

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike

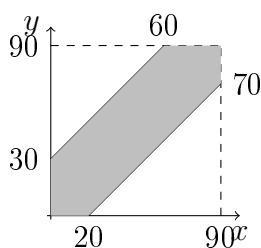
Grupa A

01.04.2016. u 12h

1. (3 boda)

Marko i Pero na putu do posla prolaze istom ulicom u suprotnim smjerovima. Ulica je dugačka 1.8km. Marko hoda brzinom 3.6km/h, a Pero brzinom 5.4km/h. Svaki od njih ulazi u ulicu u nekom slučajnom trenutku između 07:00 i 08:30. Kolika je vjerojatnost da će se Marko i Pero sresti u toj ulici?

Rješenje.



Marko: $v_1 = 3.6 \text{ km/h}$, $s = 1.8 \text{ km} \Rightarrow t_1 = \frac{1.8}{3.6} \text{ h} = \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ min}$

Pero: $v_2 = 5.4 \text{ km/h}$, $s = 1.8 \text{ km} \Rightarrow t_2 = \frac{1.8}{5.4} \text{ h} = \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min}$

x trenutak kada Marko ulazi u ulicu

y trenutak kada Pero ulazi u ulicu

$y < x + 30$ & $x < y + 20$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{90^2 - \frac{1}{2}60^2 - \frac{1}{2}70^2}{90^2} = \frac{162 - 36 - 49}{162} = \frac{77}{162} = 0.475 .$$

2. (3 boda)

Bačene su 3 kocke. Označimo događaje:

A = pojavila se točno jedna šestica

B = pojavila su se tri različita broja

Izračunajte $\mathbf{P}(A)$, $\mathbf{P}(A | B)$ te ispitajte jesu li događaji A i B nezavisni.

Rješenje.

$$\mathbf{P}(A) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 5}{6^3} \approx 0.347$$

$$\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}}{\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}} = \frac{1}{2}$$

Zavisni su + obrazloženje

3. (4 boda)

Krenuli ste na put autom (sa 4 kotača) bez rezervne gume. Vjerojatnost da stignete na cilj, ako nemate problema, je 1. No, pucanjem neke gume, vjerojatnost dolaska vam se prepolovi (npr. pucanjem svih guma vjerojatnost dolaska je $\frac{1}{16}$). Vjerojatnost pucanja bilo koje gume je $\frac{1}{4}$ i sva pucanja guma su nezavisni događaji. Odredite vjerojatnost stizanja na cilj.

Rješenje.

Imamo hipoteze $H_i = \{\text{puklo je } i \text{ guma}\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

S obzirom da se hipoteza H_i može ostvariti na $\binom{4}{i}$ načina i da su pucanja nezavisni događaji,

$$\mathbf{P}(H_i) = \binom{4}{i} \frac{1}{4^i} \frac{3^{4-i}}{4^{4-i}} = \binom{4}{i} \frac{3^{4-i}}{4^4} .$$

$$\mathbf{P}(A | H_i) = \frac{1}{2^i}$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^4 \mathbf{P}(H_i) \mathbf{P}(A | H_i) = \sum_{i=0}^4 \binom{4}{i} \frac{3^{4-i}}{4^4} \frac{1}{2^i} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{7}{6}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^4 = 0.586 .$$

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike

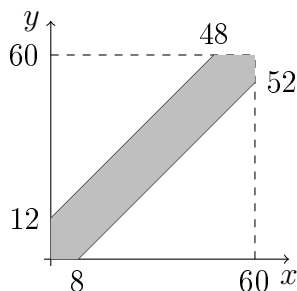
Grupa B

01.04.2016. u 12h

1. (3 boda)

Dva vlaka prolaze kroz raskrižje dvije pruge u slučajnom trenutku između 13:00 i 13:01 sati. Prvi vlak putuje brzinom 15m/s, a drugi 20m/s. Prvi vlak dug je 180m, a drugi 160m. Kolika je vjerojatnost da će se ta dva vlaka sudariti na tom raskrižju?

Rješenje.



1. vlak: $v_1 = 15m/s$, $s = 180m \Rightarrow t_1 = \frac{180}{15}s = 12s$

2. vlak: $v_2 = 20m/s$, $s = 160m \Rightarrow t_2 = \frac{160}{20}s = 8s$

x trenutak kada 1. vlak ulazi u raskrižje

y trenutak kada 2. vlak ulazi u raskrižje

$$y < x + 12 \text{ \& } x < y + 8$$

$$P(A) = \frac{60^2 - \frac{1}{2}52^2 - \frac{1}{2}48^2}{60^2} = 0.304 .$$

2. (3 boda)

U bubnju se nalaze 4 plave, 5 bijelih i 6 crnih kuglica. Na sreću odabiremo 2 kuglice. Označimo događaje:

A = izvukli smo točno jednu bijelu kuglicu

B = izvukli smo kuglice različitih boja

Izračunajte $P(A)$, $P(A | B)$ te ispitajte jesu li događaji A i B nezavisni.

