VJEROJATNOST I STATISTIKA

ZADACI ZA VJEŽBU

3. Diskretne slučajne varijable i vektori

FER, Zagreb

Marko NUFC

SADRŽAJ:

Zadaci za vježbu iz udžbenika Nevena Elezovića: Diskretna vjerojatnost
Cjelina 3 – Diskretne slučajne varijable i vektori

**** Prije rješavanja zadataka treba proći teoretsko gradivo ove cjeline ****

*****NAPOMENA*****

Zadaci KOJE treba rješavati su od 1.-13.zadatka, te od 19.-30.zadatka !!
Zadaci koji nedostaju: 3,19,20,21

Posebna zahvala LORD OF THE LIGHT na rješenjima nekih zadatka !

FORMULE:

3. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE I VEKTORI

Diskretna slučajna varijabla jest slučajna varijabla kojoj je skup vrijednosti konačan ili beskonačan prebrojiv.
Zakon razdiobe slučajne varijable X:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

Nezavisne slučajne varijable:
$P(X = x_k, Y = y_j) = P(X = x_k)\, P(Y = y_j)$

Nezavisnost niza slučajnih varijabli: $P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1)\, P(X_2 \in A_2) \dots P(X_n \in A_n)$

Dvodimenzionalne diskretne razdiobe:

X/Y	y_1	y_2	...	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	p_2
.	.				
.	.				
.	.				
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	...	q_m	1

Marginalne razdiobe varijabli X i Y:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \dots \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{pmatrix}$$

Uvjetna vjerojatnost: $P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i.\ Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}$

Uvjetna razdioba: $X \mid Y = x_i \sim \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots \\ \frac{p_{i1}}{p_i} & \frac{p_{i2}}{p_i} & \end{pmatrix}$

OČEKIVANJE:
Očekivanje slučajne varijable X: $\mathbf{E(X) = \sum_k x_k p_k}$ (označava se još kao i: $\bar{x}$ ili m_x)

Svojstva očekivanja: $\mathbf{E(sX + tY) = sE(X) + tE(Y)}$; X i Y nezavisne: $\mathbf{E(XY) = E(X)\, E(Y)}$

ISHODIŠNI I CENTRALNI MOMENTI SLUČAJNE VARIJABLE:
Ishodišni moment reda n: $E(X^n) = \sum_k x_k^n p_k$
Centralni moment reda m: $\mu_n = E[(X - m_X)^n] = \sum_k (X_k - m_X)^n p_k$

DISPERZIJA (rasipanje, varijacija):
Disperzija slučajne varijable X: $\mathbf{D(X) = E(X^2) - m_X^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_k x_k^2 p_k - (\sum_k x_k p_k)^2}$
Svojstva disperzije: $\mathbf{D(sX) = s^2 D(X)}$; X i Y nezavisne: $\mathbf{D(X + Y) = D(X) + D(Y)}$

STANDARDNA DEVIJACIJA:
Standardna devijacija (odstupanje) varijable X : $\boldsymbol{\sigma_X} = \sqrt{\mathbf{D(X)}}$

KOVARACIJSKI MOMENT. KOEFICIJENT KORELACIJE:
Kovaracijski moment: $\mathbf{cov(E,Y) = E[(X - m_X)(Y - m_Y)] = E(XY) - m_X m_Y}$
Koeficijent korelacije:

$$\mathbf{r(X,Y) = \frac{cov(E,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}}$$

FORMULE: (2.dio)

Disperzija zbroja slučajnih varijabli $S = X_1 + \ldots + X_n$:

$$\mathbf{D(S) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \ 2\sum_{i<j} cov(X_i, X_j)}$$

Svojstva koeficijenta korelacije:

$$\mathbf{|r(X,Y)| \leq 1}$$

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA;

Karakteristična funkcija slučajne varijable X definira se formulom:

$$\boldsymbol{\vartheta_X(t)} = \mathbf{E(e^{itX})}, \qquad \text{dakle, } \boldsymbol{\vartheta_X(t)} = \mathbf{\sum_k p_k e^{itX}}$$

ZADACI:

§3. Zadatci za vježbu

1. U urni se nalazi n kuglica, od kojih je samo jedna bijela. Izvlačimo na sreću jednu po jednu kuglicu iz urne (bez vraćanja). Neka X označava pokušaj u kojem je izvučena bijela kuglica. Odredi razdiobu od X.

2. Iz skupa $(1, 2, \dots, n)$ izvlačimo na sreću (odjednom) tri broja. Neka slučajna varijabla X poprima vrijednost najvećeg od ta tri broja. Odredi razdiobu od X.

