4. PRIMJERI DISKRETNIH RAZDIOBA

4.1. GEOMETRIJSKA RAZDIOBA

⇝ ponavljanje pokusa do prve realizacije nekog događaja
⇝ sa vraćanjem! u svakom izvlačenju isti uvjeti

⇝ neka je x broj ponavljanja, a p vjerojatnost realizacije događaja A

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots\dots k \\ p & (1-p)p & (1-p)^2 p & & \dots\dots (1-p)^{k-1} \cdot p \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p} \quad \boxed{, k = 1, 2, 3 \dots}$$

"SVAKE GODINE DOĐE DEFINIRATI RAZDIOBU I SKIDAJU SE BODOVI AKO SE NE NAPIŠU k-OVI OD KUDA IDU..." !!!

$X \sim G(p)$ (samo oznaka, zapis onog gore...)

"OVO JE JEDINA TEORIJA KOJA MOŽE DOĆI NA ISPITU, a), b), c) bla..."

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} \cdot p = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$D(X) = \dots$ D.Z. Ⓘ

⟶ KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = p(1-p)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{it}(1-p)\right]^k =$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{1-e^{it}(1-p)} - 1 \right) = \frac{p e^{it}}{1-(1-p)e^{it}} \quad //$$

DZ provjeri :)

$$\boxed{E(X) = -i\varphi'(0) = \frac{1}{p}}$$

TM „ODSUSTVO PAMĆENJA"

⟶ X ima GEOMETRIJSKU RAZDIOBU ako i samo ako vrijedi za sve

$k, m \geq 1$

$$P(X=k+m \mid X>k) = P(X=m)$$

OVAJ DOKAZ ISTO VOLE PITATI ! ← Burek

Dokaz: ($\Rightarrow$)

$$P(X=k+m \mid X>k) = \frac{P(X=k+m, X>k)}{P(X>k)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{k+m-1} \cdot p}{\cancel{(1-p)^k}} = P(X=m) \quad :)$$

($\Leftarrow$) UPIŠI PMF :) :)

SADA PONOVNO IZRAČUNATI ZAD:

$P(X \leq 15 \mid X > 10)$

$= P(X \leq 5) \ldots$

„DR. π - ZADATAK" → DRPI PONOS ! ☺

1.MI - 11 - 6.) b) Iz snopa od 52 karte izvlačimo jednu po jednu kartu dok ne izvučemo asa ili boju trefa. Izračunajte $P(X > E(X))$.

4 ASA I 13 TREFOVA → ALI 1 TREF JE AS ?!

$$X \sim G\Big(\underbrace{\frac{16}{52}}_{p}\Big)$$

navlačenje na PI BROJKE !!! ☺

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

BUREK RUKOPIS ☺

CIJELOBROJNI

$$P\Big(X > \underbrace{\frac{13}{4}}_{3.25}\Big) = (1-p)^{3} = \left(\frac{9}{13}\right)^{3} = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + \dots = 1 - P(X=3) - P(X=2) - P(X=1)$$

SAMO DA NIJE U 1, 2, ILI 3

1.MI - 08 - 6.) ILKO ZADATAK

Neka su X_1, X_2 nezavisne slučajne varijable s istom geom. razdiobom p.

a) Odredite razdiobu varijable $Y = X_1 + X_2$

$$X_1 \sim G(p) \qquad P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$X_2 \sim G(p)$$

$$Y = X_1 + X_2 \implies 2, 3, 4, 5 \dots \,!$$

(zbog $X_1 = 1 + X_2 = 1 = 2$ prvi takav Y)

$$P(Y=k) = ?$$

UZMEMO NEKE VRIJEDNOSTI :

$$P(Y=1) = 0$$

k u formuli

$$P(Y=2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) \overset{\text{nezavisne}}{=} P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = p \cdot p = p^2$$

$$P(Y=3) = P(X_1 = \underset{k}{1}, X_2 = \underset{k}{2}) + P(X_1 = 2, X_2 = 1) = \underset{\text{ISTA VJEROJATNOST}}{2} \cdot \left[p \cdot (1-p) \cdot p\right] = 2p^2(1-p)$$

$1+3,\ 2+2,\ 3+1$

$$P(y=4) = 3 \cdot p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{P(y=k) = (k-1)\,p^2(1-p)^{k-2}} \;//\quad \underline{\underline{k = 2, 3, 4, \ldots}}\;//$$

$\rightarrow$ DZ INDUKCIJA !! $\Uparrow$

HVALA KOLEGI !!!

b) $P(y>3)$ ako je $p = \frac{1}{3}$ $= ?$

$$P(y>3) = 1 - P(y=2) - P(y=3)$$

$\rightarrow$ k ide od 2 pa nemamo 0 i 1 !

$$\ldots\; P(y>3) = \frac{20}{27} \;//$$

4.2. BINOMNA RAZDIOBA

⟿ ponavljamo pokus n-puta bez obzira ponovi li se što ili ne

⟿ slučajna varijabla X bilježi **KOLIKO PUTA** OD n SE DOGODIO NEKI DOGAĐAJ

to su zad. npr. Bacamo kocku 10 puta. Vjerojatnost da je petica pala tri puta?

