VELIKI PI-SHOE

"VIS"

Shoe - Pac

Vjerojatnost

i

statistika

NASTAVNIK: dr. sc. **Tomislav Burić** aka dr. π

GRUPA: PA02

TERMINI: NEPARNI TJEDAN (1. TJEDAN NASTAVE): UTORAK → $10^{00} - 12^{00}$ A202

ČETVRTAK → $8^{00} - 10^{00}$ A202

PARNI TJEDAN: UTORAK → $16^{00} - 18^{00}$

ČETVRTAK → $14^{00} - 16^{00}$

KNJIŽICA I

§ 1. DISKRETNA VJEROJATNOST

1. VJEROJATNOST

1.1. ALGEBRA DOGAĐAJA

def. SLUČAJNI POKUS – svaki pokus kojem unaprijed ne znamo ishod

def. ELEMENTARNI DOGAĐAJ – ishod pokusa $(\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots)$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ → skup svih elementarnih događaja

$|\Omega|$ ...... KARDINALNI BROJ skupa → broj elemenata skupa

$\emptyset$ ...... PRAZAN SKUP = NEMOGUĆ DOGAĐAJ

def. DOGAĐAJ – podskup od Ω (oznaka A, B, C ....)

„NA ISPITU ČAK BILO JEDNOM" II

1ZZV – 3.) Bacamo 2 kocke. Opišite prostor elementarnih događaja.

$\omega_1 = 11$, $\omega_2 = 12$, $\omega_3 = 13$ ...... $\omega_{36} = 66$

ishod: prva kocka, druga kocka

$\Omega = \{11, 12, 13, \dots 66\}$

$A = \{$oba broja manja od 3$\} = \{11, 12, 21, 22\}$

$B = \{$zbroj je manji od 5$\} = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$

→ UNIJA: $A \cup B$ $[A+B] = \{11, 12, 13, 21, 22, 31\}$

→ ILI u A ILI u B! PRIMIJETI! $A \subset B$

→ PRESJEK: $A \cap B$ $[A \cdot B] = \{11, 12, 21, 22\}$

→ I u A I u B!

→ RAZLIKA: $B \setminus A$ $[B - A] = \{13, 31\}$ → dogodio se B, a NIJE se dogodio A

→ KOMPLEMENT (SUPROTAN DOGAĐAJ): $\overline{B}$ $[B^c] = \Omega \setminus B = \{14, 41, \ldots, 66\}$

npr. $\overline{\overline{A}} = A$

$$\boxed{A \setminus B = A \cap \overline{B}}$$

!

... DE MORGANOVA PRAVILA ...

!

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}}$$

„PROŠLE, PRETPROŠLE, BIO DOKAZ NA ISPITU" !!

DOKAZIĆ (jer je mini i lagan):

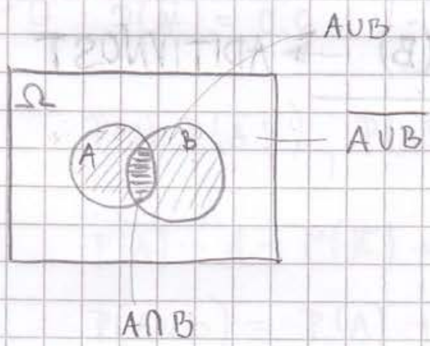
$$\omega \in \overline{A \cup B}$$

$$\omega \notin A \cup B \Rightarrow \omega \notin A \text{ i } \omega \notin B \Rightarrow \omega \in \overline{A} \text{ i } \omega \in \overline{B}$$

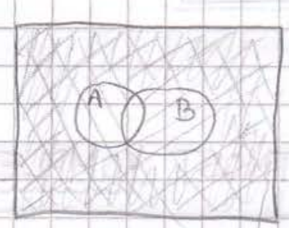
$$\Rightarrow \omega \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

//

VENNOVI DIJAGRAMI



DE MORGAN :



$$\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

ALGEBRA DOGAĐAJA – familija F podskupova od Ω na kojoj su definirane binarna operacija zbrajanja i unarna operacija komplementa sa sljedećim svojstvima:

i) $\Omega \in F$, $\emptyset \in F$ $\{\Omega$ ima 2^n podskupova$\}$

ii) $A \in F \Rightarrow \overline{A} \in F$

iii) $A, B \in F \Rightarrow A + B \in F$

UOČI !! $\overline{A+B} \in F$

po De Morganu:

$\overline{A} \cdot \overline{B} \in F$

1.2. VJEROJATNOST

„NAJBITNIJA DEFINICIJA U CIJELOM POGLAVLJU"

def. VJEROJATNOST – preslikavanje $P: F \to [0,1]$ definirana na algebri događaja F koja ima svojstva:

→ od 0 do 100 %

1) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ → NORMIRANOST

2) ako je $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ → MONOTONOST

3) ako su A i B DISJUNKTNI (presjek im je prazan skup → nemaju presjek) ($A \cap B = \emptyset$) tada $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ → ADITIVNOST

•• VJEROJATNOST KOMPLEMENTA :

$$\boxed{p(\bar{A}) = 1 - p(A)}$$

!

„BILO JE JEDNE GODINE (MOŽDA PROŠLE) DOKAZ OVOGA"

2012.

DOKAZIĆ !! :
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

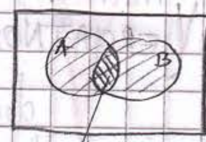
⇝ KORISTMO ADITIVNOST JER SU TO DISJUNKTNI DOGAĐAJI

$$\Rightarrow p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

VJEROJATNOST UNIJE:

⟶ AKO DOGAĐAJI NISU DISJUNKTNI

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$



ODUZET JER SMO TAJ DIO OBUHVATILI 2 PUTA !!

„JEDNOM U 5 GODINA NA ISPITU, MOŽDA NA ŠKOLSKOJ IL' NEGDJE"

1.DZ-2.)

$P(A \cup B) = 0.8$

$P(AB) = 0.2$

$P(\bar{A}) = 0.6$

$P(B), P(\bar{A}\bar{B}), P(A\bar{B}) = ?$

$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.4$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$

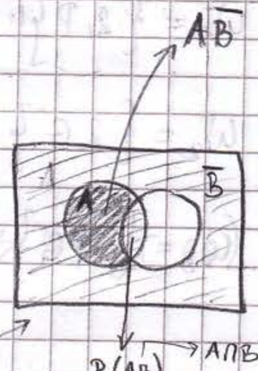
$0.8 = 0.4 + P(B) - 0.2$

$\Rightarrow \underline{P(B) = 0.6}$

$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$\Rightarrow \underline{P(\bar{A}\bar{B}) = 0.2}$

$P(A\bar{B}) = P(A \setminus B) = P(A) - P(AB) = \underline{0.2}$



ZAKLJUČI POMOĆU VENNOVIH

1.3. KONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

def. VJEROJATNOSNI PROSTOR Ω koji posjeduje konačno mnogo elemenata događaja nazivamo KONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} \longrightarrow P(\omega_1) = p_1, \dots, P(\omega_n) = p_n$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} p_i = 1}$$

Primjer: D'Alembertov problem:

⇝ bacamo 2 novčića!

$\omega_1 = \{2P\}$

$\omega_2 = \{2G\}$ $\longrightarrow P(\omega_i) = \frac{1}{3}$? (po njemu) NETOČNO!

$\omega_3 = \{P, G\}$ — $\omega_3 = \{PG\}$, $\omega_3 = \{GP\}$ $\Rightarrow P(1P, 1G) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

ZAKLJUČAK:

SVI ELEMENTARNI DOGAĐAJI SU JEDNAKO VJEROJATNI!

$$p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$$

$$\Rightarrow \sum p_i = n \cdot p = 1 \longrightarrow \boxed{p = \frac{1}{n}}$$

⇝ Tada je vjerojatnost događaja $A = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}\}$

$$\boxed{P(A) = m \cdot p = \frac{m}{n} = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH}}{\text{UKUPAN BROJ ISHODA}}}$$!

↳ KLASIČNA DEFINICIJA → KORISTITI JE SAMO KADA SU SVI ELEM. DOGAĐAJI JEDNAKO VJEROJATNI !

1.DZ-4) Bacamo 2 kocke. Izračunajte vjerojatnosti:

a) da su pala 2 ista broja

b) zbroj 8

c) barem jedna četvorka

d) broj djeljiv s 2 ili sa 3

a) $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (6 povoljnih → 11, 22, 33, 44, 55, 66)

ISHOD 1.K, ISHOD 2.K

(36 ukupno → $\underset{1.K}{6} \cdot \underset{2.K}{6}$)

b) $P(B) = \frac{5}{36}$ (5 povoljnih → 26, 35, 44, 53, 62)

c) $P(C) = \frac{11}{36}$ {povoljne: 41, 42, 43, 44, 45, 46, 14, 24, 34, 54, 64}

d) $P(D) = \frac{32}{36}$ → LAKŠE IZRAČUNATI SUPROTNO !

SUPROTNO: 11, 15, 51, 55 → $\frac{4}{36} \Rightarrow \frac{32}{36} = P(D)$

→ ZA CIJELU KOMBINATORIKU TREBA ZNATI 2 PRAVILA:

1) PRODUKTNO PRAVILO

$\square \quad \square \quad \square \quad \square$

$5 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 3$

PODSJETNIK:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \qquad {}^{*}\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad {}^{*}\binom{n}{1} = n$$

$${}^{*}\binom{n}{n} = 1$$

DIGITRON: npr. $\boxed{5}$ + $\boxed{\text{SHIFT}}$ + $\boxed{\text{nCr}}$ + $\boxed{2}$ = $\binom{5}{2}$

2) KOMBINACIJE

$\binom{n}{k}$ = ODABIR k ELEMENATA OD n

1ZZV-62.) Bacamo 6 kocaka. Izračunajte vjerojatnost:

a) da je palo 6 različitih brojeva

b) 6 brojeva manjih od 5

c) 3 različita para jednakih brojeva

a)

$$P(A) = \frac{6!}{6^6}$$

$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$ → UKUPAN BR. ISHODA

$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ → POVOLJNI ISHODI

SVE MOŽE

NE MOŽE ONO NA PRVOJ ŠTO JE PALO

b)

$$P(B) = \frac{4^6}{6^6}$$

$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$

c)

3 različita para; 1. par; 2. par; 3. par

$$P(C) = \frac{\binom{6}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{6^6}$$

"SAVJET! NAPISATI NEKE KOMBINACIJE!"

"BITNO! RJEŠITI ŠTO VIŠE ZADATAKA I ONDA ĆE NAM TO UĆI BAR MALO"

1.MI-2008.-4.) 12 ping-pong loptica. Izvlačimo 7. 4 su defektne.
Izračunaj vjerojatnost da smo izvukli:

a) točno jednu defektnu

b) najviše jednu defektnu

c) barem jednu defektnu

a) $$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$$ → OSTALE, ISPRAVNE!

b) $$P(B) = \frac{\underbrace{\binom{8}{7}}_{\text{NULA DEFEKTNIH}} + \binom{4}{1}\binom{8}{6}}{\binom{12}{7}}$$ → ILI; NEMAJU NIŠTA ZAJEDNIČKO, DISJUNKTNI

c) $$P(C) = 1 - \boxed{\frac{\binom{8}{7}}{\binom{12}{7}}}$$ → DA NEMA NITI JEDNE DEFEKTNE!

ZZV-70.) U žari 5B (bijele), 4C (crne), 2Z (zelene). Izvlačimo 4 kuglice. Izračunaj vjerojatnost:

a) zastupljene sve tri boje

b) broj crnih veći od broja bijelih

DO UTORKA ZNATI → str. 58... → 1-6, 8 - NADAJE ⇒ NATJECANJE II
14-16
28-33
52-85 (Izračunaj vjerojatnost, ne opisivati!)

a) $$P(A) = \frac{\overbrace{\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{2 bijele}}\underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{1 crn.}}\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{1 zel.}}}^{\text{1. slučaj}} + \overbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}}^{\text{2. slučaj}} + \overbrace{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{2}}^{\text{3. slučaj}}}{\binom{11}{4}}$$

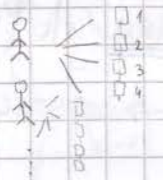
!! TIPIČNA GREŠKA:
$$P(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{2}{1}\binom{8}{1}}{\binom{11}{4}}$$
→ PREBROJALI VIŠE KOMB. NEGO IH IMA! DUPLO PREB.!

b) $$P(B) = \frac{\underbrace{\binom{4}{4}}_{\text{sve crne}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{3 crne}}\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{1 bijela}} + \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{3 crne}}\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{1 zelena}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{2 crne}}\underbrace{\binom{2}{2}}_{\text{2 zelene}} + \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{2 crne}}\underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{1 bijela}}\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{1 zelena}}}{\binom{11}{4}}$$

Zad. „HŽ") 12 putnika, 4 vagona. Izračunaj vjerojatnost:

a) u svaki vagon je ušlo po 3 putnika

$$P(A) = \frac{\overset{\text{1. vagon}}{\binom{12}{3}}\overset{\text{2. vag.}}{\binom{9}{3}}\overset{3.}{\binom{6}{3}}\overset{4.}{\binom{3}{3}}}{4^{12}}$$



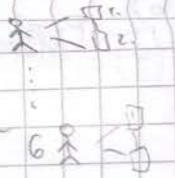
12 ljudi → svaki može odabrati 1 od 4 vagona

b) u prvi i treći vagon po 3 putnika

$$P(B) = \frac{\overset{1.}{\binom{12}{3}}\overset{3.}{\binom{9}{3}} \cdot 2^{6}}{4^{12}}$$

6 → ostalo 6 ljudi

2 → mogu otići još u 2 vagona



1.MI-2010-1.) Wyatt Earp igra poker s 4 revolveraša. Svaki igrač je dobio 5 karata od 52. Izračunajte vjerojatnost da je Wyatt dobio:

a) flush → (5 karata iste boje)

b) ROYAL-FLUSH → (od 10 do asa u istoj boji) $\overbrace{10\ D\ B\ K\ A}^{5}$

c) FULL-HOUSE → (3 karte iste jačine i dvije karte neke druge jačine)

a)
$$P(A) = \frac{4 \cdot \binom{13}{5}}{\binom{52}{5}}$$

4 ← $\binom{4}{1}$ odabir boje

$\binom{13}{5}$ → 5 karata od 13 od te boje!

b)
$$P(B) = \frac{4}{\binom{52}{5}}$$

4 ← $\binom{4}{1}$

4 → samo treba odabrati boju → karte su ZADANE! $\cdot \binom{5}{5}$

c) 13 različitih jačina $\binom{13}{1}$, 3 od 4 različite boje, $\binom{12}{1}$

$$P(c) = \frac{13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{52}{5}}$$

ILI

II NAČIN:

$$\binom{13}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{2} \cdot 2 \quad \binom{2}{1}$$

2 jačine: 7, 10 — boja — boja

DA BI POVEZALI

d) dva para — 2 jačine

$$P(D) = \frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} \cdot \binom{44}{1}}{\binom{52}{5}}$$

NE SMIJEMO IZVUĆI 10 NI A → 8 KARATA!

ZA PRIMJER DOLJE: 10 10 A A bilošta — ILI $11 \cdot 4 = \binom{44}{1}$

$\binom{2}{1}$

→ NISMO IMALI $\cdot 2$ JER NAM JE SVEJEDNO KOJI PAR JE PRVI KOJI PAR JE DRUGI! TRIK!

Zad.) Problem rođendana. (str. 18)

U skupini od 80 ljudi barem 2 rođene na isti datum.

$$P(A) = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365-80+1)}{365^{80}} = 0,9999$$

WOW!

