KNJIŽICA II

5. NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE

5.1. DEFINICIJE I SVOJSTVA

→ MOTIVACIJA: biramo broj iz intervala $[1,3]$. Neka slučajna varijabla poprima vrijednost koju smo izvukli. $P(X<2)=\frac{1}{2}$

Kako izgleda slučajna varijabla vezana uz ovaj pokus?

def. Preslikavanje $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je slučajna varijabla ako za $\forall x \in \mathbb{R}$ je

$$\Delta_x = \{ \omega \in \Omega : X(\omega) < x \} \in \mathcal{F}$$

za DISKRETNE VRIJEDI JEDNAKOST „="

→ **Funkcija razdiobe** varijable X je funkcija $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana s $F(x) = P(X<x)$.

TM

SVOJSTVA FUNKCIJA RAZDIOBE:

i) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ $\quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ $\quad$ (OČITO)

ii) Funkcija razdiobe je RASTUĆA funkcija (1. DERIVACIJA > 0)

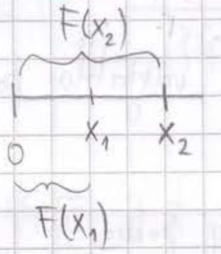
→ OČITO zbog svojstva monotonosti vjerojatnosti

⇒ što je veći x sve više je obuhvaćen X

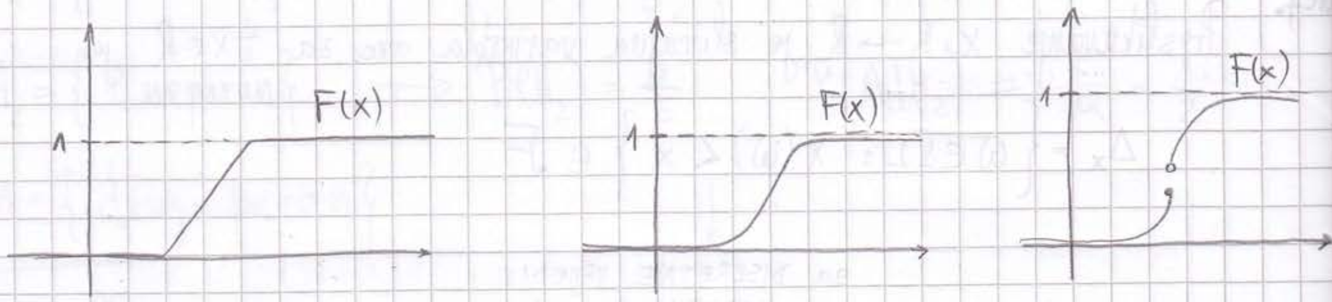
iii) $F(x)$ je NEPREKINUTA s LIJEVA, ALI SAMO S LIJEVA!

$F(x-0) = F(x)$ → vrijednost kada teži k x, ali s lijeva

iv) $$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$



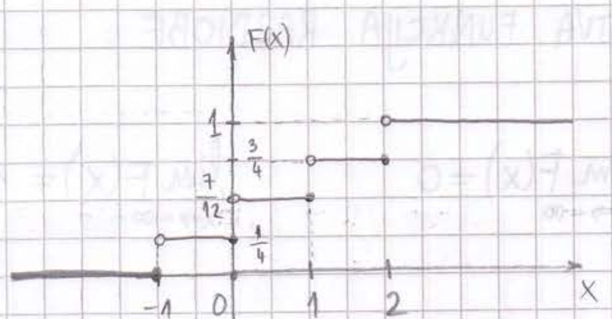
Primjer.



Zadatak. Odredi funkciju razdiobe od slučajne varijable X

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad F(x) = ?$$

$$F(x) = P(X < x)$$



$$F(-3) = P(X < -3) = 0$$

$$F(-2) = 0$$

$$F(-1) = P(X < -1) = 0$$

$$F(0) = P(X < 0) = \frac{1}{4}$$

$$F(1) = P(X < 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$F(2) = P(X < 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$$F(77) = P(X < 77) = 1$$

$$F(777\,777) = P(X < 777\,777) = 1$$

UOČI!

F(x) DISKRETNE SLUČ. VAR. JE STEPENASTA FJA [0,1] SA SKOKOVIMA $x_1, x_2, x_3, \ldots$ VELIČINE $p_1, p_2, \ldots$

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **NEPREKINUTA** ako postoji NENEGATIVNA funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ takva da je

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt}$$ odnosno $f(x) = F'(x)$.

⇝ $f(x)$ nazivamo **FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI**

⇝ očito vrijedi $f(x) \geq 0$

UOČI !

⇝ $F(x)$ je NEPREKINUTA pa vrijedi $P(X=x) = \underbrace{F(x+0)}_{\text{lim. s desna}} - \underbrace{F(x)}_{\text{lim. s lijeva}} = 0$

stoga ⇒ događaji $(x_1 \leq X \leq x_2)$ i $(x_1 < X \leq x_2)$ su jednako vjerojatni

$$\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx}$$!