Rješenje.

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{11}{1}}{\binom{15}{2}} = \frac{44}{105} \approx 0.419$$

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 6}{\binom{15}{2}}}{\frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6}{\binom{15}{2}}} = \frac{22}{37} \approx 0,595$$

Zavisni su + obrazloženje

3. (4 boda)

Vjerojatnost da Pero položi neki kolegij, bez dodatnih aktivnosti, je 0.1. No, kada bi išao na sva predavanja, vjerojatnost se udvostručuje. Isto tako, kada bi Pero rješavao domaće zadaće ili kada bi redovito učio vjerojatnost se također udvostručuje (npr. kada bi radio sve troje, vjerojatnost prolaza bi bila 0.8). Vjerojatnost da Pero pohađa predavanja je $\frac{1}{4}$, da rješava domaće zadaće je $\frac{1}{4}$ i da redovito uči je $\frac{1}{4}$. Ako su svi navedeni događaji međusobno nezavisni, izračunajte vjerojatnost da Pero položi ispit.

Rješenje.

Imamo hipoteze $H_i = \{\text{radio je } i \text{ stvari}\}$, $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

S obzirom da se hipoteza H_i može ostvariti na $\binom{3}{i}$ načina i da su to nezavisni događaji,

$$P(H_i) = \binom{3}{i} \frac{1}{4^i} \frac{3^{3-i}}{4^{3-i}} = \binom{3}{i} \frac{3^{3-i}}{4^3} .$$

$$P(A | H_i) = 0.1 \cdot 2^i$$

$$\text{Sada je } P(A) = \sum_{i=0}^3 P(H_i)P(A | H_i) = 0.1 \cdot \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \frac{1}{4^i} \frac{3^{3-i}}{4^{3-i}} 2^i = 0.1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)^3 = 0.1 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3 = 0.195 .$$

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike

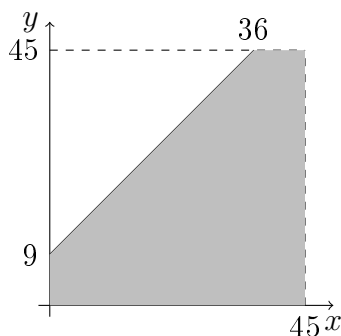
Grupa A

01.04.2016. u 13h

1. (3 boda)

Marko i Pero žive u istoj zgradi i rade u istoj firmi udaljenoj 20km. Svatko na posao kreće svojim autom u nekom slučajnom trenutku između 07:00 i 07:45. Marko vozi konstantnom brzinom od 50km/h, a Pero vozi konstantnom brzinom od 80km/h. Kolika je vjerojatnost da će Pero na posao stići prije Marka?

Rješenje.



Marko: $v_1 = 50\text{km/h}$, $s = 20\text{km} \Rightarrow t_1 = \frac{2}{5}h = 24\text{min}$

Pero: $v_1 = 80\text{km/h}$, $s = 20\text{km} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{4}h = 15\text{min}$

x trenutak kada Marko kreće na posao

y trenutak kada Pero kreće na posao

$y < x + 9$

$$P(A) = \frac{45^2 - \frac{1}{2}36^2}{45^2} = \frac{2 \cdot 5^2 - 4^2}{2 \cdot 5^2} = \frac{17}{25} = 0.68 .$$

2. (3 boda)

Neka je $P(A | B) = 0.4$, $P(B | A) = 0.2$ te $P(A \cup B) = 0.26$. Izračunajte $P(A)$ i $P(B)$.

Rješenje.

$$P(A | B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.4 \Rightarrow P(AB) = 0.4P(B)$$

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.2 \Rightarrow P(AB) = 0.2P(A).$$

Dobivamo $P(A) = 2P(B)$ i to uvrstimo u izraz za uniju

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \Rightarrow 0.26 = 2P(B) + P(B) - 0.4P(B) \Rightarrow P(B) = 0.1.$$

Sada slijedi $P(A) = 0.2$.

3. (4 boda)

U restoranu "Kućica" rade Ivica, Marica i zla vještica. Pri ulasku bacate dvije kocke. Ako je zbroj neparan, poslužiti će vas Ivica, ali je vjerojatnost 0.2 da vas zabunom otruje. Ako je zbroj paran, ali različit od 12, poslužiti će vas Marica, ali je vjerojatnost 0.1 da vas zabunom otruje. Ako ste dobili dvije šestice, poslužiti će vas vještica i ona će vas sigurno otrovati. Ako ste preživjeli, kolika je vjerojatnost da vas je poslužila Marica?