NA 80 LJUDI GOTOVO 100 % ĆE $\overset{\text{BAREM}}{\vee}$ DVOJE IMATI ROĐENDAN NA ISTI DAN!

PONAVLJANJE POKUSA

Pr. Bacamo kocku 3 puta. Vjerojatnost da je svaki put pala šestica?

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

⟿ ISTO KAO DA SMO UZELI 3 KOCKE I BACILI JEDNOM!

⟿ ti događaji su NEZAVISNI i računamo tako da MNOŽIMO vjerj.

Zad.) Strijelac gađa metu 10 puta. Vjerojatnost pogotka je 0.8.

a) Kolika je vjerojatnost da je svaki put promašio?

b) –II– točno 2 puta pogodio

c) –II– barem 2 puta pogodio

a) $P(A) = 0.2^{10}$

b) $P(B) = 0.8^2 \cdot 0.2^8 \cdot \binom{10}{2}$

! NAJČEŠĆA GREŠKA:

MORAMO ODABRATI 2 GAĐANJA OD 10 U KOJIMA JE POGODIO!

⟿ BITAN REDOSLIJED

c) $P(C) = 1 - \underbrace{0.2^{10}}_{\text{svih 10 puta promašio}} - \underbrace{0.2^9 \cdot 0.8 \binom{10}{1}}_{\text{SAMO 1 pogodio}}$

↳ nije nijednom pogodio

1MI-09-1) 6B, 4C, izvlačimo 7 kuglica iz bubnja. Izračunajmo vjerojatnost da smo izvukli barem 5B ako izvlačimo:

a) bez vraćanja (odjednom svih 7)

b) s vraćanjem u bubanj (izvučemo jednu pa je vratimo itd.)

a)

$$P(A)=\frac{\binom{6}{5}\binom{4}{2}+\binom{6}{6}\binom{4}{1}}{\binom{10}{7}}=\underline{0.333}$$

(5B, 2 crne; 6B, 1 crna)

→ SMIJEMO KALKULATOR IMATI !

→ NAPIŠI TO RJ. U ISPITU

! b)

NE ZABORAVI ! U KOJEM SMO IZVLAČENJU IZVUKLI !!!

$$P(B)=\underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^5\left(\frac{4}{10}\right)^2\binom{7}{5}}_{5B}+\underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^6\left(\frac{4}{10}\right)^1\binom{7}{6}}_{6B}+\underbrace{\left(\frac{6}{10}\right)^7}_{7B}=0.42$$

→ MOŽE JER VRAĆAMO! IAKO IMA 6B !

NEMA ISPITA BEZ ZADATKA OVOG TIPA, SA PONAVLJANJEM POKUSA !

OVO PONAVLJANJE BAŠ JAKO VOLE ☺

1.4. BESKONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

def. ALGEBRA DOGAĐAJA $\mathcal{F}$ je σ-ALGEBRA ako vrijedi

$$\boxed{A_1, A_2 \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}}$$

⟶ Tada vjerojatnost P mora zadovoljiti uvjet σ-ADITIVNOSTI:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \quad \text{za disjunktne } A_1, A_2 \ldots$$

• SVOJSTVO NEPREKINUTOSTI VJEROJATNOSTI:

$$\boxed{A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \implies \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)}$$

„neprekinutost kao kod funkcija iz MAT2"

DOKAZ NA 2 str. u knjižici, ZA NAPREDNE GENIĆE :) NEĆE SIGURNO BITI

Ω beskonačan
- PREBROJIVA ⟶ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \ldots\}$ možemo ih poredati u niz!
- NEPREBROJIVA ⟶ $\Omega = \mathbb{R}$ (GEOMETRIJSKA VJER. - sljedeći put radimo)

Zad.) Dva igrača, Valentino i Renato, izvlače kuglicu iz bubnja u kojem su 2B i 6C. Pobjednik je koji prvi izvuče B.
Tko ima veću vjerojatnost pobjede?

HEH, BITNO JE TKO PRVI KRENE U TIM IGRAMA! :)

$$\Omega = \{\overset{V\to 1.}{B}, \overset{2.}{CB}, \overset{V\to 3.}{CCB}, \overset{4.}{CCCB}, \overset{V\to 5.}{CCCCB} \ldots \infty\}$$

$$V_{alentino} = \{B, CCB, CCCCB \ldots \infty\}$$ ⟶ NEPARAN BROJ IZVLAČENJA

!! σ-ADITIVNOST: (DISJUNKTNI SU)

$$P(V) = P(B) + P(CCB) + P(CCCCB) + \dots$$

$$= \frac{2}{8} + \frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^4\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^6\frac{1}{4} + \dots$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{16}} = \frac{4}{7} \Rightarrow P(R) = \frac{3}{7}$$

! PODSJETNIK

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{za } |x| < 1 \to \text{u vjerojatnosti uvijek vrijedi!}$$

** Izračunaj ovaj zadatak, ali kuglice se ne vraćaju u bubanj!

→ KONAČNI VJEROJATNOSNI PROSTOR

B, CCB → JER SMO 1 CRNU IZVUKLI, CCCCB, CCCCCCB → izvukli svih 6C - kraj!

$$P(V) = \frac{2}{8} + \frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} + \frac{6}{8}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}$$

→ JOŠ OSTALO 4 KUGLICE U BUBNJU (IZVUKLI 4 CRNE PRETHODNO)

JOŠ 2 OSTALE U BUBNJU

$$P(V) = \frac{4}{7}$$ → ISTO! WOW !! INCRASTING...

NA ISPITU JAKO VOLE ZADATKE TIPA a) S VRAĆANJEM

b) BEZ VRAĆANJA "

1.DZ - 9.) Novčić bacamo dok se 2 puta zaredom ne pojavi isti znak. Vjerojatnost da smo bacali paran broj puta?

$$\Omega = \{\underbrace{PP}_{\cdot 2}, GG, PGG, GPP, \underbrace{PGPP}_{\cdot 2}, GPGG, \dots\}$$

·2 → ovisi jesmo završili sa P ili G

vidljivije u 29. ZZV.

paran br. bacanja

$$P(A) = 2\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{16} + 2\cdot\frac{1}{2^6} + 2\cdot\frac{1}{2^8} + \dots =$$

ovisi jesmo završili sa PP ili GG (2 takve)

PAZI !! TRIK! JER SUMA IDE OD 1 !

$$= 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 2\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = \frac{2}{3}$$

!!!! → DUPLO VEĆA VJEROJATNOST !!

ZADACI:

Zad.) „ZABAVAN"

U bubnju se nalaze kuglice s brojevima 1 - 14 (njih 14). Izvlačimo 5. Vjerojatnost da je zbroj najveća 2 od tih 5 barem 25?

$$P(A) = \frac{\binom{12}{3} + \binom{11}{3} + \binom{10}{3} + \binom{11}{3}}{\binom{14}{5}}$$

14 + 13
14 + 12
14 + 11
13 + 12 → 11 brojeva na raspolaganju jer ako izvučemo 14 onda su 14 i 13 najveći!

1MI - 11' - 1) „Tombola"

⟿ 1 igrač ima 15 brojeva od 90. Izvlači se sve dok se nekom ne izvuče svih 15 brojeva.

Vjerojatnost da u točno n izvlačenja dobijete „Bingo" tj. da je izvučeno vaših 15 brojeva.

$$P(A) = \frac{\binom{15}{1}\binom{n-1}{14} \cdot \underbrace{14!}_{\text{poredak - gdje mi koji od mojih br.}} \cdot \binom{75}{n-15}(n-15)!}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot \ldots \cdot (90-n+1)}$$

$\boxed{n=20}$

14 13 ... 14! ... 20

ostala mjesta

$\binom{n-1}{14}$ → „naših" 14 br. mora biti izvučeno prije

$\binom{15}{1}$

dr. Burek says:

„ZA NAJHRABIJE PREK VIKENDA a) DIO ZADATKA Ⓘ"

Zad.) Koliko puta trebamo bacit 2 kocke da bi vjerojatnost da su barem jednom pali isti brojevi veća od 90%?

$$P(A) = 1 - \left(\frac{30}{36}\right)^n > 0.9$$

n → ne znamo koliko puta će se to ponoviti

$\frac{30}{36}$ → da nisu pali isti brojevi

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n < 0.1 \quad / \ln\left(\frac{5}{6}\right)$$

→ BAZA < 1 ⇒ MJENJAMO ZNAK NEJEDNAKOSTI!

$$n > 12.63$$

$$\boxed{n = 13}$$

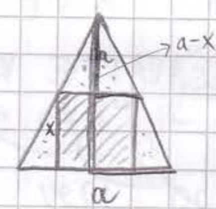
1.5. GEOMETRIJSKA VJEROJATNOST

⇝ zadnje što dolazi u školske

Pr.)

$P(A) = \frac{1}{3}$ → vjer. da smo uzeli točku iz osjenčanog djela dužine

1.DZ-5.) U jednakokračan trokut upisan je kvadrat. Na sreću biramo točku unutar trokuta. Kolika je vjerojatnost da se nalazi u kvadratu? Osnovica i visina $\underline{a}$.



$$P(A) = \frac{P_{\square}}{P_{\triangle}} = \frac{x^2}{\frac{1}{2}a^2}$$

(površina)

$$(a-x) : \frac{x}{2} = a : \frac{a}{2} \quad \text{(sličnost trokuta)}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$$

$$\frac{a(a-x)}{2} = \frac{ax}{2}$$

$$x = a - x$$

$$2x = a \Rightarrow \boxed{x = \frac{a}{2}}$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\frac{a^2}{4}}{\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{2}$$

def.

GEOMETRIJSKU VJEROJATNOST definiramo kao $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$.

! Uočimo Treba pokazati svojstvo normiranosti, aditivnosti, monotonosti.

Trivijalno slijede svojstva vjerojatnosti.

Burek says: „MOŽE DOKAZ (TO) DOĆI NA ISPITU."

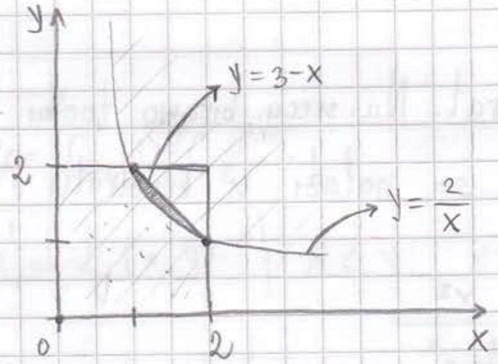
1ZZV-43.) Biramo $x, y \in [0,2]$ (dvije točke). Izračunajte vjerojatnost da je njihova suma manja od 3, a produkt veći od 2.

$x+y < 3$

$x \cdot y > 2$

$y < 3-x$

$y > \frac{2}{x}$



$$P(A) = \frac{\int_1^2 \left(3 - x - \frac{2}{x}\right)dx}{4}$$

$$P(A) = \frac{\frac{3}{2} - 2\ln 2}{4}$$

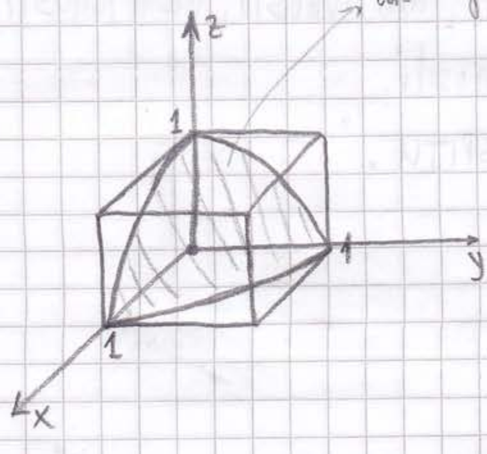
dr. Burek says:
POVRŠINE RJEŠAVAJTE KAKOGOD ŽELITE!

→ Kolika je vjerojatnost da odaberemo točku sa ruba kvadrata, ili na pravcu?

NULA! JER JE TO 1-DIMENZIJA, NEMA POVRŠINE.

Zad.) Biramo na sreću 3 broja $x, y, z \in [0,1]$. Izračunajte vjerojatnost da je zbroj njihovih kvadrata manji od 1.

$x^2 + y^2 + z^2 < 1$ ← dio kugle



$$P(A) = \frac{\frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3}\pi}{1} = \frac{\pi}{6}$$

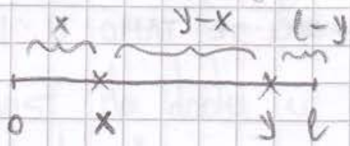
π „SAMO JE NEBO GRANICA,

ŠTO SE TIČE TEŽINE ZADATAKA,

JER MOGU DATI BILOKOJU PLOHU ....

MAT 2

1-MI-08-3.) Štap duljine l je prelomljen na 2 mjesta. Ako je vjerojatnost prijeloma na svakom mjestu jednaka, izračunajte vjerojatnost da je najkraći dio od ova tri dijela veći od $\frac{1}{4}l$?



$\frac{1}{4}l$

⟿ ekvivalentno da smo odabrali x i y iz $[0, l]$

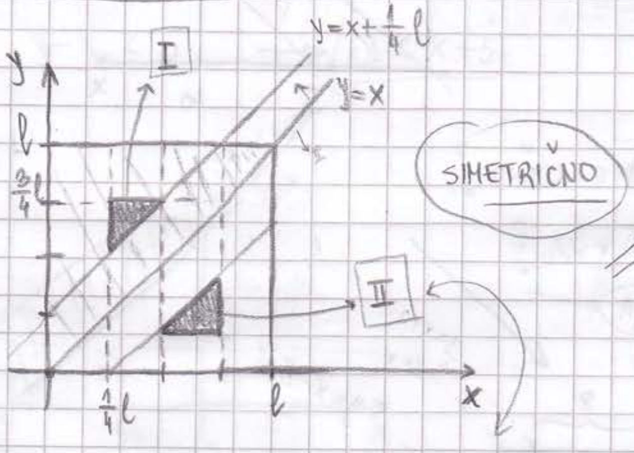
$\boxed{\mathrm{I}}$ $y > x$ (pretp.) {I slučaj}

⟿ ako je najmanji veći od $\frac{1}{4}l$ onda su i svi ostali veći od $\frac{1}{4}l$ (TO JE SVE ŠTO TREBA ZAKLJUČITI)

$x > \frac{1}{4}l$ (TO NAM MORA VRIJEDITI !)

$y - x > \frac{1}{4}l \rightarrow y > x + \frac{1}{4}l$

$l - y > \frac{1}{4}l \rightarrow y < \frac{3}{4}l$



$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}l \cdot \frac{1}{4}l}{l^2} = \frac{1}{16}$$

$\boxed{\mathrm{II}}$ $y < x$ (II slučaj → NE ZABORAVI !!!)

$\Rightarrow y,\ x-y,\ l-x > \frac{1}{4}l$

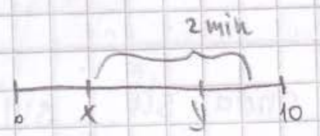
1.MI-09-3.) Provalnik provaljuje u mjenjačnicu između 2.50 i 3.00 h. Nezavisno od njega, u tom vremenu i policajac obilazi mjenjačnicu. Lopovu treba 2 min za provalu, a policajac se zadržava 5 min. Izračunajte vjerojatnost:

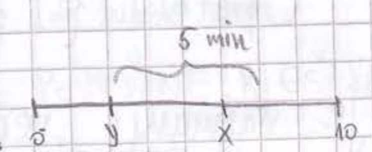
a) policajac ulovi lopova (→ NAĆI SE TAMO U ISTOM TRENUTKU)

x: provalnik → 2 min
y: policajac → 5 min

} NIJE SIMETRIČNO!

