1. *Zadatak*

Odredite očcekivanje i disperziju slulajne varijable zadane gustoćom razdiobe $f(x) = 10e^{-10x}$, $x > 0$.

Rješenje

Prepoznajemo eksponencijalnu razdiobu:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}, x > 0$$

Prema tome λ=10

Očekivanje i disperzija:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10}$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{100}$$

2. *Zadatak*

Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe $f(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{x}{3}}, x > 0$. Izračunajte vjerojatnost dogadaja $A = (X > 3)$ i $B = (X > 6 | X > 3)$

Rješenje

Vidimo da je $\lambda = \frac{1}{3}$.

Da bi izračunali vjerojatnost, trebamo funkciju razdiobe:

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{3}}$$

Za događaj A slijedi:

$$P(X > 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3}{3}}\right) = \frac{1}{e}$$

A za događaj B imamo uvjetnu vjerojatnost:

$$P(X > 6|X > 3) = \frac{P(X > 6, X > 3)}{P(X > 3)} = \frac{P(X > 6)}{P(X > 3)} = \frac{1 - P(X < 6)}{1 - P(X < 3)} = \frac{1 - F(6)}{1 - F(3)} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{6}{3}}\right)}{\left(1 - e^{-\frac{3}{3}}\right)} = \frac{1}{e}$$

3. Zadatak

Neka *X* ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom λ. Izračunajte $E(X^3)$.

Rješenje

Postoji formula u knjizi:

$$E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n} = \frac{6}{\lambda^3}$$

Možete i na dulji način:

$$E(X^n) = \int_0^\infty x^3\,\lambda\, e^{-\lambda x} dx$$

Pa tri puta parcijalno ☺

4. Zadatak

Duljina *X* ispravnog rada nekog uredaja je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Ako je poznato da će s vjerojatnošću 0.4 uređaj raditi ispravno tijekom jedne godine, kolika je vjerojatnost da će od 50 takvih uredaja njih barem 40 ispravno raditi tijekom prvih šest mjeseci?

Rješenje

Iz prve vjerojatnosti (da uređaj radi 12 mjeseci) dobijemo izraz:

$$P(X > 12) = 1 - P(X < 12) = 1 - \left(1 - e^{-12\lambda}\right) = e^{-12\lambda} = 0.4$$

Nakon , što izračunamo, korjenovanjem dobivamo, upravo, drugu vjerojatnost (da uređaj radi 6 mjeseci):

$$P(X > 6) = 1 - P(X < 6) = 1 - \left(1 - e^{-6\lambda}\right) = e^{-6\lambda} = \sqrt{0.4}$$

Y(ispravni rad tijekom 6 mjeseci) ~ B(50,$\sqrt{0.4}$)

To je binomna razdioba koja se može lakše izračunati ako se aproksimira s N(normalnom razdiobom) , a to se može napraviti jer je n=50 i p=$\sqrt{0.4}$=0.6324~0.5, q=1-p, pa slijedi:

B(n,p)~N(np, npq)

N(31.623 , 11.623)

Vjerojatnost da radi barem 40 uređaja sada se računa s normalnom razdoibom:

$$P(Y \geq 40) = 0.5\left(1 - \Phi\left(\frac{40 - 31.623}{\sqrt{11.623}}\right)\right) = 0.5\big(1 - \Phi(2.46)\big) = 0.007$$

5. Zadatak

Odredite konstantu α tako da $f(x) = \alpha e^{-x2+4x}$, $x \in R$, bude gustoća(normalne) razdiobe. Izračunaj očekivanje i disperziju te razdiobe.

