ViS – Ljetni rok 2018.

by **allophone**

srpanj 2018.

1. zadatak

(a) Napiši definiciju nezavisnosti događaja A, B i C.

(b) Ako su A, B i C nezavisni događaji, dokaži da vrijedi

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{C})$$

(a) Događaji A, B i C su nezavisni ako vrijedi:

1) $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$
2) $\mathbf{P}(BC) = \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$
3) $\mathbf{P}(CA) = \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A)$
4) $\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$

Neki bi pomislili da su tri događaja nezavisna ako vrijedi samo ovaj četvrti uvjet, ali to nije ispravno i mogu se lako pronaći protuprimjeri koji to opovrgavaju. Da bi n događaja bilo nezavisno, mora za svaku kombinaciju događaja (od 2 pa sve do n odabranih događaja) biti zadovoljeno da je vjerojatnost presjeka tih događaja jednaka umnošku vjerojatnosti pojedinačnih događaja. (1. knjižica, 69. stranica)

(b) Za lijevu stranu jednakosti primjenjujemo Sylvesterovu formulu (također zvana FUI, formula uključivanja i isključivanja; 1. knjiž., 19. str.):

$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(BC) - \mathbf{P}(CA) + \mathbf{P}(ABC)$

Zbog činjenice da su događaji nezavisni možemo primijeniti jednakosti koje vrijede iz a) dijela zadatka:

$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(C)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C)$

Kako s desne strane jednakosti imamo komplemente svih događaja, bila bi dobra ideja i u ovoj formuli zamijeniti sve događaje njihovim komplementima. Znamo da vrijedi za događaj X: $\mathbf{P}(X) = 1 - \mathbf{P}(\overline{X})$.

$\mathbf{P}(A\cup B\cup C) = (1-\mathbf{P}(\overline{A}))+(1-\mathbf{P}(\overline{B}))+(1-\mathbf{P}(\overline{C}))-(1-\mathbf{P}(\overline{A}))(1-\mathbf{P}(\overline{B}))-(1-\mathbf{P}(\overline{B}))(1-\mathbf{P}(\overline{C}))-(1-\mathbf{P}(\overline{C}))(1-\mathbf{P}(\overline{A}))+(1-\mathbf{P}(\overline{A}))(1-\mathbf{P}(\overline{B}))(1-\mathbf{P}(\overline{C}))$

$\mathbf{P}(A\cup B\cup C) = (1-\mathbf{P}(\overline{A}))(1-1+\mathbf{P}(\overline{B}))+(1-\mathbf{P}(\overline{B}))(1-1+\mathbf{P}(\overline{C}))-(1-\mathbf{P}(\overline{C}))(1-\mathbf{P}(\overline{A}))(1-1+\mathbf{P}(\overline{B}))$
$= 1-\mathbf{P}(\overline{C})+(1-\mathbf{P}(\overline{A}))\mathbf{P}(\overline{B})+(1-\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{C})-(1-\mathbf{P}(\overline{C}))(1-\mathbf{P}(\overline{A}))\mathbf{P}(\overline{B})$

$\mathbf{P}(A\cup B\cup C) = 1-\mathbf{P}(\overline{C})+\mathbf{P}(\overline{B})-\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})+\mathbf{P}(\overline{C})-\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{C})-\mathbf{P}(\overline{B})+\mathbf{P}(\overline{C})\mathbf{P}(\overline{B})+\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})-\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{C})$

$\mathbf{P}(A\cup B\cup C) = 1-\mathbf{P}(\overline{A})\mathbf{P}(\overline{B})\mathbf{P}(\overline{C})$

Q.E.D.

2. zadatak Bacamo kocku 15 puta. Izračunajte vjerojatnost da u prvih pet bacanja dobijemo barem dvije šestice, da u drugih pet bacanja suma brojeva bude parna, a u zadnjih pet bacanja da točno tri puta dobijemo broj 5 ili broj 6.

Označimo ova tri događaja.

A = {u pet bacanja pale barem dvije šestice}
B = {u pet bacanja suma brojeva parna}
C = {u pet bacanja točno tri puta 5 ili 6}

Izračunajmo vjerojatnost svakoga od njih.

U događaju A bitna je ključna riječ 'barem'. Dakle povoljni su događaji kad je palo 2, 3, 4 ili 5 šestica, a nepovoljni kad je pala 0 ili 1 šestica. Budući da je nepovoljnih događaja manje, lakše je od 100%-tne vjerojatnosti oduzeti vjerojatnost nepovoljnih događaja. Vjerojatnost da je na jednoj kocki pala šestica jednaka je $\frac{1}{6}$, a vjerojatnost da je pao bilo koji drugi broj $\frac{5}{6}$.

$$\mathbf{P}(A) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{5}{6}\right)^5 - \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.1962$$

Za događaj B treba se prisjetiti nekih osnovnih zakona aritmetike koji kažu da bi suma brojeva bila parna, treba sadržavati paran broj neparnih pribrojnika. Pa tako ovdje imamo sljedeće kombinacije brojeva na kockama: 5 parnih i 0 neparnih, 3 parna i 2 neparna, 1 paran i 4 neparna. Vjerojatnost da je na kocki pao paran broj jednaka je $\frac{1}{2}$, a jednako toliko iznosi i vjerojatnost da je pao neparan broj.

$$\mathbf{P}(B) = \binom{5}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0.5$$

