PRVI MEĐUISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE
07.04.2010.

1. (**4 boda**)
Špil sadrži 52 karte od kojih svaka ima neku od 13 jačina: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A, i neku od 4 boje: $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$. Wyatt Earp igra poker u saloonu s četvoricom revolveraša. Svaki igrač je na sreću dobio 5 karata iz špila s 52 karte. Kolika je vjerojatnost da je Wyatt Earp dobio:

a) FLUSH (pet karata iste boje);

b) ROYAL FLUSH (skala od pet karata iste boje od desetke do asa, tj. 10, J, Q, K, A iste boje);

c) FULL HOUSE (tri karte iste jačine i još dvije karte neke druge jačine);

d) TWO PAIR (dvije karte jedne jačine, još dvije druge jačine, posljednja karta treće jačine, tj. dva različita para koja nisu full house).

2. (**4 boda**)
Unutar dužine duljine 5 cm izabrane su na sreću dvije točke. Izračunajte vjerojatnost da su sve tri tako dobivene dužine dulje od 1 cm.

3. (**4 boda**)
Utvrđeno je da:
34% ljudi ima krvnu grupu 0,
37% ljudi krvnu grupu A,
21% ljudi krvnu grupu B
i 8% krvnu grupu AB.
Kod transfuzije, osoba krvne grupe AB može primiti bilo koju grupu, osoba krvne grupe A ili B može primiti svoju krvnu grupu i krvnu grupu 0, a osoba krvne grupe 0 ne može ništa primiti osim svoje krvne grupe 0. (Jedino u ovim slučajevima je transfuzija uspješna.)

a) Odredite vjerojatnost da slučajno odabrana osoba uspješno primi krv od slučajno odabrane osobe.

b) Ukoliko je osoba uspješno primila krv, kolika je vjerojatnost da ona ima krvnu grupu AB?

(molim okrenite)

4. (**5 bodova**)

a) Iz kutije u kojoj se nalaze 1 bijela i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem nakon svakog izvlačenja, sve dok ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu X definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za X i vjerojatnost $P(X \leq 15 \mid X > 10)$.

b) Iz iste kutije s 1 bijelom i 4 crvene kuglice izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem nakon svakog izvlačenja, sve dok drugi put ne izvučemo bijelu. Slučajnu varijablu Y definiramo kao broj izvlačenja. Izračunajte zakon razdiobe za Y i očekivanje $E(Y)$.

5. (4 boda)

Zadana je razdioba diskretnog slučajnog vektora (X, Y)

$X \diagdown Y$	0	1
-1	$1/4$	$1/6$
0	$1/6$	$1/8$
1	$1/8$	$1/6$

Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable i zašto? Izračunajte $P(X \geq 0 \mid Y = 1)$. Odredite razdiobu slučajnog vektora (Z, W), ako je $Z = X + Y$, $W = XY$.

6. (**4 boda**)

Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable, s Poissonovim zakonom $\mathcal{P}(\lambda_1)$, odnosno $\mathcal{P}(\lambda_2)$. Ukoliko je poznato da je njihov zbroj $X_1 + X_2$ poprimio vrijednost n, dokažite da je tada vrijednost od X_1 raspoređena po binomnom zakonu $\mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$.

Dozvoljena je upotreba kalkulatora. Ispit se piše 90 minuta.

Rješenja 1. međuspita iz Vjerojatnosti i statistike

07.04.2010.

1. (**4 boda**)

a) (1b) $p = \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = 0.00198$

b) (1b) $p = \frac{4}{\binom{52}{5}} = 0.00000154$

c) (1b) $p = \frac{13\binom{4}{3}12\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 0.00144$

d) (1b) $p = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}*11*4}{\binom{52}{5}} = 0.0475$

2. (**4 boda**)

$\Omega = \{(x,y) \in R^2 : x > 0, y > 0, x + y < 5\}$,

$S = \{(x,y) \in \Omega : x > 1, y > 1, x + y < 4\}$

$P(S) = \frac{m(s)}{m(\Omega)} = \frac{4}{25} = 0.16$

3. (**4 boda**)

hipoteze: H_1 =osoba koja prima krv ima krvnu grupu 0

H_2= krvna grupa A

H_3= krvna grupa B

H_4= krvna grupa AB

U=transfuzija je uspješna

$P(U) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)P(U|H_i) = 0.5738$,

$P(H_4|U) = \frac{P(H_4)P(U|H_4)}{P(U)} = 0.1394$

4. (**5 boda**)

a) (2b) geometrijska razdioba: $p_n = \frac{1}{5}(\frac{4}{5})^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$

$P(X \leq 15|X > 10) = P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - (\frac{4}{5})^5 = 0.6723$

b) (3b) $p_n = (n-1)(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^{n-2}$

$E(Y) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(\frac{1}{5})^2(\frac{4}{5})^{n-2} = \frac{1}{25}\frac{2}{(1-\frac{4}{5})^3} = 10$

5. (**4 boda**) X i Y nisu nezavisne (npr. $\frac{1}{4} \neq \frac{5}{12}\frac{13}{24}$)

$P(X \geq 0|Y = 1) = \frac{P(X=0,Y=1)}{P(Y=1)} + \frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{7}{11} = 0.63$

$Z = X + Y$, $W = XY$

Z \ W	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/6	1/6	0
1	0	1/4	0
2	0	0	1/6

6. (**4 boda**) $P(X_1 = k|X_1+X_2 = n) = \frac{P(X_1=k,X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)} = \binom{n}{k}(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})^k(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2})^{n-k}$