

# **VJEROJATNOST I STATISTIKA**

## **ZADACI ZA VJEŽBU**

### **2. Uvjetna vjerojatnost**

**FER, Zagreb**

## SADRŽAJ:

# Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Diskretna vjerojatnost Cjelina 2 – Uvjetna vjerojatnost

*\*\*\* Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline \*\*\**

1. Formule.....	3
2. Zadaci.....	4
3. Rješeni zadaci.....	9
4. Službena rješenja.....	25
5. Literatura.....	27

### \*\*\*NAPOMENA\*\*\*

**Zadaci koje NIJE potrebno rješavati su 1.-10.zadatka jer su teoretskog tipa, ostatak od 11.-91.zadatka JE potrebno riješiti !!**

Zadaci koji nedostaju: 10, 19,20,21,22,31,45,52,53,54,55,58,62, 67, 77,80,81,86,88,89,90,91(22 zadatka)

*Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka (posebice 44,83,85,...) !*

## FORMULE:

### 2. UVJETNA VJEROJATNOST

Uvjetna vjerojatnost:  $P_B(A) := \frac{P(AB)}{P(B)}$

Vjerojatnost umnoška:  $P(AB) = P(B) P(A | B)$

Kriterij nezavisnost događaja: *ako vrijedi bilo koja od jednakosti*  $P(A|B) = P(A)$  ili  $P(B|A) = P(B)$

Nezavisnost:  $P(AB) = P(A) P(B)$

Nezavisnost događaja:  $P(A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}) = P(A_{i1}) P(A_{i2}) \dots P(A_{in})$

Formula potpune vjerojatnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A | H_i)$$

Bayesova formula:

- računanje *aposteriornih* vjerojatnosti pojedinih hipoteza

$$P(H_i | A) = \frac{P(H_i) P(A | H_i)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) P(A | H_i)}$$

1. Događaji  $A$  i  $B$  su disjunktni. Mogu li oni biti nezavisni?
2. Neka su  $A$  i  $B$  nezavisni i  $A \subset B$ . Pokaži da je  $P(A) = 0$  ili  $P(B) = 1$ .
3. Ako su događaji  $A$ ,  $B$ ,  $C$  nezavisni, pokaži da su i događaji  $A$  i  $B + C$  također nezavisni.
4. Ako je  $P(A) > 0$  i  $P(B|A) = P(B|\bar{A})$ , pokaži da su  $A$  i  $B$  nezavisni.
5. Dokaži da jednakost

$$P(A) = P(A | B) + P(A | \bar{B})$$

gdje  $B$  nije niti siguran, niti nemoguć događaj, vrijedi jedino u slučaju kada je  $A$  nemoguć događaj.

6. Ako su  $A$  i  $B$  slučajni događaji s vjerojatnostima  $P(A) = a$ ,  $P(B) = b$ , dokaži da vrijedi

$$P(A|B) \geq \frac{a+b-1}{b}.$$

7. Dokaži da vrijedi:

- a)  $P(A+B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(AB|C)$ .
- b)  $P(A|B) = P(A) \implies P(B|A) = P(B)$ .
- c) Ako su  $A_1, \dots, A_n$  u cjelini nezavisni, tada vrijedi

$$P(A_1 + \dots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdots (1 - P(A_n)).$$

8. Točka  $T(x, y)$  bira se na sreću unutar kvadrata  $\{0 \leq x, y \leq 1\}$ . Neka je  $A = \{x \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $B = \{y \leq \frac{1}{2}\}$ ,  $C = \{(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) < 0\}$ . Pokaži da su događaji  $A$ ,  $B$ ,  $C$  u parovima nezavisni, no nisu nezavisni u cjelosti.

9. Točka  $T(x, y)$  bira se na sreću unutar kvadrata  $\{0 \leq x, y \leq 1\}$ . Za kakvu vrijednost od  $r$  su događaji  $A = \{|x - y| \geq r\}$ ,  $B = \{x + y \leq 3r\}$  nezavisni?

\*\*\*

10. Ispravan novčić baca se deset puta. Kolika je vjerojatnost da će svih deset puta pasti pismo, ako je poznato da je pismo palo devet puta?