Kod događaja C imamo četiri moguće kombinacije: 5-5-5-x-x, 5-5-6-x-x, 5-6-6-x-x, 6-6-6-x-x; gdje x predstavlja bilo koji od preostala četiri broja (ali ne 5 ili 6 zato što treba biti točno tri puta 5 ili 6) pa će vjerojatnost dobivanja nekog od četiri preostala broja biti $\frac{4}{6}$. S binomnim koeficijentima biramo na koja će mjesta od 5 mogućih doći željeni brojevi (na primjer u drugoj kombinaciji $\binom{5}{2}$ predstavlja broj načina da se odaberu dva mjesta od mogućih pet na koje će doći petica, a $\binom{3}{1}$ jedno mjesto od preostala tri na koje će doći šestica, slično tako u ostalim).

$$\mathbf{P}(C) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2 +$$
$$\binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{4}{6}\right)^2 + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^2 = 0.1646$$

Naposljetku, konačno rješenje jednako je vjerojatnosti da se sva ova tri događaja ostvare, dakle jednaka je njihovu presjeku/umnošku. Kako su ova tri događaja nezavisna (to što se dogodi u jednoj turi od pet bacanja nema nikakva utjecaja na to što će se u nekoj drugoj turi dogododiti), vjerojatnost presjeka jednaka je umnošku pojedinačnih vjerojatnosti.

$$\mathbf{P}(ABC) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)\mathbf{P}(C) = 0.01615$$

3. zadatak Pretpostavite da igrate igru u kojoj pobjeđujete s vjerojatnošću p. Odigrate 5 takvih igara i ako pobijedite u petoj igri, nastavljate igrati sve dok ne izgubite.

(a) Nađite očekivani broj igara koje ćete odigrati.

(b) Nađite očekivani broj igara koje ćete izgubiti.

(a) Označimo s X diskretnu slučajnu varijablu koja označava broj odigranih igara. Uvijek moramo odigrati barem pet igara, a ako pobijedimo u petoj, igramo dok ne izgubimo. Stoga je najmanja vrijednost koju ova slučajna varijabla može poprimiti jednaka 5 (ako petu igru izgubimo) i zatim može poprimiti vrijednosti 6 (ako izgubimo prvu nakon pete), 7 (ako izgubimo drugu nakon pete), 8, 9... i tako unedogled. Ova je slučajna varijabla distribuirana na sljedeći način:

$$X \sim \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & \cdots & k & \cdots \\ 1-p & p(1-p) & p^2(1-p) & \cdots & p^{k-5}(1-p) & \cdots \end{pmatrix}$$

Za prve četiri odigrane igre nije nam bitno jesmo li pobijedili ili izgubili, one će uvijek biti odigrane i ne odlučuju o daljnjem broju odigranih igara. Ključna je peta igra. Ako izgubimo petu igru, tu stajemo i odigrali smo samo pet igara. Zato je vjerojatnost da odigramo pet igara upravo jednaka vjerojatnosti da izgubimo tu petu igru, odnosno $1-p$.

Vjerojatnost da odigramo 6 igara jednaka je vjerojatnosti da pobijedimo u petoj (a to je p) i onda izgubimo u šestoj (a to je $1-p$). Vjerojatnost da odigramo 7 igara jednaka je vjerojatnosti da pobijedimo u petoj i zatim šestoj (a to je p^2) i onda izgubimo u sedmoj (a to je $1-p$). Vjerojatnost da odigramo 8 igara jednaka je vjerojatnosti da pobijedimo u petoj i zatim šestoj i sedmoj (a to je p^3) i onda izgubimo u osmoj (a to je $1-p$). Sad već primjećujemo opći oblik ovih vjerojatnosti, a to je za k odigranih igara vjerojatnost $p^{5-k}(1-p)$.

Očekivanje diskretne slučajne varijable računa se prema formuli $\mathbf{E}(X) = \sum_i x_i \cdot p_i$, odnosno tako što se zbroje umnošci vrijednosti događaja x_i (u ovom slučaju 5, 6, ...) i njihovih pripadnih vjerojatnosti p_i. (1. knjižica, 97. stranica) Tako je očekivanje:

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=5}^{\infty} k \cdot p^{k-5}(1-p) = \frac{1-p}{p^5} \sum_{k=5}^{\infty} k \cdot p^k$$

Ovaj red izračunat ćemo deriviranjem standardnog geometrijskog reda.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \Big/ '$$
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^{k-1} \Big/ \cdot x$$
$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x^k$$

Budući da dobivena sumacija kreće od 1, a ne od 5, možemo pomaknuti u onoj početnoj sumi indeks za četiri koraka unatrag:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{k=5}^{\infty} k \cdot p^{k-5}(1-p) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (k+4) \cdot p^{k-1}(1-p) \\
&= \frac{1-p}{p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^k + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \cdot p^k \right) \\
&= \frac{1-p}{p} \left(\frac{p}{(1-p)^2} + 4 \frac{p}{1-p} \right) \\
&= \frac{1}{1-p} + 4 \\
&= \frac{5-4p}{1-p}
\end{aligned} \tag{1}$$

(b) Označimo s Y diskretnu slučajnu varijablu koja će označavati broj izgubljenih igara. Očekivani broj izgubljenih igara jednak je očekivanom broju odigranih igara pomnoženim vjerojatnošću gubitka igre: $\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(X) \cdot (1-p) = 5 - 4p$

4. zadatak Samo je jedna od ovih tvrdnji točna. Odaberite koja i dokažite ju koristeći svojstva očekivanja.

