

MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE  
20.04.2015.

**1. (5 bodova)**

Dokažite da preslikavanje definirano na algebri događaja  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  koje ima svojstva

- i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- ii) ako su  $A$  i  $B$  disjunktni događaji, onda je  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,  
je vjerojatnost, tj. da onda vrijede i sljedeća dva svojstva:
- iii)  $P(\emptyset) = 0$ ,
- iv) ako je  $A \subset B$ , onda vrijedi  $P(A) \leq P(B)$ .

**2. (5 bodova)**

Špil sadrži 52 karte od kojih svaka ima neku od 13 jačina: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, i neku od 4 boje:  $\heartsuit$ ,  $\diamondsuit$ ,  $\clubsuit$ ,  $\spadesuit$ . Na sreću izvačimo 5 karata iz špila. Kolika je vjerojatnost da dobijemo:

- a) FULL HOUSE (tri karte iste jačine i još dvije karte neke druge jačine);
- b) TWO PAIR (dvije karte jedne jačine, još dvije druge jačine, posljednja karta treće jačine, tj. dva različita para koja nisu full house);
- c) ONE PAIR (točno dvije karte jedne jačine, preostale tri različitih jačina);
- d) STRAIGHT (skala od pet karata A,2,3,4,5 ili 2,3,4,5,6 ili 3,4,5,6,7 ili... ili 10, J, Q, K, A koje nisu sve iste boje).

**3. (4 boda)**

U tri kutije nalaze se crne i bijele kuglice. U prvoj kutiji je triput više bijelih kuglica nego crnih. U preostale dvije kutije je triput više crnih kuglica nego bijelih. Izaberemo na sreću jednu kutiju i iz nje izvučemo 5 kuglica, jednu po jednu, s vraćanjem nakon svakog izvlačenja. Ako smo izvukli 3 bijele i 2 crne kuglice, kolika je vjerojatnost da smo izvlačili iz prve kutije?

**4. (7 bodova)**

- a) Definirajte geometrijsku razdiobu i izvedite njeno očekivanje  $E(X)$ .
- b) Dokažite da geometrijska razdioba nema pamćenja, tj. da vrijedi

$$P(X = k + m \mid X > k) = P(X = m) \quad \text{za sve } k, m \in \mathbb{N}.$$

c) Ako je prolaznost na vozačkom ispitu 40% , a  $X$  broj izlazaka kandidata na ispit, izračunajte vjerojatnost da će kandidat imati veći broj izlazaka na vozački ispit od očekivanog, odnosno  $P(X > E(X))$ .

**5. (5 bodova)**

Enterprise je ispalio 1000 projektila na neprijateljski svemirski brod. Vjerojatnost pogotka za svaki projektil je 0.005. Ako je brod pogođen projektilom, vjerojatnost da će biti neutraliziran je 0.05. Aproximirajući Poissonovom razdiobom izračunajte vjerojatnost da će neprijateljski svemirski brod biti neutraliziran.

**6. (5 bodova)**

Baca se kocka. Slučajna varijabla  $X$  poprimi vrijednost 1 ako je okrenuti broj paran, a vrijednost  $-1$  ako je okrenuti broj neparan, dok slučajna varijabla  $Y$  poprimi vrijednost broja na kocki. Odredite razdiobu slučajnog vektora  $(X, Y)$  i kovarijacijski moment  $cov(X, Y)$ . Izračunajte očekivanje  $E(Z)$  i disperziju  $D(Z)$  slučajne varijable  $Z = X + Y$ .

**7. (6 bodova)**

a) Obrazložite zašto funkcija razdiobe slučajne varijable ne može biti veća od jedinice.

b) Obrazložite zašto disperzija slučajne varijable ne može biti negativna.

c) Biramo na sreću točku unutar pravokutnika  $ABCD$  stranica duljina 1 i 2. Vrijednost slučajne varijable  $X$  je udaljenost te točke do najbliže stranice pravokutnika. Odredite očekivanje  $E(X)$ .

**8. (3 boda)**

Odredite funkciju gustoće slučajne varijable  $Y = 1/X$ , ako slučajna varijabla  $X$  ima funkciju gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora.**

**Ispit se piše 120 minuta.**

RJEŠENJA MEĐUISPITA IZ VISa  
20.04.2015.

1. **iii)** Korištenjem svojstva **ii)** za  $A = \Omega$  i  $B = \emptyset$  i potom svojstva **i)**.

