

VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

5. Nепреkinute slučajne varijable

FER, Zagreb

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Slučajne varijable Cjelina 5 – Neprekinute slučajne varijable

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

1. Formule.....	3
2. Zadaci.....	4
3. Rješeni zadaci.....	9
4. Službena rješenja.....	24
5. Literatura.....	27

NAPOMENA

Zadaci KOJI SU potrebni rješavati su od 1-35, te zadaci 64-83, ostali zadaci su teoretskog tipa i nisu potrebni.

Zadaci koji nedostaju: 7,17, 24, 25, 28, 29, 30, 33,34,35, 73,74,79,80

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka, dok su velika većina zadataka od 1-22 preuzeta od -v+v sa fer2.net materijala !

FORMULE:

5. NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE

Funkcija razdiobe slučajne varijable X : $F(X) := P(\{X < x\})$

Svojstva funkcije razdiobe: $P(\{x_1 \leq X < x_2\}) = F(x_2) - F(x_1)$

Neprekinuta slučajna varijabla ako postoji nenegativna funkcija takva da vrijedi: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

Gustoća razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

JEDNOLIKA RAZDIOBA

Biramo *na sreću* broj unutar intervala $[a, b]$ s jednakim vjerojatnostima. Slučajna varijabla bi opisivala pokus *biranja na sreću* elementa iz intervala.

Oznaka: $\mathcal{U}(a, b)$

Vjerojatnost: $P(X = x_k) = \frac{1}{n}$

Funkcija razdiobe: $F(x) = \frac{x-a}{b-a}$, $a \leq x \leq b$

Gustoća razdiobe: $f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leq x \leq b$

Karakteristična funkcija: $\vartheta(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$

Očekivanje: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{a+b}{2}$

Disperzija: $D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$

Nezavisnost: $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in A)$

Svojstva očekivanja i disperzije: $E(sX + tY) = sE(X) + tE(Y)$; $D(sX) = s^2D(X)$

Transformacija funkcije gustoće: $Y = \Psi(X)$, ako je funkcija Ψ rastuća ili padajuća, vrijedi:

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|, \quad y = \Psi(x)$$

tj.

$$g(y) = f(\Psi^{-1}(y)) \left| \frac{d\Psi^{-1}(y)}{dy} \right|$$

§5. Zadaci za vježbu

- Može li za neku vrijednost argumenta biti
 - funkcija razdiobe veća od jedinice,
 - gustoća razdiobe veća od jedinice,
 - funkcija razdiobe negativna,
 - gustoća razdiobe negativna,
 - funkcija razdiobe prekidna,
 - gustoća razdiobe prekidna?
- Koje od ovih funkcija su funkcije razdiobe:
 - $\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \arctan x$;
 - $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$;
 - $\frac{x}{1+x}$, $x > 0$;
 - $2^{-e^{-x}}$;
 - $1 - e^{-x}$, $x > 1$?
- Pokaži da su funkcije
 - $1 - |1 - x|$, $0 < x < 2$;
 - $|x|$, $-1 < x < 1$;
 - $\frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, $x \in \mathbf{R}$;
 - $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$, $x \in \mathbf{R}$
 gustoće neke razdiobe.
- Odredi konstantu C tako da sljedeće funkcije budu gustoće razdioba:
 - $f(x) = C$, $x \in [a, b]$;
 - $f(x) = C|x - a|$, $x \in [c, d]$.
- Odredi konstantu C tako da sljedeće funkcije budu gustoće razdioba
 - $f(x) = Cx^3 e^{-\lambda x}$, $x > 0$;
 - $f(x) = C e^{\alpha(x-a)^2}$, $x > 0$.
- Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe $f(x) = \frac{C}{x^2}$, $x > 1$. Odredi konstantu C te vjerojatnost događaja $\{1 < X < 2\}$.
- Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

$$f(x) = Cx^2 e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Odredi konstantu C te vjerojatnost događaja $\{0 < X < \frac{1}{a}\}$.

- Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable X ako je njezina gustoća razdiobe
 - $\sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$;
 - $x - \frac{1}{2}$, $1 < x < 2$;
 - $3 \sin 3x$, $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

- Diskretna slučajna varijabla X zadana je razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Odredi funkciju razdiobe i nacrtaj njezin graf. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{|X| \leq 1\}$.

- Gustoća razdiobe slučajne varijable X iznosi

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Izračunaj vjerojatnost da od tri realizacije varijable X , točno dvije padnu unutar intervala $(0, \frac{\pi}{4})$.

- Ako za slučajne varijable X i Y vrijedi $P(X < 1) = 0.9$, $P(Y < 2) = 0.5$, pokaži da je $P(X + Y < 3) \geq 0.4$.

- Za slučajnu varijablu X je $P(0 < X < 1) = 0.3$, a za varijablu Y je $P(-1 < Y < 0) = 0.9$. Dokaži da je $P(-1 < X + Y < 1) \geq 0.2$.

* * *

- Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće

- $f(x) = Cx$, $0 < x < 1$;
- $f(x) = Cx$, $0 < x < 2$;
- $f(x) = C(x^2 + 2x)$, $0 < x < 1$;
- $f(x) = C e^{-|x|}$, $x \in \mathbf{R}$.

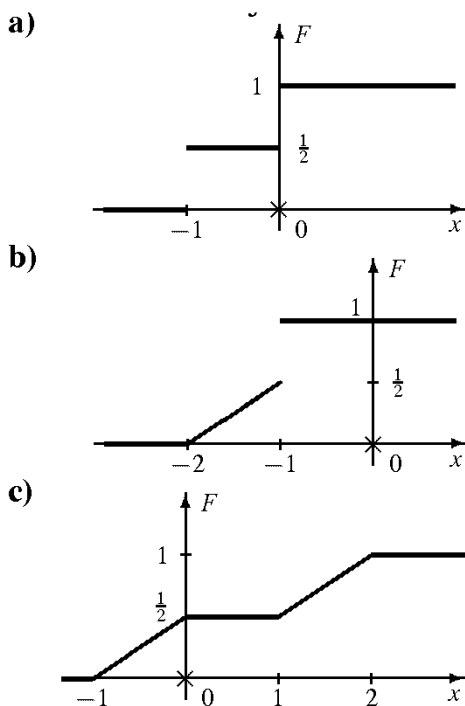
Odredi konstantu C . Izračunaj $E(X)$ i $D(X)$.

- Slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe

- $F(x) = \frac{1}{4}x$, $0 < x < 4$;
- $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

Odredi očekivanje od X .

- Funkcija razdiobe slučajne varijable X zadana je slikom. Odredi očekivanje od X .



16. Slučajna varijabla ima jednoliku razdiobu na intervalu $[a, b]$. Odredi tu razdiobu ako je poznato $E(X) = 4$ i $D(X) = 3$.

17. Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n e^{-x}, \quad x > 0.$$

Odredi očekivanje i disperziju od X .

18. Točka pada na sreću unutar kruga polumjera R . Udaljenost te točke do središta kruga je vrijednost slučajne varijable X . Odredi njezinu funkciju razdiobe, očekivanje i disperziju.

19. Zadan je trokut s osnovicom a i visinom v na osnovicu. Točka se bira na sreću unutar trokuta. Za vrijednost slučajne varijable X uzimamo udaljenost točke do osnovice. Izračunaj očekivanje varijable X .

20. U prostoru su zadane dvije koncentrične kugle s polumjerima r i R ($r < R$). Na sreću odabiremo točku unutar manje kugle. Neka je X udaljenost te točke do površine veće kugle. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe varijable X , te izračunaj očekivanje slučajne varijable X .

21. Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su 3 cm i 4 cm. Biramo na sreću točku T unutar pravokutnika. Slučajna varijabla X je udaljenost točke T do najbliže stranice pravokutnika. Izračunaj matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne varijable X .

