

2. UVJETNA VJEROJATNOST

2.1. DEFINICIJA I PRIMJERI

→ MOTIVACIJA:

Kocka. Šestica. $\rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

Ako znamo da je pao paran broj? (UVJET)

$$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{3} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

→ $\frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} \rightarrow$ vjerojatnost da se dogodi početni događaj $\rightarrow P(A)$
 $\frac{2}{6} \rightarrow$ vjerojatnost uvjeta $\rightarrow P(B)$

z.f. Neka je B događaj takav da je $P(B) > 0$.

UVJETNA VJEROJATNOST događaja A uz uvjet B je $F \rightarrow [0, 1]$ definirana je s

$$P(A|B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

čitaj: „A uz uvjet B“

NAPOMENA!

SVUGDJE TREBAJU

ICI RAVNE OKOMITE

CRTE $[P(A|B)]$

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

KORISNA RELACIJA
ZA ZADATKE

z-4.) Bacamo 4 kocke. Izračunajte vjer. da je njihov zbroj veći od 6 ako su svi brojevi manji od 4.

$$A = \{ \text{zbroj veći od 6} \}$$

$$B = \{ \text{svi brojevi manji od 4} \}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3^4 - 15}{6^4}}{\frac{3^4}{6^4}} = 0.81$$

→ broj veći od 6 i svi br. manji od 4
na 4 kugle
→ svi br. manji od 4: 1, 2, 3

→ zbroj ≤ 6 !!

1111 → 1

1112 → 4

1113 → 4

1122 → 6

$\binom{4}{2}$

biram 2 mjesta od 4

222V-26.) U urni se nalaze 4P, 5B, 6C kuglica. Izvlačimo 3 kuglice jednu za drugom. Izračunajte vjerojatnost ako su sve različitih boja da je prva kuglica bijela i ako znamo da je prva bijela vjerojatnost da su sve različitih boja.

$A = \{ \text{sve različite boje} \}$

$B = \{ \text{prva kuglica bijela} \}$

"IZVLAČIMO JEDNU ZA DRUGOM"

→ BITAN REDOSLIJED

$P(A|B), P(B|A) = ?$

sve kuglice različite i prva bijela

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

$$= \frac{\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{13}}{\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} + \frac{5}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{13}}$$

izvukli su jednu (B)

5 → 5B

15 → 15 UKUPNO

(POSLIJE NAM JE SVEJEDNO)

$$= \frac{24}{94} //$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{6}{13} \cdot 2}{\frac{5}{15} \cdot \frac{6}{14} \cdot \frac{4}{13} \cdot 3!}$$

ISTO, KAO GORE

$$= \frac{1}{3} //$$

→ SVE MOGUĆE KOMBINACIJE

BPC

BCP

PBC 3

Zad.) → BIO PROŠLE GODINE NA LJETNOM ROKU SAMO SA NOGOMETAŠIMA...

II
ZAD

4 ferovca i profesor su išli u petak navečer van.

Vjerojatnost uspješnog uleta kod prosječnog ferovca je 0.3, a kod profesora 0.9. Ako znamo da je jedan od njih imao uspješnu večer, kolika je vjerojatnost da je to bio profesor?

$A = \{ \text{profesor} \}$

tačno

$B = \{ \text{1 bio uspješan} \}$

profesor bio uspješan

prof mora pogoditi

ferovei moraju fulati

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.9 \cdot 0.7^4}{0.9 \cdot 0.7^4 + 0.3 \cdot 0.7^3 \cdot 0.1 \cdot \binom{4}{1}} = 0.84$$

ili prof ili 1 od ferovaca

1 pogodio 3 fulala prof fulao

OPABRATI KOJI OD FEROVACA

12-13.) Novčić bacamo 10 puta. Izračunajte vjerojatnost da je svih 10 puta palo pismo ako znamo da je pismo palo barem 9 puta.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2} \cdot \binom{10}{1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}} = \frac{1}{11}$$

da padne svih 10 puta

pismo glava odabrat gdje je pala glava

ili $\binom{10}{9}$

NE U DESETOM BACANJU!

!! NAPOMENA: ovaj zadatak u 22V je nejasno napisan, nema riječi "barem" 9 puta...

2.2. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

→ MOTIVACIJA: U bubnju imamo 3B, 7C. Izlaci^vmo 2 kuglice.

Neka je $A = \{\text{prva } B\}$, $B = \{\text{druga } C\}$.