$x, y \in [0, 10]$

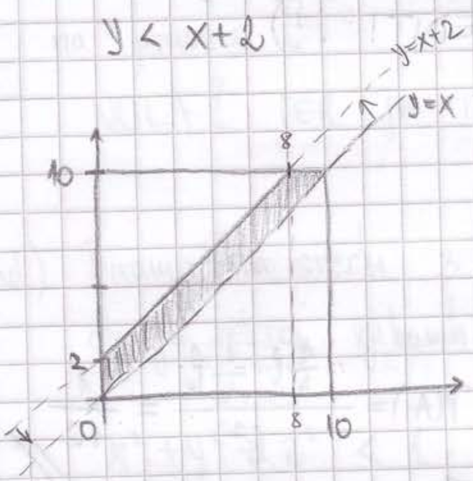


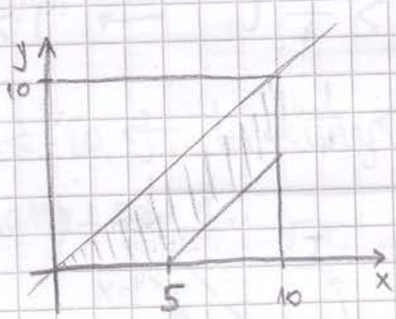


1.) $\underline{x < y}$ ILI → UNIJA   2.) $\underline{y < x}$

$y < x + 2$ $x < y + 5$

$y > x - 5$

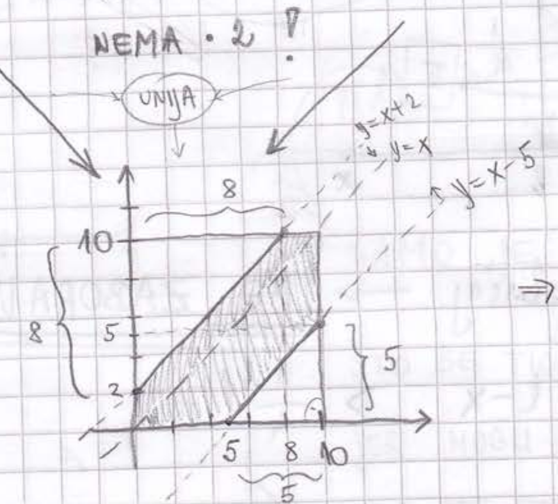




NIJE SIMETRIČNO!

NEMA · 2 !

UNIJA



$$\Rightarrow P(A) = \frac{100 - \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{8 \cdot 8}{2}}{100}$$

$$P(A) = \frac{111}{200}$$ ///

b) da provalnik dođe, provali i otiđe prije policajca

⇝ to je 1. slučaj, lijevi TROKUT $(x<y) \Rightarrow \boxed{y>x}$

↳ DA GA NE ULOVI POLICAJAC !

$$P(B) = \frac{\frac{1}{2}\,8^2}{100} = \frac{32}{100}$$ //

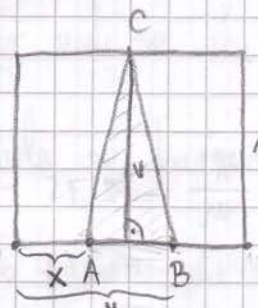
NEMA $y<x+2$ JER NEMA POLICAJ.

⇒ sve osim osjenčanog → suprotan dog.

⇝ vjerojatnost da dođu u istom trenutku je NULA ! $y=x \rightarrow$ pravac → 1-DIMENZ.

1.MI-11-2.) Na jednoj stranici kvadrata stranice 10 biramo dvije točke A, B, a na nasuprotnoj stranici točka C. Izračunajte vjerojatnost da je površina trokuta ABC manja od 25.

ILKO ZAD II



⇝ C NIJE BITNO ! GDJE GOD JE STAVIMO VISINA JE ISTA !! JER MORA BITI ⊥

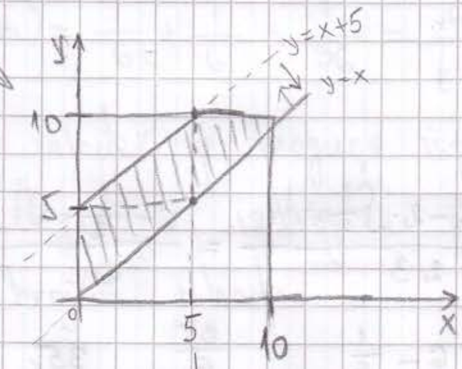
NE U 3-DIMENZIJE.

1) $x<y$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{(y-x)\cdot 10}{2} < 25 \quad /:5$$

$y>x$

$y-x<5 \longrightarrow y<x+5$



NE TREBA GLEDATI DRUGI SLUČAJ JER JE SIMETRIČAN !

ILI AKO GA GLEDAMO ODUZETI OD 100...

$$P(A) = \frac{50-\frac{1}{2}\cdot 25}{50} = \frac{3}{4}$$ //

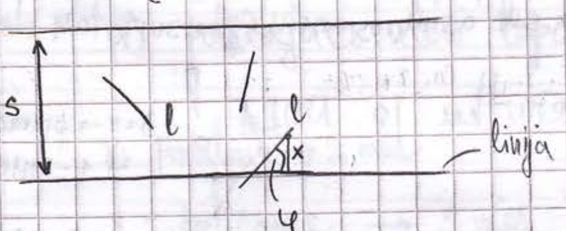
$$P(A) = \frac{100-2\frac{1}{2}\cdot 25}{100} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

1. „PI (π) POKUS" $\widetilde{\pi}$

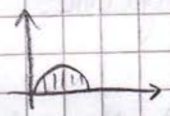
l – duljina iglice

s – razmak između linija

Random bacamo iglice na pod na kojem se nalaze vodoravne linije razmaknute za s.



UVJET DA SIJEČE: $x < \frac{l}{2} \sin\varphi$



Vjerojatnost da iglica presječe vodoravne linije?

⟿ detaljno u knjižici, ispadne:

$$P(A) = \frac{2l}{\pi s}$$

uz $\underline{s = 2l}$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2l}{\pi 2l} = \frac{1}{\pi} \approx \frac{m}{n} \Longrightarrow \pi = \frac{n}{m} = 2.75 \rightarrow \text{UUUUU. LOOOŠEE!!}$$

⟿ MALI POKUS POVODOM π – DAY-A ⟶ 14. 3. 2013.

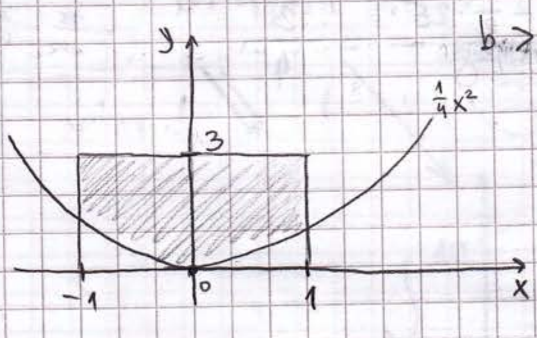
Zad.) Biramo na sreću $a \in [-1, 1]$, $b \in [0, 3]$. Izračunajte vjerojatnost da je $x^2 + ax + b > 0$ za $\forall x \in \mathbb{R}$.

$D < 0 \longrightarrow a^2 - 4b < 0$

$b > \frac{1}{4} a^2$

$a \to x$

$b \to y$



$$P(A) = \frac{6 - 2 \cdot \int_0^1 \frac{1}{4} a^2 \, da}{2 \cdot 3} = \frac{6 - \frac{1}{6} \cdot a^3 \Big|_0^1}{6} =$$

$$= \frac{6 - \frac{1}{6}}{6} = \frac{\frac{35}{6}}{6} = \frac{35}{36}$$

2. UVJETNA VJEROJATNOST

2.1. DEFINICIJA I PRIMJERI

→ MOTIVACIJA:

Kocka. Šestica. → $P(A) = \frac{1}{6}$

AKO ZNAMO DA JE PAO PARAN BROJ? (UVJET)

$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{3}$ $\quad B = \{2,4,6\}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$

$\frac{1}{6}$ → vjerojatnost da se dogodi početni događaj → $P(A)$

$\frac{3}{6}$ → vjerojatnost uvjeta → $P(B)$

Def.

Neka je B događaj takav da je $P(B) > 0$.

UVJETNA VJEROJATNOST događaja A uz uvjet B je $F \to [0,1]$ definirana je s

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}}$$

čitaj: „A uz uvjet B"

NAPOMENA!

SVUGDJE TREBAJU IĆI RAVNE OKOMITE CRTE $[P(A|B)]$

$$\boxed{P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A \mid B) = P(A) \cdot P(B \mid A)}$$

KORISNA RELACIJA ZA ZADATKE

DZ-4.) Bacamo 4 kocke. Izračunajte vjer. da je njihov zbroj veći od 6 ako su svi brojevi manji od 4.

$A = \{$ zbroj veći od 6 $\}$

$B = \{$ svi brojevi manji od 4 $\}$

zbroj veći od 6 i svi br. manji od 4

zbroj ≤ 6

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3^4 - 15}{6^4}}{\frac{3^4}{6^4}} = 0.81$$

na 4 kocke

svi br. manji od 4: 1, 2, 3

1111 → 1
1112 → 4
1113 → 4
$\binom{4}{2}$ ← 1122 → 6

biram 2 mjesta od 4

2zzv-26.) U urni se nalaze 4P, 5B, 6C kuglica. Izvlačimo 3 kuglice jednu za drugom. Izračunajte vjerojatnost ako su sve različitih boja da je prva kuglica bijela i ako znamo da je prva bijela vjerojatnost da su sve različitih boja.

$A = \{$ sve različite boje $\}$

"IZVLAČIMO JEDNU ZA DRUGOM"

$B = \{$ prva kuglica bijela $\}$ → BITAN REDOSLIJED

$P(A|B), P(B|A) = ?$

sve kuglice različite i prva bijela

B P C ILI B C P → REDOSLIJED BITAN!

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{6}{13} + \frac{5}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{4}{13}}{\frac{5}{15}} = \frac{24}{91}$$

izvukli smo jednu B

5 → 5B

15 → 15 UKUPNO

(POSLIJE NAM JE SVEJEDNO)

ISTO KAO GORE

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{6}{13}\cdot 2}{\frac{5}{15}\cdot\frac{6}{14}\cdot\frac{4}{13}\cdot 3!} = \frac{1}{3}$$

→ SVE MOGUĆE KOMBINACIJE BPC, BCP, PBC ... 3!

Zad.) → BIO PROŠLE GODINE NA LJETNOM ROKU SAMO SA NOGOMETAŠIMA...

II ZAD 4 ferovca i profesor su izašli u petak navečer van. Vjerojatnost uspješnog uleta kod prosječnog ferovca je 0.3, a kod profesora 0.9. Ako znamo da je jedan od njih imao uspješnu večer, kolika je vjerojatnost da je to bio profesor?

$A = \{$ profesor $\}$

$B = \{$ točno 1 bio uspješan $\}$

da je profesor bio uspješan

prof mora pogoditi II ferovci moraju fulati

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.9\cdot 0.7^4}{0.9\cdot 0.7^4+0.3\cdot 0.7^3\cdot 0.1\cdot\binom{4}{1}}=0.84$$

da je ili bio uspješan, ili prof ili 1 od ferovaca

1 pogodio, 3 fulala, prof fulao ↳ ODABRATI KOJI OD FEROVACA

DZ – 13.) Novčić bacamo 10 puta. Izračunajte vjerojatnost da je svih 10 puta palo pismo ako znamo da je pismo palo barem 9 puta.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\binom{10}{1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}=\frac{1}{11}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ → da padne svih 10 puta

pismo, glava, odabrat gdje je pala glava ILI $\binom{10}{9}$

⇝ NE U DESETOM BACANJU!

!! NAPOMENA: ovaj zadatak u ZZV je nejasno napisan, nema riječi „barem" 9 puta...

2.2. NEZAVISNOST DOGAĐAJA

⇝ MOTIVACIJA: U bubnju imamo 3B, 7C. Izvlačimo 2 kuglice.

Neka je $A = \{\text{prva } B\}$, $B = \{\text{druga } C\}$.

Izračunaj vjeroj. događaja A i B :

a) s vraćanjem

$$P(A) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \frac{7}{10}$$

NIJE BITNO ŠTO SE DOGODILO U 1. BACANJU
⟹ NEZAVISNI DOGAĐAJI

b) bez vraćanja

$$P(A) = \frac{3}{10} \qquad P(B) = \underbrace{\overset{1.B}{\frac{3}{10}}}_{P(A)} \cdot \overset{2.C}{\frac{7}{9}} + \underbrace{\overset{1.C}{\frac{7}{10}}}_{P(\bar{A})} \cdot \underbrace{\overset{2.C}{\frac{6}{9}}}_{P(B \setminus \bar{A})}$$

⇝ ZAVISNI DOGAĐAJI

$$P(B \setminus A) = \frac{7}{9}$$ → ako je 1.C, a druga B

$$P(B) = P(A) \cdot P(B \setminus A) + P(\bar{A}) \cdot P(B \setminus \bar{A})$$

def. Za A i B kažemo da su **NEZAVISNI** ako je

$$\underbrace{P(A) = P(A \setminus B)}_{} \qquad \text{ili} \qquad P(B) = P(B \setminus A).$$

ravna |

Slijedi:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)}$$

NUŽAN I DOVOLJAN UVJET ZA NEZAVISNOST!

def. Događaji $A_1 \ldots A_n$ su **NEZAVISNI** ako za svaki izbor $A_{i_1} \ldots A_{i_k}$ vrijedi $P(A_{i_1} \ldots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k})$

⇝ Burek says: "OVU DEFINICIJU DOBRO ZAPAMTITE JER TO VOLIMO ISPITIVATI NA ISPITIMA"

LMI-09-2.) a) Definiraj nezavisnost događaja od A,B,C.

$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$! NIJE DOVOLJNO SAMO TO !

!! MORA VRIJEDITI ! :

$$P(AB) = P(A)P(B)$$
$$P(AC) = P(A)P(C)$$

b) Ako su A,B,C nezavisni dokažite da su A i $B \cup C$ nezavisni.

$$P(A \cdot (B \cup C)) = P(AB \cup AC) = P(AB) + P(AC) - P(ABC) =$$

$$\overset{\text{nezavisni su}}{=} P(A)P(B) + P(A)P(C) - P(A)P(B)P(C) =$$

$$= P(A)\left[P(B) + P(C) - \underbrace{P(B)P(C)}_{P(BC)}\right] = P(A) \cdot P(B \cup C)$$

2.3. POTPUNA VJEROJATNOST I BAYESOVA FORMULA

⇝ MOTIVACIJA: „JEDAN IZ SVAKODNEVNOG FEROVSKOG ŽIVOTA..."

40% studenata je prošlo MAT1. Ipak, dekan se smilovao (U NEKOM PARALELNOM SVEMIRU) i dopustio svima da upišu MAT2.

⇝ svi koji su položili MAT1 → 64% MAT2 prošlo

⇝ od ostalih → 28% MAT2 prošlo

Ukupna prolaznost MAT2?

$$P(A) = \underbrace{0.4}_{P(H_1)} \cdot \underbrace{0.64}_{P(A|H_1)} + \underbrace{0.6}_{P(H_2)} \cdot \underbrace{0.28}_{P(A|H_2)} = 0.424$$

HIPOTEZA

FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI:

$$\boxed{P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2)}$$

!