22. Točka T na sreću se bira unutar jednakostraničnog trokuta stranice a . Ako je X udaljenost točke T do najbliže stranice trokuta, izračunaj očekivanu vrijednost te udaljenosti.

23. Točka T bira se na sreću unutar pravilnog šesterokuta stranice a . Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost točke T do najbliže stranice šesterokuta. Skiciraj funkciju gustoće i izračunaj očekivanje varijable X .

24. Unutar kvadrata $\{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ izabrana je na sreću točka i potom opisan krug maksimalne površine sa središtem u toj točki, a koji leži unutar kvadrata. Odredi funkciju razdiobe površine tog kruga i izračunaj vjerojatnost da je ona veća od $\frac{\pi}{16}$.

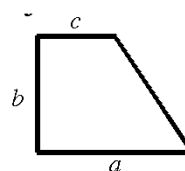
25. U kocki duljine brida 1 bira se na sreću točka S . Neka je X volumen najveće kugle koja se može upisati u kocku, a središte joj je točka S . Odredi i skiciraj funkciju distribucije F_X te izračunaj očekivanje $E(X)$.

26. U jednakostraničnom trokutu sa stranicom duljine a , na sreću se odabire točka. Vrijednost slučajne varijable X je površina najvećeg kruga upisanog u trokut, sa središtem u odabranoj točki. Nađi i skiciraj gustoću vjerojatnosti slučajne varijable X .

27. Na kružnici polumjera R izabrane su dvije točke A i B i zatim spojene sa središtem kružnice S . Izračunaj matematičko očekivanje površine trokuta ABS . Kolika je vjerojatnost da je ta površina veća od $R^2/4$?

28. Unutar jednakokračnog trapeza, čija veća baza ima duljinu 2 a krakovi i kraća baza duljinu 1, odabire se na sreću točka i opisuje krug čije je središte u odabranoj točki, a dodiruje najbližu stranicu trapeza. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe vjerojatnosti $F_X(x)$ duljine polumjera tako konstruiranog kruga.

29. Zadan je trapez prema slici. Točka se bira na sreću unutar trapeza. Za vrijednost slučajne varijable X uzimamo udaljenost točke do veće osnovice. Odredi i skiciraj funkciju gustoće te izračunaj $E(X)$. Provjeri rezultat ako je $a = c$ ili $c = 0$.



30. Duljine stranica pravokutnika $ABCD$ su 3 cm i 4 cm. Biramo na sreću točku T unutar pravokutnika. Neka je X slučajna varijabla: udaljenost točke T do dijagonale \overline{AC} . Nađi i skiciraj funkciju razdiobe varijable X .

31. Unutar kvadrata sa stranicom $a = 4$ cm bira se na sreću točka. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost te točke do bliže dijagonale kvadrata. Nađi očekivanu vrijednost te udaljenosti.

32. Unutar kvadrata $ABCD$ stranice duljine a , bira se na sreću točka. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost točke do pravca koji prolazi polovištima E , F stranica \overline{AB} odnosno \overline{AD} . Odredi i skiciraj gustoću vjerojatnosti slučajne varijable X .

33. Unutar kocke $ABCDEF$ brida duljine a bira se na sreću točka T . Slučajna varijabla X je udaljenost te točke do brida \overline{AB} . Nađi $E(X)$.

34. Točka T odabire se na sreću unutar jednako-kračnog trokuta kome je duljina osnovice 6, a duljina krakova 5. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost točke T do visine spuštene na osnovicu trokuta. Skiciraj gustoću vjerojatnosti varijable X i izračunaj njezino očekivanje $E(X)$.

* * *

35. Unutar intervala $[0, 1]$ na sreću su izabrane dvije točke. Neka je X udaljenost među njima. Odredi zakon razdiobe varijable X te izračunaj $E(X)$, $D(X)$, $E(X^n)$.

36. Biramo na sreću tri broja unutar intervala $[a, b]$. Neka je X drugi po veličini među njima. Odredi i skiciraj funkciju gustoće varijable X .

