

VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

7. Slučajni vektori

FER, Zagreb

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Slučajne varijable Cjelina 7 – Slučajni vektori

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

1. Formule.....	3
2. Zadaci.....	4
3. Rješeni zadaci.....	9
4. Službena rješenja.....	18
5. Literatura.....	20

NAPOMENA

Zadaci KOJE TREBA rješavati su od 1.-29.zadatka.

Zadaci koji nedostaju: 1,11,21,23, 24,

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka !

FORMULE:

7. SLUČAJNI VEKTORI

Slučajni vektori su *višedimenzionalne* slučajne varijable kojim obuhvaćamo međuovisnost dviju ili više slučajnih varijabli.

Funkcija razdiobe: $F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n$; $F(X, Y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy$

Gustoća funkcije: $f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$; $f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$

Vjerojatnost realizacije slučajnog vektora: $P((X_1, \dots, X_n) \in G) = \int \dots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$

Marginalne razdiobe:

$$F_X(X) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

$$F_Y(Y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy$$

Marginalne gustoće:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

Nezavisnost:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) * \dots * f_n(x_n)$$

Očekivanje: $E(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y f(x, y) dx dy$

Svojstva očekivanja: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$; $E(XY) = E(X)E(Y)$

Svojstvo karakteristične funkcije: $\vartheta_{X+Y}(t) = \vartheta_X(t) \cdot \vartheta_Y(t)$

Disperzija zbroja: $D(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \dots + D(X_n)$

UVJETNE RAZDIOBE

Uvjetna gustoća: $f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}$

Marginalne i uvjetne gustoće:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y) f_Y(y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y|x) f_X(x) dx$$

Uvjetno očekivanje: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y = y) f_Y(y) dy$

Uvjetna vjerojatnost: $P(A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(A|X = x) f_X(x) dx$

§ 7. Zadaci za vježbu

1. Je li funkcija

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0 \text{ ili } y < 0 \\ 0, & x + y < 1 \\ 1, & \text{za ostale vrijednosti} \end{cases}$$

funkcija razdiobe slučajnog vektora (X, Y) ?

2. Slučajni vektor ima jednoliku razdiobu na kvadratu $((x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$. Napiši funkciju razdiobe F vektora (X, Y) .

3. Točka T izabrana je na sreću unutar polukruga polumjera R . Slučajna varijabla X je udaljenost točke do središta, a Y udaljenost točke do promjera polukruga. Odredi gustoću razdiobe slučajnog vektora (X, Y) .

4. Točka T bira se na sreću na

a) jediničnoj kružnici $(x^2 + y^2 = 1)$,

b) jediničnoj sferi $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$.

Odredi funkciju gustoće x -koordinate te točke.

5. Slučajna varijabla X ima gustoću

$$f(x) = a \cdot x^2, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

a slučajna varijabla Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 1]$. Uz pretpostavku da su X i Y nezavisne, odredi vjerojatnost $P(X + Y \geq 1)$.

6. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 4]$, a slučajna varijabla Y zadana je funkcijom gustoće $g(y) = e^{-y}$, $y > 0$. Uz pretpostavku da su X i Y nezavisne, odredi vjerojatnost događaja $(Y \geq X)$.

7. X i Y su nezavisne slučajne varijable. X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(0, 2)$, a Y funkciju gustoće $g(y) = a \cdot y$, $0 \leq y \leq 2$. Izračunaj vjerojatnost događaja $(X \leq 1, Y \leq 1)$.

8. X i Y su nezavisne slučajne varijable, X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$, a Y gustoću $g(y) = 2y$, $0 \leq y \leq 1$. Napiši funkciju gustoće slučajnog vektora (X, Y) , izračunaj vjerojatnost događaja

$(X \geq 1, Y \leq 0.5)$ i očekivanje slučajne varijable $X \cdot Y$.

9. Slučajni vektor (X, Y) poprima vrijednost u trećem kvadrantu $(x < 0, y < 0)$. Ako je pripadna gustoća vjerojatnosti $f(x, y) = k \cdot e^{2x+3y}$, izračunaj konstantu k te vjerojatnost događaja $A = (Y > X + 1)$.

