

VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

12. Testiranje hipoteza

FER, Zagreb

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Statistika i procesi Cjelina 12 – Testiranje hipoteza

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

| | |
|---|----|
| 1. Formule..... | 3 |
| 2. Zadaci..... | 5 |
| 3. Rješeni zadaci..... | 7 |
| 4. Službena rješenja..... | 14 |
| 5. Tablica normalne razdiobe..... | 15 |
| 6. Kvantili Hi-kvadrat razdiobe (tablica)..... | 17 |
| 6. Kvantili Studentove razdiobe (tablica)..... | 19 |
| 7. Kvantili standardne normalne razdiobe u_p (tablica)..... | 21 |
| 8. Literatura..... | 22 |

NAPOMENA

Potrebno je riješiti SVE zadatke!

Zadaci koji nedostaju: 10,17,19,20,22

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka!

FORMULE:

12. TESTIRANJE HIPOTEZA

Hipoteza je bilo koja pretpostavka o distribuciji neke slučajne varijable.

U-test: hipoteza o očekivanju normalne razdiobe uz poznatu disperziju σ^2 :

$H_0 \dots a = a_0$

$$U = \frac{\bar{X} - a_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Kriterij za odbacivanje H_0 :

$H_1 \dots a \neq a_0: |\hat{u}| > u_{1-\alpha/2}$

$H_1 \dots a < a_0: \hat{u} > -u_{1-\alpha}$

$H_1 \dots a > a_0: \hat{u} > u_{1-\alpha}$

T-test: hipoteza o očekivanju normalne razdiobe uz nepoznatu disperziju σ^2 :

$H_0 \dots a = a_0$

$$T = \frac{\bar{X} - a_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

Kriterij za odbacivanje H_0 :

$H_1 \dots a \neq a_0: |\hat{t}| > t_{n-1, 1-\alpha/2}$

$H_1 \dots a < a_0: \hat{t} > -t_{n-1, 1-\alpha}$

$H_1 \dots a > a_0: \hat{t} > t_{n-1, 1-\alpha}$

Hipoteza o proporciji

$H_0 \dots p = p_0$

$$U = \left(\frac{m}{n} - p_0 \right) \sqrt{\frac{n}{p_0 q_0}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Kriterij za odbacivanje H_0 :

$H_1 \dots a \neq a_0: |\hat{u}| > u_{1-\alpha/2}$

$H_1 \dots a < a_0: \hat{u} > -u_{1-\alpha}$

$H_1 \dots a > a_0: \hat{u} > u_{1-\alpha}$

USPOREDBA DVIJU POPULACIJA

Hipoteza o jednakosti očekivanja dvaju normalnih uzoraka $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma_Y^2)$, uz poznate disperzije:

$H_0, \dots, \mu = \nu$

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}, \quad U = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_Z} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Kriterij za odbacivanje H_0 :

$H_1 \dots \mu \neq \nu$: $|\hat{u}| > u_{1-\alpha/2}$

$H_1 \dots \mu < \nu$: $\hat{u} > -u_{1-\alpha}$

$H_1 \dots \mu > \nu$: $\hat{u} > u_{1-\alpha}$

Hipoteza o jednakosti očekivanja dvaju normalnih uzoraka $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma_X^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \sigma_Y^2)$, uz poznate disperzije:

$H_0, \dots, \mu = \nu$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad S_Y^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2$$

$$S_Z^2 = \frac{1}{n+m-2} [(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2]$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_Z} \sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sim t(m+n-2)$$

Kriterij za odbacivanje H_0 :

$H_1 \dots \mu \neq \nu$: $|\hat{t}| > t_{m+n-2, 1-\alpha/2}$

$H_1 \dots \mu < \nu$: $\hat{t} > -t_{m+n-2, 1-\alpha}$

$H_1 \dots \mu > \nu$: $\hat{t} > t_{m+n-2, 1-\alpha}$

Hipoteza o jednakosti proporcija:

$H_0, \dots, p' = p''$

$$p = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}, \quad \sigma^2 = p(1-p); \quad U = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Kriterij za odbacivanje H_0 :

$H_1 \dots p_1 \neq p_2$: $|\hat{u}| > u_{1-\alpha/2}$

$H_1 \dots p_1 < p_2$: $\hat{u} > -u_{1-\alpha}$

$H_1 \dots p_1 > p_2$: $\hat{u} > u_{1-\alpha}$

HI-KVADRAT TEST

Hi-kvadrat test: test prilagodbe razdiobama

m – broj razreda (one razrede za koje je $n_j < 5$ spajamo s njima susjednim),

n_k – broj realizacija u pojedinom razredu

p_k – teorijska vjerojatnost pojedinog razreda

Stupanj slobode = $m - r - 1$

r – broj parametara razdiobe procenjenih iz uzorka

$$\chi_q^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} \sim \chi^2(m-r-1)$$