11. Istovremeno se bacaju novčić i kocka. Kolika je vjerojatnost događaja  $A = \{\text{pojavi su se grb i šestica}\}$ ,  $B = \{\text{pojavi su se grb ili šestica}\}$ ,  $C = \{\text{na kocki se pojavio broj veći od 4}\}$ ?

12. Strijelac gađa metu dok je ne pogodi. Vjerojatnost pogotka u svakom gađanju je 0.6. Izračunajte vjerojatnost sljedećih događaja:

- A. meta je pogođena u trećem pokušaju;
- B. meta je pogođena u prva tri pokušaja;
- C. meta je pogođena nakon petog pokušaja.

13. Bačene su dvije kocke. Označimo događaje:

$A$  = pojavila se barem jedna jedinica,

$B$  = pojavila su se dva različita broja.

- 1) Izračunajte  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(A|B)$ . 2) Jesu li događaji  $A$  i  $B$  nezavisni?

14. Između brojeva 1, 2, 3, 4, 5 odabire se na sreću jedan broj, a od preostalih se ponovno odabire na sreću još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da je drugi broj paran?

15. U skupini od deset strijelaca nalaze se četiri odlična i šest dobrih. Vjerojatnost pogotka za odlične strijelce je 0.9, za dobre 0.7. Iz skupine na sreću izaberimo jednog strijelca. Kolika je vjerojatnost da će on pogoditi metu?

16. U prvoj se urni nalaze dvije bijele i tri crne kuglice, u drugoj jedna bijela i četiri crne. Iz prve urne prebacimo u drugu dvije na sreću odabrane kuglice. Izračunajte vjerojatnost da će nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge urne biti bijela.

17. U dvije od tri jednake pregrade nalaze se dvije crne i dvije bijele kuglice, a u trećoj pet bijelih i jedna crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je ona izvučena iz treće pregrade?

18. U kutiji se nalazi 1000 kockica, od kojih su sve ispravne osim jedne koja na svim stranama ima broj 6. Izvučena je na sreću jedna kockica i bačena četiri puta: sva četiri puta pala je na broj 6. Kolika je vjerojatnost da je to neispravna kockica?

\*\*\*

19. Bacamo dvije kocke. Neka su  $X$  i  $Y$  brojevi na njima. Označimo događaje

$A$  =  $X$  je djeljiv s 2,

$B$  =  $X$  je djeljiv s 3,

$C$  =  $X$  je djeljiv s 2,  $Y$  s 3,

$D$  =  $X$  je djeljiv s 3,  $Y$  s 2,

$E$  =  $X + Y$  je djeljiv s 2,

$F$  =  $X + Y$  je djeljiv s 3.

Odredi sve parove međusobno nezavisnih događaja.

20. Pokus se sastoji u bacanju dviju kocaka. Promatraju se događaji:

$A$  = pojavila se bar jedna šestica,

$B$  = pojavila se bar jedna dvojka,  
 $C$  = pojavio se jedan paran i jedan neparan broj.  
 Odredi uvjetnu vjerojatnost  $P(B|C)$ . Ispitaj jesu li događaji  $A$  i  $B$  nezavisni.

21. Bačene su tri kocke. Označimo događaje:

$A$  = pojavila se barem jedna jedinica,

$B$  = pojavila se točno jedna šestica,

$C$  = pojavila su se tri različita broja.

Izračunaj  $P(A)$ ,  $P(C)$ ,  $P(A|C)$ . Jesu li događaji  $B$  i  $C$  nezavisni?

22. Baca se 8 kocaka. Promatramo događaje

$A$  = 4 kocke su pale na broj 3 a 4 kocke na isti broj,

$B$  = Zbroj brojeva na svim kockama je paran broj.

Jesu li  $A$  i  $B$  međusobno zavisni ili nezavisni i zašto?

23. Bacamo tri igraće kocke. Izračunaj vjerojatnost događaja

$A$  = pala su tri različita broja,

$B$  = pala je barem jedna šestica.

