VJEROJATNOST I STATISTIKA

TEORIJA

FER, Zagreb

Marko NUFC

1. VJEROJATNOST

1. Operacije s događajima:

Unija i presjek događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvario *barem jedan* od događaja A, B naziva se **unija** ili **zbroj** (**suma**) događaja i označava s $A \cup B$, $A + B$, A ili B.
Događaj koji se ostvaruje ako su se ostvarila *oba* događaja A i B naziva se **presjek** ili **umnožak** (**produkt**) događaja i označava s $A \cap B$, AB, A i B.

2. Razlika događaja. Komplement događaja.

Razlika događaja. Komplement događaja

Događaj koji se ostvaruje ako se ostvari događaj A, a da se ne ostvari događaj B, nazivamo **razlika događaja** A i B i označavamo s $A \setminus B$, $A - B$.
Događaj $\Omega \setminus A$ nazivamo **komplementom** ili **suprotnim događajem** događaja A. On se ostvaruje ako i samo ako se A nije ostvario. Označavamo ga s $\overline{A}$ ili s A^c.

3.De Morganovi zakoni

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Te formule nazivamo **de Morganovi zakoni**.

Dokažimo (1):

$$\omega \in \overline{A \cup B} \iff \omega \notin A \cup B \iff \omega \notin A \text{ i } \omega \notin B$$
$$\iff \omega \in \overline{A} \text{ i } \omega \in \overline{B} \iff \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Drugu formulu možemo pokazati na sličan način. Međutim, korisno je vidjeti da ona slijedi iz prve formule. Naime, kako za svaki događaj vrijedi $\overline{\overline{A}} = A$, možemo računati ovako

$$\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \text{ po (1) } = \overline{\overline{A}} \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$$

te je

$$\overline{A \cap B} = \overline{\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

4. Algebra događaja

Algebra događaja

Algebra događaja je svaka familija $\mathscr{F}$ podskupova od Ω na kojoj su definirane **binarna operacija zbrajanja** $+ : \mathscr{F} \times \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ i **unarna operacija komplementiranja** sa svojstvima

1) $\Omega \in \mathscr{F}$, $\emptyset \in \mathscr{F}$,

2) $A \in \mathscr{F} \implies \overline{A} \in \mathscr{F}$,

3) $A, B \in \mathscr{F} \implies A + B \in \mathscr{F}$.

Elemente algebre $\mathscr{F}$ zovemo **događaji**.

5. Vjerojatnost

Vjerojatnost

Vjerojatnost je preslikavanje $\boldsymbol{P} : \mathscr{F} \to [0,1]$ definirano na algebri događaja $\mathscr{F}$, koje ima svojstva

1) $\boldsymbol{P}(\Omega) = 1$, $\boldsymbol{P}(\emptyset) = 0$ (**normiranost**),

2) ako je $A \subset B$, onda vrijedi $\boldsymbol{P}(A) \leqslant \boldsymbol{P}(B)$ (**monotonost**),

3) ako su A i B disjunktni događaji, onda je $\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B)$ (**aditivnost**).

Broj $\boldsymbol{P}(A)$ nazivamo **vjerojatnost događaja** A.

6. Vjerojatnost komplementa

Neka je A po volji odabran događaj, a A njegov komplement. Onda vrijedi $A \cup \overline{A} = \Omega$ i pritom su A i $\overline{A}$ disjunktni. Zato, po svojstvima normiranosti i aditivnosti vrijedi

$$1 = \boldsymbol{P}(\Omega) = \boldsymbol{P}(A \cup \overline{A}) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(\overline{A}),$$

te je $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$. Time smo pokazali:

Vjerojatnost komplementa

Za svaki događaj A vrijedi $\boldsymbol{P}(\overline{A}) = 1 - \boldsymbol{P}(A)$.

7. Vjerojatnost unije

Vjerojatnost unije

Za bilo koja dva događaja A i B vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B) - \boldsymbol{P}(AB).$$

Po svojstvu aditivnosti vjerojatnosti slijedi:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) = \boldsymbol{P}(A) + \boldsymbol{P}(B\overline{A}),$$
$$\boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(AB) + \boldsymbol{P}(B\overline{A}).$$

Oduzimanjem dobivamo traženu formulu:

$$\boldsymbol{P}(A \cup B) - \boldsymbol{P}(B) = \boldsymbol{P}(A) - \boldsymbol{P}(AB).$$

8. Klasična vjerojatnost

Klasična vjerojatnost

U klasičnom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost događaja računa se formulom:

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{M}{N} = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{broj mogućih ishoda}}.$$

9. Sigma-algebra i sigma-aditivnost vjerojatnosti

σ-algebra i σ-aditivnost vjerojatnosti

Ako je Ω beskonačan skup, tad zahtjevamo da algebra događaja $\mathscr{F}$ bude **σ-algebra**, tj. za nju vrijedi

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathscr{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

Vjerojatnost $\boldsymbol{P}$ na σ-algebri $\mathscr{F}$ mora zadovoljavati uvjet **σ-aditivnosti** (prebrojive aditivnosti):

$$\boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{P}(A_n), \quad \text{ako je } A_n A_m = \emptyset \text{ za sve } n \neq m.$$

10. Neprekinutost vjerojatnosti

Neprekinutost vjerojatnosti

Teorem 1.1. *Neka je $\boldsymbol{P}$ vjerojatnost na σ-algebri $\mathscr{F}$. $\boldsymbol{P}$ je σ-aditivna ako i samo ako vrijedi*

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \implies \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big). \tag{1}$$

11. Geometrijska vjerojatnost

Geometrijska vjerojatnost

Neka je Ω ograničeni podskup n-dimenzionalnog prostora $\mathbf{R}^n$ ($n = 1, 2, 3$). Pretpostavit ćemo da je Ω *izmjeriv* skup, tj. da postoji njegova mjera $m(\Omega)$ (duljina za $n = 1$, površina za $n = 2$, obujam za $n = 3$). Neka je A izmjeriv podskup od Ω. Kažemo da biramo točku **na sreću** unutar skupa Ω, ako je vjerojatnost da ona bude izabrana unutar podskupa A jednaka

$$\boldsymbol{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}. \tag{1}$$

Ovako definiranu vjerojatnost nazivamo **geometrijska vjerojatnost**.

2. UVJETNA VJEROJATNOST

1. Uvjetna vjerojatnost

Uvjetna vjerojatnost

Neka je $B \in \mathscr{F}$ događaj pozitivne vjerojatnosti: $\boldsymbol{P}(B) > 0$. **Uvjetna vjerojatnost** uz uvjet B je funkcija $\boldsymbol{P}_B : \mathscr{F} \to [0,1]$ definirana formulom

$$\boldsymbol{P}_B(A) := \frac{\boldsymbol{P}(AB)}{\boldsymbol{P}(B)}, \qquad \forall A \in \mathscr{F}. \tag{1}$$

Lako se je uvjeriti da je formulom (1) uistinu definirana vjerojatnosna funkcija. Naime vrijedi,

$$\boldsymbol{P}_B(\Omega) = \frac{\boldsymbol{P}(B \cap \Omega)}{\boldsymbol{P}(B)} = \frac{\boldsymbol{P}(B)}{\boldsymbol{P}(B)} = 1$$

i slično za $\boldsymbol{P}(\emptyset)$. Monotonost i aditivnost dokazuju se također po definiciji (1), korištenjem istovjetnih svojstava vjerojatnosne funkcije $\boldsymbol{P}$.

2. VJEROJATNOST UMNOŠKA

Vjerojatnost umnoška

Vjerojatnost umnoška dvaju događaja računa se formulom

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(A \mid B) \tag{2}$$

Ako zamijenimo događaje A i B (koji oboje imaju pozitivnu vjerojatnost), dobit ćemo istovrsnu formulu

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B \mid A). \tag{3}$$

3. Definicija i kriterij nezavisnosti događaja

Definicija i kriterij nezavisnosti događaja

Za događaje A i B kažemo da su **nezavisni**, ako vrijedi bilo koja od jednakosti: $\boldsymbol{P}(A \mid B) = \boldsymbol{P}(A)$ ili $\boldsymbol{P}(B \mid A) = \boldsymbol{P}(B)$.