Kriterij za odbacivanje:

$$\chi_q^2 > \chi_{m-r-1, 1-\alpha}^2$$

1. Slučajna varijabla X je normalno distribuirana s nepoznatim očekivanjem i disperzijom $\sigma^2 = 6$. Uzorak od $n = 100$ mjerenja dao je srednju vrijednost $\bar{x} = 16.2$. Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ testirajte hipotezu $H_0 \dots a = 15$, uz alternativu $H_1 \dots a \neq 15$.

2. Slučajna varijabla X je normalno distribuirana s nepoznatim očekivanjem i nepoznatom disperzijom. Uzorak od $n = 50$ mjerenja dao je srednju vrijednost $\bar{x} = 24.2$ i $s^2 = 4.8$. Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ testirajte hipotezu $H_0 \dots a = 25$, uz alternativu $H_1 \dots a < 25$.

3. Pseudoslučajnim generatorom simulirano je bacanje novčića 10000 puta. Pismo je registrirano 5120 puta. S kojim nivoom značajnosti možemo potvrditi hipotezu o ispravnosti generatora?

4. Pri proizvodnji u normalnim uvjetima, stroj daje 2% škarta. Na uzorku od 500 proizvoda primjećeno je 16 škartnih proizvoda. Provjeri hipotezu o ispravnosti deklaracije, uz nivo značajnosti 5%.

5. Srednja vrijednost uzorka volumena 50 iznosi $\bar{x} = 12.6$, uz devijaciju $\hat{s} = .53$. provjeri hipotezu $H_0 \dots a = 12$, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

6. U tablici su dana odstupanja promjera valjaka obrađivanih na preciznom tokarskom stroju u μ m od nominale

| μ m | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-20 | +20 |
|---------|-----|------|-------|-------|-----|
| n_j | 15 | 75 | 100 | 50 | 10 |

Pomoću χ^2 -testa, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.2$, provjeri suglasnost ovih podataka sa normalnom razdiobom.

7. Proizvođač tvrdi da je vrijeme rada nekog uređaja barem 200 dana. Izabran je uzorak od 8 proizvoda koji je dao rezultate:

165, 170, 182, 185, 193, 200, 203, 210

Provjeri ispravnost tvrdnje proizvođača uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

8. Rezultati nekog mjerenja dani su u tablici:

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|----|----|-----|-----|-----|----|----|---|---|
| m_j | 12 | 62 | 129 | 172 | 150 | 80 | 28 | 5 | 2 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri hipotezu da se ovi podaci pokoravaju binomnom zakonu $B(8, 0.4)$ uz nivo značajnosti $\alpha = 0.90$.

9. Rezultati mjerenja slučajne varijable X dani su u tablici:

| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|-----|----|----|---|---|
| m_j | 132 | 48 | 20 | 3 | 2 |

S pomoću χ^2 -testa provjeri hipotezu da se ovi podaci ravnaju po Poissonovoj razdiobi, uz nivo značajnosti 0.05.

10. Uzastopnim ponavljanjem nekog pokusa dobivene su sljedeće vrijednosti neprekidne slučajne varijable X

| $[a, b]$ | 0-5 | 5-10 | 10-15 | 15-20 | 20-25 |
|----------|-----|------|-------|-------|-------|
| m_j | 15 | 60 | 90 | 50 | 10 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri suglasnost ovih podataka sa normalnom razdiobom, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.8$.

11. Proizvođač tvrdi da je tvornička težina nekog proizvoda 100 p. Uzorak od 20 proizvoda dao je rezultate:

| težina | 98 | 99 | 100 | 101 | 102 |
|--------------|----|----|-----|-----|-----|
| broj uzoraka | 4 | 6 | 6 | 3 | 1 |

Provjeri ispravnost tvrdnje proizvođača uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

12. Rezultati mjerenja slučajne varijable X dani su u tablici:

| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|-----|-----|-----|----|---|---|
| m_j | 505 | 336 | 125 | 24 | 8 | 2 |

Provjeri, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$, hipotezu da slučajna varijabla X ima Poissonov zakon razdiobe.

13. Ispitaj suglasnost podataka u tablici

| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|----|----|----|----|----|---|---|---|
| n_j | 21 | 62 | 50 | 40 | 22 | 0 | 5 | 0 |

s Poissonovom razdiobom, uz nivo značajnosti 0.05.