Rješenje

Općenito, za gustoću normalne razdiobe vrijedi:

$$f(x) = \frac{1}{\partial\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\,\partial^2}}$$

Sada treba primjetiti odnos između zadane funkcije i zadane gustoće:

$$\alpha = \frac{1}{\partial\sqrt{2\pi}}$$

$$-x^2 + 4x = -\frac{(x-a)^2}{2\,\partial^2} = \frac{-x^2}{2\,\partial^2} + \frac{ax}{\partial^2} - \frac{a^2}{2\,\partial^2}$$

Trebali bi nekako dobiti jednu i drugu stranu jednaku, $\partial = \frac{1}{\sqrt{2}}$,a=2

$$-x^2 + 4x = -\frac{(x-a)^2}{2\,\partial^2} = -x^2 + 4x - 4$$

To znači da ćemo u originalnu dodati taj e^-4, pa α izgleda ovako:

$$\alpha = \frac{1}{\partial\sqrt{2\pi}} e^{-4} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-4}$$

$$E(X) = a = 2$$

$$D(X) = \partial^2 = \frac{1}{2}$$

6. *Zadatak*

Neka je X jedinična normalna slučajna varijabla. Odredi broj t tako da bude:

(a) $P(0 < X < t) = 0.4236$,

(b) $P(t < X < 2) = 0.1$.

Rješenje

a)

$P(0 < X < t) = 0.4236 = 0.5\big(\Phi(\mathrm{t}) - \Phi(0)\big)$
$0.8472 = \Phi(\mathrm{t})$, $\mathrm{t} = 1.43$
b)

$P(\mathrm{t} < X < 2) = 0.1 = 0.5\big(\Phi(2) - \Phi(\mathrm{t})\big)$
$0.2 = 0.9545 - \Phi(\mathrm{t})$, $\mathrm{t} = 1.43$
$\Phi(\mathrm{t}) = 0.7545$, $\mathrm{t} = 1.16$

7. *Zadatak*

Neka je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 8 i odstupanjem 4. Odredi

(a) $P(10 < X < 15)$,

(b) $P(X \leq 5)$.

Rješenje

a=8, ∂=4

a)

$$\mathrm{P}(10 < \mathrm{X} < 15) = 0.5\left(\Phi\left(\frac{15-8}{4}\right) - \Phi\left(\frac{10-8}{4}\right)\right) = 0.5\big(\Phi(1.75) - \Phi(0.5)\big) = 0.26848$$

b)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 5) = 0.5\left(1 + \Phi\left(\frac{5-8}{4}\right)\right) = 0.5\big(1 + \Phi(-0.75)\big) = 0.226625$$

8. *Zadatak*

Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s očekivanjem $a = 3$, i vrijedi $P(X < 5) = 0.6915$. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{-1 < X < 6\}$.

Rješenje

$$0.6915 = 0.5\left(1 + \Phi\left(\frac{5-3}{\partial}\right)\right)$$

$$0.1915 = 0.5\ \Phi\left(\frac{2}{\partial}\right)$$

$$\Phi\left(\frac{2}{\partial}\right) = 0.383$$

$$\frac{2}{\partial} = 0.5$$

$$\partial = 4$$

$$\mathrm{P}(-1 < \mathrm{X} < 6) = 0.5\left(\Phi\left(\frac{6-3}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{4}\right)\right) = 0.5\big(\Phi(0.75) + \Phi(1)\big) = 0.61472$$

9. *Zadatak*

Slučajna varijabla X distribuirana je po normalnom zakonu $N(4, \sigma 2)$.

Odredi σ ako je $P(2 < X < 6) = 0.8664$

Rješenje

$$0.8664 = 0.5\left(\Phi\left(\frac{6-4}{\partial}\right) - \Phi\left(\frac{2-4}{\partial}\right)\right)$$

$$0.8664 = \Phi\left(\frac{2}{\partial}\right)$$

$$\frac{2}{\partial} = 1.5$$

$$\partial = 1.33$$

10. Zadatak

Slučajna varijabla X distribuirana je po normalnom zakonu $N(a, \sigma^2)$.

Odredi gustoću i očekivanje slučajne varijable $Y = (X - a)^2$.

