

ZAVRŠNI ISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

16.06.2014.

1. (4 boda)

Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable distribuirane po zakonu

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Odredite razdiobu slučajnog vektora (X, Y) i disperziju slučajne varijable $Z = \frac{X}{Y}$.

2. (6 bodova)

Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe

$$f_X(x) = 2x, \quad x \in [0, 1].$$

Broj Y potom se bira na sreću iz intervala $[X, 1]$. Odredite:

- a) funkciju gustoće slučajnog vektora (X, Y) ,
- b) marginalnu gustoću slučajne varijable Y .

3. (5 bodova)

Na ruletskom kolu obilježeno je ukupno 37 polja i to 18 crvenih, 18 crnih i 1 zeleno. Pretpostavimo da se igrač u jednoj igri (jednom okretanju ruleta) kladi u crveno ili crno polje. U slučaju pogotka boje polja dobiva 10 kuna, inače gubi 10 kuna. Kolika je vjerojatnost da nakon 100 kladenja igrač bude na dobitku? Ukoliko umjesto 10 kuna odredimo neki drugi iznos hoće li se ova vjerojatnost promijeniti?

4. (5 bodova)

Pretpostavimo da su očekivanje a i disperzija σ^2 populacije X nepoznati i (X_1, X_2, \dots, X_n) uzorak za X .

- a) Dokažite da je sljedeća statistika za procjenu očekivanja a nepristrana:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

- b) Dokažite da je sljedeća statistika za procjenu disperzije σ^2 nepristrana:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right).$$

5. (4 boda)

Uzorak $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1/3$, $x_3 = 1/5$ izvučen je iz populacije koja ima gustoću razdiobe

$$f(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Pomoću kriterija najveće izglednosti odredite procjenu za parametar $\lambda > 0$.

6. (6 bodova)

Na 30 pacijenata testiran je novi lijek "B" za smanjenje visokog krvnog pritiska. Dobiveno je prosječno smanjenje pritiska za $\bar{x} = 23$ jedinice uz $\hat{s} = 3.2$ jedinice. Pretpostavljamo da se podaci ravnaju po normalnoj razdiobi uz nepoznatu devijaciju σ .

a) Odredite 95%-tni interval povjerenja za očekivanje smanjenja krvnog pritiska s lijekom "B".

b) Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ provjerite je li novi lijek "B" efikasniji od starog lijeka "A" koji snizuje krvni pritisak za 21 jedinicu.

7. (5 bodova)

Prilikom uzimanja uzorka nekog proizvoda u tvornici, primijećeno je da je u prosjeku svaki četvrti proizvod škart. Proizvođač tvrdi da je vjerojatnost škarta samo 20%. Koliki minimalno mora biti uzorak da bismo na temelju njega mogli na nivou značajnosti 0.05 zaključiti da proizvođač laže?

8. (5 bodova)

U prvih 800 znamenaka decimalnog prikaza broja π znamenka i se pojavljuje n_i puta kao u tablici:

znamenka i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	74	92	83	79	80	73	77	75	76	91

Pomoću χ^2 testa provjerite uz nivo značajnosti 10% slažu li se dobiveni rezultati s hipotezom da je pojava svih znamenki u tom prikazu jednako vjerojatna.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica. Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ VISA
16.06.2014.

1.

$X \backslash Y$	1	2
1	1/6	1/3
2	1/6	1/3

 $Z \sim \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \end{pmatrix} \quad D(Z) = 1/4$

2.

$$f(x, y) = \frac{2x}{1-x}, \quad 0 \leq x \leq y \leq 1$$

$$f_Y(y) = -2y - 2 \ln(1-y), \quad y \in [0, 1]$$

3.

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 18/37 & 19/37 \end{pmatrix} \text{ ili općenitije } X_i \sim \begin{pmatrix} a & -a \\ 18/37 & 19/37 \end{pmatrix}$$

$$E(X_i) = -a/37 \quad D(X_i) = a^2 \left(1 - \frac{1}{37^2}\right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 0\right) \stackrel{\text{CGT}}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi^*(0.27) = 0.3936$$

4.

a) $E(\bar{X}) = a$
b) $E(S) = \sigma^2$

5.

$$\lambda = \frac{3}{\ln 30}$$

6.

a) $a \in [21.805, 24.195]$
b) t-test $\hat{t} = 3.423$, $t_{29,0.95} = 1.699$, H_0 se odbacuje

7.

hipoteza o proporciji $n \geq 173$

8.

$$\chi_q^2 = 5.125, \chi_{9,0.9}^2 = 14.684, \text{ podatci se ravnaaju po jednolikoj razdiobi}$$