9. MASS

UVOD U STATISTIKU

$E(\tilde{\Theta}) = \vartheta \Rightarrow$ uvjet ~~za~~ nepristranost

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$E(\bar{X}) = a$$

$\downarrow$ pravo očekivanje varijable

$\lim_{n \to \infty} D(\tilde{\Theta}) = 0 \Rightarrow$ UVJET ZA VALJANOST

PZI.03

~~Zad.~~10)

$[\alpha, 1]$, $x_1, \ldots, x_n$

$$Z = 1 - \min\{\underbrace{x_1, \ldots, x_n}_{X_m}\}$$

prava vrijednost: $1-\alpha$
$(b-a)$

a) dokaži da je nepristrana:

$E(Z) = 1 - \alpha \Rightarrow$ to moramo dobiti kao rezultat očekivanja da bi vrijedila nepristranost

$\uparrow$ jednolika razdioba

$X_i \sim U[\alpha, 1]$

$$F_{X_i}(x) = \frac{x-a}{b-a} = \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$$

$$F_{X_m}(x) = P(X_m < x) = P(\min(X_1, \dots, X_n) < x) =$$

$$= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$$

↓ uvijek po suprotnom uvjetu

$$= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

$$= 1 - P(X_i > x)^n = 1 - (1 - F_{X_i}(x))^n =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^n$$

$$f_{X_m}(x) = n\left(\frac{1-x}{1-\alpha}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} = \frac{n(1-x)^{n-1}}{(1-\alpha)^n}$$

$$E(Z) = 1 - E(X_m) =$$

$$= 1 - \int_{\alpha}^{1} x \cdot \frac{n}{(1-\alpha)^n} (1-x)^{n-1} \, dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1-x=t \\ -dx=dt \end{array} \right.$$

$$= 1 + \frac{n}{(1-\alpha)^n} \cdot \int_{1-\alpha}^{0} \underbrace{(1-t)\, t^{n-1}}_{t^{n-1} - t^n} \, dt = \frac{n}{n+1}(1-\alpha)$$

↓

nije nepristrana

→ da bi vrijedila nepristranost treba pomnožiti s $\frac{n+1}{n}$

$L \Rightarrow$ funkcija najveće izglednosti

$L(\lambda, x_1, \ldots\ldots, x_n)$

$\downarrow$

parametar koji procjenjujemo

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L = 0$$

6. DZ. Zad 1a)

$x_1 = 5$

$x_2 = 7$

$x_3 = 3$

$X \sim P(\lambda)$

$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, iz tog izraza dobivamo:

$$P(X=5) = \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda}$$

$$P(X=7) = \frac{\lambda^7}{7!} e^{-\lambda}$$

$$P(X=3) = \frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$$

$$L(\lambda, x_1, x_2, x_3) = P(X=3) \cdot P(X=7) \cdot P(X=5) = \frac{\lambda^{15}}{3!\,5!\,7!} e^{-3\lambda}$$

$\downarrow$

ovaj izraz računamo uvijek kao umnožak vjerojatnosti tih ishoda

$$\ln L = \ln \lambda^{15} + \ln e^{-3\lambda} - \ln 3!\,5!\,7! =$$

$$= 15 \ln \lambda - 3\lambda - \ln 3!\,5!\,7! =$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L=\frac{15}{\lambda}-3=0, \boxed{\lambda=5}$$

PZI . 07. Zad. 3

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{a^2}e^{-\frac{x}{a}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$L(a, x_1, \dots, x_n)=f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot \dots \cdot f(x_n)$$

nije rečeno koliko ima realizacija (kao u prethodnom zadatku gdje ih je bilo 3) pa ih uzimamo n

taj parametar procjenjujemo (kale nama je λ tu sada $\boxed{a}$)

$$=\frac{x_1}{a^2}e^{-\frac{x_1}{a}}\cdot \dots \cdot \frac{x_n}{a^2}e^{-\frac{x_n}{a}}=$$

$$=\frac{x_1\cdot \dots \cdot x_n}{a^{2n}}e^{-\frac{(x_1+\dots+x_n)}{a}}$$

$$\ln L=\ln x_1\cdot \dots \cdot x_n+\ln e^{-\frac{1}{a}(x_1+\dots+x_n)}-\ln a^{2n}=$$

