1. Zadatak

Može li za neku vrijednost argumenta biti

(a) funkcija razdiobe veća od jedinice,

(b) funkcija razdiobe negativna,

(c) funkcija razdiobe prekidna?

Rješenje

a) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ - ne može biti veća od 1 jer je limes jednak 1

b) $\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$ - ne može biti negativna jer je limes jednak 0

c) $F(x-0) = \lim_{\varepsilon \perp 0} F(x-\varepsilon) = F(x)$ - neprekidna je slijeva,može biti neprekidna s desna

2. Zadatak

Može li za neku vrijednost argumenta biti

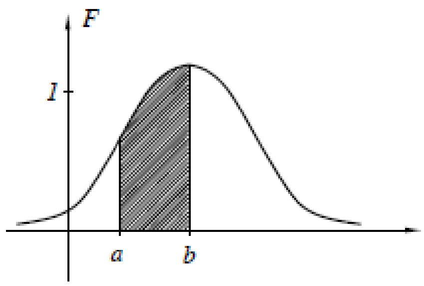
(a) gustoća razdiobe veća od jedinice,

(b) gustoća razdiobe negativna,

(c) gustoća razdiobe prekidna?

Rješenje

a)



Funkcija gustoće je pozitivna, dakle može

b) Ne može biti negativna jer je definirana kao nenegativna funkcija

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

c) Može biti prekinuta ali u točkama neprekinutosti vrijedi

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

3. Zadatak

Odredi konstantu C tako da funkcija $f(x) = C,\ xE\ [a, b]$ bude gustoća razdiobe.

Rješenje

f(x)=C

xE[a,b]

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$\int_a^b C\,dx = 1$$

$$C(x)|_a^b = 1$$

$$C = \frac{1}{b-a}$$

4. Zadatak

Odredi konstantu C tako da funkcija $f(x) = C|x - a|$, $x \in [c, d]$ bude gustoća razdiobe.

Rješenje

f(x)= $C|x - a|$

xE[c,d]

$$\int_c^d f(x)\,dx = 1$$

$$\int_c^d C|x - a|\,dx = 1$$

za aE[c,d]

$$\int_c^d C|x - a|\,dx = \int_c^a -C(x - a)dx + \int_a^d C(x - a)\,dx = C\left(ax - \frac{x^2}{2}\right)|_c^a + C\left(\frac{x^2}{2} - ax\right)|_a^d$$

$$C\left(a^2 - \frac{a^2}{2} - ac + \frac{c^2}{2}\right) + C\left(\frac{d^2}{2} - ad - \frac{a^2}{2} + a^2\right) = 1$$

$$C\left(a^2 - \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} + a^2 - ac + \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2} - ad\right) = 1$$

$$C = \frac{1}{a^2 + \frac{1}{2}(c^2 + d^2) - a(c + d)}$$

za a<c

$$\int_c^d C(x-a)dx = C\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)\Big|_c^d = C\left(\frac{d^2}{2}-ad-\frac{c^2}{2}+ac\right)=1$$

$$C=\frac{1}{(d-c)((d+c)-a)}$$

za a>d

$$\int_c^d -C(x-a)dx = C\left(ax-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_c^d = C\left(ad-\frac{d^2}{2}-ac+\frac{c^2}{2}\right)=1$$

$$C=\frac{1}{(c-d)((d+c)-a)}$$

5. Zadatak

Slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe $F(x) = 1 - e^{-\pi x}, x > 0$. Odredi očekivanje od X.

Rješenje

Ovaj zadatak možemo rješiti na dva načina, direktno ili indirektno(dulji način):

1.način

$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ Funkcija razdiobe eksponencijalne razdiobe

Iz zadatka vidimo da je $\lambda = \pi$. Očekivanje eksponencijalne razdiobe je $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\pi}$

2.način

Kako bi dobili funkciju gustoće, moramo derivirati funkciju razdiobe eksponencijalne razdiobe.

$dF(x) = d(1-e^{-\lambda x}) = f(x) = \lambda e^{-\lambda x} = \pi e^{-\pi x}$ Funkcija gustoće eksponencijalne razdiobe.