**iv)** Neka je  $A \subset B$ . Korištenjem svojstva **ii)** imamo

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A),$$

pa zbog  $P(B \setminus A) \geq 0$  slijedi  $P(A) \leq P(B)$

2.

$$\text{a)} \frac{13 \binom{4}{3} 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{b)} \frac{\binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} 11 \cdot 4}{\binom{52}{5}}, \quad \text{c)} \frac{\binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{12}{3} 4^3}{\binom{52}{5}}, \quad \text{d)} \frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}}$$

3.

$$P(H_1 | A) = \frac{\frac{1}{3} \binom{5}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{3} \binom{5}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} \binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

4.

$$\text{c)} P(X > 2.5) = 0.36$$

5.

$$P(A) = 0.22$$

6.

$$\text{cov}(X, Y) = 0.5, \quad E(X + Y) = 3.5, \quad D(X + Y) = 4.42$$

7. **a)**  $F(x) = P(X < x) \leq 1$

**b)**  $D(X) = E[(X - E(X))^2]$ , slučajna varijabla  $(X - E(X))^2$  poprima nenegativne vrijednosti, pa njeno očekivanje ne može biti negativno.

$$\text{c)} F(x) = -2x^2 + 3x, \quad x \in [0, 1/2], \quad E(X) = \frac{5}{24}$$

8.

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

## MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

22.04.2014.

### 1. (6 bodova)

Istovremeno bacamo 4 kocke. Odredite vjerojatnost da smo na kockama dobili:

- a) različite brojeve,
- b) točno dvije šestice,
- c) barem dvije šestice,
- d) točno 3 broja strogo manja od 5,
- e) dva (različita) para jednakih brojeva.

### 2. (3 boda)

Ako je  $P(B) \in \langle 0, 1 \rangle$  i  $P(A | B) = P(A | \overline{B})$ , dokažite da su  $A$  i  $B$  nezavisni događaji.

### 3. (4 boda)

Student odgovara na pitanje na koje su ponudena 4 odgovora (tri netočna i jedan točan). Vjerojatnost da student zna odgovor na pitanje je 0.8, a vjerojatnost da ne zna, odnosno da pogađa odgovor na sreću je 0.2. Kolika je vjerojatnost da student odgovori točno na dano pitanje? Ako je student odgovorio točno na dano pitanje, kolika je vjerojatnost da odgovor nije pogodio na sreću?

### 4. (4 boda)

Iz kutije u kojoj se nalaze 3 bijele i 4 crvene kuglice izvlačimo 3 kuglice. Slučajnu varijablu  $X$  definiramo kao broj izvučenih bijelih kuglica. Izračunajte zakon razdiobe za  $X$  i očekivanje  $E(X)$ .

### 5. (5 bodova)

Može li za neku vrijednost argumenta

- a) funkcija razdiobe
- b) gustoća razdiobe

biti veća od jedinice? Ako je vaš odgovor DA navedite primjer funkcije.

c) Biramo na sreću točku unutar kvadrata  $ABCD$  stranice duljine 1. Vrijednost slučajne varijable  $X$  je udaljenost te točke do dijagonale  $\overline{AC}$ . Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable  $X$ .

**6. (7 bodova)**

a) Neka je  $X$  neprekinuta slučajna varijabla s funkcijom gustoće  $f$ , a  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strogo monotona funkcija, te neka je  $Y = \varphi(X)$ . Izvedite formulu za funkciju gustoće  $g$  slučajne varijable  $Y$

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \text{ gdje je } x = \varphi^{-1}(y).$$

b) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable  $Y = |X - 1|$ , ako slučajna varijabla  $X$  ima funkciju gustoće  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ .

**7. (6 bodova)**

Vrijeme ispravnog rada računala je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Vjerojatnost ispravnog rada računala tijekom jedne godine je jednaka 0.9.

a) Kolika je vjerojatnost da će to računalo raditi ispravno tijekom 2 godine?

b) Kolika je vjerojatnost da će od 15 takvih računala u računarskom praktikumu njih barem 13 raditi ispravno tijekom 2 godine?

**8. (5 bodova)**

Vrijeme koje student provede na putu od kuće do fakulteta je slučajna varijabla s normalnom razdiobom  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$  s očekivanjem  $a = 50$  minuta. Student ima predavanje u 08:15 i kreće iz kuće u 07:20. Ako je vjerojatnost da će stići na fakultet u vremenskom intervalu od 08:05 do 08:15 jednaka 0.383, kolika je vjerojatnost da će kasniti na predavanje više od 5 min?

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora i tablica jedinične normalne razdiobe.**

**Ispit se piše 120 minuta.**

RJEŠENJA MEĐUISPITA IZ VISa  
22.04.2014.

1.

$$\text{a)} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}, \quad \text{b)} \frac{\binom{4}{2} 5^2}{6^4}, \quad \text{c)} 1 - \frac{5^4 + 4 \cdot 5^3}{6^4}, \quad \text{d)} \frac{\binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 4^3}{6^4} \quad \text{e)} \frac{\binom{6}{2} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{6^4}$$

2.