⇝ OKRETANJE HIPOTEZE: $P(H_1|A)$ → ZBOG ČEGA SE NEŠTO DOGODILO!

H_1 → uzrok; A → konačni ishod

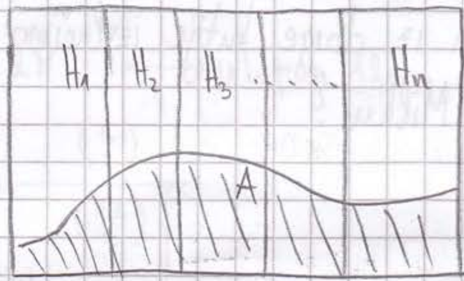
U PRAKSI VAŽNO → BAYES!

BAYESOVA FORMULA:

$$\boxed{P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)}}$$

⟶ za naš zadatak: $P(H_1 \backslash A) = \dfrac{0.4 \cdot 0.64}{0.4 \cdot 0.64 + 0.6 \cdot 0.28}$

Općenito:



HIPOTEZE → međusobno disjunktne i čine Ω

$$\left.\begin{aligned} &\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots\ldots H_n \\ &H_i \cap H_j = \phi \end{aligned}\right\} \text{PARTICIJA OD } \Omega \quad (\text{R-ovci})$$

$$P(H_i) > 0 \qquad \sum P(H_i) = 1$$

$\Rightarrow A = AH_1 \cup AH_2 \cup \cdots AH_n$

$\Rightarrow P(A) \overset{\text{disj.}}{=} P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots\ldots P(AH_n)$

$$\boxed{P(A) = P(H_1)P(A \backslash H_1) + \ldots\ldots + P(H_n)P(A \backslash H_n)}$$

OPĆENITA FORMULA POTPUNE VJEROJATNOSTI

⟶ kada god ishod drugog pokusa ovisi o ishodu prvog pokusa !

1. DZ - 17.) U kutiji su 2 M, 3 D. U drugoj kutiji 1M, 4D. Iz prve prebacimo u drugu na sreću 2 čokolade. Potom iz druge kutije izvlačimo 1 čokoladu. Vjerojatnost da smo izvukli Milku?

(M = Milka, D = Dorina)

$H_1 = \{2M\} \rightsquigarrow P(H_1) = \dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}$

$H_2 = \{1M, 1D\} \rightsquigarrow P(H_2) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}$

$H_3 = \{2D\} \rightsquigarrow P(H_3) = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}$

suma tih vjerojatnosti mora ispasti 1

$P(A|H_1) = \dfrac{\binom{3}{1}}{\binom{7}{1}}$

$P(A|H_2) = \dfrac{\binom{2}{1}}{\binom{7}{1}}$

$P(A|H_3) = \dfrac{\binom{1}{1}}{\binom{7}{1}}$

$\Rightarrow P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$

$P(A) = \dfrac{1}{7}$

NASTAVAK PREDAVANJA

2.ZZV-40.) Iz jednog snopa od 52 karte izvukli smo 1 kartu, a iz drugog snopa 2 karte. Pomiješali te 3 karte. Od njih izvukli 1 kartu. Kolika je vjerojatnost da smo izvukli asa?

$H_i = \{$ i-aseva u prvom pokusu $\}$

$A = \{$ as u drugom pokusu $\}$

$\square \to 1$, $\square \to 2$ $\to$ 1 AS ?

0 ASEVA: $P(H_0) = \dfrac{\binom{48}{1}\binom{48}{2}}{\binom{52}{1}\binom{52}{2}} \rightsquigarrow P(A \setminus H_0) = 0 = \dfrac{0}{3}$

1 AS: $P(H_1) = \dfrac{\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{1.špil AS}}\overbrace{\binom{48}{2}}^{\text{2.špil}} + \overbrace{\binom{48}{1}}^{\text{1.špil}}\overbrace{\binom{4}{1}\binom{48}{1}}^{\text{2.špil AS}}}{\binom{52}{1}\binom{52}{2}} \rightsquigarrow P(A \setminus H_1) = \dfrac{1}{3}$

1 AS

3 izvučene karte (ukupno) (1 AS + 2 bilokoje)

2 ASA: $P(H_2) = \dfrac{\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{1.špil 0, 2.špil 2AS}} + \overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{1.špil AS}}\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{2.špil AS}}\overbrace{\binom{48}{1}}^{\text{bilokoja}}}{\binom{52}{1}\binom{52}{2}} \quad P(A \setminus H_2) = \dfrac{2}{3}$

3 ASA: $P(H_3) = \dfrac{\overbrace{\binom{4}{1}}^{\text{1.špil}}\overbrace{\binom{4}{2}}^{\text{2.špil}}}{\binom{52}{1}\binom{52}{2}} \quad P(A \setminus H_3) = 1 = \dfrac{3}{3}$

$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(H_i)P(A \setminus H_i) = \dfrac{1}{13}$ // $\rightsquigarrow$ A PRIORI VJEROJATNOST HIPOTEZE

$\rightsquigarrow$ Ako znamo da smo izvukli asa, kolika je vjerojatnost da su sve 3 karte bile as?

$P(H_3 \setminus A) = ?$ $\to$ A POSTERIORNA VJEROJATNOST HIPOTEZE $\to$ PRAKSA !

$\to$ BAYESOVA FORMULA

⇝ znamo : $P(AB) = P(A)\,P(B \backslash A) = P(B)\,P(A \backslash B)$

$$\boxed{P(B \backslash A) = \frac{P(B)\,P(A \backslash B)}{P(A)}}$$

BAYESOVA FORMULA

tj.

$$\boxed{P(H_i \backslash A) = \frac{P(H_i)\,P(A \backslash H_i)}{P(A)}}$$

!

1.MI – 07 – 4.) Neki izvor emitira znak 1 s vjerojatnosti 0.75. Na izlazu iz kanala 5 % signala se krivo interpretira. Ako znamo da smo primili 1 kolika je vjerojatnost da smo 1 i poslali?

$P(H_0) = 0.25 \longrightarrow \{\text{poslali } 0\} = H_0$

$P(H_1) = 0.75 \longrightarrow \{\text{poslali } 1\} = H_1$

$A = \{\text{primljena jedinica}\}$

$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \backslash H_1) + P(H_0) \cdot P(A \backslash H_0)$

$P(H_1 \backslash A) = \,?$

BAJO:

$$P(H_1 \backslash A) = \frac{P(H_1)\,P(A \backslash H_1)}{P(A)} =$$

$P(A \backslash H_0) = 0.05$

$P(A \backslash H_1) = 0.95$

} zbog krive interpretacije od 5 %

$$= \frac{0.75 \cdot 0.95}{0.75 \cdot 0.95 + 0.25 \cdot 0.05} =$$

$$= 0.983$$

1.MI-10.-4.) 34 % ljudi ima krvnu grupu O → prima samo O

37 % → A → O i A primaju

21 % → B → O i B primaju

8 % → AB → primaju sve

a) Vjerojatnost da slučajno odabrana osoba može primiti krv od slučajno odabrane osobe?

$P(O) = 34\ \%$

$P(A) = 37\ \%$

$P(B) = 21\ \%$

$P(AB) = 8\ \%$

$U = \{\text{uspješna transfuzija}\}$

$P(U) = ?$

$$P(U) = P(O)\cdot P(U\backslash O) + P(A)\cdot P(U\backslash A) + P(B)P(U\backslash B) + P(AB)P(U\backslash AB)$$

$$P(U) = 0.34\cdot \overset{\text{prima samo O}}{0.34} + 0.37\cdot(\overset{\text{O}}{0.34} + \overset{\text{ili A}}{0.37}) + 0.21\cdot(\overset{\text{O}}{0.34} + \overset{\text{ili B}}{0.21}) + 0.08\,(\cdot \overset{\text{primaju sve}}{1})$$

$P(U) = 0.5738$

b) Ako sam uspješno primio krv, kolika je vjerojatnost da je moja krvna grupa AB?

$P(AB \backslash U) = ?$

BAJO: $P(AB\backslash U) = \dfrac{P(AB)\,P(U\backslash AB)}{P(U)} = \dfrac{0.08\cdot 1}{0.5738} = 0.14$

2.ZZV-72.) 4 krvoločna lovca gađaju vepra. Vjerojatnost pogotka prvog lovca je 0.3, a ostalih 0.2. Za ubijanje malog vepra potrebna su 2 pogotka. Jedan lovac je opazio vepra, triput je opalio i vepar je odapeo papke. Izračunajte vjerojatnost da je prvi lovac ubio malog vepra.

PAZI !!

NE ZABORAVI !

U KOJEM JE POGODIO, REDOSLIJED BITAN ?

$H_i = \{i\text{-ti lovac}\}$ $P(H_1) = \frac{1}{4}$ $A = \{\text{vepar ubijen}\}$

$P(H_1 \backslash A) = ?$ → BAJO !!

$$P(A \backslash H_1) \underbrace{=}_{\text{triput opalio}} 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 \cdot \binom{3}{2}$$

$$P(A \backslash H_2) = 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot \binom{3}{2}$$

$$P(A \backslash H_3) = P(A \backslash H_4) = P(A \backslash H_2)$$

POANTA ZADATKA NE ZABORAVITI OVO !

$$\Rightarrow P(H_1 \backslash A) = \frac{P(H_1)\,P(A \backslash H_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(H_i)\,P(A \backslash H_i)} = 0.41$$

Str. 83

1-9 → NADOGRADNJI

PREK VIKENDA CIJELO 2. POGLAVLJE + 1. DZ DO KRAJA OD 10.-91

može bez zad. sa n, m ...

čudni 33

1. MI-08-4.) Bacili smo kocku, a zatim je bacili još onoliko puta koliki je broj pao prvi put. Ako znamo da su ukupno pale točno 2 petice, kolika je vjerojatnost da je jedna od njih pala u prvom bacanju?

$H_i = \{\text{broj na prvoj kocki}\}$ ("nultoj")

$A = \{\text{točno 2 petice}\}$

$P(H_i) = \frac{1}{6}$

$P(H_5 | A) = ?$ $\longrightarrow$ OPET ČIKA BAJO

$P(A | H_1) = 0$

$P(A | H_2) = \frac{1}{36}$ → palo 2 → $\boxed{55}$ → 1 mogućnost od 36
↳ znamo da su pale točno 2 petice

$P(A | H_3) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}$

točno 2 petice

bilo koji broj osim petice

↳ ODABIR KOJE KOCKE OD 3 ! NE ZABORAVI !!

$P(A | H_4) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ → na ostale 2 kocke (bacanja) bilošto osim petice

odabiremo još 1 peticu ← jedna ide → točno 2 petice

$P(A | H_5) = \binom{5}{1} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^4$!!!

↳ JER JE VEĆ PALA JEDNA PETICA !!

PAZITI !!!

$P(A | H_6) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4$

$$P(H_5 | A) = \frac{P(H_5) P(A | H_5)}{\sum_{i=1}^{6} P(H_i) P(A | H_i)} = 0.4926$$

3. DISKRETNE SLUČAJNE VARIJABLE

3.1. DEFINICIJE I OSNOVNA SVOJSTVA

⇝ neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ konačan ili prebrojiv skup te neka varijabla X svakom elementarnom događaju pridružuje neku vrijednost iz S.
Kolika je vjerojatnost da X poprimi neku vrijednost iz tog skupa? $P(X = x_k) = ?$

!
def.
Preslikavanje $X : \Omega \to S$ je **DISKRETNA SLUČAJNA VARIJABLA** ako za $\forall x_k \in S$ je skup $A_k = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_k\}$ događaj.

⇝ oznake: $p_k = P(X = x_k)$, $p_k > 0$ $\boxed{\Sigma p_k = 1}$ ČESTO KORISTITI!

⇝ ZAKON RAZDIOBE SLUČAJNE VARIJABLE:

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k & \ldots \end{pmatrix}$$

Zad.) Bacamo 3 kocke. Neka je slučajna varijabla broj šestica. Odredi razdiobu od X i izračunaj vjerojatnost $P(X \geq 2) = ?$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^3}_{p_0} & \underbrace{\binom{3}{1}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2}_{p_1} & \underbrace{\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}}_{p_2} & \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^3}_{p_3} \end{pmatrix}$$

mogući broj šestica

vjerojatnost da padne taj br. šestica

!! ODABRATI NA KOJOJ KOCKI JE PALA ŠESTICA !

SAVJET !

NE ZABORAVI — NAJKOMPLICIRANIJI SLUČAJ RAČUNAJ KAO 1 MINUS SUMA OSTALIH !

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = p_2 + p_3 = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

vjerojatnost da padne 2 ili više šestica

2.DZ-2.) U urni se nalazi n-kuglica numeriranih s brojevima 1–n. Izvlačimo 3. Neka je X vrijednost najvećeg od ta 3 broja. Odredi zakon razdiobe ove slučajne varijable.

jer smo najmanje mogli izvući kombinaciju 1 2 3 (max)

$$X \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & \dots & k & \dots & n \\ \frac{1}{\binom{n}{3}} & \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{3}} & \frac{\binom{4}{2}}{\binom{n}{3}} & \dots & \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}} & \dots & \frac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} \end{pmatrix}$$

točno kombin. 1 2 3 manji

od 3 manja koja izvuč još 2 br. koja su manja od 4 koji je fiksiran

ILI

NE ZABORAVI !!

$$P(X=k) = \frac{\binom{k-1}{2}}{\binom{n}{3}}, \quad k = 3, \dots, n$$

→ službeno rješenje u knjižici.

Zad.)

x = broj na prvoj kocki

y = broj na drugoj kocki

$P(x \leq 2,\ y = 3) = ?$

$$P(x \leq 2,\ y = 3) = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{36}$$

⟶ pretpostavili da su NEZAVISNI

$x \leq 2$ ↓ 1 ILI 2 $\quad$ $y = 3$ ↓ SAMO 3

def.

SLUČAJNE VARIJABLE $x, y : \Omega \longrightarrow S$ su NEZAVISNE ako za sve $x_k, y_j \in S$ vrijedi

$$\boxed{P(x = x_k,\ y = y_j) = P(x = x_k) \cdot P(y = y_j)}\ .$$

def.

SLUČAJNE VARIJABLE $X_1, \dots, X_n$ definirane na istom vjerojatnosnom prostoru Ω su nezavisne ako za sve $A_1, \dots, A_n$ (događaje) $\in S$ vrijedi $P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(X_n \in A_n)$.

••• FUNKCIJE DISKRETNIH SLUČAJNIH VARIJABLI •••

⟶ Neka je x neka slučajna varijabla, $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Kolika je razdioba od varijable $y = \varphi(x)$?

npr. $y = \sin x$

$y = x^2$

$\vdots$

Primjer 1.

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

a) Odredi razdiobu od $Y = X^2$.

$$Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ X-evi se kvadriraju, VJEROJATNOSTI OSTANU ISTE !

b) Odredi razdiobu $Y = X_1 \cdot X_2$ gdje X_1 i X_2 imaju razdiobu kao X i nezavisne su.

$$Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0.16 & 0.04 & 0.51 & 0.05 & 0.08 & 0.16 \end{pmatrix} \to$$ MNOŽIMO SVAKI SA SVAKIM IZ RAZDIOBE

$\rightsquigarrow$ KAKO RAČUNAMO VJEROJATNOSTI ? :

$$P(Y = -2) = P(X_1 = -1, X_2 = 2) \overset{\text{ILI}}{+} P(X_1 = 2, X_2 = -1)$$

$$\overset{\text{def.} \to \text{nezavisne}}{=} P(X_1 = -1) \cdot P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2) \cdot P(X_2 = -1) =$$

$$= 0.2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.08 + 0.08$$

$$= 0.16$$

ITD. ZA OSTALE ...