Izračunaj zatim uvjetne vjerojatnosti  $P(A|B)$  i  $P(B|A)$

24. Bacamo odjednom 6 kocaka. Označimo događaje

$A$  = pale su 2 jedinice i 2 dvojke,

$B$  = svi su brojevi manji od 4,

$C$  = zbroj brojeva na svim kockama je manji od

9.

Izračunaj  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ ,  $P(B|A)$ .

25. Bacamo odjednom četiri kocke. Označimo događaje

$A$  = pale su dvije jedinice i jedna dvojka,

$B$  = svi brojevi su manji od 4,

$C$  = zbroj brojeva na svim kockama je veći od

6.

Izračunaj  $P(A)$ ,  $P(B)$ ,  $P(C)$ ,  $P(C|B)$ .

26. U urni se nalaze 4 plave, 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Na sreću odabiremo 3 kuglice. Označimo događaje

$A$  = sve tri kuglice su različitih boja,

$B$  = prva kuglica je bijela,

$C$  = prve dvije kuglice su različitih boja.

Izračunaj  $P(A)$ ,  $P(A|B)$ ,  $P(A|C)$ . Jesu li događaji  $A$  i  $B$  nezavisni?

\*\*\*

27. Brojevi  $1, 2, \dots, n$  napisani su u slučajnom poretku. Izračunaj vjerojatnost da se znamenka 2 pojavi neposredno nakon znamenke 1.

28. Između brojeva  $1, 2, 3, 4, 5$  odabire se na sreću jedan broj, a od preostalih se ponovo odabire na sreću još jedan broj. Kolika je vjerojatnost da je drugi broj paran?

29. Baca se 6 kocaka, od kojih su 4 obojene bijelo, a 2 žuto. Izračunaj vjerojatnost da broj okrenutih žutih šestica bude veći od broja bijelih.

30. U novčaniku je bilo 10 kovanica, 6 od jednog i 4 od dva dinara. Na sreću smo izvadili dvije, a zatim još dvije kovanice. Kolika je vjerojatnost da su sume u oba izvlačenja jednake?

31. U jednom je društvu organizirana lutrija sa samo jednim dobitkom. Svaka osoba izvlači po jednu kuglicu iz urne, dok se ne izvuče ona dobitna. Koja osoba ima veću vjerojatnost dobitka: ona koja izvlači kuglicu prva, ili pak ona koja je posljednja,  $n$ -ta po redu?

32. U igri *Craps* igrač baca dvije kocke, pobjeđuje ako se pojavi zbroj 7 ili 11, a gubi ako je zbroj 2, 3 ili 12. U ostalim slučajevima, bacanje se nastavlja sve dok igrač ne ponovi svoj prvobitni broj kada pobjeđuje, ili pak dok se ne pojavi zbroj 7 u kojem slučaju on gubi. Kolika je vjerojatnost dobitka za igrača?

33. Dvoboj u troje. Tri (nesretno zaljubljena) strijelca sudjeluju u troboju. Prvi pogađa s vjerojatnošću 0.5, drugi s vjerojatnošću 0.8, a treći uvijek pogađa. Poredak strijelaca određuje se kockom. Prvo odabrani strijelac može gađati bilo kojeg protivnika. Potom dolazi na red drugo-odabrani (ukoliko je živ) i tako dalje. Pobjeđuje onaj koji preživi.

Koji strijelac ima najveću šansu da preživi? Koju strategiju treba izabrati?

\*\*\*

34. Igrač baca jednu kocku i potom u drugom bacanju onoliko kocaka koliki je rezultat prvog bacanja. Kolika je vjerojatnost da se u oba bacanja zajedno pojavi točno jedna petica?

35. Bacamo pet novčića. Nakon prvog bacanja sve novčiće koji pokazuju grb bacamo ponovo. Kolika je vjerojatnost da ćemo nakon drugog bacanja dobiti (ukupno) barem tri pisma?