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\overline{AB})}{P(\overline{B})} \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

3.

$$\text{a)} P(A) = 0.85, \quad \text{b)} P(H_1 | A) = 0.941$$

4.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{35} & \frac{18}{35} & \frac{12}{15} & \frac{1}{35} \end{pmatrix} \quad E(X) = \frac{9}{7}$$

5.

a) Ne

$$\text{b)} \text{ Da, } f(x) = 2, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{c)} F(x) = 1 - \frac{(1 - \sqrt{2}x)^2}{1^2} = 2\sqrt{2}x - 2x^2, \quad x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

6.

$$\text{b)} g(y) = \begin{cases} 2e^{-1}ch(y), & y \in [0, 1] \\ e^{-y-1}, & y \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

7.

$$\text{a)} P(X > 1) = e^{-\lambda} = 0.9, \quad P(X > 2) = e^{-2\lambda} = 0.81$$

$$\text{b)} Y \sim \mathcal{B}(15, 0.81), \quad P(Y \geq 13) = 0.436$$

8.

$$P(45 < X < 55) = 0.383 \Rightarrow \sigma = 10, \quad P(X > 60) = 0.159$$

PRVI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE  
22.04.2013.

**1. (7 bodova)**

Iz snopa od 52 karte izabire se na sreću 5 karata. Odredite vjerojatnost da izvučemo:

- a) bar jednog asa,
- b) 5 karata različitih jačina,
- c) 5 karata iste boje,
- d) 5 karata među kojima nisu zastupljene sve boje.

**2. (5 bodova)**

- a) Ako su  $A$  i  $B$  nezavisni događaji, dokažite da su onda i  $\bar{A}$  i  $\bar{B}$  nezavisni.
- b) Mogu li disjunktne događaji  $A$  i  $B$  biti nezavisni? Odgovor obrazložite.

**3. (5 bodova)**

U kutiji su 4 kocke, dvije ispravne i dvije lažne na kojima su svi brojevi šestice. Nasumično smo izvukli 2 kocke i bacili ih. Kolika je vjerojatnost da su pale dvije šestice? Ako su pale dvije šestice, kolika je vjerojatnost da smo izvukli iz kutije obje lažne kocke?

**4. (6 bodova)**

Iz kutije u kojoj se nalaze 1 bijela i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu  $X$  definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za  $X$  i očekivanje  $E(X)$  u svakom od sljedeća dva načina izvlačenja:

- a) nakon izvlačenja kuglica se ne vraća u bubanj,
- b) nakon izvlačenja kuglica se vraća u bubanj.

**5. (4 boda)**

Na neku benzinsku postaju stiže u prosjeku 40 automobila na sat. Ako ta postaja ima samo jednu pumpu i automobil treba 1 minutu za punjenje goriva kolika je vjerojatnost da će se pojaviti red pred pumpom? (U ovom slučaju red se pojavi ako u tijeku bilo koje minute na postaju pristignu barem 2 automobila). Kolika je vjerojatnost da će se pojaviti red ako bi ta postaja imala dvije pumpe?

**6. (4 boda)**

Unutar jednakostraničnog trokuta  $\triangle ABC$  stranice duljine 1 bira se na sreću točka. Neka je slučajna varijabla  $X$  udaljenost od visine  $\overline{AD}$ ,  $D$  je

polovište stranice  $\overline{BC}$ . Odredite funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable  $X$ .

**7. (5 bodova)**

Odredite gustoću slučajne varijable  $Y = \frac{1}{(X-1)^2}$ , ako slučajna varijabla  $X$  ima gustoću razdiobe  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ .

**8. (4 boda)**

Visina čovjeka je slučajna varijabla s normalnom razdiobom  $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$  s očekivanjem  $a = 174$  cm. Ako 68.269% ljudi ima visinu između 165 i 183 cm, izračunajte vjerojatnost da je čovjek viši od 170 cm.

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora i tablica jedinične normalne razdiobe.**

**Ispit se piše 120 minuta.**



RJEŠENJA 1. MEĐUISPITA IZ VISA  
22.04.2013.

1.

$$\text{a)} \quad 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{b)} \quad \frac{\binom{13}{5}4^5}{\binom{52}{5}}, \quad \text{c)} \quad \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{d)} \quad 1 - \frac{4\binom{13}{2}13^3}{\binom{52}{5}}$$

2. a) "Diskretna vjerojatnost" str. 68.

b) Ako disjunktne događaji imaju pozitivnu vjerojatnost ne mogu biti nezavisni, jer je  $P(AB) = P(\emptyset) = 0$  i  $P(A) \cdot P(B) \neq 0$ .

