Vjerojatnost i statistika
Ljetni ispitni rok
4. 7. 2016.

1. **(4 boda)** Neka je $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ prostor elementarnih događaja. Odredite vrijednost parametra $\beta \in \mathbb{R}$, tako da je funkcija $\boldsymbol{P}$, definirana s $\boldsymbol{P}(\{k\}) = \beta k$, za $k = 1, 2, \dots, 2016$, vjerojatnost na Ω. Izračunajte zatim vjerojatnost da je odabrani broj iz Ω djeljiv s 4.

2. **(4 boda)** U jednoj kutiji nalaze se 4 bijele i 3 plave kuglice, a u drugoj 3 bijele i 4 crvene kuglice. Izvlačimo istovremeno dvije kuglice iz na sreću odabrane kutije. Kolika je vjerojatnost da su obje izvučene kuglice iste boje? Ako su su obje izvučene kuglice iste boje, kolika je vjerojatnost da su to bijele kuglice?

3. **(4 boda)** Prijemni ispit za upis diplomskog studija jednog fakulteta sastoji se od 30 pitanja. Za svako pitanje ponuđeno je 5 odgovora od kojih je samo jedan ispravan. Pristupnik (koji se nije baš spremao) s vjerojatnošću 0,75 odgovara na pitanje i pri tome nasumično zaokružuje jedan od odgovora, dok s vjerojatnošću 0,25 ostavlja pitanje neodgovoreno. Ako ispravan odgovor donosi 20 bodova, neispravan -6 (minus 6), a neodgovoreno pitanje 0 bodova, izračunajte očekivani broj bodova pristupnika.

4. **(4 boda)** Neka su X i Y diskretne nezavisne slučajne varijable. Ako su očekivanje i disperzija slučajne varijable Y redom m i v, odredite očekivanje i disperziju slučajne varijable $X - Y \,|\, X = x$ za dani $x \in \mathbb{R}$ takav da je $\boldsymbol{P}(X = x) > 0$.

5. **(4 boda)** Neka je X neprekinuta slučajna varijabla, čija je gustoća razdiobe vjerojatnosti $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Izračunajte vjerojatnost $\boldsymbol{P}(|X - 1| < 3)$.

6. **(4 boda)** Na jednom nogometnom turniru pogodak padne u prosjeku svakih 40 minuta. Ako je rezultat utakmice nakon 90 minuta igre neodlučen, igraju se produžetci sve dok jedna momčad ne postigne pogodak (zlatni gol), ali najdulje 30 minuta. Ukoliko nema pogotka u dodatnih 30 minuta, pristupa se izvođenju jedanaesteraca. Ako je rezultat neke utakmice nakon 90 minuta igre bio neodlučen, izračunajte vjerojatnost da će pobjednik biti odlučen izvođenjem jedanaesteraca.

7. **(4 boda)** Bacamo kocku sve dok zbroj svih dobivenih brojeva nije barem 700. Kolika je vjerojatnost da smo za to trebali barem 210 bacanja?

8. **(4 boda)** Na izlaznoj anketi od 200 glasača za kandidata X glasalo je 112 glasača.

   a) Odredite 95% interval pouzdanosti za postotak glasova za tog kandidata.

   b) Koliko velik uzorak treba biti da bi taj izbor bio siguran uz nivo značajnosti $\alpha = 0,05$?

9. **(4 boda)** Lijek "A" za smanjenje visokog krvnog pritiska snizuje isti prosječno za 20 jedinica uz standardnu devijaciju $\sigma = 3$. Na 100 pacijenata testiran je novi lijek "B". Dobiveno je prosječno smanjenje pritiska za $\overline{x} = 21$ jedinica, a pretpostavlja se da je standardna devijacija nepromijenjena. Uz nivo značajnosti $\alpha = 0,01$ provjerite je li novi lijek "B" efikasniji od lijeka "A"?

10. **(4 boda)** 190 puta je bačeno 5 igraćih kocaka i pri tome je bilježen broj X pojavljivanja "šestice":

x_j	0	1	2	3	4	5
n_j	75	77	30	5	2	1

Uz koji nivo značajnosti α se može tvrditi da se dobiveni podaci slažu s hipotezom o ispravnosti svih kocki?

Vjerojatnost i statistika
Ljetni ispitni rok - rješenja
4. 7. 2016.

1. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$ prostor elementarnih događaja. Vrijednost parametra $\beta \in \mathbb{R}$ određujemo iz uvjeta normiranosti:

$$1 = \boldsymbol{P}(\Omega) = \sum_{k=1}^{2016} \boldsymbol{P}(\{k\}) = \beta \sum_{k=1}^{2016} k = \beta \cdot \frac{2016 \cdot 2017}{2},$$

odakle slijedi: $\beta = 1/2033136$. Neka je $C = \{4l \,:\, l = 1, \dots, 504\}$ skup svih brojeva iz Ω djeljivih s 4. Vjerojatnost odabira broja iz Ω djeljivog s 4 je

$$\boldsymbol{P}(C) = 4\beta \sum_{l=1}^{504} l = 4\beta \cdot \frac{504 \cdot 505}{2} \approx 0,250372\,.$$

