

ZAVRŠNI ISPIT IZ VISa

11.06.2012.

1. (5 bodova)

Zadana je razdioba diskretnog slučajnog vektora (X, Y)

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 |
|------------------|-----|-----|-----|
| 1 | 1/6 | 1/8 | 0 |
| 2 | 1/8 | 1/6 | 1/8 |
| 3 | 0 | 1/8 | 1/6 |

Izračunajte koeficijent korelacije $r(X, Y)$ i vjerojatnot $P(X = 2 \mid Y \geq 2)$.

2. (6 bodova)

Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = x + y, \quad \text{za } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Izračunajte $E(XY)$.

3. (6 bodova)

Broj bodova na ispitu iz predmeta X slučajna je varijabla sa očekivanjem $E(X) = 65$ i disperzijom $D(X) = 81$.

a) Pokažite da je vjerojatnost događaja $P(55 < X < 75)$ veća od 0.19.

b) Koliko studenata mora pristupiti ispitu da bi vjerojatnost da je njihov prosječan broj bodova između 60 i 70 bila najmanje 0.95?

4. (6 bodova)

Iz intervala $[\alpha, 1]$, gdje je $\alpha < 1$ nepoznat odabrano je na sreću n brojeva: x_1, x_2, \dots, x_n . Da bismo procijenili α odaberimo statistiku

$$Y = \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\} - \frac{1}{n+1}.$$

a) Dokažite da statistika Y nije nepristrana.

b) S kojim faktorom treba pomnožiti Y kako bismo dobili nepristranu statistiku?

5. (4 boda)

Iz populacije koja se podvrgava normalnoj razdiobi sa standardnom devijacijom $\sigma = 0.3$ i nepoznatim očekivanjem izvučen je sljedeći uzorak:

| | | | | | | |
|-------|----|------|------|------|------|------|
| x_j | 16 | 16.1 | 16.2 | 16.3 | 16.4 | 16.5 |
| n_j | 1 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 |

Za koji nivo pouzdanosti p je duljina intervala povjerenja reda p za očekivanje jednaka 0.3123? Odredite taj interval.

6. (4 boda)

Proizvođač tvrdi da je vrijeme ispravnog rada nekog uređaja barem 200 dana. Izabran je uzorak od 8 proizvoda koji je dao sljedeće rezultate (vrijeme ispravnog rada u danima):

167, 171, 183, 187, 194, 204, 206, 210.

Provjerite ispravnost tvrdnje proizvođača uz nivo značajnosti $\alpha = 0.1$.

7. (4 boda)

Ocjene dva razreda neke škole na državnoj maturi iz matematike dane su u tablici:

| | | | | | |
|----------|---|---|---|----|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| razred A | 1 | 6 | 8 | 10 | 7 |
| razred B | 0 | 7 | 6 | 7 | 5 |

Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ provjerite hipotezu da je prosječna ocjena za oba razreda jednaka. (Pretpostavljamo da su ocjene nezavisne s normalnom razdiobom uz jednaku disperziju čiji iznos nije poznat).

8. (5 bodova)

Bilježen je broj pristiglih automobila na nekoj naplatnoj kućici autoceste u svakoj minuti jednog sata. Dobiveni su sljedeći rezultati

| | | | | |
|-------------------------------|----|----|---|---|
| j -broj automobila u minuti | 0 | 1 | 2 | 3 |
| n_j -broj minuta | 39 | 14 | 5 | 2 |

Pomoću χ^2 testa provjerite uz nivo značajnosti 0.05 da se ovi rezultati ravnaју po Poissonovoj razdiobi.

Ispit se piše 120 minuta. Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica.

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ VJEROJATNOSTI I
STATISTIKE 11.06.2012.

1.

$$\text{a) } E(X) = E(Y) = 2, D(X) = D(Y) = \frac{7}{12},$$

$$E(XY) = \frac{13}{3}, r(X, Y) = \frac{4}{7}$$

$$\text{b) } P(X = 2 \mid Y \geq 2) = \frac{7}{17}$$

2.

$$E(Z) = \frac{1}{3}$$

3.

a) Nejednakost Čebiševa,

$$\text{b) } \frac{(\sum_{i=1}^n X_i) / n - 65}{\frac{9}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \Phi^* \left(\frac{5}{9} \sqrt{n} \right) \geq 0.95, n \geq 13$$

4.

$$\text{a) } E(Y) = \frac{n}{n+1} \alpha, \text{ b) } \frac{n+1}{n}$$

5.

$$p = 0.9, a \in [16.104, 16.416]$$

6.

$$\hat{t} = -1.78, t_{7,0.9} = 1.415, H_0 \text{ se odbacuje}$$

7.

$$\bar{x} = 3.5, \bar{y} = 3.4, s_X^2 = \frac{40}{31}, s_Y^2 = \frac{30.25}{24}, s_Z^2 = 1.277$$

$$\hat{t} = 0.332, t_{55,0.975} = 2, H_0 \text{ se prihvća}$$

8.

$$\lambda = \frac{1}{2}, \chi_q^2 = 1.861, \chi_{1,0.95}^2 = 3.841, \text{ ravnaju se po Poiss.r. uz } \alpha = 5\%$$