

PRVI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE
04. 04. 2007.

1. **(3 boda)** U žari se nalaze dvije zelene, tri crvene i četiri plave kuglice.
 - (a) Izvlačimo na sreću dvije kuglice. Što je skup elementarnih događaja? Jesu li oni jednako vjerojatni? Izračunaj vjerojatnost p da su izvučene raznobojne kuglice.
 - (b) Ponovimo pokus izvlačenja dvije kuglice 10 puta. Kolika je vjerojatnost da su barem dvaput bile izvučene kuglice iste boje.
2. **(3 boda)** Ante i Mate izlaze uvečer neovisno jedan o drugome, u na sreću odabranom trenutku između 20 i 21 sat. Po dolasku na gradski trg zadržavaju se na tom mjestu 20 minuta, ali najkasnije do 21 sat, kad odlaze u kino. Kolika je vjerojatnost da će se oni na trgu sresti?
3. **(3 boda)**
 - (a) Definiraj nezavisnost dvaju događaja.
 - (b) Ako su A i B nezavisni događaji, dokaži da su i njihovi komplementi također nezavisni.
4. **(3 boda)** Neki izvor emitira znak 1 s vjerojatnošću 0.75, a znak 0 s vjerojatnošću 0.25. Na izlazu iz kanala se 5 % znakova pogrešno interpretira. Ako je primljen znak 1, kolika je vjerojatnost da je on i poslan?
5. **(4 boda)** Zakon razdiobe slučajnog vektora (X, Y) dan je tablicom

$X \setminus Y$	0	1
-1	1/12	1/12
0	1/12	1/4
1	1/6	1/3

- (a) Nađi marginalne razdiobe slučajnih varijabli X i Y . Jesu li one nezavisne?
 - (b) Nađi zakon razdiobe slučajne varijable $U = X^2$, te njeno očekivanje.
 - (c) Nađi zakone razdiobe slučajnih varijabli $V = X^2 + Y^2$ i $W = X \cdot Y$.
 - (d) Nađi zakon razdiobe slučajnog vektora $Z = (V, W)$.
6. **(3 boda)** Bacamo novčić dok dvaput zaredom ne padne isti ishod. Izračunaj očekivani broj bacanja novčića.
7. **(3 boda)**
 - (a) Definiraj disperziju slučajne varijable X .
 - (b) Dokaži da vrijedi
$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y).$$
8. **(3 boda)**
 - (a) Izvedi oblik karakteristične funkcije Poissonove slučajne varijable $P(\lambda)$.
 - (b) Ako je X Poissonova slučajna varijabla s očekivanjem 3, a Y Poissonova slučajna varijabla s očekivanjem 4, pri čemu su X i Y nezavisne, izračunaj $P(X + Y = 10)$.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

Rješenja 1. međuspita iz Vjerojatnosti i statistike

~~31.10.2006.~~

1. (3 boda) a) $p = \frac{13}{18}$

b) $P = 0.813$

2. (3 boda) a) $P(|x - y| < 20) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = 0.56$

3. (3 boda) a) Za događaje A i B kažemo da su nezavisni ako vrijedi bilo koja od jednakosti $P(A|B) = P(A)$ ili $P(B|A) = P(B)$.

b) $P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = \dots = P(\overline{A}\overline{B})$

4. (3 boda) $P(A) = P(H_0)P(A|H_0) + P(H_1)P(A|H_1)$,
 $P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = 0.983$

5. (4 boda) a) $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, X i Y nisu nezavisne

b) $X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, $E(X^2) = \frac{2}{3}$

c) $V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1/12 & 1/2 & 5/12 \end{pmatrix}$, $W \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/12 & 7/12 & 1/3 \end{pmatrix}$

d)

V \ W	-1	0	1
0	0	1/12	0
1	0	1/2	0
2	1/12	0	1/3

6. (3 boda) $E(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n(\frac{1}{2})^{n-1} = \dots = 3$

7. (3 boda) a) Disperzija slučajne varijable X definira se formulom $D(X) = E[(X - m_X)^2]$ (priznavalo se i $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$)

b) $D(X+Y) = E((X+Y)^2) - (E(X+Y))^2 = \dots = D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y)$

8. (3 boda) a) $\vartheta(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$

b) $P(X + Y = 10) = \frac{7^{10}}{e^7 10!}$