⇝ pri tome $f(x)$ MOŽE biti VEĆA OD 1, ali VJEROJATNOST $P < 1$ (rastuća / padajuća)

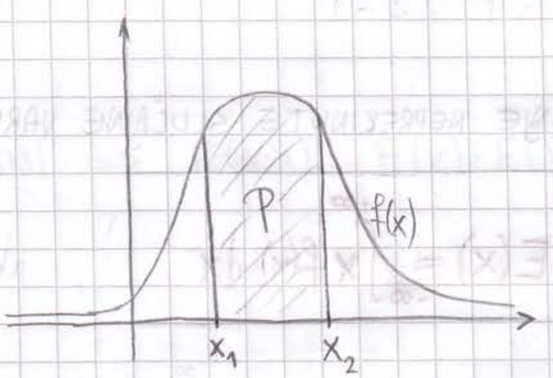
⇒ OČITO VRIJEDI:

!
$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1}$$

↓

vjeroj. cijele krivulje (Ω)

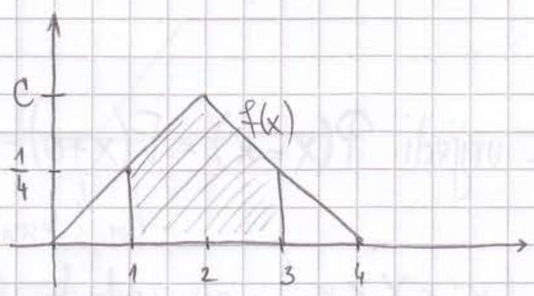
↳ UVJET ZA FJU GUSTOĆE



ZAPAMTI:

$$\boxed{\begin{array}{l} P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) \\ P(X = x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0 \end{array}}$$

Zad.) Funkcija gustoće zadana je slikom. $P(1 < X < 3) = ?$ $E(x) = ?$



površina cijelog trokuta, od svega ispod funkcije, $-\infty \to \infty$

⇝ prvo odrediti c : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot c}{\cancel{2}_1} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

SLIKA! OKUPNO CIJELI TROKUT   MALI TROKUTIĆI

$$\Rightarrow P(1 < X < 3) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_1^3 f(x)\,dx \overset{\text{SLIKE}}{=} 1 - 2 \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{4}}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

def.

Očekivanje neprekinute slučajne varijable definira se formulom

$$\boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx}$$

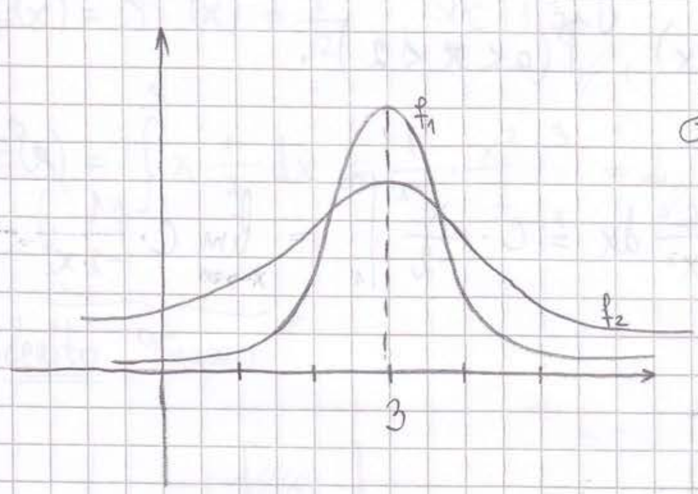
, ako integral konvergira.

⇝ za prethodni zad.: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^2 x \cdot \frac{1}{4}x\,dx + \int_2^4 x \cdot \left(1 - \frac{1}{4}x\right)dx = \dots = 2$

DISPERZIJA NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE definira se formulom

$$\boxed{D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - E(x)^2}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D(x)}}$$



$\sigma_2 > \sigma_1$

→ SVOJSTVA su ista kao kod diskretnih varijabli:

i) $E(sX + tY) = sE(x) + tE(y)$

ii) $D(sX) = s^2 D(x)$

iii) ako su X i Y NEZAVISNI $\Longrightarrow$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

def.

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA SLUČAJNE VARIJABLE definira se

$$\vartheta_X(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

PRIMJETI! Karakteristična funkcija je zapravo FOURIEROVA TRANSFORMACIJA.

2.MI-09.-1.) Zadana je slučajna varijabla gustoće $f(x) = \frac{c}{x^3}$, $x > 1$.
Nađi c, $E(x)$, $F(x)$, $P(0 < X < 2)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{c}{x^3}\,dx = c \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\Big|_1^{\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} c \cdot \frac{1}{-2 \cdot x^2}}_{=0} - c \cdot \frac{1}{-2}$$

PAZI! → $\boxed{x>1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}c = 1 \Rightarrow \boxed{c = 2}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_{1}^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx = \ldots = 2$$

NE ZABORAVI!

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{1}^{x} \frac{2}{t^3}\,dt = 1 - \frac{1}{x^2}, \quad x > 1 \;!!$$

IPAK NE

$$P(0 < X < 2) = \int_{1}^{2} \frac{2}{x^3}\,dx = \ldots = \frac{3}{4}$$

PAZI! ZBOG $x > 1$!!