Rješenje

Prvo gustoću odredimo:

$$f(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$
$$x = \pm\sqrt{y} + a$$

$$f(y) = \frac{1}{\partial\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\sqrt{y}+a-a)^2}{2\partial^2}}\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|$$
$$f(y) = \frac{1}{\partial\sqrt{2y\pi}}\, e^{-\frac{y}{2\partial^2}}$$

$$E(Y) = E((X-a)^2) = E(X^2 - 2aX + a^2) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2$$
$$E(Y) = E(X^2) - 2a^2 + a^2 = E(X^2) - a^2 = E(X^2) - (E(X))^2 = D(X) = \partial$$

11.Zadatak (by Lineo)

Težina serijski rađenog gradevinskog elementa slučajna je varijabla podvrgnuta normalnoj razdiobi s parametrima $a = 0.5$ tona, $\sigma = 0.01$ tona. Kolika je vjerojatnost da težina 5 takvih elemenata premašila 2.55 tona?

Rješenje

Ne može se napisati Y=5X jer onda bi doista trebalo biti 5^2 (po teoremu o stabilnosti). "5X" znači da imamo samo jednu slučajnu varijablu što je netočno jer ih imamo 5.

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

pri čemu je Xi~$(0.5, 0.01^2)$

Tada po teoremu stabilnosti dobivamo

Y~$(5*0.5, 5*0.01^2)$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 2.55) = \mathrm{P}\left(\left(\frac{\mathrm{X}-2.5}{\sqrt{0.0005}}\right) - \left(\frac{2.55-2.5}{\sqrt{0.0005}}\right)\right) = 0.5\big(1 - \Phi(2.23)\big) = 0.0128$$

12. Zadatak

Slučajne varijable $X1$, $X2$, $X3$ su medusobno nezavisne, s normalnim razdiobama $N(0, 1)$, $N(1, 1)$, $N(2, 4)$ redom. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{X_1 < X_3 - X_2\}$.

Rješenje

Stavimo da je $0 < X_3 - X_2 - X_1$

Prema stabilnosti normalne razdiobe slijedi, aproksimacija binomne normalnom:

$$B \sim N(1 * 2 - 1 * 1 - 1 * 0, 1^2 * 4 + 1^2 * 1 + 1^2 * 1)$$
$$B \sim N(1,6)$$

$$P(B < 0) = 0.5 + 0.5\ \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0.6586$$

13. Zadatak

Slučajne varijable X, Y, Z su medusobno nezavisne, s normalnim razdiobama $N(1, 1)$, $N(4, 4)$, $N(9, 9)$ redom. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{X \leq 3Y - 2Z\}$.

Rješenje

Stavimo da je $0 \leq 3Y - 2Z - X$

Prema stabilnosti normalne razdiobe slijedi, aproksimacija binomne normalnom:

$$B \sim N(3 * 4 - 2 * 9 - 1 * 1, 3^2 * 4 + 2^2 * 9 + 1^2 * 1)$$
$$B \sim N(-7,73)$$

$$P(B < 0) = 0.5(1 +\ \Phi\left(\frac{-7}{\sqrt{73}}\right) = 0.2063$$

14.Zadatak

Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju normalne razdiobe s parametrima $\alpha_X = 1$, $\alpha_Y = 3$ i nepoznatim σ_X, σ_Y . Ako vrijedi $P(0 < X < 1) = P(2 < Y < 4) = 0.4$,

Rješenje

$$\mathrm{P}(0 < \mathrm{X} < 1) = \mathrm{P}\left(\left(\frac{0-1}{\partial_{\mathrm{X}}}\right) < \mathrm{X} < \left(\frac{1-1}{\partial_{\mathrm{X}}}\right)\right) = 0.5\left(\Phi(0) - \Phi\left(\frac{-1}{\partial_{\mathrm{X}}}\right)\right) =$$