(a) $\mathbf{D}(aX+b) = a\mathbf{D}(X) + b$

(b) $\mathbf{D}(aX+b) = a^2\mathbf{D}(X) + b$

(c) $\mathbf{D}(aX+b) = a^2\mathbf{D}(X) + b^2$

(d) $\mathbf{D}(aX+b) = a^2\mathbf{D}(X)$

Točna je tvrdnja d).

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}(aX+b) &= \mathbf{E}[(aX+b)^2] - [\mathbf{E}(aX+b)]^2 \\
&= \mathbf{E}(a^2X^2 + 2aXb + b^2) - [\mathbf{E}(aX) + \mathbf{E}(b)]^2 \\
&= \mathbf{E}(a^2X^2) + \mathbf{E}(2aXb) + \mathbf{E}(b^2) - [a\mathbf{E}(X) + b]^2 \\
&= a^2\mathbf{E}(X^2) + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2 - [a^2\mathbf{E}(X)^2 + 2ab\mathbf{E}(X) + b^2] \\
&= a^2[\mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2] \\
&= a^2\mathbf{D}(X)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Korištena svojstva očekivanja:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E(a)} &= a \\
\mathrm{E(aX)} &= a \cdot \mathbf{E}(X) \\
\mathrm{E(X + Y)} &= \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

5. zadatak Slučajna varijabla X ravna se po normalnoj razdiobi $X \sim \mathcal{N}(2,4)$. Izračunajte:

(a) $\mathbf{P}(X^2 > 1)$

(b) $\mathbf{P}(X^2 < 4X + 12)$

Lineo reče: *ne znam ni ja kako je moguće da 80% studenata druge godine FER-a ne zna riješiti kvadratnu nejednadžbu (glupi 5. poklon zadatak).*

Pa, hajdemo riješiti glupi 5. zadatak. :D

(a) $\mathbf{P}(X^2 > 1) = \mathbf{P}(X^2 - 1 > 0) = \mathbf{P}((X-1)(X+1) > 0)$

Imamo dva slučaja kad bi ovo moglo vrijediti. Prvi je da su oba faktora pozitivna i onda vrijedi $X > 1$. Drugi je da su oba faktora negativna i onda vrijedi $X < -1$. Konačno je rješenje zbroj tih dvaju slučajeva.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X > 1) + \mathbf{P}(X < -1) &= \mathbf{P}\left(\frac{X-2}{2} > \frac{1-2}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\frac{X-2}{2} < \frac{-1-2}{2}\right) \\
&= \mathbf{P}(X^* > -0.5) + \mathbf{P}(X^* < -1.5) \\
&= \frac{1}{2}[1 - \Phi^*(-0.5)] + \frac{1}{2}[1 + \Phi^*(-1.5)] \\
&= 1 + \Phi^*(0.5) - \Phi^*(1.5) \\
&= 0.7585
\end{aligned} \tag{4}$$

(b) $\mathbf{P}(X^2 < 4X + 12) = \mathbf{P}(X^2 - 4X - 12 < 0) = \mathbf{P}((X-6)(X+2) < 0)$

Imamo dva slučaja kad bi ovo moglo vrijediti. Prvi je da je prvi faktor pozitivan, drugi negativan. Drugi je da je prvi faktor negativan, drugi pozitivan. Prvi slučaj jest kontradiktoran tako da preostaje samo drugi slučaj.

$X < 6, X > -2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(-2 < X < 6) &= \mathbf{P}\left(\frac{-2-2}{2} < \frac{X-2}{2} < \frac{6-2}{2}\right) \\
&= \mathbf{P}(-2 < X^* < 2) \\
&= \mathbf{P}(|X^*| < 2) = \Phi^*(2) \\
&= 0.9545
\end{aligned} \tag{5}$$

6. zadatak Na sreću biramo X iz intervala [1,3] te potom Y iz intervala [0,X]. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable Y te izračunajte vjerojatnost $\mathbf{P}(Y < 2)$

U ovakvim je zadacima **iznimno** bitno nacrtati skicu vjerojatnosnog prostora jer se tek onda lijepo vidi kako i što treba integrirati. U ovom zadatku x poprima vrijednosti od 1 do 3 pa sam ovim iscrtkanim linijama ogradio taj dio. S druge strane, y ide od 0 pa do vrijednosti od x, odnosno bolje rečeno do pravca $y = x$. Vjerojatnosni prostor stoga je omeđen tim ogradama i navedenim pravcem, što sam označio na skici crvenom bojom.

