15. SLUČAJNE VARIJABLE

$F(x)$ - funkcija razdiobe (poprima vrijednosti između 0 i 1)

$f(x)$ - funkcija gustoće

$P(X<x)$

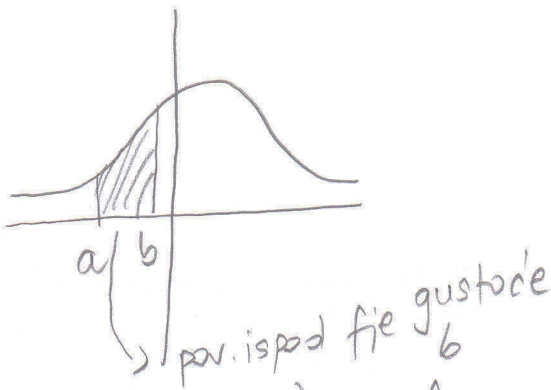
↓

slučajna varijabla X poprima vrijednosti manje od x-a (koji je neki fiksirani broj)

$f(x)=F'(x)$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$$ ⇒ iz ovog izraza uvijek računamo C



$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$ ⇒ tako računamo vjer. ako imamo fju gustoće

$= F(b)-F(a)$ ⇒ -II- ako imamo fju razdiobe

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\,dx$$

Zad. 1

$f(x) = C\cdot(1-|x-1|)$, $x\in(0,2)$ $\Rightarrow$ otvorenost intervala u zadaci-
ma nije bitna

a) $c = ?$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_0^2 c\,(1-|x-1|)\,dx = \uparrow$$ rastavljamo u 2 integrala, jer od 0 do 1 fja poprima negativne vrij., a od 1 do 2 pozitivne

$$= c\left[\int_0^1 (1+x-1)\,dx + \int_1^2 (1-x+1)\,dx\right] =$$

$$= c\cdot 1 = 1 \Rightarrow c = 1$$

b) $F(x) =$

$\rightarrow$ za $x<0$, $F(x)=0$

$\rightarrow$ za $x\in(0,1)$, $F(x)=\int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ $\Rightarrow$ RJEŠENJE NIKADA NE SMIJE BITI BROJ

(budući da nam se predznak mijenja u cijelom int. od 0 do 2, moramo promatrat na 2 intervala ponašanje fje

$\Rightarrow$ za $x\in(1,2)$:

$$F(x) = \int_1^2 f\cancel{(t)}\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^x (2-t)\,dt =$$

NE!!

$$= 2x - \frac{1}{2}x^2 - 1$$

=> budući da formula za f-ju razdiobe kaže da su granice integrala od $-\infty$ do x, nama je u zadatku zadan interval od $(0,2)$, pa onda imamo $\int_0^x$ opet, dakle $\int_0^1$ i $\int_1^x$, x predstavlja taj broj koji je veći od 1 (do kojeg idemo).

-> za $x>2$, $F(x)=1$

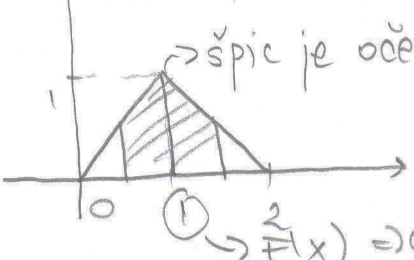
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{x^2}{2}, & 0<x<1 \\ 2x-\frac{1}{2}x^2-1, & 1<x<2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

za granične točke vrijednosti moraju ispast jednake (dakle ako u izraz $2x-\frac{1}{2}x^2-1$ uvrstimo 1 dobivamo $\frac{1}{2}$, onda i u izrazu $\frac{x^2}{2}$ mora za 1 ispast $\frac{1}{2}$ što i je, i to je dobra provjera da vidimo da li nam je rješenje za f-ju razdiobe dobro)

c) $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=F\left(\frac{3}{2}\right)-F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ //

te $\frac{3}{2}$ uvrstimo u $2x-\frac{1}{2}x^2-1$ jer su $\frac{3}{2}$ u int. $1<x<2$.