$\Rightarrow$ $X \sim B(n, p)$

n – BR. PONAVLJANJA

p – VJERQ. U 1 PONAVLJANJU DA SE DOGODI PROMATRANI DOGAĐAJ

npr. $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

MOŽE SE DOGODITI DA PETICA NIJEDNOM NE PADNE

$$\boxed{E(x) = n \cdot p}$$!

IZVOD:

$E(x) = \sum_{k=0} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ = DZ za one voljne izazova II

ILI

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\vartheta_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\underbrace{e^{it} \cdot p}_{a})^k (\underbrace{1-p}_{b})^{n-k}$$

$$= \left(p e^{it} + 1 - p\right)^n$$

MAT 1. 1. KNJIŽICA 20. str. BINOMNA FOR.

$$\Rightarrow E(x) = -i\,\vartheta'(0) = \dots = np \quad \Downarrow$$

••• DISPERZIJA :

$$D(x) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \dots$$

$$\boxed{D(x) = np(1-p)}$$

••• SVOJSTVO STABILNOSTI •••

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\sim B(n_1, p) \\ X_2 &\sim B(n_2, p) \end{aligned}\right\} \text{nezavisne} \Rightarrow \boxed{X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)}$$

PRIČA:

npr. Ako bacimo 100 puta kocku i gledamo koliko puta padne šestica pa onda bacamo još 200 puta. Isto bi bilo da smo odmah bacali kocku 300 puta i gledali koliko šestica je palo.

SKORO SVAKE GODINE BUDE DOKAZIĆ NA ISPITU

DOKAZIĆ :

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) =$$

$$= (pe^{it} + 1 - p)^{n_1} \cdot (pe^{it} + 1 - p)^{n_2} =$$

$$= (pe^{it} + 1 - p)^{n_1 + n_2} \quad \Downarrow$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$$

//

BERNOULLIJEVA SLUČAJNA VARIJABLA

⇝ binomna razdioba najvažnija, statistika ...

⇝ to je s.varijabla X_i koja bilježi JE LI SE NEŠTO DOGODILO ILI NIJE, ishod samo JEDNOG JEDINOG POKUSA

$$\boxed{X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}}$$

NEZAVISNE VARIJABLE

$$E(X_i) = p$$

$$D(X_i) = p(1-p)$$

BINOMNA RAZDIOBA JE SUMA n SLUČAJNIH BERNOULLIJEVIH VARIJABLI.

$$X \sim B(n,p) \longrightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(X) = E\left(\sum X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$D(X) = D\left(\sum X_i\right) = \sum D(X_i) = np(1-p)$$

⇝ binomnu razdiobu možemo izvesti na ova tri načina dosad napisana!

2.DZ - 16.) U krug je upisan kvadrat. Izračunajte vjerojatnost da od 10 na sreću odabranih točaka unutar kruga barem 2 leže unutar kvadrata.

$a^2 + a^2 = (2r)^2$

$2a^2 = 4r^2$

$\underline{a = r\sqrt{2}}$

$X \sim B(10, p)$

$$P = \frac{P_{\square}}{P_{\circ}} = \frac{(r\sqrt{2})^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi} \,//$$

BAREM 2 TOČKE

$X \sim B\left(10, \frac{2}{\pi}\right)$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + \cdots + P(X=10) =$$

LAKŠE

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

VIDI PROŠLI TJEDAN

PAZI! TIPIČNA GREŠKA!

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \; k = 0, 1, \ldots$!!

$$= 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^1\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^9 =$$

$= 0.999 \,//$

ZA PRETPOSTAVITI DA JE VELKA VJEROJATNOST!

4.3. POISSONOVA RAZDIOBA

$\xrightarrow{\text{fra.}}$ čitaj: PoASONOVA

npr. – na 300 str. knjige imamo 900 grešaka, ZATIPAKA

$$E(x) = 3 = \underbrace{900}_{\substack{\text{BROJ}\\\text{GREŠAKA}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{300}}_{\substack{\text{VJEROJ.}\\\text{DA SE POJAVI 1 GREŠKA}}} = n \cdot p$$

→ u pozadini priče binomna razdioba

→ IPAK DOŽIVITI KAO NEŠTO DRUGO...

→ $\boxed{E(x) = \lambda}$

λ..... intenzitet pojavljivanja nekog događaja

$\xrightarrow{\text{npr.}}$ dolazak nekih informacija (jedinica) u sustav → POISSONOVA RAZDIOBA → intenzitet dolazaka

→ telefonski pozivi u sat vremena u nekom call centru i slično...

$\boxed{\text{TM}}$

Neka je n velik, a p malen. Ako je $\lambda = n \cdot p$ tada binomna razdioba

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

DOKAZ (OVO MORATE ZNAT' DOKAZAT!)

$$\Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{k-1} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots}_{1} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1} \Big/ \lim_{n\to\infty}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

za $n = \infty$

$\approx$ za n samo „velik"

⟶ kraće pišemo: $B(n, p) \approx P(\lambda)$ gdje je $\lambda = n \cdot p$

⟶ ovu razdiobu nazivamo POISSONOVA RAZDIOBA

$$\boxed{P(x=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, \infty$

MOŽE DOĆI 0 JEDINICA U SUSTAV!