$$0.4 = 0.5\ \Phi\left(\frac{1}{\partial_{\mathrm{X}}}\right)$$

$$0.8 = \ \Phi\left(\frac{1}{\partial_{\mathrm{X}}}\right)$$

$$\frac{1}{\partial_{\mathrm{X}}} = 1.28$$

$$\partial_{\mathrm{X}} = 0.78125$$

$$\mathrm{P}(2 < \mathrm{Y} < 4) = \mathrm{P}\left(\left(\frac{2-3}{\partial_{\mathrm{Y}}}\right) < \mathrm{Y} < \left(\frac{4-3}{\partial_{\mathrm{Y}}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{\partial_{\mathrm{Y}}}\right) =$$

$$0.4 = \Phi\left(\frac{1}{\partial_{\mathrm{Y}}}\right)$$

$$\frac{1}{\partial_{\mathrm{X}}} = 0.525$$

$$\partial_{\mathrm{Y}} = 1.90476$$

X i Y su nezavisne pa za X+Y vrijedi stabilnost:

$$N(aX + aY, {\partial_{\mathrm{X}}}^2 + {\partial_{\mathrm{Y}}}^2)$$
$$N(4, 2.0587^2)$$

$$\mathrm{P}(2 < \mathrm{X} + \mathrm{Y} < 6) = \mathrm{P}\left(\left(\frac{2-4}{2.0587}\right) < \mathrm{X} < \left(\frac{6-4}{2.0587}\right)\right) = \Phi\left(\frac{2}{2.0587}\right) = 0.668$$

15. Nadi vjerojatnost da se broj devetki, medu 10000 na sreću odabranih znamenki, nalazi izmedu 940 i 1060.

Rješenje

X~broj pojavljenih devetki

n- broj na srecu izabranih znamenki 10 000

p-vjerojatnost pojedinacnog dogadjaja, u nasem slucaju $\frac{1}{10}$

q=1-p=$\frac{9}{10}$

Primjeujemo da je X binomna:

$X \sim B(n, p) \sim B(10\,000, 0.1)$

Aproksimacija binomne normalnom:

$X \sim N(np, npq) \sim B(1000, 900)$

$$\mathrm{P}(940 < \mathrm{X} < 1060) = \mathrm{P}\left(\left(\frac{940 - 1000}{30}\right) < \mathrm{X} < \left(\frac{1060 - 1000}{30}\right)\right) = \Phi(2) = 0.9545$$

16. Zadatak

Vjerojatnost rođenja dječaka približno je jednaka 0.515. Kolika je vjerojatnost da medu 100 novorođene djece bude od 50 do 55 dječaka?

Rješenje

Imamo binomnu razdiobu

$X \sim B(n, p) \sim B(100, 0.515)$

Aproksimacija binomne normalnom:

$$X \sim N(np, npq) \sim N(100 * 0.515, 100 * 0.515 * 0.485) \sim N(51.5, 24.9775)$$

Napravit ćemo korekciju za 0.5 jer n nije „veliki“,pa imamo:

$$\mathrm{P}(49.5 < \mathrm{X} < 55.5) = \mathrm{P}\left(\Phi\left(\frac{55.5 - 51.5}{5}\right) - \Phi\left(\frac{49.5 - 51.5}{5}\right)\right) = 0.5(\Phi(0.8) - \Phi(0.4) = 0.443$$

17.Zadatak

Neki stroj proizvodi 60% proizvoda prve kvalitete. Izračunaj vjerojatnost da medu 75 proizvoda barem 40 bude prve kvalitete.

Rješenje

Imamo binomnu

$X \sim B(n,p) \sim B(75,0.6)$

Aproksimacija binomne normalnom:

$X \sim N(np,npq) \sim N(75*0.6,75*0.6*0.4) \sim N(45,18)$

$$\mathrm{P(X>40)} = 0.5\left(1-\Phi\left(\frac{40-45}{\sqrt{18}}\right)\right) = 0.5(1-\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{18}}\right) = 0.881$$

18.Zadatak

Točka se bira na sreću unutar kvadrata stranice 1. Kolika je vjerojatnost da će od 50 izabranih točaka barem 40 pasti unutar kruga upisanog tom kvadratu?

