3 MASS:

2DZ / 2 ZAD.

Kuglice su numerirane brojevima od $1, \dots, n$

Kuglice su ... slučajna varijabla X je najveći broj od te 3 kuglice

$\Rightarrow$ Odrediti razdiobu varijable X

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \dots & m \\ \frac{1}{\binom{m}{3}} & \frac{\binom{3}{2}}{\binom{m}{3}} & \frac{\binom{4}{2}}{\binom{m}{3}} & \dots & \frac{\binom{m-1}{2}}{\binom{m}{3}} \end{pmatrix}$$

dakle, u prvoj kombinaciji X nam najmanje može biti 3, dakle to je jedna kombinacija

kada je 4 najveći broj, dakle za preostale 2 kuglice imamo mogućnosti $(1,2,3) \Rightarrow$ imamo mogućnosti $(1,2,3) \Rightarrow$ pa od ta 3 broja odabiremo 2, pa imamo $\binom{3}{2}$ povoljnih mogućnosti, i tako za svaki sljedeći broj do n

$$P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad k = 3, 4, 5, \dots, n$$

1MI/07

Simonica se igra s novčićima dok 2 puta zaredom ne padne isti ishod. Izračunaj očekivani broj bacanja?

$X \sim$ broj bacanja

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ \frac{2}{2^2} & \frac{2}{2^3} & \frac{2}{2^4} & & \frac{2}{2^n} \end{pmatrix}$$

PGG, GPP $>$ 2 mogućnosti

GPGG, PGPP $>$ 2

dakle, može nam se dogoditi da odmah u prva 2 bacanja dobijemo 2 ista novčića, pa imamo mogućnosti:

PP, GG $>$ 2 mogućnosti

oduzimamo prvi član jer nama suma ide od 2, a derivacijom smo došli do sume koja ide od 1

$$E(X) = \sum_i x_i p_i = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} - 1 = 3$$

$\Rightarrow$ da bi dobili željenu sumu krećemo od sume geom. reda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Big|\,'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Big| \cdot x$$

$$\sum n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$ $\Rightarrow$ suma i dalje ide od 1, budući da prvi čl. nije konstanta

$D(x) = E(x^2) - E(x)^2$ => DISPERZIJA

$= \sum x_i^2 p_i - 3^2 =$

$= \sum_{n=2}^{\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 9$

$= \frac{1 + \frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3} - 1 - 9$

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \sqrt{2}$ => devijacija

2D-slučajni vektor (X, Y)

1.MI-07

$X \backslash Y$	0	1	
-1	$1/12$	$1/12$	$\frac{1}{6}$
	$1/12$	$1/4$	$\frac{1}{3}$
0	$1/6$	$1/3$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

a) MARGINALNE RAZDIOBE

$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

b) Da li su X i Y zavisni / nezavisni?

Ako su X i Y nezavisni onda vrijedi da je

$p_{ij} = p_i \cdot p_j, \ \forall i,j$ => dakle, svaka vjerojatnost u tablici na mjestu ij se dobije kao umnožak marginalnih vjerojatnosti, pa konkretno u ovom primjeru bi za $x=-1$, $y=1$, $\frac{1}{12}$ trebala se dobit kao umnožak $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \neq \frac{1}{12}$, pa su X i Y nezavisne!

c) $U = X^2$

$U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ $E(U) = \frac{2}{3}$

d) $V = X^2 + Y^2$, $W = X \cdot Y$

$V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$

$W \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

d) $(V, W) = ?$

$V \backslash W$	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{12}$	0
1	0	$\frac{1}{2}$	0
2	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{3}$

V ne može biti 2, pa je vjer. tu 0, vjer. za $V=1$ dobijemo kao zbroj vjer. od slučaja 2, 3, 4, dakle $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, i tako za $w=1$

=> sad gledamo, W će biti -1 za $x=-1$ i $y=1$, a za te x i y, V će biti 2, dakle V ne može biti 0 i 1 pa su tamo vjerojatnosti direktno 0, e sad vjer. za 2 dobijemo tako da pogledamo u prvotnu tablicu od X-a i Y-a i vidimo kolika je vjer. za $x=-1$ i $y=1$, i to je $\frac{1}{12}$, isto tako

$W = 0$ za:

1) $x=0$, $y=0$ → $V=0$
2) $x=1$, $y=0$ → $V=1$
3) $x=-1$, $y=0$ → $V=1$
4) $x=0$, $y=1$ → $V=1$

⇒ da su V i W nezavisni onda bi se svaka vjerojatnost u tablici mogla dobiti kao umnožak marginalnih (isto kao u slučaju kad smo provjeravali da li su X i Y nezavisni)

Zad. Bacamo 2 kocke. X je apsolutna razlika na kockama, a Y je manji od 2 broja ako su različiti, a 0 ako su isti. Odredi razdiobu slučajnih vektora X i Y te koeficijent korelacije!

⇒ tako ukupno ima 36 elementarnih događaja, radi kraćeg zapisa ću pisati $p=\frac{1}{36}$

X\Y	0	1	2	3	4	5	
0	6p	0	0	0	0	0	6p
1	0	2p	2p	2p	2p	2p	10p
2	0	2p	2p	2p	2p	0	8p
3	0	2p	2p	2p	0	0	6p
4	0	2p	2p	0	0	0	4p
5	0	2p	0	0	0	0	2p
	6p	10p	8p	6p	4p	2p	

⇒ dakle da bi bio X=0, imamo mogućnosti 11, 22, 33, 44, 55, 66, a u tim komb. je i Y=0, pa je mogućih kombinacija 6, da je X=1 a Y=0 nema mogućih kombinacija isto kao i za X=2, 3, 4, 5, da je X=1, a Y=1 kombinacije su: 21 i 12 dakle 2 povoljne komb pa je vjer. 2p tj. $\frac{2}{36}$ itd. za svaki

b) $r(X,Y)=?$

$$r(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{0,109}{2,025}=0,053$$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=3,889-3,780=0,109$

$E(X)=E(Y)=\frac{70}{36}$, $D(X)=D(Y)=2,052$

$$X\cdot Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 8 & 9 \\ \frac{6}{36} & \frac{2}{36} & \frac{4}{36} & \frac{4}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{4}{36} & \frac{4}{36} & \frac{2}{36} \end{pmatrix}$$

$E(XY)=3,889$