

VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

8. Funkcije slučajnih vektora

FER, Zagreb

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Slučajne varijable Cjelina 8 – Funkcije slučajnih vektora

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

1. Formule.....	3
2. Zadaci.....	4
3. Rješeni zadaci.....	9
4. Službena rješenja.....	17
5. Literatura.....	19

NAPOMENA

Zadaci KOJE TREBA rješavati su od 1.-23.zadatka.

Zadaci koji nedostaju: 8,9,13

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima većeg broja zadataka !

FORMULE:

8. FUNKCIJE SLUČAJNIH VEKTORA

Gustoća funkcije slučajnog vektora:

$$Z = \psi(X, Y)$$

$$g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left| \frac{\partial y}{\partial z} \right| dz$$

Gustoća zbroya nezavisnih varijabli:

$$g_Z(z) = f_{x1} * f_{x2} * \dots * f_{xn}$$

Očekivanje: $E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z g(z) dz$

ostatak se svodi na formule iz 7.cjeline

§ 8. Zadatci za vježbu

1. Slučajne varijable X i Y su nezavisne, s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, a]$. Odredi gustoće sljedećih slučajnih varijabli a) $X + Y$, b) $X - Y$, c) XY , d) X/Y .

2. Neka su X i Y nezavisne, jednoliko distribuirane na intervalu $[0, 1]$. Odredi gustoću varijable

$$Z = \frac{X}{X + Y}.$$

3. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju funkcije gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = 1 \quad \text{za } 0 \leq x \leq 1,$$

$$g(y) = \frac{2y}{9} \quad \text{za } 0 \leq y \leq 3.$$

Odredi funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

* * *

4. Duljine stranica pravokutnika su nezavisne slučajne varijable, s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, a]$. Odredi gustoću razdiobe površine tog pravokutnika.

5. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na trokutu s vrhovima $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$. Odredi funkciju razdiobe varijable $Z = X - Y$.

6. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na području

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

Odredi funkciju razdiobe varijable $Z = X - Y$. Izračunaj $P\{Z < \frac{1}{2}\}$.

7. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na kvadratu $\{|x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$. Odredi i skiciraj funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $Z = XY$.

8. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu vjerojatnosti unutar kruga polumjera 1. Odredi i skiciraj funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable $Z = X/Y$.

9. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu vjerojatnosti na području $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Nađi i skiciraj funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable

$$Z = \frac{X - a}{Y - b}.$$

10. Slučajni vektor (X, Y) jednoliko je distribuiran na području

$$S = \{(x, y) : y > 2, x < 3, y - x < 1\}.$$

Nađi i skiciraj gustoću slučajne varijable $Z = X + 2Y$.

11. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu vjerojatnosti na području

$$G = \{(x, y) : x > 0, y > 0, 1 - x - y > 0\}.$$

Odredi funkciju razdiobe F_Z slučajne varijable $Z = \frac{Y}{1 + X}$. Kolika je vjerojatnost da Z poprimi neku vrijednost iz intervala $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$?

12. Dvodimenzionalni slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na području $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\}$. Nađi i skiciraj funkciju gustoće slučajne varijable $Z = \frac{Y + 1}{X}$.

13. Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na kvadratu

$$G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2\}.$$

Nađi i skiciraj funkciju gustoće f_Z slučajne varijable $Z = \max\{X, Y + 1\}$.

* * *

14. Slučajne varijable X i Y su nezavisne s gustoćama razdioba:

$$f_X(x) = 12x^2(1 - x), \quad 0 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = 2y, \quad 0 < y < 1.$$

Odredi razdiobu slučajne varijable $Z = XY$.

15. Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x, y) = 8xy(1 - x^2), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Odredi funkciju gustoće varijable $Z = XY$.

16. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $Z = X - Y$, ako su X i Y nezavisne slučajne varijable s gustoćama razdioba:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}, \quad -1 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = e^{-y}, \quad y > 0.$$

17. Slučajni vektor (X, Y) ima gustoću razdiobe

$$f(x, y) = ax + y, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Izračunaj konstantu a . Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Z = X + Y$.

18. Odredi i skiciraj funkciju razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable $Z = X - Y$, ako su X i Y nezavisne slučajne varijable s gustoćama $f(x) = \frac{1}{2}$, $-1 \leq x \leq 1$ i $g(y) = e^{-y}$, $y \geq 0$.

19. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbf{R},$$

$$g(y) = \text{konst.}, \quad 1 \leq y \leq 3.$$

Odredi gustoću slučajne varijable $Z = X/Y$.

20. Slučajni vektor (X, Y) zadan je gustoćom

$$f(x, y) = C(x - y), \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

Izračunaj marginalnu gustoću $f_X(x)$ i gustoću slučajne varijable $Z = XY$.

21. Slučajni vektor (X, Y) zadan je gustoćom

$$f(x, y) = 9e^{-3x-3y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Odredi i skiciraj funkciju razdiobe slučajne varijable $Z = Y - X$.