Nuždan i dovoljan uvjet za nezavisnost jest da bude:

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B). \tag{1}$$

4. Nezavisnost događaja

Nezavisnost događaja

Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su **nezavisni** ako za svaki k, $2 \leqslant k \leqslant n$ i svaki izbor A_{i_1}, $A_{i_2}, \ldots$, A_{i_k} nekolicine tih događaja vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = \boldsymbol{P}(A_{i_1})\boldsymbol{P}(A_{i_2})\cdots\boldsymbol{P}(A_{i_k}).$$

5. Nezavisnost događaja A,B,C

Neka su A, B i C nezavisni. Onda vrijedi, na primjer

$$\boldsymbol{P}(AB) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B),$$

pa su A i B nezavisni. Pročitavši još jednom definiciju, zaključujemo da su doađaji u svakom podskupu skupa nezavisnih događaja također nezavisni.

Računajmo sad uvjetnu vjerojatnost sljedeceg tipa:

$$\boldsymbol{P}(A \mid BC) = \frac{\boldsymbol{P}(ABC)}{\boldsymbol{P}(BC)} = \frac{\boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C)}{\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C)} = \boldsymbol{P}(A).$$

Vidimo da je uvjetna vjerojatnost jednaka bezuvjetnoj.

Ako su A, B i C po volji odabrani događaji, onda imamo

$$\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(A)\cdot\boldsymbol{P}(B \mid A)\cdot\boldsymbol{P}(C \mid AB).$$

Nezavisnost triju događaja znači da će sve uvjetne vjerojatnosti u kojima se ti događaji javljaju biti jednake bezuvjetnima: $\boldsymbol{P}(B \mid A) = \boldsymbol{P}(B)$, $\boldsymbol{P}(C \mid AB) = \boldsymbol{P}(C)$ i slično za druge moguće kombinacije. Tako za nezavisne događaje A, B i C vrijedi

$$\boldsymbol{P}(ABC) = \boldsymbol{P}(A)\boldsymbol{P}(B)\boldsymbol{P}(C).$$

Naglasimo da obrnuta tvrdnja nije istinita: ako je za tri događaja vjerojatnost umnoška događaja jednaka umnošku vjerojatnosti, oni ne moraju biti nezavisni.

* * *

6. Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $A \subset \Omega$ bilo koji događaj. Familijom $H_1, \dots, H_n$ i on je razbijen na događaje:

$$A = AH_1 \cup AH_2 \cup \cdots \cup AH_n.$$

Kako su događaji AH_i međusobno disjunktni, vrijedi:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(A) &= \boldsymbol{P}(AH_1) + \boldsymbol{P}(AH_2) + \ldots + \boldsymbol{P}(AH_n) \\ &= \boldsymbol{P}(H_1)\boldsymbol{P}(A \mid H_1) + \ldots + \boldsymbol{P}(H_n)\boldsymbol{P}(A \mid H_n). \end{aligned}$$

Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $\{H_1, \dots, H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{P}(H_i)\boldsymbol{P}(A \mid H_i).$$

7. Bayesova formula

Bayesova formula

Vrijedi

$$\boldsymbol{P}(H_i \mid A) = \frac{\boldsymbol{P}(H_i)\boldsymbol{P}(A \mid H_i)}{\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}(H_j)\boldsymbol{P}(A \mid H_j)}.$$

3. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE I VEKTORI

1. Slučajna varijabla

Slučajna varijabla

Preslikavanje $X : \Omega \to S$ je **diskretna slučajna varijabla** ako je za svaki $x_k \in S$ skup $A_k := (\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k)$ događaj. Označimo

$$p_k := \boldsymbol{P}(A_k) = \boldsymbol{P}(X = x_k). \tag{1}$$

Za ove brojeve vrijedi $p_k > 0$, $\sum p_k = 1$. **Zakon razdiobe** slučajne varijable X sastoji se od područja vrijednosti koje ona poprima i odgovarajućih vjerojatnosti. Pišemo

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}. \tag{2}$$

2. Nezavisne slučajne varijable – definicija i temeljno svojstvo

Nezavisne slučajne varijable — definicija i temeljno svojstvo

Slučajne varijable $X, Y : \Omega \to S$ su **nezavisne** ako za sve $x_k, y_j \in S$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X = x_k,\ Y = y_j) = \boldsymbol{P}(X = x_k)\boldsymbol{P}(Y = y_j) \tag{3}$$

Tada vrijedi općenitije, za sve A, $B \subset S$

$$\boldsymbol{P}(X \in A,\ Y \in B) = \boldsymbol{P}(X \in A)\boldsymbol{P}(Y \in B). \tag{4}$$

3. Očekivanje

Očekivanje slučajne varijable

Neka slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Očekivanje slučajne varijable X definirano je kao zbroj

$$\boldsymbol{E}(X) := \sum_k x_k p_k. \tag{1}$$

Često se očekivanje slučajne varijable označava i simbolima $\overline{x}$ ili m_X.

4. Svojstva očekivanja

Svojstva očekivanja

Teorem 3.1. *Neka je X i Y slučajne varijable definirane na istom vjerojatnosnom prostoru. Očekivanje ima svojstvo linearnosti, za sve realne brojeve s i t vrijedi*

$$\boldsymbol{E}(sX+tY)=s\boldsymbol{E}(X)+t\boldsymbol{E}(Y).$$

Ako su varijable X i Y nezavisne, tada vrijedi

$$\boldsymbol{E}(XY)=\boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y).$$

Dokaz. Svojstvo $\boldsymbol{E}(sX)=s\boldsymbol{E}(X)$ slijedi direktno iz definicije očekivanja:

$$\boldsymbol{E}(sX)=\sum(sx_k)p_k=s\sum x_kp_k=s\boldsymbol{E}(X).$$

Dokazat ćemo sad da vrijedi $\boldsymbol{E}(X+Y)=\boldsymbol{E}(X)+\boldsymbol{E}(Y)$. Time će prva tvrdnja u teoremu biti dokazana.

Slučajna varijabla $X+Y$ poprima vrijednosti x_j+y_k s vjerojatnošću p_{jk}. Zato je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X+Y)&=\sum_{k,j}(x_j+y_k)p_{kj}=\sum_{k,j}x_jp_{kj}+\sum_{k,j}y_kp_{kj}\\&=\sum_j x_j\cdot\sum_k p_{kj}+\sum_k y_k\cdot\sum_j p_{kj}=\sum_j x_jp_j+\sum_k y_kq_k\\&=\boldsymbol{E}(X)+\boldsymbol{E}(Y).\end{aligned}$$

Dokažimo sad drugu tvrdnju. Varkijable X i Y su nezavisne, pa vrijedi $p_{jk}=p_jq_k$ za sve j i k. Zato je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(XY)&=\sum_{j,k}x_jy_kp_{jk}=\sum_{j,k}x_jy_kp_jq_k\\&=\Big(\sum_j x_jp_j\Big)\Big(\sum_k y_kq_k\Big)=\boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y).\end{aligned}$$ ◁

5. Ishodišni i centralni moment slučajne varijable

Ishodišni i centralni momenti slučajne varijable

Neka slučajna varijabla X ima zakon razdiobe:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$$

i neka je n prirodni broj. **Ishodišni moment reda** n slučajne varijable X definirano se formulom

$$\boldsymbol{E}(X^n) := \sum_k x_k^n p_k. \tag{2}$$

Ako je m_X očekivanje od X, onda se **centralni moment** μ_n **reda** n definira formulom

$$\mu_n := \boldsymbol{E}[(X - m_X)^n] = \sum_k (x_k - m_X)^n p_k. \tag{3}$$

6. Disperzija

Disperzija slučajne varijable

Disperzija (**rasipanje**, **varijanca**) slučajne varijable X definira se formulom

$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}[(X - m_X)^2]$$

Ovaj se izraz najčešće računa na način:

$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}(X^2) - m_X^2 = \sum_k x_k^2 p_k - \left(\sum_k x_k p_k\right)^2,$$

Jednakost ovih dviju formula slijedi iz svojstva linearnosti očekivanja:

$$\boldsymbol{E}[(X - m_X)^2] = \boldsymbol{E}[X^2 - 2X m_X + m_X^2] = \boldsymbol{E}(X^2) - 2m_X \boldsymbol{E}(X) + m_X^2 = \boldsymbol{E}(X^2) - m_X^2.$$