2. *1. način.* Označimo hipoteze:

$$H_i = \{\text{izvlačimo dvije kuglice iz } i\text{-te kutije}\}\,,\ i = 1, 2\,,$$

čije su vjerojatnosti $\boldsymbol{P}(H_i) = 0,5$, $i = 1, 2$. Označimo događaj

$$A = \{\text{izvučene su kuglice iste boje}\}$$

i računamo uvjetne vjerojatnosti:

$$\boldsymbol{P}(A|H_1) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}\,, \qquad \boldsymbol{P}(A|H_2) = \frac{\binom{3}{2} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}\,,$$

Prema formuli potpune vjerojatnosti

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(A|H_1)\boldsymbol{P}(H_1) + \boldsymbol{P}(A|H_2)\boldsymbol{P}(H_2) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{3}{7}\,.$$

Označimo događaj

$$B = \{\text{izvučene su kuglice bijele boje}\}$$

i računamo traženu vjerojatnost (koristeći $B \subset A$)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(B|A) &= \boldsymbol{P}(B \cap H_1|A) + \boldsymbol{P}(B \cap H_2|A) = \frac{\boldsymbol{P}(B \cap H_1 \cap A)}{\boldsymbol{P}(A)} + \frac{\boldsymbol{P}(B \cap H_2 \cap A)}{\boldsymbol{P}(A)} \\ &= \frac{\boldsymbol{P}(B \cap H_1)}{\boldsymbol{P}(A)} + \frac{\boldsymbol{P}(B \cap H_2)}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{\boldsymbol{P}(B|H_1)\boldsymbol{P}(H_1)}{\boldsymbol{P}(A)} + \frac{\boldsymbol{P}(B|H_2)\boldsymbol{P}(H_2)}{\boldsymbol{P}(A)} \\ &= \frac{\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} + \frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}\frac{1}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

2. način. Označimo hipoteze: $H_{BB} = \{\text{izvučene su dvije bijele kuglice}\}$, i analogno H_{PP}, H_{BP}, H_{CC} i H_{BC}. Njihove vjerojatnosti su redom

$$\boldsymbol{P}(H_{BB}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}; \quad \boldsymbol{P}(H_{PP}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{3}{2}}{\binom{7}{2}}; \quad \boldsymbol{P}(H_{BP}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{\binom{7}{2}};$$

$$\boldsymbol{P}(H_{CC}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}}; \quad \boldsymbol{P}(H_{BC}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 4}{\binom{7}{2}}\,.$$

Označimo događaj

$$A = \{\text{izvučene su kuglice iste boje}\}$$

pa su uvjetne vjerojatnosti: $\boldsymbol{P}(A|H_{BB}) = \boldsymbol{P}(A|H_{CC}) = \boldsymbol{P}(A|H_{PP}) = 1$, dok su preostale dvije jednake 0. Prema formuli potpune vjerojatnosti

$$\boldsymbol{P}(A) = \boldsymbol{P}(H_{BB}) + \boldsymbol{P}(H_{CC}) + \boldsymbol{P}(H_{PP}) = \frac{3}{7}\,.$$

A prema Bayesovoj formuli

$$\boldsymbol{P}(H_{BB}|A) = \frac{\boldsymbol{P}(A|H_{BB})\boldsymbol{P}(H_{BB})}{\boldsymbol{P}(A)} = \frac{1}{2}\,.$$

3. Za svako od 30 pitanja označimo s X_i, $i = 1, \ldots, 30$, slučajnu varijablu koja označava broj bodova ostvarenih na i-tom zadatku. Sve X_i imaju isti zakon razdiobe

$$X_i \sim \begin{pmatrix} -6 & 0 & 20 \\ 0,6 & 0,25 & 0,15 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, 30\,.$$

Ukupni broj bodova je slučajna varijabla $X = \sum_{i=1}^{30} X_i$. Prema tome, očekivani broj bodova je

$$\boldsymbol{E}(X) = \sum_{i=1}^{30} \boldsymbol{E}(X_i) = 30 \cdot (-0,6) = -18\,.$$

4. Slučajna varijabla $X - Y \mid X = x$ jednaka je slučajnoj varijabli $x - Y$ za dani $x \in \mathbb{R}$. Zbog linearnosti očekivanja $\boldsymbol{E}(x - Y) = x - m$. Nadalje, zbog nezavisnosti Y i konstante x, disperziju računamo po formuli

$$D(x - Y) = D(x) + D(Y) = 0 + v = v\,.$$

5. *1. (lijepi) način.*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(|X-1| < 3) &= \boldsymbol{P}(|X-1| < 3 \cap (X - 1 \geq 0)) + \boldsymbol{P}(|X-1| < 3 \cap (X - 1 < 0)) \\
&= \boldsymbol{P}(X < 4 \cap X \geq 1) + \boldsymbol{P}(X > -2 \cap X < 1) \\
&= \boldsymbol{P}(1 \leq X < 4) + \boldsymbol{P}(0 < X < 1) = \boldsymbol{P}(0 < X < 4) \\
&= \int_0^4 e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}|_0^4 = 1 - e^{-4}\,.
\end{aligned}$$