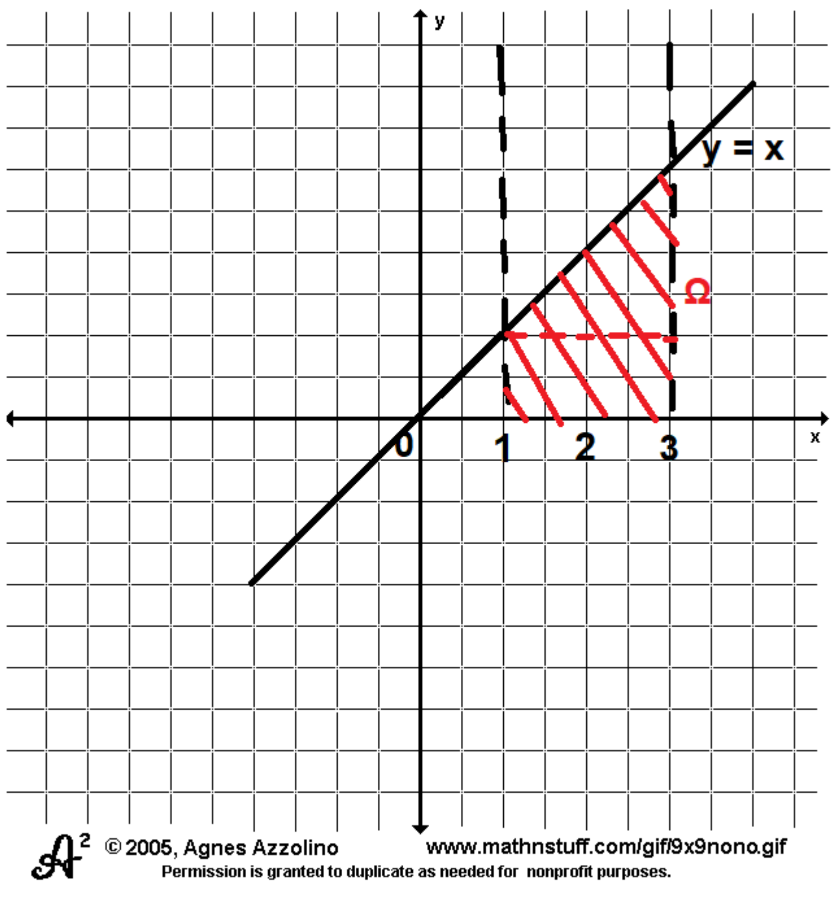

Figure 1: Skica vjerojatnosnog prostora

Budući da X biramo na sreću iz nekog intervala, on ima uniformnu razdiobi koja je recipročna duljini intervala (2. knjižica, 6. stranica):
$f_X(x) = \dfrac{1}{3-1} = \dfrac{1}{2}$, $x \in [1, 3]$

Što se tiče varijable Y, nju također biramo na sreću iz intervala pa će i ona imati uniformnu razdiobu. Gornja granica tog intervala ovisi o vrijednosti varijable X. Dakle, tek kad odaberemo neku konkretnu vrijednost varijable X, znamo i kako izgleda funkcija gustoće od Y. Zato je ta funkcija gustoće ovisna o poznavanju vrijednosti od X pa to zapisujemo ovako:
$f_{Y|X=x}(y) = \dfrac{1}{x-0} = \dfrac{1}{x}$, $y \in [0, x]$

Zadatak je izračunati funkciju gustoće varijable Y odnosno $f_Y(y)$. Formmula za to glasi (2. knjižica, 70. stranica):
$f_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y) \cdot f_X(x) dx$
$f_Y(y) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2x} dx$

Naš je vjerojatnosni prostor, jasno, manji od $< -\infty, \infty >$ pa treba odrediti odgovarajuće granice. Kako integriramo po varijabli x, bitno nam je odakle dokle se proteže x. Vidimo na skici da to ovisi u kojem smo dijelu vjerojatnosnog prostora. Ako smo u dijelu gdje y ide od 0 do 1, onda se x proteže od 1 do 3 pa su to odgovarajuće granice. Ako smo u dijelu gdje y ide od 1 do 3, onda se x proteže od pravca $y = x$ (dakle od točke gdje ima vrijednost y) pa do 3 tako da su granice y i 3. Bacimo se na integriranje.

y $\in [0,1]$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_1^3 \frac{1}{2x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^3 \\
&= \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned} \tag{6}$$

y $\in < 1,3]$

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_y^3 \frac{1}{2x}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_y^3 \frac{1}{x}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x|\Big|_y^3 \\
&= \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln y
\end{aligned} \tag{7}$$

Izračunajmo za kraj i vjerojatnost $\mathbf{P}(Y < 2)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y < 2) &= \int_{-\infty}^{2} f_Y(y)dy \\
&= \int_{0}^{2} f_Y(y)dy \\
&= \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\ln 3 dy + \int_{1}^{2} (\frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln y)dy \\
&= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\int_{1}^{2} \ln y dy \\
&= \ln 3 - \frac{1}{2} I
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{1}^{2} \ln y dy = \begin{vmatrix} u = \ln y & du = \frac{1}{y}dy \\ dv = 1dy & v = y \end{vmatrix} \\
&= y\ln y \Big|_{1}^{2} - y \Big|_{1}^{2} = 2\ln 2 - 1
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{P}(Y < 2) = \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln\frac{3}{2} + \frac{1}{2}
$$

7. zadatak Dužina $\overline{AB}$ ima duljinu 1. Točka P dijeli dužinu $\overline{AB}$ napola. Točku T_1 biramo na dužini $\overline{AP}$, a točku T_2 biramo na dužini $\overline{AB}$. Slučajnu varijablu Z definiriamo kao duljinu dužine $\overline{T_1T_2}$. Odredite funkciju razdiobe i očekivanje slučajne varijable Z.

Uvedimo dvije nove slučajne varijable.

$$X = \text{duljina dužine} \overline{AT_1}$$
$$Y = \text{duljina dužine} \overline{AT_2}$$

Sada je slučajna varijabla iz teksta zadatka definirana kao

$$Z = |Y - X|$$

Razlog zašto se ovdje nalazi apsolutna vrijednost jest taj što se na dužini može prvo pojaviti T_1 pa tek onda T_2 (pa je onda $y > x$ i $Z = Y - X$) ili se može pojaviti T_2 pa tek onda T_1 (pa je onda $y < x$ i $Z = X - Y$).