7. Svojstva disperzije

Svojstva disperzije

Teorem 3.2. *Za slučajnu varijablu X i realni broj s vrijedi*

$$\boldsymbol{D}(sX) = s^2 \boldsymbol{D}(X).$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, onda vrijedi

$$\boldsymbol{D}(X + Y) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y).$$

Dokaz. Koristit ćemo svojstva očekivanja. Za prvu formulu dobivamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(sX) &= \boldsymbol{E}[(sX)^2] - [\boldsymbol{E}(sX)]^2 = \boldsymbol{E}(s^2X^2) - [s\boldsymbol{E}(X)]^2 \\ &= s^2\boldsymbol{E}(X^2) - s^2[\boldsymbol{E}(X)]^2 = s^2\boldsymbol{D}(X).\end{aligned}$$

Ako su X i Y nezavisne, onda imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}(X+Y) &= \boldsymbol{E}[(X+Y)^2] - [\boldsymbol{E}(X+Y)]^2 \\ &= \boldsymbol{E}(X^2) + 2\boldsymbol{E}(XY) + \boldsymbol{E}(Y^2) - \boldsymbol{E}(X)^2 - 2\boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y) - \boldsymbol{E}(Y^2) \\ &= \boldsymbol{E}(X^2) - \boldsymbol{E}(X)^2 + \boldsymbol{E}(Y^2) - \boldsymbol{E}(Y^2) \\ &= \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y). \ \triangleleft\end{aligned}$$

8. Kovaracijski moment. Koeficijent korelacije

Kovarijacijski moment. Koeficijent korelacije

Kovarijacijski moment varijabli X i Y definira se formulom

$$\operatorname{cov}(X,Y) := \boldsymbol{E}[(X-m_X)(Y-m_Y)] = \boldsymbol{E}(XY) - m_Xm_Y.$$

Koeficijent korelacije definira se formulom

$$r(X,Y) := \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\ \sigma_Y}.$$

9. Disperzija zbroja slučajnih varijabli

Disperzija zbroja slučajnih varijabli

Teorem 3.3. *Disperzija zbroja $S = X_1 + \ldots + X_n$ slučajnih varijabli računa se formulom*

$$\boldsymbol{D}(S) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{D}(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Dokaz. Vrijedi $m_S = m_{X_1} + \ldots + m_{X_n}$ pa je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}(S) &= \boldsymbol{E}[(S - m_S)^2] = \boldsymbol{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - m_{X_i})\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{E}(X_i - m_{X_i})^2 + \sum_{i \neq j} \boldsymbol{E}[(X_i - m_{X_i})(X_j - m_{X_j})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{D}(X_i) + 2\sum_{i<j} \operatorname{cov}(X_i, X_j). \quad \triangleleft \end{aligned}$$

10. Svojstva koeficijenta korelacije

Svojstva koeficijenta korelacije

Teorem 3.4. *Za koeficijent korelacije uvijek je ispunjeno*

$$|r(X,Y)| \leqslant 1.$$

Jednakost $r(X,Y) = \pm 1$ *vrijedi onda i samo onda kad je* $Y = aX + b$ *za neke konstante* a *i* b*.*

Dokaz. Neka su X^*, Y^* normirane slučajne varijable pridružene varijablama X i Y. Onda imamo

$$\boldsymbol{D}(X^* \pm Y^*) = \boldsymbol{D}(X^*) + D(Y^*) \pm 2\operatorname{cov}(X^*, Y^*) = 2[1 \pm r(X,Y)].$$

Lijeva strana je uvijek pozitivna, pa je zato pozitivna i desna. Odatle slijedi

$$|r(X,Y)| \leqslant 1.$$

Nadalje, jednakost $r(X,Y) = 1$ vrijedit će samo onda kad bude $\boldsymbol{D}(X^* - Y^*) = 0$. To je moguće samo kad je slučajna varijabla $X^* - Y^*$ jednaka konstanti. Odavde zaključujemo da mora biti

$$\frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} - \frac{X - m_X}{\sigma_X} = \text{const}$$

odnosno

$$Y = aX + b,$$

pri čemu je $a = \sigma_Y / \sigma_X$ i b neki realni broj.

Slično zaključujemo i u slučaju kad je $r(X,Y) = -1$. $\triangleleft$

11. Karakteristična funkcija

Karakteristična funkcija

Karakteristična funkcija slučajne varijable X definira se formulom

$$\vartheta_X(t) := \boldsymbol{E}(e^{itX})$$

Dakle,

$$\vartheta_X(t) = \sum_k p_k e^{itx_k}. \tag{4}$$

12. Svojstva karakteristične funkcije

Svojstva karakteristične funkcije

1° Karakteristična funkcija jednoznačno određuje razdiobu: dvije različite razdiobe ne mogu imati istu karakterističnu funkciju.

2° Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne, tada je

$$\vartheta_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdots \vartheta_{X_n}(t). \tag{5}$$

3° Vrijedi formula

$$\boldsymbol{E}(X^r) = \frac{\vartheta^{(r)}(0)}{i^r}, \qquad r = 1, 2, \dots \tag{6}$$

ukoliko očekivanje postoji. Posebice,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(X) &= -i\vartheta'(0), \\ \boldsymbol{D}(X) &= -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

4. PRIMJERI DISKRETNIH RAZDIOBA

1. Geometrijska razdioba – karakteristična funkcija, očekivanje i disperzija

Odredimo najprije karakterističnu funkciju geometrijske razdiobe:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot pq^k = pe^{it} \sum_{k=0}^{\infty} (qe^{it})^k = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

Iskoristimo tu funkciju da izračunamo očekivanje ove razdiobe. Vrijedi

$$\vartheta'(t) = \frac{ipe^{it}}{(1 - qe^{it})^2}$$

pa je

$$\boldsymbol{E}(X) = -i\vartheta'(0) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

2. Geometrijska razdioba - odsustvo pamćenja

Odsustvo pamćenja — temeljno svojstvo geometrijske razdiobe

Teorem 4.1. *Slučajna varijabla X koja poprima vrijednosti u skupu $\{1, 2, 3, \dots\}$ ima geometrijsku razdiobu onda i samo onda ako vrijedi za sve $k, m \geqslant 1$*

$$\boldsymbol{P}(X = k + m \mid X > k) = \boldsymbol{P}(X = m). \qquad (1)$$

Dokaz. Jedan je smjer jednostavan: ako X ima geometrijsku razdiobu, onda je

$$\boldsymbol{P}(X = k + m \mid X > k) = \frac{\boldsymbol{P}(X = k + m, X > k)}{\boldsymbol{P}(X > k)} = \frac{\boldsymbol{P}(X = k + m)}{\boldsymbol{P}(X > k)}$$

$$= \frac{p(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{m-1} = \boldsymbol{P}(X = m).$$

3. Binomna razdioba – očekivanje, disperzija

Odredimo najprije karakterističnu funkciju binomne razdiobe. Neka je $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Tada imamo

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} p_k = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it} + q)^n.$$

Po formuli (7) vrijedi

$$\vartheta'(t) = n(pe^{it} + q)^{n-1} pe^{it} i,$$
$$\vartheta'(0) = n(p+q)^{n-1} pi = npi \implies \boldsymbol{E}(X) = np.$$

Na isti način dobivamo

$$\vartheta''(0) = n(n-1)p^2 i^2 + npi^2 = -n(n-1)p^2 - np$$

te je

$$\boldsymbol{D}(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = npq.$$

Binomna razdioba, definicija i numeričke karakterisike

Kažemo da slučajna varijabla X ima **binomnu razdiobu** s parametrima n i p i pišemo $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, ako X poprima vrijedosti unutar skupa $\{0,1,2,\ldots,n\}$ s vjerojatnostima

$$p_k = \boldsymbol{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Očekivanje i disperzija binomne razdiobe su

$$m_X = np, \qquad \sigma_X^2 = npq.$$

4. Stabilnost binomne razdiobe

Ako su $X_1 \sim \mathscr{B}(n_1,p)$ i $X_2 \sim B(n_2,p)$ nezavisne binomne slučajne varijable, onda je $X_1 + X_2$ binomna slučajna varijabla. Odredimo njezine parametre.