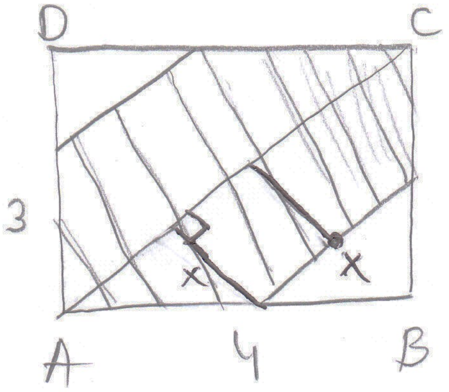
d) $E(x)=\int_0^2 x\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 xf(x)\cdot dx+\int_1^2 xf(x)dx=1$

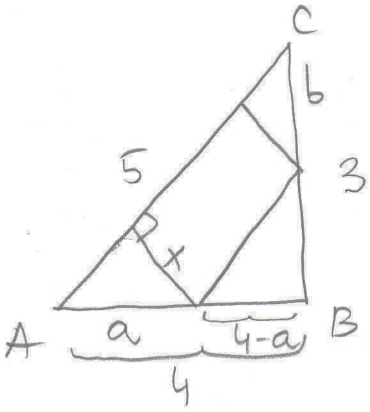


-> špic je očekivanje

-> $\overset{2}{F}(x)$ => gleda se dakle vrijednost na x-osi.

Zad.2 Zadan je pravokutnik sa stranicama 3 i 4. Neka je X slučajna varijabla X udaljenost od A do C. Odredi f-ju gustoće, razdiobe i očekivanje.





hipotenuza u malom trokutu

$$\frac{a}{x} = \frac{5}{3}$$

$$a = \frac{5}{3}x$$

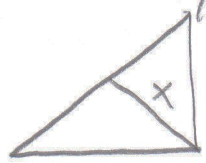
$$b = \frac{5}{4}x$$

$$F(x) = P(X < x)$$

$$= \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{12 - 2\cdot\frac{1}{2}\left(4 - \frac{5}{3}x\right)\left(3 - \frac{5x}{4}\right)}{12}$$

$$F(x) = \frac{5}{6}x - \frac{25}{144}x^2, \quad x \in \left(0, \frac{12}{5}\right)$$

najveća udaljenost



$$\frac{5c}{2} = \frac{12}{2}$$

$$c = \frac{12}{5}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{5}{6}x - \frac{25}{144}x^2, & 0 < x < \frac{12}{5} \\ 1, & x > \frac{12}{5} \end{cases}$$

derivacijom F(x) dobijemo

$$f(x) = \frac{5}{6} - \frac{25}{72}x, \quad x \in \left\langle 0, \frac{12}{5} \right\rangle$$

$$E(x) = \int_0^{12/5} x\left(\frac{5}{6} - \frac{25}{72}x\right)dx = \frac{4}{5}$$

Zad. 3

$y = \psi(x) \Rightarrow x = \psi^{-1}(y) \Rightarrow$ f-ja mora biti bijektivna jer tražimo inverz