37. n točaka izabrano je na sreću unutar intervala $[0, 1]$. Neka X_k označava vrijednost koju poprima k -ta točka slijeva. Odredi gustoću slučajne varijable X_k .

38. Unutar intervala $(0, 1)$ biraju se na sreću tri broja, a , b i c . Neka je X najveći među njima. Odredi i skiciraj funkciju gustoće od X te izračunaj očekivanje $E(X)$.

39. Na sreću odabrana točka unutar intervala $[0, 1]$ dijeli ga na dva dijela. Označimo sa X duljinu većeg dijela. Odredi funkciju razdiobe i očekivanje varijable X .

40. Na odresku $[0, T]$ na sreću je odabrano n točaka. Te točke ga dijele na $n+1$ dio. Duljina svakog dijela je slučajna varijabla. Pokaži da sve te slučajne varijable imaju iste funkciju razdiobe. Odredi tu funkciju.

41. Na sreću odabrana točka T unutar dužine \overline{AB} duljine l dijeli tu dužinu na dva dijela. Neka je $X = ||AT| - |TB||$. Odredi i skiciraj funkciju gustoće varijable X te izračunaj $E(X)$ i $D(X)$.

* * *

42. Točke A , B biraju se na sreću na dvije susjedne stranice kvadrata sa stranicom 1. Neka je slučajna varijabla X udaljenost među njima. Odredi i skiciraj funkciju gustoće od X .

43. Točka T_1 slučajno se odabire na dijagonali \overline{AC} , a točka T_2 na dijagonali \overline{BD} kvadrata $ABCD$ stranice 2. Vrijednost slučajne varijable X jednaka je udaljenosti točaka T_1 i T_2 . Nađi gustoću vjerojatnosti od X i skicirajte njezin graf.

44. Kroz središte S kvadrata $ABCD$ stranice a povlačimo na sreću pravac. Ako su sjecišta pravca sa rubom kvadrata točke T_1 i T_2 , nađi očekivanu vrijednost duljine odsjeka $\overline{T_1T_2}$.

45. U pravokutniku sa stranicama 3 i 4 na sreću odabiremo po jednu točku na dvije nasuprotne kraće stranice. Udaljenost među odabranim točkama je slučajna varijabla X . Nađi i skiciraj pripadnu gustoću razdiobe F_X .

46. Točka T na sreću se bira na obodu pravokutnika $ABCD$ sa stranicama 3 i 4. Slučajna varijabla X je udaljenost točke do vrha A . Odredi i skiciraj funkciju razdiobe $F_X(x)$.

47. Točka T bira se na sreću na osnovici \overline{AB} jednakostraničnog trokuta ABC stranice 2 cm. Slučajna varijabla X predstavlja kvadrat udaljenosti točke T do vrha C . Odredi razdiobu i očekivanje od X .

48. Točka T na sreću se bira na obodu kvadrata $ABCD$ stranice a . Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost točke T do polovišta stranice \overline{AB} . Odredi i skiciraj funkciju razdiobe $F_X(x)$ varijable X .

49. Točka se bira na sreću unutar kvadrata stranice 2. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost do najbližeg vrha kvadrata. Odredi i skiciraj funkciju gustoće varijable X .

50. U jednakokračnom trokutu ABC duljina krakova \overline{AC} i \overline{BC} je 20 cm, a kut među tim krakovima $\gamma = 120^\circ$. Točka T odabire se na sreću unutar trokuta. Ako je slučajna varijabla X definirana kao udaljenost točke T do vrha C , odredi i skiciraj pripadnu funkciju razdiobe F_X .

* * *

51. Unutar kvadrata stranice a bira se na sreću točka T . Neka su $X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq X_4$ udaljenosti točke T do stranica kvadrata. Odredi funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X_2 .

52. Točka se bira na sreću unutar jednakostraničnog trokuta stranice a . Neka je X najveća od udaljenosti točke do stranica trokuta. Odredi gustoću i očekivanje varijable X .