10. Zadana je funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = Ce^{-(2x+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

Jesu li X i Y nezavisne? Izračunaj vjerojatnost događaja $A = (X > Y)$, $B = (X = Y)$.

11. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe $F(x) = 1 - e^{-x}$, a varijabla Y formulom $Y = X^2$. Napiši funkciju razdiobe slučajnog vektora (X, Y) .

12. Slučajni vektor (X, Y) zadat je funkcijom gustoće:

$$f(x, y) = Cx(1-x)y, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

Izračunaj uvjetnu vjerojatnost događaja

$$(X + Y > 1 \mid Y < \frac{1}{2}).$$

13. Slučajni vektor (X, Y) zadat je funkcijom gustoće:

$$f(x, y) = 8x(1-y)(1-x), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

Izračunaj uvjetnu vjerojatnost događaja

$$(X + Y < 1 \mid Y > 1/2).$$

14. Slučajni vektor (X, Y) ima gustoću $f(x, y) = Cxy$ na području

$$S = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

Odredi marginalne gustoće f_X i f_Y . Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable? Izračunaj vjerojatnost $P(X > \frac{1}{2} \mid X + Y > \frac{1}{2})$.

15. Slučajni vektor (X, Y) zadat je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = 8xy(1 - y^2), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 1.$$

Izračunaj uvjetnu vjerojatnost događaja $A = (X + Y \geq 1)$ uz uvjet $B = (Y < X)$.

16. Gustoća razdiobe vektora (X, Y) iznosi

$$f(x, y) = 8xy(1 - x^2), \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

Pokaži da su X i Y nezavisne.

17. X i Y su nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnom razdiobom s istim parametrom λ . Izračunaj $P(X + Y < 2 \mid X > 1)$.

18. Slučajni vektor (X, Y) zadat je gustoćom razdiobe $f(x, y) = Cxy$, na području

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\}.$$

Odredi konstantu C . Izračunaj marginalnu gustoću $f_X(x)$ te uvjetnu vjerojatnost

$$(X > Y \mid Y < 1/2).$$

19. Zadana je gustoća razdiobe slučajnog vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = 2(x + y - 3xy^2), \quad 0 < x, y < 1$$

Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable? Odredi marginalne gustoće.

20. Gustoća razdiobe slučajnog vektora (X, Y) iznosi

$$f(x, y) = [(1 + ax)(1 + ay) - a]e^{-x-y-axy},$$

$(x > 0, y > 0)$ gdje je $0 < a < 1$. Odredi marginalnu gustoću slučajnih varijabli X i Y .

21. Gustoća vektora (X, Y) iznosi

$$f(x, y) = xe^{-(1+y)x}, \quad x > 0, y > 0$$

Odredi marginalne gustoće.

22. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na trapezu $OABC$, s vrhovima $O(0, 0)$, $A(8, 0)$, $B(4, 4)$, $C(0, 4)$. Izračunaj marginalne funkcije gustoće slučajnih varijabli X i Y .

23. Slučajni vektor (X, Y, Z) ima jednoliku razdiobu unutar valjka

$$(x^2 + y^2 \leq R^2, -H \leq z \leq H).$$

Odredi marginalne gustoće njegovih komponenti. Jesu li one nezavisne?

24. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na krugu polumjera R sa središtem u ishodištu. Pokaži da su X i Y zavisne, ali nekorelirane.

25. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na području omeđenom pravcima $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$. Odredi marginalnu funkciju razdiobe varijable X te očekivanje $E(X)$.

26. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na trokutu

$$T = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y < 1\}.$$

Izračunaj marginalne gustoće. Pokaži da su komponente X i Y zavisne.

27. Na sreću odabrana točka iz intervala $[0, 1]$ dijeli ga na dva dijela. Neka je slučajna varijabla Y duljina duljeg, a slučajna varijabla X duljina kraćeg dijela. Odredi funkcije gustoća i očekivanja od X i Y . Jesu li X i Y nezavisne? Izračunaj $E(XY)$.