Rješenje

Imamo binomnu

$X \sim B(n,p) \sim B(50,p)$

p trebamo izračunati kao P(upisanog kurga)/P(kvadrata):

$$\mathrm{p} = \frac{\mathrm{P(upisanog\ kurga)}}{\mathrm{P(kvadrata)}} = \frac{\mathrm{r}^2\pi}{1} = 0.7854$$

$X \sim B(n,p) \sim B(50,0.7854)$

Aproksimacija binomne normalnom:

$X \sim N(np,npq) \sim N(39.27,8.4274)$

$$\mathrm{P(X>40)} = 0.5\left(1-\Phi\left(\frac{40-39.27}{\sqrt{0.7854}}\right)\right) = 0.5(1-0.1981) = 0.4$$

19.Zadatak

Vjerojatnost realizacije dogadaja A u jednom pokusu je 0.1. Koliko nezavisnih pokusa moramo učiniti da bi se s vjerojatnošću 0.8 događaj A realizirao barem 5 puta?

Rješenje

Imamo binomnu

$X \sim B(n, 0.1)$

Aproksimacija binomne normalnom:

$X \sim N(0.1n, 0.09n)$

$$\mathrm{P(X > 5) = 0.8 = 0.5}\left(1 - \Phi\left(\frac{5 - 0.1\mathrm{n}}{\sqrt{0.09n}}\right)\right)$$

$$0.6 = \left(\Phi\left(\frac{0.1\mathrm{n} - 5}{0.3\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$0.2526\,\sqrt{\mathrm{n}} = 0.1\mathrm{n} - 5$$

Zamjena sa n=t^2:

$$t^2 - 2.526t - 50 = 0$$
$$t = 8.446$$

Vratimo u zamjenu:

n=t^2 ,n=71.33

Pokus moramo izvesti 72 puta da bi se događaj A realizirao barem 5 puta

20.Zadatak (by Lineo)

Slučajna varijabla X distribuirana je po **Laplaceovom** zakonu ako je njezina gustoća

$f(x) = \frac{1}{2\alpha}\exp\left(-\frac{|x-a|}{\alpha}\right)$, gdje je $a \in \mathbb{R}$ proizvoljan, te $\alpha > 0$. Odredi očekivanje i disperziju od X.

Rješenje

Dakle, imamo funkciju gustoće:

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}}$$

Kod integriranja samo treba paziti na apsolutnu vrijednost i to je to:

$$E(X) = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{|x-a|}{\alpha}} dx = \frac{1}{2\alpha}\left[\int_{-\infty}^{a} x e^{\frac{x-a}{\alpha}} dx + \int_{a}^{\infty} x e^{\frac{a-x}{\alpha}} dx\right]$$

Oba integrala se riješavaju na isti način:

$$\begin{vmatrix} u = x & dv = e^{\frac{x-a}{\alpha}} dx \\ du = dx & v = \alpha e^{\frac{x-a}{\alpha}} \end{vmatrix}$$

$$E(X) = \frac{1}{2\alpha}\left[\left(\alpha x e^{\frac{x-a}{\alpha}}\right)\Big|_{-\infty}^{a} - \alpha\int_{-\infty}^{a} e^{\frac{x-a}{\alpha}} dx - \left(\alpha x e^{\frac{a-x}{\alpha}}\right)\Big|_{a}^{\infty} + \alpha\int_{a}^{\infty} e^{\frac{a-x}{\alpha}} dx\right] = \frac{1}{2}\left[\left(2a - \alpha e^{\frac{x-a}{\alpha}}\Big|_{-\infty}^{a} - \alpha e^{\frac{a-x}{\alpha}}\Big|_{a}^{\infty}\right]\right. = a$$

Analogno se računa disperzija, samo što su dvije parcijalne integracije u igri

Znači umjesto x, stavljamo x^2, i tako izračunamo disperziju.

P.S Mislio sam raspisati, ali mi trenutno NE da! ☺ ☺