2. način. Računamo najprije gustoću razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $Y = |X - 1|$. Zamjena varijabli $y = \psi(x) = |x - 1|$, $x > 0$. Razmatramo slučajeve po područjima gdje je ψ strogo monotona:

1°) $x \geq 1$, $y = x - 1 \Rightarrow x = y + 1$, $y \geq 0$,

$$g_1(y) = f(x(y)) \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| = e^{-y-1}\,, \quad y \geq 0\,.$$

2°) $0 < x < 1$, $y = 1 - x \Rightarrow x = 1 - y$, $y \in (0, 1)$,

$$g_2(y) = f(x(y)) \left|\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right| = e^{y-1}\,, \quad y \in (0,1)\,.$$

Gustoća razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable Y:

$$g(y) = g_1(y) + g_2(y) = \begin{cases} e^{-y-1} + e^{y-1}\,, & y \in (0,1)\,, \\ e^{-y-1}\,, & y \geq 1\,. \end{cases}$$

Stoga je

$$\boldsymbol{P}(Y<3)=\int_0^3 g(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 (e^{-y-1}+e^{y-1})\mathrm{d}y+\int_1^3 e^{-y-1}\mathrm{d}y$$
$$=\left(-e^{-y-1}+e^{y-1}\right)|_0^1-e^{-y-1}|_1^3=1-e^{-4}\,.$$

6. *1. način* (Eksponencijalna razdioba) Neka slučajna varijabla X označava vrijeme postignutog odlučujućeg pogotka, koja ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Iz uvjeta zadatka $\boldsymbol{E}(X)=40$, stoga je $\lambda=1/40$. Vjerojatnost da ne bude pogotka u dodatnih 30 minuta igre je

$$\boldsymbol{P}(X>30)=1-\boldsymbol{P}(X<30)=1-\left(1-e^{-30/40}\right)=e^{-3/4}\,.$$

2. (alternativni) način (Poissonova razdioba) Neka slučajna varijabla X označava broj postignutih pogodaka u vremenu od 30 minuta. Prema uvjetu zadatka, u 40 minuta igre u prosjeku padne 1 pogodak. Stoga je intenzitet pogodaka u 30 minuta igre $\lambda=3/4$. Vjerojatnost da nije bilo pogodaka u dodatnih 30 minuta igre tada je

$$\boldsymbol{P}(X=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-3/4}\approx 0{,}4724\,.$$

7. Traženu vjerojatnost možemo zapisati kao $\boldsymbol{P}(\sum_{k=1}^{209}X_k<699)$, pri čemu X_k označava rezultat u k-tom bacanju. $\boldsymbol{E}(X_k)=3,5$ i $D(X_k)=35/12$ za sve $k=1,\dots,209$. Prema centralnom graničnom teoremu imamo

$$\frac{\sum_{k=1}^{209}(X_k-3,5)}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{209}}\sim\mathcal{N}(0,1)\,.$$

$$\boldsymbol{P}\left(\sum_{k=1}^{209}X_k<699\right)=\boldsymbol{P}\left(\frac{\sum_{k=1}^{209}X_k-209\cdot 3,5}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{209}}<\frac{699-209\cdot 3,5}{\sqrt{\frac{35}{12}}\cdot\sqrt{209}}\right)$$
$$=\boldsymbol{P}(\widetilde{X}<-1{,}316)=0{,}09342\,.$$

8. **a)** Interval povjerenja za vjerojatnost p događaja, $p_{1,2}=0{,}56\mp 0{,}068$.

   b) Tražimo najmanji $n\in\mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$0{,}56-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}56\cdot 0{,}44}{n}}>0{,}5\,,$$

odakle slijedi $n=263$.

9. **(4 boda)**

   u-test, hipoteza je $H_0\ \dots\ a=20$, a alternativna hipoteza $H_1\ \dots\ a>20$, $\widehat{u}=3{,}33$, $u_{0{,}99}=2{,}326$. Zbog $\widehat{u}>u_{1-\alpha}$ odbacujemo hipotezu H_0, odnosno s rizikom od 1% možemo tvrditi da je novi lijek "B" efikasniji od lijeka "A".

10. **(4 boda)** Računamo $p_j=\binom{5}{j}(\frac{1}{6})^j(\frac{5}{6})^{5-j}$ za $j=0,\dots,5$.

x_j	n_j	p_j	n_j-np_j	$(n_j-np_j)^2/(np_j)$
0	75	0,40188	-1,3572	0,02412
1	77	0,40188	0,6428	0,00541
2	30	0,16075	-0,5425	0,00964
3	5			
4	2	0,0355	1,255	0,23351
5	1			
				$\chi_q^2=0{,}27268$

$m = 4$, $r = 0$, $f = 4 - 1 = 3$. Iz tablice očitavamo $\chi_{3;0,025} = 0{,}216$ i $\chi_{3;0,05} = 0,352$ pa zaključujemo da se uz nivo značajnosti $\alpha = 0{,}95$ može tvrditi da se dobiveni podatci slažu s hipotezom o ispravnosti svih kocki.