36. Bacaju se 4 kocke od kojih su dvije obojene bijelo, a dvije crveno. Nakon izvršenog bacanja bacaju se ponovo one bijele kocke koje pokazuju paran broj i one crvene kocke koje pokazuju broj 6. Kolika je vjerojatnost da će nakon izvršenog drugog bacanja sve četiri kocke pokazivati broj 5?

37. U snopovima  $A$  i  $B$  nalaze se po 32 igraće karte sa po 4 asa. Izvučemo 2 karte iz snopa  $A$  i jednu kartu iz snopa  $B$ , zatim izvučene 3 karte izmiješamo i otkrijemo 2 karte. Kolika je vjerojatnost da su to 2 asa?

38. Na raspolaganju imamo dva snopa karata od po 52 karte, pri čemu svaki snop sadrži četiri asa. Izvučemo na sreću po dvije karte iz svakog snopa, zatim izvučene četiri karte izmiješamo i otkrijemo dvije. Kolika je vjerojatnost da su to dva asa?

39. U dva snopa karata nalaze se po 52 karte sa po 4 asa. Izvučemo na sreću po jednu kartu iz svakog snopa, zatim izvučene karte pomiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da ta karta nije as?

40. U dva snopa karata nalaze se po 52 karte, sa po 4 asa. Iz jednog snopa izvučemo jednu kartu, a iz drugog dvije. Zatim tri izvučene karte promiješamo i otkrijemo jednu. Kolika je vjerojatnost da je ta karta as?

41. U kutiji  $A$  ima  $m_1$  bijelih i  $n_1$  crnih kuglica, a u kutiji  $B$   $m_2$  bijelih i  $n_2$  crnih kuglica. Iz svake kutije odabere se na sreću jedna kuglica, a zatim se od te dvije kuglice odabere na sreću jedna. Kolika je vjerojatnost da je ta kuglica bijela?

42. U prvoj pregradi nalaze se 2 bijele i 3 crne kuglice, a u drugoj 1 bijela i 4 crne. Iz prve pregrade prebacimo u drugu dvije na sreću odabrane kuglice. Izračunaj vjerojatnost da nakon toga na sreću izvučena kuglica iz druge pregrade bude bijela.

43. U grupi od 10 strijelaca nalaze se 4 odlična i 6 dobrih. Vjerojatnost pogotka za odlične strijelce je 0.9, za dobre 0.7. Iz grupe na sreću odabiremo dva strijelca, koji gađaju u metu jedanput. Kolika je vjerojatnost da će oba strijelca pogoditi metu?

44. Gađanje se vrši tako da svaki od 2 tenka odabire jedan od 3 različita cilja i ispaljuje 1 metak prema tom cilju. Ako je poznato da svaki od tenkova pogada cilj s vjerojatnošću  $p$ , nađi vjerojatnost da je nakon gađanja pogođen točno jedan cilj i to s barem jednim metkom.

45. Gađanje se vrši tako da svaki od 2 tenka na sreću odabire jedan od 2 različita cilja i ispaljuje 2 metka prema njemu. Ako je poznato da prvi tenk pogada s vjerojatnošću  $p_1$ , a drugi tenk s vjerojatnošću  $p_2$ , nađi vjerojatnost da je nakon izvršenog gađanja pogođen točno jedan cilj, i to s barem 2 metka!

46. U grupi od 8 strijelaca nalaze se 3 odlična i 5 dobrih. Vjerojatnost pogotka za odlične strijelce je 0.9, za dobre 0.6. Dva na sreću odabrana strijelca gađaju u metu jedanput. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogođena (s barem jednim metkom)?

\* \* \*

47. U urni se nalaze bijela i crvena kuglica. Izvlači se po jedna kuglica, sve dok se ne pojavi crvena. Ako se izvuče bijela kuglica, u urnu se vraća ta i dodaje se još jedna bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da u prvih  $n$  izvlačenja crvena kuglica neće biti izvučena?

48. U prvoj urni se nalaze 2 bijele i 3 crne kuglice, u drugoj 1 bijela i 4 crne. Iz prve urne prebacimo u drugu dvije na sreću odabrane kuglice. Izračunaj vjerojatnost da nakon toga na sreću odabrana kuglica iz druge urne bude bijela.