ZAKLJUČAK: $X_1 \cdot X_2 \neq X^2$ IAKO X_1 i X_2 IMAJU ISTU RAZDIOBU !

3.2. NUMERIČKE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH VARIJABLI

def.

OČEKIVANJE (OČEKIVANI ISHOD SLUČAJNE VARIJABLE) definiramo kao

$$\boxed{E(x) = \sum_k x_k \cdot p_k}$$ ako konvergira.

$\rightsquigarrow$ oznake još i $mX, \mu X, \overline{X}, EX \ldots$

$\rightsquigarrow$ za prethodni primjer vrijedi $E(x) = -1\cdot 0.2 + 0\cdot 0.3 + 1\cdot 0.1 + 2\cdot 0.4$

$E(x) = 0.7$

Primjer 2.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & \ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \ldots \end{pmatrix}$$

$$E(x) = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$$

$= +\infty \longrightarrow$ SUMA DIVERGIRA!

$\Rightarrow$ OČEKIVANJE NE POSTOJI !!

2.DZ-5.) Imamo 1 grlo i 7 žarulja. 3 su ispravne i 4 neispravne. Ako isprobavamo jednu po jednu do pojave svjetlosti, koji je očekivani broj pokušaja?

$$X \sim \begin{pmatrix} \overset{\text{1. POKUŠAJ}}{1} & \overset{\text{U 2. POKUŠAJU}}{2} & 3 & 4 & 5 \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} & \frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

ODMAH ISPRAVNA; NEISPRAVNA, ISPRAVNA; NEISPR., NEISP., ISPRAVNA; NEIS., NEISP., NEISP., ISPRAVNA

$$E(X) = 1\cdot\frac{3}{7} + 2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + 3\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} + 5\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}$$

$$E(X) = \dots = 2$$

Zad.) U nekom kasinu igrač na ruletu igra opciju par/nepar (0, 1-36). Kolika je očekivana dobit ako je uložio 100 kn na par?

$$X \sim \begin{pmatrix} -100 & 100 \\ \frac{19}{37} & \frac{18}{37} \end{pmatrix}$$

NEPARNI PARNI

$$E(X) = -100\cdot\frac{19}{37} + 100\cdot\frac{18}{37} = -100\cdot\left(\frac{19}{37}-\frac{18}{37}\right) = -2.7 \text{ kn}$$

Zad.) Koliko treba nositi negativan odgovor u testu na zaokruživanje ako ima 5 ponuđenih odgovora, a pitanja nose po 2 boda, da očekivanje nasumično zaokruženih odgovora bude 0?

bodovi za netočan

$$X \sim \begin{pmatrix} x & 2 \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

4 su netočna

točan odgovor (SAMO JEDAN)

$$E(X) = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$\boxed{x = -0.5}$$

1.MI-10-4.) a) Iz kutije u kojoj je 1 B i 4 C izvlačimo jednu po jednu kuglicu s vraćanjem u kutiju dok ne izvučemo B. Neka varijabla X bude broj izvlačenja.

$E(X) = ?$

$P(X \le 15 \mid X > 10) = ?$ → "AKO JE VEĆE OD 10, KOLIKA JE VJER. DA JE ≤ 15?"

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5} & & \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

ODMAH B; C, B; S VRAĆANJEM

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2} = 5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \Big|'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

!!

$$P(X \le 15 \mid X > 10) = \frac{P(10 < X \le 15)}{P(X > 10)} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{11}\cdot\frac{1}{5} + \dots + \left(\frac{4}{5}\right)^{14}\cdot\frac{1}{5}}{\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\cdot\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{11}\cdot\frac{1}{5} + \dots}$$

$n=11$, $n-1$!!, $n=15$

$$= 0.6723$$

b) =||= dok DVA PUTA ne izvučemo B.

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\binom{2}{1} & \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\binom{3}{1} & \cdots & \left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\binom{n-1}{1} \end{pmatrix}$$

B B; C B B / B C B ← ODABRAT KOMBINACIJU; C C B B / C B C B / C B B C ← ODABRAT 1 KOMBINACIJU; $\binom{n-1}{1} = (n-1)$

$$E(X) = \sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2 =$$

!! PAZI

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left[\frac{2}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^3} - 0\right] =$$

PRVI ČLAN, $n=1$!!

$$= 10$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \Big|' \qquad (1-x)^{-2} \Big|' \to -2\cdot(1-x)^{-3}\cdot(-1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

TM „SVOJSTVO OČEKIVANJA"

⟶ Neka su X, Y na istom prostoru Ω, a $s, t \in \mathbb{R}$

i) $E(s\cdot X + t\cdot Y) = sE(X) + tE(Y)$ ⟶ LINEARNOST

ii) ako su X, Y NEZAVISNE : $\boxed{E(X\cdot Y) = E(X)\cdot E(Y)}$

! DOKAZ:

$$E(s\cdot X) = \sum_k s\cdot x_k \cdot p_k = s\cdot \sum_k x_k\cdot p_k = s\cdot E(X)$$

$$E(X+Y) = \sum_{jk}(x_j + y_k)\cdot p_{jk} = \sum_{jk} x_j\, p_{jk} + \sum_{jk} y_k \cdot p_{jk} =$$

$$= \sum_j x_j \underbrace{\sum_k p_{jk}}_{p_j} + \sum_k y_k \sum_j p_{jk} = \sum x_j p_j + \sum y_k p_k = E(X) + E(Y) \quad \text{I}$$

$$E(X\cdot Y) = \sum_{jk} x_j \cdot y_k \cdot p_{jk} = \sum x_j y_k \cdot p_j \cdot p_k = \sum x_j p_j \sum y_k p_k = E(X)\cdot E(Y) \quad \text{II}$$

⟶ Ako znamo razdiobu od X, koliko je očekivanje od $Y = \Psi(X)$?

$\Rightarrow$ prethodni primjer1. : $Y = X^2 \Longrightarrow E(X) = E(X^2) = -2\cdot 0.16 + \cdots 4\cdot 0.16 = 1.9$

! $E(X^2) \neq E(X)^2$! $\qquad E(X^2) = \sum_k x_k^2\, p_k$

OPĆENITO:

$$\boxed{E(\Psi(X)) = \sum_k \Psi(x_k)\cdot p_k}$$

def.

ISHODIŠNI MOMENT REDA n od slučajne varijable X definira se kao

$$\boxed{E(X^n) = \sum_k x_k^n\, p_k}$$

def.

CENTRALNI MOMENT REDA n definiramo sa

$$\boxed{E[(X - \underbrace{E(X)}_{mx})^n] = \sum_k (x_k - mx)^n\, p_k} \qquad mx = E(X)$$

def.

DISPERZIJA ILI VARIJANCA ILI RASIPANJE slučajne varijable X je (za $n=2$)

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] \qquad E(X) = mx$$

⟿ DISPERZIJA je mjera raspršenosti neke varijable.

Primjer:

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \qquad D(x) = \frac{1}{3}$$

$$D(x) < D(y)$$

$$y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad D(y) = \frac{1}{2}$$

! Uoči: $D(x) \geq 0$

def.

STANDARDNA DEVIJACIJA ILI ODSTUPANJE

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D(x)}}$$

! $D(x) \geq 0$

1\. MI-09-5.) Neka je X maksim. vrijednost od 2 broja (izabrana) iz skupa $\{1,\dots,7\}$. Isti broj može biti 2 puta odabran. Odredite disperziju od X.

$$X \sim \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{49} & \frac{3}{49} & \frac{5}{49} & \frac{7}{49} & \frac{9}{49} & \frac{11}{49} & \frac{13}{49} \end{pmatrix}$$

12, 21, 22

13, 31, 23, 32, 33

$$E(x) = \frac{1}{49}\cdot 1 + \frac{3}{49}\cdot 2 + \dots + 7\cdot\frac{13}{49} = 5.143$$

$$D(x) = \sum_{k=1}^{7} (x_k - E(x))^2 p_k = 2.69$$ $\longrightarrow$ po definiciji!

„BILO JEDNE GODINE NA ISPITU:"

Izvedite formulu za $\boxed{D(x) = E(x^2) - E(x)^2 = \sum_k x_k^2 p_k - m x^2}$

DOKAZIĆ / IZVODIĆ $\top$

$$D(x) = E\left[x^2 - 2x E(x) + E(x)^2\right]$$

$$= E(x^2) - 2E(x)E(x) + E(x)^2 =$$

$$= E(x^2) - E(x)^2$$

$\top$

koristili svojstvo linearnosti i da konst. može ići van

krenuli po definiciji da vrijedi $D(x) = E\left[(x - E(x))^2\right]$

$\boxed{\text{TM}}$ „SVOJSTVO DISPERZIJE"

i) $D(sX) = s^2 D(X)$ [OČIGLEDNO]

ii) ako su X i Y NEZAVISNE tada

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$$

DOKAZIC: (ISTO BILO NA ISPITU)

$$D(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - \left[E(X+Y)\right]^2 =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - \left(E(X) + E(Y)\right)^2 =$$

$$= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{D(X)} + \underbrace{E(Y^2) - E(Y)^2}_{D(Y)} + \underbrace{2E(XY) - 2E(X)E(Y)}_{=0 \text{ AKO SU NEZAVISNI}} =$$

PRESKOČILI CIJELO 3.2 i iz 3.3 str. 103, 104, 105 → u 2. CIKLUSU RADIMO

1.MI-11-4.) a) DOKAŽITE SVOJSTVO DISPERZIJE ↑ II

b) Ako je $D(X) = 2$, $D(Y) = 4$ i X, Y su nezavisni izračunajte $D(2X - Y)$.

$$D(2X - Y) = 4D(X) + D(Y) = 4 \cdot 2 + 4 = 12$$

II ILKOV ZADATAK ! TIPIČNE ILKOVE FORE !!

PAZI ! JER (−1) IDE ISPRED NA KVADRAT !

2.KPZ - 12 - 2)

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ p & p^2 & p^3 & p^4 & \dots \end{pmatrix}$$

Odredite p, $E(x)$, $D(x)$.

suma svih p-ova mora biti 1!

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^n = \frac{1}{1-p} - 1 = 1$$

PAZI !! FALI PRVI (NULTI) ČLAN!

$p^0 = 1$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{2}$$

PODSJETNIK:

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Big|'$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \Big| \cdot x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \Big|'$$

$$\sum n^2 x^{n-1} = \frac{(1-x)^2 + x \cdot 2 \cdot (1-x)}{(1-x)^4} = \frac{\cancel{(1-x)}\left[1-x+2x\right]}{(1-x)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{1+x}{(1-x)^3} \quad \Big| \cdot x$$

$$\Rightarrow \sum n^2 x^n = x \cdot \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n p^n$$

$$\Rightarrow E(x) = p \frac{1}{(1-p)^2} = 2$$

$$D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 p^n - 2^2 =$$

$$= p \frac{1+p}{(1-p)^3} - 4 = 2$$

$$\left\{ D(x) = \sum_k x_k^2 p_k - mx^2 = E(x^2) - E(x)^2 \right\}$$

KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE

„VRLO VAŽNE! SKORO SVAKE GODINE NA ISPITU!"

def.

KARAKTERISTIČNU FUNKCIJU varijable X definiramo s

$$\boxed{\vartheta_X(t) = E\left[e^{itX}\right] = \sum_k e^{itx_k}\cdot p_k}$$

pri čemu je „i" imaginarna jedinica.

TM „SVOJSTVA"

i) KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA JEDNOZNAČNO ODREĐUJE SLUČAJNU VARIJABLU

↳ NAJBITNIJE SVOJSTVO!!

ii) Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne, tada je

$$\boxed{\vartheta_{X_1+\dots+X_n}(t) = \vartheta_{X_1}(t)\cdot \dots \cdot \vartheta_{X_n}(t)}$$

iii) $$\boxed{E(X^n) = \frac{\vartheta^{(n)}(0)}{i^n}}$$ → NAJS NAJS!!

⇝ posebno za $n=1$: $\boxed{E(X) = -i\,\vartheta'(0)}$!

$$\rightsquigarrow \boxed{D(X) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2}$$

2.DZ-11.) Slučajna varijabla X poprima vrijednosti iz $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ s jednolikom razdiobom. Izračunaj $D(X)$, $E(X)$

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\vartheta_X(t) = e^{-2it} \cdot \frac{1}{5} + e^{-it} \cdot \frac{1}{5} + e^{0 \cdot it} \cdot \frac{1}{5} + e^{1 \cdot it} \cdot \frac{1}{5} + e^{2 \cdot it} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\cos t + \frac{2}{5}\cos 2t$$

SIS:

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$E(X) = 0$ → „VIDI SE ODMAH S MJESECA ZBOG DERIVIRANJA I UVRŠTAVANJE NULE !" ALI I PO DEF. ...

ZAD. IZ 3. POGL. → SAMO OD 1.-13.

OSTALI ZAD SU ZA ONIH 5 PROMILA STUDENATA ☺ BUBA RULZ

IZ 4. POGL. SVIH 25 ZAD !

U 2. ŠK. ULAZI 2., 3. I 4. POGLAVLJE !

4. PRIMJERI DISKRETNIH RAZDIOBA

4.1. GEOMETRIJSKA RAZDIOBA

⇝ ponavljanje pokusa do prve realizacije nekog događaja

⇝ sa vraćanjem! u svakom izvlačenju isti uvjeti

⇝ neka je x broj ponavljanja, a p vjerojatnost realizacije događaja A

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots & k \\ p & (1-p)p & (1-p)^2 p & & \ldots\ldots & (1-p)^{k-1}\cdot p \end{pmatrix}$$

$$\boxed{P(x=k) = (1-p)^{k-1}\cdot p} \quad \boxed{,\ k = 1, 2, 3 \ldots}$$

!

" SVAKE GODINE DOĐE DEFINIRATI RAZDIOBU I SKIDAJU SE BODOVI AKO SE NE NAPIŠU **k-OVI** OD KUDA IDU ... " !!!

$X \sim G(p)$ (samo oznaka, zapis onog gore...)

" OVO JE JEDINA TEORIJA KOJA MOŽE DOĆI NA ISPITU, a), b), c) bla... "

$$E(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}\cdot p = p\,\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

$D(x) = \ldots$ D.Z. $\mathbb{I}$

⟿ KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p = p(1-p)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{it}(1-p)\right]^k =$$

$$= \frac{p}{1-p} \cdot \left(\frac{1}{1-e^{it}(1-p)} - 1 \right) = \frac{p e^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$$ //

DZ provjeri ☺

$$\boxed{E(X) = -i\varphi'(0) = \frac{1}{p}}$$

TM „ODSUSTVO PAMĆENJA"

⟿ X ima GEOMETRIJSKU RAZDIOBU ako i samo ako vrijedi za sve

$k, m \geq 1$

$$P(X=k+m \mid X>k) = P(X=m)$$

OVAJ DOKAZ ISTO VOLE PITATI ! ← Burek

Dokaz: (⇒)

$$P(X=k+m \mid X>k) = \frac{P(X=k+m, X>k)}{P(X>k)} =$$

$$= \frac{(1-p)^{k+m-1} \cdot p}{\cancel{(1-p)^k}} = P(X=m)$$ ☺

(⇐) UPIŠI PMF ☺ ☺

SADA PONOVNO IZRAČUNATI ZAD:

$P(X \leq 15 \mid X > 10)$

$= P(X \leq 5) \ldots$

„DR. Π - ZADATAK" → DRPI PONOS ! Π

1.MI - 11 - 6.) b) Iz snopa od 52 karte izvlačimo jednu po jednu kartu dok ne izvučemo asa ili boju trefa. Izračunajte $P(X > E(X))$.

