

DRUGI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE
12.05.2010.

1. (4 boda)

Odredite konstantu C , izračunajte $P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ i disperziju $D(X)$ ako je slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = 2 - Cx, \quad x \in [0, 1].$$

2. (3 boda)

Biramo na sreću točku unutar kvadrata $ABCD$ stranice duljine 1. Vrijednost slučajne varijable X je manja (ili jednaka) od dviju udaljenosti te točke do stranica \overline{AB} i \overline{AD} . Odredite funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X .

3. (6 bodova)

a) Neka je X neprekinuta slučajna varijabla s funkcijom gustoće f , a $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona funkcija, te neka je $Y = \varphi(X)$. Izvedite formulu za funkciju gustoće g slučajne varijable Y .

b) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = |X - 2|$, ako slučajna varijabla X ima funkciju gustoće $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

4. (4 boda)

a) Iskažite (pojačano) svojstvo stabilnosti normalne razdiobe.

b) Masa domaćih jabuka se podvrgava normalnoj razdiobi s očekivanjem 180 g i standardnom devijacijom 20 g, dok se masa industrijski proizvedenih jabuka podvrgava normalnoj razdiobi s očekivanjem 220 g i standardnom devijacijom 5 g. Jabučar Jan prodaje jabuke na Dolcu isključivo u paketima od po 4 jabuke i to dvije domaće i dvije industrijski proizvedene jabuke. Odredite vjerojatnost da je masa Janovog paketa između 820 g i 1000 g.

5. (4 boda)

Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na trokutu OAB s vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(0, 2)$. Izračunajte marginalne funkcije gustoća slučajnih varijabli X i Y kao i vjerojatnost $P\left(X < \frac{1}{2} \mid Y < 1\right)$. Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable?

6. (4 boda)

Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju eksponencijalne razdiobe s očekivanjem 2. Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable $Z = Y - X$.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

Rješenja 2. međuspita iz Vjerojatnosti i statistike

12.05.2010.

1. (4 boda) $C = 2$, $P(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$, $E(X) = \frac{1}{3}$, $D(X) = \frac{1}{18}$

2. (3 boda) $F(x) = P(X < x) = \frac{m(G_x)}{M(S)} = 2x - x^2$, $x \in [0, 1]$
 $f(x) = 2 - 2x$, $x \in [0, 1]$, $E(X) = \frac{1}{3}$

3. (6 boda)

a) (2 boda) knjiga Sl. varijable, str.17

b) (4 boda)

1) $x \in (0, 2)$, $y = 2 - x$: $g_1(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = e^{y-2}$, $y \in (0, 2)$

2) $x \in (2, \infty)$, $y = x - 2$: $g_2(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = e^{-y-2}$, $y \in (0, \infty)$

$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = 2e^{-2}ch(y)$, $y \in (0, 2)$

$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = e^{-y-2}$, $y \in (2, \infty)$

4. (4 boda)

a) X_1 i X_2 su nezavisne, $X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$

$\Rightarrow s_1 X_1 + s_2 X_2 \sim \mathcal{N}(s_1 a_1 + s_2 a_2, s_1^2 \sigma_1^2 + s_2^2 \sigma_2^2)$

b) $X_D \sim \mathcal{N}(180, 20^2)$, $X_I \sim \mathcal{N}(220, 5^2)$, $Y = X'_D + X''_D + X'_I + X''_I \sim \mathcal{N}(800, 850)$

$P(820 < Y < 1000) = P(\frac{820-800}{\sqrt{850}} < \tilde{Y} < \frac{1000-800}{\sqrt{850}}) = \frac{1}{2}(\Phi^*(6.86) - \Phi^*(0.686)) = 0.24635$

5. (4 boda) $f(x, y) = 1$, $(x, y) \in S$

marginalne gustoće: $f_X(x) = 2 - 2x$, $x \in (0, 1)$;

$f_Y(y) = y$ za $y \in (0, 1)$ i $f_Y(y) = 2 - y$, za $y \in (1, 2)$

$P(X < \frac{1}{2} | Y < 1) = \frac{P(X < \frac{1}{2}, Y < 1)}{P(Y < 1)} = \frac{3}{4}$

X i Y nisu nezavisne jer $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$

6. (4 boda) $f(x, y) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}(x+y)}$, $x > 0$, $y > 0$

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(Y - X < z) = \begin{cases} \int_{-z}^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} dx \int_0^{x+z} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{2}e^{\frac{z}{2}}, & z < 0; \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}} dx \int_0^{x+z} e^{-\frac{y}{2}} dy = 1 - \frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z > 0. \end{cases}$$