

MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE  
20.04.2015.

**1. (5 bodova)**

Dokažite da preslikavanje definirano na algebri događaja  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  koje ima svojstva

- i)  $P(\Omega) = 1$ ,
- ii) ako su  $A$  i  $B$  disjunktni događaji, onda je  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ,  
je vjerojatnost, tj. da onda vrijede i sljedeća dva svojstva:
- iii)  $P(\emptyset) = 0$ ,
- iv) ako je  $A \subset B$ , onda vrijedi  $P(A) \leq P(B)$ .

**2. (5 bodova)**

Špil sadrži 52 karte od kojih svaka ima neku od 13 jačina: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, i neku od 4 boje:  $\heartsuit$ ,  $\diamondsuit$ ,  $\clubsuit$ ,  $\spadesuit$ . Na sreću izvačimo 5 karata iz špila. Kolika je vjerojatnost da dobijemo:

- a) FULL HOUSE (tri karte iste jačine i još dvije karte neke druge jačine);
- b) TWO PAIR (dvije karte jedne jačine, još dvije druge jačine, posljednja karta treće jačine, tj. dva različita para koja nisu full house);
- c) ONE PAIR (točno dvije karte jedne jačine, preostale tri različitih jačina);
- d) STRAIGHT (skala od pet karata A,2,3,4,5 ili 2,3,4,5,6 ili 3,4,5,6,7 ili... ili 10, J, Q, K, A koje nisu sve iste boje).

**3. (4 boda)**

U tri kutije nalaze se crne i bijele kuglice. U prvoj kutiji je tripud više bijelih kuglica nego crnih. U preostale dvije kutije je tripud više crnih kuglica nego bijelih. Izaberemo na sreću jednu kutiju i iz nje izvučemo 5 kuglica, jednu po jednu, s vraćanjem nakon svakog izvlačenja. Ako smo izvukli 3 bijele i 2 crne kuglice, kolika je vjerojatnost da smo izvlačili iz prve kutije?

**4. (7 bodova)**

- a) Definirajte geometrijsku razdiobu i izvedite njeno očekivanje  $E(X)$ .
- b) Dokažite da geometrijska razdioba nema pamćenja, tj. da vrijedi

$$P(X = k + m \mid X > k) = P(X = m) \quad \text{za sve } k, m \in \mathbb{N}.$$

c) Ako je prolaznost na vozačkom ispitu 40% , a  $X$  broj izlazaka kandidata na ispit, izračunajte vjerojatnost da će kandidat imati veći broj izlazaka na vozački ispit od očekivanog, odnosno  $P(X > E(X))$ .

**5. (5 bodova)**

Enterprise je ispalio 1000 projektila na neprijateljski svemirski brod. Vjerojatnost pogotka za svaki projektil je 0.005. Ako je brod pogođen projektilom, vjerojatnost da će biti neutraliziran je 0.05. Aproximirajući Poissonovom razdiobom izračunajte vjerojatnost da će neprijateljski svemirski brod biti neutraliziran.

**6. (5 bodova)**

Baca se kocka. Slučajna varijabla  $X$  poprimi vrijednost 1 ako je okrenuti broj paran, a vrijednost  $-1$  ako je okrenuti broj neparan, dok slučajna varijabla  $Y$  poprimi vrijednost broja na kocki. Odredite razdiobu slučajnog vektora  $(X, Y)$  i kovarijacijski moment  $cov(X, Y)$ . Izračunajte očekivanje  $E(Z)$  i disperziju  $D(Z)$  slučajne varijable  $Z = X + Y$ .

**7. (6 bodova)**

a) Obrazložite zašto funkcija razdiobe slučajne varijable ne može biti veća od jedinice.

b) Obrazložite zašto disperzija slučajne varijable ne može biti negativna.

c) Biramo na sreću točku unutar pravokutnika  $ABCD$  stranica duljina 1 i 2. Vrijednost slučajne varijable  $X$  je udaljenost te točke do najbliže stranice pravokutnika. Odredite očekivanje  $E(X)$ .

**8. (3 boda)**

Odredite funkciju gustoće slučajne varijable  $Y = 1/X$ , ako slučajna varijabla  $X$  ima funkciju gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora.**

**Ispit se piše 120 minuta.**

RJEŠENJA MEĐUISPITA IZ VISa  
20.04.2015.

1. **iii)** Korištenjem svojstva **ii)** za  $A = \Omega$  i  $B = \emptyset$ ,

**iv)** Neka je  $A \subset B$ . Korištenjem svojstva **ii)** imamo

$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A),$$

pa zbog  $P(B \setminus A) \geq 0$  slijedi  $P(A) \leq P(B)$

2.

$$\text{a)} \frac{13 \binom{4}{3} 12 \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}, \quad \text{b)} \frac{\binom{13}{2} \binom{4}{2} \binom{4}{2} 11 \cdot 4}{\binom{52}{5}}, \quad \text{c)} \frac{\binom{13}{1} \binom{4}{2} \binom{12}{3} 4^3}{\binom{52}{5}}, \quad \text{d)} \frac{10(4^5 - 4)}{\binom{52}{5}}$$

3.

$$P(H_1 | A) = \frac{\frac{1}{3} \binom{5}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\frac{1}{3} \binom{5}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{2}{3} \binom{5}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

4.

$$\text{c)} P(X > 2.5) = 0.36$$

5.

$$P(A) = 0.22$$

6.

$$\text{cov}(X, Y) = 0.5, \quad E(X + Y) = 3.5, \quad D(X + Y) = 4.42$$

7. **a)**  $F(x) = P(X < x) \leq 1$

**b)**  $D(X) = E[(X - E(X))^2]$ , slučajna varijabla  $(X - E(X))^2$  poprima nenegativne vrijednosti, pa njeno očekivanje ne može biti negativno.

$$\text{c)} F(x) = -2x^2 + 3x, \quad x \in [0, 1/2], \quad E(X) = \frac{5}{24}$$

8.

$$g(y) = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$