(ILI) $= F(2) - F(1) =$

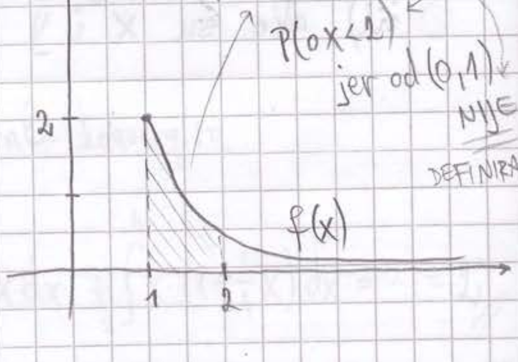
$= \frac{3}{4} - 0 =$

$= \frac{3}{4}$

F(x) integral od 1→2

P(0<x<2)

jer od (0,1) NIJE DEFINIRAN



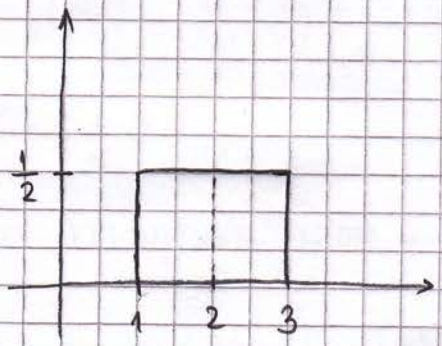
JEDNOLIKA (UNIFORMNA) RAZDIOBA

⇝ npr. biramo na sreću broj iz intervala $[1,3]$

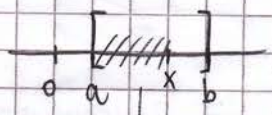
$$F(x) = P(X < x) = \frac{x-1}{2}$$

$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}, \quad x \in [1,3]$$

$$E(x) = \int_1^3 x \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 2$$



⇝ Općenito imamo



$P(X < x)$

$X \sim U[a,b]$

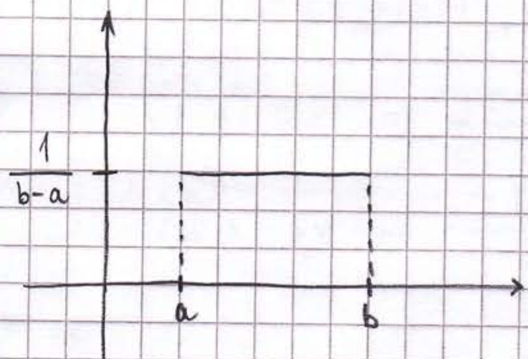
„X ima uniformnu razdiobu na int. $[a,b]$"

$$F(x) = P(X < x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$

$$E(x) = \overline{X} = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D(x) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$



2-MI-11-1.) Zadana je $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1\rangle \\ ax - x^2, & x \in [1,2\rangle \end{cases}$. Odredite sve, a to je $a, F, E, D, P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = ?$

⟶ podrazumjeva se da je $f(x) = 0$ INAČE, na ostalim intervalima

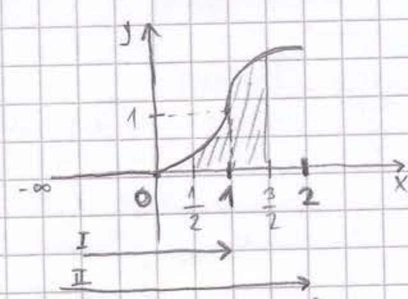
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (ax - x^2)\,dx = \ldots = -2 + \frac{3a}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2}$$

⟶ MOGLI ZAKLJUČITI KOLIKI JE a I IZ UVJETA NEPREKINUTOSTI !

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{7}{6}$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \ldots \text{ DZ}$$



$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - x^2)\,dx =$$

MOĆI

$$= \ldots = \frac{3}{4}$$

PAZI !

RASTAVI NA INTERVALE

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

I ⟶ za $x \in [0, 1\rangle$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

II ⟶ za $x \in [1, 2\rangle$: $\cancel{F(x) = \int_1^x (2t - t^2)\,dt}$ PAZI ! NE !

$\Rightarrow$ razdioba definirana $P(X < x)$, mora pokupiti sve iz $-\infty$ do ∞ !!!

a

$$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} t^2\,dt + \int_{1}^{x} (2t - t^2)\,dt = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$$

! NE ZABORAVI POKUPITI **SVE** INTERVALE PRIJE X-a !

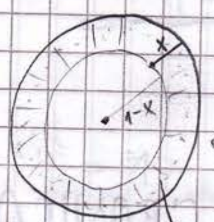
$$F(x) = \begin{cases} \underset{\sim\sim}{0}, & \underset{\sim\sim}{x < 0} \\ \frac{x^3}{3}, & x \in [0, 1\rangle \\ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}, & x \in [1, 2\rangle \\ \underset{\sim\sim}{1}, & \underset{\sim\sim}{x \geq 2} \end{cases}$$

SVI UVJETI ZADOVOLJENI

I OVO JE STVARNO F-JA RAZDIOBE.

