Drugi međuspit iz Vjerojatnosti i statistike
16.05.2007.

1. [**3 boda**] Odredi konstantu C tako da funkcija
$$f(x) = \begin{cases} C\,x^2, & 0 \leq x \leq 2; \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$
bude gustoća razdiobe slučajne varijable X. Zatim odredi funkciju razdiobe $F(x)$ i izračunaj vjerojatnost $P(\{0 < X < 1\})$.

2. [**3 boda**] Duljine stranica pravokutnika ABCD su 3 cm i 4 cm. Biramo na sreću točku T unutar pravokutnika. Slučajna varijabla X je udaljenost točke T do najbliže stranice pravokutnika. Izračunajte matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne varijable X.

3. [**3 boda**] Slučajna varijabla X ima gustoću $f(x) = 2e^{-2x}$, $x > 0$. Nađite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = |2X - 1|$.

4. [**4 boda**]
a) [1 bod] Definirajte kada je slučajna varijabla X neprekinuta.
b) [1 bod] Definirajte kada slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$.
c) [2 boda] Izvedite matematičko očekivanje eksponencijalne razdiobe s parametrom $\lambda > 0$.

5. [**5 boda**]
a) [1 bod] Napišite formule za gustoću opće i jedinične normalne razdiobe.
b) [1 bod] Ako X ima normalnu razdiobu s očekivanjem 2 i disperzijom 8, odredi a i b tako da varijabla $Y = aX + b$ ima jediničnu normalnu razdiobu.
c) [1 bod] Iskaži Teorem Moivre-Laplacea o aproksimaciji binomne slučajne varijable normalnom.
d) [2 boda] Izračunaj vjerojatnost da u 15 000 bacanja ispravnog novčića broj pisama bude veći od 7600.

6. [**3 boda**] Gustoća razdiobe dvodimenzionalnog slučajnog vektora (X, Y) jednaka je
$$f(x, y) = \begin{cases} kxy, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1; \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$
a) Izračunaj konstantu k.
b) Izračunaj marginalnu gustoću razdiobe slučajne varijable Y.
c) Izračunaj uvjetnu gustoću $f_{X|Y=y}(x)$.

7. [**4 boda**] Biramo na sreću broj $Y \in [0, 2]$, a zatim na sreću broj $X \in [Y, 2]$. Izračunaj gustoću razdiobe i očekivanje varijable X.

Napomena: Vrijeme pisanja je **90 minuta**.

Rješenja 2. međuispita iz Vjerojatnosti i statistike

1. (3 boda) $C = \frac{3}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

$P(\{0 < X < 1\}) = F(1) - F(0) = \frac{1}{8}$

2. (3 boda) $F(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{6}x$, $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{6}$, $x \in [0, \frac{3}{2}]$

$E(X) = \int_0^{\frac{3}{2}} xf(x)dx = \ldots = \frac{9}{16}$

3. (3 boda) $g(y) = \begin{cases} g_1(y) + g_2(y) = e^{y-1} + e^{-y-1}, & y \in [0,1]; \\ g_2(y) = e^{-y-1}, & y \in [1, \infty\rangle. \end{cases}$

4. a) (1bod) Slučajna varijabla X je neprekinuta ako postoji funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

b) (1 bod) Slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ ako joj je gustoća oblika $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$.

c) (2 boda) $E(X) = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \ldots = \frac{1}{\lambda}$

5. a) (1 bod) $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

b) (1 bod) $Y = aX + b = \frac{X-a}{\sigma}$ $\ldots$ $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) (1 bod) Teorem: Neka je $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Za veliki n razdioba slučajne varijable $\frac{X-np}{\sqrt{npq}}$ može se aproksimirati jediničnom normalnom razdiobom:

$P(x_1 < \frac{X-np}{\sqrt{npq}} < x_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$. Pišemo $\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, npq)$ za dovoljno velik n.

d) (2 boda) $\mathcal{B}(15000, \frac{1}{2}) \approx \mathcal{N}(7500, 3750)$,

$P(X > 7600) = 1 - P(X < 7600) = \ldots = \frac{1}{2}(1 - \Phi^*(1.633)) = 0.05155$

6. a) (1 bod) $k = 4$

b) (1 bod) $f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0 < y < 1; \\ 0, & y < 0 \text{ ili } y > 1. \end{cases}$

c) (1 bod) $f_{X|Y=y}(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1; \\ 0, & x > 1 \text{ ili } x < 0,\ 0 < y < 1. \end{cases}$

7. (4 boda) $f_X(x) = \int_0^x f_{X|Y=y}(x) f_Y(y)\,dy = \ldots = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln|2-x|)$, $x \in [0,2\rangle$; $E(X|Y=y) = \int_y^2 x f_{X|Y=y}(x)dx = \ldots = \frac{1}{2}(y+2)$,

$E(X) = \int_0^2 E(X|Y=y) f_Y(y)dy = \ldots = \frac{3}{2}$