49. U kutiji  $A$  ima  $m_1$  bijelih i  $n_1$  crnih, a u kutiji  $B$   $m_2$  bijelih i  $n_2$  crnih kuglica. Iz kutije  $A$  izvadimo na sreću 2 kuglice i prebacimo ih u kutiju  $B$ . Zatim ponovimo postupak tako da iz kutije  $B$  na sreću izvučemo dvije kuglice i vratimo ih u kutiju  $A$ . Kolika je vjerojatnost da će u kutiji  $A$  ponovo biti  $m_1$  bijelih i  $n_1$  crnih kuglica?

50. U kutiji  $A$  ima  $m_1$  bijelih i  $n_1$  crnih kuglica, a u kutiji  $B$   $m_2$  bijelih i  $n_2$  crnih kuglica. Iz svake kutije odabere se na sreću jedna kuglica, a zatim se od te dvije kuglice odabere na sreću jedna i vrati u kutiju  $A$ . Kolika je vjerojatnost da nakon toga u kutiji  $A$  bude ponovo  $m_1$  bijelih i  $n_1$  crnih kuglica?

51. U kutiji  $A$  su 3 bijele i 2 crne kuglice, u kutiji  $B$  1 bijela i 3 crne, te u kutiji  $C$  5 bijelih i 4 crne kuglice. Iz kutije  $A$  prebacimo na sreću izvučenu kuglicu u kutiju  $B$ , zatim iz  $B$  prebacimo jednu kuglicu u  $C$  te na kraju jednu kuglicu prebacimo iz  $C$  u  $A$ . Ako je poznato da je broj bijelih i crnih kuglica u svim kutijama ostao nepromijenjen, kolika je vjerojatnost da smo iz kutije  $B$  prebacili u kutiju  $C$  kuglicu crne boje?

52. Kutija  $A$  sadrži 2 bijele i 3 crne kuglice,  $B$  1 bijelu i 3 crne,  $C$  2 bijele i 1 crnu, te kutija  $D$  3 bijele i 1 crnu kuglicu. Na sreću izvučena kuglica iz  $A$  prebacuje se u  $B$ , zatim se na sreću izvlači jedna kuglica iz  $B$  i prebacuje u  $C$  i na koncu na sreću izabrana kuglica iz  $C$  ulazi u kutiju  $D$ . Ako je poznato da je iz  $D$  na sreću izvučena bijela kuglica, Izračunaj vjerojatnost da je kuglica prebačena iz  $B$  u  $C$  bila crna.

53. Urna sadrži  $m$  bijelih i  $n - m$  crnih kuglica. Izračunaj vjerojatnost događaja  
 $A$  = izvučena je bijela kuglica;  
 $B$  = izvučena je bijela kuglica, ako je poznato da je jedna kuglica (nepoznate boje) izgubljena;  
 $C$  = izvučena je bijela kuglica, ako je izgubljeno  $k$  kuglica, nepoznatih boja.

54. U svakoj od  $n$  kutija nalazi se po  $m$  bijelih i  $k$  crnih kuglica. Iz prve kutije izaberemo na sreću jednu kuglicu i prebacimo ju u drugu, zatim iz druge kutije prebacimo jednu kuglicu u treću, itd. Kolika je vjerojatnost da će kuglica izvučena iz posljednje kutije biti bijela?

55. U svakoj od  $n$  kutija nalazi se po jedna bijela i jedna crna kuglica. Iz prve kutije na sreću izaberemo jednu kuglicu i prebacimo je u drugu, zatim iz druge prebacimo jednu kuglicu u treću itd. a) Kolika je vjerojatnost da je kuglica izvučena iz posljednje kutije bijela? b) Kolika je vjerojatnost da je crna kuglica izvučena samo jednom?

56. U kutiji  $A$  imamo 2 bijele i 5 crnih kuglica, u kutiji  $B$  2 bijele i 4 crne kuglice te u kutiji  $C$  2 bijele i 2 crne. Na sreću odaberemo 2 kuglice iz kutije  $C$  i prebacimo ih u kutiju  $A$  a preostale 2 kuglice iz  $C$  prebacimo u kutiju  $B$ . Ako nakon to-

ga izvučemo na sreću po jednu kuglicu iz kutija  $A$  i  $B$ , kolika je vjerojatnost da su te kuglice istobojne?