$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ II NAČIN: $F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \dots = \frac{3}{4}$

2.MI-08-1.) Biramo točku unutar kruga $r=1$. Neka je X udaljenost te točke do ruba. Odredite njenu razdiobu i očekivanje.



VRIJEDNOST MANJA OD X-a !

$x \in [0, 1]$, za $x < 0$: $F(x) = 0$

za $x > 1$: $F(x) = 1$

za $x \in [0, 1]$:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{\overbrace{\pi - (1-x)^2\pi}^{P_{\text{KRU. VIJENCA}}}}{\underbrace{1 \cdot \pi}_{r^2\pi \to P_{\text{KRUGA}}}}$$

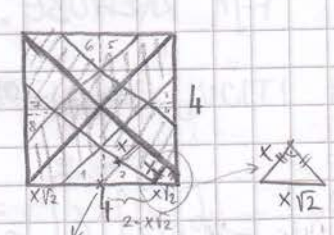
$$\Rightarrow F(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$$

$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 2 - 2x \;,\; \underline{\underline{x \in [0,1]}}$

OBAVEZNO PISATI ! SKIDAJU BODOVE NA ISPITU ZA TO !

$\Rightarrow E(x) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{1}{3}$ //

3.DZ-10.) U kvadratu stranice 4 na sreću biramo točku. X je udaljenost točke do najbliže dijagonale. Odredi očekivanje (fju razdiobe...) Odredi SVE !



MAX UDALJENOST

$\Rightarrow \frac{1}{4}$ DIJAGONALE $\rightarrow \sqrt{32}$

$x \in [0, \sqrt{2}]$: $F(x) = P(X < x) =$ (8 MALIH TROKUTIĆA)

$= \dfrac{16 - 8 \cdot \frac{1}{2}(2 - x\sqrt{2})^2}{16} =$

$F(x) = x\sqrt{2} - \frac{1}{2}x^2 \;,\; x \in [0, \sqrt{2}]$

⤳ provjera ako uvrstimo 0 → 0
ako uvrstimo $\sqrt{2}$ → 1 O.K.

$f(x) = F'(x) = \sqrt{2} - x \;,\; x \in [0, \sqrt{2}]$ //

$E(x) = \int_0^{\sqrt{2}} x(\sqrt{2} - x)\, dx = \dots = \frac{\sqrt{2}}{3}$ //

U OVIM ZADACIMA SAMO JE NEBO GRANICA

Apsolutno svašta može biti – piramide.... najlošije riješen zadatak na ispitu... –.–'

TUUUGA

ZADACI:

(5.) poglav. 1 - 17

18 - 34 } 1-34 II

35 - 41 }

61 - 63 } ZA NATJECANJE IZ VISA

64 - 90 → RJEŠITI SVE

UKUPNO: 50 zad -.-'

3.DZ - 9.) Unutar kvadrata stranice 1 biramo točku i potom opišemo krug maksimalne površine sa središtem u toj točki. Nađite funkciju razdiobe i $P(X > \frac{\pi}{16}) = ?$

POVRŠINE TOG KRUGA

$P = \frac{1-(1-2r)^2}{1}$

X = površina ovog kruga $= r^2\pi$

$X \in [0, \frac{\pi}{4}]$

X NIJE NA SLICI !

NA SLICI JE POLUMJER OD X-a !

$F(x) = P(X < x) =$

SVE JE POZITIVNO PA MOŽEMO TO NAPRAVIT !

$= P(r^2\pi < x) = P\left(r < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) =$

$= \frac{1-\left(1-2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2}{1^2} =$ → NE SMIJEMO IMATI r NEGO PREKO X-a !

$= 1-\left(1-2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2$ //

$$\boxed{\begin{aligned} P(a<X<b) &= F(b)-F(a) \\ P(X>a) &= 1-F(a) \\ P(X<a) &= F(a) \end{aligned}}$$

$P\left(X > \frac{\pi}{16}\right) = 1 - F\left(\frac{\pi}{16}\right) =$

$= 1 - \frac{3}{4} =$

$= \frac{1}{4}$ //

1.MI-12-6.) Biramo na sreću broj iz [0,2] i drugi broj iz [0,1]. Neka je slučajna varijabla Z apsolutna vrijednost razlike ova dva broja. Odredite SVE!

$E(z) = ?$

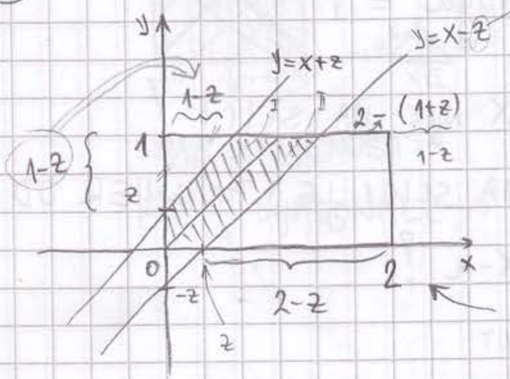
$x \in [0,2]$

$y \in [0,1]$

$z = |x-y|$

$z \in [0,2]$: $F(x) = P(Z < z) = P(|x-y| < z)$

(1.)