Izračunaj vjeroj. događaja A i B:

a) s vraćanjem

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{7}{10}$$

NIE BITNO ŠTO SE

DOGODILO U 1. BACANJU

⇒ NEZAVISNI DOGAĐAJI

b) bez vraćanja

$$P(A) = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{3}{10}$$

rez vraćanja

$$P(A) = \frac{3}{10}$$
$$P(B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9}$$

→ ZAVISNI DOGAĐAJI

$$P(B|A) = \frac{7}{9} \rightarrow \text{ako je 1.c, a druga B}$$

$$P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})$$

def.

def. Za A i B kažemo da su **NEZAVISNI** ako je

$$P(A) = P(A \setminus B) \quad \text{ili} \quad P(B) = P(B \setminus A)$$

равна	1
-------	---

Slijedi:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

NUŽAN I DOVOLJAN UYJET ZA
NEZAVISNOST!

Def. Događaji A_1, \dots, A_n su **NEZAVISNI** ako za svaki izbor A_{i_1}, \dots, A_{i_k} vrijedi $P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

→ Burek says: "Ovu DEFINICIJU DOBRO ZAPAMTITE JER TO VOLIMO ISPITIVATI NA ISPITIMA"

LMI-09-2.) a) Definiraj nezavisnost događaja od A, B, C.

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \quad \text{! NIJE DOVOLJNO SAMO TO !}$$

!! MORA VRIJEDITI I :

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(AC) = P(A)P(C)$$

b) Ako su A, B, C nezavisni dokažite da su A i B u C nezavisni.

$$\underline{P(A \cdot (B \cup C))} = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC) =$$

$$\stackrel{\text{nezavisni su}}{=} P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$$

$$= P(A) \left[P(B) + P(C) - \underbrace{P(B)P(C)}_{P(BC)} \right] = \underline{P(A) \cdot P(B \cup C)}$$

2.3. POTPUNA VJEROJATNOST I BAYESOVA FORMULA

→ MOTIVACIJA: "JEDAN IZ SVAKODNEVNOG FEROVSKOG ŽIVOTA..."

40% studenata je prošlo MAT1. (pak, dekan se smilovao (U NEKOM PARALELONOM SVEMIRU) i dopustio svima da upišu MAT2.

→ svi koji su položili MAT1 → 64% MAT2 prošlo

→ od ostalih → 28% MAT2 prošlo

Ukupna prolaznost MAT2?

$$P(A) = 0.4 \cdot 0.64 + 0.6 \cdot 0.28 = 0.424$$

$P(H_1)$ (HIPOTEZA) $P(A|H_1)$ $P(H_2)$ $P(A|H_2)$

FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2)$$



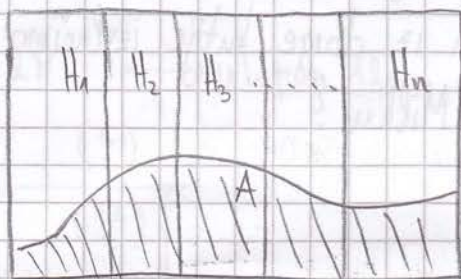
→ OKRETANJE HIPOTEZE: $P(H_1|A)$ → konačni ishod
→ qzrok → ZBOG ČEGA SE NEŠTO DOGODILO!
U PRAKSI VAŽNO → BAYES!

BAYESOVA FORMULA:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)}$$

→ za naš zadatak: $P(H_1|A) = \frac{0.4 \cdot 0.64}{0.4 \cdot 0.64 + 0.6 \cdot 0.28}$

Općenito:



HIPOTEZE → međusobno disjunktne i čine Ω

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n \\ H_i \cap H_j &= \emptyset \end{aligned} \right\} \text{PARTICIJA OD } \Omega \text{ (R-ovci)}$$

$$P(H_i) > 0 \quad \sum P(H_i) = 1$$

$$\Rightarrow A = AH_1 \cup AH_2 \cup \dots \cup AH_n$$

$$\Rightarrow P(A) \stackrel{\text{disj.}}{=} P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n)$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + \dots + P(H_n)P(A|H_n)$$

OPĆENITA

FORMULA POTPUNE
VJEROJATNOSTI

→ kada god ishod drugog pokusa ovisi o ishodu prvog pokusa!