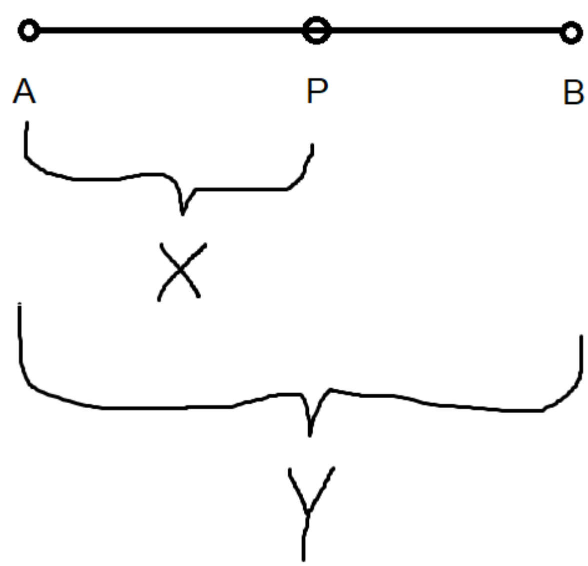

Figure 2: Skica dužine $\overline{AB}$

Na skici su označena područja gdje biramo pojedinu točku, odnosno raspon vrijednosti slučajnih varijabli X i Y. Točka T_1 može biti odabranu u intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, a točka T_2 iz intervala $[0, 1]$. Z također poprima vrijednosti iz $[0, 1]$.

Funkcija razdiobe definirana je za slučaj kad je $y > x$ kao:

$$F(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(y - x < z) = \mathbf{P}(y < x + z)$$

, a za slučaj kad je $y < x$ kao:

$$F(z) = \mathbf{P}(Z < z) = \mathbf{P}(x - y < z) = \mathbf{P}(y > x - z).$$

Unija tih dvaju slučajeva bit će:

$$\mathbf{P}(x - z < y < x + z)$$

odnosno područje koje računamo bit će omeđeno dvama pravcima, jedan je $y = x - z$, a drugi je $y = x + z$.

Kako slučajne varijable biramo srećom iz intervala, one imaju uniformnu razdiobu.

$$f_X(x) = \frac{1}{\frac{1}{2} - 0} = 2$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{1 - 0} = 1$$

Kako su X i Y nezavisne (to gdje smo odabrali jednu točku ne utječe na to gdje možemo odabrati drugu), funkcija gustoće slučajnog vektora jednaka je:

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 2$$

Pogledajmo kako to izgleda na našem vjerojatnosnom prostoru. Bit će dva različita slučaja, jedan kad je $z \in < 0, \frac{1}{2} >$ i drugi kad je $z \in < \frac{1}{2}, 1 >$.

Prvi slučaj izgleda ovako.

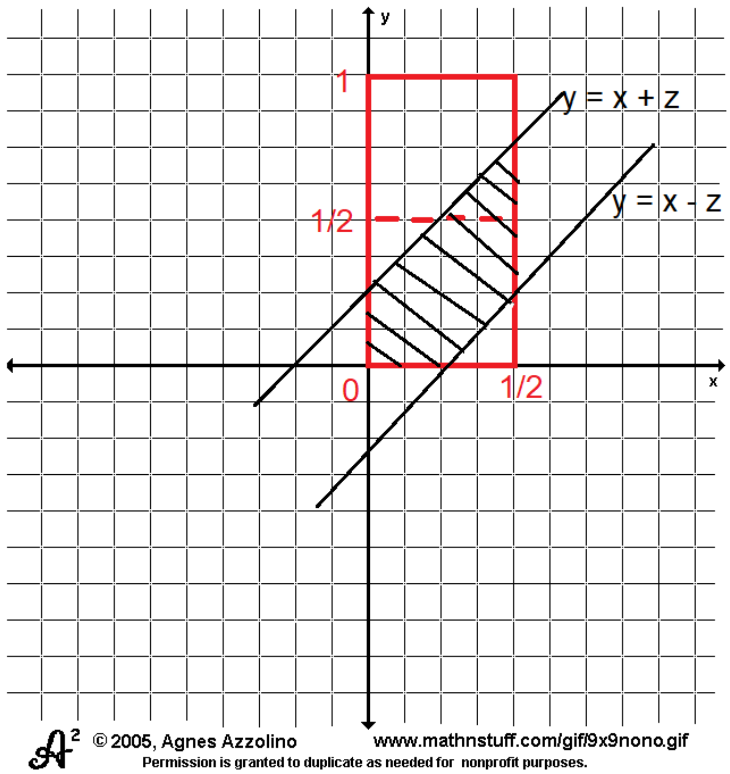

Figure 3: Vjerojatnosni prostor za prvi slučaj

Mnogo je lakše oduzeti ovdje od 100%-tne vjerojatnosti (od jedinice) ove tri površine koje sam označio rimskim brojevima.