→ 4 ASA I 13 TREFOVA → ALI 1 TREF JE AS ?!

$$X \sim G\left(\frac{16}{52}\right)$$

→ p

navlačenje na PI BROJKE !!! Π

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{52}{16} = \frac{13}{4}$$

BUREK RUKOPIS Π

→ CIJELOBROJNI

$$P\left(X > \underbrace{\frac{13}{4}}_{3.25}\right) = (1-p)^{3} = \left(\frac{9}{13}\right)^3 = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + \dots = 1 - P(X=3) - P(X=2) - P(X=1)$$

→ SAMO DA NIJE U 1, 2, ILI 3

1.MI - 08 - 6.) ILKO ZADATAK

Neka su X_1, X_2 nezavisne slučajne varijable s istom geom. razdiobom p.

a) Odredite razdiobu varijable $Y = X_1 + X_2$

$X_1 \sim G(p)$ $\qquad P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p \qquad k = 1, 2, 3, \dots$

$X_2 \sim G(p)$

$Y = X_1 + X_2 \implies 2, 3, 4, 5 \dots$! (zbog $X_1 = 1 + X_2 = 1 = 2$ prvi takav y)

$P(Y=k) = ?$

UZMEMO NEKE VRIJEDNOSTI:

$P(Y=1) = 0$

$P(Y=2) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) \overset{\text{nezavisne}}{=} P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1) = p \cdot p = p^2$

k u formuli

$P(Y=3) = P(\underset{k}{X_1 = 1}, \underset{k}{X_2 = 2}) \overset{\text{ILI}}{+} P(X_1 = 2, X_2 = 1) = \underset{\text{ISTA VJEROJATNOST}}{2} \cdot [p \cdot (1-p) \cdot p] = 2p^2(1-p)$

$$P(Y=4) = \overset{\substack{1+3,\ 2+2,\ 3+1 \\ \uparrow}}{3} \cdot p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2$$

$$\Rightarrow \underline{P(Y=k) = (k-1)\,p^2(1-p)^{k-2}} \;//\; \underline{\underline{k = 2, 3, 4, \ldots}} \;//$$

$\rightarrow$ DZ INDUKCIJA !! $\Uparrow$

HVALA KOLEGI !!!

b) $P(Y>3)$ ako je $p = \frac{1}{3}$ $= ?$

$$P(Y>3) = 1 - P(Y=2) - P(Y=3)$$

$\rightarrow$ k ide od 2 pa nemamo 0 i 1 !

$$\ldots P(Y>3) = \frac{20}{27} \;//$$

4.2. BINOMNA RAZDIOBA

⟶ ponavljamo pokus n-puta bez obzira ponovi li se što ili ne

⟶ slučajna varijabla X bilježi KOLIKO PUTA OD n SE DOGODIO NEKI DOGAĐAJ

to su zad. npr. Bacamo kocku 10 puta. Vjerojatnost da je petica pala tri puta?

$\Rightarrow \quad X \sim B(n, p)$

n – BR. PONAVLJANJA

p – VJERJ. U 1 PONAVLJANJU DA SE DOGODI PROMATRANI DOGAĐAJ

npr. $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$

$$\boxed{P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$

MOŽE SE DOGODITI DA PETICA NIJEDNOM NE PADNE

$$\boxed{E(x) = n \cdot p}$$!

IZVOD:

$E(x) = \sum_{k=0} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ = DZ za one voljne izazova !!

ILI

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\vartheta_x(t) = E\left(e^{itx}\right) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\underbrace{e^{it} \cdot p}_{a})^k (\underbrace{1-p}_{b})^{n-k}$$

$$= \left(pe^{it} + 1 - p\right)^n$$

MAT 1. 1. KNJIŽICA 20. str. BINOMNA FOR.

$\Rightarrow \quad E(x) = -i\,\vartheta'(0) = \dots = np$ $\Uparrow$

•• **DISPERZIJA:**

$$D(x) = -\vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \dots$$

$$\boxed{D(x) = np(1-p)}$$

•• **SVOJSTVO STABILNOSTI** ••

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\sim B(n_1, p) \\ X_2 &\sim B(n_2, p) \end{aligned}\right\} \text{nezavisne} \Rightarrow \boxed{X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)}$$

PRIČA:

npr. Ako bacimo 100 puta kocku i gledamo koliko puta padne šestica pa onda bacamo još 200 puta. Isto bi bilo da smo odmah bacali kocku 300 puta i gledali koliko šestica je palo.

SKORO SVAKE GODINE BUDE DOKAZIĆ NA ISPITU

DOKAZIĆ:

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) = \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) =$$

$$= \left(pe^{it} + 1 - p\right)^{n_1} \cdot \left(pe^{it} + 1 - p\right)^{n_2} =$$

$$= \left(pe^{it} + 1 - p\right)^{n_1 + n_2} \quad \Uparrow$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$$

//

BERNOULLIJEVA SLUČAJNA VARIJABLA

⟶ binomna razdioba najvažnija, statistika ...

⟶ to je s.varijabla X_i koja bilježi JE LI SE NEŠTO DOGODILO ILI NIJE, ishod samo JEDNOG JEDINOG POKUSA

$$\boxed{X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}}$$

NEZAVISNE VARIJABLE

$$E(X_i) = p$$

$$D(X_i) = p(1-p)$$

BINOMNA RAZDIOBA JE SUMA n SLUČAJNIH BERNOULLIJEVIH VARIJABLI.

$$X \sim B(n,p) \longrightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$E(X) = E\left(\sum X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$$

$$D(X) = D\left(\sum X_i\right) = \sum D(X_i) = np(1-p)$$

⟶ binomnu razdiobu možemo izvesti na ova tri načina dosad napisana!

2.DZ - 16.) U krug je upisan kvadrat. Izračunajte vjerojatnost da od 10 na sreću odabranih točaka unutar kruga barem 2 leže unutar kvadrata.

$$X \sim B(10, p)$$

$a^2 + a^2 = (2r)^2$

$2a^2 = 4r^2$

$\underline{a = r\sqrt{2}}$

$$P = \frac{P_\square}{P_\circ} = \frac{(r\sqrt{2})^2}{r^2\pi} = \frac{2}{\pi} \quad //$$

BAREM 2 TOČKE ↑

$$X \sim B\left(10, \frac{2}{\pi}\right)$$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + \dots + P(X=10) =$$

LAKŠE

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) =$$

VIDI PROŠLI TJEDAN

→ PAZI! TIPIČNA GREŠKA!

$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots$!!

$$= 1 - \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^1\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)^9 =$$

$$= 0.999 \quad //$$

→ ZA PRETPOSTAVITI DA JE VELKA VJEROJATNOST!

4.3. POISSONOVA RAZDIOBA

$\xrightarrow{\text{fra.}}$ čitaj: POASONOVA

npr. – na 300 str. knjige imamo 900 grešaka, ZATIPAKA

$$E(x) = 3 = \underbrace{900}_{\substack{\text{BROJ}\\ \text{GREŠAKA}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{300}}_{\substack{\text{VJEROJ.}\\ \text{DA SE POJAVI 1 GREŠKA}}} = n \cdot p$$

→ u pozadini priče binomna razdioba

→ IPAK DOŽIVITI KAO NEŠTO DRUGO...

⟶ $\boxed{E(x) = \lambda}$ λ ..... intenzitet pojavljivanja nekog događaja

$\xrightarrow{\text{npr.}}$ dolazak nekih informacija (jedinica) u sustav ⟶ POISSONOVA RAZDIOBA → intenzitet dolazaka

⟶ telefonski pozivi u sat vremena u nekom call centru i slično...

$\boxed{\text{TM}}$

Neka je n velik, a p malen. Ako je $\lambda = n \cdot p$ tada binomna razdioba

$$\boxed{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$

DOKAZ (OVO MORATE ZNAT' DOKAZAT!)

$$\Rightarrow p = \frac{\lambda}{n} \Rightarrow \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}}_{k-1} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots}_{1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1} \Big/ \lim_{n \to \infty}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

za $n = \infty$

$\approx$ za n samo „velik"

→ kraće pišemo: $B(n,p) \approx P(\lambda)$ gdje je $\lambda = n \cdot p$

→ ovu razdiobu nazivamo POISSONOVA RAZDIOBA

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$$ $\boxed{k = 0, 1, 2, \dots, \infty}$

MOŽE DOĆI 0 JEDINICA U SUSTAV!

1.MI-08-7.) Na server u prosjeku dolazi 180 mailova u jednom satu. Izračunajte vjerojatnost da je u jednoj minuti stiglo barem 3 maila.

ZAKLJUČAK → IMAMO INTENZITET DOLAZAKA → POISSON!

$\lambda = 180$ mail/h

$\Rightarrow \lambda = 3$ mail/min

16 NA ISPITU!

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

„barem"

→ NE ZABORAVI!

! Uoči: JEDINO KOD GEOMETRIJSKE NEMA NULE!

$$P(X \geq 3) = 1 - e^{-3} - \frac{3}{1!}e^{-3} - \frac{3^2}{2!}e^{-3} =$$

$$= 0.5768$$

⟿ KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\vartheta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{it}\lambda)^k}{k!} =$$

PODSJETNIK: $\sum \frac{x^k}{k!} = e^x$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{e^{it}\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

$$\boxed{\vartheta(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}}$$

$$E(X) = -i\vartheta'(0) = \overset{D.Z.}{\cdots} = \lambda$$

$$D(X) = \cdots = \lambda$$

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= \lambda \\ D(X) &= \lambda \end{aligned}}$$

⟿ SVOJSTVO STABILNOSTI:

nezavisne $\begin{cases} X_1 \sim P(\lambda_1) \\ X_2 \sim P(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \boxed{X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)}$

DOKAZIĆ: (BILO JEDNE GODINE KAO I SVE HEH SVE BILO JEDNE GODINE)

$$\vartheta_{X_1+X_2}(t) \overset{nez.}{=} \vartheta_{X_1}(t) \cdot \vartheta_{X_2}(t) =$$

$$= e^{\lambda_1(e^{it}-1)} \cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}$$

1.MI-07-8.)

b) Neka je X Poissonova razdioba s očekivanjem 3, a Y s očekivanjem 4. Ako su X i Y nezavisni, izračunajte vjerojatnost da je $X+Y=10$.

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$\boxed{E(X)=\lambda}$!

$X \sim P(\lambda)$

$$\left.\begin{matrix} X \sim P(3) \\ Y \sim P(4) \end{matrix}\right\} \Rightarrow P(X+Y=10) = \frac{7^{10}}{10!} e^{-7}$$

$X_1 + X_2 \sim P(\lambda_1+\lambda_2) \Rightarrow X+Y \sim P(7)$ U PROSJEKU

$\underline{\lambda}$

4.ZZV-14.) U populaciji je u prosjeku 1% ljevaka.

a) Izrač. vjerojatnost da od 7 nastavnika na VIS-u je barem 1 ljevak.

b) Izrač. vjerojatnost da od 600 studenata su barem 4 ljevaka.

a)

NEMAMO INTENZITET DOLAZAKA !

$\Rightarrow$ BINOMNA RAZDIOBA ! PONAVLJAMO n puta pokus !

$B(7, 0.01)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{7}{0} p^0 (1-p)^7 = 0.068$$

b) $B(600, 0.01)$

veliki faktorijeli...

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X=3) - P(X=2) - P(X=1) - P(X=0) \rightarrow \underline{n \text{ veliki}} \rightarrow \text{POISSON} !$$

$$\Rightarrow \lambda = n \cdot p = 6 \Rightarrow P(6) \approx B(600, 0.01)$$

$$P(x=\overset{k}{3})=\frac{\lambda^{k=3}}{(k=3)!}\cdot e^{-(\lambda=6)}$$

$$P(X\geq 4)=1-\frac{6^3}{3!}e^{-6}-\frac{6^2}{2!}e^{-6}-\dots=0.8488$$

BEZ APROKSIMACIJE:

$$P(x\geq 4)=0.8501 \quad \rightarrow \text{ NAJS NAJS !}$$

! NAPOMENA NA ISPITU:

S OBZIROM DA SMIJEMO IMATI KALK NE MORAMO KORISTITI APROKSIMACIJU.

1.MI-10-6) Neka su X_1 i X_2 nezavisne slučajne varijable s Poissonovom razdiobom $X_1 \sim P(\lambda_1)$, $X_2 \sim P(\lambda_2)$. Ako je njihov zbroj $X_1+X_2=n$, dokažite da tada $X_1 \sim B\left(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)$

$$P=(X_1=k \mid X_1+X_2=n)=\frac{P(X_1=k, X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=$$

$$=\frac{P(X_1=k)\cdot P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=\frac{\frac{\lambda_1^k}{k!}\cancel{e^{-\lambda_1}}\cdot\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}\cancel{e^{-\lambda_2}}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}\cancel{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}}=$$

$P(\lambda_1+\lambda_2)$

$\cancel{k+n-k}$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)^k\underbrace{\left(1-\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)}_{\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}}^{n-k}$$

↳ DOKAZALI BINOMNU RAZDIOBU !

↳ ZBROJ DVIJE POISSONOVE, X_1 ILI X_2 IMAJU RAZDIOBE:

$$\binom{n}{k}\left(\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)^k\left(1-\frac{X_1}{X_1+X_2}\right)^{n-k}$$

KNJIŽICA II

5. NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE

5.1. DEFINICIJE I SVOJSTVA

⇝ MOTIVACIJA: biramo broj iz intervala $[1,3]$. Neka slučajna varijabla poprima vrijednost koju smo izvukli. $P(X<2)=\frac{1}{2}$

Kako izgleda slučajna varijabla vezana uz ovaj pokus?

def. Preslikavanje $X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je slučajna varijabla ako za $\forall x\in\mathbb{R}$ je

$$\Delta_x=\{\omega\in\Omega : X(\omega)<x\}\in\mathcal{F}$$

za DISKRETNE VRIJEDI JEDNAKOST „="

⇝ **Funkcija razdiobe** varijable X je funkcija $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ definirana s $F(x)=P(X<x)$.

TM

SVOJSTVA FUNKCIJA RAZDIOBE:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$ (očito)

ii) Funkcija razdiobe je RASTUĆA funkcija (1. DERIVACIJA >0)

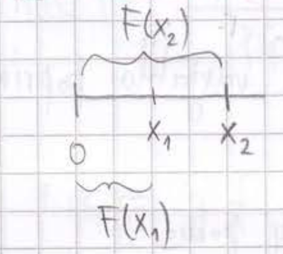
⇝ OČITO zbog svojstva monotonosti vjerojatnosti

⇒ što je veći x sve više je obuhvaćen X

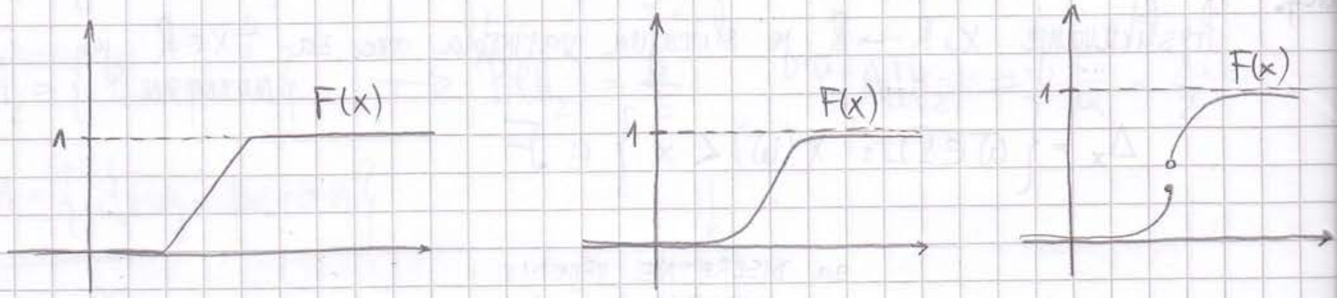
iii) $F(x)$ je NEPREKINUTA s LIJEVA, ALI SAMO S LIJEVA!