\* \* \*

57. U kutiji I nalaze se 3 bijele i 4 crne kuglice, u kutiji II 2 bijele i 3 crne, te u kutiji III 1 bijela i 2 crne kuglice. Iz I kutije prebacimo na sreću jednu kuglicu u II, zatim jednu na sreću iz II u III, te konačno jednu iz III u I. Kolika je vjerojatnost da je distribucija kuglica u kutiji I ostala nepromijenjena?

58. U kutiji se nalazi  $n$  kuglica, označenih brojevima od 1 do  $n$ . Izvlačimo prvu kuglicu i vraćamo je nazad, osim ako se na njoj nalazi broj 1. Potom izvlačimo drugu kuglicu. Kolika je vjerojatnost da ćemo u prvom ili drugom izvlačenju izvući kuglicu označenu brojem 2?

\* \* \*

59. Kocka je bačena tri puta. Neka je  $X$  zbroj brojeva u svim bacanjima. Što je vjerojatnije,  $X = 12$  ili  $X = 11$ ? Ako je realiziran događaj  $X = 12$ , kolika je vjerojatnost da se pojavila barem jedna šestica?

60. Bačene su dvije kocke. Kolika je vjerojatnost da se pojavio broj 6 ako je poznato da je zbroj znamenaka jednak 8?

61. Dva igrača su bacila kocku i prvi je igrač dobio veći broj od drugog igrača. Kolika je vjerojatnost da je taj broj jednak 6?

62. Poznato je da se pri bacanju deset igračih kocka pojavila barem jedna jedinica. Kolika je vjerojatnost da su se pojavile dvije ili više jedinica?

63. Na fakultetu je upisano  $n$  studenata od kojih  $n_k$  studira  $k$ -tu godinu ( $k = 1, 2, 3, 4$ ). Na sreću su odabrana dva studenta i pokazalo se da je prvi slušač više godine. Kolika je vjerojatnost da je to četvrta godina?

64. Tri igrača su bacila po jednu kocku. Poznato je da je prvi dobio najveći broj. Kolika je vjerojatnost da je taj broj veći od 4?

65. Bačene su četiri kocke. Kolika je vjerojatnost da je pala barem jedna šestica, ako je poznato da su pala točno 2 jednaka broja?

66. Bačene su tri kocke, crvena, bijela i plava. Zbroj okrenutih brojeva je 13. Kolika je vjerojatnost da je bijela kocka pala na broj 4?

67. Iz skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$  biramo na sreću tri broja  $x_1, x_2, x_3$ . Ako je poznato da vrijedi  $x_1 < x_2$ , kolika je vjerojatnost događaja  $x_1 < x_3 < x_2$ ?

68. U devet od deset jednakih pregrada nalaze se 2 crne i 2 bijele kuglice, a u desetoj 5 bijelih i 1 crna. Iz na sreću odabrane pregrade izvučena je bijela kuglica. Kolika je vjerojatnost da je ona izvučena iz desete pregrade?

69. Četiri strijelca gađaju u istu metu. Vjerojatnosti njihovih pogodaka su redom 0.4, 0.6, 0.7, 0.8. Kolika je vjerojatnost da će meta biti pogodena? Ako je pogodena s točno tri metka, kolika je vjerojatnost da je promašio četvrti strijelac?

70. Strijelci  $A, B, C, D$  gađaju metu sa po jednim metkom. Vjerojatnost pogotka za  $A$  je 60%, za  $B$  70%, za  $C$  80%, a za  $D$  90%. Ako je meta pogodena sa 2 pogotka, kolika je vjerojatnost da su te pogotke ostvarili strijelci  $A$  i  $B$ ?

71. Vjerojatnosti pogotka u metu za svakog od četiri strijelca su redom 0.8, 0.7, 0.6, 0.5. Ako je meta pogodena sa dva metka, kolika je vjerojatnost da prvi strijelac nije pogodio?