Dalje, po formuli imamo za Lapleceov transformat imamo :

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sX} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sX}\ \pi e^{-\pi x}\ dx = \frac{\pi}{s+\pi}$$

Konačno, deriviranjem Laplaceovog transformata za s=0 , na kraju imamo :

$$E(X) = -f''(0) = -\left(\frac{\pi}{s+\pi}\right)' = \frac{1}{\pi}$$

6. Zadatak

Slučajna varijabla ima jednoliku razdiobu na intervalu [a, b].

Odredi tu razdiobu ako je E(X) = 4 i D(X) = 3.

Rješenje

Ideja je doći do parametara jednolike razdiobe a i b. Budući da su očekivanje i disperzija poznate vrijednosti, treba poći od formula za njih. Njihovo rješavanje dat će dvije jednadžbe s dvije nepozanice, a rješenja će biti traženi parametri, odnosno granice u kojima F(x) linearno raste od 0 do 1.

Za jednoliku razdiobu, funkcija gustoće i funkcija razdiobe glase:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Za očekivanje i disperziju su nam potrebne formule:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x) dx - \left(E(X)\right)^2$$

Stoga imamo dvije jednadžbe sa dvije nepoznanice:

$$4 = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \quad \text{i} \quad 3 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - 16$$

Dalje slijedi:

$$4 = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx \quad \text{i} \quad 3 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx - 16$$

$$4 = \frac{b+a}{2} \quad \text{i} \quad 3 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - 16$$

Parovi rješenja za a i b su (1, 7) i (7, 1). U interpretacijskom smislu to su granice u kojima je F(x) linearna (različita od nule), stoga a mora biti manji od b.

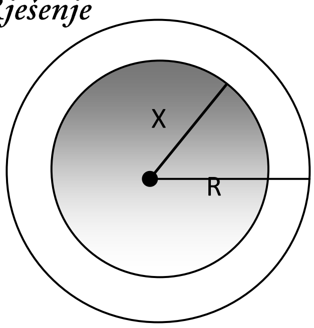
Dakle, odgovor je jednolika razdioba s parametrima a=1, b=7 i funkcijom razdiobe:

$$F(x) = \frac{x-1}{6}$$

7. Zadatak

Točka pada na sreću unutar kruga polumjera 2. Udaljenost te točke od središta kruga je vrijednost slučajne varijable *X*. Odredi njenu funkciju razdiobe, očekivanje i disperziju.

Rješenje



Funkcija razdiobe je

$$F(x) = \frac{x^2\pi}{4\pi} = \frac{x^2}{4}$$

Jer je "moguća" površina X^2 * PI a ukupna R^2*PI gdje je R = 2.

Deriviranjem funkcije razdiobe po x dobivamo

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

Dalje po formuli za očekivanje i disperziju dobivamo rezultate:

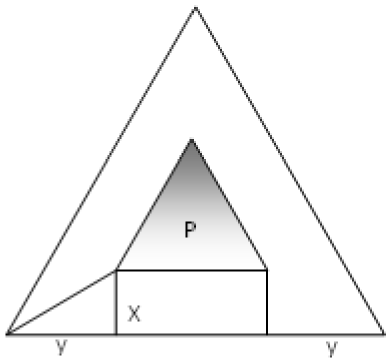
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx = \int_0^2 x\, \frac{x}{2} dx = \frac{4}{3}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x) dx - \big(E(X)\big)^2 = \int_0^2 x^2\, \frac{x}{2}\, dx - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

8. Zadatak

Točka *T* na sreću se bira unutar jednakostraničnog trokuta stranice 1. Ako je *X* udaljenost točke *T* do najbliže stranice trokuta, izračunaj očekivanu vrijednost te udaljenosti.

Rješenje



Moramo izračunati površinu P.

Imamo jednakostraničan trokut, tj. ima sve kuteve jednake veličine(60°),moramo naći y.

