Ana Anušić

ana.anusic@gmail.com

KONZULTACIJE SRI 11-12, 14-15, D269

1. KOMBINATORIKA

- bavi se prebrojavanjem

Teorem (O uzastopnom prebrojavanju)

u slobodnoj interpretaciji

- Ako se 1. dio posla može napraviti na n_1 načina, 2. na n_2 načina, ... n_k. dio na

Onda se cijeli posao može napraviti na

$n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$ načina

primjer

Koliko dijagonala ima konveksni n-terokut?

- dijagonala je dužina koja spaja nesusjedne vrhove
- moramo odrediti 2 nesusjedne točke
- prvu točku možemo odrediti na n načina
- drugu točku $n-3$ načina (ne možemo odabrati istu niti 2 susjedne)

$\Rightarrow n(n-3)$

uočimo svaku dijagonalu smo brojali 2 puta

$\overline{T_1T_2} = \overline{T_2T_1}$

Konačni broj $\frac{n(n-3)}{2}$

PR. 2.

Koliko je različitih djelitelja broja $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$

rastav na proste faktore

Svaki djelitelj je sljedećeg oblika

$p_1^{\beta_1} \cdots p_n^{\beta_n} \qquad 0 \leq \beta_i \leq \alpha_i, \forall i$

β_1 možemo odabrati na α_1+1 način

β_2 ... α_2+1

β_n ... α_n+1 način

$\Rightarrow$ ukupno (po teoremu uzastopnog prebrojavanja)

$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$

1. PERMUTACIJE OD n ELEMENATA

su uređene n-torke (bitan poredak) n-članog skupa koje imaju različite elemente

PRIMJER

Permutacije skupa $\{1,2,3\}$

$(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$

Ima ih $3! = 6$

$(\_, \_, \ldots)$ $\rightarrow$ Broj permutacija skupa od n elemenata

možemo odabrati na n načina

na $n-1$ način

$P_n = n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$

PRIMJER

Na koliko se načina 30 učenika može rasporediti u učionici sa 30 mjesta

$$P_n = 30! = 2.6525\cdot 10^{32}$$

2. PERMUTACIJE S PONAVLJANJEM OD n ELEMENATA

- je permutacija n elemenata koji nisu svi različiti i od kojih je n_1 prve vrste (tih n_1 ne razlikujemo), n_2 druge vrste do n_k k-te vrste i vrijedi:

$$n_1+n_2+\dots+n_k = n$$

Ovakvih permutacija je

$$P_n^{n_1,\dots,n_k} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}$$

PRIMJER

tražimo permutacije riječi SOS

- ako razlikujemo 2 S

S_1, S_2 ($\to 3! = 6$)

S_1OS_2 S_1S_2O OS_1S_2
S_2OS_1 S_2S_1O OS_2S_1

- ako maknemo indekse

SOS, SSO, OSS

$$3 = \frac{3!}{2!}$$

PRIMJER

Koliko je permutacija riječi matematika ?

- ukupno 10 slova

M - 2

A - 3

T - 2

E - 1

I - 1

K - 1

$$P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$$

3. KOMBINACIJA BEZ PONAVLJANJA OD n ELEMENATA r-tog RAZREDA

- je neuređena r-torka (r-člani podskup) n-članog skupa sa različitim elementima

Broj svih takvih

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \qquad r \leq n$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \ldots & \downarrow \\ 1 & 1 & & 1 \end{array}$$

1 znači element je u skupu

0 nije u skupu

r-člani podskup → ima točno r 1-nica i n-r 0

$$P_n^{n-r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)}$$

PRIMJER

Koliko ima kombinacija u lotu

a) u lotu 6/45

b) u lotu 7/39

R):