Vrijedi $\vartheta_{X_1}(t) = (q + pe^{it})^{n_1}$, $\vartheta_{X_2}(t) = (q + pe^{it})^{n_2}$ te je zbog nezavisnosti od X_1 i X_2

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \vartheta_{X_1}(t)\vartheta_{X_2}(t) = (q + pe^{it})^{n_1+n_2}$$

a to je karakteristična funkcija binomne razdiobe $\mathscr{B}(n_1+n_2,p)$.

5. Aproksimacija binomne razdiobe

Aproksimacija binomne razdiobe

Teorem 4.2. *Neka je* n *velik a* p *malen. Označimo* $\lambda = np$. *tad vrijedi aproksimacija*

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \tag{1}$$

Dokaz. Označimo $m = \dfrac{1}{p}$ i transformirajmo izraz slijeva:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{m}\right)^k \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{n-k}$$

Sada je $\lambda = np = \dfrac{n}{m}$. Pustimo da broj n neograničeno raste:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&\to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

6. Poissonova razdioba

Poissonova razdioba, definicija i numeričke karakteristike

Kažemo da slučajna varijabla X ima **Poissonovu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$ i pišemo $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ ako ona poprima vrijednosti unutar skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ s vjerojatnostima

$$p_k = \boldsymbol{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Za očekivanje i disperziju ove razdiobe vrijedi

$$m_X = \lambda, \qquad \sigma_X^2 = \lambda.$$

7. Poisson – karakteristična funkcija, očekivanje, disperzija

Odredimo najprije karakterističnu funkciju Poissonove razdiobe $\mathscr{P}(\lambda)$.

$$\vartheta(t)=\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}}=e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Odavde, na temelju veze karakteristične funkcije i momenata slučajne varijable, dobivamo $\boldsymbol{E}(X)=\lambda$, $\boldsymbol{D}(X)=\lambda$.

8. Stabilnost Poisson

Ako su $X_1 \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ i $X_2 \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$ nezavisne slučajne varijable, onda je X_1+X_2 također Poissonova slučajna varijabla. Dokažimo tu tvrdnju i odredimo parametar ove razdiobe.

Karakteristična funkcija Poissonove razdiobe je

$$\vartheta_{X_k}(t)=e^{\lambda_k(e^{it}-1)}, \qquad k=1,2$$

te slijedi

$$\vartheta_{X_1+X_2}=e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

što je karakteristična funkcija Poissonove razdiobe $P(\lambda_1+\lambda_2)$.

5. NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE

1. Funkcija razdiobe

Funkcija razdiobe

Teorem 5.1. *Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X. Ona posjeduje svojstva:*

1° $\boldsymbol{P}(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$,

2° *F je neopadajuća:* $x_1 < x_2 \implies F(x_1) \leqslant F(x_2)$,

3° $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$,

4° *F je neprekinuta slijeva:*

$$F(x-0) := \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x-\varepsilon) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Dokaz.

1° Neka je $x_1 < x_2$. Onda vrijedi

$$\begin{aligned} F(x_2) &= \boldsymbol{P}(\{X < x_2\}) = \boldsymbol{P}(\{X < x_1\} \cup \{x_1 \leqslant X < x_2\}) \\ &= \boldsymbol{P}(\{X < x_1\}) + \boldsymbol{P}(\{x_1 \leqslant X < x_2\}) \\ &= F(x_1) + \boldsymbol{P}(\{x_1 \leqslant X < x_2\}). \end{aligned}$$

2° Neka je ponovo $x_1 < x_2$. Kako vrijedi $\{X < x_1\} \subset \{X < x_2\}$, tvrdnja slijedi zbog monotonosti vjerojatnosti.

3° Neka je (x_n) po volji odabran padajući niz realnih brojeva, $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Označimo $A_n = \{X < x_n\}$. Onda su A_n padajući skupovi: $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ i vrijedi $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Zato je, zbog svojstva neprekinutosti vjerojatnosti,

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = 0.$$

Druga se tvrdnja dokazuje na isti način.

4° Tvrdnja ponovo slijedi iz neprekinutosti vjerojatnosti. Naime, ako je (ε_n) niz pozitivnih brojeva koji opada prema nuli, onda je s $A_n = \{X < x - \varepsilon_n\}$ definiran rastući niz skupova za koji vrijedi $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < x\}$ pa tvrdnja slijedi zbog neprekinutosti vjerojatnosti:

$$\begin{aligned} F(x-0) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} F(x-\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} F(x-\varepsilon_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(A_n) = \boldsymbol{P}(A) = F(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}. \ \triangleleft \end{aligned}$$

2. Gustoća razdiobe

Neprekinute slučajne varijable. Gustoća razdiobe

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **neprekinuta** (kontinuirana) ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ takva da vrijedi

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \tag{5.2}$$

Funkcija f naziva se **gustoća razdiobe vjerojatnosti** slučajne varijable X. Ona nije nužno neprekinuta, no u točkama neprekinutosti od f vrijedi

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{5.3}$$

3. Jednolika razdioba

Jednolika razdioba, alternativna definicija, razdioba i gustoća

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **jednoliko (uniformno)** distribuirana na intervalu $[a,b]$, ako je zadana funkcijom razdiobe odnosno funkcijom gustoće:

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$
$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b.$$

Pišemo $X \sim \mathscr{U}(a,b)$.

4. Nezavisnost

Definicija nezavisnosti

Kažemo da su slučajne varijable X i Y **nezavisne**, ukoliko za sve intervale A, B iz skupa $\mathbf{R}$ vrijedi

$$\mathrm{P}(X \in A, Y \in B) = \mathrm{P}(X \in A)\mathrm{P}(Y \in B).$$

5. Očekivanje, disprezija

Neka je X neprekinuta s gustoćom f . Njezino očekivanje definira se na način

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{5.6}$$

Ako ovaj nepravi integral ne konvergira, očekivanje ne postoji.

Označimo $\bar{x} = \boldsymbol{E}(X)$. Disperzija $\boldsymbol{D}(X)$ slučajne varijable X računa se uz pomoć formula:

$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}[(X - \bar{x})^2] = \boldsymbol{E}(X^2) - \bar{x}^2.$$

Dakle

$$\boldsymbol{D}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \bar{x}^2. \tag{5.7}$$

Od svojstava očekivanja i disperzije izdvojit ćemo samo najvažnija:

6. Svojstva očekivanja i disperzije

Svojstva očekivanja i disperzije

Za sve slučajne varijable X, Y i realne brojeve s, t vrijedi

$$\boldsymbol{E}(sX + tY) = s\boldsymbol{E}(X) + t\boldsymbol{E}(Y)$$

(svojstvo **linearnosti** očekivanja). Za disperziju pak vrijedi

$$\boldsymbol{D}(sX) = s^2\boldsymbol{D}(X).$$

Ako su X i Y nezavisne, onda vrijedi

$$\boldsymbol{E}(XY) = \boldsymbol{E}(X)\boldsymbol{E}(Y),$$
$$\boldsymbol{D}(X + Y) = \boldsymbol{D}(X) + \boldsymbol{D}(Y).$$

7. Transformacija funkcije gustoće

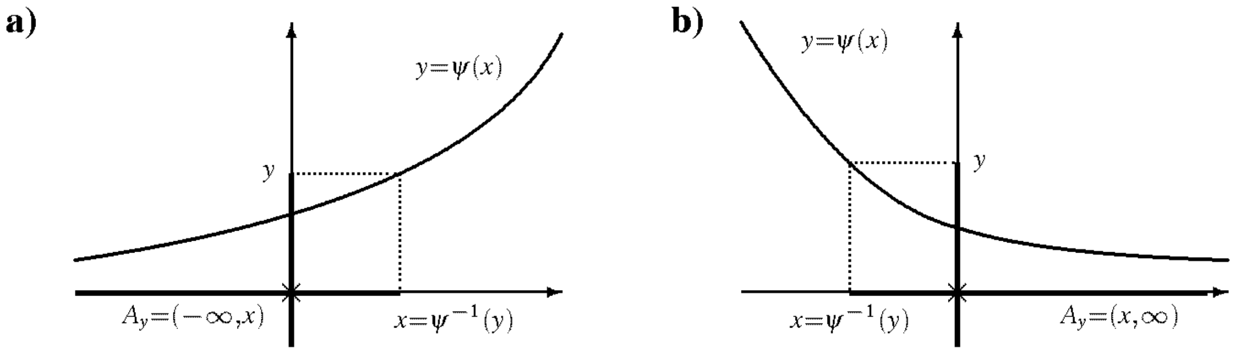
Ako je ψ monotono rastuća, tada je (slika 5.15)

$$A_y = \psi^{-1}\{\langle -\infty, y\rangle\} = \langle -\infty, \psi^{-1}(y)\rangle = \langle -\infty, x\rangle .$$

Odavde dobivamo

$$G(y) = \boldsymbol{P}(X \in A_y) = \boldsymbol{P}(X \in \langle -\infty, x\rangle) = \boldsymbol{P}(X < x) = F(x),$$

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dx}F(x) \cdot \frac{dx}{dy} = f(x)\frac{dx}{dy}.$$



Sl. 5.15.

