

**PONOVLJENI 2. MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I
STATISTIKE**

15. 06. 2007.

1. **(3 boda)** Gustoća razdiobe slučajne varijable X iznosi

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Izračunaj vjerojatnost da od tri realizacije varijable X , točno dvije padnu unutar intervala $(0, \frac{\pi}{4})$.

Rješenje: $P = 3\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2 \frac{3\pi-2}{4\pi}$

2. **(3 boda)** Zadan je trokut sa osnovicom duljine a i visinom duljine v na tu osnovicu. Točka se bira na sreću unutar trokuta. Za vrijednost slučajne varijable X uzimamo udaljenost točke do osnovice. Izračunaj očekivanje varijable X .

3. **Rješenje:** $E(X) = \frac{v}{3}$.

(3 boda) Ako slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu, dokažite da je $P(X < x + t | X > t) = P(X < x)$, $\forall x, t > 0$.

Rješenje: vidi predavanja

4. **(4 boda)**

(a) Izvedite karakterističnu funkciju jedinične normalne razdiobe.

(b) Izvedite pravilo 3σ za normalnu razdiobu.

Rješenje: vidi predavanja

5. **(3 boda)** Slučajni vektor (X, Y) ima gustoću $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2 (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 1)}$.

(a) Izračunajte funkciju razdiobe $F(x, y)$ slučajnog vektora (X, Y) .

(b) Dokažite da su slučajne varijable X i Y nezavisne.

Rješenje: a) $F(x, y) = (\frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2})(\frac{1}{\pi} \arctg y + \frac{1}{2})$

6. (4 boda) Slučajni vektor (X, Y) zadan je gustoćom $f(x, y) = Cxy$, na području $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1\}$.

- (a) Odredite konstantu C ,
- (b) Izračunajte marginalnu gustoću $f_X(x)$,
- (c) Izračunajte $P(X > Y)$.

Rješenje: a) $C = 24$, b) $f_X(x) = 12x(1 - x^2)$, $0 \leq x \leq 1$, c) $\frac{1}{2}$.

7. (5 bodova)

- (a) Neka je $f(x, y)$ gustoća slučajnog vektora (X, Y) . Odredi gustoću slučajne varijable $Z = 3X - \frac{1}{2}Y$.
- (b) Neka je $f(x, y) = x^2 + Cy$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Odredi konstantu C . Odredi gustoću razdiobe slučajne varijable $Z = 3X - \frac{1}{2}Y$.

Rješenje: a) $g_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 2f(x, 6x - 2z)dx$, b) integrirati izraz pod a) za slučajeve $z \in [-1/2, 0]$, $z \in [0, 5/2]$, $z \in [5/2, 3]$.