$\rightsquigarrow |x-y| < z$

NE OVISI O Z-U, UVIJEK TAKO!

II $y<x$ / $x-y < z$ ILI I $y>x$ $y-x < z$

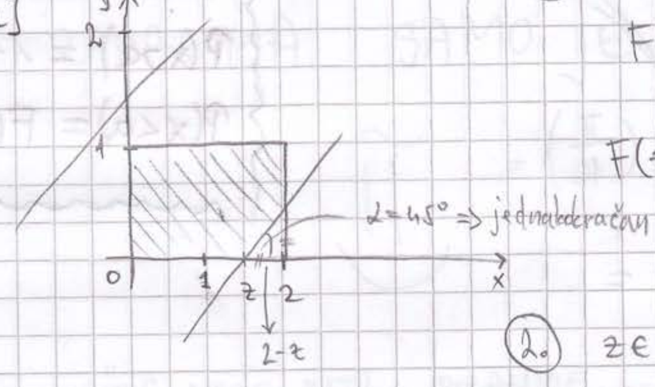
$y > x-z$ $y < x+z$

za $z \in [0,1]$!!

→ AKO JE ZA RAZLIČITE Z-OVE DRUKČIJA SLIKA ONDA MORAMO RASTAVITI NA INTERVALE!

(2.)

→ za $z \in [1,2]$



$\frac{a+c}{2} \cdot v$

$P_{trapeza}$

(1.) za $z \in [0,1]$:

$$F(z) = \frac{2 - \frac{(1-z)^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot (1-z+2-z)}{2 \cdot 1}$$

$$F(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-z)^2 + \frac{z}{2}$$

(2.) $z \in [1,2]$

$$F(z) = \frac{2 - \frac{1}{2}(2-z)^2}{2} = 1 - \frac{1}{4}(2-z)^2$$

NAKON DERIVIRANJA

$$\Rightarrow \quad f(z) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2}z \ , & z \in [0,1] \\ 1-\frac{1}{2}z \ , & z \in [1,2] \end{cases} = \underline{\underline{1-\frac{1}{2}z \ , \quad z \in [0,2]}}$$

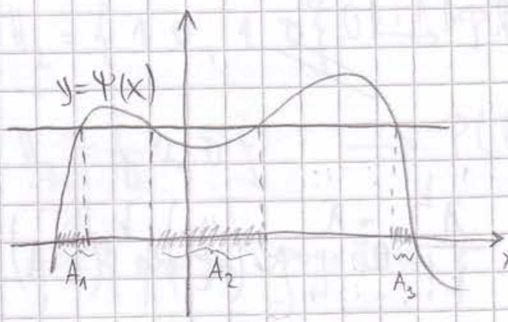
$$E(x) = \int_0^2 z\left(1-\frac{1}{2}z\right)dz = \cdots = \frac{2}{3}$$

5.2. FUNKCIJE SLUČAJNIH VARIJABLI

⇝ npr. imamo razdiobu od X zanima nas razdioba od sin X ...

⇝ neka je $\Psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, X je slučajna varijabla, $Y = \Psi(X)$

→ od X znamo razdiobu, kako određujemo razdiobu od Y ?



