KOMBINATORIKA ♡

Pravila prebrojavanja

A skup

$k(A) = C(A) = |A|$ → kardinalitet (br. elemenata u skupu A)

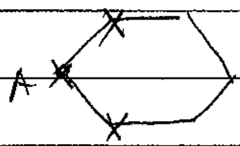
Teorem: PRAVILO PRODUKTA

Neka su $A_1 \dots A_k$ neprazni skupovi s konačno mnogo elemenata

Tako da je $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, ..., $|A_k| = n_k$

kartezij ← Neka je $|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_k| = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k$

Pr. Koliko dijagonala ima konveksni n-tero kut?



n-vrhova → na n-načina odabiremo vrh

preostalo $n-3$ vrhova → drugi vrh dijagonale

⇓

$n(n-3)/2$ → jer se svaka dij. pojavljuje 2 puta

Pr. Koliko ima razl. djelitelja broja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$?

$k | n$ → $k = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdots p_m^{\beta_m}$ $\quad \beta_i = \{0, 1, \dots \alpha_1\}$

$\boxed{(\alpha_1+1)(\alpha_2+1) \cdots (\alpha_m+1)}$ → djelitelja broja n

Pravilo: varijacije bez ponavljanja

Varijacije bez ponavljanja reda k n-članog skupa A zovemo bilo koji poredani k-torac elemenata iz A koji su RAZLIČITI

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_k})$

V_n^k = broj varijacija reda k n-članog skupa

$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Pr. Na koliko se načina 6 putnika može rasporediti na 15 sjedala?

$A = \{1, 2, 3, \dots 15\} \longrightarrow$ sjedala

$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 10 = \dfrac{15!}{(15-6)!} = \dfrac{15!}{9!}$

Permutacije bez ponavljanja

Permutacije od n-elemenata su svaka uređena n-torka n-članog skupa s različitim elementima.

$A = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots a_{i_n})$

iz pravila produkta $\leftarrow$ Broj n-članih permutacija $= n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Pr. Ispišite sve permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$

$(1,2,3)\ (1,3,2)\ (2,1,3)\ (2,3,1)\ (3,1,2)\ (3,2,1) = 6 = 3!$

Pr. Na koliko se načina 30 učenika može rasporediti na 30 mjesta?

$30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 30!$

Kombinacije bez ponavljanja

Kombinacije bez ponavljanja od n-elemenata k-tog reda su sve neuređene k-torke (k-člani podskup) od n-članog skupa s različitim elementima.

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$$

Pr. $\{1,2,3,4\}$ tražimo tročlani podskup

rj: $(1,2,3), (1,2,4), (1,3,4), (2,3,4)$

Pr. Koliko kombinacija ima na lotu:

a) 6/45

b) 7/39

a) $\binom{45}{6} = \frac{45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 8\,145\,060$

b) $\binom{39}{7} = \frac{39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 15\,380\,937$

Permutacije s ponavljanjem

$A = \{a_1, \dots, a_k\}$

Promatramo sve n-torke elemenata iz A gdje se elementi mogu ponavljati $A_1 \to n_1$ puta, ..., $A_k \to n_k$ puta

$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$

dijelimo s tim jer ne razlikujemo brojeve po mjestima (12451)

iste jedinice

$A = \{1, 2, 3\}$

tražimo uređenu četvorku

$n_1 = 2 \quad n_2 = 1 \quad n_3 = 1$

$(1, 1, 2, 3)$

$(1, 2, 1, 3)$

$\vdots$

Pr. Koliko razl. riječi možemo složiti od slova riječi MATEMATIKA

$A = \{M, A, T, E, I, K\}$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 2 \\ n_2 = 3 \\ n_3 = 2 \\ n_4 = 1 \\ n_5 = 1 \\ n_6 = 1 \end{array}\right\} n = 10$$

→ tražimo br. 10 članih permutacija s ponavljanjem

$$P_{10}^{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 151200$$

Varijacija s ponavljanjem

Varijacija s ponavljanjem od n-elemenata k-tog reda su sve uređene k-torke ne nužno različitih elemenata n-članog skupa

$$\underbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$$

Pr. Koliko je mogućih ishoda bacanja 8 različitih kocki?

$6 \cdot 6 \cdot 6 \ldots 6 = 6^8$

1. VJEROJATNOST

1.1 Vjerojatnost događaja

Slučajni (stohastički) pokus
- svaki pokus kojem ne znamo unaprijed ishod

Elementarni događaj ($\omega_1, \omega_2, \omega_3$)
- ishodi pokusa
- Ω - skup svih ishoda
- $\emptyset$ - prazan skup / nemoguć događaj

Događaj
- podskupovi od ω (elem. događaja)
- A, B, C, ...

1. ZZV-3 Bacamo 2 kocke:

a) opiši prostor elem. događaja

$\omega_1 = 11 \quad \omega_2 = 12 \quad \omega_3 = 13, \ldots, \omega_{36} = 66$

b) $A = \{\text{oba su broja manja od } 3\}$
$= \{11, 12, 21, 22\}$

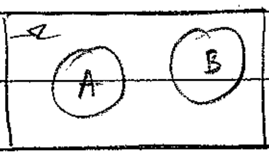
c) $B = \{\text{zbroj je manji od } 5\}$
$= \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$

Odnosi među događajima

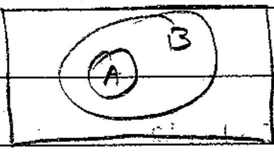
- $A \Rightarrow B$ – A povlači B
  - iz realizacije događaja A slijedi real. događaj B $\boxed{A \subset B}$

- $A = B$ – A i B su ekvivalentni ako se sastoje od istih elem. događa

- A i B su disjunktni – ako se ne mogu istovremeno realizirati



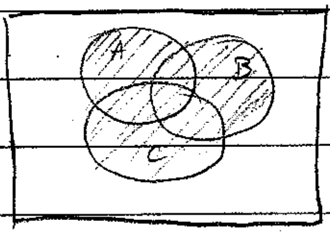
disjunktnost



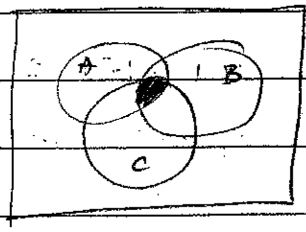
$A \Rightarrow B$

Operacije s događajima

- unija $A \cup B$, $A + B$, događa se A ili B
- presjek $A \cap B$, $A \cdot B$, dogodio se A i B
- razlika $A \setminus B$, $A - B$, dogodio se A ali bez B
- komplement $\overline{A}$, A^c, suprotni događaj



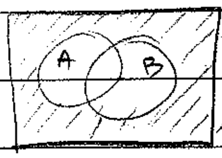
unija $A \cup B \cup C$



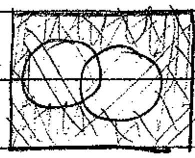
presjek $A \cap B \cap C$

De Morganova pravila:

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



$\overline{A \cup B}$ $\Rightarrow$


$\overline{A} \cap \overline{B}$

Dokazić:

$\omega \in \overline{A \cup B} \Rightarrow \omega \notin A \cup B \Rightarrow \omega \notin A$ i $\omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A}$ i $\omega \in \overline{B}$

$\Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

Definicija

Algebra događaja je svaka familija $\mathcal{F}$ podskupova od ω na kojoj su definirane operacije zbrajanja i komplementiranja sa svojstvima:

i) $\Omega \in \mathcal{F}$, $\emptyset \in \mathcal{F}$

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$

iii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A+B \in \mathcal{F}$

Primjedi: za $A, B \in \mathcal{F}$ slijedi i da je $A \cdot B \in \mathcal{F}$

1.2 Vjerojatnost

Definicija: VJEROJATNOST

sa algebre događaja u $[0,1]$

Vjerojatnost je preslikavanje $P: \mathcal{F} \Rightarrow [0,1]$ definirano na algebri događaja $\mathcal{F}$ i vrijedi:

i) normiranost $P(\Omega)=1 \rightarrow$ siguran događaj, $P(\emptyset)=0$

ii) monotonost ako je $A \subset B$ onda je vjerojatnost događaja A manja ili jednaka od B, $P(A) \leq P(B)$

iii) aditivnost ako su A i B disjunktni onda je vjerojatnost njihove unije $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$

Svojstva vjerojatnosti

1° Vjerojatnost suprotnog događaja (komplementa)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

dokazičić:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

2° Vjerojatnost unije (općenito)

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$ → jer se 2 put ponavlja

dokaz:

$$A\cup B = A\cup B\cdot\bar{A} \xrightarrow{disj} P(A\cup B) = P(A) + P(B\bar{A})$$

? zašto 2put B →

$$B = AB\cup B\bar{A} \xrightarrow{disj} P(B) = P(AB) + P(B\bar{A})$$

$$P(A\cup B) - P(B) = P(A) - P(AB)$$ ISPITIĆ ♡

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

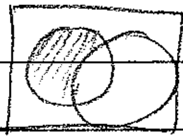
1. DZ-2 $P(A\cup B) = 0{,}8$ $P(AB) = 0{,}2$ $P(\bar{A}) = 0{,}6$

a) $0{,}8 = 0{,}4 + P(B) - 0{,}2$

$P(B) = 0{,}6$

b) $P(\bar{A}\cdot\bar{B}) = P(\overline{A+B}) = \boxed{1 - P(A+B)} = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

c) $P(A\cdot\bar{B})$ → slika!



$= P(A) - P(AB) = 0{,}2$

Kako se računa vjerojatnost? ♡

1.3 Konačni vjerojatnosni prostor

Definicija: VJEROJATNOSNI PROSTOR

Vjerojatnosni prostor Ω koji posjeduje konačno mnogo elementarnih ishoda nazivamo konačni vjerojatnosni prostor

$$\Omega = \{w_1, \dots, w_n\} \rightarrow p_1 = P(w_1)$$
$$p_n = P(w_n) \qquad \boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

Pr. D'Alambertov problem

Bacamo 2 novčića

w_1 = pismo, pismo
w_2 = glava, glava
w_3 = pismo, glava

$\cancel{P(w_3) = \frac{1}{3}}$ → krivo jer elementarni ishodi nisu jednako vjerojatni

$P(PP) = \frac{1}{4}$

$P(GG) = \frac{1}{4}$

$\underbrace{P(PG) = P(GP) = \frac{1}{4}}_{P(1G, 1P) = \frac{1}{2}}$

- Ako su svi događaji jednako vjerojatni

$$\sum p_i = N \cdot p = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{N}$$

→ ovakav prostor nazivamo klasični vjerojatnosni prostor

Ako imamo događaj $A = \{ w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iM} \}$, tada

$$P(A) = P(w_{i1}) + \dots + P(w_{iM}) = \underbrace{\frac{1}{N} + \dots + \frac{1}{N}}_{M} = M \cdot \frac{1}{N} = \frac{M}{N}$$

$$P(A) = \frac{\text{broj povoljnih ishoda}}{\text{ukupan broj ishoda}}$$

1. DZ-4   Bacamo 2 kocke. Izračunaj vjerojatnost:

1. ZZV-32

a) dva ista broja

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b) zbroj = 8

$$P(B) = \frac{5}{36} \rightarrow$$

26
35
44
53
62

c) bar jedna 4

$$P(C) = \frac{11}{36}$$

d) broj dj. s 2 ili 3 → obrnuta vjerojatnost

$$P(D) = \frac{32}{36}$$

$\underbrace{11\ 55\ 15\ 51}$

$36 - 4 = 32$ $P(D) = 1 - P(\bar{D})$

1. Produktno pravilo

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 216 \cdot 4$

2. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ → nCR tipka

→ na kolko načina mogu odabrati k elemenata od n

Pr. 7/39 $P(A) = \dfrac{1}{\binom{39}{7}}$

1.ZZV - 62 6 kocaka Izr. vj:

□ □ □ □ □ □

1) $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^6$

2) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$

a) 6 razl. br. $P(A) = \frac{6!}{6^6}$

b) svih 6 br. manji od 5: $P(B) = \frac{4^6}{6^6}$

c) 3 para jednakih brojeva

$P(C) = \cancel{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{6^6}}$ ILI $\cdot \frac{1}{3!}$

FAIL

$P(C) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2} \cdot \binom{6}{3}}{6^6}$

raspored

3 od 6 koje ćemo iskoristiti

d) da su pale bar 2 šestice → obrnuta vjerojatnost

$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \frac{5^6}{6^6} - \frac{\binom{6}{1} \cdot 5^5}{6^6}$

0 šestica

1 šestica

odabir mjesta za šesticu

1.-MI-08-02 U kutiji se nalazi 12 ping-pong loptica od čega su 4 defektne. Izvlačimo 7 loptica:

a) izr. vj. da je točno jedna defektna

b) najviše jedna

c) bar jedna

12 → 4 defekt, 8 ok

a) $P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$ → tipična greška - treba sve napisati

suma mora biti 7

$\binom{12}{7}$ → ukupna mogućnost

b) jedna ili nijedna $P(B) = \frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}} + P(A)$

Ø def.

1 def.

c) suprotna vjer. $P(C) = 1 - \frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}}$

1. ZZV-70 U žari je $\underbrace{5B,\ 4C,\ 2P}_{11 \text{ kom.}}$ kuglice. Izvlačimo 4,

a) kolika je vj. da su zastupljene sve 3 boje

$$\begin{array}{c} \text{B} \quad \text{C} \quad \text{P} \end{array}$$

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{2}}{\binom{11}{4}}$$

$\binom{11}{4} \rightarrow$ ukupno mogućnosti

b) ? C > B ?

$$P(B) = \frac{\binom{4}{4}\binom{5}{0}\binom{2}{0} + \binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{2}{0} + \binom{4}{3}\binom{5}{0}\binom{2}{1} + \binom{4}{2}\binom{5}{0}\binom{2}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{2}{1}}{\binom{11}{4}}$$

1. MI-10-1 Ilko igra poker s 4 revolveraša ♡ Svatko dobije 5 od 52 karte. Izr. vj da je Ilko dobio:

a) flush – boja

b) royal flush 10 – A

c) full house

d) 2 para

a) $P(A) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$

$\binom{4}{1}$ – odabir boje; $\binom{13}{5}$ – odabir 5 od 13 (jačine)

b) $P(B) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{5}{5}}{\binom{52}{5}}$

$\binom{4}{1} \rightarrow$ 4 mogućnosti

c) $P(C) = \dfrac{\binom{13}{1}\binom{4}{3} \cdot \binom{12}{1}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$

$\binom{13}{1}$ – jačina karte; $\binom{4}{3}$ – 3 iste; $\binom{12}{1}\binom{4}{2}$ – 2 iste

d) $P(D) = \dfrac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}}$

boja za 1.; boja za 2.; zadnja karta; $\binom{11}{1}\binom{4}{1} \rightarrow$ 44 preostale

1.DZ-10 3/52 karte

a) bar 1 AS

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{48}{3}}{\binom{52}{3}}$$

b) sve 3 različite boje

$$P(B) = \frac{\binom{4}{3} \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13}{\binom{52}{3}}$$

→ 3 boje od 4

→ za svaku boju jačina

zad. 12 putnika u 4 vagona i.v.s.d.

a) U 1. i 3. vagonu po 3 putnika

$$P(A) = \frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3} \cdot 2^{6}}{4^{12}}$$

→ ostala stoka

→ svaka osoba bira 1 od 4 vagona (4 mogućnosti)

1. vagon   3. vagon

b) u svaki vagon po 3 putnika

$$P(B) = \frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{4^{12}}$$

Ponavljanje pokusa

Pr. Bacamo novčić 3 puta, izr. vj. da svaki put padne pismo.