Za monotono padajuću funkciju ψ dobivamo (slika 5.15)

$$A_y = \psi^{-1}\{\langle -\infty, y\rangle\} = \langle \psi^{-1}(y), \infty\rangle = \langle x, \infty\rangle ,$$

$$G(y) = \boldsymbol{P}(X \in A_y) = \boldsymbol{P}(X \in \langle x, \infty\rangle) = \boldsymbol{P}(X > x) = 1 - F(x),$$

$$g(y) = \frac{d}{dy}G(y) = \frac{d}{dx}[1 - F(x)]\frac{dx}{dy} = -f(x)\frac{dx}{dy}.$$

U oba slučaja se rezultat može napisati istom formulom:

Transformacija funkcije gustoće

Neka je $Y = \psi(X)$. Ako je funkcija ψ rastuća ili padajuća funkcija, onda vrijedi

$$g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|, \qquad y = \psi(x), \tag{5.1}$$

tj.

$$g(y) = f(\psi^{-1}(y))\left|\frac{d\psi^{-1}(y)}{dy}\right|.$$

Općenitije, ova formula vrijedi za svaku injektivnu funkciju ψ.

6. PRIMJERI NEPREKINUTIH RAZDIOBA

1. Eksponencijalna razdioba

Eksponencijalna razdioba, definicija

Kažemo da slučajna varijabla X ima **eksponencijalnu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$ ako ona poprima pozitivne vrijednosti s gustoćom

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0. \tag{6.1}$$

Pišemo $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Njezina je funkcija razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

2. Fizikalni opis eksponencijalne razdiobe

Eksponencijalna razdioba, izvod iz modela pojavljivanja

Teorem 6.1. *Pretpostavimo da je uvjetna vjerojatnost pojavljivanja događaja u nekom vrlo kratkom intervalu* $(x, x+\Delta x)$, *ako je poznato da se događaj nije pojavio do trenutka* x, *proporcionalna duljini tog podintervala i ne ovisi o vrijednosti* x:

$$\boldsymbol{P}(X < x + \Delta x \mid X > x) = \lambda \Delta x + r, \qquad \frac{r}{\Delta x} \to 0 \quad kad \quad \Delta x \to 0.$$

Tada je X *slučajna varijabla distribuirana po eksponencijalnom zakonu* $\mathcal{E}(\lambda)$.

Dokaz. Po formuli za uvjetnu vjerojatnost možemo napisati

$$\boldsymbol{P}(X > x + \Delta x) = \boldsymbol{P}(X > x) \cdot \boldsymbol{P}(X > x + \Delta x \mid X > x).$$

Međutim, kako je

$$\boldsymbol{P}(X > x + \Delta x \mid X > x) = 1 - \boldsymbol{P}(X < x + \Delta x \mid X > x) = 1 - \lambda \Delta x - r,$$

dobivamo

$$\boldsymbol{P}(X > x + \Delta x) = \boldsymbol{P}(X > x)(1 - \lambda \Delta x - r).$$

Definirajmo funkciju

$$Q(x) := \boldsymbol{P}(X > x) = 1 - F(x).$$

Ona zadovoljava relaciju

$$Q(x + \Delta x) - Q(x) = Q(x)[-\lambda \Delta x - r]$$

te je

$$\frac{dQ(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Q(x + \Delta x) - Q(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} Q(x)[-\lambda - \frac{r}{\Delta x}] = -\lambda Q(x).$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$Q(x) = Ce^{-\lambda x}.$$

Konstantu C određujemo iz početnog uvjeta: $Q(0) = \boldsymbol{P}\{X > 0\} = 1$. Odavde $C = 1$ i zato

$$F(x) = 1 - Q(x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

te X zaista ima eksponencijalnu razdiobu $\mathcal{E}(\lambda)$. ◁

3. Eksponencijalna – očekivanje, disperzija

Laplaceov transformat eksponencijalne razdiobe $\mathscr{E}(\lambda)$ iznosi

$$f^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda x}dx$$
$$= \lambda \int_0^\infty e^{-(s+\lambda)x}dx = -\frac{\lambda}{s+\lambda}e^{-(s+\lambda)x}\Big|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{s+\lambda}$$

(Pri uvrštavanju gornje granice uvažavamo da je f^* definirana za $s > 0$.)

Karakterističnu funkciju eksponencijalne razdiobe možemo napisati pomoću poznate veze: $\vartheta(t) = f^*(-it)$:

$$\vartheta(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Očekivanje eksponencijalne razdiobe izračunat ćemo iz veze momenata i Laplaceovog transformata>

$$\boldsymbol{E}(X) = -f^{*\prime}(0) = -\left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)'\Big|_{s=0} = \frac{1}{\lambda}.$$

Ishodišni moment reda n računamo ovako:

$$\boldsymbol{E}(X^n) = (-1)^n f^{*(n)}(0) = (-1)^n \left(\frac{\lambda}{s+\lambda}\right)^{(n)}\Big|_{s=0}$$
$$= \frac{n!\lambda}{(s+\lambda)^{n+1}}\Big|_{s=0} = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

Sad za **disperziju** vrijedi

$$\boldsymbol{D}(X) = \boldsymbol{E}(X^2) - (\boldsymbol{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

4. Eksponencijalna – odsustvo pamćenja

Karakterizacija eksponencijalne razdiobe

Teorem 6.2. *Neka za slučajnu varijablu X koja uzima samo pozitivne vrijednosti za sve pozitivne x i t vrijedi*

$$\boldsymbol{P}(X < x + t \mid X > t) = \boldsymbol{P}(X < x). \qquad (6.2)$$

Tada X ima eksponencijalnu razdiobu.

DOKAZ. Označimo $Q(x) := \boldsymbol{P}(X > x) = 1 - F(x)$, gdje je F tražena funkcija razdiobe. Po pretpostavci je $Q(0) = \boldsymbol{P}(X > 0) = 1$. Također, vrijedi $Q'(x) = -f(x) < 0$ za $x > 0$. Označimo $Q'(0) =: -\lambda$. Osnovnu relaciju (6.2) možemo napisati na način

$$1 - \boldsymbol{P}(X > x + t \mid X > t) = 1 - \boldsymbol{P}(X > x)$$

te je

$$\frac{\boldsymbol{P}(X > x + t, X > t)}{\boldsymbol{P}(X > t)} = \boldsymbol{P}(X > x)$$

ili

$$\boldsymbol{P}(X > x + t) = \boldsymbol{P}(X > t)\boldsymbol{P}(X > x).$$

Tako dobivamo funkcionalnu jednadžbu

$$Q(x + t) = Q(t)Q(x), \qquad \forall t, x > 0 \tag{6.3}$$

Slučajnu varijablu tražimo u klasi neprekinutih varijabli. Zato možemo pretpostaviti da je Q diferencijabilna funkcija. Deriviranjem relacije (6.3) po varijabli t dobivamo

$$Q'(x + t) = Q'(t)Q(x).$$

Uvrštavanjem $t = 0$ slijedi

$$Q'(x) = Q'(0)Q(x) = -\lambda Q(x)$$

i odavde dobivamo $Q(x) = Ce^{-\lambda x}$. Kako je $Q(0) = 1$, dobivamo $C = 1$. Zato je

$$F(x) = 1 - Q(x) = 1 - e^{-\lambda x}. \quad \triangleleft$$

5. Normalna razdioba – definicija

Normalna razdioba, definicija

Slučajna varijabla X ima **normalnu razdiobu** s parametrima $a \in \mathbf{R}$ i $\sigma^2 > 0$ ako je X neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{6.1}$$

Pišemo $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

6. Jedinična normalna razdioba

Izaberemo li parametre $a = 0$ i $\sigma = 1$, dobivamo slučajnu varijablu $\mathcal{N}(0,1)$ koja se zove **jedinična normalna razdioba**. Njezinu gustoću označavamo sa

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}. \tag{6.2}$$

Za pripadnu funkciju razdiobe Φ vrijedi

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2}\mathrm{d}t. \tag{6.3}$$

Ovaj integral nije elementaran, ne može se eksplicitno izraziti pomoću elementarnih funkcija.