3. Urna sadrži N kuglica, označenih brojevima od 1 do N. Na sreću biramo n kuglica, s vraćanjima. Neka je X najveći broj koji je pri tom izvučen.
Izračunaj razdiobu varijable X.

4. Zadan je zakon razdiobe diskretne slučajne varijable

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Izračunaj $E(X)$ i $D(X)$.

5. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti $x = (n-1)^2$, $n \in \mathbf{N}$, s vjerojatnostima

$$P(X = (n-1)^2) = \frac{2^{-n}}{n \ln 2}.$$

Izračunaj očekivanje varijable X.

6. Igrač baca jednu kocku. Ako se pojavi broj 6 ima pravo bacati ponovo, ali samo još jedanput. Slučajna varijabla X jednaka je rezultatu prvog bacanja, odnosno zbroju dvaju bacanja ukoliko je kocka bačena dvaput. Izračunaj očekivanje i standardnu devijaciju varijable X.

7. Igrač baca 5 kocaka želeći postići što više jedinica. Nakon prvog bacanja, sve kocke koje ne pokazuju na broj 1 baca ponovo. Izračunaj očekivani broj jedinica dobivenih u oba bacanja.

8. Neka je X veći od dva na sreću odabrana broja iz skupa $(1, 2, \dots, n)$. (Isti broj može biti izabran dva puta). Izračunaj očekivanje $E(X)$.

9. Između 6 crvenih i 4 plave kuglice na sreću se biraju tri. Izračunaj očekivanje broja plavih kuglica.

10. Čovjek ima pet ključeva, od kojih samo jedan otvara vrata njegovog stana. Ključevi su sličnog oblika pa ih on ne razlikuje. Da bi otvorio vrata, on isprobava ključeve jedan za drugim, s tim da ključ koji ne odgovara nakon pokušaja odvaja, da ga ne bi ponovo isprobavao. Koliki je očekivani broj pokušaja?

11. Na raspolaganju nam je jedno grlo za žarulje i ukupno 6 žarulja, od kojih su 2 ispravne i 4 neispravne. Žarulje isprobavamo jednu za drugom, do pojave svjetlosti. Koliko je očekivanje broja pokušaja?

12. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu $(0, 1, 2, \dots, n, \dots)$ s vjerojatnostima koje opadaju po geometrijskom nizu.
a) Nađi vezu između $E(X)$ i $D(X)$.
b) Ako je $E(X) = a$, izračunaj $P(X = k)$.

13. Tri osobe bacaju novčić jedna za drugom. Pobjeđuje onaj koji prvi dobije grb. Kolika je vjerojatnost da će pobijediti prvi igrač? Koliko je očekivanje broja bacanja?

* * *

14. Pokus, koji se sastoji u bacanju novčića n puta, ponovimo dvaput. Izračunaj vjerojatnost da će se broj grbova podudarati u oba pokusa.

15. X i Y su nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $(0, 1, \dots, n)$, pri čemu je

$$P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{n+1}.$$

Odredi razdiobu slučajne varijable $Z = X + Y$.

16. Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable, s vrijednostima u skupu $\mathbf{N}$, te $E(X) < \infty$. Dokaži da vrijedi

$$E(\min(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X \geqslant i)P(Y \geqslant i).$$

17. Slučajna varijabla X poprima samo cjelobrojne nenegativne vrijednosti. Dokaži da je

$$E(X^{[k]}) = k \sum_{n=1}^{\infty} n^{[k-1]} P(X > n)$$

za proizvoljan cjelobrojni $k \geqslant 2$. (Ovdje je $x^{[k]} = x(x-1)\cdots(x-k+1)$.)

18. Biramo dva broja iz skupa $(1, 2, \dots, n)$ (isti broj može biti izabran dva puta). Kolika je vjerojatnost da njihov zbroj neće biti veći od n? Kolika je očekivana vrijednost tog zbroja?

* * *

19. X i Y su nezavisne diskretne slučajne varijable sa zakonom razdiobe:

$$P(X = n) = \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$P(Y = n) = \frac{1}{e^2} \cdot \frac{2^n}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Odredi razdiobu slučajne varijable $Z = X + Y$ te izračunaj njeno očekivanje i disperziju.

20. Bacamo dvije kocke. Slučajna varijabla X_k poprima vrijednost 1 ako se u k–tom bacanju pojave različiti brojevi, a vrijednost 0 ako su oba broja u k–tom bacanju jednaka. Definirajmo $Y = X_1 + \dots + X_n$. Odredi očekivanje, disperziju varijable Y te vjerojatnost događaja $(0 \leqslant Y \leqslant 2)$.