$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

- ako imamo nezavisne događaje pripadne vjerojatnosti se množe

zad. Strijelac gađa metu 10 puta. Vjerojatnost pogotka $p = 0{,}8$

a) kolika je vj. da je svaki put promašio? $(0{,}2)^{10}$

b) točno 2 puta pogodio $(0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^8 \Rightarrow$ KRIVO!

ovo bi bilo točno da PRVA DVA PUTA pogodi, a OSTALIH 8 fula.

TOČNO: $(0{,}8)^2 \cdot (0{,}2)^8 \cdot \binom{10}{2}$! → treba odabrati u koja 2 pokušaja je pogodio

1.-MI-09-1 U žari se nalaze 2Z 3C i 4P. Izvlačimo 2.

a) Izr. vj. da su raznobojne

$$P(A) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1} + \binom{2}{1}\binom{4}{1} + \binom{3}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{13}{18}$$

b) 10 puta ponavljamo. Da su bar 2 put izv. kugl. iste boje.

$$P(B) = 1 - P(B_0) - P(B_1)$$

$$= 1 - \left(\frac{13}{18}\right)^{10} - \left(\frac{13}{18}\right)^{9} \cdot \left(\frac{5}{18}\right)^{1} \cdot \binom{10}{1} \rightarrow$$ jer moramo odabrati 1 pokušaj od 10

$0{,}813$

ISPITIĆ Koliko najmanje puta treba baciti 3 kocke da bi vj. da one bar jednom pokažu 3 susj. broja bila veća od 50%?

$P = \frac{4 \cdot 6}{6^3} = \frac{1}{9}$

123 132 231 321 213 312 = 6
234 = 6
345 = 6
456 = 6
$4 \cdot 6$

$P(A) = P\{\text{bar jednom da se dogodi } P\} = 1 - P\{\text{nijednom } P\} = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$ n → ne znamo koliko se puta ponovio pokus

$1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n \geq 0{,}5 \Rightarrow n \geq 5{,}88 \Rightarrow n = 6$

1.4 Beskonačni vjerojatnosni prostor

Pr. Bacamo kocku dok ne padne 6.

$$\Omega = \{6, 16, 26, 36, 46, 56, xx6, xxx6, \dots\}$$

$$x \in \{1,2,3,4,5\}$$

Definicija:

Algebra događaja $\mathcal{F}$ se naziva σ sigma-algebra ako vrijedi $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. Tada vjerojatnost P mora zadovoljiti uvjet σ-aditivnosti.

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{za disj. } A_1, A_2, \dots$$

- Ω može biti: a) prebrojiv $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$
  b) neprebrojiv $\Omega \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow$ geometrijska vjerojatnost

Zad. Ilko i Neven izvlače kuglice. 2B i 6C.
1. 2.

a) Pobjednik je onaj koji prvi izvuče B kuglicu. Kuglice se vraćaju. Izr. vj. pobjede Ilka i Nevena.

$$\Omega = \{B, CB, CCB, CCCB, \dots\}$$

$$1 = \{B, CCB, CCCCB, \dots\} \rightarrow \text{svaki drugi}$$

$$P(1) = \frac{2}{8} + \frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8} + \left(\frac{6}{8}\right)^4\cdot\frac{2}{8} + \dots + \left(\frac{6}{8}\right)^{2n}\cdot\frac{2}{8}$$

povoljne

ukupno

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{6}{8}\right)^{2n}\cdot\frac{2}{8} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{za } |x|<1 \qquad \text{PAZI! } n \text{ MORA kretati od } 0$$

$$P(I)=\frac{4}{7} \qquad P(N)=\frac{3}{7}$$

b) kuglice se ne vraćaju

$$P(I)=\frac{2}{8}+\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6}+\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}+\overbrace{\frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\ }{2}}^{c}$$

I N I I N I N I I N I N I N I

$$P(I)=\frac{4}{7}$$

1. DZ-9 Novčić bacamo dok se 2x za redom ne pojavi isti znak. Opiši vj. prostor i izr. vj. da se pokus izvrši u parnom broju bacanja.

$\Omega = \{PP, GG, PGG, GPP, PGPP, GPGG, PGPGG, GPGPP, \ldots\}$

$A = \{\text{parni br. bacanja}\} = \{PP, GG, PGPP, GPGG, \ldots\}$

$$P(A)=\underset{P}{\frac{1}{2}}\cdot\underset{P}{\frac{1}{2}}\cdot 2+\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot 2+\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot 2+\ldots$$

jer može PP ili GG

KRIVO! $P(A)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=2\left[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-1\right]$

n MORA ići od 0 oduzeti prvi član!

1.MI-11-1 Tombola 15/90. Iz bubnja izlazi 1 po 1 br. dok ne bude bingo. (bez vraćanja)

a) izr. vj. da u najviše n izvlačenja bude izvučeno svih 15 br. koje Marija ima na kartici?

b) da u točno n .... — " — " —

$\cancel{\binom{90}{15}}$ → nema veze s ovim

to nije ukupan br ishoda nego 90 razl. kartica.

$$P(A) = \frac{\binom{n}{15} \cdot 15 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot \overbrace{(n-15)}^{(90-15)=75} \cdot (n-15)!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot \ldots \cdot (90-n+1)}$$

$(n-15)(n-16) \ldots 1$

n izvlačenje

prvi put bilo koji br od 90 (bitan redoslijed)

$$P(B) = \frac{15 \cdot \binom{n-1}{14} \cdot \overbrace{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 1}^{14!} \cdot \binom{75}{n-15} \cdot (n-15)!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot \ldots (90-n+1)}$$

odabir mojeg broja koji će biti izv. u n-tom bacanju

ostalih 14 u n-1 izvlačenja

AUDITORNE - kombinatorika

1. U liftu se nalazi 7 osoba. Ako pretpostavimo da je vjerojatnost izlaska na svakom katu za svaku osobu ista, kolika je vj. da će svatko izaći na razl. katu? 10 katova.

$$P(A) = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10^7 \to \text{načina}} \quad \text{ili} \quad \frac{\underbrace{\binom{10}{7}}_{\text{7 od 10 katova}} \cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10^7}$$

$7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \to$ podj. katova po ljudima

2. 4 grla za žarulje: 2 ok, 2 defektna. 7 žarulja: 4 ok, 3 defektne. Slučajni odabir 4 žarulje. Vjerojatnost da dođe do svjetla.

supr. vj:

$\binom{3}{2} \to$ odabir 2 def. ž.

$2\cdot 1 \to$ stavljanje na ispravna grla

$\binom{5}{2}\cdot 2\cdot 1 \to$ ostale

$$P(A) = 1 - \frac{\binom{3}{2}\cdot 2\cdot 1 \cdot \binom{5}{2}\cdot 2\cdot 1}{\binom{7}{4}\cdot \underbrace{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}_{\text{odabir mjesta}}} = \frac{6}{7}$$

$\binom{7}{4} \to$ odabir žarulja

3. Računalo ispisuje brojeve s 8 znamenki i uz pretp. da je vj. svake znam. jednaka. Izračunaj:

a) 4 poslj. znamenke iste

$$P(A) = \frac{10^4 \cdot 10 \cdot 1\cdot 1\cdot 1}{10^8}$$

$10^4 \to$ prve 4; $10 \to$ odabir zadnje na 10 nač.; $1\cdot 1\cdot 1 \to$ moraju biti iste

$10^8 \to$ 8 znam na 10 načina

10 10 10 10 10 1 1 1

načina

b) točno 3 znam. su jednake, a ostalih 5 međusobno različite

$$P(B) = \frac{10 \cdot \binom{8}{3} \cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^8}$$

$\binom{8}{3} \to$ odabir mj.

$10 \to$ odabir znam. koja će se pojavit 3 puta

9 8 7 6 5 $\to$ odabir ostalih

c) dva para jednakih znamenki (tj. točno 2 znam pojavljuju se 2 puta)

8 7 6 5

$$P(C) = \frac{10\cdot\binom{8}{2}\cdot 9\cdot \binom{6}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^8} \Big/ :2$$

0,63504 : 2

$$P(C) = \frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\binom{6}{2}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^8}$$

1. MI-09-1 U kutiji 6B, 4C kuglice. Kolika je vj. da izvučemo bar 5 B, ako izvlačimo 7 kuglica:

a) bez vraćanja (odjednom izvuči)

b) s vraćanjem (kao ponavljanje pokusa)

a) $$P(A) = \frac{\binom{6}{5}\binom{4}{2} + \binom{6}{6}\binom{4}{1}}{\binom{10}{7}} = \frac{1}{3}$$ → razdvajanje na slučajeve

5 od 6 B

→ C

7 izvlačenja

odabir kojih 5 od 7 smo izvukli B ! PAZI ♡

b) $$P(B) = \left(\frac{6}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \binom{7}{5} + \left(\frac{6}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^1 \cdot \binom{7}{6} + \left(\frac{6}{10}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{10}\right)^0 \cdot \binom{7}{7}$$

vj. izvlačenja B u jednom izvlačenju

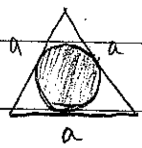
1.5 Geometrijska vjerojatnost

Pr. Biramo br. iz intervala $[0,5]$ na sreću. Kolika je vj. da smo izabrali između 1 i 4.

$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$P(A) = \frac{3}{5}$

Zad. Biramo točku unutar jednakostr. Δ. Stranica a. Kolika je vj. da smo odabrali točku unutar kruga upisanog u Δ?



$$P(A) = \frac{P_{KRUGA}}{P_{TROKUTA}} = \frac{r^2\pi}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \qquad r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}v$$

- Ω je neprebrojiv i tada definiramo geometrijsku vjerojatnost kao

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

m je mjera

$m=1$ → duljina

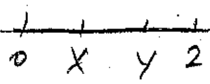
$m=2$ → površina

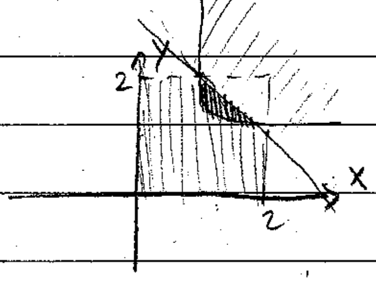
$m=3$ → volumen

Zad. zzv. Biramo na sreću 2 broja iz $[0,2]$. Kolika je vj da je zbroj ta 2 broja < 3, a umnožak > 2.

$x, y \in [0,2]$ $\quad x+y<3$ $\quad x\cdot y>2$

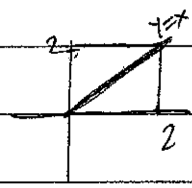
$y<3-x$ $\quad y>\frac{2}{x}$





$$P(A)=\frac{P_A}{P_\square}=\frac{\int_1^2\left(3-x-\frac{2}{x}\right)dx}{4}=\frac{\frac{3}{2}-2\ln 2}{4}$$

UOČIMO: $[0,2]$. Kolika je vj. da smo izabrali 2 ista?



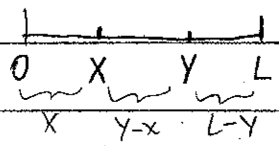
$P(A)=\frac{0}{4}=0$ → zato ne moramo uzimati u obzir rubne točke krivulje!

→ paradoks: Kolika je vj. da odaberemo bilo koji br.? Npr π isto $\emptyset$!

1. MI-08-03 Imamo štap duljine l i ispilili ga na 2 mjesta i dobili 3 komada. Izračunaj vj da je najkraći dio veći od $\frac{1}{4}l$.

UVJETI: ako je najmanji dio $> \frac{1}{4}l$, onda su sigurno i ostali!

1° $\boxed{y>x}$

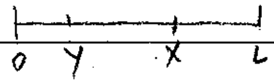


$x>\frac{1}{4}L$

$y-x>\frac{1}{4}L$

$L-y>\frac{1}{4}L$

2° $\boxed{y<x}$

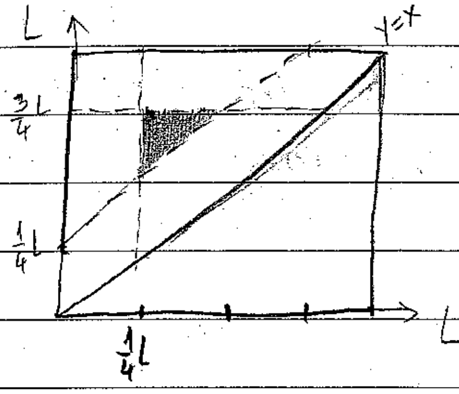


$y>\frac{1}{4}L$

$x-y>\frac{1}{4}L$

$L-x>\frac{1}{4}L$

ČESTA GREŠKA: ne zaboraviti i $y<x$.



• S obzirom da su događaji simetrični možemo naći za 1° i pomnožiti s 2.

$$P(A) = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}L \cdot \frac{1}{4}L}{L^2} = \frac{1}{16}$$

1.MI – 11-3b. $a \in [-1,1]$ $\quad x^2+ax+b>0 \quad \forall x \in R$

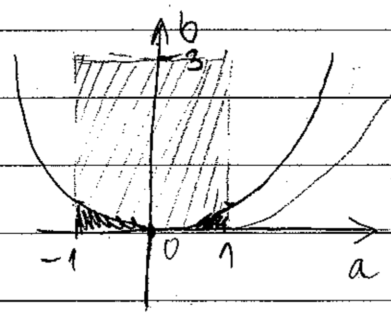
$b \in [0,3]$

UVJET: $D<0$

$b^2-4ac<0$

$a^2-4b<0$

$b>\frac{a^2}{4}$



$P(A) = 6 - 2 \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{4}\,dx$

$2 \cdot 3 \to P_{\square}$

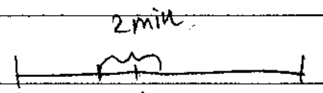
$P(A) = \frac{35}{36}$

1.MI-09-3 Lopov odluči provaliti u mjenjačnicu u slučajno odabranom trenutku između 2:50 i 3:00. I policajac je tada u ophodnji.

a) Ako lopovu trebaju 2 min za pljačku, a policajac će u ophodnji biti 5 min. Kolika je vj. da će policajac uhvatiti lopova

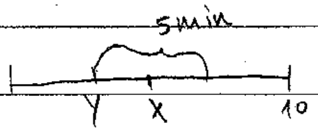
1° $Y>X$ $\quad X,Y \in \underbrace{[0,10]}_{\to 10 \text{ min}}$

↓ Lop. ↓ Pol.