Funkcija ϕ je parna, pa ima sljedeća svojstva:

$$\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2},$$

$$\int_{0}^{u} \phi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-u}^{u} \phi(t)\mathrm{d}t.$$

Sad možemo napisati

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \int_{-\infty}^{u} \phi(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} \phi(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{u} \phi(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{-u}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{2}\Big[1 + \Phi^*(u)\Big].\end{aligned}$$

Dakle, funkcija razdiobe Φ može se prikazati pomoću funkcije

$$\Phi^*(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \tag{6.4}$$

7. Veza jedinične i općenite normalne razdiobe

Veza jedinične i opće normalne razdiobe

Jedinična i opća normalna razdioba mogu se dobiti jedna iz druge *linearnom transformacijom*:

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \implies a + \sigma X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2),$$

$$X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2) \implies \frac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

8. Karakteristična funkcija

Odredimo karakterističnu funkciju normalne razdiobe $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$.

Najprije ćemo odrediti karakterističnu funkciju jedinične normalne razdiobe $\mathcal{N}(0,1)$. Vrijedi

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx} dx.$$

Deriviramo ovu funkciju i primijenimo parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned}\vartheta'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ixe^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx} dx \\ &= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left(-e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} ite^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \\ &= -t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -t\vartheta(t).\end{aligned}$$

Prema tome, ϑ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d\vartheta(t)}{dt} = -t\vartheta(t)$$

uz početni uvjet $\vartheta(0) = 1$, koji vrijedi za svaku karakterističnu funkciju.

$$\frac{d\vartheta(t)}{\vartheta(t)} = -t\,dt \implies \vartheta(t) = \vartheta(0)e^{-\frac{1}{2}t^2} = e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Ako je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, tada $a + \sigma X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$ i dobivamo karakterističnu funkciju opće normalne razdiobe $\mathcal{N}(a,\sigma^2)$:

$$\vartheta_{a+\sigma X}(t) = e^{ita} \vartheta_X(\sigma t) = e^{ita} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} = e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

9. Očekivanje, disperzija normalne razdiobe

Izračunat ćemo očekivanje i disperziju, koristeći karakterističnu funkciju. Neka je $X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \\ \vartheta'(t) &= (ia - \sigma^2 t)e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, & \vartheta'(0) &= ia \\ \vartheta''(t) &= [-\sigma^2 + (ia - \sigma^2 t)^2]e^{ita-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, & \vartheta''(0) &= -\sigma^2 - a^2.\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(X) &= -i\vartheta'(0) = a, \\ \boldsymbol{D}(X) &= -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \sigma^2.\end{aligned}$$

10. Vjerojatnost jedinične normalne razdiobe

Računanje vjerojatnosti za jediničnu normalnu razdiobu

Za jediničnu normalnu razdiobu X vrijedi:

$$P(u_1 < X < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = \frac{1}{2}\Big[\Phi^*(u_2) - \Phi^*(u_1)\Big]. \qquad (6.5)$$

Posebice, u slučaju simetričnog intervala

$$P(|X| < u) = \frac{1}{2}\Big[\Phi^*(u) - \Phi^*(-u)\Big] = \Phi^*(u). \qquad (6.6)$$

11.Vjerojatnost općenite normalne razdiobe

Neka je $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Tada je $\dfrac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ i funkciju razdiobe F varijable X možemo izraziti uz pomoć funkcije Φ:

$$F(x) = \Phi(u) = \tfrac{1}{2}[1 + \Phi^*(u)], \qquad u = \frac{x-a}{\sigma}.$$

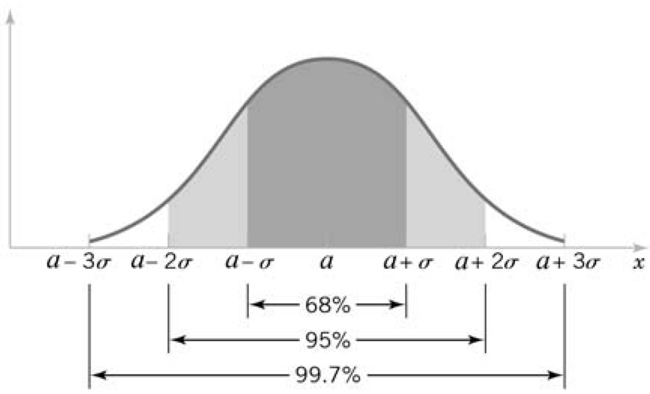
Tako računamo

$$P(x_1 < X < x_2) = P\left(\frac{x_1-a}{\sigma} < \frac{X-a}{\sigma} < \frac{x_2-a}{\sigma}\right)$$
$$= \Phi\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi^*\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)\right].$$

12. Pravilo 3-sigma

Neka je $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ Izračunajmo

$$P(|X-a| < k\sigma), \qquad k = 1, 2, 3.$$



Sl. 6.5.

Imamo

$$P(|X-a| < k\sigma) = P(-k\sigma < X - a < k\sigma) = P(-k < \widetilde{X} < k) = \Phi^*(k).$$

Vrijedi $\Phi^*(1) = 0.6827$, $\Phi^*(2) = 0.9545$, $\Phi^*(3) = 0.9973$. Dakle, s vjerojatnošću 99.73% (odnosno, praktički sigurno) normalna varijabla uzima vrijednosti unutar intervala $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Ta se činjenica naziva *pravilo tri sigma.*

Stabilnost normalne razdiobe

Teorem 6.3. *Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s normalnim razdiobama*

$$X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$$

i s_1, s_2 bilo koji realni brojevi. Tada vrijedi

$$s_1X_1 + s_2X_2 \sim \mathcal{N}(s_1a_1 + s_2a_2, s_1^2\sigma_1^2 + s_2^2\sigma_2^2).$$

Dokaz. Karakteristične funkcije slučajnih varijabli X_1 i X_2 su

$$\vartheta_{X_k}(t) = \exp(a_kt - \tfrac{1}{2}\sigma_k^2t^2), \qquad k = 1, 2.$$

Zato je

$$\vartheta_{s_kX_k}(t) = \exp(s_ka_kt - \tfrac{1}{2}s_k^2\sigma_k^2t^2), \qquad k = 1, 2.$$

pa dobivamo

$$\vartheta_{s_1X_1+s_2X_2}(t) = \exp((s_1a_1 + s_2a_2)t - \tfrac{1}{2}(s_1^2\sigma_1^2 + s_2^2\sigma_2^2)t^2),$$

što je karakteristična funkcija normalne razdiobe $\mathcal{N}(s_1a_1 + s_2a_2, s_1^2\sigma_1^2 + s_2^2\sigma_2^2)$. ◁

7. SLUČAJNI VEKTORI

1. Gustoća razdiobe. Neprekinuti slučajni vektori

Gustoća razdiobe. Neprekinuti slučajni vektori

Za slučajan vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ kažemo da je **neprekinut** ako postoji funkcija $f : \mathbf{R}^n \to [0, \infty\rangle$ takva da za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vrijedi

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, \ldots, u_n) du_1 \ldots du_n. \tag{7.2}$$

Funkciju f nazivamo **gustoća razdiobe** slučajnog vektora. Tamo gdje je F diferencijabilna, vrijedi

$$f(x_1, \ldots, x_n) := \frac{\partial^n F(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \tag{7.3}$$

2. Vjerojatnost realizacije slučajnog vektora

Računanje vjerojatnosti realizacije slučajnog vektora

Za svaki izmjerivi skup $G \subset \mathbf{R}^n$ vrijedi

$$\boldsymbol{P}((X_1, \ldots, X_n) \in G) = \int \cdots \int_G f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n. \tag{7.4}$$