Po formuli za tangens dobivamo:

$$\tan 30° = \frac{x}{y}$$

$$y = \frac{x}{\tan 30°} = \frac{3\,x}{\sqrt{3}}$$

Stranica i površina P trokuta se dobiju:

$$a_P = a - 2 * \frac{3\,x}{\sqrt{3}} \qquad , \qquad P_P = \left(a - \frac{6\,x}{\sqrt{3}}\right) * \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Funkcija razdiobe je dobivena klasičnom vjerojatnosti, pa slijedi:

$$F(x) = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \left(a - \frac{6\,x}{\sqrt{3}}\right) * \frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\frac{12 * a * x}{\sqrt{3}} - 12 * x^2}{a^2}$$

Derivacijom funkcije razdiobe dobivamo:

$$f(x) = \frac{12}{a\sqrt{3}} - \frac{24}{a^2}x$$

Očekivanje računamo:

$$E(X) = \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \left(\frac{12}{a\sqrt{3}} - \frac{24}{a^2}\right) x\,dx = \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \frac{12x}{a\sqrt{3}}dx - \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \frac{24x^2}{a^2}dx$$

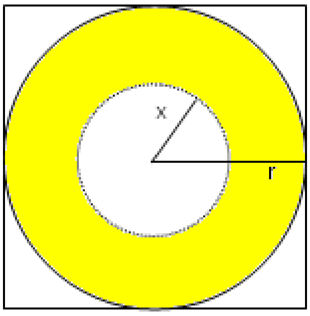
$$E(X) = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

9. Zadatak

Unutar kvadrata duljine stranice 1 odabrana je na sreću točka i potom opisan krug maksimalne površine sa središtem u toj točki, a koji leži unutar kvadrata. Odredi funkciju razdiobe površine tog kruga i izračunaj vjerojatnost da je ona veća od π/16.

Rješenje

Maksimalna površina kruga unutar kvadrata direktno je vezana za udaljenost točke od najbliže stranice. (nešto slično 8. zadatku), jer upravo je ta udaljenost radijus kruga maksimalne površine za danu točku. Zbog toga možemo primjetiti da će svim krugovima iste površine bijektivno biti pridružene točke iste udaljenosti od najbliže stranice. Tako će i njihove razdiobe biti jednake, te možemo računati razdiobu točaka udaljenih za neki iznos od najbliže stranice kvadrata.



a

Funkciju razdiobe BIJELOG KRUGA nađemo preko klasične vjerojatnosti:

$$\mathrm{F(x)} = \frac{1-(1-2\mathrm{x})^2}{1} = 1-(1-2\mathrm{x})^2$$

Funkcija razdiobe točaka udaljenih za neki x od najbliže stranice kvadrata(a=r-X)!!!!!

Za „žutu“ površinu vrijedi:

$$P = x^2\pi$$

$$x = \sqrt{\frac{a}{\pi}}$$

Konačno,

$$F(a) = 1-(1-2\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}})^2 \ggg \text{ ovdje uvrstimo } \frac{\pi}{16}$$

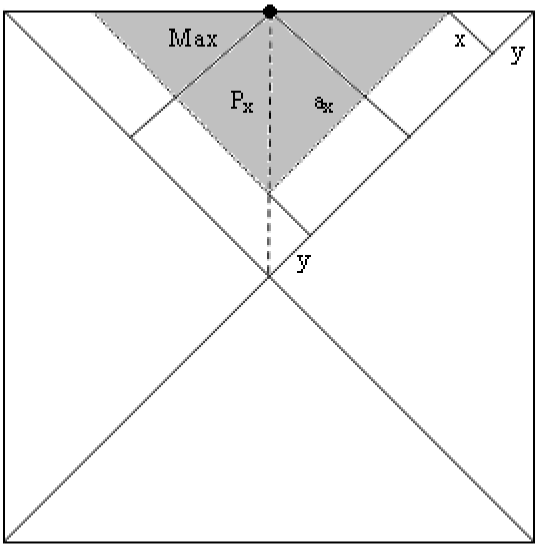
$$P\left(a > \frac{\pi}{16}\right) = 1 - P\left(a < \frac{\pi}{16}\right) = 1 - \left(1 - \left(1 - 2\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{\pi}})^2\right)\right) = \frac{1}{4}$$

P.S. Nisam ni ja baš skužio do kraja! ☺

10. Zadatak

Unutar kvadrata sa stranicom duljine 4 cm bira se na sreću točka. Vrijednost slučajne varijable *X* je udaljenost te točke do bliže dijagonale kvadrata. Nadi očekivanu vrijednost te udaljenosti.

Rješenje



Pošto imamo kvadrat,površina mu je $P = a^2$, a površina jednog je $P1 = \frac{a^2}{4}$.

