

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike

Grupa A

26.03.2014. u 12h

1. (3 boda)

Iz kutije u kojoj se nalaze 4 crne, 5 bijelih i 6 crvenih kuglica izvlačimo na sreću 4 kuglice. Odredite vjerojatnost da među izvučenim kuglicama

- a) nema crvenih,
- b) nisu zastupljene sve boje.

2. (3 boda)

Unutar intervala $[-1, 1]$ na sreću biramo dva broja. Odredite vjerojatnost da je apsolutna vrijednost njihove sume veća od 1, a suma njihovih kvadrata manja od 1.

3. (4 boda)

Bacamo tri kocke. Kocke na kojima je pala šestica ostavimo sa strane, a preostale bacimo još jednom. Ako su pale dvije šestice, odredite vjerojatnost da su obje pale u prvom bacanju.

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike

Grupa B

26.03.2014. u 12h

1. (3 boda)

Iz kutije u kojoj se nalaze 3 crne, 4 bijele i 5 crvenih kuglica izvlačimo na sreću 4 kuglice. Odredite vjerojatnost da

- a) među izvučenim kuglicama ima najviše dvije crne,
- b) su među izvučenim kuglicama zastupljene sve boje.

2. (3 boda)

Unutar intervala $[-2, 2]$ biramo na sreću dva broja. Odredite vjerojatnost da su apsolutna vrijednost njihove razlike i suma njihovih kvadrata veći od 1.

3. (4 boda)

Bacamo tri novčića. One novčiće na kojima je pala glava ostavimo sa strane, a preostale bacimo još jednom. Ako su pale tri glave, odredite vjerojatnost da su barem dvije pale u prvom bacanju.

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike
Grupa A
26.03.2014. u 13h

1. (3 boda)

Iz snopa od 52 karte biramo na sreću 3 karte. Odredite vjerojatnost da dobijemo

- a) barem dva asa,
- b) tri karte iste boje.

2. (4 boda)

Profesor i student dolaze u učionicu bilo kada, s jednakom vjerojatnošću, između 12h i 12:30h. Student će pričekati profesora 15min prije nego napusti učionicu, a profesor će zatvoriti vrata učionice 2min nakon dolaska nakon čega student više ne može ući u učionicu. Koja je vjerojatnost da student nazoči profesorovom predavanju?

3. (3 boda)

U kutiju u kojoj se nalaze 2 bijele, 3 crne i 4 zelene kuglice dodamo kuglicu slučajno odabrane boje (između bijele, crne i zelene) i nakon toga izvučemo dvije kuglice. Ako su izvučene kuglice bijele i crne boje, koja je vjerojatnost da je dodana zelena kuglica?

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike
Grupa B
26.03.2014. u 13h

1. (3 boda)

Iz snopa od 52 karte biramo na sreću 3 karte. Odredite vjerojatnost da dobijemo

- a) barem jednog asa,
- b) karte različitih boja.

2. (4 boda)

Matija i Vili dogovorili su se naći na Trgu, pri čemu će se svaki od njih pojaviti bilo kada između 16h i 17h s jednakom vjerojatnošću. Ako će Matija po dolasku na Trg čekati 20min, a Vili 5min, kolika je vjerojatnost da se sretnu?

3. (3 boda)

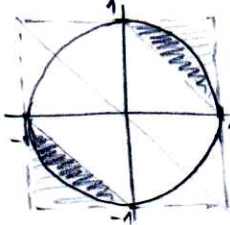
Iz košare u kojoj se nalaze 3 kruške, 4 jabuke i 1 banana ispala je nepoznata voćka. Ana je nakon toga slučajno odabrala dvije voćke i pojela ih. Ako je Ana pojela dvije jabuke, koja je vjerojatnost da je ispala voćka bila banana?

A ① (a) $p = \frac{\binom{4+5}{4}}{\binom{15}{4}} \approx 0.092$

(b) računamo vjerojatnost da su zastupljene sve boje: $\frac{\overset{\text{crna} \times 2}{\binom{4}{2}} \cdot 5 \cdot 6 + \overset{\text{bijela} \times 2}{4} \cdot \binom{5}{2} \cdot 6 + 4 \cdot 5 \cdot \overset{\text{crvena} \times 2}{\binom{6}{2}}}{\binom{15}{4}} = \frac{48}{81} \approx 0.527$

$p = 1 - \frac{48}{81} = \frac{43}{81} \approx 0.472$

② $x, y \in [-1, 1] \quad |x+y| > 1, \quad x^2 + y^2 < 1$



$|x+y| > 1$

• ako je $y \geq -x \Rightarrow x+y > 1$

• ako je $y < -x \Rightarrow -x-y > 1$

$p = \frac{2 \cdot (\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2})}{4} = \frac{1}{8}\pi - \frac{1}{4} \approx 0.143$

③ $H_i := \{ \text{u prvom bacanju je palo } i \text{ 6-ica} \}, \quad i=0, 1, 2, 3$

$P(H_0) = \frac{5^3}{6^3}, \quad P(H_1) = \frac{3 \cdot 5^2}{6^3}, \quad P(H_2) = \frac{3 \cdot 5}{6^3}, \quad P(H_3) = \frac{1}{6^3}$