3. Marginalne gustoće

Za dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) koristit ćemo jednostavnije oznake. Za gustoću vrijedi

$$f(x, y) := \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y},$$

marginalne razdiobe:

$$F_X(x) := F(x, \infty) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{-\infty}^{x} f_X(x) dx,$$

$$F_Y(y) := F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y) dy,$$

marginalne gustoće:

$$f_X(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy,$$

$$f_Y(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

4. Nezavisnost

Kriterij nezavisnosti za neprekinute slučajne vektore

Teorem 7.1. *Komponente* $X_1, \dots, X_n$ *neprekinutog slučajnog vektora* $(X_1, \dots, X_n)$ *su nezavisne onda i samo onda ako vrijedi*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \ldots \cdot f_n(x_n), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n. \tag{7.6}$$

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz (7.5), deriviranjem te jednakosti po varijablama $x_1, \dots, x_n$. Obrat ćemo, zbog jednostavnosti zapisivanja, dokazati za dvodimenzionalan vektor. Neka su A i B intervali u $\mathbf{R}$ i $G = A \times B$ pravokutnik. Onda vrijedi

$$\boldsymbol{P}(X \in A, Y \in B) = \boldsymbol{P}((X, Y) \in G) = \iint_G f(x, y) dx \, \mathrm{d}y$$

Prema (7.6), vrijedi $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, pa je ovaj integral jednak

$$\iint_G f_X(x) f_Y(y) \, dx \, dy = \int_A f_X(x) dx \cdot \int_B f_Y(y) dy = \boldsymbol{P}(X \in A) \cdot \boldsymbol{P}(Y \in B).$$

Dakle, X i Y su nezavisne. ◁

5. Svojstva očekivanja

Svojstva očekivanja

Teorem 7.2. *Za svake dvije slučajne varijable* $X, Y : \Omega \to \mathbf{R}$ *vrijedi*

$$\boldsymbol{E}(X + Y) = \boldsymbol{E}(X) + \boldsymbol{E}(Y). \tag{7.7}$$

Ako su X *i* Y *nezavisne, onda je*

$$\boldsymbol{E}(XY) = \boldsymbol{E}(X) \cdot \boldsymbol{E}(Y). \tag{7.8}$$

Dokaz. Neka je $f(x, y)$ gustoća slučajnog vektora (X, Y). Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(X + Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) f(x, y) dx \, dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \, dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} y \, dy \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy \\
&= \boldsymbol{E}(X) + \boldsymbol{E}(Y).
\end{aligned}$$

Pretpostavimo sad da su X i Y nezavisne. Tad se funkcija gustoće moze faktorizitati: $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \boldsymbol{E}(X)\cdot\boldsymbol{E}(Y).\end{aligned}$$

6. Svojstvo karakteristične funkcije

Svojstvo karakteristične funkcije

Teorem 7.3. *Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable, za karakterističnu funkciju zbroja vrijedi*

$$\vartheta_{X+Y}(t) = \vartheta_X(t)\cdot\vartheta_Y(t).$$

7. Disperzija zbroja

Disperzija zbroja

Teorem 7.4. *Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nekorelirane slučajne varijable, tada vrijedi*

$$\boldsymbol{D}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \boldsymbol{D}(X_1) + \boldsymbol{D}(X_2) + \ldots + \boldsymbol{D}(X_n).$$

Dokaz. Lijeva i desna strana se ne mijenjaju ako od varijabli oduzmemo očekivanje, zato možemo pretpostaviti da je $\boldsymbol{E}(X_k) = 0$. Sad imamo

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) &= \boldsymbol{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big)^2 = \boldsymbol{E}\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} X_jX_k\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(X_jX_k) = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(X_k^2) + \sum_{j\neq k}\boldsymbol{E}(X_jX_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(X_k^2) + \sum_{j\neq k}\boldsymbol{E}(X_j)\boldsymbol{E}(X_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{E}(X_k^2) = \sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{D}(X_k). \quad \triangleleft\end{aligned}$$

8. Uvjetne razdiobe. Uvjetna gustoća. Uvjetno očekivanje i vjerojatnost.

Uvjetna gustoća

Neka je $f(x,y)$ gustoća razdiobe slučajnog vektora (X,Y). Ako je poznata realizacija $Y=y$ varijable Y, tada se **uvjetna gustoća** varijable X uz uvjet $Y=y$ definira formulom

$$f_{X|Y=y}(x) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy}. \tag{7.1}$$

Uglavnom pišemo jednostavnije $f(x \mid y)$, umjesto $f_{X|Y=y}(x)$.

Račun s uvjetnim vjerojatnostima omogućava nam lakše računanje vjerojatnosti, gustoća i očekivanja u slučaju kad realizacija događaja ili neke slučajne varijable ovisi o nekoj drugoj slučajnoj varijabli. Tu uvjetne gustoće igraju sličnu ulogu kao i uvjetne vjerojatnosti i hipoteze u formuli potpune vjerojatnosti. Tako dobivamo i analogne formule. Najprije, iz definicijske formule možemo zapisati

$$f(x,y) = f(x \mid y)f_Y(y),$$
$$f(x,y) = f(y \mid x)f_X(x).$$

Marginalne gustoće dobivamo integriranjem lijeve strane ovih jednakosti:

Marginalne i uvjetne gustoće

Marginalne gustoće možemo računati formulama

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x \mid y)f_Y(y)dy,$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y \mid x)f_X(x)dx.$$

Uvjetne gustoće su također efikasno sredstvo u računanju očekivanja, pa i vjerojatnosti događaja (koji ovisi o mogućim realizacijama slučajne varijable:

Uvjetna očekivanja i vjerojatnosti

Očekivanje varijable X koja ovisi o realizacijama varijable Y:

$$\boldsymbol{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(X \mid Y=y)f_Y(y)dy. \tag{7.2}$$

Vjerojatnost događaja koji ovisi o realizacijama slučajne varijable X:

$$\boldsymbol{P}(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{P}(A \mid X=x)f_X(x)dx. \tag{7.3}$$

8. FUNKCIJE SLUČAJNIH VEKTORA

1. Transformacija gustoće pri bijektivnom preslikavanju.

Transformacija gustoća pri bijektivnom preslikavanju

$$g(y_1,\dots,y_n)=f(x_1,\dots,x_n)\cdot\left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right| \tag{8.3}$$

2. Gustoća funkcije slučajnog vektora

Preslikavanje $\psi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ ćemo nadopuniti do preslikavanja iz $\mathbf{R}^2$ u $\mathbf{R}^2$, kako bismo mogli iskoristiti poznate veze između gustoća slučajnih vektora. Najjednostavnije je to učiniti tako da prvu komponentu vektora ostavimo nepromijenjenu. Tako dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} x&=x,\\ z&=\psi(x,y), \end{aligned}$$

Označimo preslikavanje inverzno ovome:

$$\begin{aligned} x&=x,\\ y&=\chi(x,z). \end{aligned}$$

Jakobijan inverznog preslikavanja glasi

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}=\frac{\partial y}{\partial z}.$$

Prema tome, po formuli (8.3), gustoća vektora (X,Z) je

$$g(x,z)=f(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|,$$

Gustoću g_Z slučajne varijable Z možemo dobiti preko marginalne gustoće ovog vektora.

Gustoća funkcije slučajnog vektora

Gustoća slučajne varijable $Z=\psi(X,Y)$ dobiva se formulom

$$g_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right|dx, \tag{8.4}$$

gdje je f gustoća vektora (X,Y).

9. ZAKON VELIKIH BROJEVA I C.G.T.

1. Konvergencija po vjerojatnosti

Konvergencija po vjerojatnosti

Niz (X_n) konvergira **po vjerojatnosti** ka slučajnoj varijabli Y ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = 0. \tag{9.1}$$

Pišemo $X_n \xrightarrow{P} Y$.