53. Zadana je kružnica k polumjera R i točka A udaljena od središta kružnice za d , $d > R$. Na kružnici biramo na sreću točku T . Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost od T do A . Nađi gustoću f_X varijable X .

54. Kružnica k podijeljena je promjerom na dvije polukružnice. Točku T_1 biramo na sreću na jednoj, a točku T_2 na drugoj polukružnici. Udaljenost točaka T_1 i T_2 je slučajna varijabla X . Odredi i skiciraj pripadnu funkciju razdiobe F_X .

55. Točka T slučajno se odabire na četvrtini luka AB kružnice polumjera R , sa središtem u točki S . Neka je X manja od udaljenosti točke T do dužina \overline{AS} odnosno \overline{BS} . Odredi i skiciraj funkciju gustoće slučajne varijable X i izračunaj njezino očekivanje.

56. U trapezu $ABCD$ čiji krakovi iznose d a osnove $2d$ i $3d$, bira se na sreću točka T . Vrijednost slučajne varijable X je manja od udaljenosti točke T do produženih krakova trapeza. Odredi i skiciraj gustoću od X .

57. Neka je F funkcija razdiobe neprekidne slučajne varijable X . Pokaži da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dF(x) = \frac{1}{2}.$$

58. Neka je X proizvoljna ograničena slučajna varijabla, s vrijednostima unutar intervala $[a, b]$. Dokaži

a) $a \leq E(X) \leq b$;

b) $D(X) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$;

c) Veličina $E(X-m)^2$ poprima minimum za $m = E(X)$.

59. Koji uvjet moraju zadovoljavati nezavisne slučajne varijable X i Y da bi bilo

$$D(XY) = D(X)D(Y)?$$

60. Neka je X diskretna slučajna varijabla, koja poprima samo pozitivne vrijednosti i ima konačno očekivanje $E(X)$. Pokaži da za svaki $a \in \mathbf{R}^+$ vrijedi

$$P\{X > a\} < \frac{E(X)}{a}.$$

61. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju očekivanja $E(X) = a$, $E(Y) = b$. Dokaži da za disperziju slučajne varijable XY vrijedi

$$D(XY) = D(X)D(Y) + a^2 D(Y) + b^2 D(X).$$

62. Slučajna varijabla X ima gustoću f koja je parna, po dijelovima neprekidna funkcija na intervalu $[-\pi, \pi]$, jednaka nuli van tog intervala. Dokaži da je

$$D(X) = \frac{\pi^3}{3} + 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n^2},$$

gdje su a_n koeficijenti Fourierovog reda funkcije f .

63. Nenegativna slučajna varijabla X ima funkciju razdiobe $F(x)$. Dokaži da za svaki realni $\alpha \neq 0$ vrijedi

$$E(X^\alpha) = |\alpha| \int_0^\infty x^{\alpha-1} (1 - F(x)) dx.$$

64. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 2]$. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe varijable a) $Y = X^2$; b) $Y = |X - 1|$.

65. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 4\pi]$. Odredi funkciju razdiobe i gustoću razdiobe slučajne varijable $Y = \sin X$.

66. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-2, 2]$. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe F_Y slučajne varijable

$$Y = \min\{X^2, -X + 2\}.$$

67. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 5]$. Odredi i skiciraj gustoću razdiobe slučajne varijable $Y = |X - 1|$. Izračunaj $E(Y)$.

68. Slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[-1, 1]$. Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = 1/X^2$. Postoji li očekivanje $E(Y)$?

69. Slučajna varijabla X poprima samo pozitivne vrijednosti. Neka je f_X njezina funkcija gustoće. Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable

a) $Y = X^3$;

b) $Y = 1/X$;

c) $Y = \sqrt{X}$;

d) $Y = e^X$;

e) $y = e^{-X}$;

f) $Y = \ln X$.