22. Slučajni vektor (X, Y) ima gustoću razdiobe

$$f(x, y) = C(x + y), \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

Odredi marginalnu gustoću varijable X , te gustoću i očekivanje slučajne varijable $Z = XY$.

23. Slučajni vektor (X, Y) ima gustoću razdiobe

$$f(x, y) = C(x + y), \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

Odredi marginalnu gustoću varijable X , te gustoću i očekivanje slučajne varijable $Z = XY$.

24. Neka su X, Y nezavisne s normalnim zakonom $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, te $Z = \max\{X, Y\}$. Pokaži da vrijedi $E(Z) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$.

25. Neka su X i Y nezavisne, s normalnim zakonom $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Dokaži da slučajna varijabla $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ ima Rayleighovu razdiobu, s gustoćom

$$f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad z > 0.$$

26. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju gustoće razdioba

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,$$

$$f_Y(y) = ye^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad y > 0.$$

Dokaži da slučajna varijabla $Z = XY$ ima normalnu razdiobu.

27. X_1 i X_2 su nezavisne slučajne varijable, $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$. Dokaži da slučajna varijabla $Y = \frac{X_1 X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}$ ima normalnu razdiobu $N\left(0, \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)$.

28. Neka su X, Y, ϑ nezavisne slučajne varijable, pri čemu X, Y imaju normalnu razdiobu $\mathcal{N}(0, 1)$, a varijabla ϑ jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 2\pi]$. Odredi zakon razdiobe slučajne varijable $X \cos \vartheta + Y \sin \vartheta$.

29. Slučajni vektor (X, Y) zadan je gustoćom razdiobe:

$$f(x, y) = xe^{-x(1+y)}, \quad x > 0, y > 0.$$

Pokaži da slučajna varijabla $Z = XY$ ima eksponencijalnu razdiobu $E(1)$.

30. Slučajne varijable X i Y su nezavisne, s eksponencijalnim zakonom $E(\lambda)$. Odredi gustoće sljedećih funkcija a) $X + Y$, b) $X - Y$, c) $|X - Y|$, d) X/Y .

31. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s eksponencijalnim zakonom $\mathcal{E}(\lambda)$. Odredi zakon razdiobe slučajne varijable $Z = \frac{X+Y}{X}$.

32. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ . Dokaži da slučajne varijable

$$Z = \max\{X, Y\}, \quad W = X + \frac{1}{2}Y$$

imaju jednaku razdiobu. Izračunaj tu razdiobu.

33. Slučajne varijable X_1 i X_2 su nezavisne s eksponencijalnom razdiobom s parametrima λ_1 i λ_2 . Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$.

34. Slučajne varijable X_1, \dots, X_n su nezavisne s eksponencijalnim zakonom $\mathcal{E}(\lambda)$. Odredi gustoću varijable

$$X = \frac{X_1}{X_1 + \dots + X_n}.$$

35. Sistem koji se sastoji od n jedinica prestaje s radom čim bilo koji dio prestane s radom. Vremena ispravnog rada pojedinih dijelova su nezavisne slučajne varijable distribuirane po eksponencijalnom zakonu s parametrima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Izračunaj očekivano vrijeme ispravnog rada sustava.

36. Neka su X_1, \dots, X_n nezavisne, identično distribuirane slučajne varijable sa funkcijom razdiobe F . Odredi razdiobe slučajnih varijabli

$$Y = \min\{X_1, \dots, X_n\},$$

$$Z = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

37. Slučajne varijable X i Y su nezavisne, X poprima vrijednosti 0, 1 s vjerojatnostima $\frac{1}{2}$, Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 1]$. Odredi razdiobu varijable $X + Y$.

38. Slučajne varijable X_1, \dots, X_n su nezavisne, jednoliku distribuirane na intervalu $[0, 1]$. Neka je $S_n = X_1 + \dots + X_n$, te φ_n gustoća od S_n . Dokaži da je

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_{x-1}^x \varphi_n(z) dz.$$

39. Neka su X_1, \dots, X_n, Y nezavisne slučajne varijable, pri čemu je

$$X_i \sim \left(\frac{0}{\frac{1}{2}} \frac{1}{\frac{1}{2}}\right), \quad i = 1, \dots, n,$$

a Y ima jednoliku razdiobu na $[0, 1]$. Dokaži da slučajna varijabla

$$\frac{Y}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$$

ima jednoliku razdiobu na $[0, 1]$.

40. Slučajne varijable X i Y su nezavisne, poprimaju vrijednosti unutar intervala $[-\pi, \pi]$, a njihove gustoće su zadane Fourierovim redom

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(x - \alpha_n)n \right),$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(x - \beta_n)n \right).$$

Odredi gustoću zbroja $Z = X + Y$.

