

# ZAVRŠNI ISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

16.06.2011.

## 1. (5 bodova)

a) Dokažite da za nenegativnu neprekinutu slučajnu varijablu  $X$  i  $\varepsilon > 0$  vrijedi nejednakost Markova

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}.$$

b) Sto brojeva zaokruženo je na najbliži cijeli broj i potom zbrojeno. Ako su greške zaokruživanja nezavisne slučajne varijable jednoliko distribuirane na  $[-0.5, 0.5]$ , izračunajte interval unutar kojeg se s vjerojatnošću 0.95 nalazi pogreška zbroja učinjena zbog zaokruživanja pribrojnika. (Disperzija jednolike razdiobe  $X$  na  $[-0.5, 0.5]$  je  $D(X) = 1/12$ .)

## 2. (3 boda)

Uzorak  $x_1, x_2, \dots, x_n$  izvučen je iz populacije koja ima gustoću razdiobe

$$f(x) = \lambda x^{\lambda-1}, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Koristeći kriterij najveće izglednosti, odredite procjenu za parametar  $\lambda$ .

## 3. (4 boda)

a) Definirajte kvantil reda  $p$ , za  $p \in \langle 0, 1 \rangle$  i funkciju razdiobe  $F$ .

b) Koristeći tablicu 4. za kvantile normalne razdiobe izračunajte  $u_p$  za  $p = 0.2$ .

c) Izračunajte kvantil  $u_p$  za  $p = 0.813$  koristeći isključivo tablicu 1. jedinične normalne razdiobe (za funkciju  $\Phi^*$ ).

## 4. (4 boda)

Izmjerena je visina 120 djece određene dobi i dobiveno je  $\bar{x} = 152$  cm,  $\hat{s} = 8.1$  cm. Visina od 150 cm prosječna je za djecu te dobi. Uz nivo značajnosti  $\alpha = 0.05$  testirajte hipotezu  $H_0: \mu = 150$  prema alternativnoj hipotezi  $H_1: \mu > 150$ , pri čemu se pretpostavlja da je promatrana visina  $X$  slučajna varijabla s normalnom razdiobom  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , uz  $\sigma^2$  nepoznat.

## 5. (5 bodova)

Svi studenti druge godine na FERu polažu izvjesan predmet. Dio ispita je ispravljen: od 97 studenata položilo je njih 69, a palo 28.

a) Odredite 90%-tni interval za postotak prolaznosti na tom predmetu.

b) Uz koji nivo značajnosti  $\alpha$  možemo tvrditi da na ovom predmetu imamo bolonjsku prolaznost od 75%?

**6. (4 boda)**

U dvije male trgovine istog lanca, prodaje se čokolada "π". Prodaja je evidentirana tijekom jednog tjedna:

trgovina A	12	9	10	8	7	13	11
trgovina B	10	8	9	7	12	10	7

Pretpostavljamo da su ovi uzorci nezavisni s normalnom razdiobom uz jednakom disperziju čiji iznos nije poznat. Može li se uz nivo značajnosti  $\alpha = 0.1$  na temelju ovih podataka zaključiti da se prosječna dnevna prodaja čokolade "π" razlikuje u ovim trgovinama?

**PITANJA IZ CJELOKUPNOG GRADIVA**

**7. (4 boda)**

Kocka je bačena 7 puta. Izračunajte vjerojatnost da je:

- a) šestica dobivena tek u 7. bacanju,
- b) šestica dobivena barem jednom,
- c) šestica dobivena točno jednom.

Koliki je očekivani broj šestica?

**8. (4 boda)**

Odredite vrijednosti parametara  $C$  i  $D$  tako da funkcija

$$F(x) = Cx^2 + D, \quad x \in [0, 1]$$

bude funkcija razdiobe neke slučajne varijable koja poprima vrijednosti na intervalu  $[0, 1]$ . Za te  $C$  i  $D$  odredite očekivanje te slučajne varijable kao i vjerojatnost  $P(0.5 < X < 2)$ .

**9. (3 boda)**

Definirajte eksponencijalnu razdiobu i izvedite njeno očekivanje  $E(X)$ .

**10. (4 boda)**

Uzastopnim ponavljanjem nekog pokusa dobivene su sljedeće vrijednosti neprekinute slučajne varijable  $X$  (svrstane u intervale):

$[a, b]$	0 – 25	25 – 50	50 – 75	75 – 100
$n_j$	87	46	14	3

Pomoću  $\chi^2$  testa provjerite ravnanju li se dobiveni rezultati po eksponencijalnoj razdiobi uz nivo značajnosti 5%.

**Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica.**

RJEŠENJA ZAVRŠNOG ISPITA IZ VJEROJATNOSTI I  
STATISTIKE 16.06.2011.

1.

$$\text{a)} \ P(X \geq \varepsilon) = \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx \leq \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x}{\varepsilon} f(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\infty} x f(x) dx = \frac{E(X)}{\varepsilon}$$

$$\text{b)} \ \frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{\sqrt{\frac{100}{12}}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1), \ P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| < t\right) = 0.95 \Rightarrow t = 5.658$$

2.

$$\lambda = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

3.

$$\text{b)} \ u_{0.2} = -0.84162, \ \text{c)} \ u_{0.813} = 0.889$$

4.

$$\hat{t} = 2.705, \ t_{120,0.95} = 1.658, \ H_0 \text{ se odbacuje}$$

5.

$$\text{a)} \ \langle 0.633, 0.783 \rangle$$

$$\text{b)} \ H_{0..p} = 0.75, \ H_{1..p} < 0.75, \ \hat{u} = -0.879 \Rightarrow \alpha = 18\%$$

6.

$$\bar{x} = 10, \ \bar{y} = 9$$

$$s_X^2 = \frac{28}{6}, \ s_Y^2 = \frac{20}{6}, \ s_Z^2 = 4$$

$$\hat{t} = 0.935, \ t_{12,0.95} = 1.782, \ H_0 \text{ se prihvća}$$

**7.**

**a)**  $\left(\frac{5}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right)$ , **b)**  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^7$ , **c)**  $7 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \left(\frac{1}{6}\right)$ ,  $E(X) = \frac{7}{6}$

**8.**

$$C = 1, D = 0, P\{0.5 < X < 2\} = \frac{3}{4}, E(X) = \frac{2}{3}$$

**9.**

predavanja

**10.**

$$\chi^2_q = 3.548, \chi^2_{1,0.95} = 3.841, \text{ ravnaju se po eksp.razdiobi uz } \alpha = 5\%$$