VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

6. Primjeri neprekinutih razdioba

FER, Zagreb

Marko NUFC

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Slučajne varijable
Cjelina 6 – Primjeri neprekinutih razdioba

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

*****NAPOMENA*****

Zadaci KOJI SU potrebni rješavati su od 1-5, te zadaci 11-43, ostali zadaci su teoretskog tipa i nisu potrebni.
Zadaci koji nedostaju: 18,19,36

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekoliko zadataka(5.,23.)

FORMULE:

6. PRIMJERI NEPREKINUTIH RAZDIOBA

EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA
Opisuje vrijeme između događaja. Kao na primjer vrijeme ispravnog rada uređaja čije se karakteristike ne mijenjaju tokom vremena kao vrijeme do prvog poziva itd.
Oznaka: $\mathcal{E}(\lambda)$

Gustoća razdiobe: $\boldsymbol{f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}}\ , \boldsymbol{x} > 0$

Funkcija razdiobe: $\boldsymbol{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}\ , \boldsymbol{x} > 0$

Vjerojatnost: $\boldsymbol{P(X} < x) = \boldsymbol{1 - e^{-\lambda x}}\ , \boldsymbol{x} > 0$

Karakteristična funkcija: $\boldsymbol{\vartheta(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}}$

Očekivanje: $\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

Disperzija: $\boldsymbol{D(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}}$

Ishodišni moment reda n: $\boldsymbol{E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}}$

<u>Odsustvo pamćenja:</u> $\boldsymbol{P(X} < x + t \mid \boldsymbol{X} > t) = P(X < x)$

NORMALNA RAZDIOBA
Normalna ili Gaussova razdioba najvažnija je neprekinuta razdioba. Javlja se kao granična u svim situacijama kada je slučajna varijabla dobivena kao zbroj velikog broja međusobno nezavisnih pribrojnika. Ova distribucija je poznata kao i zvonolika razdioba zbog svog specifičnog oblika.
Oznaka: $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$

Gustoća razdiobe: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)}$

Vjerojatnost jedinične normalne razdiobe:

$\mathbf{P}(\mathbf{a} < X < b) = \mathbf{\Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{2}\left(\Phi^*(b) - \Phi^*(a)\right)}$; $\mathbf{\Phi^*}$ **– u tablici**!

$\mathbf{P(X} < a) = \mathbf{\Phi(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(a)}$

$\mathbf{P(X} > a) = \mathbf{1 - \Phi(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi^*(a)}$

Vjerojatnost opće normalne razdiobe:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x_1} < X < x_2) = \mathbf{P}\left(\frac{\mathbf{x_1 - a}}{\boldsymbol{\sigma}} < \frac{\mathbf{X - a}}{\boldsymbol{\sigma}} < \frac{\mathbf{x_2 - a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x_2 - a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x_1 - a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\boldsymbol{\Phi}^*\left(\frac{\mathbf{x_2 - a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \boldsymbol{\Phi} * (\frac{\mathbf{x_1 - a}}{\boldsymbol{\sigma}})]$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} < x) = \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x - a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Phi}^*(\frac{\mathbf{x - a}}{\boldsymbol{\sigma}})$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} > x) = \mathbf{1} - \boldsymbol{\Phi}\left(\frac{\mathbf{x - a}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\Phi}^*(\frac{\mathbf{x - a}}{\boldsymbol{\sigma}})$$

Karakteristična funkcija jedinične normalne razdiobe: $\boldsymbol{\vartheta}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2\pi}}} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^2} \mathbf{e}^{\mathbf{itx}}\, \mathbf{dx}$

Karakteristična funkcija opće normalne razdiobe: $\boldsymbol{\vartheta}_{\mathbf{a+\sigma X}}(\mathbf{t}) = \mathbf{e}^{\mathbf{ita} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{t}^2}$

Veza između jedinične i opće normalne razdiobe:

$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0,1}) \Rightarrow \mathbf{a} + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\sigma}^2)$ Očekivanje: **E(X) = a**

$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\sigma}^2) \Rightarrow \frac{\mathbf{X-a}}{\boldsymbol{\sigma}} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0,1})$ Disperzija: **D(X) =** $\boldsymbol{\sigma^2}$

<u>Pravilo 3σ</u>

$\mathbf{P}(|\mathbf{X} - \mathbf{a}| < k\sigma) = \mathbf{P}(-\mathbf{k}\boldsymbol{\sigma} < X - a < k\sigma) = \mathbf{P}(-\mathbf{k} < \overline{\mathbf{X}} < k) = \boldsymbol{\Phi}^*(\mathbf{k}) \quad , \mathbf{k} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3} \ldots$

Vrijedi $\boldsymbol{\Phi}^*(\mathbf{1}) = \mathbf{0.6827}$, $\boldsymbol{\Phi}^*(\mathbf{2}) = \mathbf{0.9545}$, $\boldsymbol{\Phi}^*(\mathbf{3}) = \mathbf{0.9973}$

Normalna varijabla praktički sigurno uzima vrijednosti unutar intervala: $\mathbf{a} - \mathbf{3}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{a} + \mathbf{3}\boldsymbol{\sigma}$ (pravilo 3σ)

<u>Stabilnost normalne razdiobe:</u> $\mathbf{X_1} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a_1}, \boldsymbol{\sigma}_1^2), \mathbf{X_2} \sim \mathcal{N}(\mathbf{a_2}, \boldsymbol{\sigma}_2^2)$

$$\mathbf{s_1X_1} + \mathbf{s_2X_2} \sim \mathcal{N}(\mathbf{s_1a_1} + \mathbf{s_2a_2},\ \mathbf{s}_1^2\boldsymbol{\sigma}_1^2 + \mathbf{s}_2^2\boldsymbol{\sigma}_2^2)$$

<u>Aproksimacija binomne razdiobe normalnom:</u>

Varijabla binomne razdiobe za veliki n nalikuje na funkciju gustoće normalne varijable.

Neka je X ~ $\mathcal{B}$(n,p) onda je Y~ $\mathcal{N}$ (np, npq)

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{m}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{m}) = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2npq}}}\ \mathbf{exp}\ (-\frac{(\mathbf{m - np})^2}{\mathbf{2npq}})$$

ZADACI:

§6. Zadatci za vježbu

1. Odredi očekivanje i disperziju slučajne varijable zadane gustoćom razdiobe
$$f(x) = 10e^{-10x}, \quad x > 0.$$

2. Duljina X ispravnog rada nekog uređaja je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Ako je poznato da će s vjerojatnošću 0.4 uređaj raditi ispravno tijekom jedne godine, kolika je vjerojatnost da će od 50 takvih uređaja njih barem 40 ispravno raditi tijekom prvih šest mjeseci?

3. Slučajna varijabla X zadana je gustoćom razdiobe
$$f(x) = \tfrac{1}{3}\, e^{-x/3}, \quad x > 0.$$
Izračunaj vjerojatnost događaja
$$A = (X > 3),$$
$$B = (X > 6 \mid X > 3),$$
$$C = (X > t+3 \mid X > t).$$

4. Vrijeme ispravnog rada sklopa A u nekom uređaju je slučajna varijabla X s eksponencijalnom razdiobom i očekivanjem $E(X) = 6$ mjeseci. Ako se sklop A pokvari, u rad se uključuje rezervni sklop B s istim karakteristikama. Kolika je vjerojatnost da će uređaj ispravno raditi tijekom jedne godine?

5. Vrijeme (u danima) ispravnog rada nekog stroja je eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda = \frac{1}{200}$. Nakon godinu dana ispravnog rada, stroj se servisira (bez obzira na ispravan rad). Izračunaj očekivano vrijeme rada stroja do servisiranja.