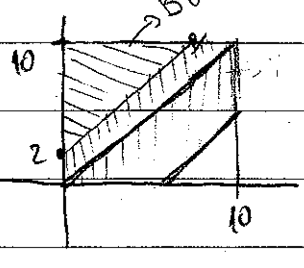


$Y-X<2$

2° $Y<X$



$X-Y<5$

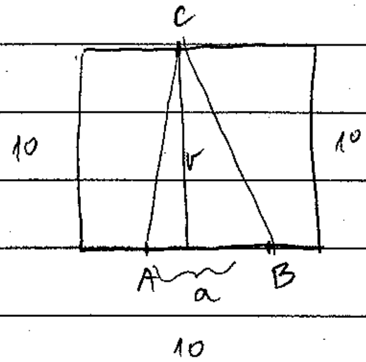


$$P(A) = \frac{100 - \frac{1}{2}5 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8}{10 \cdot 10} = \frac{111}{200} \approx 55\%$$

b) Kolika je vj. da će lopov doći, provaliti i otići prije nego dođe polic
- to je suprotno samo u 1° $Y > X$ (ne cijela suprotnost)

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8}{100} = \frac{32}{100} = 32\%$$

1. MI - 11 - 2 Na jednoj str. kvadrata dulj. 10 biramo na sreću 2 točke A i B. A na njoj supr. stranici odaberemo točku C. Izr. vj. da je $P_{\triangle ABC} < 25$.



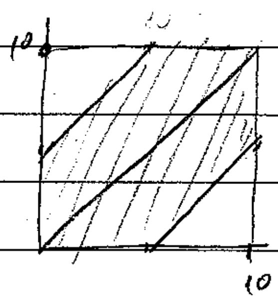
$x, y \in [0, 10]$

$a = |y - x|$

$$P_\triangle = \frac{1}{2} a \cdot v < 25$$

$$\frac{1}{2} |y - x| \cdot 10 < 25$$

$$|y - x| < 5$$



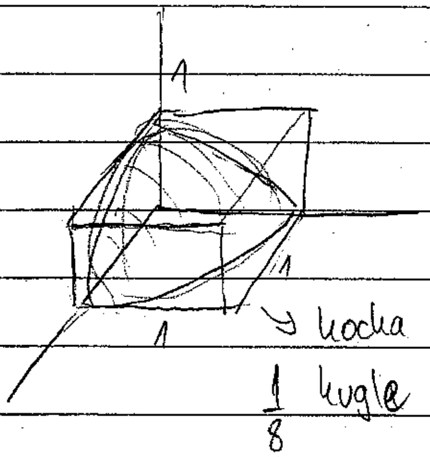
→ slučajan odabir C uopće ne ovisi jer je v uvijek 10

$$P(A) = \frac{100 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5^2}{100} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

zad. Biramo na sreću $x, y, z \in [0, 1]$. Kolika je vj. da je zbroj kvadrata < 1.

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

$$P(A) = \frac{V_A}{V_\Omega} = \frac{\frac{1}{8} \frac{4}{3} 1^3 \pi}{1^3} = \frac{\pi}{6}$$

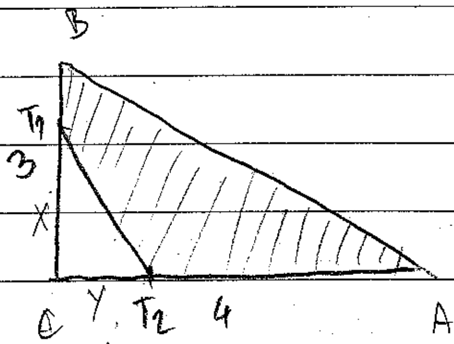


→ kocka je Ω

$\frac{1}{8}$ kugle

ZZV–50 U $\triangle ABC$ duljine kateta su 3, 4. Na jednoj slučajno odaberemo T_1, na drugoj T_2. Izr. vj. da je pov. četverokuta $ABT_1T_2 > \frac{1}{2} P_{\triangle}$.

$P_{č} > \frac{1}{2} P_{\triangle}$

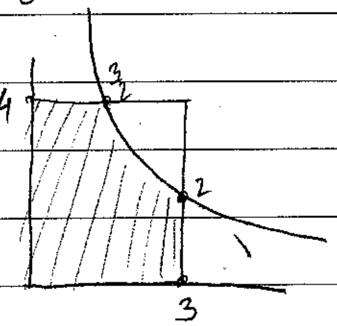


$X \in (0,3)$

$Y \in (0,4)$

$P_{č} > \frac{1}{2} P_{\triangle}$

$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - \frac{1}{2} x \cdot y > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$



$6 - \frac{XY}{2} > 3$

$\boxed{XY < 6}$

$Y < \frac{6}{X}$

$$P(A) = \frac{12 - \int_{3/2}^{3} \left(4 - \frac{6}{x}\right) dx}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$$

2. UVJETNA VJEROJATNOST

2.1 Definicija

- intuicija: bacamo kocku. Vj. da padne 6 $P(A)=\frac{1}{6}$

ako znamo da je pao paran br. Vj da padne 6 $P(B)=\frac{1}{3}$

$P(A|B)$ → događaj A uz uvjet B

uvjet

$$P(A|B)=\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

paran br.

Definicija:

Neka je B događaj čija je vjerojatnost $P(B)>0$, tada uvjetnu vjerojatnost uz uvjet B definiramo funkcijom

$P(\ |B): \mathcal{F} \to [0,1]$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad \forall A \in \Omega$$

→ iz formule slijedi vjerojatnost umnoška (ili presjeka):

$$P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$$

1. DZ-15. Bacamo 4 kocke. Vj. da je zbroj >6, ako su svi <4.

$B=\{\text{svi manji od } 4\}$

$A=\{\text{zbroj} >6\}$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{3^4-15}{6^4}}{\frac{3^4}{6^4}}=\frac{66}{3^4}=0,8148$$

3^4 → povoljno

mora biti isti br!

3333 → 1
3332 → 4
3331 → 4
3322 → $\binom{4}{2}$
3311 → $\binom{4}{2}$

lakše supr vj: zbr ≤ 6

1111 → 1
1112 → 4
1113 → 4
1122 → 6

15

2.ZZV-26. 4P, 5B, 6C Izvlačimo 3 kuglice jednu za drugom bez vraćanja
A = { sve kuglice razl. boja }
B = { prva kuglica bijela }
Izračunajte P(A|B) i P(B|A).

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\overset{B}{\frac{5}{15}} \cdot \overset{P}{\frac{4}{14}} \cdot \overset{C}{\frac{6}{13}} + \overset{B}{\frac{5}{15}} \cdot \overset{C}{\frac{6}{14}} \cdot \overset{P}{\frac{4}{13}}}{\frac{5}{15}} = \frac{24}{91}$$

$\frac{5}{15}$ → 5B, → 15 ukupno

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{13}}{\underset{B}{\frac{5}{15}} \cdot \underset{P}{\frac{4}{14}} \cdot \underset{C}{\frac{6}{13}} \cdot 6} = \frac{1}{3}$$

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$

zad. (mass.) 4. ferovca i profesor izašli su van u petak navečer. Vjerojatnost uspješnog uleta ferovaca = 0,3, a prof = 0,9.
B ⇐ Ako znamo da je samo jedan od njih imao uspješnu večer, koliko je vj. da je to bio prof? ↓A

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\overset{\text{prof.}}{0{,}9} \cdot 0{,}7^4}{0{,}9 \cdot 0{,}7^4 + (\underset{\text{prvi pogodio}}{0{,}3} \cdot 0{,}7^3 \cdot \underset{\text{prof. fulao}}{0{,}1}) \cdot \binom{4}{1}}$$

→ ostalima se nije posrećilo i ima ih 4 $(1-0{,}3)^4$

→ biramo jednog od 4

$= 0{,}84$

1. DZ-13. Novčić bacamo 10 puta vj. da je svih 10 puta palo P, ako je u tih 10 bacanja pismo palo bar 9 puta.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\underset{P}{\left(\frac{1}{2}\right)^9} \cdot \underset{G}{\frac{1}{2}} \cdot \binom{10}{1}}$$

→ presjek događaja

→ problem je što ne znamo kad je što palo.

odabir 1 mj. od 10 kad je pala G

$= \frac{1}{11}$? MENI ISPADNE $1/10$

2.2 Nezavisnost događaja

- intuicija: u bubnju 3B i 7C, izvlačimo 2:

$A = \{\text{prva bijela}\}$

$B = \{\text{druga crna}\}$

a) vraćanje u bubanj b) bez vraćanja

a) $P(A) = \frac{3}{10}$ $P(B) = \frac{7}{10}$ → nezavisni (A i B) → $P(AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = P(A) \cdot P(B)$

b) $P(A) = \frac{3}{10}$ $P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$ → zavisni (A i B)

B pa C ili C pa C → bitno je da je 2. crna

$P(AB) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \neq P(A) \cdot P(B)$

Definicija:

Za događaje A i B kažemo da su nezavisni, ako vrijedi da je vjerojatnost $P(A|B) = P(A)$ ili $P(B|A) = P(B)$.

Tada $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

nužan i dovoljan uvjet za nezavisnost

Pr. Bacamo 2 kocke: 1° vj da je na prvoj paran br, a na drugoj br > 4

2° vj da je na prvoj paran br, a zbroj je 5

1° budući da su nezav. možemo množiti $P(AB) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$

2° $\frac{2}{36} = \frac{1}{12}$ (23 i 41)

1.DZ-11 Neka su A i B nezav. $A \subset B$. Dokaži $P(A) = \emptyset$ ili $P(B) = 1$

$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

$P(AB) = P(A)$

$P(A) = P(A) \cdot P(B)$

A B → $A \cap B = A$

$P(A)(1 - P(B)) = 0 \quad < \begin{matrix} P(A) = 0 \\ P(B) = 1 \end{matrix}$ ///

Definicija:

Događaji $A_1, A_2, \ldots, A_n$ su nezavisni, ako za svaki izbor nekoliko događaja $A_{i_1}, \ldots A_{i_k}$, $2 \le k \le n$, vrijedi (da je vjeroj. presjeka)

$$P(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

oprez: Nije dovoljno da vrijedi $P(A_1 \ldots A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n)$.
to mora vrijediti i za svaki njihov podskup.
Dakle, ako je $P(ABC) = P(A) P(B) \cdot P(C) \rightarrow ABC$ ne moraju biti nez

1.-M1-09-2.a) Definiraj nezavisnost događaja ABC.

$$P(ABC) = P(A) P(B) P(C)$$
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(BC) = P(B) P(C)$$
$$P(AC) = P(A) \cdot P(C)$$ i sad je to ok ♡

b) dokažite ako su ABC nezavisni da su onda A i $B \cup C$ nezavisni

$$P(A \cdot (B \cup C)) = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(AB\cancel{A}C)$$

nezavisnost $\rightarrow$ $= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

$$= P(A) \cdot \left[P(B) + P(C) - P(BC) \right]$$
$$= P(A) \cdot P(B \cup C)$$

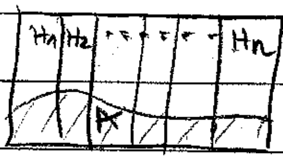
2.3 Potpuna vjerojatnost i Bayesova formula

- intuicija: 40% prošlo MAT1, dekan i pali svima odobrio MAT2.
  Od onih koji su prošli MAT1, MAT2 prošlo 64%.
  Od onih koji su pali MAT1, MAT2 prošlo 28%.

$$P(A) = \underset{\text{prošli}}{0{,}4} \cdot \underset{64\%}{0{,}64} + \underset{\text{pali}}{0{,}6} \cdot \underset{28\%}{0{,}28} = 0{,}424$$

$P(H_1)\ P(A|H_1)\ \ P(H_2)\ P(A|H_2)$

- općenito:



$\rightarrow \Omega = H_1 \cup H_2 \dots \cup H_n$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$

IZVODIĆ $H_1, \dots H_n \rightarrow$ disjunktni $\rightarrow$ potpun sustav događaja (particija)

$$A = AH_1 \cup AH_2 \dots \cup AH_n$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

Formula potpune vjerojatnosti:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A|H_i)$$

1.DZ-17 2M i 3D, 1M i 4D. Na sreću iz prve u drugu kutiju prebacimo 2 čokolade, a onda iz druge izvlačimo jednu za pojesti. Vjerojatnost da je to Milka ♡?

hipoteza - svi mogući ishodi 1. pokusa

$H_0 = \{0M, 2D\}$ $\quad P(H_0) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$ $\quad P(H_1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$ $\quad P(H_2) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$

$H_1 = \{1M, 1D\}$

$H_2 = \{2M\}$ $\quad P(A|H_0) = 1M, 6D = \frac{1}{7}$

$P(A|H_1) = 2M, 5D = \frac{2}{7}$ $\quad P(A) = \frac{9}{35}$

$P(A|H_2) = 3M, 4D = \frac{3}{7}$

2-ZZV-4 Iz jednog snopa od 52 karte izvlačimo 1, a iz drugog 2. Izmiješamo sve 3 i na sredu otkrijemo jednu kartu. Vj. da je As?