41. Uređeni uzorci. Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne identično distribuirane slučajne varijable. Njihovu funkciju razdiobe označimo sa F , a gustoću sa f . Te varijable možemo shvatiti kao rezultate neke slučajne varijable X pri n -terostrukom ponavljanju pokusa. Za svaki $\omega \in \Omega$ dobivamo realizacije, niz brojeva $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)$ kojeg ćemo poredati u rastućem poretku. Neka $X_{(1)}(\omega)$ označava najmanji, $X_{(2)}(\omega)$ sljedeći po redu, itd. Tako dobivamo uređenu rastuću n -torku slučajnih varijabli

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

koju nazivamo **uređeni uzorak**. Specijalno, vrijedi

$$X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\},$$

$$X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Odredi

- funkciju razdiobe varijable $X_{(1)}$;
- funkciju razdiobe varijable $X_{(n)}$;
- razdiobu vektora $(X_{(1)}, X_{(n)})$;
- gustoću varijable $X_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$;
- gustoću vektora $(X_{(k)}, X_{(m)})$, $1 \leq k \leq m \leq n$;
- gustoću uređenog uzorka $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$.

42. Neka su X, Y, Z nezavisne slučajne varijable s normalnim zakonom $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Odredi gustoću vektora (R, Θ, Φ) , polarnih koordinata točke (X, Y, Z) .

43. Neka vektor (X, Y, Z) ima funkciju gustoće f koja je izotropna (ovisi samo o udaljenosti $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ točke do ishodišta), oblika

$$f(x, y, z) = h(r).$$

Neka su (R, Θ, Φ) polarne koordinate točke (X, Y, Z) . Odredi gustoću vektora (R, Θ, Φ) te marginalne razdiobe komponenti. Da li su one nezavisne?

44. Neka je $f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}}$.

- Pokaži da je f gustoća razdiobe nekog vektora (X, Y) .

b) Odredi marginalne gustoće varijabli X i Y .

c) Odredi gustoću vektora (R, Φ) , polarnih koordinata od (X, Y) .

45. Neka je

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+y^2+z^2)^2}.$$

a) Pokaži da je f gustoća razdiobe nekog vektora (X, Y, Z) .

b) Odredi marginalne gustoće varijabli X, Y i Z .

c) Odredi gustoću sfernih koordinata (R, Θ, Φ) točke (X, Y, Z) .

46. Zadan je slučajni vektor (X, Y) s gustoćom $(x, y) \mapsto f(x, y)$. Odredi gustoću vektora (U, V) , ako je

a) $U = X + Y, V = X - Y$;

b) $U = X \cos \alpha + Y \sin \alpha, V = -X \sin \alpha + X \cos \alpha$.

47. Neka su X i Y nezavisne, sa zakonom $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Odredi gustoću vektora (U, V) , gdje je

$$U = X^2 + Y^2, \quad V = \frac{X}{Y}.$$

Da li su U i V nezavisne?

48. X_1 i X_2 su nezavisne varijable, jednoliko distribuirane na intervalu $[0, 1]$. Definirajmo

$$Y_1 = \min\{X_1, X_2\},$$

$$Y_2 = \max\{X_1, X_2\}$$

Odredi funkciju razdiobe i gustoće slučajnog vektora (Y_1, Y_2) te potom marginalne razdiobe za Y_1 i Y_2 .

49. Slučajna varijabla X ima gama razdiobu $G(\alpha, \lambda)$. Izračunaj $E(X^k)$.

50. X ima χ_n^2 -razdiobu. Izračunaj $E(X^k)$.

51. X ima χ_n razdiobu. Izračunaj $E(X^k)$.

52. Neka su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne varijable distribuirane po normalnom zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Označimo $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. Dokaži da:

a) $S_n^* = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - a)^2$ ima χ_n^2 -razdiobu.

b) $S_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X})^2$ ima χ_{n-1}^2 -razdiobu.

53. Neka su X_1, \dots, X_n nezavisne slučajne varijable, jednoliko distribuirane na $[0, 1]$. Pokaži da varijabla $X = 2 \ln(X_1 \cdots X_n)$ ima χ_{2n}^2 -razdiobu.

54. Slučajna varijabla X ima beta razdiobu s parametrima (α, β) , $(\alpha, \beta > 0)$, ako je njezina gustoća razdiobe

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1},$$

$(0 < x < 1)$. Izračunaj njezino očekivanje i disperziju.

55. Neka su $X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_n$ nezavisne jedinične normalne slučajne varijable. Pokaži da je gustoća razdiobe varijable

$$X = \frac{X_1^2 + \dots + X_m^2}{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}$$

jednaka

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (1+x)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad (x > 0).$$

56. Neka su $X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}$ nezavisne slučajne varijable sa zakonom $\mathcal{N}(0, 1)$. Odredi razdiobu varijable

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{vmatrix}.$$

57. Slučajne varijable X_1 i X_2 su nezavisne s eksponencijalnom razdiobom s parametrima λ_1 i λ_2 . Odredi funkciju razdiobe slučajne varijable

$$Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}.$$