6. Neka X ima eksponencijalnu razdiobu $E(\lambda)$. Izračunaj $E(X^k)$.

7. Neka je X slučajna varijabla: vrijeme ispravnog rada nekog uređaja. Pretpostavimo da je uvjetna vjerojatnost da će uređaj prestati s radom unutar kratkog vremenskog intervala $(x, x + \Delta x)$, ako je poznato da je ispravno radio do trenutka x, jednaka
$$P(X < x + \Delta x \mid X > x) = \lambda(x)\Delta x + r,$$
$$\frac{r}{\Delta x} \to 0 \quad \text{kad} \quad \Delta x \to 0.$$
Pokaži da funkcija razdiobe varijable X glasi
$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x \lambda(u)du\right).$$

8. Ako je u prethodnom zadatku $\lambda(x) = \lambda$ (konstanta, nepromjenjiva u vremenu), dokaži da X ima eksponencijalnu razdiobu. Često se vrijeme ispravnog rada elektroničkih uređaja ravna po **Weibullovoj** razdiobi, kod koje je $\lambda(x) = C\alpha x^{\alpha-1}$, $(\alpha < 1)$. Odredi pripadnu funkciju razdiobe i gustoće.

9. Slučajna varijabla X ima Erlangovu distribuciju, s gustoćom
$$f(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}, \qquad x \geqslant 0,$$
a slučajna varijabla Y ima Poissonovu razdiobu
$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$
Pokaži da vrijedi $1 - F(\lambda) = G(n)$, gdje su F, G redom funkcije razdioba varijabli X i Y.

* * *

10. Odredi konstantu C tako da
$$f(x) = Ce^{-x^2+4x}, \; x \in \mathbf{R}$$
bude gustoća (normalne) razdiobe. Izračunaj očekivanje i disperziju te razdiobe.

11. Neka je X jedinična normalna slučajna varijabla. Odredi vjerojatnost sljedećih događaja

A. $0 < X < 1.42$;
B. $-0.73 \leqslant X < 0$;
C. $-1.73 < X < 2.01$;
D. $0.65 \leqslant X \leqslant 1.26$;
E. $-1.79 < X < -0.54$;
F. $X > 1.13$;
G. $|X| \leqslant 0.5$.

12. Neka je X jedinična normalna varijabla. Odredi broj t tako da bude

A. $P(0 < X < t) = 0.4236$,
B. $P(X < t) = 0.7967$,
C. $P(t < X < 2) = 0.1$.

13. Neka je X normalna varijabla s očekivanjem 8 i odstupanjem 4. Odredi

A. $P(5 < X < 10)$,
B. $P(10 < X < 15)$,
C. $P(X > 15)$,
D. $P(X \leqslant 5)$.

14. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(2, 4)$. Izračunaj uvjetnu vjerojatnost
$$P(-1 < X < 1 \mid 0 < X < 3).$$

15. Greška pri mjerenju je normalna varijabla s parametrima $a = 0$ i $\sigma = 30$ m. Odredi vjerojatnost da je greška po apsolutnoj vrijednosti manja od 42 m.

16. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu s očekivanjem $a = 3$, i vrijedi $P(X < 5) = 0.6915$. Izračunaj vjerojatnost događaja $\{-1 < X < 6\}$.

17. Slučajna varijabla X distribuirana je po normalnom zakonu $\mathcal{N}(4, \sigma^2)$. Odredi σ ako je poznato $P(2 < X < 6) = 0.8664$.

18. Neka je slučajna varijabla X distribuirana po normalnom zakonu $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ i neka su $0 < a < b$ zadani brojevi. Uz koje će odstupanje σ vjerojatnost događaja $(a < X < b)$ biti najveća?

19. Slučajna varijabla X distribuirana je po normalnom zakonu $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Odredi $E(|X - a|)$.

20. Slučajna varijabla Y zadana je formulom $Y = \sqrt{|X|}$. Odredi gustoću razdiobe varijable Y ako X ima jediničnu normalnu razdiobu.