$H_0 = \{0 \text{ asa}\}$

$H_1 = \{1 \text{ as}\}$

$H_2 = \{2 \text{ asa}\}$

$H_3 = \{3 \text{ asa}\}$

$A = \{\text{na kraju jedan as}\}$

$$P(H_0) = \underbrace{\frac{48}{52}}_{1.\text{špil}} \cdot \underbrace{\frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}}}_{2.\text{špil}}$$

$$P(H_1) = \frac{4}{52} \cdot \frac{\binom{48}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{48}{52} \cdot \frac{\overset{1\text{ as}}{\binom{4}{1}} \overset{\text{neka od ostalih}}{\binom{48}{1}}}{\binom{52}{2}}$$

$$P(H_2) = \frac{48}{52} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{4}{52} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{1}}{\binom{52}{2}}$$

$$P(H_3) = \frac{4}{52} \cdot \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}}$$

$P(A|H_0) = 0$

$P(A|H_1) = \frac{1}{3}$

$P(A|H_2) = \frac{2}{3}$

$P(A|H_3) = 1$

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i) \cdot P(A|H_i) = \frac{1}{13}$$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$$

Bayesova formula:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\underbrace{\sum P(H_i) \cdot P(A|H_i)}_{P(A)}}$$

1. MI-07-4. Izvor emitira Ø i 1. Znak 1 se pojavljuje s vj. 0,75, a Ø s 0,25. Na kraju kanala se 5% pogrešno dekodira. Ako mi na kraju interpretiramo 1 kolika je vj. da je ona poslana?

ako posl. Ø da je prim. 1 = 5%

H_0 = poslana Ø $\quad P(H_0)=0,25 \quad P(A|H_0) = 0,05$

H_1 = poslana 1 $\quad P(H_1)=0,75 \quad P(A|H_1) = 0,95$ → posl 1, prim 1. nema greške = 9

A = {primljena je 1}

$$P(H_1|A) \stackrel{B}{=} \frac{0,75 \cdot 0,95}{0,25 \cdot 0,05 + 0,75 + 0,95} = 0,983$$

1. MI-10-4 34% ljudi ima krvnu grupu 0. → može samo Ø

A ima 37% → može primiti Ø i A

B ima 21% → može primiti Ø i B

AB ima 8% → može primit sve krvne grupe

MODIFICIRANI ZADATAK♡ a) Slučajnim odabirom odaberemo 2 osobe. Vj da sluč. odabrana osoba da krv. sluč. odabr. osobi U={uspješna transfuzija}

TKO MOŽE PRIMITI:

$P(H_0)=0,34 \quad P(U|H_0)=1$

$P(H_A)=0,37 \quad P(U|H_A)= 37\%+8\%=0,45 \quad P(U)=\sum P(H_i)\cdot P(U|H_i)$

$P(H_B)=0,21 \quad P(U|H_B)= 21\%+8\%=0,29 \quad P(U)=0,5738$

$P(H_{AB})=0,08 \quad P(U|H_{AB})=0,08$

b) ako uspješno primi krv kolika je vj. da je krv dala osoba krv. grupe Ø?

$$P(H_0|U) = \frac{P(H_0)\cdot P(U|H_0)}{P(U)} = 0,5925$$

2.ZZV-72. 4 krvoločna lovca gađaju vepra. Vj. pogotka prvog je 0,3 a ostalih 0,2. Za ubijanje vepra potrebna su 2 vepra. Jedan ga je spazio i izvršio 3 gađanja i ubio. Kolika je vj. da je gađao prvi lovac? $V = \{\text{vepar mrtav}\}$

$P(H_1|V) = ?$

H_1 = gađao 1. $\quad P(H_1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(V|H_1) = 0{,}3^3 + 0{,}3^2 \cdot 0{,}7 \cdot \binom{3}{2}$ odabir u kojem gađanju

H_2 = —||— 2. $\quad P(H_2) = \frac{1}{4}$ $\quad P(V|H_2) = 0{,}2^3 + 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 \cdot \binom{3}{2}$

H_3 = —||— 3. $\quad P(H_3) = \frac{1}{4}$ $\quad P(V|H_3) = P(V|H_4) = P(V|H_2)$

H_4 = —||— 4. $\quad P(H_4) = \frac{1}{4}$

$$P(H_1|V) = \frac{P(H_1) \cdot P(V|H_1)}{P(V)} \Rightarrow \Sigma P(H_i) P(V|H_i)$$

vj. svakog da je baš on gađao $= \frac{1}{4}$

$$P(H_1|V) = 0{,}41$$

1.-MI-08-4 Bacamo kocku, a zatim bacamo kocku onoliko puta koliko je palo prvi put. Ako su ukupno pale točno 2 petice kolika je vj. da je jedna od njih pala u prvom bacanju?

$H_i = \{\text{pao je } i \text{ u prvom bacanju}\}$ $\quad i = 1,2,3,4,5,6$ $\quad A = \{\text{točno 2 petice}\}$

$P(H_i) = \frac{1}{6}$

$P(H_5|A) = ?$

$P(A|H_1) = 0$

$P(A|H_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$ → ako je pala 2, bacam još 2 puta. Vj da 2 put padne 5 $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

$P(A|H_3) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \binom{3}{2}$ → odabir kad je pala 5

$\frac{5}{6}$ → ne smije biti 5

$P(A|H_4) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2 \binom{4}{2}$

$P(A|H_5) = \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 \binom{5}{1}$ → Prvi put je već pala 5! TRIKIĆ

$P(A|H_6) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \binom{6}{2}$

$$P(H_5|A) = \frac{P(H_5) \cdot P(A|H_5)}{\Sigma P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = 0{,}4926$$

3. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

- motivacija: Kod bacanja kocke varijabli X dodijelimo br. koji je pao
$$P(X \leq 2) = \frac{2}{6}$$

3.1 Diskretne slučajne varijable

$S = \{x_1, x_2, \dots\}$ skup vrijednosti
Neka je A_k neki skup $A_k = \{w \in \Omega : X(w) = x_k\} \in \mathcal{F}$

Definicija:
Preslikavanje $X \in \Omega \to S$ je diskretna slučajna varijabla ako za svaki $x_k \in S$ je skup $A_k = \{w \in \Omega : X(w) = x_k\}$ tj. element σ-algebre $\mathcal{F}$.

- oznaka: $p_k = P(X = x_k)$ $\quad p_k > 0, \ \sum p_k = 1$

- Zakon razdiobe slučajne varijable X:
$$X \sim \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots\dots x_k \\ p_1, p_2, \dots\dots p_k \end{pmatrix}$$

zad. Bacamo 3 kocke. Neka je X = broj šestica. Odredi zakon razdiobe

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \left(\frac{5}{6}\right)^3 & \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\binom{3}{1} & \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\binom{3}{2} & \left(\frac{1}{6}\right)^3 \end{pmatrix}$$
→ koliko je palo 6

jedna 6 ostalo gdje je pala 6

- provjera: zbroj vjerojatnosti mora biti 1!
$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$$

2.DZ-2 U urni se nalazi n kuglica numeriranih 1-n. Izvlačimo na sreću 3 kuglice. Neka je X slučajna var. koja poprima vrijednost najvećeg od ta 3 broja. Odredi razdiobu

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \cdots\cdots & n & \cdots \\ \frac{1}{\binom{n}{3}} & \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{3}} & \frac{\binom{4}{2}}{\binom{n}{3}} & \cdots\cdots & \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}} = 1$$

Zad. Bacamo 2 novčića odjednom dok ne padnu 2 pisma. Neka je X br. bacanja. Odredi razdiobu od X.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots\cdots & n & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} & \left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4} & & \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{4} & \cdots \end{pmatrix}$$

$W =$ PP, GG, GP, PG

PP PP

ne smije biti PP

Pr. X = br. na prvoj kocki
Y = br. na drugoj
$P(X \leq 2, Y = 3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$ → pretpostavili smo da su nezavisni

Definicija

Slučajne varijable $X, Y: \Omega \to S$ su nezavisne, ako za sve $x_k, y_j \in S$ vrijedi $P(X = x_k, Y = y_j) = P(X = x_k) \cdot P(Y = y_j)$

Definicija

Slučajne varijable $X_1, \dots X_n$ definirane na istom vjer. prostoru Ω su nezavisne, ako za sve $A_1, \dots A_n$ (događaje) $\in S$ vrijedi
$P(X_1 \in A_1, \dots X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in A_n)$

- Neka je X neka slučajna varijabla, $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kolika je razdioba od varijable $Y = \varphi(X)$? (npr $y = \sin x$, $y = x^2, \dots$)

Pr.

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

a) odredi razdiobu od $Y = X^2$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

b) odredi razdiobu $Y = X_1 \cdot X_2$ gdje X_1 i X_2 imaju razdiobu kao X

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0{,}16 & 0{,}04 & 0{,}51 & 0{,}05 & 0{,}08 & 0{,}16 \end{pmatrix}$$ → množimo svaki sa svakim (iz razdiobe)

$P(Y = -2) = P(X_1 = -1, X_2 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = -1)$
nezavisne → $0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$

......

3.2 Numeričke karakteristike slučajnih varijabli

Definicija:

Očekivanje slučajne varijable definiramo kao:

$$E(X) = \sum_k x_k \cdot p_k \qquad \text{oznake: } m_X, \mu_X, \bar{x}, EX$$

Pr. (prethodni primjer)

$E(X) = 0,7$

Pr. $X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \end{pmatrix}$

$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = +\infty$ suma divergira

– očekivanje ne postoji

Teorem: svojstva očekivanja

Neka su X i Y na istom prostoru Ω:

i) $E(sX + t \cdot Y) = sE(X) + tE(X)$, $s, t \in \mathbb{R}$ linearnost

ii) ako su nezavisne X i Y: $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

DOKAZ:

$$E(s \cdot X) = \sum_k s \cdot x_k \cdot p_k = s \cdot \sum_k x_k \cdot p_k = s \cdot E(X)$$

$$E(X+Y) = \sum_{jk} (x_j + y_k) \cdot p_{jk} = \sum_{jk} x_j \cdot p_{jk} + \sum_{jk} y_k \cdot p_{jk}$$

$$= \sum_j x_j \underbrace{\sum_k p_{jk}}_{p_j} + \sum_k y_k \sum_j p_{jk} = \sum x_j p_j + \sum y_k p_k = E(X) + E(Y)$$

$$E(X \cdot Y) = \sum_{jk} x_j \cdot y_k \cdot p_{jk} = \sum x_j y_k p_j p_k = \sum x_j p_j \sum y_k p_k$$

$$= E(X) \cdot E(Y)$$

- ako znamo razdiobu od X koliko je očekivanje od $Y=\psi(X)$?

  -prethodni primjer: $Y=X^2 \Rightarrow E(Y)=E(X^2)=1{,}9$

  $$E(X^2) \neq E(X)^2$$

  mogli smo lakše: $E(X^2)=\sum_k x_k^2 p_k$

  ili općenito:

  $$E(\psi(X)) = \sum_k \psi(x_k)\cdot p_k$$

Definicija:
Ishodišni moment reda n slučajne varijable X je:

$$E(X^n)=\sum_k x_k^n p_k$$

Centralni moment reda n definiramo sa:

$$E\left[(X-E(X))^n\right] = \sum_k (x_k - m_x)^n p_k \qquad m_x=E(X)$$

Definicija:
Disperzija ili rasipanje ili varijanca slučajne varijable X je

$$D(X)=E\left[(X-E(X))^2\right]$$

Disperzija – centralni moment reda 2.

Pr. $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ $\qquad D(X)=\sum x_k^2 p_k - E(X)^2 = 1^2\cdot 0{,}2^2+0^2\cdot 0{,}3^2+1^2\cdot 0{,}1^2+2^2\cdot 0{,}4^2-0$

$= 1{,}41$

krivo?

$E(X)=0{,}7$

ISPIT! Izvod formule za disperziju: $\rightarrow$ konstanta

$$D(X)=E(X^2-2XE(X)+(E(X))^2)$$
$$= E(X^2)-2E(X)\cdot E(X)+(E(X))^2$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

♡ Teorem : svojstva disperzije

i) $D(sX) = s^2 \cdot D(X)$

ii) ako su X i Y nezavisni tada je: $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

DOKAZ:

1° $D(sX) = E(s^2X^2) - (E(sX))^2 = s^2E(X^2) - s^2(E(X))^2 = s^2(E(X^2) - E(X)^2)$
$= D(X)$

2° $D(X+Y) = E\left[(X+Y)^2\right] - \left[E(X+Y)\right]^2 = E(X^2) + 2\cdot \cancel{E(XY)} + E(Y^2) - E(x)^2$
$\cancel{-2E(X)E(Y)} - E(Y)^2$

krati se ako su nezavisni!

$= D(X) + D(Y)$

Definicija:

Standardna devijacija (odstupanje)

$\sigma = \sqrt{D(x)}$ $\qquad D(X) \geq 0$

1\. MI-11-4 Ako je $D(X) = 2$ $D(Y) = 4$, X, Y nezavisni. Koliko je $D(2X-Y) = ?$

! minus je konstanta pa izlazi ispred s kvadratom!

$D(2x-y) = 4D(X) + (-1)^2 \cdot D(Y) = 8 + 4 = 12$

2\. DZ-5 7 žarulja (3I, 4N)

$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{7} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3} \end{pmatrix}$ br. pokušaja

1\. put fulali $\quad$ N N I

$E(x) = 2$

1.MI-09-5 Neka je X max. vrijednost od 2 odabrana broja iz skupa 1-7 (isti br. može biti odabran 2 puta). Očekivanje i disp.?

$$X = \max\{a,b\} \qquad a,b \in \{1,2,\dots,7\}$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{49} & \frac{3}{49} & \frac{5}{49} & \frac{7}{49} & \frac{9}{49} & \frac{11}{49} & \frac{13}{49} \end{pmatrix} = \frac{49}{49} \checkmark$$

$$E(X) = 5{,}143 \qquad D(X) = 29{,}143 - 5{,}143^2 = 2{,}69 \qquad \sigma = \sqrt{2{,}69} = 1{,}64$$

1.MI-10-4 a) 1B, 4C izvlačimo 1 po 1 s vraćanjem sve dok ne izvuč. B neka je X br. izvlačenja. D(X), E(X) i izr. vj $P(X \le 15) \mid X > 10$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} & \left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5} & \left(\frac{4}{5}\right)^3\cdot\frac{1}{5} & \dots & \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5} & \dots \end{pmatrix}$$

B   C B

SUME:

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2} = 5$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad / \ |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad / \cdot x$$

$$D(X) = \sum n^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} - 5^2$$

DZ

$$P(X \le 15 \mid X > 10) = \frac{P(11 \le X \le 15)}{P(X > 10)} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{11}\cdot\frac{1}{5} + \dots + \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\cdot\frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{10}}$$

bitno da se prvih 10 puta nije dogodilo

b) jedno po jednu dok drugi put izvučemo bijelu (vraćanje)

X = br. izvlačenja $E(X)=?$

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} & 2\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^2 & 3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 & \dots & (n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{5}\right)^2 & \dots \end{pmatrix}$$

2 slučaja: CBB, BCB

CCBB, CBCB, BCCB

$$E(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Big|' \rightarrow \sum_{1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Big|' \rightarrow \boxed{\sum_{2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}}$$

$$E(X) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot \frac{2}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^3} = 10$$

Definicija:

Karakteristične funkcije

Karakteristična funkcija varijable X se definira s $\vartheta_X(t) = E\left[e^{itX}\right]$

$= \sum_k e^{itx_k}\cdot p_k$

2.DZ-11 Slučajna varijabla $X \rightarrow \{-2,-1,0,1,2\}$ s jednolikom razdiobom

$\vartheta_X(t) = ?$

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$\sin t = \frac{1}{2}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$

$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$

$$\vartheta_X(t) = \frac{1}{5}\cdot e^{it(-2)} + \frac{1}{5}\cdot e^{-it} + \frac{1}{5}\cdot e^{0} + \frac{1}{5}e^{it} + \frac{1}{5}\cdot e^{it2}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cos t + \frac{2}{5}\cos 2t$$

Teorem: Svojstva karakteristične funkcije

i) karakteristična fja. jednoznačno određuje sluč. varijablu

ii) ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable vrijedi da je karakt. funkcija zbroja jednaka umnošku karakt. fja

$$\vartheta_{X_1+X_2+\dots X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot \vartheta_{X_n}(t)$$

iii) $E(X^n) = \frac{\vartheta^{(n)}(0)}{i^n}$ tj. $E(X) = -i\vartheta'(0)$ (prva der.)