70. Slučajna varijabla X ima gustoću f_X . Odredi gustoće slučajnih varijabli

a) $Y = \arctg X$;

b) $Y = \tg X$;

c) $Y = |X|$;

d) $Y = X^2$;

e) $Y = \frac{1}{X^2}$;

f) $Y = \frac{1}{1 + X^2}$;

g) $Y = \sqrt{R^2 - X^2}$;

h) $Y = e^{-X^2}$;

i) $Y = a \sin \omega X$, ($a, \omega > 0$).

71. Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X . Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = e^X$.

72. Slučajna varijabla X ima gustoću $f(x)$. Odredi gustoću slučajne varijable $Y = |1 + X|$.

73. Slučajna varijabla X ima gustoću razdiobe f . Odredi gustoću slučajne varijable $Y = \min\{X, X^2\}$.

74. Neka je F funkcija razdiobe slučajne varijable X . Nađi funkciju razdiobe slučajnih varijabli
a) $aX + b$, b) X^2 , c) $|X|$, d) $\sin X$, e) $g(X)$, g proizvoljna rastuća funkcija.

* * *

75. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-2x}, \quad x > 0.$$

Napiši funkciju razdiobe varijable $Y = X^2$.

76. Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe

$$f(x) = C|\sin x|, \quad |x| \leq \pi.$$

Izračunaj funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^2$ i očekivanje $E(Y)$.

77. Slučajna varijabla X ima gustoću

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Odredi gustoću razdiobe i očekivanje slučajne varijable $Y = |X - 1|$.

78. Slučajna varijabla X zadana je gustoćom

$$f(x) = C e^{-2x}, \quad x \geq 1.$$

Odredi konstantu C . Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Y = \frac{1}{1 - X}$.

79. Slučajna varijabla X zadana je gustoćom

$$f(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Odredi gustoću slučajne varijable $Y = \frac{1}{1 + X}$.

80. Neka je X Cauchyjeva slučajna varijabla s gustoćom

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Nađi i skiciraj funkciju razdiobe G_Y slučajne varijable $Y = \min\{\frac{1}{X}, |X|\}$.

81. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $N(2, 1)$. Izračunaj gustoću razdiobe vjerojatnosti varijable $Y = |X|$, te vjerojatnost događaja $\{Y < 1\}$.

82. Gustoća vjerojatnosti f_X slučajne varijable X iznosi

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

Odredi i skiciraj gustoću vjerojatnosti slučajne varijable $Y = \frac{1}{2} \sin X$, te izračunaj njezino očekivanje.

83. Neka je X slučajna varijabla zadana gustoćom

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in [-4, -2], \\ \frac{1}{8}, & x \in [-1, 3]. \end{cases}$$

Odredi i skiciraj funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = X^2$.

84. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $N(1, 2)$. Odredi funkciju gustoće slučajne varijable $Y = X^2 + 1$. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{|Y - E(Y)| < 1\}$.

85. Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu $E(\lambda)$. Odredi zakon razdiobe i izračunaj očekivanje diskretne slučajne varijable $Y = \lfloor X \rfloor$ (najveće cijelo od X).

86. Slučajna varijabla X ima gustoću razdiobe

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2x^2}\right\}.$$

Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Y = 1/X$.

87. Slučajna varijabla X ima Cauchyjevu razdiobu.

Pokaži da slučajne varijable $\frac{1}{X}$, $\frac{2X}{1 - X^2}$, $\frac{3X - X^3}{1 - 3X^2}$ imaju također Cauchyjevu razdiobu.

* * *

88. Promjer kruga d izmjeren je približno, u granicama $a \leq d \leq b$. Ako d ima jednoliku razdiobu na intervalu $[a, b]$, izračunaj očekivanje i disperziju površine kruga.

89. U rombu stranice 10 cm oštri kut α je slučajna varijabla s gustoćom razdiobe

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}, & 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \\ C, & \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Izračunaj konstantu C , funkciju razdiobe površine romba i vjerojatnost da je ta površina veća od 50 cm^2 .

90. Unutar dužine duljine 2 na sreću je odabrana točka koja ju dijeli na dva dijela. Neka je X površina pravokutnog trokuta čije su katete ti dijelovi. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe $F_X(x)$.