$A := \{ \text{pale su dvije šestice} \}$

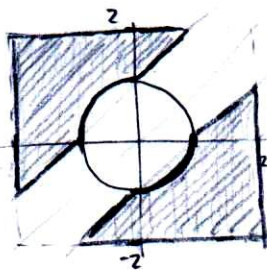
$P(A|H_0) = \frac{3 \cdot 5}{6^2}, \quad P(A|H_1) = \frac{2 \cdot 5}{6^2}, \quad P(A|H_2) = \frac{5}{6}, \quad P(A|H_3) = 0$

$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{\sum_{i=0}^3 P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{\frac{5}{6} \cdot \frac{3 \cdot 5}{6^3}}{\frac{3 \cdot 5}{6^6} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 5^2}{6^5} + \frac{5}{6^4}} = \frac{36}{121} \approx 0.2975$

B ① (a) $p = 1 - \text{vjer. da ima 3 crne} = 1 - \frac{\binom{3}{4}}{\binom{12}{4}} = 1 - \frac{1}{55} = \frac{54}{55} \approx 0.982$

(b) $p = \frac{\binom{3}{2} \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot \binom{5}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{6}{11} \approx 0.545$

②



$x, y \in [-2, 2]$

$|x-y| > 1$

• $y > x \Rightarrow -x+y > 1$

• $y < x \Rightarrow x-y > 1$

$x^2 + y^2 > 1$

$p = \frac{2 \cdot (\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2})}{16} = \frac{5}{8} - \frac{\pi}{32} \approx 0.527$

③ $H_i := \{ \text{u prvom bacanju je palo } i \text{ glava} \}, \quad i=0, 1, 2, 3$

$P(H_0) = \frac{1}{2^3}, \quad P(H_1) = \frac{3}{2^3}, \quad P(H_2) = \frac{3}{2^3}, \quad P(H_3) = \frac{1}{2^3}$

$A := \{ \text{pale su tri glave} \}$

$P(A|H_0) = \frac{1}{2^3}, \quad P(A|H_1) = \frac{1}{2^2}, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{2}, \quad P(A|H_3) = 1$

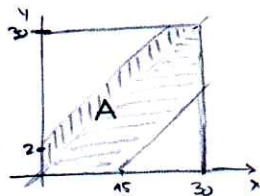
$P(H_2|A) = P(H_2|A) + P(H_3|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2) + P(A|H_3)P(H_3)}{\sum_{i=0}^3 P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^3}}{\frac{1}{2^6} + \frac{3}{2^5} + \frac{3}{2^4} + \frac{1}{2^3}} = \frac{20}{24} \approx 0.741$

A ① (a)
$$p = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{2} + \binom{4}{3}\binom{46}{1} + \binom{4}{4}\binom{48}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{6961}{22100} \approx 0.315$$

(b)
$$p = \frac{4 \cdot \binom{13}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{22}{425} \approx 0.052$$

② x = vrijeme dolaska profesora

y = vrijeme dolaska studenta



$$y \geq x \Rightarrow y - x \leq 2$$

$$y \leq x \Rightarrow x - y \leq 15$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{30^2 - \frac{15^2}{2} - \frac{28^2}{2}}{30^2} = \frac{751}{1800} \approx 0.419$$

③ H_0 = dodana kuglica je bijela

H_1 = - 11 - crna

H_2 = - 11 - zelena

A = "izvučene kuglice su bijele i crne kugle"

$$P(H_0) = P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A|H_0) = \frac{3 \cdot 3}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{5}, P(A|H_1) = \frac{2 \cdot 4}{45}, P(A|H_2) = \frac{2 \cdot 3}{45}$$

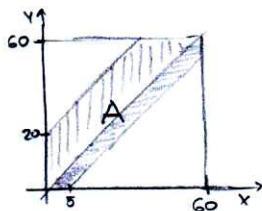
$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{\sum_{i=0}^2 P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{6}{23} \approx 0.261$$

B ① (a) $p = 1 - \text{vjer. da dobijemo 0 aseva} = 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}} = 1 - \frac{4324}{5525} \approx 0.217$

(b) $p = \frac{13 \cdot 4}{\binom{52}{2}} = \frac{169}{425} \approx 0.398$

② x = vrijeme dolaska Matije

y = vrijeme dolaska Viliha



$$y \geq x \Rightarrow y - x \leq 20$$

$$y \leq x \Rightarrow x - y \leq 5$$

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(S)} = \frac{60^2 - \frac{5^2}{2} - \frac{40^2}{2}}{60^2} = \frac{103}{286} \approx 0.358$$

③ H_0 = ispač je kruska

H_1 = - 11 - jabuka

H_2 = - 11 - banana

A = Ana je pojela 2 jabuke

$$P(H_0) = \frac{3}{8}, P(H_1) = \frac{4}{8}, P(H_2) = \frac{1}{8}$$

$$P(A|H_0) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{6}{21}, P(A|H_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{3}{21}, P(A|H_2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} = \frac{6}{21}$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{\sum_{i=0}^2 P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{1}{6} \approx 0.167$$