Dijagonala je $d = a\sqrt{2}$

Moram uzeti točku (X) koja je Max udaljena od najbliže dijagonale, a to je upravo kada leži na polovici stranice, te je tada udaljena jednako od obje dijagonale.

Područje na kojem ćemo promatrati razdiobu je $d^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{2x^2}{16} = \frac{x^2}{8} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

Nadalje, preko tangensa dobivamo koliki je y : $\tan 45° = \frac{x}{y}$, što daje $y = x$

Sad znamo kolika je stranica manjeg trokuta: $a_x = \frac{a\sqrt{2}}{2} - 2x$, te iz toga izračunamo površinu P_x

$$P_x = \frac{(\frac{a\sqrt{2}}{2} - 2x)^2}{2} = \frac{a^2 - 4ax\sqrt{2} + 8x^2}{4}$$

Sada znamo izračunati funkciju razdiobe prema klasičnoj vjerojatnosti:

$$F(X) = \frac{P - 4P_x}{P_x} = \frac{a^2 - a^2 + 4ax\sqrt{2} - 8x^2}{a^2} = \frac{4ax\sqrt{2} - 8x^2}{a^2}$$

Za očekivanje nam je potrebna gustoća razdiobe, deriviranjem gornjeg izraza po , dobivamo:

$$F'(x) = f(x) = \frac{4\sqrt{2}}{a} - \frac{16x}{a^2}$$

Očekivana vrijednost udaljenosti je:

$$\mathrm{E(X)} = \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}} \left(\frac{4\sqrt{2}x}{a}\right) dx - \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{2}}} \left(\frac{16x^2}{a^2}\right) dx$$

$$\mathrm{E(X)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

11. Zadatak

Slučajna varijabla ima jednoliku razdiobu na intervalu [−1, 2]. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe varijable $Y = |X - 1|$.

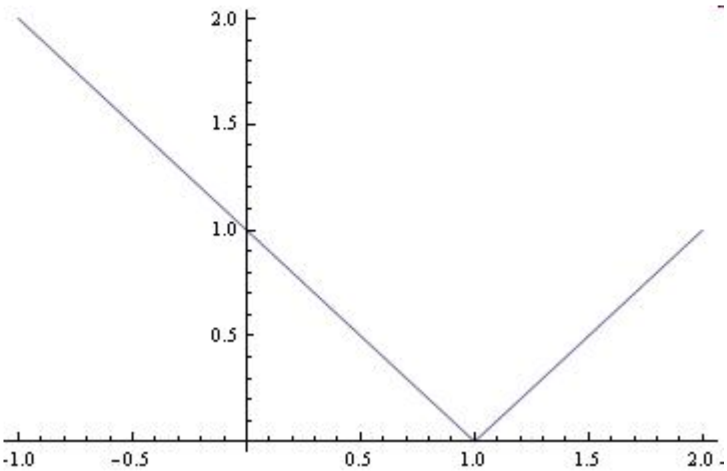
Rješenje (by Lineo)

1.način

Zadano je da X ima jednoliku razdiobu pa je stoga njegova funkcija gustoće:

$f(x) = \frac{1}{3}, \quad x \in [-1,2]$

Prvo nacrtamo funkciju Y=|X-1|



Primjećujemo da nije injekcija pa je dijelimo na injektivne intervale (kao što sam objasnio u 12.zadatku):

1. interval $x \in [-1,1], \; y \in [0,2]$

$y = -x+1 \; --> \; x = 1-y$

$|\frac{dx}{dy}| = |-1| = 1$

po formuli za gustoću:

$g_1(y) = f(x)|\frac{dx}{dy}| = \frac{1}{3}$

2.interval $x \in [1,2],\ y \in [0,1]$

$y = x-1 \ {-}{-}{>}\ x = y+1$

$|\frac{dx}{dy}| = |1| = 1$

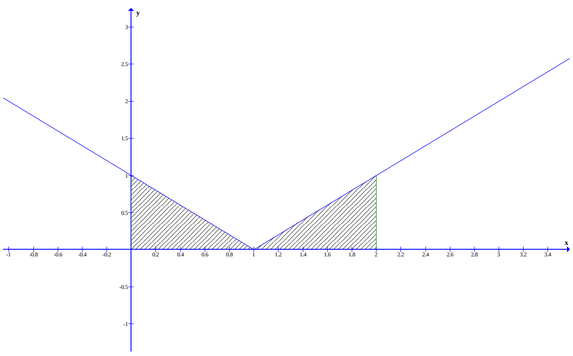
po formuli za gustoću:

$g_2(y) = f(x)|\frac{dx}{dy}| = \frac{1}{3}$

Primjećujemo da je i gustoća g1 i g2 definirana za y iz [0,1] pa ih na tom intervalu zbrajamo, a na [1,2] vrijedi samo g1. Stoga je:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{3}, & y \in [0,1] \\ \frac{1}{3}, & y \in [1,2] \\ 0, & inace \end{cases}$$

2.način



Imamo jednoliku razdiobu, pa je funkcija gustoće

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{3}$$

Za interval od 0 do 1 gdje je Y=1-X, razdioba slučajane varijable Y je:

$$G(y) = P(Y < y) = P(1 - X < y) = P(X > 1 - y) = 1 - P(X < 1 - y) = 1 - F(1 - y) = \frac{1+y}{3}$$

Za interval od 1 do 2 gdje je, Y=1-X, ali i Y=X-1,

$$G(y) = P(Y < y) = P(|X - 1| < y) = P(-y < X - 1 < y) = P(1 - y < X < y + 1) =$$
$$F(1 + y) - F(1 - y) = \frac{2y}{3}$$

12. Zadatak(by Lineo)

Slučajna varijabla ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 4\pi]$. Odredi funkciju razdiobe i gustoću razdiobe slučajne varijable $Y = \sin X$.

Rješenje

Prvo kratki uvod:

Ako nam je zadana razdioba varijable X, a traži se razdioba od varijable Y koja je zadana kao neka funkcija od X, postoje dva pristupa rješavanja:

1. po definiciji razdiobe (preko vjerojatnosti)
2. po formuli za gustoću (5.18. sa 17.stranice)

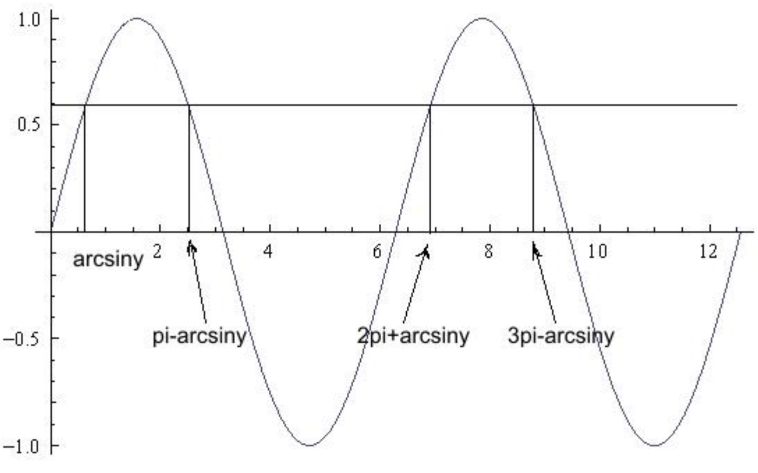
Meni osobno je lakši i jednostavniji ovaj drugi pristup preko formule, no onda treba biti posebno na oprezu jer se ona može korisiti samo ako je funkcija po kojoj je zadan Y injektivna! Rijetko kad će ta funkcija na zadanom intervalu biti injektivna pa je treba dijeliti na injektivne podintervale (tipični zadaci su 11. zadatak sa apsolutnom vrijednosti ili neki s kvadratnom funkcijom - jedan takav vas SIGURNO očekuje na međuispitu).

No ponekad je praktično riješavati zadatak na prvi način, preko definicije. Jedan od takvih zadataka je 12. (i takvi zadaci su tipično uvijek zadani preko sinusa ili kosinusa). Ako želimo riješiti preko formule, trebali bi dijeliti na pet injektivnih intervala i onda biti oprezni jer je arkus funkcija definirana samo na intervalu [-pi/2, pi/2] pa su ostali intervali s pomakom. Zbog toga je to jednostavnije riješiti po definiciji na sljedeći način:

$$G(y) = P(Y < y) = P(\sin X < y)$$

pri čemu je mali y neki broj iz intervala (-1, 1) (te vrijednosti Y može poprimiti).