21. Duljina nekih detalja distribuirana je po zakonu normalne razdiobe. Srednja vrijednost duljine je 50 cm, a 10% proizvoda ima duljinu veću od 52 cm. Odredi simetrični interval oko srednje vrijednosti unutar kojeg se s vjerojatnošću 99% nalaze duljine tih detalja.

22. Slučajna varijabla X ima normalnu razdiobu $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Odredi gustoću i očekivanje slučajne varijable $Y = (X - a)^2$.

23. Težina nekog proizvoda ravna se po normalnoj razdiobi. Srednja vrijednost je $1000\,\text{p}$, a 10% proizvoda ima težinu veću od $1020\,\text{p}$. Odredi simetrični interval oko srednje vrijednosti unutar kojeg se s vjerojatnošću 99% nalazi težina tog proizvoda?

* * *

24. Težina serijski rađenog građevinskog elementa slučajna je varijabla podvrgnuta normalnoj razdiobi s parametrima $a = 0.5$ tona, $\sigma = 0.01$ tona. Kolika je vjerojatnost da težina 5 takvih elemenata premaši 2.55 tona?

25. U paket stavljamo 3 proizvoda tipa A i 2 proizvoda tipa B. Ako je težina proizvoda A normalna varijabla

$$X \sim \mathcal{N}(a_X = 200p, \sigma_X = 10p),$$

a težina proizvoda B također normalna varijabla

$$Y \sim \mathcal{N}(a_Y = 100p, \sigma_Y = 20p),$$

kolika je vjerojatnost da težina paketa bude veća od $750\,\text{p}$?

26. Slučajne varijable X_1, X_2, X_3 su međusobno nezavisne, s normalnim razdiobama $\mathcal{N}(0,1)$, $\mathcal{N}(1,1)$, $\mathcal{N}(2,4)$ redom. Izračunaj vjerojatnost događaja $(X_1 < X_3 - X_2)$.

27. Međusobno nezavisne slučajne varijable X, Y, Z podvrgavaju se normalnim radiobama, redom $X \sim \mathcal{N}(1,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(4,4)$, $Z \sim \mathcal{N}(9,9)$. Izračunaj vjerojatnost događaja $(X \leqslant 3Y - 2Z)$.

28. Nezavisne slučajne varijable X i Y podvrgavaju se normalnim razdiobama sa sredinama $a_X = 2$, $a_Y = 3$ te disperzijom $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. Odredi σ^2 ako događaj $(X > Y)$ ima vjerojatnost 40%.

29. Nezavisne slučajne varijable X i Y imaju normalne razdiobe s parametrima $a_X = 1$, $a_Y = 3$ i nepoznatim σ_X, σ_Y. Ako vrijedi

$$P(0 < X < 1) = P(2 < Y < 4) = 0.4,$$

kolika je vjerojatnost događaja $(2 < X + Y < 6)$?

30. Neka su X_1 i X_2 međusobno nezavisne slučajne varijable s normalnim distribucijama: $X_1 \sim \mathcal{N}(5,4)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(4,9)$, nadalje, neka je $Z = 2X_1 + X_2$, $W = X_1 + 2X_2$. Izračunaj vjerojatnost događaja $(Z > W)$.

31. Težina proizvoda A je normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu_A = 3$, $\sigma_A = 0.7$, a težina proizvoda B normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu_B = 4$, $\sigma_B = 0.2$. Ako na prvi krak vage stavimo 6 proizvoda tipa A, a na drugi krak iste vage 5 proizvoda tipa B, kolika je vjerojatnost da će drugi krak pretegnuti?

* * *

32. Nađi vjerojatnost da se broj devetki među 10 000 na sreću odabranih znamenki nalazi između 940 i 1060.

33. Kocka je bačena 1200 puta, pritom se broj 1 pojavio 140 puta. Može li se prihvatiti hipoteza o ispravnosti ove kocke?

34. Slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe $F(x) = x^2$, $0 < x < 1$. Izračunaj vjerojatnost da u 50 nezavisnih pokusa varijabla X poprimi vrijednost između 0.25 i 0.5 barem 10 puta.

35. Vjerojatnost rođenja dječaka približno je jednaka 0.515. Kolika je vjerojatnost da među 100 novorođene djece bude od 50 do 55 dječaka?

36. Koliko puta treba baciti kocku da vjerojatnost događaja

$$\left(\left| \frac{m}{n} - \frac{1}{6} \right| \leqslant 0.01 \right)$$

bude barem 0.5, gdje je m broj pojavljivanja jedinice u n bacanja.

37. Neprekidna slučajna varijabla X zadana je funkcijom razdiobe

$$F(x) = ax^2, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 3.$$

Odredi konstantu a. Izračunaj vjerojatnost da u 100 nezavisnih pokusa slučajna varijabla X poprimi vrijednost između 1 i 2 barem 30 puta.

38. Neki stroj proizvodi $60\,\%$ proizvoda prve kvalitete. Izračunaj vjerojatnost da među 75 proizvoda barem 40 bude prve kvalitete.

39. Vjerojatnost realizacije događaja A u jednom pokusu je 0.1. Koliko nezavisnih pokusa moramo učiniti da bi se s vjerojatnošću 0.8 događaj A realizirao barem 5 puta?

40. Neki stroj proizvodi 40% proizvoda prve kvalitete. Koliko je proizvoda u svakoj seriji potrebno proizvesti, da bi s vjerojatnošću 70% u svakoj seriji imali barem 30 proizvoda prve kvalitete?

41. Bacamo par kocaka. Neka je $A = \{$ zbroj brojeva na obje kocke je barem 10 $\}$. Izračunaj $P(A)$. Odredi potreban broj bacanja tako da vjerojatnost pojavljivanja događaja A barem jednom, bude veća od 0.8. Izračunaj očekivanje broja bacanja do pojavljivanja događaja A.

42. Vjerojatnost pojavljivanja događaja A u svakom od nezavisnih pokusa je 0.8. Koliko pokusa treba napraviti da bi s vjerojatnošću 0.9 broj pojavljivanja događaja A bio veći od 75?

43. Točka se bira na sreću unutar kvadrata stranice 1. Kolika je vjerojatnost da će od 50 izabranih točaka barem 40 pasti unutar kruga upisanog tom kvadratu?

* * *

44. Slučajna varijabla X distribuirana je po **Laplaceovom** zakonu ako je njezina gustoća

$$f(x) = \frac{1}{2\alpha} \exp\left(-\frac{|x-a|}{\alpha}\right)$$

gdje je $a \in \mathbf{R}$ proizvoljan te $\alpha > 0$. Odredi očekivanje i disperziju od X.

45. Slučajna varijabla X ima **lognormalnu** razdiobu ako je njezina gustoća

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}\right), \ x > 0$$

gdje je $a \in \mathbf{R}$ proizvoljan te $\sigma > 0$. (X opisuje razdiobu veličine čestica pri mrvljenju, npr. veličinu čestica zrnca pijeska, također i distribuciju veličine plaća.) Odredi očekivanje i disperziju od X.

46. Slučajna varijabla X ima **Rayleighovu** razdiobu, s gustoćom

$$f(x) = 2h^2 x e^{-h^2x^2}, \quad x > 0.$$

Odredi očekivanje i disperziju od X.

47. Slučajna varijabla X ima **gama** razdiobu s parametrima (α, β), ako je njezina gustoća

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \ x > 0.$$

Izračunaj a) $E(X)$, b) $D(X)$, c) $E(X^n)$.

48. Izračunaj mod, očekivanje i disperziju slučajne varijable s gustoćom

$$f(x) = \frac{\gamma^{m-1}}{(m-2)!} x^{-m} e^{-\gamma/x}, \ x > 0.$$

(**Piersonov** zakon prvog tipa.)