

ZAVRŠNI ISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

15.06.2015.

1. (7 bodova)

a) Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ . Izvedite njeno očekivanje $E(X)$.

b) Dokažite da eksponencijalna razdioba nema pamćenja, tj. da vrijedi

$$P(X > x + t \mid X > t) = P(X > x) \quad \text{za sve } x, t > 0.$$

c) Vrijeme ispravnog rada računala je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Vjerojatnost ispravnog rada računala tijekom jedne godine je jednaka 0.64. Kolika je vjerojatnost da će to računalo raditi ispravno tijekom 2 godine ako je poznato da je radilo ispravno prvih 18 mjeseci?

2. (6 bodova)

Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = x + y, \quad \text{za } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$$

Jesu li komponente X i Y nezavisne? Odgovor obrazložite. Izračunajte funkciju gustoće slučajne varijable $Z = XY$.

3. (5 bodova)

Koliko puta moramo baciti kocku da bi vjerojatnost da je aritmetička sredina dobivenih brojeva između 3 i 4 bila najmanje 0.95?

4. (5 bodova)

Iz intervala $[\alpha, 1]$, gdje je α nepoznat odabrano je na sreću n brojeva: x_1, x_2, \dots, x_n . Da bismo procijenili $1 - \alpha$ duljinu tog intervala odaberimo statistiku

$$Z = 1 - \min \{X_1, X_2, \dots, X_n\}.$$

a) Dokažite da statistika Z nije nepristrana.

b) S kojim faktorom treba pomnožiti Z kako bismo dobili nepristranu statistiku?

5. (4 boda)

Iz populacije koja se podvrgava normalnoj razdiobi sa standardnom devijacijom $\sigma = 1$ i nepoznatim očekivanjem izvučen je uzorak volumena $n = 16$. Za koji nivo pouzdanosti p je duljina intervala povjerenja reda p za očekivanje jednaka 0.823?

6. (4 boda)

Rafinerija proizvodi benzin za kojeg se očekuje da ima oktanski broj 98. Uzeto je 10 uzoraka benzina i za vrijednosti oktanskog broja je dobivena srednja vrijednost $\bar{x} = 96.6$ i $\hat{s} = 0.84$. Može li se na temelju ovih podataka uz nivo značajnosti 0.05 tvrditi da rafinerija proizvodi benzin prosječnog oktanskog broja 98? Pretpostavlja se da je oktanski broj distribuiran po normalnoj razdiobi, uz nepoznatu disperziju.

7. (4 boda)

Poljoprivredni institut ispituje utjecaj gnojiva na novi nasad. U tu svrhu, 150 parcela od 400 je ostalo nezagnojeno. Na 77 među njima prinos je bio zadovoljavajući. Preostalih 250 je gnojeno, a zadovoljavajući prinos se dobio na 158 parcela. Uz novo značajnosti 0.05 testirajte hipotezu da gnojenje ne povećava prinos te kulture.

8. (5 bodova)

Anketirano je 208 vozača o broju nesreća u posljednjih godinu dana. Dobiveni su sljedeći rezultati

j -broj nesreća	0	1	2	3	4
n_j -broj vozača	133	52	18	4	1

Pomoću χ^2 testa provjerite uz nivo značajnosti 0.1 da se ovi rezultati ravnaју po Poissonovoj razdiobi.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica. Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ VJEROJATNOSTI I
STATISTIKE 15.06.2015.

1.

$$\text{c)} P\{X > 2 \mid X > 1.5\} = 0.8$$

2.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= x + \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 1] \\ f_Y(y) &= y + \frac{1}{2}, \quad y \in [0, 1], \quad \text{nisu nezavisne} \\ f_Z(z) &= 2 - 2z, \quad z \in [0, 1] \end{aligned}$$

3.

$$n \geq 45$$

4.

$$\text{a)} E(Z) = \frac{n}{n+1}(1-\alpha) \quad \text{b)} s \frac{n+1}{n}$$

5.

$$\alpha = 0.1$$

6.

$$\begin{aligned} &\text{t-test, } H_0 \dots a = 98, H_1 \dots a \neq 98 \\ &\hat{t} = 5.27, \quad t_{n-1, 1-\alpha/2} = 2.262, \quad \text{odbacujemo } H_0 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} &\text{hipoteza o jednakosti proporcija, } H_0 \dots p_1 = p_2, H_1 \dots p_1 < p_2 \\ &\hat{u} = -2.34, \quad -u_{1-\alpha} = -1.645, \quad \text{odbacujemo } H_0 \end{aligned}$$

8.

$$\chi_q^2 = 4.0535, \quad \chi_{2,0.9}^2 = 4.605$$

prihvaćamo hipotezu da se podaci ravnaju po Poissonovoj razdiobi