Sada treba vidjeti za koje x-eve će sinX biti manji od y. To mogu predočiti samo slikom (nadam se da će biti jasna):



Stoga slijedi:

$$G(y)=P(\sin X<y)=P\left[(0<X<arcsiny)+(\pi-arcsiny<X<2\pi+arcsiny)+(3\pi-arcsiny<X<4\pi)\right]$$

"+" dakako označava uniju, a budući da su dotični događaji (intervali) međusobno disjunktni, vjerojatnost unije je jednaka zbroju vjerojatnosti:

$$G(y)=P(\sin X<y)=P(0<X<arcsiny)+P(\pi-arcsiny<X<2\pi+arcsiny)+P(3\pi-arcsiny<X<4\pi)$$

Vjerojatnost kontinuiranih varijabli možemo računati ili preko funkcije razdiobe ili preko funkcije gustoće:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$$

Mi u zadatku nemamo ni jedno ni drugo - no možemo lako vidjeti kolika je funkcija gustoće jer je zadano da X ima jednoliku razdiobu. Funkcija gustoće za jednoliku razdiobu na intervalu [0, 4pi] je:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}=\frac{1}{4\pi}$$

Zbog toga ću vjerojatnost računati preko funkcije gustoće (da ne moram tražiti kolika je funkcija razdiobe).

$$G(y)=\frac{1}{4\pi}\left[arcsiny-0+2\pi+arcsiny-(\pi-arcsiny)+4\pi-(3\pi-arcsiny)\right]$$

$$G(y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arcsiny$$

i time smo dobili funkciju razdiobe varijable Y.
Funkciju gustoće dobijemo ako deriviramo gornji izraz:

$$g(y)=G'(y)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ y\in(-1,1)$$

13.Zadatak

Slučajna varijabla X ima gustoću f_X. Odredi gustoće slučajnih varijabli

(a) $Y = \operatorname{arctg} X$,

(b) $Y = \frac{1}{1+x^2}$

Rješenje

a)

$X = tg\ Y$

Po formuli slijedi

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(tg\ y)\frac{1}{1 - cos^2 y}, \qquad yE(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

b)

Isto kao i pod a) izrazimo X preko Y, pa dobivamo

$$x = \pm\sqrt{\frac{1-y}{y}}$$

Po formuli slijedi:

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(f\left(\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{1-y}{y}}\right)\right)\frac{1}{2y^2\sqrt{\frac{1-y}{y}}}, \qquad yE(0,1)$$

za y e <0,1> jer ne smije biti 0, onda bi bila 0 u nazivniku, ne smije biti 1 jer bi to opet bila 0 u nazivniku (0 pod korijenom, pa je onda taj cijeli nazivnik 0), i ne smije biti broj veći od 1 jer je onda korijen negativan

14. Zadatak

Slučajna varijabla X ima gustoću fX. Odredi gustoće slučajnih varijabli

(a) $Y = \operatorname{tg} X$,

(b) $Y = 1/X^2$

Rješenje

a)

$X = arctg\, Y$
Po formuli slijedi

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(arctg\, y)\frac{1}{1+y^2}, \qquad yE\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

b)

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{y}}$$

Po fomuli slijedi

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left(f\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{y^3}}, \qquad y > 0$$

15. Zadatak

Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X.Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable Y=e^X.

Rješenje

$$P(Y < y) = P(F(X) < y) = P\big(x < F^{-1}(y)\big) = F(F^{-1}(y))$$

$F(y) = e^X$
$F^{-1}(y) \rightarrow x = e^y \rightarrow y = \ln x$
Uvrštavanjem u gonju formulu dobivamo:

$F(\ln x)$

16.Zadatak

Slučajna varijabla ima gustoću *f*(*x*). Odredi gustoću slučajne varijable *Y* = |*X*+*1*|.

$Y = |X + 1|, \qquad y > 0$

Imamo dvije jednadžbe:

$X = Y - 1$
$X = -Y - 1$

Po formulama, gustoće obje funkcije glase:

$$g1(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(y-1), \qquad y > 0$$
$$g2(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(-y-1), \qquad y > 0$$

Sada zbrojimo:

$$g(y) = g1(y) + g2(y) = f(y-1) + f(-y-1), \qquad y \geq 0$$

17. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe $F(x) = 1 - e^{-2x}$, $x > 0$. Napiši funkciju razdiobe varijable $Y = X^2$.