(a) $\binom{45}{6} = 8{,}145{,}060$

(b) $\binom{39}{7} = 15{,}380{,}937$

PRIMJER

Na koliko načina u razredu od 30 učenika možemo izabrati trojicu predstavnika

$\binom{30}{3} \rightarrow$ broj tročlanih podskupova skupa od 30

4. KOMBINACIJE S PONAVLJANJEM OD n ELEMENATA r-tog RAZREDA

- je neuređena r-torka skupa od n elemenata pri čemu se elementi mogu ponavljati

Broj svih takvih

$$\bar{C}_r^n = \binom{n+r-1}{r}$$

loto "r od n", pri čemu se loptice svaki put vraćaju u bubanj

oo|o| |o o|

1 2 n-2 n-1

broj 1 - 2 puta
2 - 1 put
⋮
n-1 - 2 puta
n - nije se pojavio

r - kuglice
n-1 pregrade
n+r-1 mjesta
gdje ćemo staviti pregrade ili kuglice

$\binom{n+r-1}{n-1}$ $\binom{n+r-1}{r}$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

PRIMJER

Na koliko se načina može 5 istih nagrada podijeliti između 30 ljudi ako

(a) svaki čovjek može dobiti najviše 1 nagradu

(b) svaki proizvoljan broj nagrada

R):

(a) $\binom{30}{5} = 142\,506$

(b) isto kao i loto s vraćanjem kuglica

$$\bar{C}_{30}^{5} = \binom{30+5-1}{5} = \binom{34}{5} = 278\,256$$

5. VARIJACIJA BEZ PONAVLJANJA OD n ELEMENATA r-tog RAZREDA $(r \leq n)$

– je svaka uređena r-torka n-članog skupa s različitim elementima

Broj svih takvih

$$V_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

$$(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{izabiremo} \\ \text{na } n \\ \text{načina}}}{\_}\ \underset{\substack{\downarrow \\ n-1}}{\_}\ \ldots\ \underset{\substack{\downarrow \\ n-r+1}}{\_})$$

$$V_n^n = P_n$$

6. VARIJACIJE S PONAVLJANJIMA OD n ELEMENATA r-tog razreda

- je uređena r-torka ne nužno različitih elemenata n-članog skupa

Broj svih takvih

$$\bar{V}_n^r = n^r$$

$$(\underbrace{\ \ }_{n}, \underbrace{\ \ }_{n}, \dots \underbrace{\ \ }_{n}) \rightarrow n \cdot n \cdots n = n^r$$

načina

PRIMJER

5 nagrada, 30 ljudi

a) Svaki čovjek može dobiti 1 nagradu

$$(\ , \ , \ , \ , \ )$$

1 nagradi možemo pridr. 30 ljudi

29 28 27 26

$$V_{30}^5 = 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26$$

b) Svaki čovjek proizvoljno

$$(\underbrace{\ \ }_{30}, \underbrace{\ \ }_{30} \ \ \underbrace{\ \ }_{30}) \qquad \bar{V}_{30}^5 = 30^5$$

VIS - A.V. 13.3.13.

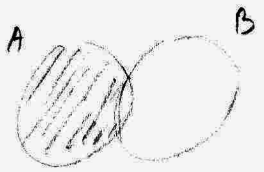
13h A

1.) Ako je $P(A)=0.6$, $P(B)=0.4$, $P(A\cup B)=0.8$. Izračunajte vjerojatnost događaja $\bar{A}$, AB, $A\bar{B}$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.4$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(AB) = 0.6 + 0.4 - 0.8 = 0.2$$



$$A = A\bar{B} + AB \overset{\text{ADITIVNOST}}{\Longrightarrow} P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB)$$

$$\Rightarrow P(A\bar{B}) = 0.6 - 0.2 = 0.4$$

2.) U liftu zgrade s 5 katova nalazi se 7 osoba

(a) Izračunajte vjerojatnost da na 1. katu izađu točno 3 osobe

(b) Izračunajte vjerojatnost da na svakom katu izađe barem 1 osoba

$$P = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH ISHODA}}{\text{BROJ SVIH MOGUĆIH ISHODA}}$$