1. Dž-17.)

U kutiji su ^{Milka} 2 M, ^{Dorina} 3 D. U drugoj kutiji 1 M, 4 D. Iz prve prebacimo u drugu na sreću 2 čokolade. Potom iz druge kutije izvlačimo 1 čokoladu. Vjerojatnost da smo izvukli Milku?

$$H_1 = \{2M\} \rightsquigarrow P(H_1) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$$

$$H_2 = \{1M, 1D\} \rightsquigarrow P(H_2) = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$$

$$H_3 = \{2D\} \rightsquigarrow P(H_3) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$$

suma tih vjerojatnosti mora ispasti 1

$$P(A | H_1) = \frac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}$$

$$P(A | H_2) = \frac{\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}}$$

$$P(A | H_3) = \frac{\binom{1}{1}}{\binom{7}{1}}$$

$$P(A) = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

* NASTAVAK PREDAVANJA *

2.22V-40.) Iz jednog snopa od 52 karte izvukli smo 1 kartu, a iz drugog snopa 2 karte. Pomiješali te 3 karte. Od njih izvukli 1 kartu. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli asa?

$H_i = \{ i\text{-aseva u prvom pokusu} \}$

$A = \{ \text{as u drugom pokusu} \}$

$\square \rightarrow 1 \}$
 $\square \rightarrow 2 \}$ $\rightarrow 1 \text{ AS?}$

0 ASEVA: $P(H_0) = \frac{\binom{48}{1} \cdot \binom{48}{2}}{\binom{52}{1} \binom{52}{2}} \rightsquigarrow P(A|H_0) = 0 = \frac{0}{3}$

1 AS: $P(H_1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{48}{2} + \binom{48}{1} \binom{4}{1} \binom{48}{1}}{\binom{52}{1} \binom{52}{2}} \rightsquigarrow P(A|H_1) = \frac{1}{3}$
 3 izvučene karte (ukupno) (1 as + 2 bijeloje)

2 ASA: $P(H_2) = \frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{1} \binom{4}{1} \binom{48}{1}}{\binom{52}{1} \binom{52}{2}} \rightsquigarrow P(A|H_2) = \frac{2}{3}$

3 ASA: $P(H_3) = \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{2}}{\binom{52}{1} \binom{52}{2}} \rightsquigarrow P(A|H_3) = 1 = \frac{3}{3}$

$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^3 P(H_i) P(A|H_i) = \frac{1}{13} \rightsquigarrow$ A PRIORI VJEROJATNOST HIPOTEZE

\rightsquigarrow Ako znamo da smo izvukli asa, kolika je vjerojatnost da su sve 3 karte bile as?

$P(H_3|A) = ? \rightarrow$ A POSTERIORNA VJEROJATNOST HIPOTEZE

\rightarrow PRAKSA!
 BAYESOVA FORMULA

\leadsto znamo : $P(AB) = P(A) P(B|A) = P(B) P(A|B)$

$$P(B|A) = \frac{P(B) P(A|B)}{P(A)}$$

BAYESOVA FORMULA

tj.

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) P(A|H_i)}{P(A)}$$



1.MI-07-4.) Neki izvor emitira znak 1 s vjerojatnosti 0.75.
Na izlazu iz kanala 5% signala se krivo interpretira.
Ako znamo da smo primili 1 kolika je vjerojatnost da smo 1 i poslali?

$$P(H_0) = 0.25 \rightarrow \{\text{poslati } 0\} = H_0$$

$$P(H_1) = 0.75 \rightarrow \{\text{poslati } 1\} = H_1$$

$A = \{\text{primljena jedinica}\}$

$$P(H_1|A) = ?$$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_0) \cdot P(A|H_0)$$

BAJO:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) P(A|H_1)}{P(A)}$$

$$P(A|H_0) = 0.05$$

$$P(A|H_1) = 0.95$$

} zbog krive interpretacije od 5%

$$= \frac{0.75 \cdot 0.95}{0.75 \cdot 0.95 + 0.25 \cdot 0.05}$$

$$= 0.983$$

1.11-10.-4.) 34% ljudi ima krvnu grupu O → prima samo O

37% → A → O i A primaju

21% → B → O i B primaju

8% → AB → primaju sve

a) Vjerojatnost da slučajno odabrana osoba može primiti krv od slučajno odabrane osobe?