$G(y)$ ... funkcija razdiobe od Y

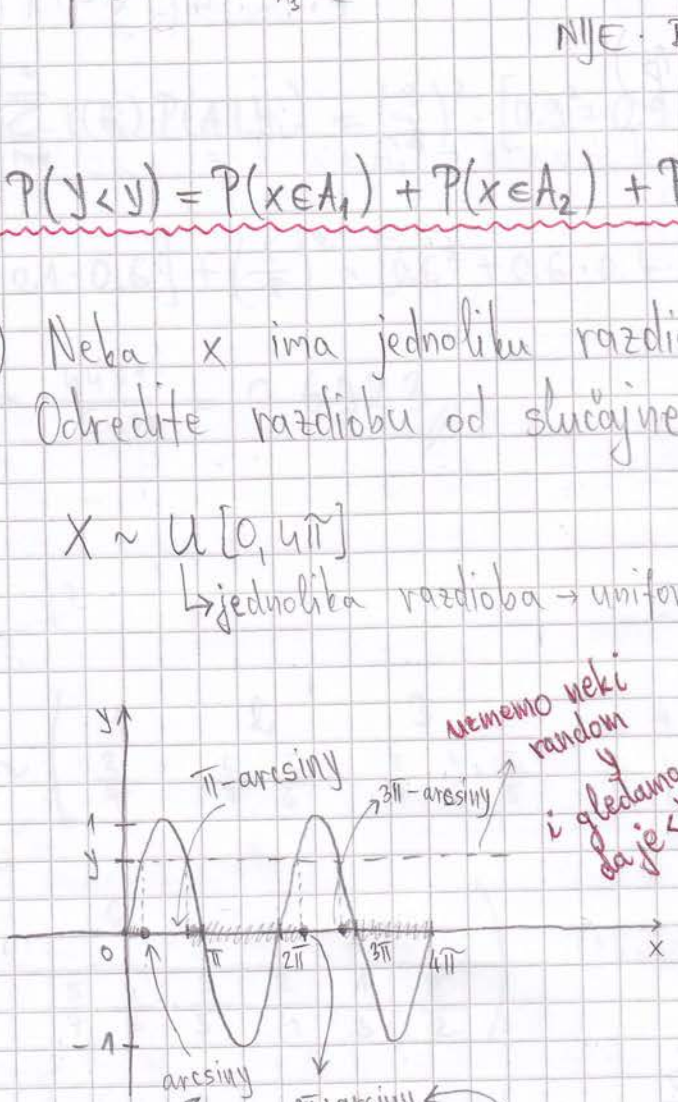
$G(y) = P(Y < y) = P(\Psi(X) < y)$

→ NE MOŽEMO KORISTITI INVERZ JER NIJE BIJEKCIJA !

$$G(y) = P(Y < y) = P(X \in A_1) + P(X \in A_2) + P(X \in A_3)$$

3.DZ-12.) Neka X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 4\pi]$. Odredite razdiobu od slučajne var. $Y = \sin X$.

$X \sim U[0, 4\pi]$ ↳ jednolika razdioba → uniformna $\Big\}$ $f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{4\pi}$



uzmemo neki random y i gledamo da je < y

$y \in [-1, 1]$

$G(y) = P(Y < y) = P(\sin X < y)$

VOČI:

RAČUNAMO PREKO INVERZA !

⇝ zbog disjunktnosti vrijedi zbrajanje

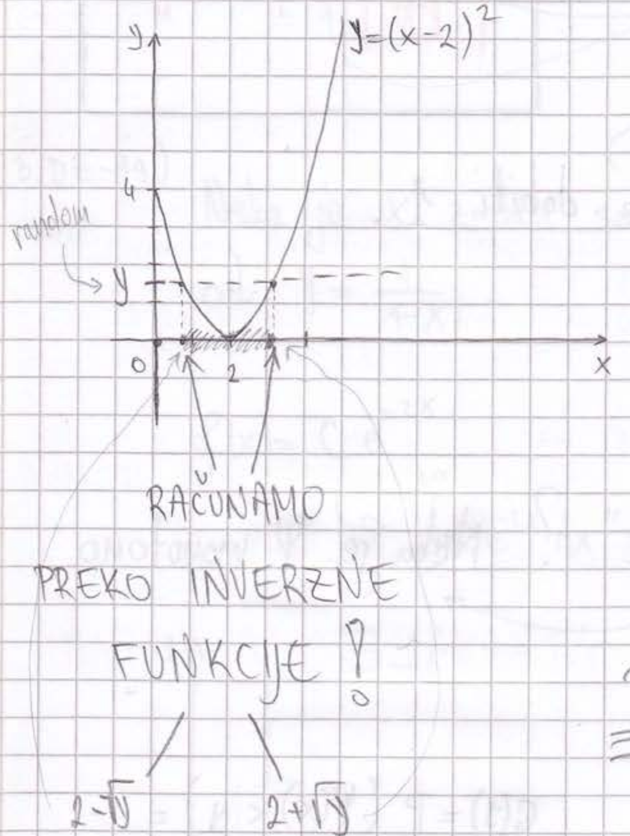
$$G(y) = P(0 < X < \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y < X < 2\pi + \arcsin y) + P(3\pi - \arcsin y < X < 4\pi)$$

$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{4\pi}\,dx + \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} \frac{1}{4\pi}\,dx + \int_{3\pi-\arcsin y}^{4\pi} \frac{1}{4\pi}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin y$$

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in \langle -1, 1\rangle$$

2.MI-08-2.) Neka X ima $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Odredite razdiobe (FUNKCIJU) od $Y = (X-2)^2$.

PAZI!! CRTAMO!



$y \in [0, +\infty\rangle$

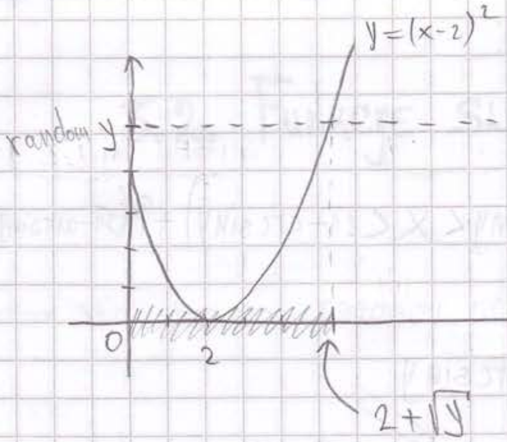
$$G(y) = P(Y < y) = P((X-2)^2 < y) =$$

$$= P(2-\sqrt{y} < X < 2+\sqrt{y}) = \;!$$

$$= \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} e^{-x}\,dx = e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2}, \quad y \in \langle 0, 4\rangle$$

PAZI! OVO VRIJEDI SAMO ZA $y \in [0, 4]$!! SLIKA!