3.

$$\text{a)} \quad P(A) = \frac{61}{216}, \quad \text{b)} \quad P(H_2|A) = \frac{36}{61}$$

4.

$$\text{a)} \quad X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad E(X) = 3$$

$$\text{b)} \quad X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right), \quad E(X) = 5$$

5.

$$\text{a)} \quad X \sim \mathcal{P}\left(\frac{2}{3}\right), \quad P(X \geq 2) = 1 - \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{b)} \quad X \sim \mathcal{P}\left(\frac{2}{3}\right), \quad P(X \geq 3) = 1 - \frac{17}{9}e^{-\frac{2}{3}}$$

6.

$$F(x) = 1 - \frac{(1-2x)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = 4x - 4x^2, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(x) = 4 - 8x, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad E(X) = \frac{1}{6}$$

7.

$$g(y) = \begin{cases} \left(2ey^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{\sqrt{y}}}, & y \in \langle 0, 1 \rangle \\ \left(2ey^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{y}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{y}}}\right), & y \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

8.

$$\sigma = 9, \quad P(X > 170) = 0.67148$$

PRVI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE  
16.04.2012.

**1. (4 boda)**

Neka je  $\Omega$  skup svih elementarnih događaja,  $\mathcal{F}$  algebra događaja na  $\Omega$ .

a) Definirajte vjerojatnost  $P$  na algebri događaja  $\mathcal{F}$ .

b) Dokažite da za vjerojatnost komplementa događaja vrijedi

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

**2. (5 bodova)**

Između 7 bračnih parova izabire se 5 osoba slučajnim izborom. Kolika je vjerojatnost da

a) su svih 5 osoba istog spola?

b) među tih 5 osoba nije niti jedan bračni par?

**3. (5 bodova)**

Kod testiranja na određenu bolest u nekoj populaciji ako ispitanik ima bolest test će biti pozitivan u 90% slučajeva. Ako ispitanik nema bolest test će neispravno biti pozitivan u 5% slučajeva. U prosjeku 2% populacije ima tu bolest. Kolika je vjerojatnost da će slučajno odabranoj osobi iz populacije test biti pozitivan? Ako je test bio pozitivan kolika je vjerojatnost da ova osoba ima bolest?

**4. (5 bodova)**

U kutiji se nalaze kuglice označene brojevima  $1, 2, 3, \dots, 10$ . Iz kutije na sreću izvlačimo 4 kuglice (bez vraćanja). Slučajnu varijablu  $X$  definiramo kao drugi najveći izvučeni broj. Nađite zakon razdiobe i izračunajte očekivanje  $E(X)$ .

**5. (6 bodova)**

a) Definirajte Poissonovu razdiobu, izvedite njeno očekivanje  $E(X)$ .

b) Stroj proizvodi 99% ispravnih i 1% neispravnih proizvoda. Aproximirajući Poissonovom razdiobom izračunajte vjerojatnost da u uzorku od 300 proizvoda budu barem 4 neispravna?

**6. (5 bodova)**

Biramo na sreću dva broja prvi na intervalu  $[0, 2]$ , a drugi na intervalu  $[0, 1]$ . Slučajnu varijablu  $Z$  definiramo kao apsolutnu vrijednost razlike ta dva broja. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable  $Z$  i očekivanje  $E(Z)$ .

**7. (5 bodova)**

Odredite gustoću slučajne varijable  $Y = X^2$ , ako slučajna varijabla  $X$  ima jednoliku razdiobu na intervalu  $[-2, 1]$ .

**8. (5 bodova)**

Vrijeme ispravnog rada nekog automobila je slučajna varijabla  $X$  s eksponencijalnom razdiobom i očekivanjem 3 godine. Kolika je vjerojatnost da se taj automobil neće pokvariti tijekom prve tri godine, ako je poznato da tijekom prve dvije nije bio u kvaru.

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 120 minuta.**

RJEŠENJA 1. MEĐUISPITA IZ VISA  
16.04.2012.

1. N.Elezović: "Diskretna vjerojatnost", str. 9 i 10.

2.

$$\text{a) } \frac{2 \binom{7}{5}}{\binom{14}{5}} \qquad \text{b) } \frac{\binom{7}{5} 2^4}{\binom{14}{5}}$$

3.  $P(A) = 0.067$ ,  $P(A | H_1) = 0.269$

4.

$$X \sim \left( \begin{array}{ccccccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \frac{7}{210} & \frac{18}{210} & \frac{30}{210} & \frac{40}{210} & \frac{45}{210} & \frac{42}{210} & \frac{28}{210} \end{array} \right) \quad E(X) = 6.6$$

5. b)  $P(X \geq 4) = 1 - 13e^{-3}$ .

6.  $f(z) = 1 - z/2$ ,  $z \in [0, 2]$ ,  $E(Z) = 2/3$

7.

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}y^{-\frac{1}{2}}, & y \in \langle 0, 1 \rangle \\ \frac{1}{6}y^{-\frac{1}{2}}, & y \in \langle 1, 4 \rangle \end{cases}$$

8.  $P(X > 3 | X > 2) = e^{-1/3}$