

MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

22.04.2014.

1. (6 bodova)

Istovremeno bacamo 4 kocke. Odredite vjerojatnost da smo na kockama dobili:

- a) različite brojeve,
- b) točno dvije šestice,
- c) barem dvije šestice,
- d) točno 3 broja strogo manja od 5,
- e) dva (različita) para jednakih brojeva.

2. (3 boda)

Ako je $P(B) \in \langle 0, 1 \rangle$ i $P(A | B) = P(A | \overline{B})$, dokažite da su A i B nezavisni događaji.

3. (4 boda)

Student odgovara na pitanje na koje su ponudena 4 odgovora (tri netočna i jedan točan). Vjerojatnost da student zna odgovor na pitanje je 0.8, a vjerojatnost da ne zna, odnosno da pogađa odgovor na sreću je 0.2. Kolika je vjerojatnost da student odgovori točno na dano pitanje? Ako je student odgovorio točno na dano pitanje, kolika je vjerojatnost da odgovor nije pogodio na sreću?

4. (4 boda)

Iz kutije u kojoj se nalaze 3 bijele i 4 crvene kuglice izvlačimo 3 kuglice. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj izvučenih bijelih kuglica. Izračunajte zakon razdiobe za X i očekivanje $E(X)$.

5. (5 bodova)

Može li za neku vrijednost argumenta

- a) funkcija razdiobe
- b) gustoća razdiobe

biti veća od jedinice? Ako je vaš odgovor DA navedite primjer funkcije.

c) Biramo na sreću točku unutar kvadrata $ABCD$ stranice duljine 1. Vrijednost slučajne varijable X je udaljenost te točke do dijagonale \overline{AC} . Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable X .

6. (7 bodova)

a) Neka je X neprekinuta slučajna varijabla s funkcijom gustoće f , a $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strogo monotona funkcija, te neka je $Y = \varphi(X)$. Izvedite formulu za funkciju gustoće g slučajne varijable Y

$$g(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \text{ gdje je } x = \varphi^{-1}(y).$$

b) Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = |X - 1|$, ako slučajna varijabla X ima funkciju gustoće $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

7. (6 bodova)

Vrijeme ispravnog rada računala je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Vjerojatnost ispravnog rada računala tijekom jedne godine je jednaka 0.9.

a) Kolika je vjerojatnost da će to računalo raditi ispravno tijekom 2 godine?

b) Kolika je vjerojatnost da će od 15 takvih računala u računarskom praktikumu njih barem 13 raditi ispravno tijekom 2 godine?

8. (5 bodova)

Vrijeme koje student provede na putu od kuće do fakulteta je slučajna varijabla s normalnom razdiobom $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ s očekivanjem $a = 50$ minuta. Student ima predavanje u 08:15 i kreće iz kuće u 07:20. Ako je vjerojatnost da će stići na fakultet u vremenskom intervalu od 08:05 do 08:15 jednaka 0.383, kolika je vjerojatnost da će kasniti na predavanje više od 5 min?

Dozvoljena je upotreba kalkulatora i tablica jedinične normalne razdiobe.

Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA MEĐUISPITA IZ VISa
22.04.2014.

1.

$$\text{a)} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}, \quad \text{b)} \frac{\binom{4}{2} 5^2}{6^4}, \quad \text{c)} 1 - \frac{5^4 + 4 \cdot 5^3}{6^4}, \quad \text{d)} \frac{\binom{4}{1} \cdot 2 \cdot 4^3}{6^4} \quad \text{e)} \frac{\binom{6}{2} \cdot \frac{4!}{2!2!}}{6^4}$$

2.

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(\overline{AB})}{P(\overline{B})} \Rightarrow \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} \Rightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

3.

$$\text{a)} P(A) = 0.85, \quad \text{b)} P(H_1 | A) = 0.941$$

4.

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{4}{35} & \frac{18}{35} & \frac{12}{15} & \frac{1}{35} \end{pmatrix} \quad E(X) = \frac{9}{7}$$

5.

a) Ne

$$\text{b)} \text{ Da, } f(x) = 2, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$\text{c)} F(x) = 1 - \frac{(1 - \sqrt{2}x)^2}{1^2} = 2\sqrt{2}x - 2x^2, \quad x \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

6.

$$\text{b)} g(y) = \begin{cases} 2e^{-1}ch(y), & y \in [0, 1] \\ e^{-y-1}, & y \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

7.

$$\text{a)} P(X > 1) = e^{-\lambda} = 0.9, \quad P(X > 2) = e^{-2\lambda} = 0.81$$

$$\text{b)} Y \sim \mathcal{B}(15, 0.81), \quad P(Y \geq 13) = 0.436$$

8.

$$P(45 < X < 55) = 0.383 \Rightarrow \sigma = 10, \quad P(X > 60) = 0.159$$