⇝ ZA $Y > 4$ POSEBNO IZRAČUNATI, PODIJELITI NA INTERVALE! → APSOLUTNO SVAKE GODINE NA ISPITU!!!



OBAVEZNO PISATI !

$$G(y) = P(Y < y) = P(0 < X < 2+\sqrt{y}) =$$

$$= 1 - e^{-\sqrt{y}-2}, \quad \text{za } y \in \langle 4, +\infty \rangle$$

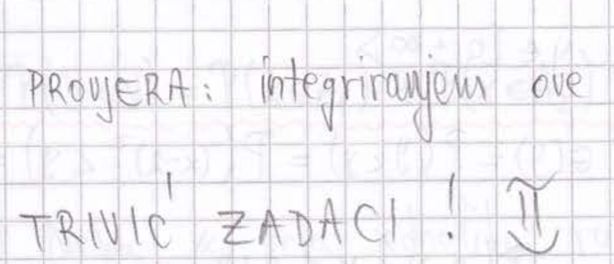
$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{y}-2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}-2}, & y \in \langle 0, 4 \rangle \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{2}-2}, & y \in \langle 4, \infty \rangle \end{cases}$$

⇝ PROVJERA: integriranjem ove fje dobiti 1.

⇝ TRIVIĆ ZADACI ! ⇓

• Što ako imamo fje koje su "lijepe" ? Neka je Ψ monotono RASTUĆA.

Dobit ćemo:



$$G(y) = P(\Psi(X) < y) =$$

$$= P(X < \Psi^{-1}(y)) =$$

$$= F(\Psi^{-1}(y))$$

MOŽEMO BEZ PROBLEMA NAĆI INVERZ.

$$\boxed{g(y) = G'(y) = f\left(\Psi^{-1}(y)\right) \cdot \frac{d\Psi^{-1}(y)}{dy}}$$

DIREKTNA FORMULA ZA RAČUNANJE INJEKTIVNE FUNKCIJE

→ za PADAJUĆE funkcije samo apsolutna još

$$g(y) = G'(y) = f$$

„IZVOD OVE FORMULE BIO PAR PUTA NA ISPITIMA."

knjižica:

SAMO ZA BIJEKCIJE !!

$$\boxed{g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|}$$

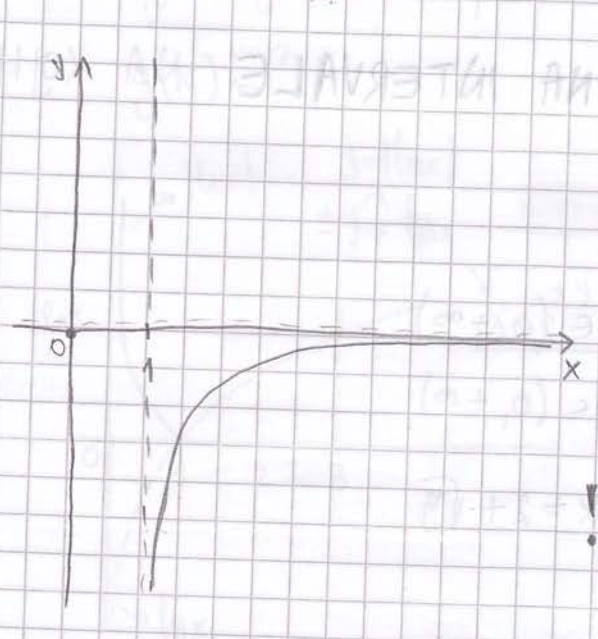
pri čemu je $x = \Psi^{-1}(y)$

UVRSTITI !!

3.DZ-19) Neka je X zadan sa $f(x) = Ce^{-2x}$, $x \geq 1$. Odredite fju gustoće od $Y = \frac{1}{1-X}$.

$$f(x) = Ce^{-2x}$$

$$\hookrightarrow \int_1^{+\infty} Ce^{-2x}\,dx = 1 \Rightarrow C = 2e^2$$



$y = \frac{1}{1-x}$

↓

vertikalna asimptota
→ nultočka nazivnika

→ HORIZONTALNA : $y = 0$

$$y \in \langle -\infty, 0\rangle$$

! NAĆI INVERZ ...... $x \leftrightarrow y$

$$x = 1 - \frac{1}{y}$$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{y^2}$$

PAZI !!!

UVRSTITI, NE SMIJE BITI X-a !