$g(y) = f\,\psi^{-1}(y) \left| \frac{dx}{dy} \right|$

↓ gustoća od y-a

$G(y) = P(Y < y)$

↓

f-ja razdiobe

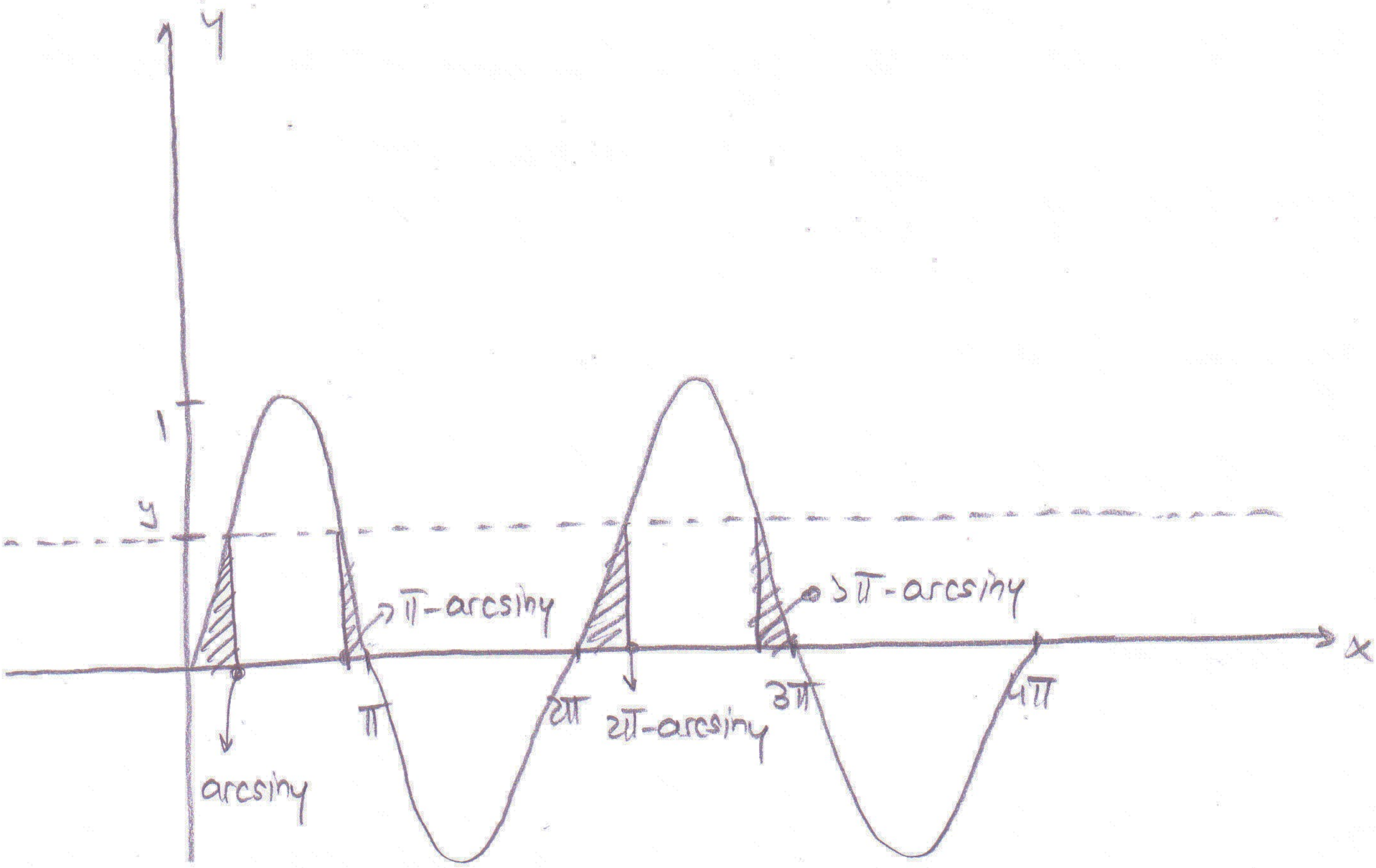
DZ. 12

X ima jednoliku razdiobu na intervalu $\langle 0, 4\pi \rangle$

$y = \sin x$

$f(x) = \frac{1}{b-a}, \; x \in (a, b) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4\pi}, \; g(y) = ?$

↓ f-ja gustoće jednolike razdiobe (i ona je konstanta)



↓ fja nije injekcije (je recimo na int $[0, \frac{\pi}{2})$) → vidi se i preko horizontalnog testa

$G(y) = P(Y<y)$ → moramo naći za koje X-eve vrijedi ta relacija

$G(y) = P(Y<y) = P(\sin X < y) =$

$P(0 < X < \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y < X < 2\pi + \arcsin y) +$

$+ P(3\pi - \arcsin y < X < 4\pi)$

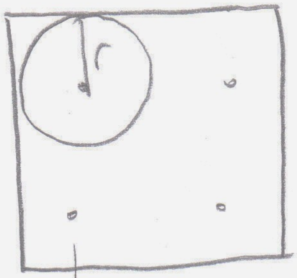
$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{4\pi}dx + \int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi-\arcsin y} \frac{1}{4\pi}dx + \int_{3\pi-\arcsin y}^{4\pi} \frac{1}{4\pi}dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin y, \; y \in (-1,1)$$

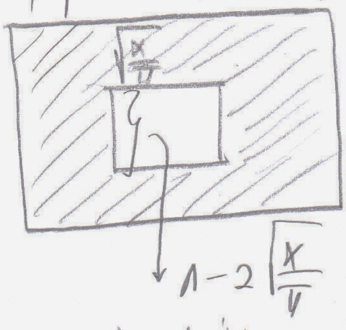
$y = \sin x$ pa je $\in (-1,1)$

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

3 DZ, Zad 9.

f-ja razdiobe površine tog kruga





ta točka dakle može biti bilo gdje, za naše odabrano mjesto dobivamo najveća pov. kruga za $r=\frac{1}{2}$ čime dob[illegible] mo $\frac{\pi}{4}$

$$X = P_o = r^2\pi \,,\; x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \longrightarrow r = \sqrt{\frac{x}{4}}$$

koji na slici označavamo x-fiksni kr[illegible]

$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = 0 \,,\; x < 0$$

$$F(x) = 1 \,,\; x > \frac{\pi}{4}$$

$$F(x) = P(X < x) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{1-\left(1-2\sqrt{\frac{x}{4}}\right)^2}{1}$$

$$F(x) = 1-\left(1-2\sqrt{\frac{x}{4}}\right)^2$$

$$P\left(X > \frac{\pi}{16}\right) = 1 - P\left(X < \frac{\pi}{16}\right) = 1 - F\left(\frac{\pi}{16}\right) = \frac{1}{4}$$