28. Dvodimenzionalan slučajni vektor zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = A \sin(x+y), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

Izračunaj konstantu A . Odredi marginalne funkcije razdioba i vjerojatnost događaja

$$(X < \frac{\pi}{4}, Y < \frac{\pi}{4}).$$

29. Slučajni vektor (X, Y) ima gustoću $f(x, y) = C(x+y)$ na području

$$D = \{(x, y) : x < 1, y < 1, x+y > 1\}.$$

Odredi i skiciraj marginalnu gustoću varijable X te izračunaj očekivanje $E(X)$.

30. Slučajni vektor (X, Y) s nenegativnim komponentama ima funkciju razdiobe

$$F(x, y) = 1 - e^{-\alpha x} - e^{-\beta y} + e^{-\alpha x - \beta y}, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Odredi očekivanje i korelacijsku matricu tog vektora. Jesu li njegove komponente zavisne ili nezavisne?

31. Točka (X, Y) ima jednoliku razdiobu unutar trokuta s vrhovima $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. Odredi koeficijent korelacije između X i Y .

32. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 2\pi]$. Neka je $Y_1 = \cos X$, $Y_2 = \sin X$. Izračunaj $\text{cov}(Y_1, Y_2)$. Jesu li Y_1 i Y_2 nezavisne?

33. Slučajna varijabla Y je zbroj triju slučajnih varijabli, $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Poznato je $E(X_1) = 1$, $E(X_2) = 2$, $E(X_3) = 0$, $D(X_1) = 0,01$, $D(X_2) = 4$, $D(X_3) = 0,36$, $r_{12} = 0,2$, $r_{13} = 0,3$, $r_{23} = -0,1$. Izračunaj $E(Y)$ i $D(Y)$.

34. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 1]$. Odredi koeficijent korelacije za sljedeće parove slučajnih varijabli: a) X i X^2 b) X i X^3

35. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $(-1, 1)$. Neka je $Y = X^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Odredi korelacijsku matricu vektora (X, Y) .

36. Neka su X_1 i X_2 nezavisne identički distribuirane slučajne varijable i $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1 - X_2$. Pokaži da je $r(Y_1, Y_2) = 0$.

37. Odredi kovarijacijsku matricu vektora (X, Y) čija je gustoća razdiobe

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

38. Odredi gustoću razdiobe te kovarijacijsku matricu vektora (X, Y) zadanog funkcijom razdiobe

$$F(x, y) = \sin x \sin y, \quad 0 < x, y < \frac{\pi}{2}.$$

39. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 1]$. Izračunaj koeficijent korelacije $r(Y_1, Y_2)$ para slučajnih varijabli $Y_1 = X^2$ i $Y_2 = X^4$.

40. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 2]$. Izračunaj koeficijent korelacije $r(Y_1, Y_2)$ para slučajnih varijabli $Y_1 = X^2$ i $Y_2 = X^3$.

41. Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu, a slučajna varijabla Y normalnu razdiobu s pripadnim gustoćama

$$f_X(x) = 3e^{-3x}, \quad x > 0$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(y+4)^2/8}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Ako su X i Y međusobno korelirane slučajne varijable s koeficijentom korelacije $r(X, Y) = -0.5$, izračunaj očekivanje slučajne varijable $Z = X^2 - 3XY + 2Y^2$.

42. Neka su f_1, f_2 gustoće, a F_1, F_2 funkcije razdiobe nekih slučajnih varijabli. Dokaži da je za svaki a , $|a| < 1$, funkcija

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)(1 + a[2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1])$$

gustoća nekog slučajnog vektora (X, Y) . Dokaži da su gustoće slučajnih varijabli X i Y upravo funkcije f_1 i f_2 .

43. Slučajne varijable X_1 i X_2 imaju očekivanja $E(X_1) = a_1$, $E(X_2) = a_2$; disperzije $D(X_1) = \sigma_1^2$, $D(X_2) = \sigma_2^2$ i koeficijent korelacije r . Odredi numeričke karakteristike slučajne varijable $Y = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma$.

44. Zadan je slučajni vektor (X, Y) s numeričkim karakteristikama $E(X) = E(Y) = 0$, $D(X) = 100$, $D(Y) = 25$, $E(XY) = 16$. Odredi linearnu transformaciju oblika

$$X = U, \quad Y = aU + V$$

tako da komponente vektora (U, V) budu nekorelirane. Odredi numeričke karakteristike za U i V .