72. Baterija ima 4 topa. Vjerojatnost pogotka prvog topa je 30%, a ostalih triju topova 20%. Za uništenje cilja dovoljan je jedan pogodak. Jedan od topova izvršio je 2 gađanja i cilj je bio uništen. Nađi vjerojatnost da je gađao prvi top.

73. Iz urne koja sadrži  $m$  bijelih i  $n$  crnih kuglica izvučene su dvije kuglice. Pokazalo se je da je prva kuglica bijela. Kolika je vjerojatnost da je i druga kuglica bijela?

74. U kutiji sa dvije jednake pregrade nalaze se kuglice — u prvoj 3 bijele i 3 plave, a u drugoj 3 bijele i 4 crvene. Izvlačimo istovremeno dvije kuglice iz na sreću odabrane pregrade. Kolika je vjerojatnost da su obje izvučene kuglice iste boje? Ako su obje izvučene kuglice iste boje, kolika je vjerojatnost da je ta boja plava?

75. U jednoj se vrećici nalaze jedna bijela i tri crvene, a u drugoj dvije bijele i dvije crvene kuglice. Izvučemo na sreću po jednu kuglicu iz svake vrećice. Ako je jedna od njih bijela, kolika je vjerojatnost da je druga crvena?

76. U posudi se nalazi 5 kuglica bijele ili crne boje. Sve pretpostavke o broju bijelih kuglica su jednako vjerojatne. U tri izvlačenja izvukli smo kuglice bijele boje (kuglica se nakon izvlačenja vraća u posudu). Izračunaj vjerojatnost da su u posudi sve kuglice bijele boje.

77. U urni se nalazi  $n$  kuglica, pri čemu svaka kuglica može s jednakom vjerojatnošću biti bijela ili crvena. Izvlačimo jednu po jednu  $k$  kuglica, u modelu s vraćanjem. Ako niti jednom nismo izvukli crnu kuglicu, kolika je vjerojatnost da su sve kuglice u urni bijele?

78. U jednoj kutiji nalaze se 2 bijele i 3 crvene kuglice, a u drugoj 1 bijela i 3 crvene kuglice. Izvučemo na sreću po jednu kuglicu iz svake kutije. Ako je jedna od izvučenih kuglica bijela, kolika je vjerojatnost da je druga crvena?

79. U kutiji se nalazi 5 kuglica, od kojih svaka može biti crvena ili plava, s jednakom vjerojatnošću. Na sreću izabrana kuglica iz kutije imala je crvenu boju. Koji je najvjerojatniji broj plavih kuglica u kutiji?

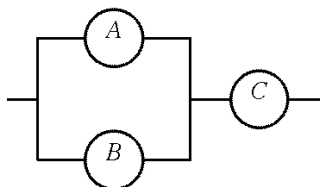
80. U kutiji sa 10 pregrada nalazi se ukupno 55 kuglica i to tako da se u  $k$ -toj pregradi nalazi  $k$  kuglica ( $k = 1, 2, \dots, 10$ ). Na sreću odaberemo 2 različite pregrade i izvučemo sve kuglice iz tih pregrada. Ako je poznato da je izvučeno najviše 8 kuglica, kolika je vjerojatnost da su one izvučene iz susjednih pregrada?

81. Iz pošiljke u kojoj se nalazi  $n$  ispravnih i  $m$  neispravnih proizvoda uzeto je  $r$  proizvoda zbog kontrole. Prvih  $k$  proizvoda ( $k < r$ ) među njima bilo je ispravno. Kolika je vjerojatnost da je i sljedeći proizvod ispravan?

\* \* \*

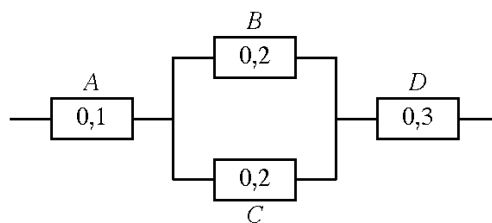
82. U kutiji I nalaze se 2 bijele i 2 crne kuglice, u kutiji II 5 bijelih i 7 crnih. Iz I kutije prebacimo na sreću dvije kuglice u II, a zatim dvije na sreću iz II u I. Ako je poznato da su nakon toga kuglice u I kutiji istobojne, kolika je vjerojatnost da su crne boje?