$D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2$

Međusobni odnos dvije slučajne varijable

zad. Bacamo 2 kocke $X \to$ aps. vrij. razlike na kockama, a sluč. var. $Y = 1$ ako su br. isti $Y = 2$ ako su različiti. Napišite razdiobe X, Y

$X = |b_1 - b_2|$ $\quad Y = \begin{cases} 1 & \text{isti} \\ 2 & \text{inače} \end{cases}$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{36} & \frac{10}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{6}{36} & \frac{30}{36} \end{pmatrix}$$

Definicija

$E[(X - m_X) \cdot (Y - m_Y)]$

- Kovarijacijski moment se definira formulom $\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$
- Koeficijent korelacije se definira kao $r(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

zad. nastavak:

$E(X) = 1{,}944$

$E(Y) = 1{,}833$

$D(X) = 2{,}054$

$D(Y) = 0{,}14$

$$X \cdot Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ \frac{6}{36} & 0 & \frac{10}{36} & 0 & \frac{8}{36} & 0 & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$$

$E(X \cdot Y) = 3{,}889$

$\operatorname{cov}(X,Y) = 3{,}889 - 1{,}944 \cdot 1{,}833 = 0{,}326$

$$r(X,Y) = \frac{0{,}326}{\sqrt{2{,}054} \cdot \sqrt{0{,}14}} = 0{,}61$$

uoči: Ako su X,Y nezavisne, onda nisu korelirane, ali obrat ne vrijedi. Ako $r(X,Y)=0$ ne znači da su nezav.

♡ Teorem: Disperzija zbroja

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\cdot\sum_{i<j} cov(X_i,X_j)$$

ako su nez $cov=0$!

DOKAZ:

$$D\left(\sum X_i\right) = E\left[\left(\sum X_i - E\left(\sum X_i\right)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=1}(X_i - mx_i)\right)^2\right] =$$

$$= \sum E\left[(X_i-mx_i)^2\right] + 2\cdot\sum E\left[(X_i-mx_i)(X_j-mx_j)\right]$$

$$= \sum D(X_i) + 2\cdot\sum cov(X_i,X_j)$$

- Centriranje i normiranje slučajnih varijabli
- Ako znamo razdiobu od X, znamo i razdiobu od $X-a$, $a\in\mathbb{R}$

$E(X-a)=E(X)-a$, $D(X-a)=D(X)$, $cov(X-a,Y-b)=cov(X,Y)$

– ne mijenja se $D(X)$, cov, r $\quad r(X-a,Y-b)=r(X,Y)$

– odaberimo $a=mx \Rightarrow E(X-mx)=0$, $D(X-mx)=D(X)$

$\mathring{X} = X-mx$ → centrirana slučajna varijabla

- Pogledajmo sada $aX+b$:

$E(aX+b)=aE(X)+b$, $D(aX+b)=a^2D(X)$

$X^* = \dfrac{X-mx}{\sigma_X}$ → normirana slučajna varijabla

DOKAZ: a) $E\left(\dfrac{X-mx}{\sigma_X}\right) = \dfrac{1}{\sigma_X}\left(E(X)-mx\right)=0$, $D\left(\dfrac{X-mx}{\sigma_X}\right) = \dfrac{1}{\underbrace{\sigma_X^2}_{=D(X)}}\cdot D(X)=1$

b) uoči: normiranje ne mijenja koef. korelacije

$$r(X^*,Y^*) = \frac{E(X^*\cdot Y^*) - \overbrace{E(X^*)\cdot E(Y^*)}^{0}}{\underbrace{\sigma_{X^*}\cdot\sigma_{Y^*}}_{1}} = E\left(\frac{X-mx}{\sigma_X}\cdot\frac{Y-my}{\sigma_Y}\right) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = r(X,Y)$$

Teorem:

za koef. korelacije vrijedi: $|r(X,Y)| \leq 1$

Jednakost $r(X,Y) = \pm 1$ vrijedi samo ako je: $Y = aX + b$

DOKAZ:

neka su X^*, Y^* normirane od X, Y

$$D(X^* \pm Y^*) = D(X^*) + D(Y^*) \pm 2\,cov(X^*, Y^*)$$
$$= 2 \pm 2r(X^*, Y^*) = 2(1 \pm r(X,Y)) \geq 0$$
$$= |r(X,Y)| \leq 1$$

Jednakost je za $2[1 \pm r(X,Y)] = 0$

$$\Rightarrow \text{tj. } X^* \pm Y^* = \frac{X - m_X}{\sigma_X} \pm \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} = const \Rightarrow Y = aX + b$$

4. PRIMJENA DISKRETNIH RAZDIOBA

4.1 Geometrijska razdioba

- ponavljanje pokusa dok se ne dogodi neki povoljni ishod

$X \sim G(p)$ p = vjerojatnost realizacije povoljnog događaja

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & \dots \\ p & (1-p)\cdot p & (1-p)^2 \cdot p & \dots & (1-p)^{k-1} \cdot p & \dots \end{pmatrix}$$

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \;,\; k = 1,2,3,\dots$$! → za def. OBAVEZNO napisati k

- primijeti: $P(X > k) = (1-p)^k$

karakt. f-ja geom. razdiobe $\vartheta_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$

$$= p \cdot e^{it} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[(1-p) \cdot e^{it}\right]^k$$

$$= \frac{p \cdot e^{it}}{1 - (1-p)e^{it}}$$

♡ očekivanje: geometrijske razdiobe

$$E(X) = -j\,v'(0) = \frac{1}{p}$$

Auditorne

1. ŠKZ A

2. 32 karte, 4 boje, 5 karata izvlačimo

a) vj. da su svih 5 karata iste boje

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{8}{5}}{\binom{32}{5}}$$

b) vj da se pojave sve boje

$$P(B) = \frac{4 \cdot \binom{8}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{\binom{32}{5}} \quad ?$$

1. ŠKZ B

2. 7 puta bacamo kocku

a) točno 3 šestice b) svi brojevi

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} \cdot 5^4}{6^7} \qquad P(B) = \frac{6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5!}{6^7} \quad ?$$

1. MI-2011-3 U Visovcu živi 1000 ljudi. 950 uvijek govori istinu, a njih 50 uvijek laže. Detektor laži koji griješi u samo 1% slučajeva. Vj. da će pri ispitivanju biti ustanovljeno da čovjek laže? | Vj. da je on uistinu lažac?

H_1 = "slučajno odabrana osoba čovjek govori istinu" -
H_2 = " — " — " — " — " — " — laž "

$P(H_1) = \frac{950}{1000} = 0,95$

$P(H_2) = 0,05$

A = "detektor kaže da čovjek laže"
$P(A) = ?$ $P(H_2|A) = ?$

a) $P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2)$

$P(A|H_1) = 0,01$

$P(A|H_2) = 0,99$

$P(A) = 0,01 \cdot 0,95 + 0,99 \cdot 0,05 = 0,059$

b) $P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A)} = \frac{0,99 \cdot 0,05}{0,059} = 0,839$

- nastavak geometrijske razdiobe

1. MI-11-6 Iz snopa od 52 karte jedna po jedna, jedna po jedna dok ne izvučemo asa ili neki tref. Slučajna varijabla je br izv

$P(X), E(X) = ?$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots \\ \frac{16}{52} & \frac{36}{52} \cdot \frac{16}{52} & \left(\frac{36}{52}\right)^2 \cdot \frac{16}{52} & \dots \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow X \sim G\left(\frac{16}{52}\right) \Rightarrow E(X) = \frac{1}{p} = \frac{52}{16}$ → treba napisati da se radi o geo razd.

$P(X > 3,25) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3)$

ili $= \left(\frac{36}{52}\right)^3$ → 3 put se ne smije dogoditi

• Teorem: odsustvo pamćenja

X ima geometrijsku razdiobu ako i samo ako vrijedi

$$P(X=k+m \mid X>k) = P(X=m$$

Pr. $P(X=7 \mid X>3) = P(X=4)$

MI $P(X\leq 15 \mid X>10) = P(X\leq 5) = 1 - P(X>5) = 1 - (1-p)^5$

Dokaz: $X \sim G(p)$

$$P(X=k+m \mid X>k) = \frac{P(X=k+m, X>k)}{P(X>k)} = \frac{p(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^k}$$

$$= p(1-p)^{m-1} = P(X=m)$$

1-MI-08-6 Neka su X_1 i X_2 dvije nezavisne slučajne var. s geom. razdiobom s parametrom t.
Odredi razdiobu od varijable $Y = X_1 + X_2$

$Y \geq 2$

a) $P(Y=2) = P(X_1=1, X_2=1) \overset{NEZ.}{=} P(X_1=1)\cdot P(X_2=1) = p\cdot p = p^2$

$P(Y=3) = P(X_1=1, X_2=2) + P(X_1=2, X_2=1) = p(1-p)\cdot p + p(1-p)\cdot p$
$= 2p^2(1-p)$

$P(Y=4) = P(X_1=1, X_2=3) + P(X_1=2, X_2=2) + P(X_1=3, X_2=1)$
$= p(1-p)^2 p + p(1-p)\cdot p(1-p) + p(1-p)^2 p = 3p^2(1-p)^2$

$\Rightarrow P(Y=n) = (n-1)\cdot p^2(1-p)^{n-2} \quad n \geq 2$

b) $P(Y>3) = ?$ ako je $p = \frac{1}{3}$

$1 - P(Y=2) - P(Y=3) = \frac{20}{27}$

4.2 Binomna razdioba

- ponavljamo pokus n-puta, x = koliko puta se dogodio povoljan događaj

$$X \sim B(n,p)$$

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k = 0,1,\dots n$$

$$(a+b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n+k}$$

♡ karakt. fja binomne razdiobe

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (p \cdot e^{it})^k (1-p)^{n-}$$

$$= (p \cdot e^{it} + 1 - p)^n$$

♡ očekivanje: $E(X) = n \cdot p$

DOKAZ: $E(X) = -i\,\vartheta'(0) \;\dots\; E(X) = np$

♡ disperzija: $D(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

DOKAZ: $D(X) = \vartheta''(0) + (\vartheta'(0))^2 \dots$

Stabilnost binomne razdiobe

$X_1 \sim B(n_1, p)$, $X_2 \sim B(n_2, p)$ nezavisne varijable, onda slijedi da j

$$X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$$

DOKAZ: $\vartheta_{(X_1+X_2)}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t)$

$$= (p \cdot e^{it} + 1 - p)^{n_1} \cdot (p \cdot e^{it} + 1 - p)^{n_2} = (p \cdot e^{it} + 1 - p)^{n_1 + n_2}$$

Bernoullijeva slučajna varijabla

$$X_i \sim B(1,p) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} E(X_i) &= p \\ D(X_i) &= p(1-p) \end{aligned}$$

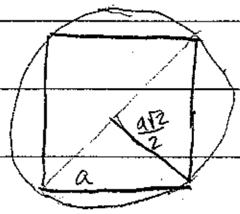
$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \sim B(n,p)$ zbog stabilnosti i nezavisnos

$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n) = n \cdot p$

$D(X) = D(X_1) + \ldots + D(X_n) = n \cdot p \cdot (1-p)$

2.DZ 16 U krugu je upisan kvadrat i unutar kruga biramo na sreću 10 točaka. Vj da su bar 2 točke unutar kvadr

$X =$ točke unutar kvadrata $\sim B(10,p)$



$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{10} - \binom{10}{1} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{9}$$

↳ koja točka od 10 je odabrana

$$p = \frac{P_{\square}}{P_{\circ}} = \frac{a^2}{\frac{a^2 2}{4} \cdot \pi} = \frac{2}{\pi} = 0,99$$

4.3 Poissonova razdioba

Pr. Na 300 str. knjige ima 900 grešaka.

$E(X) = n \cdot p = 3$ greške po stranici

$\Rightarrow \lambda = 3$ intenzitet ponavljanja $\Big\}\ \lambda = n \cdot p$

– u praksi: tel. centrala, red čekanja, ...

Teorem: Aproksimacija binomne razdiobe Poissonovom

Neka je n velik, a p malen. Tada uz oznaku $\lambda = n \cdot p$ vrijedi:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

DOKAZ: $p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$$= \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{\underbrace{n \cdot n \cdot n \ldots}_{n^k}} \cdot \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{e^{-\lambda}} \quad / \lim_{n\to\infty}$$

Pišemo:

$$X \sim P(\lambda) \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad k = 0,1,\ldots \infty$$

♡ karakt. f-ja:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

♡ očekivanje: $E(X) = -i\vartheta'(0) \ldots = \lambda$

♡ disperzija: $D(X) =$ po formuli $\ldots = \lambda$

Stabilnost Poissona

nezavisni!

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim P(\lambda_1) \\ X_2 \sim P(\lambda_2) \end{array}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

DOKAZ: $\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$

1.MI-07-8 Neka je X Poissonova razd. s $E(\lambda)$, X,Y nezav.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim P(3) \\ Y \sim P(4) \end{array}\right\} \quad \underbrace{P(X+Y = 10)}_{\sim P(7) \quad k} = ? = \frac{7^{10}}{10!} \cdot e^{-7}$$

1.MI-08-7 180 e-poruka po satu. Vj da u 1 min stignu bar 3 e-poruke?

$\lambda = 180$ mailova po h = 3 po min

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - e^{-3} - \frac{3}{1!} \cdot e^{-3} - \frac{3^2}{2!} \cdot e^{-3} = 0{,}5768$$

2. DZ-18 X ima poissonow razdiobu

4. ZZV-12 $P(X=1)=P(X=2)$

$P(X \geq 4)=?$ $\lambda \neq 0$

$\frac{\lambda}{1} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2}{2!} \cdot e^{-\lambda}$

form. za Poiss.