$$=\ln(x_1\cdot \dots \cdot x_n)-\frac{1}{a}(x_1+\dots+x_n)-2n\ln a=\Big/\frac{\partial}{\partial a}$$

$$\frac{x_1+\dots+x_n}{a^2}-\frac{2n}{a}=0\Big/\cdot a$$

$$a=\frac{1}{2n}(x_1+\dots+x_n)=\frac{\overline{X}}{2}$$

to je naša procjena

$a = \frac{\bar{X}}{2}$ $\Rightarrow$ sada provjeravamo nepristranost te naše procjene

$$E\left(\frac{\bar{X}}{2}\right) = \frac{1}{2} E(\bar{X}) = \frac{1}{2}\left[E\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\left(E(x_1) + \ldots + E(x_n)\right) =$$

varijable od x_1 do x_n imaju isto očekivanje pa možemo ovako zapisati

$$= \frac{1}{2\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot E(x) = \frac{1}{2} E(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x \cdot \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}} dx =$$

budući da očekivanja ima n, a kako su sva ista zapis $E(x_1) + \ldots + E(x_n)$ možemo pojednostavniti kao: $n \cdot E(x)$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^\infty x^2 e^{-\frac{x}{a}} dx = \Big| \text{2 parcijalne integracije} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2a = a \Rightarrow \text{nepristrana}$$

Točkaste i intervalne procjene za parametre normalne razdiobe:

$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow$ točkasta procjena za očekivanje

$d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 \Rightarrow$ -11- za disperziju (ako je očekivanje poznato)

$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$ (ako je oč. nepoznato)

$P(x_1 < a < x_2) = 0{,}9$

$\downarrow$ nivo pouzdanosti

$\alpha = 1 - p \Rightarrow$ nivo ZNAČAJNOSTI ILI SIGNIFIKANTNOSTI

	POZNATA DISPERZIJA/ OČEKIVANJE	NEPOZNATA DISPERZIJA/ OČEKIVANJE
ZA OČEKIVANJE	27 str.	34 str.
ZA DISPERZIJU	30 str.	35 str.

6. DZ. Zad. 17

x_j	110	115	120	125	130	135
n_j	2	3	6	5	2	2

$n=20 \quad (2+3+6+5+2+2=20)$

110 se pojavio 2 puta, 115 se pojavio 3 puta ....

a) $\bar{x} = \dfrac{\sum x_j \cdot n_j}{20} = 122$

$\hat{s}^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \dfrac{2 \cdot 12^2 + 3 \cdot 7^2 + 6 \cdot 2^2 + \dots}{19} = 51{,}05$

b) Odredi 90% interval za očekivanje: (uz nepoznatu disperziju)
34 str.

$p = 0{,}9 \Rightarrow$ nivo pouzdanosti

$\alpha = 1 - p = 0{,}1$

imamo 19 stupnjeva slobode (Studentova razdioba)

$t_{n-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}729$

$t_{1-\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 2{,}762$

$p(\bar{x} - 2{,}762 < a < \bar{x} + 2{,}762) = 0{,}9$

$p(119{,}238 < a < 124{,}762) = 0{,}9$

c) odrediti 90% interval za disperziju: (uz nepoznato odstupanje) str. 35

$p = 0{,}9$

$\alpha = 0{,}1$

ako se ne napomene koji interval je u pitanju, misli se na dvostrani

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}05 \Rightarrow$ u tablici tražimo 0,05 i 19 stupnjeva slobode (tablica hi-kvadrat razdiobe)

$c_1 = \chi^2_{19, \frac{\alpha}{2}} = 10{,}117$

$c_2 = \chi_{19, 1-\frac{\alpha}{2}} = 30{,}144 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}95$ (dakle u tablici gledamo 0,95 i 19 = 30,144)

OBAVEZNO OBRATITI PAŽNJU NA KVADRAT PRI RAČUNU

$\beta_1 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{c_2} = 32{,}177$

$\beta_2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{c_1} = 95{,}873$

$p(\beta_1 < \sigma^2 < \beta_2) = 0{,}9$

$p(32{,}177 < \sigma^2 < 95{,}873) = 0{,}9$