$F(x-0)=F(x)$ → vrijednost kada teži k x, ali s lijeva

iv) $$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$



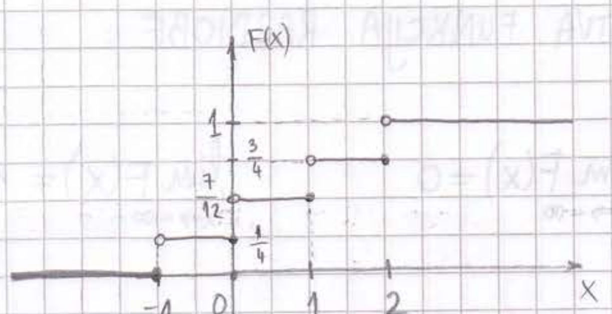
Primjer.



Zadatak. Odredi funkciju razdiobe od slučajne varijable X

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad F(x) = ?$$

$F(x) = P(X < x)$



$F(-3) = P(X < -3) = 0$

$F(-2) = 0$

$F(-1) = P(X < -1) = 0$

$F(0) = P(X < 0) = \frac{1}{4}$

$F(1) = P(X < 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

$F(2) = P(X < 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$F(77) = P(X < 77) = 1$

$F(777\,777) = P(X < 777\,777) = 1$

UOČI!

F(x) DISKRETNE SLUČ. VAR. JE STEPENASTA FJA [0,1] SA SKOKOVIMA $X_1, X_2, X_3 \ldots$ VELIČINE $p_1, p_2 \ldots$

Za slučajnu varijablu X kažemo da je **NEPREKINUTA** ako postoji NENEGATIVNA funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ takva da je

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt}$$

odnosno $f(x) = F'(x)$.

⤳ $f(x)$ nazivamo **FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI**

⤳ očito vrijedi $f(x) \geq 0$

<u>UOČI</u> !

⤳ $F(x)$ je NEPREKINUTA pa vrijedi $P(X = x) = \underbrace{F(x+0)}_{\text{lim. s desna}} - \underbrace{F(x)}_{\text{lim. s lijeva}} = \underline{0}$

stoga ⟹ događaji $(x_1 \leq X \leq x_2)$ i $(x_1 < X \leq x_2)$ su <u>jednako vjerojatni</u>

$$\boxed{P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx}$$

!

⤳ pri tome $f(x)$ MOŽE biti VEĆA OD 1, ali VJEROJATNOST $P < 1$ (rastuća / padajuća)

⟹ OČITO VRIJEDI:

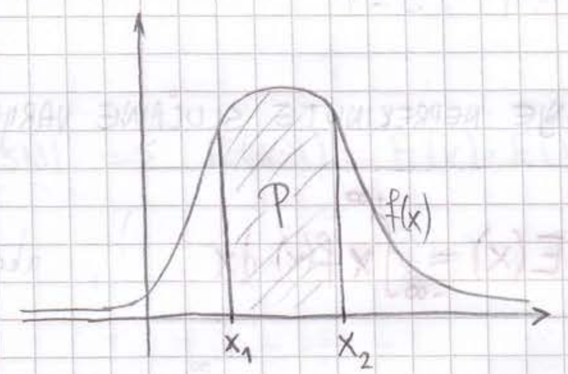
!

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$$

↓

vjeroj. cijele krivulje (Ω)

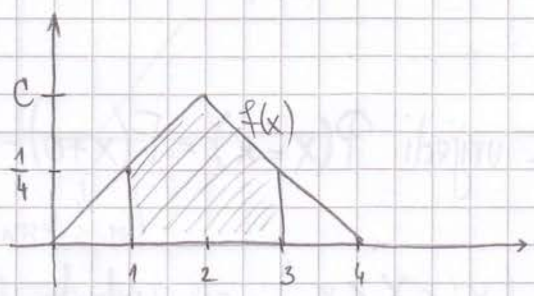
↳ UVJET ZA FJU GUSTOĆE



ZAPAMTI:

$$\boxed{\begin{gathered} P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) \\ P(X = x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = 0 \end{gathered}}$$

Zad.) Funkcija gustoće zadana je slikom. $P(1 < X < 3) = ?$ $E(x) = ?$



površina cijelog trokuta, odn. svega ispod funkcije, $-\infty \to \infty$

$\rightsquigarrow$ prvo odrediti c : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \frac{\cancel{4}^{2}\cdot c}{\cancel{2}_{1}} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{4}x, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

SLIKA! OKUPNO CIJELI TROKUT   MALI TROKUTIĆI

$$\Rightarrow P(1 < X < 3) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} f(x)\,dx \overset{\text{slike}}{=} 1 - 2\cdot\frac{1\cdot\frac{1}{4}}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

def.

OČEKIVANJE NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE definira se formulom

$$\boxed{E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx}$$

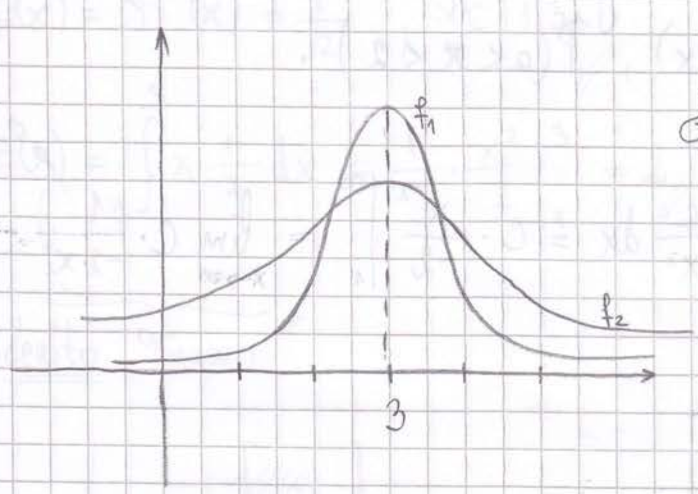
, ako integral konvergira.

$\rightsquigarrow$ za prethodni zad. : $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{2} x\cdot\frac{1}{4}x\,dx + \int_{2}^{4} x\cdot\left(1 - \frac{1}{4}x\right)dx = \dots = 2$

DISPERZIJA NEPREKINUTE SLUČAJNE VARIJABLE definira se formulom

$$\boxed{D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - E(x)^2}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{D(x)}}$$



$\sigma_2 > \sigma_1$

→ SVOJSTVA su ista kao kod diskretnih varijabli:

i) $E(sX + tY) = sE(X) + tE(Y)$

ii) $D(sX) = s^2 D(X)$

iii) ako su X i Y NEZAVISNI $\Rightarrow$ $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$

$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

def.

KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA SLUČAJNE VARIJABLE definira se

$$\vartheta_X(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

PRIMJETI! Karakteristična funkcija je zapravo FOURIEROVA TRANSFORMACIJA.

2.MI-09.-1.) Zadana je slučajna varijabla gustoće $f(x) = \frac{C}{x^3}$, $x > 1$.
Nađi C, $E(x)$, $F(x)$, $P(0 < X < 2)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{1}^{+\infty} \frac{C}{x^3}\,dx = C \cdot \frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^{\infty} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} C \cdot \frac{1}{-2\cdot x^2}}_{=0} - C \cdot \frac{1}{-2}$$

PAZI! $\rightarrow$ $\boxed{x>1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}C = 1 \Rightarrow \boxed{C = 2}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_1^{\infty} x \cdot \frac{2}{x^3}\,dx = \ldots = 2$$

NE ZABORAVI!

$$\underline{F(x)} = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_1^{x} \frac{2}{t^3}\,dt = \underline{1 - \frac{1}{x^2}}, \quad x > 1 \ !!$$

!PAZI NE

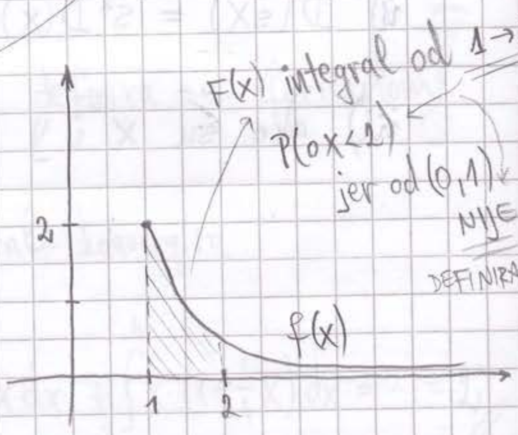
$$P(0 < X < 2) = \int_1^2 \frac{2}{x^3}\,dx = \ldots = \frac{3}{4}$$

PAZI! ZBOG $X > 1$!!

(ILI) $= F(2) - F(1) =$

$= \frac{3}{4} - 0 =$

$= \frac{3}{4}$



F(x) integral od 1→2

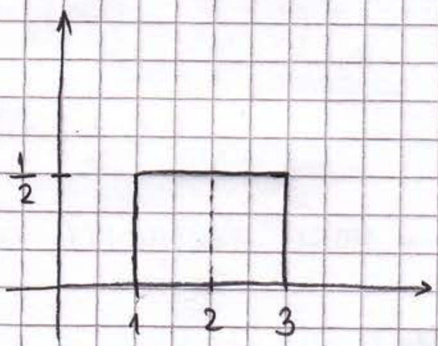
P(0<X<2)

jer od (0,1) NIJE DEFINIRAN

••• JEDNOLIKA (UNIFORMNA) RAZDIOBA •••

⟶ npr. biramo na sreću broj iz intervala $[1,3]$

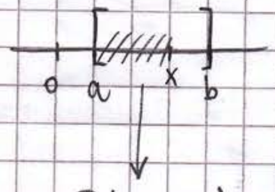
$$F(x) = P(X < x) = \frac{x-1}{2}$$



$$f(x) = F'(x) = \frac{1}{2} \quad , \; x \in [1,3]$$

$$E(x) = \int_1^3 x \cdot \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^3 = 2$$

⟶ Općenito imamo



$P(X < x)$

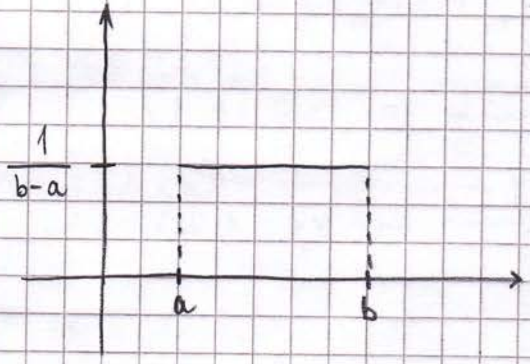
$X \sim U[a,b]$

$\downarrow$

„X ima uniformnu razdiobu na int. $[a,b]$"

$$F(x) = P(X < x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



$$E(x) = \bar{X} = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{a+b}{2}$$

$$D(x) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\, dx - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \dots = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2-MI-11-1.) Zadana je $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1\rangle \\ ax - x^2, & x \in [1,2\rangle \end{cases}$. Odredite sVE, a to je $a, F, E, D, P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = ?$

$\rightsquigarrow$ podrazumjeva se da je $f(x) = 0$ INAČE, na ostalim intervalima

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (ax - x^2)\,dx = \dots = -2 + \frac{3a}{2} = 1$$

$$\dots \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

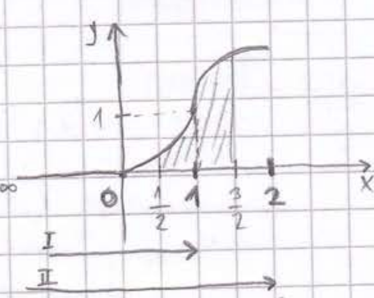
$\rightsquigarrow$ MOGLI ZAKLJUČITI KOLIKI JE a I IZ UVJETA NEPREKINUTOSTI !

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^2 (2x^2 - x^3)\,dx = \frac{7}{6}$$

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \dots \text{ DZ}$$

$$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx + \int_1^{\frac{3}{2}} (2x - x^2)\,dx = \dots = \frac{3}{4}$$

MOĆI



PAZI !

RASTAVI NA INTERVALE

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

I $\rightsquigarrow$ za $x \in [0,1\rangle$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$

II $\rightsquigarrow$ za $x \in [1,2\rangle$: $F(x) = \cancel{\int_1^x (2t - t^2)\,dt}$ PAZI ! NE !

$\Rightarrow$ razdioba definirana $P(X < x)$, mora pokupiti sve iz $-\infty$ do ∞ !!!

$$\Rightarrow F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{1} t^2\,dt + \int_{1}^{x} (2t - t^2)\,dt = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}$$

! NE ZABORAVI POKUPITI SVE INTERVALE PRIJE X-a !

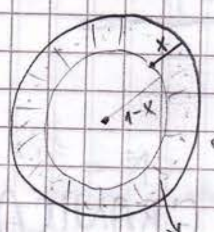
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{3}, & x \in [0,1\rangle \\ -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{1}{3}, & x \in [1,2\rangle \\ 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

SVI UVJETI ZADOVOLJENI

I OVO JE STVARNO F-JA RAZDIOBE.

$P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$ II NAČIN: $F\left(\frac{3}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right) = \ldots = \frac{3}{4}$

2.MI-08-1.) Biramo točku unutar kruga $r=1$. Neka je X udaljenost te točke do ruba. Odredite njenu razdiobu i očekivanje.



VRIJEDNOST MANJA OD X-a !

$X \in [0,1]$, za $x < 0$: $F(x) = 0$

za $x > 1$: $F(x) = 1$

za $x \in [0,1]$:

$$F(x) = P(X < x) = \frac{\overbrace{\pi - (1-x)^2\pi}^{P_{KRU. VIJENCA}}}{1 \cdot \pi}$$

$r^2\pi \rightarrow P_{KRUGA}$

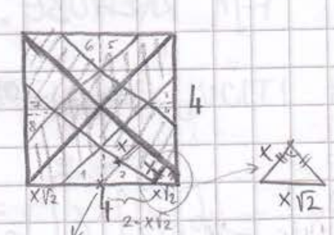
$$\Rightarrow F(x) = 1 - (1-x)^2 = 2x - x^2$$

$\Rightarrow f(x) = F'(x) = 2-2x \;,\; \underline{\underline{x \in [0,1]}}$

OBAVEZNO PISATI !
SKIDAJU BODOVE NA ISPITU ZA TO !

$\Rightarrow E(x) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \frac{1}{3}$ //

3.DZ-10.) U kvadratu stranice 4 na sreću biramo točku. X je udaljenost točke do najbliže dijagonale. Odredi očekivanje (fju razdiobe...) Odredi SVE !