1.MI-08-7.) Na server u prosjeku dolazi 180 mailova u jednom satu. Izračunajte vjerojatnost da je u jednoj minuti stiglo barem 3 maila.

ZAKLJUČAK ⟶ IMAMO INTENZITET DOLAZAKA → POISSON!

$\lambda = 180$ mail/h

$\Rightarrow \lambda = 3$ mail/min

16 NA ISPITU!

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x=0) - P(x=1) - P(x=2)$$

„barem"

NE ZABORAVI!

! Uoči: JEDINO KOD GEOMETRIJSKE NEMA NULE!

$$P(X \geq 3) = 1 - e^{-3} - \frac{3}{1!}e^{-3} - \frac{3^2}{2!}e^{-3} =$$

$$= 0.5768$$

⇝ KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} =$$

PODSJETNIK: $\sum \frac{x^k}{k!} = e^x$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\boxed{\vartheta(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}}$$

$$E(X) = -i\vartheta'(0) \overset{D.Z.}{=} \dots = \lambda$$

$$D(X) = \dots = \lambda$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ D(X) &= \lambda \end{aligned}}$$

⇝ SVOJSTVO STABILNOSTI:

nezavisne $\left\{ \begin{array}{l} X_1 \sim P(\lambda_1) \\ X_2 \sim P(\lambda_2) \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)}$

DOKAŽI! : (BILO JEDNE GODINE KAO I SVE HEH SVE BILO JEDNE GODINE ☺)

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) \overset{nez.}{=} \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) =$$

$$= e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

11

1.MI-07-8.)

b) Neka je x Poissonova razdioba s očekivanjem 3, a y s očekivanjem 4. Ako su x i y nezavisni, izračunajte vjerojatnost da je $x+y=10$.

$$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$\boxed{E(x)=\lambda}$!

$x \sim P(\lambda)$

$$\begin{matrix} x \sim P(3) \\ y \sim P(4) \end{matrix} \Rightarrow P(x+y=10)=\frac{7^{10}}{10!}e^{-7}$$

$x_1+x_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2) \Rightarrow x+y \sim P(7)$ U PROSJEKU

$\underline{\lambda}$

4.ZZV-14.) U populaciji je u prosjeku 1% ljevaka.

a) Izrač. vjerojatnost da od 7 nastavnika na VIS-u je barem 1 ljevak.

b) Izrač. vjerojatnost da od 600 studenata su barem 4 ljevaka.

a)

⟶ NEMAMO INTENZITET DOLAZAKA !

$\Rightarrow$ BINOMNA RAZDIOBA ! PONAVLJAMO n puta pokus !

$B(7, 0.01)$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1-\binom{7}{0}p^0(1-p)^7 = 0.068$$

b) $B(600, 0.01)$

$$P(x \geq 4) = 1 - P(x=3) - P(x=2) - P(x=1) - P(x=0)$$ → veliki faktorijeli... → $\underline{n \text{ veliki}}$ → POISSON !

$$\Rightarrow \lambda = n \cdot p = 6 \Rightarrow P(6) \approx B(600, 0.01)$$

$$P(x=\overset{k}{3}) = \frac{\lambda^{k=3}}{(k=3)!} \cdot e^{-(\lambda=6)}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - \frac{6^3}{3!}e^{-6} - \frac{6^2}{2!}e^{-6} - \dots = 0.8488$$

BEZ APROKSIMACIJE:

$$P(x \geq 4) = 0.8501 \rightarrow \text{NAJS NAJS !}$$

! NAPOMENA NA ISPITU:

S OBZIROM DA SMIJEMO IMATI KALK NE MORAMO KORISTITI APROKSIMACIJU.

1.MI-10-6) Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s Poissonovom razdiobom $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$. Ako je njihov zbroj $X_1 + X_2 = n$, dokažite da tada $X_1 \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

$$P = (X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \frac{P(X_1 = k, X_2 = n-k)}{P(X_1 + X_2 = n)} =$$

$$= \frac{P(X_1 = k) \cdot P(X_2 = n-k)}{\underbrace{P(X_1 + X_2 = n)}_{P(\lambda_1+\lambda_2)}} = \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\cancel{e^{-\lambda_1}} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\cancel{e^{-\lambda_2}}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^{\overset{k+n-k}{n}}}{n!}\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}} =$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)^k \underbrace{\left(1 - \frac{X_1}{X_1+X_2}\right)}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}^{n-k}$$

↳ DOKAZALI BINOMNU RAZDIOBU!

↳ ZBROJ DVIJE POISSONOVE, X_1 ILI X_2 IMAJU RAZDIOBE:

$$\binom{n}{k}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)^k \left(1 - \frac{X_1}{X_1+X_2}\right)^{n-k}$$