

PRVI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE
22.04.2013.

1. (7 bodova)

Iz snopa od 52 karte izabire se na sreću 5 karata. Odredite vjerojatnost da izvučemo:

- a) bar jednog asa,
- b) 5 karata različitih jačina,
- c) 5 karata iste boje,
- d) 5 karata među kojima nisu zastupljene sve boje.

2. (5 bodova)

- a) Ako su A i B nezavisni događaji, dokažite da su onda i \bar{A} i \bar{B} nezavisni.
- b) Mogu li disjunktne događaji A i B biti nezavisni? Odgovor obrazložite.

3. (5 bodova)

U kutiji su 4 kocke, dvije ispravne i dvije lažne na kojima su svi brojevi šestice. Nasumično smo izvukli 2 kocke i bacili ih. Kolika je vjerojatnost da su pale dvije šestice? Ako su pale dvije šestice, kolika je vjerojatnost da smo izvukli iz kutije obje lažne kocke?

4. (6 bodova)

Iz kutije u kojoj se nalaze 1 bijela i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu sve dok ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za X i očekivanje $E(X)$ u svakom od sljedeća dva načina izvlačenja:

- a) nakon izvlačenja kuglica se ne vraća u bubanj,
- b) nakon izvlačenja kuglica se vraća u bubanj.

5. (4 boda)

Na neku benzinsku postaju stiže u prosjeku 40 automobila na sat. Ako ta postaja ima samo jednu pumpu i automobil treba 1 minutu za punjenje goriva kolika je vjerojatnost da će se pojaviti red pred pumpom? (U ovom slučaju red se pojavi ako u tijeku bilo koje minute na postaju pristignu barem 2 automobila). Kolika je vjerojatnost da će se pojaviti red ako bi ta postaja imala dvije pumpe?

6. (4 boda)

Unutar jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$ stranice duljine 1 bira se na sreću točka. Neka je slučajna varijabla X udaljenost od visine \overline{AD} , D je

polovište stranice \overline{BC} . Odredite funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable X .

7. (5 bodova)

Odredite gustoću slučajne varijable $Y = \frac{1}{(X-1)^2}$, ako slučajna varijabla X ima gustoću razdiobe $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$.

8. (4 boda)

Visina čovjeka je slučajna varijabla s normalnom razdiobom $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ s očekivanjem $a = 174$ cm. Ako 68.269% ljudi ima visinu između 165 i 183 cm, izračunajte vjerojatnost da je čovjek viši od 170 cm.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora i tablica jedinične normalne razdiobe.

Ispit se piše 120 minuta.

RJEŠENJA 1. MEĐUISPITA IZ VISA
22.04.2013.

1.

$$\text{a)} \quad 1 - \frac{\binom{48}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{b)} \quad \frac{\binom{13}{5}4^5}{\binom{52}{5}}, \quad \text{c)} \quad \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{d)} \quad 1 - \frac{4\binom{13}{2}13^3}{\binom{52}{5}}$$

2. a) "Diskretna vjerojatnost" str. 68.

b) Ako disjunktne događaji imaju pozitivnu vjerojatnost ne mogu biti nezavisni, jer je $P(AB) = P(\emptyset) = 0$ i $P(A) \cdot P(B) \neq 0$.

3.

$$\text{a)} \quad P(A) = \frac{61}{216}, \quad \text{b)} \quad P(H_2|A) = \frac{36}{61}$$

4.

$$\text{a)} \quad X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad E(X) = 3$$

$$\text{b)} \quad X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right), \quad E(X) = 5$$

5.

$$\text{a)} \quad X \sim \mathcal{P}\left(\frac{2}{3}\right), \quad P(X \geq 2) = 1 - \frac{5}{3}e^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{b)} \quad X \sim \mathcal{P}\left(\frac{2}{3}\right), \quad P(X \geq 3) = 1 - \frac{17}{9}e^{-\frac{2}{3}}$$

6.

$$F(x) = 1 - \frac{(1-2x)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}}{1^2 \frac{\sqrt{3}}{4}} = 4x - 4x^2, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

$$f(x) = 4 - 8x, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad E(X) = \frac{1}{6}$$

7.

$$g(y) = \begin{cases} \left(2ey^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} e^{-\frac{1}{\sqrt{y}}}, & y \in \langle 0, 1 \rangle \\ \left(2ey^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{y}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{y}}}\right), & y \in \langle 1, +\infty \rangle \end{cases}$$

8.

$$\sigma = 9, \quad P(X > 170) = 0.67148$$