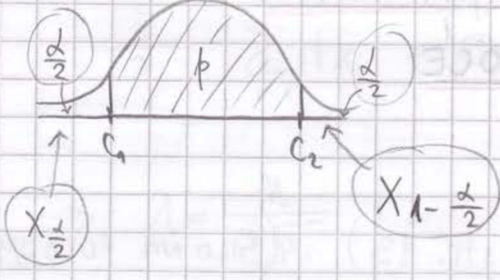
11. INTERVALNE PROCJENE

11.1. UVOD

def.

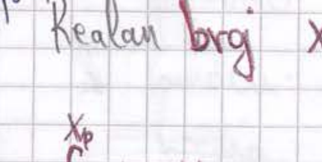
Interval $[c_1, c_2]$ za koji vrijedi $P(c_1 < X < c_2) = p$ naziva se interval **POVJERENJA (POUZDANOSTI)** reda p.



def. Veličina $\alpha = 1 - p$ se naziva **NIVO ZNAČAJNOSTI (SIGNIFIKANTNO.**

def. Realan **broj** X_p za koji vrijedi da je $F(X_p) = p$, tj.

$$\int_{-\infty}^{X_p} f(t)\,dt = p$$ se naziva **KVANTIL** reda p.



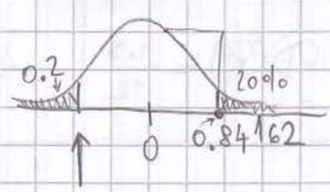
BROJ X_p = KVANTIL

Burek says:

21-11-3.) a) Definirajte kvantil. "JA MISLIM DA SVAKE GODINE TO DOĐE U ISPITU, TREĆA GODINA ZAREDOM ☺"

(PROŠLE NIJE, TAMAN OVE.... ☺)

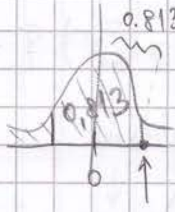
b) Koristeći tablicu 4, izračunajte kvantil normalne razdiobe za $p = 0.2$.



→ ZBOG SIMETRIJE GLEDAMO ZA 0.8 !

!! ⇒ -0.84162

c) Koristeći tablicu 1 izračunajte kvantil za $p = 0.813$.



!! $0.313 \cdot 2 = 0.626$ → NAĆI U TABLICI (UNUTRA) ⇒ 0.889

11.2. INTERVALNE PROCJENE ZA PARAMETRE NORMALNE RAZDIOBE

$N(a, \sigma^2)$	drugi parametar	
	poznat	nepoznat
za očekivanje	str. 27	str. 34
za disperziju	str. 30	str. 35

FORMULE IZ SLUŽBENOG PODSJETNIKA

→ za objašnjenje upiši PDF II

⟿ kratko objašnjenje formula za očekivanje:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P(c_1' < \bar{x} < c_2') = p$$

$$P\left(c_1 < \frac{\bar{x} - a}{\sigma \sqrt{n}} < c_2\right) = p$$

kvantili normalne razdiobe

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

21-09-2.) Iz neke populacije smo dobili sljedeći uzorak. (UVIJEK NA ISPITU DOBIJEMO TABLICU).

veličina → x_j	20	22	24	26	28	30	32
br. pojavljivanja → n_j	3	3	8	7	3	2	1

a) Odredite točkaste procjene za očekivanje i disperziju.

SLUŽBENI PODSJETNIK!

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3 \cdot 20 + 3 \cdot 22 + \dots + 1 \cdot 32}{27} \qquad n = \sum n_j = 27$$

$$\overline{X} = 25$$

IMAMO SVE U KALKU, SAMO TABLICU UPIŠEMO!

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 - n \cdot \overline{X}^2}{n-1} =$$

$$= \frac{3 \cdot 20^2 + 3 \cdot 22^2 + \dots + 1 \cdot 32^2 - 27 \cdot 25^2}{27-1} = 8.846 \rightarrow S^2$$

b) Odredi 95-postotni interval za očekivanje i 95-postotni dvostrani interval za disperziju.

dvostrani

SIGMA NIJE BILA POZNATA (ZATO SMO JE RAČUNALI)

FORMULA:

$$P\left(\overline{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \leq a \leq \overline{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

TIPIČNA GREŠKA!

PAZI!

KORJENOVATI!

$$S = \sqrt{8.846}$$

GORE IMALI $S^2 = 8.846$

$t_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}$ → studentova razdioba → tablica 3

$t_{26,\,1-\frac{0.05}{2}} = 2.056$ $\qquad \alpha = 1-p = 1-0.95 = 0.05$

⇝ što je kvantil manji, interval je uži i ja sam sigurniji!

