)** $\widehat{s}^2 = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2\right) = \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2\right)$

**b)** $\widehat{s}^2 = 9$, $\alpha = 0.1$, $\chi^2_{19,0.1} = 11.651$, $\sigma^2 \in [0, 14.677]$

**5.**

**a)** $x_p \in \mathbb{R}$ za koji je $F(x_p) = p$

**b)** zbog parnosti funkcije gustoće $\mathcal{N}(0,1)$

**c)** $\Phi^*(-x) = 2(0.5 - 0.233) = 0.534 \implies x = -0.729$

**6.**

$$\lambda \in [63.36, 68.75]$$

**7.**

**a)** U-test $\widehat{u} = -6$, $-u_{0.95} = -1.64$, $H_0$ se odbacuje

**b)** hipoteza o sredinama uz jednaku disperziju

$\widehat{u} = -5,333$, $u_{0.975} = 1.96$, $H_0$ se odbacuje

**8.**

$\chi^2_q = 1.0667$, $\chi^2_{4,0.95} = 9.488$, podaci se ravnaju po $\mathcal{B}(5, 0.5)$

(hipoteza o ispravnosti svih novčića se prihvaća)