83. Vjerojatnost kvara svakog od dijelova  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sklopa na slici u nekom vremenskom intervalu iznosi 0.2. Uređaj prestaje sa radom ako je u kvaru dio  $C$ , dijelovi  $A$  i  $B$  (ili pak  $A$ ,  $B$  i  $C$ ). Ako je uređaj prestao sa radom, kolika je vjerojatnost da je pokvaren samo dio  $C$ ?



84. Dva od tri nezavisna dijela nekog stroja su otkazala. Odredi vjerojatnost da su to prvi i drugi dio, ako vjerojatnosti otkazivanja prvog, drugog odnosno trećeg dijela iznose 0.2, 0.4 i 0.3.

85. Na slici su navedene vjerojatnosti kvara pojedinih dijelova uređaja. Poznato je da je čitav uređaj u kvaru, pošto je pokvaren jedan ili više njegovih dijelova. Kolika je vjerojatnost da je među pokvarenim dijelovima i dio  $B$ ?



86. Vjerojatnost da će prijemnik registrirati signal u vremenskom intervalu duljine 1 iznosi  $p$ . Ako je poznato da se do trenutka  $t < 1$  signal nije pojavio, kolika je vjerojatnost da će se on pojaviti u ostatku vremena  $1 - t$ ?

87. Neki izvor emitira tri vrste poruka: AAAA, BBBB, i CCCC. Vjerojatnosti njihovog emitiranja iznose 0.3, 0.4, 0.3. Kao posljedica smetnji u kanalu, svaki se znak  $A$ ,  $B$  ili  $C$  prima ispravno s vjerojatnošću 0.6. Vjerojatnost da znak bude pogrešno interpretiran iznosi 0.2 za obje preostale mogućnosti. Pretpostavlja se da je prijem svakog znaka u poruci nezavisan jedan od drugog. Izračunaj vjerojatnost da je emitirana poruka AAAA, ukoliko je primljena ABCA.

88. Neki izvor emitira dvije vrste poruka: 0000 i 1111, s vjerojatnostima  $q$  i  $p$ , za svaku od njih ( $p + q = 1$ ). Prijem svakog znaka u poruci je nezavisan jedan od drugog. Svaki se znak (0 ili 1) prima ispravno s vjerojatnošću  $1 - \alpha$ . Izračunaj vjerojatnost da je emitirana poruka 0000 ako je primljena poruka 1000.

89. Izvor emitira dvije vrste poruka: 1 i 0, s jednakim vjerojatnostima. Svaki od triju serijski povezanih primopredajnika prima poruku i šalje je sljedećem primopredajniku. Pri tom svaki od njih u 10% slučajeva pogrešno interpretira poruku. Ako je na izlazu primljena poruka 1, kolika je vjerojatnost da je ona i poslana?

90. Niz nula i jedinica prenosi se komunikacijskim kanalom. Zbog smetnji, svaki se znak prima ispravno s vjerojatnošću 0.8. Da bismo povećali vjerojatnost ispravnog prijema, svaki se znak u poruci ponavlja  $n$  puta. Niz od  $n$  simbola se interpretira kao simbol koji se pojavljuje najčešće u tom nizu. (Npr. za  $n = 5$ , niz 10110 se interpretira kao 1, a 10100 kao 0).

a) Odredi vjerojatnost ispravnog prijema za  $n = 5$ .

b) Izaberi minimalnu vrijednost od  $n$  tako da vjerojatnost ispravnog prijema bude veća od 0.99.

91. Tisuću znakova poslano je kroz komunikacijski kanal. Svaki znak može biti pogrešno primljen, s vjerojatnošću 0.005, nezavisno od ostalih. Odredi vjerojatnost da je najviše pet znakova pogrešno primljeno.