$$P(O) = 34\%$$

$$P(A) = 37\%$$

$$P(B) = 21\%$$

$$P(AB) = 8\%$$

$U = \{ \text{uspješna transfuzija} \}$

$$P(U) = ?$$

$$P(U) = P(O) \cdot P(U|O) + P(A) \cdot P(U|A) + P(B) \cdot P(U|B) + P(AB) \cdot P(U|AB)$$

$$P(U) = 0.34 \cdot \overset{\substack{\text{prima samo} \\ \uparrow \\ O}}{0.34} + 0.37 \cdot \left(\overset{\substack{\text{prima } O \text{ i } A \\ \uparrow \quad \uparrow \\ O \quad A}}{0.34 + 0.37} \right) + 0.21 \cdot \left(\overset{\substack{\text{prima } O \text{ i } B \\ \uparrow \quad \uparrow \\ O \quad B}}{0.34 + 0.21} \right) + 0.08 \cdot \left(\overset{\substack{\text{primaju sve} \\ \uparrow \\ 1}}{1} \right)$$

$$P(U) = 0.5738$$

b) Ako sam uspješno primio krv, kolika je vjerojatnost da je moja krvna grupa AB?

$$P(AB|U) = ?$$

$$\underline{\text{BAJO:}} \quad P(AB|U) = \frac{P(AB) \cdot P(U|AB)}{P(U)} = \frac{0.08 \cdot 1}{0.5738} = 0.14$$

2. ZEV-72.) 4 krvolocna lovca gadaju vepa. Vjerovatnost pogotka prvog lovca je 0.3, a ostalih 0.2. Za ubijanje malog vepa potrebna su 2 pogotka. Jedan lovac je opazio vepa, triput je opalio i vepar je odapao papke. Izracunajte vjerovatnost da je prvi lovac ubio malog vepa.

$$H_i = \{i\text{-ti lovac}\} \quad P(H_i) = \frac{1}{4} \quad A = \{\text{vepar ubijen}\}$$

$$P(H_1 | A) = ? \quad \rightarrow \text{BAJO !!}$$

triput opalio

$$P(A | H_1) = 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot \binom{3}{2}$$

$$P(A | H_2) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot \binom{3}{2}$$

$$P(A | H_3) = \dots = P(A | H_2)$$

$$P(A | H_4) = \dots = P(A | H_2)$$

PAZI !!

NE ZABORAVI !

U KOGEM JE POGODIO,
REDOSLIJED BITAN?

POANTA ZADATKA NE
ZABORAVITI OVO !

$$\Rightarrow P(H_1 | A) = \frac{P(H_1) P(A | H_1)}{\sum_{i=1}^4 P(H_i) P(A | H_i)} = 0.41 //$$

Str. 83

1-9-7
NABOBUDU

PREK VIKENDA RIJELO

2. POGLAVLJE + 1. DZ DO KRAJA

OD 10.-91

može bez zad. sa n, m ...

čudni 33

1. MI-08-4.)

Bacili smo kocku, a zatim je bacili još ^{"maloj"} n ovoliko puta koliki je broj pao prvi put. Ako znamo da su ukupno pale točno 2 petice, kolika je vjerovatnost da je jedna od njih pala u prvom bacanju?

$$H_i = \{\text{broj na } \overset{\text{"maloj"}}{\uparrow} \text{ prvoj kocki}\}$$

$$A = \{\text{točno 2 petice}\}$$

$$P(H_i) = \frac{1}{6}$$

$$P(H_5 | A) = ? \rightarrow \text{OPET ČIKA BAJO!}$$

$$P(A | H_1) = 0$$

$$P(A | H_2) = \frac{1}{36}$$

palo 2 \rightarrow 55 \rightarrow 1 mogućnost od 36
 \rightarrow znamo da su pale točno 2 petice

$$P(A | H_3) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}$$

točno 2 petice
 bilo koji broj osim petice

\rightarrow ODABIR KOJE KOCKE OD 3! NE ZABORAVI !!

$$P(A | H_4) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

\rightarrow na ostale 2 kocke (bocanja) bilo šta osim petice

$$P(A | H_5) = \binom{5}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

odabiremo još 1 peticu
 ...

točno 2 petice

PAZITI!!!

\rightarrow JER JE VEĆ PALA JEDNA PETICA !!

$$P(A | H_6) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

$$P(H_5 | A) = \frac{P(H_5)P(A | H_5)}{\sum_{i=1}^6 P(H_i)P(A | H_i)} = 0.4926$$