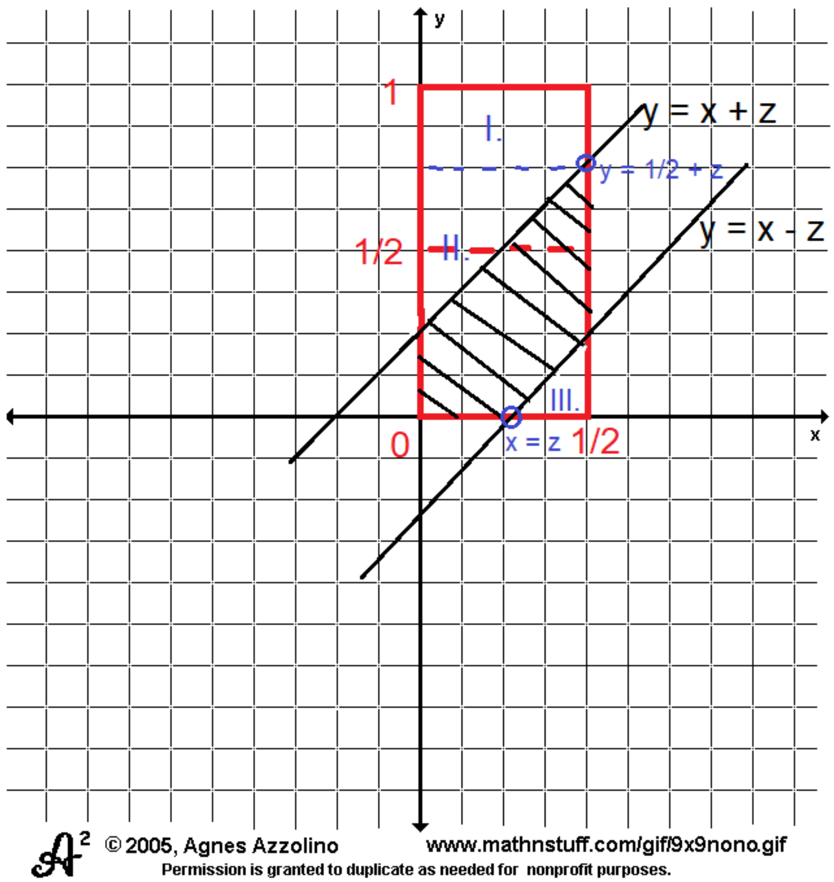

Figure 4: Od 1 oduzeti površine označene rimskim brojevima

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(x-z<y<x+z) &= 1-\iint_G f(x,y)dxdy \\
&= 1-2(S_{I.}+S_{II.}+S_{III.}) \\
&= 1-2\left(\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{z+\frac{1}{2}}^{1} dy + \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x+z}^{z+\frac{1}{2}} dy + \int_z^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{x-z} dy\right) \\
&= 1-2\left(\int_{z+\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}dy + \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}-x)dx + \int_z^{\frac{1}{2}} (x-z)dx\right) \\
&= 1-(1-2z+z^2) \\
&= 2z-z^2
\end{aligned}
\tag{9}
$$

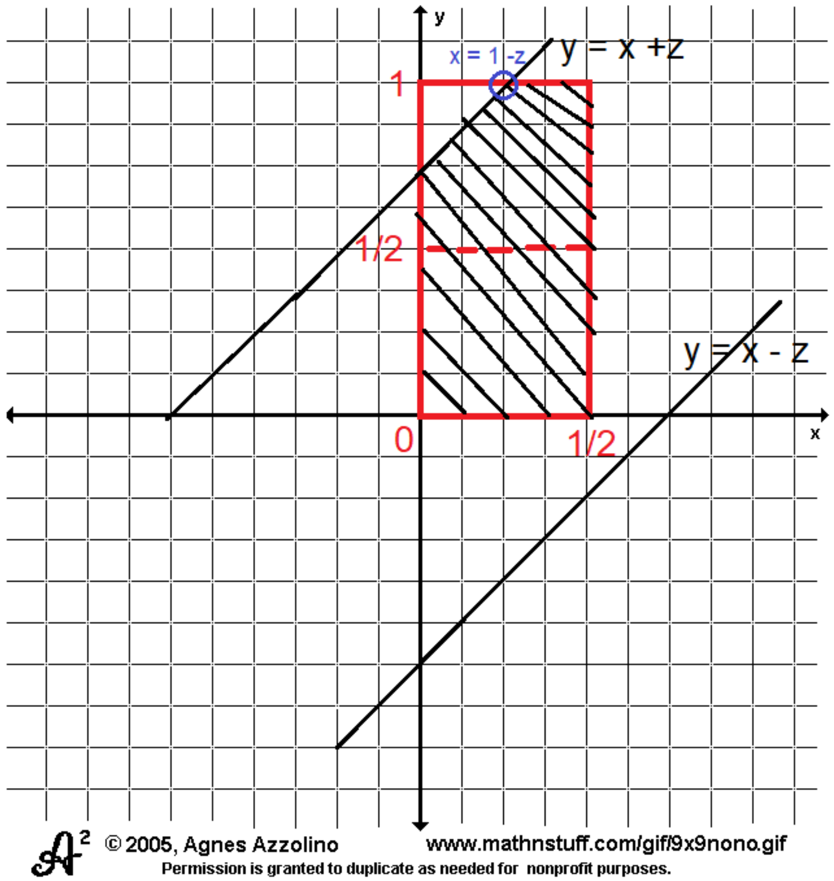

Figure 5:

U drugom je slučaju, kad je $z \in < \frac{1}{2}, 1 >$, između pravaca obuhvaćena mnogo veća površina, maltene cijela osim jednog malenog trokuta. Ponovno je mnogo lakše od 1 oduzeti površinu tog trokuta.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(x-z<y<x+z) &= 1-\iint_G f(x,y)dxdy \\
&= 1-2\int_0^{1-z} dx \int_{x+z}^1 dy \\
&= 1-2\int_0^{1-z} (1-x-z)dx \\
&= 1-\left(2x\Big|_0^{1-z} - x^2\Big|_0^{1-z} - 2zx\Big|_0^{1-z}\right) \\
&= 1-2+2z+(1-z)^2+2z(1-z) \\
&= 2z-z^2
\end{aligned} \tag{10}
$$

Funkcija razdiobe ispala je jednaka za oba slučaja, dosta zanimljivo.