45. Nezavisne slučajne varijable X_1, \dots, X_n imaju jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 1]$. Neka je $X = X_1 + \dots + X_n$. Izračunaj $E(X^2)$.

46. Neka su X_1, \dots, X_n pozitivne, jednako distribuirane slučajne varijable. Odredi

$$E\left(\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n}\right) \quad (1 \leq k \leq n).$$

47. Neka je X nenegativna slučajna varijabla s gustoćom f_X . Neka Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, X]$, te $Z = X - Y$. Pokaži da su Y i Z nezavisne ako i samo ako je

$$f_X(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

48. Slučajne varijable X i Y su nezavisne i imaju istovjetnu distribuciju. Izračunaj uvjetnu gustoću $f_{X|X+Y=z}(x)$ varijable X uz uvjet $X + Y = z$, ako

- X i Y imaju eksponencijalnu razdiobu $E(\lambda)$,
- X i Y imaju jednoliku razdiobu na $[0, 1]$.

49. Slučajna varijabla X_1 ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 1]$, X_2 jednoliku razdiobu na $[x_1, x_1 + 1]$, gdje je x_1 realizacija varijable X_1 . Analogno se definiraju slučajne varijable X_3, \dots, X_n . Izračunaj $E(X_n)$.

50. Točke A_1, \dots, A_n biraju se na sreću na kružnici S sa središtem u O . Neka je B_n događaj (Točka O leži unutar konveksnog mnogokuta s vrhovima A_1, \dots, A_n).

- Kolika je vjerojatnost događaja B_n ?
- Neka slučajna varijabla v poprima vrijednost najmanjeg broja n za kojeg je ispunjen događaj B_n . Odredi $E(v)$ i $D(v)$.

51. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na krugu polumjera r , sa središtem u ishodištu. Izračunaj marginalnu gustoću $f_X(x)$ i uvjetnu gustoću $f(x|y)$. Jesu li komponente X i Y nezavisne? Jesu li nekorelirane?

52. X, Y, Z su nezavisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 1]$. Izračunaj vjerojatnost događaja $(Z < X + Y)$.

53. Neka su X_1, X_2, X_3 nezavisne slučajne varijable s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 1]$. Odredi funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $Y = X_1 + X_2 + X_3$.

54. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu vjerojatnosti na području

$$G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + 2y < 2\}.$$

Nađi uvjetnu gustoću $f_{X|Y=y}(x) = f(x|y)$ i prikaži je grafički. Izračunaj koeficijent korelacije $r(X, Y)$.

55. Prodavaonica radi od 8 do 20 sati. Vrijeme ulaska kupca u nju je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom. Vrijeme boravka kupca u prodavaonici ima eksponencijalnu razdiobu, s očekivanjem $1/2$ sata i neovisno je o trenutku ulaska (u 20 sati kupac mora izaći van). Kolika je vjerojatnost da kupac boravi u prodavaonici duže od 1 sata? Ako je izašao u 12 sati, kolika je vjerojatnost da je ušao prije 11 sati?

56. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu vjerojatnosti nad područjem

$$G = \{(x, y) : 0 < x < 2, y > 0, 2x > y\}.$$

Nađi uvjetnu gustoću $f(x | Y = y)$ i prikaži je grafički. Izračunaj koeficijent korelacije $r(X, Y)$.

57. Unutar dužine \overline{AB} odabrana je na sreću točka C . Zatim je na većem od dijelova \overline{AC} , \overline{CB} odabrana na sreću točka P . Kolika je vjerojatnost da se od dobivenih dijelova može sastaviti trokut?

58. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu vjerojatnosti na području

$$G = \{(x, y) : x < 2, y > 0, x - 2y > 0\}.$$

Nađi uvjetnu gustoću $f_{X|Y=y}(x) = f(x|y)$ i prikaži je grafički.

59. Polumjer R kruga slučajna je varijabla jednoliko distribuirana na $[r_1, r_2]$. Točka T bira se na sreću unutar kruga. Kolika je vjerojatnost da udaljenost točke T do središta kruga poprimi vrijednost manju od r_1 ?

60. Polumjer kruga je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 1]$. Središte kruga bira se na sreću unutar kvadrata stranice 2. Kolika je vjerojatnost da krug neće sijeći stranicu kvadrata?