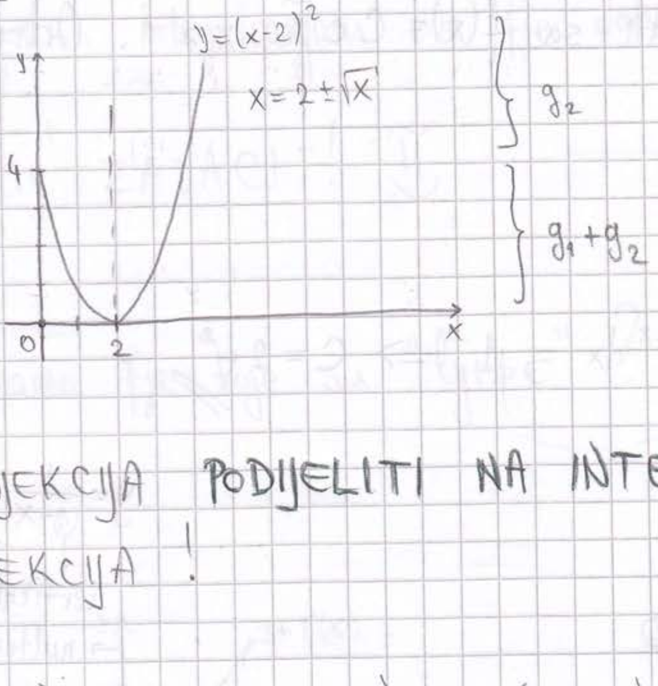
$$g(y) = 2e^2 \, e^{-2\left(1-\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y^2}$$

da se tražila razdioba onda bi ovo INTEGRIRALI ILI po DEFINICIJI

(postupak povuci random y....)

2.MI - 08 - 2.) Neka je X zadan sa $f(x) = e^{-x}$, $x>0$. Odredite fju gustoće od $Y = (x-2)^2$.

II NAČIN :



AKO NIJE INJEKCIJA **PODIJELITI NA INTERVALE** NA KOJIMA JEST INJEKCIJA !

1.) $x \in (0,2)$

$y \in (0,4)$

$x = 2 - \sqrt{y}$

2.) $y \in (0,+\infty)$

$y \in (0,+\infty)$

$x = 2 + \sqrt{y}$

SADA KORISTIMO FORMULU:

1.) $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\Rightarrow g_1(y) = e^{-(2-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$

2.) $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\Rightarrow g_2(y) = e^{-(2+\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$

PAZI!

$\rightsquigarrow$ KONAČNO:

$$g(y) = \begin{cases} g_1 + g_2, & \underline{\underline{y \in (0,4)}} \\ g_2, & y \in (4,+\infty) \end{cases}$$

na tom intervalu vrijede obje jer $(0,4) \cap (0,+\infty\rangle = (0,4)$

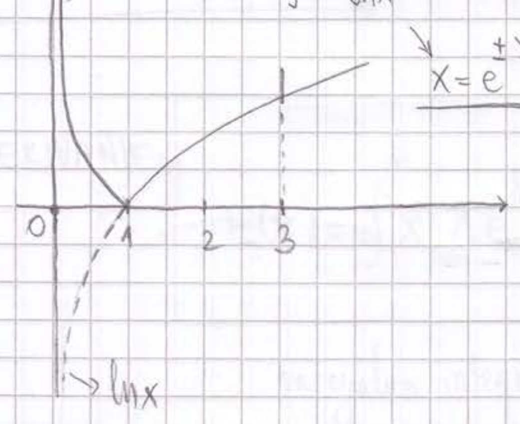
VIDI SE I NA GRAFU!

$$g(y) = \begin{cases} \text{izračunaj}, & y \in (0,4) \\ \ldots, & y \in (4,+\infty) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ da su tražili razdiobu onda SAVJET BUREKA: ONIM PROŠLIM NAČINOM jer ovo može biti teško izintegrirati....

2.MI-11-3.) Odredite fju gustoće od $y = |\ln x|$ ako je X zadan s fjom gustoće $f(x) = \frac{2}{9}x$, $x \in (0,3)$.

$g(y) = ?$



$y = |\ln x|$

$\pm y = \ln x$ $\xrightarrow{\text{INVERZ}}$ $\underline{x = e^{\pm y}}$

1.) $x \in (0,1)$

$y \in (0,+\infty)$

$x = e^{-y}$ → TO JE DIO GDJE SMO MINUS PREBACILI GORE ZBOG APSOLUTNE

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|-e^{-y}\right| = e^{-y}$

2.) $x \in (1,3)$

$y \in (0, \underline{\underline{\ln 3}})$

$x = e^{y}$

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|e^{y}\right| = e^{y}$

$\Rightarrow g_1(x) = \frac{2}{9} e^{-y} \cdot e^{-y}$ $\quad g_2(x) = \frac{2}{9} e^{y} \cdot e^{y}$

$\leadsto$ konačno, $g(x) = \begin{cases} g_1 + g_2, & y \in (0, \underline{\underline{\ln 3}}) \\ g_1, & y \in (\ln 3, +\infty) \end{cases}$ $\longrightarrow$ TU SE POKLAPA FUNKCIJA!

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{9} e^{-2y} + \frac{2}{9} e^{2y}, & y \in (0, \ln 3) \\ \frac{2}{9} e^{-2y}, & y \in (\ln 3, +\infty) \end{cases}$$

PRIMJETI:

$\leadsto$ FUNKCIJA GUSTOĆE JE NEPREKINUTA! U 1 ?? HEH ..... VARAMO