Rješenje

Izrazimo X preko Y

$X = \pm\sqrt{Y}$

Preko funkcije razdiobe slijedi

$$G(y) = P(Y < y) = P\left(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}\right) = F\left(\sqrt{y}\right) - F(-\sqrt{y})$$

E sad pošto x>0 uzimamo samo $F(\sqrt{y})$ dio, i uvrštavamo u F(x)

$F(x) = 1 - e^{-2\sqrt{y}}$, y>0

18. Zadatak

Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe $f(x) = C|\sin x|, |x| \le \pi$. Izračunaj gustoću slučajne varijable $Y = X^2$ i očekivanje $E(Y)$.

Rješenje

$Y = X^2$ iz toga slijedi: $X =$ +/- $\sqrt{Y}$

Zadano je $|x| <= \pi$ pa je $-\pi <= x <= \pi$

Iz ova dva uvjeta zaključujemo da je $0 <= y <= \pi^2$

Sada računamo vrijednost funkcije razdiobe:

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = -\int_{-\pi}^{0} Csin(x)dx + \int_{0}^{\pi} Csin(x)dx = C + C - (-C - C) = 4C$$

Kako je $F(x) = 1$ onda je $C = \frac{1}{4}$

Znači, zadana gustoća razdiobe je: $f(x) = \frac{1}{4}\sin|x|$ za $|x| <= \pi$

U zadatku se traži funkcija gustoće slučajne varijable Y. Da bismo ju odredili razmotrit ćemo dva slučaja:

a) za $-\pi <= x <= 0$ vrijedi:

$$g1(y) = -\frac{1}{4}\sin(x)|(-\sqrt{y})'| = \frac{1}{4}\sin(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

b) za $0 <= x <= \pi$ vrijedi:

$$g2(y) = \frac{1}{4}\sin(x)|(\sqrt{y})'| = \frac{1}{4}\sin(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Konačno funkciju gustoće slučajne varijable Y dobit ćemo zbrajanjem g1(y) i g2(y):

$$g(y) = g1(y) + g2(y) = \frac{1}{4\sqrt{y}}\sin(\sqrt{y}) \text{ za } 0 <= y <= \pi^2$$

Preostaje još izračunati očekivanje E(Y):

Radimo substituciju:

$$k = \sqrt{y}$$

$$y = k^2$$

$$dy = 2k\,dk$$

Sada je E(Y):

$$E(y) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} k sin(k) 2k\,dk = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} k^2 \sin(k)\,dk$$

Parcijalno integriramo:

$$u = k^2$$

$$du = 2k\,dk$$

$$dv = \sin(k)\,dk$$

$$v = -\cos(k)$$

i dobivamo:

Još jednom parcijalno integriramo:

$$u = k$$

$$du = dk$$

$$dv = \cos(k)\,dk$$

$$v = \sin(k)$$

pa je:

$$E(Y) = \frac{\pi^2}{2} + \left[k sin(k)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(k)\,dk\right] = \frac{\pi^2}{2} + \cos(k)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} - 1 - 1 = \frac{\pi^2}{2} - 2$$

19.Zadatak

Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe $f(x) = Ce^{-2x}$, $x \geq 1$. Odredi konstantu C i gustoću razdiobe slučajne varijable Y=1/1-X

Rješenje

$$f(x) = Ce^{-2x}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x)\ dx} = 1$$
$$\int_{1}^{\infty} Ce^{-2x}\ \mathrm{dx} = 1$$
$$C = 2e^2$$

Uvrstimo C:

$$f(x) = 2e^{2-2x}$$
$$Y = \frac{1}{1-X}$$
$$X = 1 - \frac{1}{Y}$$
$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = f(1-\frac{1}{y})\frac{1}{y^2}, \qquad y > 0$$

Sada uvrstimo u f(x):

$$g(y) = 2e^{2-2(1-\frac{1}{y})}\frac{1}{y^2},$$

Rezultat

$$g(y) = 2e^{\frac{2}{y})}\frac{1}{y^2}, \quad y < 0$$

20.Zadatak

Slučajna varijabla ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 1]$. Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = 1/X^2$. Postoji li očekivanje $E(Y)$?

Rješenje