Izračunajmo očekivanje. Za njega nam je prvo potrebna funkcija gustoće.

$$
f(z) = \frac{dF(z)}{dz} = 2-2z
$$

$$
\mathbf{E}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z\cdot f(z)dz = \int_0^1 (2z-2z^2)dz = z^2\Big|_0^1 - \frac{2}{3}z^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}
$$

2. način

Ovaj se zadatak može riješiti i jednostavnije, bez slučajnog vektora i integriranja, već čistim očitavanjem površina. Jako je sličan bio 6. zadatak u MI 2012., a ovdje možete vidjeti način rješavanja s Burićevih predavanja: `http://www.deviantpics.com/images/2018/07/26/VIS-mi-2012-6zad.png`

8. zadatak Na sreću biramo n brojeva iz intervala $[3, 14]$. Neka je slučajna varijabla $\overline{X}$ njihova aritmetička sredina.

(a) Koristeći centralni granični teorem, odredite parametre normalne razdiobe kojom možemo aproksimirati slučajnu varijablu $\overline{X}$.

(b) Odredite najmanji n takav da je

$$\mathbf{P}(8.4 < \overline{X} < 8.6) > 0.95.$$

(a) Označimo s X_i slučajnu varijablu koja predstavlja i-ti na sreću izabran broj iz intervala $[3, 14]$. Izračunajmo prvo njezine parametre.

$$X_i \in [3, 14]$$
$$f(x) = \frac{1}{14-3} = \frac{1}{11}$$
$$\mathbf{E}(X_i) = \int_3^{14} x f(x) dx = \frac{1}{11} \frac{x^2}{2} \bigg|_3^{14} = 8.5$$
$$\mathbf{D}(X_i) = \int_3^{14} x^2 f(x) dx - [\mathbf{E}(X_i)]^2 = \frac{1}{11} \frac{x^3}{3} \bigg|_3^{14} - 8.5^2 = 10.0833$$

Izračunajmo sada i parametre slučajne varijable $\overline{X}$.

$$\mathbf{E}(\overline{X}) = \mathbf{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[\mathbf{E}(X_1) + ... + \mathbf{E}(X_n)]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbf{E}(X_i) = \mathbf{E}(X_i) = 8.5$$

$$\mathbf{D}(\overline{X}) = \mathbf{D}\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}[\mathbf{D}(X_1) + ... + \mathbf{D}(X_n)]$$
$$= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathbf{D}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbf{D}(X_i) = \frac{10.0833}{n}$$

Parametri su $\mathbf{E}(\overline{X}) = 8.5$ i $\mathbf{D}(\overline{X}) = \dfrac{10.0833}{n}$.

(b) Inače je formula za centriranje kod centralnog graničnog teorema (2. knjižica, 129. stranica):

$$\mathbf{P}\left(a < \sum_i X_i < b\right) = p$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{a - n\cdot\mathbf{E}(X_i)}{\sqrt{n}\cdot\sigma_{\mathbf{X_i}}} < \frac{\sum\limits_i X_i - n\cdot\mathbf{E}(X_i)}{\sqrt{n}\cdot\sigma_{\mathbf{X_i}}} < \frac{b - n\cdot\mathbf{E}(X_i)}{\sqrt{n}\cdot\sigma_{\mathbf{X_i}}}\right) = p$$

U ovom je zadatku naša varijabla za koju radimo procjenu (ova u sredini gornjeg izraza) $\overline{X} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_i X_i$ pa ćemo onda pomnožiti brojnik i nazivnik središnjeg razlomka u gornjem izrazu s $\frac{1}{n}$. Dobivamo:

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_i X_i - \mathbf{E}(X_i)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_{\mathbf{X_i}}} = \frac{\overline{X} - \mathbf{E}(X_i)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_{\mathbf{X_i}}}, \text{ pri čemu je } \sigma_{X_i} = \sqrt{\mathbf{D}(X_i)} = 3.175$$

Dakle imamo:

$$\mathbf{P}\left(\frac{8.4 - 8.5}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 3.175} < \frac{\overline{X} - \mathbf{E}(X_i)}{\frac{1}{\sqrt{n}}\sigma_{\mathbf{X_i}}} < \frac{8.6 - 8.5}{\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot 3.175}\right) > 0.95$$

$$\mathbf{P}(-\sqrt{n}\cdot 0.031496 < \overline{X}^* < \sqrt{n}\cdot 0.031496) > 0.95$$

$$\mathbf{P}(|\overline{X}^*| < \sqrt{n}\cdot 0.031496) > 0.95$$

$$\Phi^*(\sqrt{n}\cdot 0.031496) > 0.95$$

Zanima nas koji je najmanji n za koji ovo vrijedi. Zato uzmimo da je ovo jednako točno 0.95 i iščitajmo iz tablice normalne razdiobe za koji argument funkcija Φ^* poprima vrijednost 0.95. Vidimo da je to 1.96.