$\lambda = 2$ $P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X)=2 - P(X=3)$

$P(X \geq 4) = 0,143$

5. NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE

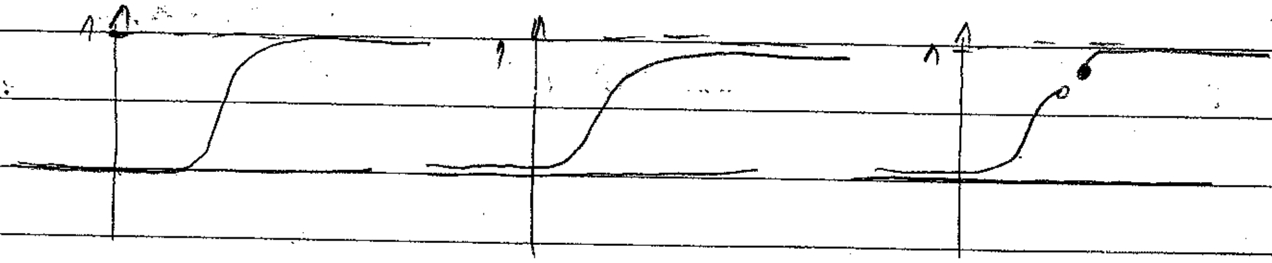
5.1 Definicija i svojstva

Definicija:

Preslikavanje $X: \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna varijabla ako za svaki $x \in \mathbb{R}$ je skup $A_x = \{ w \in \Omega : X(w) < x \}$ događaj (tj $A_x \in \mathcal{F}$)

Funkcija razdiobe varijable X je fja. $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana s $F(x) = P(X < x)$

Pr.



Teorem: svojstva

i) $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

ii) $F(x)$ je rastuća fja.

iii) $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

iv) $F(x)$ je neprekinuta s lijeva: $F(x-0) = F(x)$ $\lim \to x^-$

DOKAZ:

i) $F(x_2) = P(X<x_2) = \underbrace{P(X<x_1)} + P(x_1 \le X < x_2)$

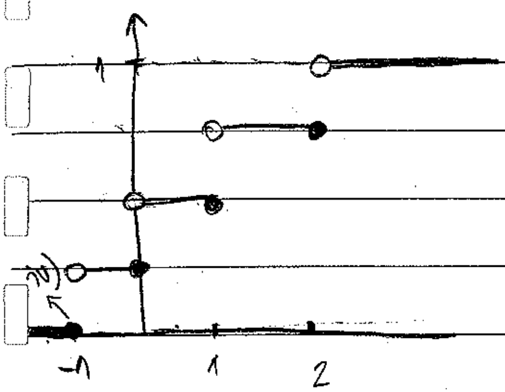
$= F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$

ii) slijedi iz monotonosti vjerojatnosti

iii) iz neprekinutosti vjerojatnosti

iv)

zad. $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ odredi i skiciraj fju razdiobe ?



$F(x) = P(X<x)$

$F(-3) = P(X<-3) = 0$

$F(-2) = 0$

$F(-1) = P(X<-1) = 0$

$F(0) = P(X<0) = \frac{1}{4}$

$F(1) = P(X<1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$F(2) = P(X<2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12}$

$F(10) = P(X<10) = 1$

uoči: fja razdiobe $F(x)$ diskretne sl. varijable je stepenasta fja $[0,1]$ sa skokovima $x_1, x_2, x_3, \dots$, a veličina skoka je $p_1, p_2, p_3, \dots$

Definicija:

Za slučajnu varijablu X kažemo da je neprekinuta (ili kontinuirana) ako postoji nenegativna fja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$. ?

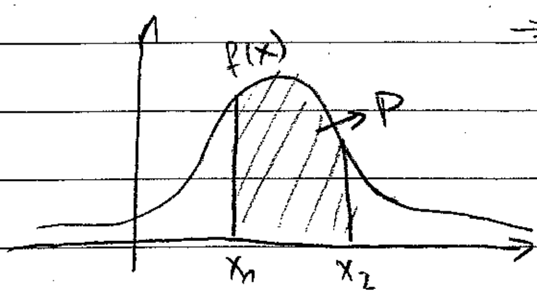
$f(x)$ nazivamo fja. gustoće vjeroj. i vrijedi $f(x) = F'(x)$ $F(x) \to$ fja razdiobe

uoči: $F(x)$ je neprekinuta pa vrijedi $P(X=x) = F(x+0) - F(x) = 0$

stoga su događaji $(x_1 \le X \le x_2)$ i $(x_1 < X \le x_2)$ jednako vjer. desni lim lijevi lim.

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = F(x_2) - F(x_1)$$

$\to$ može biti $f(x) > 1$, ali vjeroj. tj $P < 1$ / rastuća/padajuća



$\to$ očito vrijedi:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ $\to$ P cijele krivulje (vj. cijele Ω)

$\to$ uvjet za fju gustoće

Definicija:

♡ očekivanje $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$ ako integral konvergira

♡ disperzija $D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-(E(X))^2$

Teoremi i svojstva: → sve isto kao prije

i) $E(sX+tY)=sE(X)+tE(Y)$

ii) $D(sX)=s^2D(X)$

iii) ako su X i Y nezavisni: $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$

$D(X+Y)=D(E)+D(Y)$

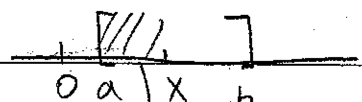
Definicija:

♡ karakt. f-ja $\vartheta_X(t)=E(e^{itx})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\cdot f(x)\,dx$

uoči: karakt. f-ja je Laplaceova transformacija $\int_0^{\infty} e^{-ti} f(x)\,dx$

Jednolika (uniformna) razdioba

upr- biramo na sreću br. iz intervala $[a,b]$

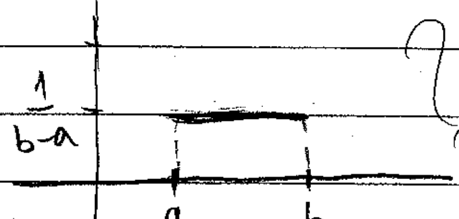


$P(X<x)$

$f(x)=\frac{1}{b-a}$

$F(x)=P(X<x)=\frac{x-a}{b-a}$

$X\sim U[a,b]$ → X ima uniformnu razdiobu u $[a,b]$



?

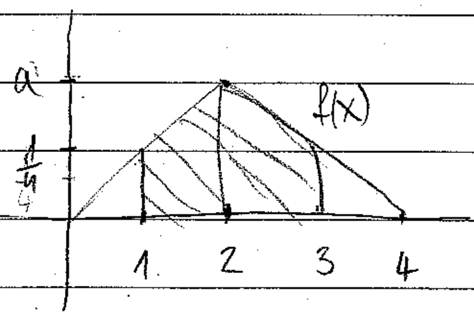
$E(X)=\bar{X}=\frac{a+b}{2}=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}$

$D(X)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

zad. Fja. gustoće

$E(X)=?$

$P(1\leq X\leq 3)=?$



– prvi korak: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \Rightarrow \frac{4\cdot a}{2}=1 \rightarrow a=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x, & 0\leq x\leq 2\\ 1-\frac{1}{4}x, & 2\leq x\leq 4\end{cases}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{4}\cdot x dx+\int_2^4 x\left(1-\frac{1}{4}x\right)dx=2$$

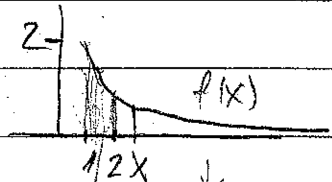
$$P(1\leq X\leq 3)=\int_1^3 f(x)dx=1-\frac{1}{4}\rightarrow \text{sa slike}=\frac{3}{4}$$

2.MI-09-1. Zadana je sluč. var. gustoće $f(x)=\frac{c}{x^3}$, $x>1$

$E(X), F(X), P(0<X<2)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1 \rightarrow \int_1^{\infty}\frac{c}{x^3}dx = c\cdot\frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^{\infty} = \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c=2$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{1}^{\infty} x\cdot\frac{c}{x^3}dx = \ldots = 2$$



$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_1^x \frac{2}{t^3}dt = 1-\frac{1}{x^2}$$

$$P(0<X<2) = \int_1^2 \frac{2}{x^3}dx = \frac{3}{4}$$

F(x) integr. od 1-

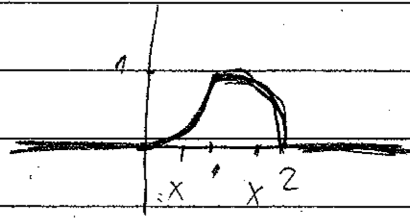
P(0<X<2)

! jer od (0,1) nije

$$\text{ili} \quad = F(2)-F(0) = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2.MI-11-1. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\in[0,1\rangle \\ 2x-x^2, & x\in[1,2\rangle \end{cases}$ $E(X), F(X), P(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2})$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx = \int_0^1 x\cdot x^2 dx + \int_1^2 x(2x-x^2)dx = \frac{7}{6}$$



za $x\in[0,1\rangle$:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

za $x\in[1,2\rangle$:

$$F(X)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \cancel{\int_1^x (2t-t^2)dt} \Rightarrow = \int_{-\infty}^{0} 0 dt + \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x (2t-t^2)dt = -\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}$$

$\rightarrow$ POKUPITI SVE INTERVALE od $-\infty$!

konačno:

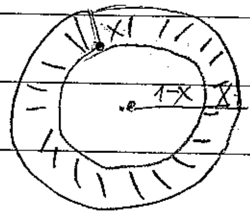
$$F(X)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{3}x^3, & x\in[0,1\rangle \;\star \\ -\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{1}{3}, & x\in[1,2\rangle \;\star\star \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ površina ispod grafa $=1$ $\rightarrow$ pokupimo sve od $-\infty$!

★★ ★ uvrstiti

$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$

2. MI-08-1. Biramo točku unutar kruga radijusa 1. Neka je X udaljenost do ruba kruga. Odredi $F(x), f(x), E(x)$.



$X \in [0,1]$

$F(x) = P(X < x) = \dfrac{\pi - (1-x)^2\pi}{1\pi} = 2x - x^2$

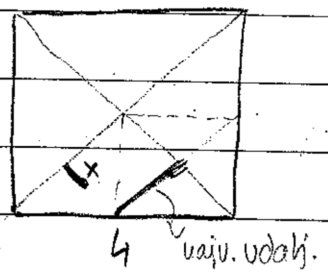
X – pokus x – neki br.

$X < x$

$f(x) = F'(x) = 2 - 2x$

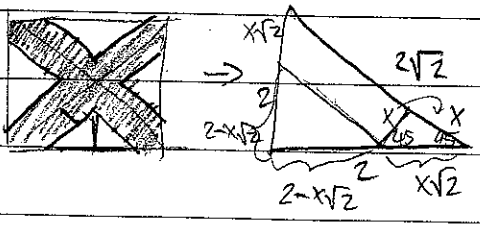
$E(x) = \int_0^1 x(2-2x)\,dx = \frac{1}{3}$

3. DZ-10 Biramo točku unutar kvadrata stranice 4. Odaberemo neku točku. X je udaljenost do bliže dijag. Odredi sve.



$x \in [0, \sqrt{2}]$

$F(x) = P(X < x) = \dfrac{16 - 4 \cdot \frac{1}{2}(2 - x\sqrt{2}) \cdot 2 \cdot (2 - x\sqrt{2})}{4^2}$



$= x\sqrt{2} - \frac{1}{2}x^2$

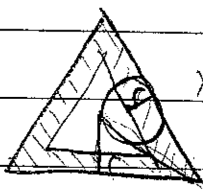
$f(x) = \sqrt{2} - x, \quad x \in [0, \sqrt{2}]$

$E(x) = \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot (\sqrt{2} - x)\,dx = \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. ZZV-26 U jednakostr. Δ stranice a biramo točku. Potom opišemo krug

3 DZ-9 max. pov. sa sred. u toj točki koji dodiruje taj Δ. Odredi sve.

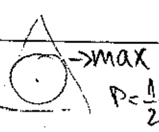
$X \in \left[0, \frac{a^2\pi}{12}\right]$



$X = r^2\pi$

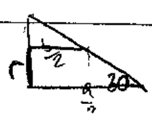
$r = \sqrt{\frac{X}{\pi}}$

$F(x) = P(X < x) = \dfrac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{b^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{a^2 - (a - 2r\sqrt{3})^2}{a^2} = \dfrac{4\sqrt{3}}{a}\sqrt{\frac{x}{\pi}} - \dfrac{12x}{a^2\pi}$



$r = \frac{1}{3}v$

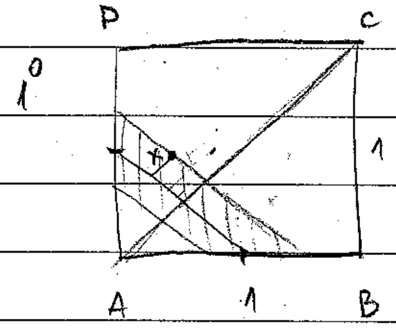
$P = \frac{1}{2} a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot a \frac{\sqrt{3}}{2}$



$b = \frac{a}{2} - r\sqrt{3}$

2.MI-11-2 Biramo točku unutar kvadrata stranice 1. X je udaljenost do pravca koji prolazi polovištima stranica AB i AD. Odredi s

1°



od pravca do vrha C → $\frac{3}{4}$ dijagonale

$X \in [0, \frac{3}{4}\sqrt{2}]$

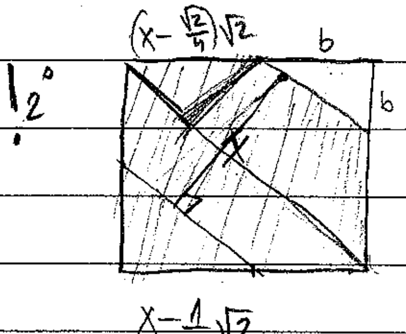
dijagonale

1° za $x \in [0, \frac{1}{4}\sqrt{2}]$:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{\frac{1}{2}(x\sqrt{2}+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-x\sqrt{2})^2}{1} = x\sqrt{2}$$

ili $\frac{P_{trapeza}}{1} = \frac{\text{srednjica} \cdot v}{1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2x}{1} = x\sqrt{2}$

2°



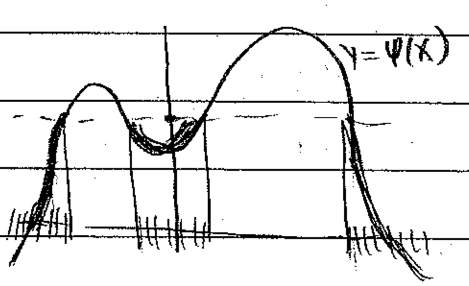
2° za $x \in [\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{4}\sqrt{2}]$:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{1 - \frac{1}{2}b^2}{1} = 1 - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right)^2$$

$$= -x^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{1}{8}$$

5.2 Funkcije slučajnih varijabli

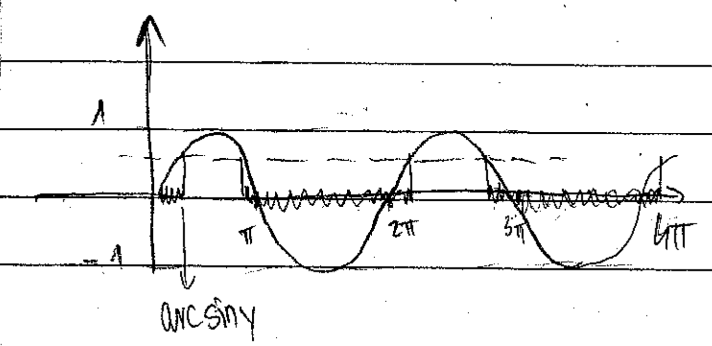
$\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, znamo razdiobu od X. Kolika je razdioba od $Y = \psi(X)$?



