

# PRVI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

22.03.2011.

## 1. (4 boda)

U igri "Tombola" svaki igrač dobije karticu s kombinacijom od 15 na sreću odabranih brojeva iz skupa  $S = \{1, 2, 3, \dots, 90\}$ . Potom se iz bubnja, jedan po jedan bez vraćanja, izvlače brojevi iz skupa  $S$ .

a) Odredite vjerojatnost da u najviše  $n$  izvlačenja bude izvučeno svih 15 brojeva nekog igrača. Kolika je ta vjerojatnost za  $n = 90$ ?

b) Odredite vjerojatnost da u točno  $n$  izvlačenja bude izvučeno svih 15 brojeva nekog igrača (tj. da je u  $n$ -tom izvlačenju izvučen posljednji igračev broj s kartice). Kolika je ta vjerojatnost za  $n = 90$ ?

## 2. (4 boda)

Na jednoj stranici kvadrata stranice duljine 10 cm biramo na sreću dvije točke  $A$  i  $B$ , a na njoj nasuprotnoj stranici biramo na sreću točku  $C$ . Izračunajte vjerojatnost da površina trokuta  $ABC$  bude manja od  $25 \text{ cm}^2$ .

## 3. (3 boda)

U mjestu Visovcu živi 1000 ljudi. Poznato je da njih 950 uvijek govori istinu, a njih 50 uvijek laže. Policijska postaja Visovca nabavila je novi detektor laži koji griješi samo u 1% slučajeva. Kolika je vjerojatnost da će pri ispitivanju slučajno odabranog stanovnika Visovca detektorom laži biti ustanovljeno da laže? Ako je nakon ispitivanja slučajno odabranog stanovnika Visovca putem detektora laži ustanovljeno da laže, kolika je vjerojatnost da je on uistinu lažac?

## 4. (5 bodova)

a) Napišite definiciju disperzije  $D(X)$  slučajne varijable  $X$ , te dokažite da je

$$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2.$$

b) Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable takve da je  $D(X) = 2$  i  $D(Y) = 4$  koliko iznosi  $D(2X - Y)$ ? Izvedite svojstva disperzije koja ste pritom koristili.

(molim okrenite)

**5. (4 boda)**

Zadana je razdioba diskretnog slučajnog vektora  $(X, Y)$

$X \backslash Y$	-1	1
-1	1/4	1/6
0	1/6	1/8
1	1/8	1/6

Izračunajte  $P(Y = 1 \mid X \geq 0)$ . Odredite razdiobu slučajnog vektora  $(Z, W)$ , ako je  $Z = |X - Y|$ ,  $W = X/Y$ . Jesu li  $Z$  i  $W$  nezavisne slučajne varijable i zašto?

**6. (5 bodova)**

a) Definirajte geometrijsku razdiobu, izvedite njenu karakterističnu funkciju i očekivanje  $E(X)$ .

b) Iz snopa od 52 karte izvlačimo jednu po jednu kartu, s vraćanjem u snop nakon svakog izvlačenja, sve dok ne izvučemo asa ili kartu boje tref. Izračunajte vjerojatnost  $P(X > E(X))$  gdje je  $X$  slučajna varijabla koja označava broj izvlačenja.

**Dozvoljena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.**

## Rješenja 1. međuspita iz Vjerojatnosti i statistike

22.03.2010.

### 1. (4 boda)

a) (2b)  $p = \frac{\binom{75}{n-15}n!}{\binom{90}{n}n!}$ , za  $n = 90$  je  $p = 1$

b) (2b)  $p = \frac{15\binom{75}{n-15}(n-1)!}{\binom{90}{n}n!}$ , za  $n = 90$  dobijemo  $p = \frac{1}{6}$

### 2. (4 boda)

$$P_{abc} = \frac{|AB|v_a}{2} = \frac{|x-y|10}{2} < 5$$

$$\Omega = \{(x, y) \in R^2 : 10 \geq x \geq 0, 10 \geq y \geq 0\}$$

$$S = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| < 5\}$$

$$P(S) = \frac{m(S)}{m(\Omega)} = \frac{75}{100} = 0.75$$

### 3. (3 boda)

$$H_1 = \{\text{odabrana osoba govori istinu}\}, P(H_1) = 0.95$$

$$H_2 = \{\text{odabrana osoba laže}\}, P(H_2) = 0.05$$

$$A = \{\text{detektor kaže "čovjek laže"}\}$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^2 P(H_i)P(A|H_i) = 0.059,$$

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = 0.839$$

### 4. (5 boda)

a) (2b)  $D(X) := E((X - E(X))^2)$ , izvod iz knjige str. 100

b) (3b)  $D(2X - Y) = 12$ , izvodi iz knjige str. 101

### 5. (4 boda)

$$P(Y = 1|X \geq 0) = \frac{P(Y=1, X \geq 0)}{P(X \geq 0)} = \frac{P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1)}{1 - P(X=-1)} = 0.5$$

$$Z = |X - Y|, W = X/Y$$

$Z \setminus W$	-1	0	1
0	0	0	5/12
1	0	7/24	0
2	7/24	0	0

$Z$  i  $W$  nisu nezavisni

### 6. (5 bodova)

a) (2b) str. 116 i 117 u knjizi

b) (3b)  $p(\text{izvukli smo asa ili tref}) = \frac{13+4-1}{52} = \frac{4}{13}$

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{13}{4}, \quad P(X > 3.25) = P(X > 3) = (1 - p)^3 = \left(\frac{9}{13}\right)^3$$