61. U jednakokraničnom trokutu ABC duljina stranice je slučajna varijabla jednoliko distribuirana na intervalu $[10, 30]$. Točka T bira se na sreću unutar trokuta. Kolika je vjerojatnost da je udaljenost od T do stranice \overline{AB} manja od 15?

62. Slučajna varijabla R ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 1]$ i predstavlja polumjer kruga sa središtem u ishodištu. Ako je T točka na sreću izabrana unutar tog kruga, izračunaj očekivanje udaljenosti točke T do središta kruga.

63. Slučajni vektor (X, Y) ima normalnu razdiobu s gustoćom

$$f(x, y) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} \right]\right).$$

Odredi zakon razdiobe slučajne varijable $Z = X - Y$.

64. Slučajni vektor (X, Y) ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(0, 0, \sigma^2, \sigma^2, r)$. Odredi zakon razdiobe slučajne varijable $Z = X + Y$.

65. Slučajni vektor (X, Y, Z) ima normalnu razdiobu s gustoćom

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{6\pi}} \times \exp\left(-\left(x^2 + \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}xz\right)\right).$$

Odredi kovarijacijsku matricu vektora (X, Y, Z) .

66. Neka je $(1, -1, 0)$ očekivanje i

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

kovarijacijska matrica vektora (X, Y, Z) koji ima normalnu razdiobu. Napiši njegovu gustoću.

67. Neka je

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}[x^2 + y^2 - xy]\right)$$

gustoća razdiobe normalnog vektora (X, Y) . Odredi uvjetnu gustoću varijable X uz uvjet $Y = 1$.

68. Neka je (X, Y) slučajan vektor s normalnom razdiobom $\mathcal{N}(3, 1, 16, 25, 0.6)$. Odredi vjerojatnost događaja $(3 < Y < 8 \mid X = 7)$, $(-3 < X < 3 \mid Y = -4)$.

69. Neka su X_1, X_2, X_3 nezavisne jedinične normalne slučajne varijable. Neka je

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2), \\ Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(X_1 + X_2 - 2X_3), \\ Y_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3). \end{aligned}$$

Pokaži da su i Y_1, Y_2, Y_3 nezavisne jedinične normalne slučajne varijable.

70. Slučajni vektor (X, Y) ima normalnu razdiobu s gustoćom

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\right).$$

Odredi zakon razdiobe varijable $Z = \frac{X}{Y}$.

71. Zadana je gustoća razdiobe normalnog vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right).$$

- Odredi gustoće varijabli X i Y ,
- Odredi gustoću varijable $Z = X + Y$,
- Odredi gustoću vektora (U, V) gdje je $U = X + Y, \quad V = X - Y$.

72. Neka je

$$f(x, y) = \frac{3}{2\pi} \exp\left(-\left(x_1^2 - \frac{1}{4}x_1x_2 + \frac{5}{2}x_2^2\right)\right).$$

gustoća razdiobe slučajnog vektora $\vec{X} = (X_1, X_2)$. Odredi matricu B reda 2 tako da vektor $\vec{Y} = B\vec{X}$ ima jediničnu normalnu razdiobu.

73. Neka je $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$. Dokaži da je gustoća razdiobe slučajne varijable $Z = X/Y$ jednaka

$$f_Z(z) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sqrt{1 - r^2}}{\pi(\sigma_2^2 z^2 - 2r\sigma_1\sigma_2 z + \sigma_1^2)}.$$

74. Slučajni vektor (X, Y) ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(0, 0, 1, 1, r)$. Odredi gustoću, te očekivanje varijable $Z = \max(X, Y)$.

75. Dokaži da postoji samo jedna razdioba slučajnog vektora (X, Y) u ravni sa svojstvima

- X i Y su nezavisne i jednako distribuirane,
- razdioba vektora (X, Y) je sferno simetrična, tj. funkcija gustoće u točki (x, y) ovisi samo o udaljenosti te točke od ishodišta:

$$f(x, y) = h(t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

za neku funkciju h .

To je dvodimenzionalna normalna razdioba $\mathcal{N}(0, 0, \sigma^2, \sigma^2, 0)$.