BROJ SVIH ISHODA : SVAKA OSOBA BIRA KAT NA KOJEM IZLAZI → NA 5 NAČINA

$$\underset{5}{\underset{\uparrow}{\sqcup}}\ \underset{5}{\underset{\uparrow}{\sqcup}}\ \cdots\ \sqcup \quad \to \text{UKUPNO } 5\cdot5\cdots5 = 5^7$$

(a) POVOLJAN ISHOD $\binom{7}{3}$ - ODABEREMO 3 OSOBE KOJE IZLAZE NA 1. KATU → PREOSTALE 4 OSOBE KOJE IZLAZE NA 4. KATA $\Rightarrow 4^4$

$$\underset{4}{\sqcup}\ \underset{4}{\sqcup}\ \underset{4}{\sqcup}\ \underset{4}{\sqcup}$$

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} 4^4}{5^7} = 0.11$$

(b) i) NA 1 KATU 3 OSOBE, NA PREOSTALA 4. KATA 1 OSOBA

ii) NA 2 KATA PO 2 OSOBE, NA PREOSTALA 3. KATA PO 1 OSOBA

(i) $5 \cdot \binom{7}{3} \cdot 4! =$

BIRAMO KAT

BIRAMO 3 OSOBE KOJE IZLAZE NA TOM KATU

4! → PREOSTALE 4 OSOBE RASPOREDIMO PO 1 NA SVAKI OD 4 KATA

(ii) $\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} \cdot 3!$

BIRAMO 2 KATA

NA PRVOM BIRAMO 2 OSOBE

OD PREOSTALIH 5 BIRAMO 2 KOJE IZLAZE NA 2. OD ODABRANIH KATOVA

3! – 3 KATA, NA SVAKOM PO 1 OSOBA

ILI

$\binom{5}{3}\binom{7}{3} \cdot 3! \binom{4}{2}$

BIRAMO 3 KATA

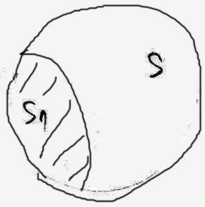
3 OSOBE

RASPODIJELIMO OSOBE PO 1 NA SVAKI KAT

PREOSTALE 4 OSOBE U PAROVIMA RASPODIJELIMO NA PREOSTALA 2 KATA

$$P = \frac{5\binom{7}{3} \cdot 4! + \binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2} \cdot 3!}{5^7} = 0.215$$

TEORIJA GEOM. VJEROJATNOSTI



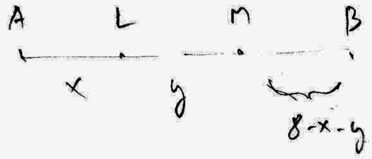
$S_1 \subseteq S$

$$p(S_1) = \frac{m(S_1)}{m(S)}$$

m - MJERA ILI POVRŠINA

3.) Unutar dužine $\overline{AB}$ duljine 8 cm odabrane su 2. točke koje zadanu dužinu $\overline{AB}$ dijele na 3 dijela

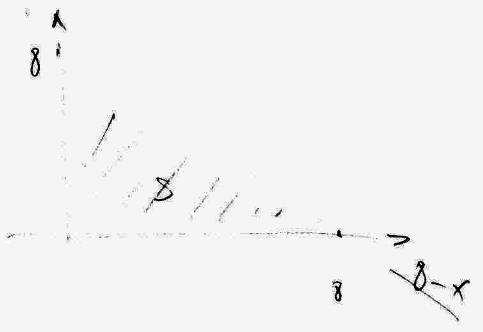
Kolika je vjerojatnost da su sva 3 dijela kraća od 3 cm



Izbor L i M je ekvivalentan izboru (x,y)