21. Slučajne varijable $X_1, X_2, \dots$ su nezavisne i jednako distribuirane,

$$X_k \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Neka je $X = X_1 + \dots + X_n$. Odredi prva tri momenta $E(X^m)$, $m = 1, 2, 3$.

22. Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprima vrijednost koja je tri puta veća od broja okrenutog na kocki, dok slučajna varijabla Y poprima vrijednost 3 kad je broj okrenut na kocki veći od 2, a vrijednost 0 kad okrenuti broj nije veći od 2. Izračunaj disperziju slučajne varijable $Z = X + Y$.

23. Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprima vrijednost koja je jednaka kvadratu broja okrenutog na kocki, dok slučajna varijabla Y poprima vrijednost -1 kad je broj okrenut na kocki $\leqslant 2$, a vrijednost $+1$ kad je on > 2. Izračunaj disperziju slučajne varijable $Z = X + Y$.

24. Razdioba vjerojatnosti dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y) zadana je tablicom

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/8	0	0
1	1/8	1/8	0
2	0	1/8	0
3	0	1/4	1/4

Nađi koeficijent korelacije r.

25. Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprima vrijednost koja je dva puta veća od broja okrenutog na kocki, dok slučajna varijabla Y poprima vrijednost 1 kad je broj okrenut na kocki neparan, a vrijednost 3 kad je okrenuti broj paran. Odredi disperziju slučajne varijable $Z = X + Y$.

26. Iz skupa od tri broja $S = (1, 2, 3)$ na sreću biramo 2 broja. Ako su izvučeni brojevi $i, j \in S$, slučajnu varijablu X definiramo sa $X = \max(i, j)$, a slučajnu varijable Y sa $Y = \min(i, j)$. Jesu li varijable X i Y korelirane, i ako jesu, izračunaj pripadni koeficijent korelacije $r(X, Y)$.

27. Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprimi vrijednost $+1$ ako je okrenuti broj paran, a vrijednost -1 ako je okrenuti broj neparan, dok slučajna varijabla Y poprimi vrijednost $+1$ kad je broj okrenut na kocki $\leqslant 3$, a vrijednost -1 kad je okrenuti broj > 3. Izračunaj disperziju $D(Z)$ slučajne varijable $Z = X - Y$.

28. Kod bacanja dviju kocaka slučajna varijabla X poprima vrijednost maksimuma, a slučajna varijabla Y vrijednost minimuma okrenutih brojeva. Jesu li varijable X i Y korelirane; ako jesu odredi koeficijent korelacije $r(X,Y)$.

29. Zadana je razdioba diskretnog slučajnog vektora (X,Y):

$X \backslash Y$	0	1
-1	$1/4$	$1/6$
0	$1/6$	$1/8$
1	$1/8$	$1/6$

Odredi razdiobu slučajnog vektora (Z,T), ako je $Z = 2X + Y$, $T = 2X - Y$.

30. Baca se kocka. Slučajna varijabla X poprima vrijednost koja je jednaka dvostrukom broju od broja okrenutog na kocki, dok slučajna varijabla Y poprima vrijednost 0 kad je broj okrenut na kocki paran, a vrijednost 1 kad je okrenuti broj neparan. Izračunaj koeficijent korelacije $r(X,Y)$.

* * *

31. Slučajna varijabla X poprima vrijednosti u skupu $(-2,-1,0,1,2)$ s jednakim vjerojatnostima. Odredi njenu karakterističnu funkciju.

32. Diskretna slučajna varijabla X ima jednoliku razdiobu na skupu $S = (1,3,5,\dots,2n+1)$. Odredi njenu karakterističnu funkciju.

33. Diskretna slučajna varijabla X definirana je sljedećom razdiobom vjerojatnosti

$$P(X = x) = 0.5^{|x|},\ x = \dots,-4,-2,1,3,5\dots$$

Koristeći karakterističnu funkciju nađi očekivanje od X.

34. Odredi karakterističnu funkciju geometrijske razdiobe, dane sa

$$P(X = k) = p(1-p)^k\ , \quad k = 0,1,2,\dots$$

i na temelju toga izračunaj njeno očekivanje.

* * *

35. Pokaži da je

$$\vartheta(t) = \frac{1+\cos^3 t}{2}$$

karakteristična funkcija i odredi pripadnu razdiobu.

36. Provjeri da je

$$\vartheta(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{6}\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 3t$$

karakteristična funkcija i odredi pripadnu razdiobu.

* * *

37. Neka je $\psi(z) = E(z^X)$ funkcija izvodnica varijable X. Dokaži da za svaki $\alpha > 0$ vrijedi

$$E\left(\frac{1}{X+\alpha}\right) = \int_0^1 z^{\alpha-1}\psi(z)dz.$$