UVRSTITI SVE, IZRAČUNATI:

$P(23.823 < a < 26.177) = 0.95$ → konačno rješenje

⇒ ZA DISPERZIJU, UZ NEPOZNATO OČEKIVANJE: (IAKO SMO GA IZRAČUNALI GORE, KORISTIMO U FORMULI)

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\underbrace{\chi^2_{n-1,\,1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{"H"}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\,\frac{\alpha}{2}}}\right) = 0.95$$

$\chi^2_{26,\,1-\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{26,\,0.975} = 41.923$

U TABLICI

$\chi^2_{26,\,0.025} = 13.844$

$\Rightarrow \quad P(5.486 < \sigma^2 < 16.613) = 0.95$

Z1-12-5.) Iz populacije sa $\sigma = 0.3$ dobili smo 16.2, 16.1, 16, 16.4, 16.5, 16.3,
16.2, 16.4, 16.2, 16.3.

Za koji nivo pouzdanosti će duljina intervala za očekivanje biti 0.3123

$\bar{X} = 16.26$, $n = 10$, $\sigma = 0.3$ (POZNATA)

$p = ?$

$$\check{S}IRINA = 2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.3123$$

$$\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow \text{TABLICA 4.}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.1$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 0.9}$$

11.3. INTERVALNE PROCJENE ZA VJEROJATNOST (PROPOZICIJU)

123. $\hat{p} = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH}}{\text{UKUPAN BROJ}} = \frac{m}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim \frac{1}{n} B(n, p) \approx \frac{1}{n} N(np, npq)$

↳ točkasta procjena

$$N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$$

$$P(c_1' < \hat{p} < c_2') = p$$

$$P\left(c_1 < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{(1-p)p}{n}}} < \underbrace{c_2}_{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = p$$

KNJIŽICA

FORMULE ⟹

$$\boxed{p_{1,2} = \hat{p} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

ZI-08-3.) Na izlaznoj anketi od 200 glasača njih 112 je glasalo za kandidata X.

a) Odredite 95-postotni interval za kandidata X.

$\alpha = 0.05$, $n = 200$, $\hat{p} = \frac{112}{200} = 0.56$

$u_{0.975} = 1.96$

$$p_{1,2} = 0.56 \pm \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{u_{0.975}} \sqrt{\frac{0.56(1-0.56)}{200}} = 0.56 \pm 0.069$$

$$\Rightarrow P(0,491 < p < 0.629) = 95\ \%$$

b) S kojom vjerojatnosti on može tvrditi da će sigurno biti izabran?

$$\underset{0.56}{\hat{p}} - \underset{?}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_{=200}}} > 0.5$$

$$\dots \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} < 1.7094$$

NEMA U TABLICI

PRVI VEĆI ILI PRVI MANJI? MANJI (<) PAZITI NA RAČUN ZATO

$$1-\frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$$\alpha = 0.1$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 90\%}$$ ⟶ ovo se točno može izračunati TABLICOM 1. (zavisi kako je zadano.

c) Koliko velik uzorak mora ispitati da bi bio siguran u svoj izbor uz nivo značajnosti 5%?

$n = ?$ $\alpha = 5\% \rightarrow 95\%$

$$\underset{0.56}{\hat{p}} - \overbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{1.96} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\underset{?}{n}}} > 0.5$$

→ BROJ!

TOČKASTA PROCJENA, NE OVISI O n!

NA TEMELJU TOG UZORKA ŽELIMO ZAKLJUČITI NEŠTO DRUGO!

$$\dots \Rightarrow n \geq 262.93$$

$$\boxed{n = 263}$$ //

"JOŠ NIKAD U 7 GODINA NIJE BILO FORMULE ZA PARAMETAR POISSONA, JEDINO NA DEKANSKOM.... MOGLO BI DOĆI OVE GODINE."

Zad.) Broj poziva koju zaprima neka centrala je Poissonova razdioba. U prosjeku je bilo 5.8 poziva po minuti tijekom jednog sata. Odredite 95-postotni interval za λ.

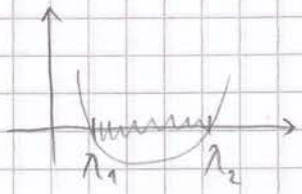
α najčešće 10%, 5% i 1%

$$P\left(|\underset{5.8}{\bar{x}} - \lambda| < \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{1.96}\sqrt{\frac{\lambda}{\underset{60}{n}}}\right) = 0.95$$

$\underline{\underline{60}} \rightarrow$ JEDAN SAT!

$$(5.8-\lambda)^2 < \frac{1.96^2}{60}\cdot\lambda$$

$$\lambda^2 - 11.664\lambda + 33.64 < 0$$



$\rightarrow \lambda_1 = 5.22$

$\lambda_2 = 6.44$

$$\boxed{P(5.22 < \lambda < 6.44) = 0.95}$$