~ 3. MASS - BURIĆ ~

Diskretne slučajne varijable

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \qquad \sum p_i = 1$$

$E(X) = \sum x_i \cdot p_i$ očekivanje → očekivana vrijednost koja će se dogoditi

$D(X) = \sum x_i^2 \cdot p_i - (E(X))^2$ → disperzija

$\sigma = \sqrt{D(X)}$ → standardna devijacija

$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$ → svojstva koje dobro je znati!

$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ → vrijedi samo ako su nezavisne

$D(X+Y) \overset{nez.}{=} D(X) + D(Y)$ → tada je $r(X,Y) = 0$

$D(\alpha X) = \alpha^2 D(X)$

Zad 1| U urni se nalazi n kuglica koje su označene brojevima 1 do n. Izvlačimo 3 kuglice i X - poprima najv. vrijednost od 3 izvučene. Odredi f-ju razdiobe

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ \frac{1}{\binom{n}{3}} & \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{3}} & \frac{\binom{4}{2}}{\binom{n}{3}} & \dots & \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} \end{pmatrix} \qquad P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}} \quad k = 3, \dots, n$$

→ službeno matem. rješenje

(2.) Bacamo 3 kocke te zatim na kockama kojima nije palo 6 bacamo ponovno. Koliki je očekivani broj 6-ica? (7zad)

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \underbrace{\left(\tfrac{5}{6}\right)^3}_{1.b} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{5}{6}\right)^3}_{2.b} & \underbrace{\binom{3}{1}\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^2}_{1.b} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{5}{6}\right)^2}_{2.b} + \underbrace{\left(\tfrac{5}{6}\right)^3}_{1.b} \underbrace{\binom{3}{1}\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^2}_{2.b} & \underbrace{\binom{3}{2}\left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \tfrac{5}{6}}_{1.b} \cdot \underbrace{\tfrac{5}{6}}_{2.b} + \underbrace{\binom{3}{1}\tfrac{1}{6}\left(\tfrac{5}{6}\right)^2}_{1.b} \cdot \underbrace{\binom{2}{1}\tfrac{1}{6}\tfrac{5}{6}}_{2.b} + \end{pmatrix}$$

(nulle dobivamo ostalima) (2 od 3 su pale 6) (ne smije biti 6) (ljepše)

$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \binom{3}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \binom{2}{1}\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} + \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^3}_{1.b} \cdot \underbrace{\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}}_{2.b}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 + \underbrace{\binom{3}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2}_{1.b}\left(\frac{1}{6}\right)^2 + \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

→ uvrstiti sve ovo i izračunati $E(X)$

③ U bubnju se nalazi 4 bijele i 1 crvena kuglica. Izvlačimo jednu po jednu. X - u kojem izvlačenju smo izvukli crvenu. Izračunaj njenu razdiobu, E(x) i D(x)

a) bez vraćanja u bubanj

b) sa vraćanjem u bubanj

a)

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4} & \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} & \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} & \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{5}$ (ne smijem 1. put izvući crvenu), $= \frac{1}{5}$, $= \frac{1}{5}$, $= \frac{1}{5}$

$$E(X) = \frac{15}{5} = 3$$ → očekivani ishod jest da ćemo kuglicu izvući u 3. bacanju

$$D(X) = \frac{55}{5} - 3^2 = 11 - 9 = 2$$ → disperzija je manja što su vjerojatnost zgusnutije

b)

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} & \left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5} & & \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5} & \end{pmatrix}$$

→ beskonačna varijabla (poslije n obavezno staviti .... jer se događaju događaji!)

⟶ n-1 ne smije biti crvena

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2} = 5$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Big|'$$

→ manipulacije beskonačne sume (deriviranje, integriranje te množ. · x)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Big| \cdot x \quad \to \sum_{n=1} n \cdot x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \Big|'$$

1. član je konst. pa se gubi

$$\sum_{n=1} n^2 \cdot x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$D(x) = \sum n^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{5} - 5^2 =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1+\frac{4}{5}}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^3} - 25 = 20$$

→ paziti dobro što traže u zadatku (mogu tražiti devijaciju)

Diskretni slučajni vektori (2D)

(X, Y)

(4) Bacamo 2 kocke. Neka je X jednaka apsolutnoj razlici ta dva broja, a sl. var. Y je manji od ta 2 broja, ako su različiti, a 0 ako su jednaki.

Odredi razdiobu vektora (X, Y)

$X = |k_1 - k_2|$

$Y = \begin{cases} \min\{k_1, k_2\}, & k_1 \neq k_2 \\ 0, & k_1 = k_2 \end{cases}$

a) razdioba od (X, Y)

b) rubne marginalne razdiobe
↳ zbroj po retcima i stupcima

X \ Y	0	1	2	3	4	5	p_j
0	$\frac{6}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$
1	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{10}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{8}{36}$
3	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{6}{36}$
4	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{4}{36}$
5	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
p_i	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

marginalna razdioba od Y

c) (ne) zavisnost?

$p_{ij} = p_i \cdot p_j \quad \forall i, j$ — nezavisnost

X, Y su zavisni jer npr.

$\frac{6}{36} \neq \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36}$

d) koef. korelacije $r(X, Y)$

$$r(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)\,D(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)\cdot E(Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}$$

$E(X) = \frac{70}{36}$

$E(Y) = \frac{70}{36}$

$D(X) = D(Y) = 2.052$

$E(X \cdot Y) = 3.889 =$

↳ $0 \cdot 0 \cdot \frac{6}{36} + 0 \cdot 1 \cdot 0 + \dots$

$$E(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}$$

$r(X, Y) = 905$