14. Realizacije slučajne varijable X zadane su tablicom:

| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------|---|----|----|----|---|---|
| m_j | 6 | 10 | 20 | 10 | 6 | 0 |

Pomoću χ^2 -testa, uz nivo značajnosti 0.05, provjeri suglasnost tih podataka s Poissonovom razdiobom.

15. Rezultati mjerenja slučajne varijable X dani su u tablici:

| | | | | | |
|-------|-----|----|----|---|---|
| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| m_j | 130 | 52 | 18 | 4 | 1 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri hipotezu da se ovi podaci ravnaju po Poissonovoj razdiobi, uz nivo značajnosti 0.05.

16. Rezultati nekog pokusa u kojem se u 1000 ispitivanja bilježio broj x_j pojavljivanja nekog događaja, dani su u tablici:

| | | | | | | |
|-------|-----|-----|-----|----|---|---|
| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n_j | 505 | 336 | 125 | 24 | 8 | 2 |

Provjeri pomoću χ^2 -testa, uz nivo značajnosti 0.05, suglasnost ovih podataka s Poissonovom razdiobom.

17. 100 puta su bačena četiri novčića i bilježen je broj X pojavljivanja grbova:

| | | | | | |
|-------|---|----|----|----|---|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| n_i | 8 | 20 | 42 | 22 | 8 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri hipotezu da X ima binomnu razdiobu s parametrom $p = 0.5$, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

18. Rezultati mjerenja slučajne varijable X dani su u tablici

| | | | | | |
|-------|-----|----|----|---|---|
| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| n_j | 120 | 56 | 18 | 4 | 2 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri hipotezu da se ovi podaci ravnaju po Poissonovoj razdiobi, uz nivo značajnosti 0.05.

19. 220 puta je bačeno 5 novčića i bilježen je broj X pojavljivanja grbova:

| | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|---|
| x_i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n_i | 6 | 32 | 71 | 69 | 35 | 7 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri hipotezu da X ima binomnu razdiobu s parametrom $p = \frac{1}{2}$, uz nivo značajnosti 0.95.

20. U 320 obitelji sa petoro djece izbrojena su muška odnosno ženska djeca, i dobiven je rezultat prema tabeli

| | | | | | | |
|---------------|----|----|-----|----|----|---|
| muška dj. | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| ženska dj. | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| broj obitelji | 18 | 56 | 110 | 88 | 40 | 8 |

S nivoom značajnosti 5 % testiraj hipotezu da su muška i ženska djeca jednako vjerojatna!

21. U Mendeljevskim eksperimentima sa graškom ispitano je 560 zrna i dobiveno je

| | |
|-----|--------------------|
| 317 | okruglih i žutih |
| 109 | okruglih i zelenih |
| 102 | smežuranih i žutih |
| 32 | smežurana i zelena |

Prema njegovoj teoriji o naslijeđivanju, ovi brojevi bi morali biti u omjeru 9 : 3 : 3 : 1. S nivoom značajnosti 5 % odgovori treba li prihvatiti ili odbaciti ovu pretpostavku.

22. 4 kovana novčica bačena su istovremeno 96 puta i svaki put je zabilježen broj grbova:

| | | | | | |
|-------|---|----|----|----|---|
| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| f_i | 5 | 26 | 34 | 24 | 7 |

S nivoom značajnosti 5 % provjeri da li se dobiveni rezultati slažu s hipotezom o ispravnosti svih novčića.

23. Igrača kocka bačena je 180 puta i dobiveni su sljedeći rezultati:

| | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| broj | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| n_j | 34 | 28 | 26 | 32 | 27 | 33 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri da li se ovi podaci ravnaju po jednolikoj razdiobi, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.90$.

24. Ispitaj suglasnost podataka u tablici

| | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|
| x_j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| n_j | 20 | 55 | 48 | 35 | 18 | 10 |

s Poissonovom razdiobom, uz nivo značajnosti 0.05.

25. Kocka je bačena 180 puta i dobiveni su sljedeći rezultati

| | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 34 | 28 | 26 | 32 | 27 | 33 |

Pomoću χ^2 -testa provjeri da li se ovi podaci ravnaju po jednolikoj razdiobi, uz nivo značajnosti 0.1.

26. U prvih 800 znamenaka decimalnog prikaza broja π znamenke 0, 1, ..., 9 pojavljuju se 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 76, 91 put. Provjeri χ^2 -testom hipotezu da je pojava svih znamenaka u tom prikazu jednako vjerojatna, uz nivo značajnosti $\alpha = 0.1$.