VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

10. Matematička statistika

FER, Zagreb

Marko NUFC

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Statistika i procesi
Cjelina 10 – Matematička statistika

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

*****NAPOMENA*****

Zadaci KOJE TREBA rješavati su od 1.-5. Zadatka i od 9.-13., ostali zadaci (6.-8.)su teoretskog tipa.

Zadaci koji nedostaju: -
Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadataka!

<u>FORMULE:</u>

10. MATEMATIČKA STATISTIKA

Statistika – slučajna varijabla $\Theta \coloneqq g(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Procjena očekivanja:
Nepoznato očekivanje a populacije X procjenjujemo pomoću sredine uzorka.

$$\overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X_i} \qquad \text{, (uz } n_iX_i\text{):} \qquad \overline{\mathbf{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{n_k X_i}$$

$E(\overline{X})=a$; $D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$ gdje je σ^2 varijacija(disperzija) populacije.

Nepristrani procjenitelji
Za statistiku Θ kažemo da je nepristrana statistika parametra ϑ ako vrijedi: $\boldsymbol{E(\Theta) = \vartheta}$

Procjena disperzije
Ako je očekivanje a <u>poznato</u>, procjena disperzije se računa:

$$\boldsymbol{D^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2}$$

Ako su očekivanje a i disperzija σ^2 <u>nepoznati</u>, procjena disperzije se računa:

$$\boldsymbol{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}, \qquad \text{uz } n_iX_i \;\; \boldsymbol{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n_iX_i^2 - n\overline{x}^2)}$$

Kriterij najveće izglednosti
$x_1, x_2, \dots x_n$ realizacija uzorka populacije X, čija funkcija gustoće $f(\vartheta, x)$ ovisi o nepoznatom parametru ϑ.

$$\boldsymbol{L(\vartheta, x_1, \dots, x_n) = f(\vartheta, x_1) f(\vartheta, x_2) \dots f(\vartheta, x_n)}$$

Za procjenu parametra ϑ uzimamo onu vrijednost za koju fukcija izglednosti poprima <u>maksimum</u>.

ZADACI:

§ 10. Zadatci za vježbu

1. Rezultati mjerenja su 4.3, 4.5, 4.2, 4.6, 4.5, 4.4, 4.5, 4.4. Odredi procjene očekivanja i varijance.

2. Procjena disperzije varijable s poznatim očekivanjem a računa se iz uzorka formulom

$$\hat{D}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

Džepna računala programirana su na računanje disperzije ukoliko očekivanje nije poznato:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Dokaži sljedeću korisnu formulu:

$$\hat{D}^2 = \hat{\sigma}^2 + (\overline{x} - a)^2.$$

3. Visina tornja je 164.32 m. U deset nezavisnih mjerenja visine tog tornja, uređajem koji nema sistematske pogreške, dobiveni su sljedeći rezultati: 164.16, 164.33, 164.38, 164.44, 164.12, 164.30, 164.56, 164.47, 164.55, 164.22. Uz pretpostavku da je pogreška distribuirana po normalnom zakonu, odredi nepristranu procjenu za odstupanje

4. Pretpostavimo da u mjerenjima iz prethodnog zadatka stvarna veličina nije poznata. Uz pretpostavku da je pogreška distribuirana po normalnom zakonu, odredi nepristranu procjenu za odstupanje.

5. Mjerenje kapaciteta kondenzatora (u μF) u probnom uzorku dalo je sljedeće rezultate:

interval	n_k
21.0–21.3	2
21.3–21.6	8
21.6–21.9	15
21.9–22.2	26
22.2–22.5	43
22.5–22.8	38
22.8–23.1	24
23.1–23.4	15
23.4–23.7	6
23.7–24.1	3

Izračunaj sredinu i varijancu uzorka.

6. Načinjeno je n nezavisnih pokusa da bi se utvrdila frekvencija pojavljivanja događaja A. Kolika je disperzija te frekvencije? Za koju vrijednost vjerojatnosti $p = P(A)$ će ta disperzija biti maksimalna?

7. Nepoznata veličina mjerena je u n navrata mjerenjima različitih preciznosti. Neka su pri tom dobivene vrijednosti $x_1, \dots, x_n$, uz standardne devijacije $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. Procjenu mjerene veličine tražimo u obliku

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i,$$

gdje su t_i težinski koeficijenti, kojima je zbroj jednak 1. kako treba odrediti te koeficijente, da bi disperzija veličine $\hat{x}$ bila minimalna?

8. n brojeva odabrano je na sreću iz nepoznatog intervala $[a, b]$ i dobivene su vrijednosti $x_1, \dots, x_n$. Da bismo procjenili sredinu c tog intervala, odabrali smo vrijednosti

$$x_m = \min\{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_M = \max\{x_1, \dots, x_n\}$$

i stavili

$$\hat{c} = \frac{x_m + x_M}{2}.$$

(a) Dokaži da je $\hat{c}$ nepristrana procjena za c.
(b) Dokaži da je ta procjena valjana.

9. Vjerojatnost p događaja A je nepoznata. Pokus je ponovljen pet puta i A se dogodio triput. Nakon toga, pokus je ponovljen šest puta i A se dogodio u četiri navrata. Koristeći kriterij najveće izglednosti, odredi procjenu za p.

10. Slučajna varijabla ima eksponencijalnu razdiobu $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$. Ona je poprimila vrijednost x_1. Koristeći kriterij najveće izglednosti, koja je procjena za parametar λ?

11. Registrirana su vremena (u minutama) između uzastopnih poziva u telefonskoj centrali: 8, 12, 7, 10, 5. Kolika je vjerojatnost da će se na sljedeći poziv čekati više od 5 minuta?

12. Poissonova slučajna varijabla $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ u tri nezavisna pokusa poprimila je vrijednosti $x_1 = 5$, $x_2 = 7$, $x_3 = 3$. Koristeći kriterij najveće izglednosti, odredi procjenu parametra λ.

13. Uzorak $x_1, \dots, x_n$ izvučen je iz populacije koja ima gustoću razdiobe

$$f(x) = \lambda x^{\lambda - 1}, \qquad 0 < x < 1.$$

Pomoću kriterija najveće izglednosti, odredi procjenu za parametar λ.