$0<x<8, \quad 0<y<8, \quad 0<8-x-y<8$

$S = \{ (x,y) \in \mathbb{R} \mid 0<x<8, 0<y<8, x+y<8 \}$

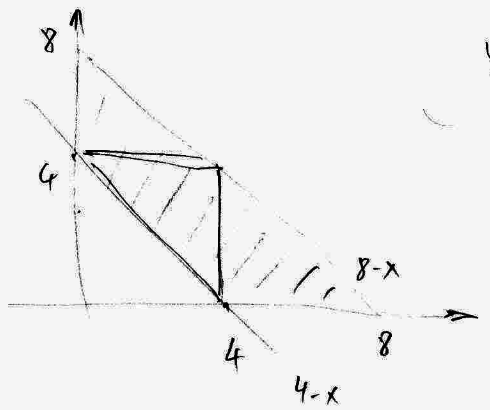


$x<4, \ y<4, \ 8-x-y<4$

$\downarrow$

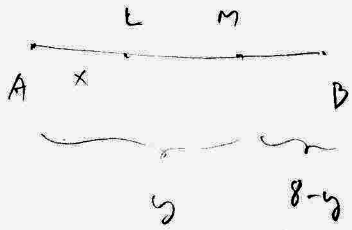
$y>4-x$

$G = \{ (x,y) \in S \mid x<4, y<4, y>4-x \}$



$y>4-x$ IZNAD PRAVCA $4-x$

$$P = \frac{m(G)}{m(S)} = \frac{\frac{4\cdot 4}{2}}{\frac{8\cdot 8}{2}} = \frac{1}{4}$$



$\overline{AL} = x$

$\overline{AM} = y$

$S = \langle 0,8 \rangle$

$0 < x < 3$

$0 < y < 8$

<u>12h A</u>

3.) 2 broda x i y moraju stići u isto pristanište. Vremena dolaska brodova su nezavisna i jednako vjerojatna u toku dana

Izračunajte vjerojatnost da će jedan od brodova morati čekati na oslobađanje pristaništa ako je vrijeme zadržavanja broda X u pristaništu 1 h, a broda Y 2h.

x ... trenutak pristajanja broda X $\qquad x \in [0, 24\rangle$

y ... $\qquad\qquad\qquad\qquad$ Y $\qquad y \in [0, 24\rangle$

$S = [0,24\rangle \times [0,24\rangle$

- $x < y$ X stigao prije Y

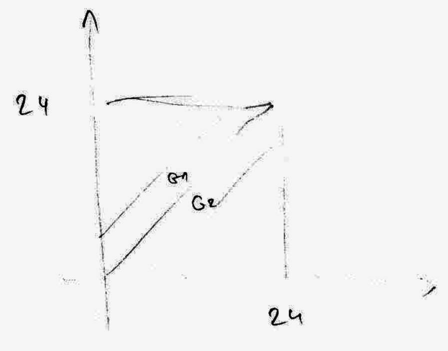
  uvjet čekanja : $y - x < 1$

- $y < x$ Y stigao prije X

  uvjet čekanja : $x - y < 2$

$G_1 = \{ (x,y) \in S \mid x < y \ \& \ y < 1 + x \}$

$G_2 = \{ (x,y) \in S \mid y < x \ \& \ y > x - 2 \}$



$$P = \frac{m(G_1 \cup G_2)}{m(S)}$$

VIS - A.V. 13.3.13

2.) Špil 32 karte. Izvlačimo 5 karata

a) Svih 5 iste boje

b) Vjeroj da se pojave sve boje

BR. SVIH ISHODA $\binom{52}{5}$

$4 \cdot \binom{8}{5}$

ODABEREMO BOJU   ODABEREMO 5 KARATA TE BOJE

$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{8}{5}}{\binom{52}{5}} = 0.001$$

(b) $4 \binom{8}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$

biramo boju   2 karte te boje

$$P(B) = \frac{4 \binom{8}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{\binom{52}{5}}$$