$G(y) = ?$

$G(y) = P(Y < y) = P(\psi(X) < y) = P(X \in A_y)$

3. DZ-17 $X \sim U[0, 4\pi]$ $Y = \sin X$?



$G(y) = P(Y < y) = P(\sin X < y)$

$= P(0 < X < \arcsin y) +$

$+ P(\pi - \arcsin y < X < 2\pi + \arcsin y)$

$+ P(3\pi - \arcsin y < X < 4\pi)$

$f(X) = \frac{1}{4\pi}$

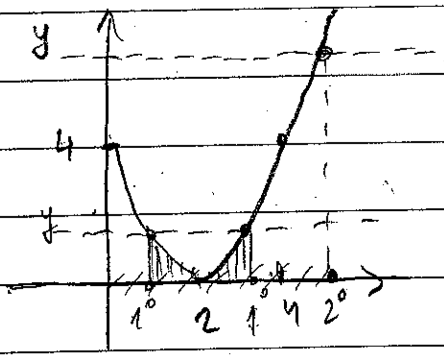
$= \int_0^{\arcsin y}$

?

2. MI-08-2. X ima gustoću $f(x)=e^{-x}, x>0$ $\quad Y=(X-2)^2$

1. način

- crtamo Y jer tražimo njezinu razdiobu



$$G(y) = P(Y<y) = P\left((X-2)^2<y\right)$$

1° za $y=(0,4)$

$$G(y) = P(2-\sqrt{y}<X<2+\sqrt{y}) = \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} e^{-x}\,dx = e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2}$$

Horizontalnim testom provjeravamo injekciju. (Nekoliko razl. y. moramo uzeti, ako je razd. dijelimo na intervale)

2° za $y=(4,+\infty)$

$$G(y) = P(0<X<2+\sqrt{y}) = \int_0^{2+\sqrt{y}} e^{-x}\,dx = 1-e^{-\sqrt{2}-2}$$

1° $y=(x-2)^2 \;/\sqrt{\;}$ $\quad$ 2° $x=2+\sqrt{y}$

$\sqrt{y} = \pm x-2$

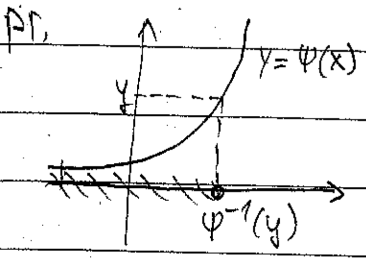
$x_1 = 2-\sqrt{y}$

$x_2 = 2+\sqrt{y}$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{\sqrt{y}-2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}-2}, & y \in (0,4) \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot e^{-\sqrt{y}-2}, & y \in (4,+\infty) \end{cases}$$

- neka je ψ monotono rastuća f-ja. (tj. injekcija)

pr.



$$G(y) = P(Y<y) = P(\psi(x)<y)$$
$$= P(x<\psi^{-1}(y)) = F(\psi^{-1}(y))$$
$$g(y) = G'(y) = f(\psi^{-1}(y))\cdot \frac{d}{dy}\psi^{-1}(y)$$
$$g(y) = f(x)\cdot\frac{dx}{dy}, \quad x=\psi^{-1}(y)$$

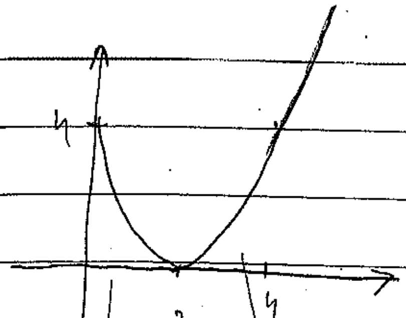
- analogno: ako je ψ padajuća: $g(y) = -f(x)\cdot\frac{dx}{dy}$

- općenito: ako je $\psi(x)$ <u>injekcija</u> vrijedi da je:

$$g(y) = f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right|, \quad x=\psi^{-1}(y)$$

! česta greška: moramo uvrst[iti] $x=\psi^{-1}(y)$ jer mi tražimo f-ju a

2. M1-08-2. 2. način



- podijeliti na 2 injektivna intervala!

1° $x\in(0,2)$, $y\in(0,4)$

$y=(x-2)^2 \,/\sqrt{\ }$

$-\sqrt{y}=x-2$

$\boxed{x=2-\sqrt{y}}$

$\frac{dx}{dy} = \boxed{\frac{-1}{2\sqrt{y}}}$ ova česta greška

2° $x\in(2,+\infty)$, $y\in(0,+\infty)$

$\sqrt{y}=x-2$

$\boxed{x=2+\sqrt{y}}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

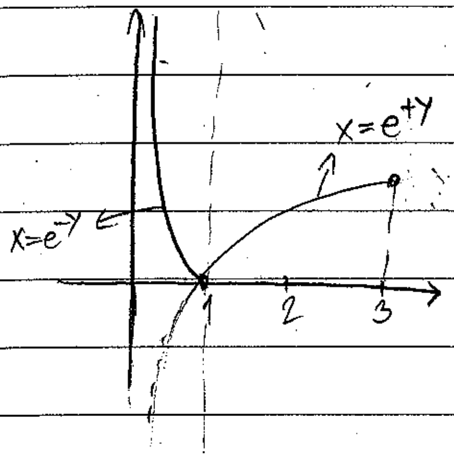
$$g_1(y) = e^{-(2-\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}} \qquad g_2(y) = e^{-(2+\sqrt{y})}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot e^{-(2-\sqrt{y})} + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot e^{-(2+\sqrt{y})}, & y\in(0,4)\\ \frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot e^{-(2+\sqrt{y})}, & y\in(4,\infty)\end{cases}$$

→ oba se preklapaju na (0,4) pa moramo zbrojit oba!

- fja razdiobe – lakše je prvim načinom
- fja gustoće – lakše je drugim načinom (po formuli)

3. M - 11 - 3 Odredi fju gustoće $Y = |\ln X|$ ako je X zadan s
$f(x) = \frac{2}{9}x$, $x \in (0,3)$



- podjela na 2 injektivna intervala

1° $x \in (0,1)$

$y \in (0,+\infty)$

$y = |\ln x|$

$y = \pm \ln x$

$e^{\pm y} = x$

$x = e^{-y}$

$\frac{dx}{dy} = |-e^{-y}| = e^{-y}$

$g_1(y) = \frac{2}{9} \cdot e^{-y} e^{-y}$

$= \frac{2}{9} \cdot e^{-2y}$

2° $x \in (1,3)$

$y \in (0, \ln 3)$

$x = e^{y}$

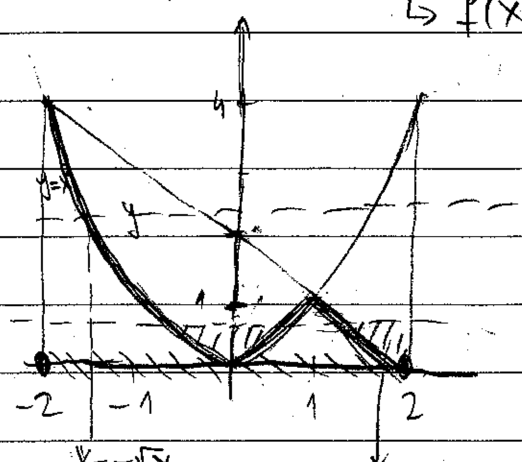
$\frac{dx}{dy} = |e^{y}| = e^{y}$

$g_2(y) = \frac{2}{9} \cdot e^{y} \cdot e^{y} = \frac{2}{9} e^{2y}$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{9} e^{-2y} + \frac{2}{9} e^{2y} & y \in (0, \ln 3) \\ \frac{2}{9} e^{-2y} & y \in (\ln 3, \infty) \end{cases}$$

5. ZZV - 66 $X \sim U[-2,2]$ odredi i skiciraj fju razdiobe $Y = \min\{X^2, -X+2\}$

$\hookrightarrow f(x) = \frac{1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$



1° $y \in [1,4]$

$G(y) = P(Y < y)$

$= P(-\sqrt{y} < X < 2)$

$= \int_{-\sqrt{y}}^{2} \frac{1}{4} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{y}$

2° $y \in [0,1]$

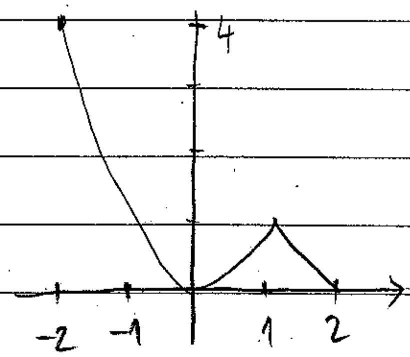
$G(y) = P(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y})$

$+ P(2-y < X < 2)$

$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{4} dx + \int_{2-y}^{2} \frac{1}{4} dx$

$= \frac{1}{2}\sqrt{y} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(2-y)$

2. način:



1° $x\in(-2,0)$	2° $x\in(0,1)$	3° $x\in(1,2)$
$y\in(0,4)$	$y\in(0,1)$	$y\in(0,1)$
$x=-\sqrt{y}$	$x=\sqrt{y}$	$x=2-y$
$\left\lvert\frac{dx}{dy}\right\rvert=\frac{1}{2\sqrt{y}}$	$\left\lvert\frac{dx}{dy}\right\rvert=\frac{1}{2\sqrt{y}}$	$\left\lvert\frac{dx}{dy}\right\rvert=\lvert-1\rvert=1$
$g_1(y)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$ //	$g_2(y)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}$ //	$g_3(y)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}$ //

$$g(y)=\begin{cases}\frac{1}{8\sqrt{y}}+\frac{1}{8\sqrt{y}}+\frac{1}{4}, & y\in(0,1)\\ \frac{1}{8\sqrt{y}}, & y\in(1,4)\end{cases}$$

6. PRIMJERI NEPREKINUTIH RAZDIOBA

6.1 Eksponencijalna razdioba

Poiss.

- neka je $Z\sim P(\lambda)$, tada je $Z_x\sim P(\lambda x)$ intenzitet pojavljivanja u [0,

$X=$ vrijeme do prve pojave promatranog događaja

$F(x)=P(X<x)=1-P(X\geq x)=1-P(Z_x=0)=1-\frac{(\lambda x)^0}{0!}\cdot e^{-\lambda x}=1-e^{-\lambda}$

Definicija: $X\sim\mathcal{E}(\lambda)$ – eksponencijalna razdioba s parametrom λ

$F(x)=1-e^{-\lambda x}$ – f-ja razdioba

$f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda x}$ – f-ja gustoće, $x>0$

očekivanje: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda f(x)dx=\int_0^{\infty}x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\dots=\frac{1}{\lambda}$

disperzija: $D(X)=\int_0^{\infty}x^2\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\dots=\frac{1}{\lambda^2}$

karakt. f-ja: $\vartheta_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)dx=\int_0^{\infty}e^{itx}\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx=\dots=\frac{\lambda}{\lambda-it}$

Teorem: Odsudstvo pamćenja

X ima eksp. razdiobu ako i samo ako vrijedi

$$P(X<x+t \mid X>t) = P(X<x)$$

DOKAZ:

$$\Rightarrow P(X<x+t \mid X>t) = \frac{P(t<X<t+x)}{P(X>t)} = \frac{F(t+x)-F(t)}{1-F(t)}$$

uvršt. u exp. razd. $= \frac{1-e^{-\lambda(t+x)} - (1-e^{-\lambda t})}{1-(1-e^{-\lambda t})} = 1-e^{-\lambda x} = P(X<x)$

$\Leftarrow$ upiši PMF. ♡

2. MI-08-3. Očekivano ispravno vrijeme rada automobila je 3g.

a) izr. vj. da će se auto pokvariti već tijekom 1. g P(X<

b) tijekom 3. godine c) tijekom 3. ako znamo da nije prve d

$E(X) = 3 = \frac{1}{\lambda} \to X \sim E\left(\frac{1}{3}\right)$ → vrijeme do pojave prvog kvara

a) $P(X<1) = F(1) = 1-e^{-\lambda x} = 1-e^{-\frac{1}{3}}$

b) $P(2<X<3) = F(3)-F(2) = e^{-\frac{2}{3}} - e^{-1}$

c) $P(2<X<3 \mid X>2) = P(X<1) = 1-e^{-\lambda x} = 1-e^{-\frac{1}{3}}$ → odsudstvo pamćenja

6.2 Normalna (Gaussova) razdioba

- najvažnija neprekinuta razdioba, granični slučaj ponavljanja velikog broja pokusa

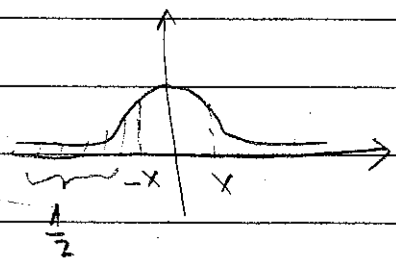
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

očekivanje disperzija

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Kako računamo vjerojatnost?

$$P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



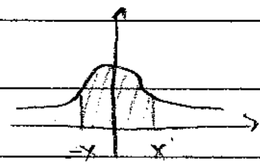
$X \sim N(0,1) \rightarrow$ jedinična normalna razdioba

$$\hookrightarrow f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(1 + \Phi^*(x)), \quad \Phi^*(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$



tablica!

$$P(a<X<b) = \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(b) - \Phi^*(a)\right)$$

$$P(X<a) = \Phi(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(a)$$

$$P(X>a) = 1 - \Phi(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(a)$$

$$P(-1.57 < X < 0{,}314) = \frac{1}{2}\left[\Phi^*(0{,}314) - \Phi^*(-1{,}57)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0{,}246478 + 0{,}88358\right]$$

4. DZ-6.

$P(t < X < 2) = 0{,}1$

$0{,}1 = \frac{1}{2}\left[\phi^*(2) - \phi^*(t)\right]$

$0{,}2 = 0{,}95450 - \phi^*(t)$

$\phi^*(t) = 0{,}7545 \Rightarrow t = 1{,}16$

- što je općenito s $X \sim N(\mu, \sigma^2)$?

