

PONOVLJENI ZAVRŠNI ISPIT IZ VJEROJATNOSTI I  
STATISTIKE 02.07.2008.

**1. (3 boda)**

Uzorak  $x_1, x_2, \dots, x_n$  izvučen je iz populacije koja ima gustoću razdiobe

$$f(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Pomoću kriterija najveće izglednosti odredite procjenu za parametar  $\lambda$ .

**2. (3 boda)**

Koliko velik uzorak normalne populacije s disperzijom  $\sigma^2 = 0.0025$  treba uzeti da duljina 95%-tnog intervala povjerenja za očekivanje ne bude veća od 0.02.

**3. (4 boda)**

Iz populacije koja se podvrgava normalnoj razdiobi izvučen je sljedeći uzorak:

$x_j$	20	22	24	26	28	30
$n_j$	3	2	5	7	3	2

a) Izračunajte točkaste procjene za očekivanje i disperziju.

b) Izračunajte 80%-tni interval za očekivanje i 80%-tni jednostrani interval za disperziju.

**4. (3 boda)**

Kontrolom 100 žarulja iz određene velike pošiljke ustanovljeno je da su 3 žarulje loše.

a) Odredite 95%-tni interval povjerenja za postotak loših žarulja.

b) Koliki broj  $n$  žarulja treba kontrolirati da bi se s pouzdanošću 0.95 moglo tvrditi da u čitavoj pošiljci nema više od 5% loših žarulja?

**5. (3 boda)**

Izmjerena je težina 60 djece određene dobi i dobiveno je  $\bar{x} = 34$  kg,  $s = 4.8$  kg. Težina od 32 kg se smatra normalnom za djecu te dobi. Uz nivo značajnosti  $\alpha = 0.01$  testirate hipotezu  $H_0: \mu = 32$  prema alternativnoj hipotezi  $H_1: \mu \neq 32$ , pri čemu se pretpostavlja da je promatrana težina  $X$  slučajna varijabla normalne razdiobe  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , uz  $\sigma^2$  nepoznat.

**6. (4 boda)**

Kocka je bačena 120 puta i dobiveni su sljedeći rezultati:

broj	1	2	3	4	5	6
$n_j$	20	14	23	12	26	25

Pomoću  $\chi^2$  testa provjerite uz koji nivo značajnosti  $\alpha$  se može tvrditi da se ovi podaci ravnaaju po jednolikoj razdiobi ( $p_j = \frac{1}{6}$ ,  $j = 1, \dots, 6$ ).

## PITANJA IZ CJELOKUPNOG GRADIVA

### 7. (4 boda)

U bubnju se nalaze 4 bijele i 1 crvena kuglica. Slučajna varijabla  $X$  označava u kojem je pokušaju izvučena crvena kuglica. Odredite zakon razdiobe za  $X$  i njeno očekivanje u svakom od sljedeća dva načina izvlačenja:

- a) nakon izvlačenja kuglica se ne vraća u bubanj,
- b) nakon izvlačenja kuglica se vraća u bubanj.

### 8. (3 boda)

Slučajna varijabla  $X$  zadana je gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Odredite gustoću slučajne varijable  $Y = |2X + 1|$ .

### 9. (4 boda)

Dana je gustoća slučajnog vektora  $(X, Y)$

$$f(x, y) = Cx, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2].$$

- a) Odredite konstantu  $C$ .
- b) Izračunajte marginalne gustoće slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ .
- c) Izračunajte  $P\{X < Y\}$ .

### 10. (4 boda)

Iz intervala  $[\alpha, 1]$ , gdje je  $\alpha$  nepoznat odabrano je na sreću  $n$  brojeva:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Da bismo procijenili duljinu tog intervala odaberimo statistiku

$$Z = 1 - \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

- a) Dokažite da statistika  $Z$  nije nepristrana.
- b) S kojim faktorom treba pomnožiti  $Z$  kako bismo dobili nepristranu statistiku?

**Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljena je upotreba kalkulatora i knjige N. Elezović: "Statistika i procesi".**