$\sqrt{n}\cdot 0.031496 > 1.96$
$\sqrt{n} > 62.23$
$n > 3872.58$

Dakle, najmanji n za koji vrijedi ova procjena jednak je 3873. U rješenju piše 3872, pretpostavljam da su ovo 0.031496 zaokružili na 0.0315 pa s tim računali, onda se dobije njihovo rješenje.

9. zadatak Čokoladni bomboni se pakiraju na traci stroja u kutije po 900 grama. Izvagano je 10 kutija i dobivene su težine u gramima

$$898, 901, 902, 899, 898, 900, 897, 901, 903, 897.$$

(a) Ako pretpostavimo da se težina kutija ravna po normalnoj razdiobi, odredite nepristrane procjene za njezino očekivanje i disperziju.

(b) Odredite 95%-tni dvostrani interval povjerenja za disperziju.

(c) Uz nivo značajnosti 1% provjerite hipotezu o ispravnosti stroja za pakiranje čokoladnih bombona.

(a) $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 899.6$

$\hat{s}^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = 4.4889$

(b) $\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$

Očekivanje je u ovom zadatku nepoznato (morali smo ga procijeniti aritmetičkom sredinom) pa s prve stranice podsjetnika uzmemo formulu za interval povjerenja reda p za disperziju normalne raziobe, uz nepoznato očekivanje a:

$$\mathbf{P}\left(\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right) = 0.95$$

$$\mathbf{P}\left(\frac{9 \cdot 4.4889}{19.023} < \sigma^2 < \frac{9 \cdot 4.4889}{2.7}\right) = 0.95$$

$$\mathbf{P}\big(2.124 < \sigma^2 < 14.963\big) = 0.95$$

(c) Radi se o običnom T-testu: očekivanje je nepoznato, a zadan nam je neki $a_0 = 900$ te trebamo ispitati je li $a \neq a_0$ s nivoom značajnosti $\alpha = 0.01$.

$H_0 ... a = 900$
$H_1 ... a \neq 900$

$$\hat{t} = \frac{899.6 - 900}{2.118/\sqrt{10}} = -0.5972$$
$t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{9,1-0.01/2} = 3.250$

$\|\hat{t}\| < t_{n-1,1-\alpha/2}$

Ne odbacujemo H_0, odnosno možemo zaključiti da stroj ispravno pakira uz nivo značajnosti $\alpha = 1\%$.

10. zadatak Želimo testirati je li korištena kocka ispravna. Bacili smo kocku 54 puta i dobili sljedeće ishode:

− − −

(a) Možemo li zaključiti da je kocka ispravna uz nivo značajnosti 5%?

(b) Uz koji najveći nivo značajnosti možemo zaključiti da je kocka ispravna?

Preporučujem da u zadacima s χ^2-testom uvijek napravite jednu tablicu s ovim stupcima.

x_j	n_j	p_j	$n \cdot p_j$	$\frac{(n_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$
1	14			
2	11			
3	10			
4	8			
5	6			
6	5			

Zatim popunite odgovarajuće stupce. Stupac p_j predstavlja vjerojatnost da se ostvari događaj označen s x_j. Kako se ovdje radi o kocki i njezinim vrijednostima, vjerojatnost za svaki broj da padne baš on jednaka je $\frac{1}{6}$. Sa n je označen volumen uzorka (zbroj svih n_j) i ovdje iznosi 54.
Da se dogodilo da je neka vrijednost u stupci $n \cdot p_j$ manja od 5, trebalo bi je spojiti s prvom susjednom vrijednošću (ili više njih). Ovdje se to nije dogodilo.

x_j	n_j	p_j	$n \cdot p_j$	$\frac{(n_j - n \cdot p_j)^2}{n \cdot p_j}$
1	14	1/6	9	2.7778
2	11	1/6	9	0.4444
3	10	1/6	9	0.1111
4	8	1/6	9	0.1111
5	6	1/6	9	1
6	5	1/6	9	1.7778

Zbrojimo posljednji stupac i dobivamo $\chi_q^2 = 6.222$

(a) Nivo značajnosti jednak je $\alpha = 0.05$. Zato moramo očitati $\chi^2_{m-r-1,1-\alpha} = \chi^2_{6-0-1,1-0.05} = \chi^2_{5,0.95} = 11.070$.
Budući da vrijedi $\chi_q^2 < \chi^2_{5,0.95}$, prihvaćamo hipotezu da je kocka ispravna uz nivo značajnosti 5%. Kriteriji za prihvaćanje i odbacivanje jasno pišu na podsjetniku.

(b) Iz podsjetnika moramo iščitati iz tablice kvantila hi-kvadrat razdiobe koja je najmanja vrijednost koja je još uvijek veća od naše dobivene $\chi_q^2 = 6.222$ uz 5 stupnjeva slobode ($m - r - 1 = 6 - 0 - 1 = 5$). Vidimo u tablici da je to $\chi^2_{5,0.75} = 6.626$, odnosno $1 - \alpha = 0.75$ pa zaključujemo da je $\alpha = 0.25$. Stoga je najveći nivo značajnosti uz koji možemo zaključiti da je kocka ispravna jednak 25%.

Za druge razne primjere χ^2-testa preporučujem da pogledate dokument na fer2materijalima *Skenirana predavanja - Burić - cijeli semestar (v2) (2012/13).* Općenito se ondje nalaze odlični primjeri i objašnjenja za cijelo gradivo. Sretno s učenjem! :-)