normiranje slučajne varijable:

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

4. DZ-7. $X \sim (8, 16)$ $\sigma^2 = 16 \Rightarrow$ odstupanje $= 4$

$$P(2 \leq X \leq 14) = P\left(\frac{2-8}{4} \leq X \leq \frac{14-8}{4}\right) = P\left(-\frac{3}{2} \leq X^* \leq \frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\phi^*\left(\frac{3}{2}\right) - \phi^*\left(-\frac{3}{2}\right)\right] = \phi^*\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}86639$$

2. MI-08-4.

$\mu = 370 \ l/m^2$ $P(X > 450) = ?$

$10 - 730 l$ $99{,}73\%$

$$P(10 \leq X \leq 730) = 0{,}9973$$

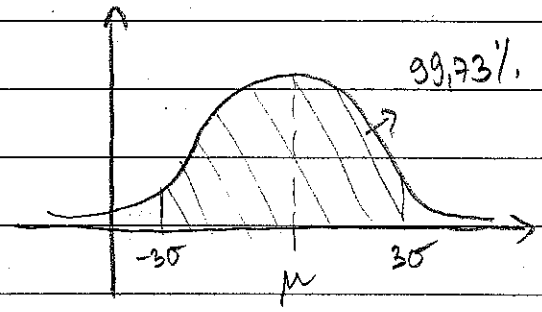
$$P\left(\frac{10-370}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{730-370}{\sigma}\right) = P\left(\frac{-360}{\sigma} \leq X^* \leq \frac{360}{\sigma}\right) = \phi^* \underbrace{\frac{360}{\sigma}}_{\text{tablica}} = 0{,}9973$$

$\frac{360}{\sigma} = 3 \Rightarrow \sigma = 120 \rightarrow$ pravilo 3σ

$$P(X > 450) = P\left(X^* > \frac{450-370}{120}\right) = P\left(X^* > \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0{,}4946 = 0{,}252$$

Pravilo 3σ



$$P(\mu-3\sigma < X^* < \mu+3\sigma) =$$
$$= P\left(\frac{\mu-3\sigma-\mu}{\sigma} < X^* < \frac{\mu+3\sigma-\mu}{\sigma}\right)$$
$$= P(-3 < X^* < 3) = \phi^*(3) = 0.9973$$

Svojstva:

i) karakt. fja:

$$\underset{\text{jedinična}}{\vartheta_{X^*}(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}^{\text{fja gustoće}} dx \quad / \frac{d}{dt}$$

$$\vartheta'_{X^*}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{ix \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}}_{dv} \cdot \underbrace{e^{itx}}_{u} dx \rightarrow \text{parc. int.}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -t \cdot e^{itx} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -t \cdot \vartheta_{X^*}(t)$$

$y' = -xy$

$\frac{dy}{dx} = -xy$

$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}$

$$\vartheta_{X^*}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

ii) očekivanje: $E(X) = -i\vartheta'(0) \neq \mu$

iii) disperzija: $D(X) = -\vartheta'(0) + \vartheta'(0)^2 \neq \sigma^2$

Teorem: Stabilnost normalne razdiobe

$$\left.\begin{matrix} X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{matrix}\right\} \text{nezav. sluč. var.}$$

$$s_1X_1 + s_2X_2 \sim N(s_1\mu_1 + s_2\mu_2,\ s_1^2\sigma_1^2 + s_2^2 \cdot \sigma_2^2)$$

DOKAZ:

$$\vartheta_{s_1x_1+s_2x_2}(t) = \vartheta_{s_1x_1}(t) \cdot \vartheta_{s_2x_2}(t) = e^{it(s_1\mu_1+s_2\mu_2) - \frac{1}{2}(s_1^2\sigma_1^2 + s_2^2 \cdot \sigma_2^2)t^2}$$

! plus prelazi u puta

4. DZ-13 $X \sim N(1,1)$
$Y \sim N(4,4)$ nezavisne
$Z \sim N(9,9)$

$$P(X \leq 3Y-2Z) = P(X-3Y+2Z \leq 0) = P(W \leq 0)$$

svojstvo stabilnosti

$$W \sim N(\underbrace{1-3\cdot4+2\cdot9}_{\mu},\ \underbrace{1^2\cdot1+(-3)^2\cdot4+2^2\cdot9}_{\sigma^2})$$

! česta greška: ne zaboravi da $\ominus$ ide pod kvadrat

$W \sim N(7,73)$ $\rightarrow \sigma = \sqrt{73}$

$$P\left(W^* \leq \frac{0-7}{\sqrt{73}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi^*(\underbrace{-0{,}819}_{0{,}5871}) = 0{,}206$$

2. MI-10-4 Masa domaćih jabuka ima očekivanje 180 g i $\sigma = 20$
dok industr. ima očekivanje 220 i $\sigma = 5$
Jabučar prodaje paket od 2 obične i 2 industr. jabuke.
Izr. vj. da je masa paketa između 820 i 1000 g.

dom. $X \sim N(180, 40)$ $\rightarrow 20^2$
industr. $Y \sim N(220, 25)$

$Z = \cancel{2X}+2Y$ paket

FAIL! ovime ispada da su npr dvije dom jednake. tj uzeli smo jednu i pomnožili s 2. Zato je fail

$$Z = X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2$$

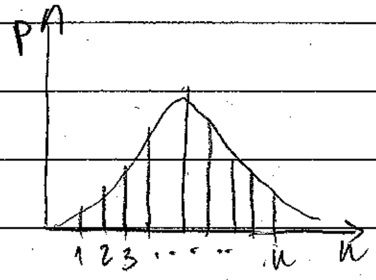
svojstvo stabilnosti $\rightarrow$ $\sim N(800, \underbrace{20^2+20^2+25+25}_{850}) = \sim N(800, 850)$

$$P(820 < Z < 1000) = P\left(\frac{820-800}{\sqrt{850}} \leq Z^* \leq \frac{1000-800}{\sqrt{850}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\phi^*(6{,}86)}_{1} - \underbrace{\phi^*(0{,}686)}_{0{,}507287}\right]$$

$$= 0{,}246\ 282$$

- Aproksimacija binomne razdiobe normalnom



$X \sim B(n,p)$

Teorem: Prvi granični teorem, Moivre-Laplace

Za dovoljno veliki n, $X \sim B(n,p)$ (možemo aproks. s normalnom razd.)
$\approx N(np, np(1-p))$

→ dobra je aproksimacija već za $n \geq 10$, a bolja je što je p bliži $\frac{1}{2}$
(ako je p jako mali kao npr 0,05 onda Poissona koristimo!)

Zad. Dugogodišnjim stat. mjerenjem Burić je ostanovio da je vj. da se upiše cura 23%. (na FER).
Vj. da od 600 novih brucoša bude bar 143 ljepšeg spola?

$p = 23\%$, $n = 600$ → $P(X \geq 143)$

$\underset{\text{br. ponavljanja pokusa}}{X \sim B(600, 0{,}23)}$ → ovdje nam ne paše binomna jer bi morali oduzimati ili zbrajati previše tog. isto ni Poisson. Ispadne fuj.

$X \sim B(600, 0{,}23) \approx N(138, 106{,}26)$

$P(X \geq 143) = P\left(X^* \geq \frac{143-138}{\sqrt{106{,}26}}\right) = P(X^* \geq 0{,}485)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \underbrace{\phi^*(0{,}485)}_{\text{iz tablice} = 0{,}3723} = 0{,}314$

2.MI - 11-5. Test ima 30 pitanja na zaokr. 2 ponuđena odgovora. Ako zaokr. na sreću koliko je vj. da ćemo proći ispit, ako je potrebno 16 točnih odgovora?

$X \sim B(30, \underbrace{0{,}5}_{\text{vj. da pogodimo} = \frac{1}{2}}) \approx N(15, 7{,}5)$

$P(X \geq 16) = ?$

aproks. vrij.: $P(X \geq 16) = P\left(X^* \geq \frac{16-15}{\sqrt{7{,}5}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\Phi^*(0{,}365)}_{0{,}28489} = 0{,}3\cancel{5}75$

točna vrijednost: 0,4278

PAZI! KOREKCIJA! za n-ove između 10 i 50 !

$\Rightarrow P(X \geq 16) = P(X \geq 15{,}5)$

$= P\left(X^* \geq \frac{15{,}5-15}{\sqrt{7{,}5}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(0{,}1826)$

$= 0{,}4275$

da je bilo $P(X \leq 16)$

korekcija $= P(X \leq 16{,}5)$

POVEĆAVAMO!

4. DZ - 19. Vj. realizacije događaja A je 10%. Koliko puta treba ponoviti pokus da bi se s vj. 80% događaj A realizirao bar 5 puta?

$p = 10\%$

$P(X \geq 5) = 80\%$

$n = ?$

i) $X \sim B(n, 0{,}1) \Rightarrow P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4)$

$= 1 - (1-p)^n - \binom{n}{1} \cdot p \cdot (1-p)^{n-1} \ldots = 0{,}8$

$\rightarrow$ direktni način je fuj.

ii) $X \sim P(0{,}1 \cdot n) \Rightarrow P(X \geq 5) = 1 - e^{-0{,}1n} - \ldots = 0{,}8 \rightarrow$ opet fuj

iii) $X \sim N(0{,}1n, 0{,}09 \cdot n)$

$P(X \geq 5) = P\left(X^* \geq \frac{5 - 0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*\left(\frac{5-0{,}1}{0{,}09n}\right) = 0{,}8$

ako dodajemo 1 ri. ubacimo u jedn. i ne smijemo dobiti neg.

ne smije biti minus pa ga unutra ubacimo

$\Phi^*\left(\frac{5-0{,}1n}{\sqrt{0{,}09n}}\right) = -0{,}6 \Rightarrow n = \cancel{0{,}8415}$

$n = 71{,}3$ tj 72

7. SLUČAJNI VEKTORI

7.1 Diskretni slučajni 2D vektori (3,2)

$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ $\quad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_m \\ q_1 & \cdots & q_m \end{pmatrix}$

X\Y	y_1 ...... y_m	
x_1	p_{11} ...... p_{1m}	$= p_1$
⋮	⋮ ⋮	⋮
x_n	p_{n1} ...... p_{nm}	$= p_n$
	q_1 ...... q_m	1

⇒ razdoba diskretnog slučajnog vektora (X,Y)

marginalna razdioba od X

→ suma marg od X = 1, od Y = 1 i od svega!

marg. razd. od Y

$$\sum_j p_{ij} = \sum_j (X=x_i, Y=y_j) = P(X=x_i) = p_i$$

Uvjet nezavisnosti:

- X i Y su nezavisni ako je $p_{ij} = p_i \cdot q_j \quad \forall i,j$

2.DZ-10 Bacamo 2 kocke. Neka je X minimum broja na kockama, a Y maximum. Odredi razd. sl. vektora (X, Y).

X\Y	1	2	3	4	5	6	
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{11}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{9}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{7}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{5}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

a) $(X,Y) = ?$

b) odredi marg. razd.

c) ispitaj nezav.

c) nisu nezavisni jer npr:

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{11}{36}$$

d) koreliranost i koef. korelacije

$cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0{,}94522$

$E(X) = 2{,}52778 \quad E(Y) = 4{,}47222$

$E(X \cdot Y) = \sum_{i,j} p_{ij} \cdot x_i \cdot y_j = 12{,}25$

$E(X \cdot Y) \rightarrow$ množimo $x \cdot y \cdot$ vjeroj.

npr: $1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{36} + \cdots + 6 \cdot 6 \cdot \frac{11}{36}$

korelirane jesu (0,94522)

koef. korelacije $r(X,Y) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$ $D(X) = 1,97145$

$D(Y) = 1,97145$

$= 0,47945$

1. MI-10-5. Neka je zadana razdioba vektora

X\Y	0	1	
-1	1/4	1/6	10/24
0	1/6	1/8	7/24
1	1/8	1/6	7/24
	13/24	11/24	1

a) odredi marg. razd.

b) zavisnost: zavisni jer upr: $\frac{1}{4} \neq \frac{10}{24} \cdot \frac{13}{24}$

c) $P(X \geq 0 \mid Y=1) = \cancel{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}$ FAIL!

$= \dfrac{P(X \geq 0, Y=1)}{P(Y=1)} = \dfrac{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}{\frac{11}{24}} = \dfrac{7}{11}$

d) odredi (Z,W) ako je $Z = X+Y$, a $W = X \cdot Y$

Z\W	-1	0	1	
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	
1	0	$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$	0	
2	0	0	$\frac{1}{6}$	
				1

najlakši način → fiksirati Z:

$Z=-1$: $X=-1$, $Y=0 \rightarrow W=0$

$Z=0$: $X=-1, Y=1 \rightarrow W=-1$

$X=0, Y=0 \rightarrow W=0$

$Z=1$: $X=0, Y=1 \rightarrow W=0$

$X=1, Y=0 \rightarrow W=0$

$Z=2$ $X=1, Y=1 \rightarrow W=1$

1.MI-07-8)

Neka je X Poissona razdioba s E(X). X, Y nezavisni

$$\left.\begin{matrix} X \sim P(3) \\ Y \sim P(4) \end{matrix}\right\} \quad P(\underbrace{X+Y}_{\sim P(7)} = \underbrace{10}_{k}) = ? = \frac{7^{10}}{10!} e^{-7}$$

1.MI-08-7)

180 e-poruka po satu

vjer. da u 1 min stignu barem 3 e-poruke ?

$\lambda = 180$ mailova po satu $= 3$ maila po minuti

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - e^{-3} - \frac{3}{1!} e^{-3} - \frac{3^2}{2!} e^{-3} = 0.5768$$

2.DZ-18)
(U.ZZV-12)

X ima Poissonovu razdiobu.

$P(X=1) = P(X=2)$

$P(X \geq 4) = ?$

$\lambda \neq 0$

$$\frac{\lambda}{1} \cancel{e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^2}{2!} \cancel{e^{-\lambda}}$$

$\lambda = 2$

$P(X \geq 4) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=$

formu. za Poissona

$P(X \geq 4) = 0.143$

Mandica Prastan

Pišemo s

$$X \sim P(\lambda), \quad P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}; \quad k = 0, 1, \dots \infty$$

- karakteristična funkcija:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

- očekivanje:

$$E(\lambda) = -i\vartheta'(0)$$

$$= \lambda$$

- disperzija:

$$D(X) = \text{po formuli} \dots = \lambda$$

Stabilnost Poissona

nezavisni!

$$\left.\begin{matrix} X_1 \sim P(\lambda_1) \\ X_2 \sim P(\lambda_2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Dokaz:

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)}$$

$$= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$