Ljetni ispitni rok iz Vjerojatnosti i statistike

26.6.2012.

1. (4 boda)
Iz špila od 52 karte u četiri boje (karo, pik, tref, herc) izvlači se na sreću 5 karata.
(a) Izračunajte vjerojatnost da se pojave točno dvije boje.
(b) Izračunajte vjerojatnost da se pojave sve boje.

2. (3 boda)
Od ukupno 7 nogometaša 4 gađaju jedanaesterac s vjerojatnošću 0.97, a 3 s vjerojatnošću 0.73. Na sreću odabiremo dva nogometaša koji pucaju jedanaesterac samo jednom. Kolika je vjerojatnost da će gol biti zabijen točno jednom?

3. (4 boda)
(a) Definirajte binomnu razdiobu slučajne varijable X i izvedite njeno očekivanje.
(b) Koristeći aproksimaciju Poissonovom razdiobom izračunajte kolika je vjerojatnost da među 1500 osoba barem 5 bude alergično na pelud, ako znamo da je prosječno 3% populacije alergično na pelud?

4. (4 boda)
Iz špila od 32 karte izvlačimo s vraćanjem na sreću po dvije karte sve dok ne izvučemo par aseva. Neka slučajna varijabla X označava broj izvlačenja.
(a) Izračunajte $E(X)$.
(b) Izračunajte $P(X > E(X))$.

5. (5 bodova)
(a) Neka je X neprekinuta slučajna varijabla, te $Y = \phi(x)$ strogo rastuća funkcija. Izvedite formulu za računanje funkcije gustoće g slučajne varijable Y preko funkcije gustoće f slučajne varijable X.
(b) Zadane su točke $O(0,0), A(1,0)$ i $B(0,1)$. Biramo na sreću dvije točke na dužini OA. Neka je C ona od te dvije točke koja ima veću apscisu. Slučajnu varijablu Φ definiramo kao kut $\angle OBC$. Odredite gustoću slučajne varijable Φ i $P(\Phi > \frac{\pi}{6})$.

6. (5 bodova)
Slučajni vektor (X, Y) zadan je funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \frac{C}{x}, \quad 0 \leq y \leq x \leq 1.$$

Odredite konstantu C, marginalnu funkciju gustoće f_Y, te funkciju gustoće slučajne varijable $Z = X + Y$.

OKRENI!

7. (5 bodova)
(a) Neka je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Izvedite vezu funkcije razdiobe $\Phi(x)$ slučajne varijable X i tabelirane funkcije $\Phi^*(x)$.
(b) Slučajna varijabla X je aritmetička sredina 200 nezavisnih slučajnih varijabli distribuiranih po Poissonovoj razdiobi s parametrom $\lambda = 2$. Izračunajte vjerojatnost da X poprima vrijednosti unutar intervala $\langle 1.9, 2.1 \rangle$.

8. (3 boda)
Uzorak $x_1, x_2, ..., x_n$ izvučen je iz populacije koja ima gustoću razdiobe $f(x) = \frac{x}{\lambda^2} \cdot e^{-\frac{x}{\lambda}},\ x > 0$. Pomoću kriterija najveće izglednosti odredite procjenu za parametar $\lambda > 0$.

9. (3 boda)
Slučajna varijabla X je normalno distribuirana s nepoznatim očekivanjem i nepoznatom disperzijom. Uzorak od $n = 50$ mjerenja dao je srednju vrijednost $\overline{x} = 23.8$ i $\widehat{s}^2 = 4.2$. Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.05$ testirajte hipotezu $H_0 ... a = 25$, uz alternativnu hipotezu $H_1 ... a < 25$.

10. (4 boda)
Uzastopnim ponavljanjem nekog pokusa dobivene su slijedeće vrijednosti neprekinute slučajne varijable X :

[a,b]	[0,5]	[5,10]	[10,15]	[15,20]	[20,25]
n_j	80	45	25	10	2

Pomoću χ^2-testa provjerite suglasnost svih podataka s eksponencijalnom razdiobom uz nivo značajnosti 0.05.

Napomena: Ispit traje 150 minuta. Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica.

Rješenja ljetnog ispitnog roka iz Vjerojatnosti i statistike

26.6.2012.

1. (4 boda)
(a) $P = 0.145$
(b) $P = 0.395$

2. (3 boda)
$P = 0.235$

3. (4 boda)
(a) N. Elezović, Diskretna vjerojatnost, str.121
(b) $p = 1 - e^{-45}(1 + 45 + \frac{(45)^2}{2!} + \frac{(45)^3}{3!} + \frac{(45)^4}{4!})$

4. (4 boda)
(a) $E(X) = 82.6667$
(b) $P(X > E(X)) = 0.36862$

5. (5 bodova)
(a) $G(y) = P(\Phi(x) < y) = P(X < \Phi^{-1}(y)) = F(\Phi^{-1}(y)), \quad g(y) = f(\Phi^{-1}(y))\frac{\Phi^{-1}(y)}{dy}$
(b) $F(x) = x^2, f(x) = 2x, x \in [0,1], \Phi = \mathrm{arctg}x, \ g(\phi) = \frac{2\mathrm{tg}\phi}{\cos(2\phi)}, \ \phi \in [0, \frac{\pi}{4}], \ P(\Phi > \frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3}$

6. (5 bodova)
$C = 1, f_Y(y) = \ln\frac{1}{y}, y \in [0,1], \ g_Z(z) = \ln 2, z \in \langle 0, 1\rangle$ i $g_Z(z) = \ln\frac{2}{z}, z \in \langle 1, 2\rangle$

7. (5 bodova)
(a) N. Elezović, Slučajne varijable, str.40
(b) $P(1.9 < \overline{x} < 2.1) = 0.68269$

8. (3 boda)
$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}$

9. (3 boda)
$\widehat{t} = -2.581989 < -t_{49,1-0.05} = 1.6775 \Rightarrow$ Odbacujemo H_0

10. (4 boda)
$\chi^2_{2,0.95} = 5.991 > 2.9461 = \chi^2_q \Rightarrow$ prihvaćamo hipotezu da se podatci ravnaju po eksp. razdiobi