Rješenje.

Imamo tri hipoteze: H_1 , posluživao je Ivica, H_2 , posluživala je Marica i H_3 , posluživala je vještica. Vjerojatnost da je zbroj paran je $\frac{1}{2}$. Naime, brojevi mogu biti oba parni ili oba neparna. Dakle $P(H_1) = \frac{1}{2}$, $P(H_3) = \frac{1}{36}$, $P(H_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{36} = \frac{17}{36}$.

$$P(A | H_1) = 0.8, P(A | H_2) = 0.9, P(A | H_3) = 0$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(H_i)P(A | H_i) = \frac{1}{2} \cdot 0.8 + \frac{17}{36} \cdot 0.9 + \frac{1}{36} \cdot 0 = \frac{29.7}{36} = 0.825 .$$

$$P(H_2 | A) = \frac{P(H_2)P(A | H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{17}{36} \cdot 0.9}{0.825} = \frac{15.3}{29.7} \approx 0.515 .$$

Prva kratka provjera znanja iz Vjerojatnosti i statistike

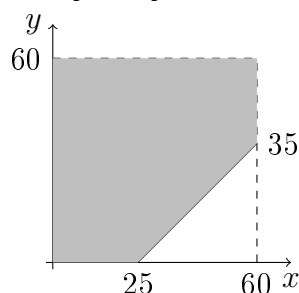
Grupa B

01.04.2016. u 13h

1. (3 boda)

Ana i Barbara se utrkuju na stazi dužoj 500m. Ana trči konstantnom brzinom 4m/s, a Barbara trči konstantnom brzinom od 5m/s. Ako svaka od njih kreće u nekom slučajnom trenutku između 10:00 i 10:01, kolika je vjerojatnost da će Barbara pobijediti?

Rješenje.



$$\text{Ana: } v_1 = 4m/s, s = 500m \Rightarrow t_1 = \frac{500}{4}s = 125s$$

$$\text{Barbara: } v_2 = 5m/s, s = 500m \Rightarrow t_2 = \frac{500}{5}s = 100s$$

x trenutak kada Ana kreće

y trenutak kada Barbara kreće

$$x - 25 < y$$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{60^2 - \frac{1}{2}35^2}{60^2} = \frac{288 - 49}{288} = \frac{239}{288} = 0.83 \text{ .}$$

2. (3 boda)

Neka je $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \setminus B) = 0.2$ te $P(B | A) = 0.5$. Izračunajte $P(A)$ i $P(B)$.

Rješenje.

$$\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(AB) = 0.8$$

$$\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB) = 0.2 \Rightarrow \mathbf{P}(B) = 0.6.$$

$$\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(A)} = 0.5 \Rightarrow \mathbf{P}(AB) = 0.5\mathbf{P}(A)$$

$$\mathbf{P}(A) - 0.5\mathbf{P}(A) = 0.2 \Rightarrow 0.5\mathbf{P}(A) = 0.2 \Rightarrow \mathbf{P}(A) = 0.4$$

3. (4 boda)

U kutiji je 7 bijelih i 4 crne kuglice. Izvlačite jednu po jednu kuglicu i ne vraćate je nazad. Kolika je vjerojatnost da su prve dvije izvučene kuglice bijele, ako je treća kuglica bijela?

Rješenje.

Neka je A događaj da je treća izvučena kuglica bijela, i $H_1 = \{\text{izvučeno je BB}\}$, $H_2 = \{\text{izvučeno je BC}\}$, $H_3 = \{\text{izvučeno je CB}\}$ i $H_4 = \{\text{izvučeno je CC}\}$.

Tada je

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{7}{11} \frac{6}{10} = \frac{42}{110}, \quad \mathbf{P}(A | H_1) = \frac{5}{9}$$

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{11}{11} \frac{10}{7} = \frac{110}{77}, \quad \mathbf{P}(A | H_2) = \frac{6}{9}$$

$$\mathbf{P}(H_3) = \frac{11}{11} \frac{10}{4} = \frac{110}{44}, \quad \mathbf{P}(A | H_3) = \frac{6}{9}$$

$$\mathbf{P}(H_4) = \frac{11}{11} \frac{3}{10} = \frac{11}{110}, \quad \mathbf{P}(A | H_4) = \frac{7}{9}$$

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}(H_i) \mathbf{P}(A | H_i) = \frac{1}{990} (210 + 168 + 168 + 84) = \frac{630}{990} = \frac{7}{11} = 0.636.$$

$$\mathbf{P}(H_1 | A) = \frac{\mathbf{P}(H_1 A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\frac{21}{99}}{\frac{7}{11}} = \frac{1}{3} = 0.333 \text{ .}$$