2. Nejednakosti Markova i Čebiševa

Nejednakosti Markova i Čebiševa

Teorem 9.1. (**Nejednakost Markova**) *Ako X poprima nenegativne vrijednosti, onda za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*

$$\boldsymbol{P}(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(X)}{\varepsilon}.$$

(L_p **nejednakost**) *Za svaku slučajnu varijablu X s očekivanjem m_X vrijedi*

$$\boldsymbol{P}(|X - m_X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(|X - m_X|^p}{\varepsilon^p}.$$

(**Nejednakost Čebiševa**) *Posebice, za $p = 2$, vrijedi*

$$\boldsymbol{P}(|X - m_X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\boldsymbol{D}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Dokaz. Nejednakost Markova slijedi iz ocjene integrala:

$$\boldsymbol{P}(X \geqslant a) = \int_{x\geqslant a} dF(x) \leqslant \int_{x\geqslant a} \frac{x}{a}\, dF(x) \leqslant \frac{1}{a}\int_0^\infty x\, dF(x) = \frac{1}{a}\boldsymbol{E}(X).$$

Primjenimo tu ocjenu na pozitivnu slučajnu varijablu $|X - m_x|$. Imamo, za svaki $p > 0$:

$$\boldsymbol{P}(|X - m_X| \geqslant \varepsilon) = \boldsymbol{P}(|X - m_X|^p \geqslant \varepsilon^p) \leqslant \frac{\boldsymbol{E}(|X - m_X|^p)}{\varepsilon^p}.$$

Za $p = 2$ dobivamo nejednakost Čebiševa. ◁

3. Slabi zakon velikih brojeva

Slabi zakon velikih brojeva, definicija

Kažemo da niz $X_1, X_2, \ldots$ slučajnih varijabli zadovoljava **slabi zakon velikih brojeva** ako

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k) \longrightarrow 0, \qquad \text{kad } n \to \infty \tag{9.2}$$

po vjerojatnosti, tj. ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - EX_k)\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{9.3}$$

4. Dovoljni uvjeti za slabi zakon velikih brojeva

Dovoljni uvjeti za slabi zakon velikih brojeva

Teorem 9.2. *Ako varijable* $X_1, X_2, \ldots$ *zadovoljavaju uvjet*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k\Big) = 0,$$

tada on zadovoljava zakon velikih brojeva.
Taj će uvjet biti ispunjen ako su na primjer
1) $X_1, X_2, \ldots$ *nekorelirane, s ograničenim varijancama.*
2) $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne s istom varijancom* σ
3) $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne s istom distribucijom i konačnom varijancom.*

5. Konvergencija gotovo sigurno

Konvergencija gotovo sigurno

Niz (X_n) konvergira **gotovo sigurno** ka slučajnoj varijabli Y ako vrijedi

$$P(\lim_{n\to\infty} X_n = Y) = 1.$$

Pišemo $X_n \xrightarrow{g.s.} Y$, ili $X_n \longrightarrow Y$ g.s.

6. Usporedba konvergencija

Usporedba konvergencija

Teorem 9.3. *Ako niz slučajnih varijabli* (X_n) *konvergira gotovo sigurno prema slučajnoj varijabli* Y, *tada on konvergira prema istoj slučajnoj varijabli i po vjerojatnosti.*

7. Jaki zakon velikih brojeva

Jaki zakon velikih brojeva

Teorem 9.4. *Neka su* $X_1, X_2, \ldots$ *nezavisne identički distribuirane slučajne varijable s konačnim očekivanjem* m. *Onda vrijedi*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \longrightarrow m \qquad s.s.$$

8. Konvergencija po distribuciji

Konvergencija po distribuciji

Niz (X_n) konvergira **po distribuciji** ka slučajnoj varijabli X ako za odgovarajući niz funkcija razdiobe vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),$$

u svakoj točki x gdje je F_X neprekinuta. Pišemo $X_n \xrightarrow{\mathscr{D}} X$.

9. Centralni granični teorem

Centralni granični teorem

Teorem 9.7. *Neka je* (X_n) *niz identički distribuiranih nezavisnih slučajnih varijabli s očekivanjem* m *i disperzijom* σ^2. *Onda za normirani zbroj vrijedi*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1).$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $m = 0$. Inače, varijable X_n možemo zamijeniti s centriranim, $X_n - m$ koje imaju istu disperziju.

Sve varijable imaju istu razdiobu, pa im je i karakteristična funkcija jednaka. Neka je ϑ karakteristična funkcija tih varijabli. Zbog nezavisnosti pribrojnika, karakteristična funkcija zbroja jednaka je umnošku karakterističnih funkcija:

$$\vartheta_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \vartheta(t)^n.$$

Označimo $Z_n = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Karakteristična funkcija te varijable jednaka je

$$\vartheta_{Z_n}(t) = \vartheta\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n.$$

Prikažimo funkciju ϑ Taylorovim redom:

$$\vartheta(t) = c_0 + c_2 t + c_2 t^2 + R_2$$

Ostatak R_2 teži u nulu bržne nego t^2. Za svaku karakterističnu funkciju je $c_0 = \vartheta(0) = 1$. Druga dva koeficijenta su

$$c_1 = \vartheta'(0) = i\boldsymbol{E}(X_1) = im = 0,$$

$$c_2 = \frac{1}{2}\vartheta''(0) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{E}(X_1^2) = -\frac{1}{2}\sigma^2.$$

Tako dobivamo:

$$\vartheta_{Z_n}(t) = \left[1 - \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot \frac{t^2}{\sigma^2 \cdot n} + R_2\right]^n = \left[1 - \frac{t^2}{2n} + R_2\right]^n \longrightarrow e^{-t^2/2}. \quad \triangleleft$$

10. Teorem Moivre-Laplace

Teorem Moivre-Laplacea

Teorem 9.8. *Normirana binomna razdioba teži po distribuciji k jediničnoj normalnoj razdiobi:*

$$\frac{\mathscr{B}(n,p) - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \mathscr{N}(0,1)$$

Dokaz. Dovoljno je primjeniti centralni granični teorem na niz (I_k) indikatorskih slučajnih varijabli. Očekivanje ovih varoijabli je p, a disperzija pq. Onda je

$$\sum_{k=1}^{n}(I_k - p) = X - np$$

pri čemu X ima binomnu razdiobu $\mathscr{B}(n,p)$. Tvrdnja sad slijedi iz prethodnog teorema.

10. ,11.,12. CJELINE

1. Valjane statistike

Valjane statistike

Statistiku $\Theta_n = \Theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ nazivamo **valjanom** procjenom parametra ϑ ako za svaki $\varepsilon > 0$ slučajna varijabla Θ_n konvergira prema ϑ *po vjerojatnosti*:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(|\Theta_n - \vartheta| < \varepsilon) \to 1.$$

Teorem 10.1. *Da bi nepristrana statistika bila valjana, dovoljno je da joj disperzija teži u nulu (kad n teži u beskonačnost).*

DOKAZ. Ta tvrdnja slijedi iz Čebiševljeve nejednakosti:

$$\boldsymbol{P}(|\Theta_n - \vartheta| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{\boldsymbol{E}[(\Theta_n - \vartheta)^2]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\boldsymbol{D}(\Theta_n)}{\varepsilon^2} \to 1.$$

2. Kriterij najveće izglednosti

Kriterij najveće izglednosti

Neka je $x_1, x_2, \dots, x_n$ realizacija uzorka populacije X, čija funkcija gustoće $f(\vartheta, x)$ ovisi o nepoznatom parametru ϑ. **Funkcija izglednosti**[1] definira se kao umnožak

$$L(\vartheta, x_1, \dots, x_n) := f(\vartheta, x_1) f(\vartheta, x_2) \cdots f(\vartheta, x_n). \qquad (10.11)$$

Za procjenu parametra ϑ uzimamo onu vrijednost $\hat{\vartheta}$ za koju funkcija izglednosti poprima globalni maksimum.

3. Kvantil

Kvantil

Relan broj x_p za koji vrijedi

$$F(x_p) = p$$

to jest

$$\int_{-\infty}^{x_p} f(t)\mathrm{d}t = p$$

naziva se **kvantil** reda p.

4. Nivo značajnosti

Nivo značajnosti

Za zadani broj p, $0 < p < 1$ koji određuje interval povjerenja, veličina $\alpha = 1 - p$ naziva se **nivo značajnosti** (**signifikantnosti**). Pri tom za jednostrane kvantile vrijedi:

$$x_p = x_{1-\alpha}, \qquad x_{1-p} = x_\alpha,$$

a za dvostrane:

$$x_{\frac{1}{2}(1-p)} = x_{\alpha/2}, \qquad x_{\frac{1}{2}(1+p)} = x_{1-\alpha/2}.$$