DRUGI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE
03.05.2011.

1. (**5 bodova**)
Slučajna varijabla X je zadana funkcijom gustoće:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1\rangle \\ 2x - x^2, & x \in [1,2] \end{cases} .$$

Izračunajte funkciju razdiobe $F(x)$, očekivanje $E(X)$ i $P(0.5 < X < 1.5)$.

2. (**4 boda**)
Biramo na sreću točku unutar kvadrata $ABCD$ stranice duljine 1. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost te točke do pravca koji prolazi polovištima E i F stranica $\overline{AB}$ odnosno $\overline{AD}$. Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable X.

3. (**3 boda**)
Odredite gustoću slučajne varijable $Y = |\ln X|$, ako je gustoća slučajne varijable X zadana s $f(x) = \frac{2}{9}x$, $x \in \langle 0,3\rangle$.

4. (**3 boda**)
Dokažite: ako slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu, onda vrijedi svojstvo odsudstva pamćenja:

$$P(X < x + t \mid X > t) = P(X < x), \quad \forall x, t > 0.$$

5. (**2 boda**)
U testu s 30 pitanja svako pitanje ima ponuđena 2 odgovora: točan i netočan. Ako na svih 30 pitanja odgovore biramo na sreću, kolika je vjerojatnost da na barem 16 pitanja odgovorimo točno?

6. (**3 boda**)
Radijus kruga je slučajna varijabla jednoliko distribuirana na intervalu $[1,2]$. Točka T se bira na sreću unutar tog kruga. Kolika je vjerojatnost da udaljenost točke T do središta kruga bude veća od $\frac{1}{2}$?

7. (**5 bodova**)
Slučajni vektor (X,Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x,y) = Cx, \quad \text{za } 0 \le y \le x \le 1.$$

Izračunajte konstantu C, marginalne gustoće $f_X(x)$ i $f_Y(y)$, te gustoću slučajne varijable $Z = X - Y$.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

RJEŠENJA
2. MEĐUISPITA IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE
03.05.2011.

1.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3, & x \in [0,1\rangle \\ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}, & x \in [1,2] \end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}, \qquad E(X) = \frac{7}{6}$$

2.

$$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{2}, & x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right\rangle \\ -x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{8}, & x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2}}{4}\right] \end{cases}$$

3.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{4}{9}ch(2y), & y \in \langle 0, \ln 3\rangle \\ \frac{2}{9}e^{-2y}, & y \in \langle \ln 3, +\infty\rangle \end{cases}$$

4.

$$P(X < x+t \mid X > t) = \frac{P(t < X < x+t)}{P(X > x)}$$
$$= \frac{\left(1 - e^{-\lambda(x+t)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\lambda t}\right)} = 1 - e^{-\lambda t} = P(X < x)$$

5.

$$P(X \geq 16) = P\left(\frac{X - 15}{\sqrt{7.5}} \geq \frac{15.5 - 15}{\sqrt{7.5}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(0.1826) = 0.4275$$

Napomena: za simetričnu binomnu razdiobu ($p = \frac{1}{2}$) jednostavnije je izračunati direktno bez aproksimacije :

$$P(X \geq 16) = \frac{1}{2}(1 - P(X = 15)) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\binom{30}{15}}{2^{30}}\right) = 0.4278$$

6.

$$P\left(X > \frac{1}{2}\right) = \int_1^2 \frac{r^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}{r^2} dr = \frac{7}{8}$$

7.

$$C = 3,\;\; f_X\left(x\right) = 3x^2,\, x \in \left\langle 0,1\right\rangle, \quad f_Y\left(y\right) = \frac{3}{2}\left(1 - y^2\right),\;\; y \in \left\langle 0,1\right\rangle,$$
$$f_Z\left(z\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z^2,\;\; z \in \left\langle 0,1\right\rangle$$