MAX UDALJENOST

$\Rightarrow \frac{1}{4}$ DIJAGONALE $\rightarrow \sqrt{32}$

$x \in [0, \sqrt{2}]$: $F(x) = P(X < x) =$ (8 MALIH TROKUTIĆA)

$= \dfrac{16 - 8 \cdot \frac{1}{2}\left(2 - x\sqrt{2}\right)^2}{16} =$

$F(x) = x\sqrt{2} - \frac{1}{2}x^2 \;,\; x \in [0, \sqrt{2}]$

$\rightsquigarrow$ provjera ako uvrstimo $0 \to 0$

ako uvrstimo $\sqrt{2} \to 1$ O.K. ✓

$f(x) = F'(x) = \sqrt{2} - x \;,\; x \in [0, \sqrt{2}]$ //

$E(x) = \int_0^{\sqrt{2}} x(\sqrt{2} - x)\, dx = \dots = \frac{\sqrt{2}}{3}$ //

U OVIM ZADACIMA SAMO JE NEBO GRANICA

APSOLUTNO SVAŠTA MOŽE BITI – PIRAMIDE.... NAJLOŠIJE RIJEŠEN ZADATAK NA ISPITU... –.–'

TUUUGA

ZADACI:

(5.) poglav. 1 - 17

18 - 34 } 1-34 II

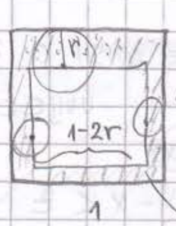
35 - 41 }

61 - 63 } ZA NATJECANJE IZ VISA

64 - 90 → RJEŠITI SVE

UKUPNO: 50 zad

3.DZ - 9.) Unutar kvadrata stranice 1 biramo točku i potom opišemo krug maksimalne površine sa središtem u toj točki. Nađite funkciju $\underbrace{\text{razdiobe}}_{\text{POVRŠINE TOG KRUGA}}$ i $P(X > \frac{\pi}{16}) = ?$



$X =$ površina ovog kruga $= r^2\pi$

$X \in [0, \frac{\pi}{4}]$

X NIJE NA SLICI !

NA SLICI JE POLUMJER OD X-a !

$P = \frac{1-(1-2r)^2}{1}$

r_a

$F(x) = P(X < x) =$

SVE JE POZITIVNO PA MOŽEMO TO NAPRAVIT !

$= P(r^2\pi < x) = P\left(r < \sqrt{\frac{x}{\pi}}\right) =$

$= \frac{1 - \left(1 - 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2}{1^2} =$ → NE SMIJEMO IMATI r NEGO PREKO X-a !

$= 1 - \left(1 - 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\right)^2$ //

$P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

$P(X > a) = 1 - F(a)$

$P(X < a) = F(a)$

$P\left(X > \frac{\pi}{16}\right) = 1 - F\left(\frac{\pi}{16}\right) =$

$= 1 - \frac{3}{4} =$

$= \frac{1}{4}$ //

1.MI-12-6.) Biramo na sreću broj iz $[0,2]$ i drugi broj iz $[0,1]$. Neka je slučajna varijabla Z apsolutna vrijednost razlike ova dva broja. Odredite SVE!

$E(z) = ?$

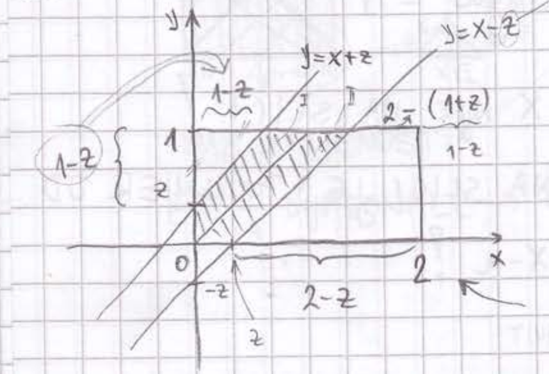
$x \in [0,2]$

$y \in [0,1]$

$z = |x-y|$

$z \in [0,2]: \; F(x) = P(Z < z) = P(|x-y| < z)$

1.



$\rightsquigarrow |x-y| < z$ — NE OVISI O Z-U, UVIJEK TAKO!

II $y<x$ / I $y>x$

$x-y < z$ ILI $y-x < z$

$y > x-z$ $\qquad$ $y < x+z$

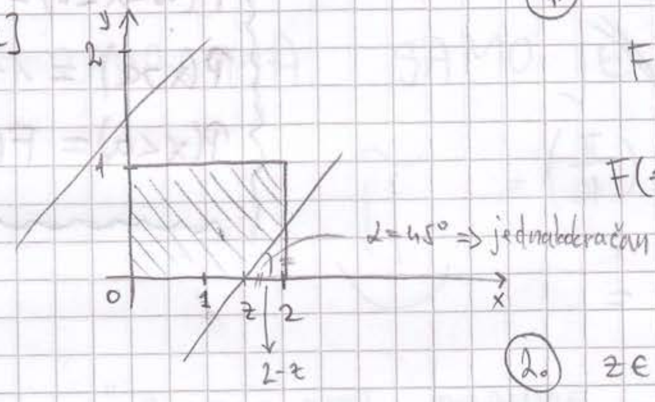
za $z \in [0,1]$!!

$\rightsquigarrow$ AKO JE ZA RAZLIČITE Z-OVE DRUKČIJA SLIKA ONDA MORAMO RASTAVITI NA INTERVALE!

$P_{trapeza} = \frac{a+c}{2} \cdot v$

2.

$\to$ za $z \in [1,2]$



1. za $z \in [0,1]$:

$$F(z) = \frac{2 - \frac{(1-z)^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot(1-z+2-z)}{2\cdot 1}$$

$$F(z) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1-z)^2 + \frac{z}{2}$$

2. $z \in [1,2]$

$$F(z) = \frac{2 - \frac{1}{2}(2-z)^2}{2} = 1 - \frac{1}{4}(2-z)^2$$

NAKON DERIVIRANJA

$$\Rightarrow \quad f(z) = \begin{cases} 1-\frac{1}{2}z \ , & z \in [0,1] \\ 1-\frac{1}{2}z \ , & z \in [1,2] \end{cases} = \underline{\underline{1-\frac{1}{2}z \ , \ z \in [0,2]}}$$

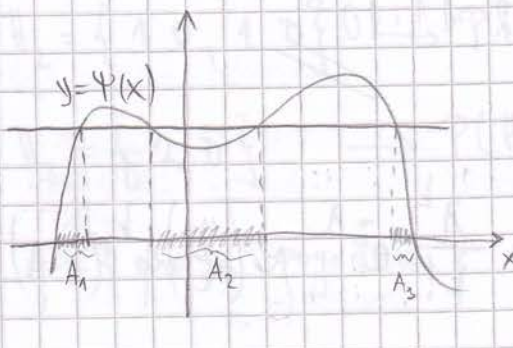
$$E(x) = \int_0^2 z\left(1-\frac{1}{2}z\right)dz = \dots = \frac{2}{3}$$

5.2. FUNKCIJE SLUČAJNIH VARIJABLI

⟿ npr. imamo razdiobu od X zanima nas razdioba od $\sin X$ ...

⟿ neka je $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, X je slučajna varijabla, $Y = \Psi(X)$

→ od X znamo razdiobu, kako određujemo razdiobu od Y?



$G(y)$ ... funkcija razdiobe od Y

$G(y) = P(Y < y) = P(\Psi(X) < y)$

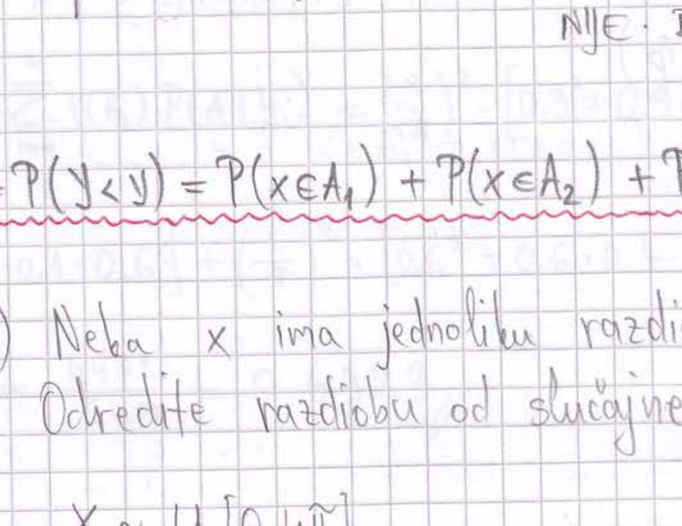
→ NE MOŽEMO KORISTITI INVERZ JER NIJE BIJEKCIJA !

$$G(y) = P(Y < y) = P(X \in A_1) + P(X \in A_2) + P(X \in A_3)$$

3.DZ-12.) Neka X ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0, 4\pi]$. Odredite razdiobu od slučajne var. $Y = \sin X$.

$X \sim U[0, 4\pi]$
↳ jednolika razdioba → uniformna

$\Big\} \; f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{4\pi}$



uzmemo neki random y i gledamo da je $< y$

$y \in [-1, 1]$

$G(y) = P(Y < y) = P(\sin X < y)$

UOČI: RAČUNAMO PREKO INVERZA !

⇝ zbog disjunktnosti vrijedi zbrajanje

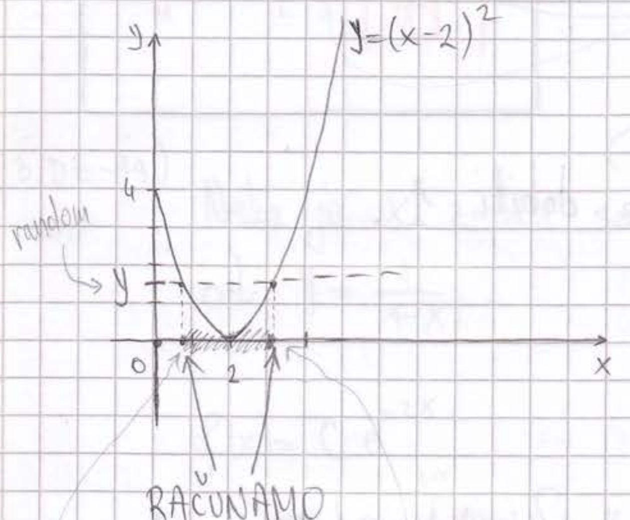
$$G(y) = P(0 < X < \arcsin y) + P(\pi - \arcsin y < X < 2\pi + \arcsin y) + P(3\pi - \arcsin y < X < 4\pi)$$

$$= \int_0^{\arcsin y} \frac{1}{4\pi}\,dx + \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} \frac{1}{4\pi}\,dx + \int_{3\pi - \arcsin y}^{4\pi} \frac{1}{4\pi}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin y$$

$$g(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}} \qquad y \in \langle -1, 1\rangle$$

2.MI-08-2.) Neka X ima $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Odredite razdiobe (FUNKCIJU) od $Y = (X-2)^2$.

PAZI!! CRTAMO!



PREKO INVERZNE FUNKCIJE!

$2-\sqrt{y}$ $\quad$ $2+\sqrt{y}$

$y \in [0, +\infty\rangle$

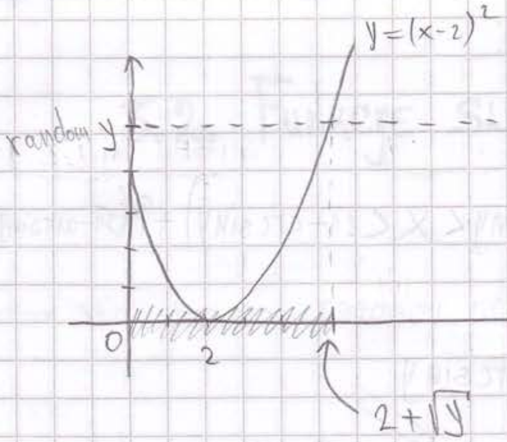
$$G(y) = P(Y < y) = P((X-2)^2 < y) =$$

$$= P(2-\sqrt{y} < X < 2+\sqrt{y}) = \quad !$$

$$= \int_{2-\sqrt{y}}^{2+\sqrt{y}} e^{-x}\,dx = e^{\sqrt{y}-2} - e^{-\sqrt{y}-2}, \quad y \in \langle 0, 4\rangle$$

PAZI! OVO VRIJEDI SAMO ZA $y \in [0, 4]$!! SLIKA!

⇝ ZA $Y > 4$ POSEBNO IZRAČUNATI, PODIJELITI NA INTERVALE! → APSOLUTNO SVAKE GODINE NA ISPITU!!!



$G(y) = P(Y < y) = P(0 < X < 2+\sqrt{y}) =$

$= 1 - e^{-\sqrt{y}-2}$, za $y \in \langle 4, +\infty\rangle$

OBAVEZNO PISATI !

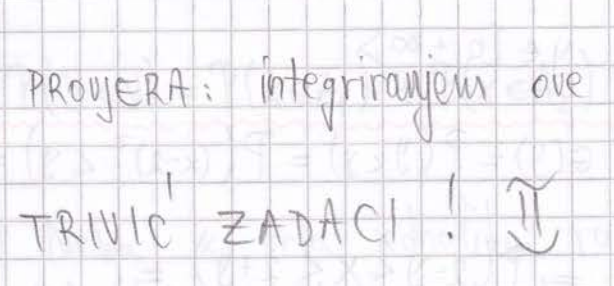
$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{y}-2} + \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{-\sqrt{y}-2}, & y \in \langle 0, 4\rangle \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} e^{\sqrt{2}-2}, & y \in \langle 4, \infty\rangle \end{cases}$$

⟶ PROVJERA: integriranjem ove fje dobiti 1.

⟶ TRIVIĆ ZADACI ! ⇓

• Što ako imamo fje koje su "ljepe" ? Neka je Ψ monotono RASTUĆA.

Dobit ćemo:



$G(y) = P(\Psi(X) < y) =$

$= P(X < \Psi^{-1}(y)) =$

$= F(\Psi^{-1}(y))$

MOŽEMO BEZ PROBLEMA NAĆI INVERZ.

$$\boxed{g(y) = G'(y) = f\left(\Psi^{-1}(y)\right) \cdot \frac{d\Psi^{-1}(y)}{dy}}$$

DIREKTNA FORMULA ZA RAČUNANJE INJEKTIVNE FUNKCIJE

→ za PADAJUĆE funkcije samo apsolutna još

$$g(y) = G'(y) = f$$

„IZVOD OVE FORMULE BIO PAR PUTA NA ISPITIMA."

knjižica:

SAMO ZA BIJEKCIJE !!

$$\boxed{g(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|}$$

pri čemu je $x = \Psi^{-1}(y)$

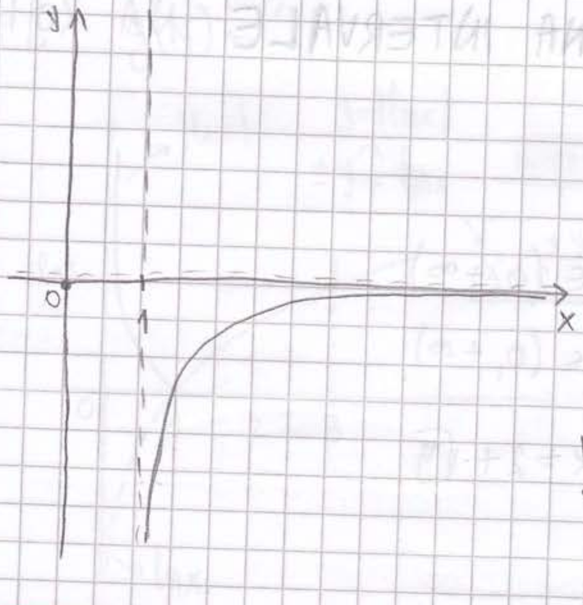
UVRSTITI !!

3. DZ-19)

Neka je X zadan sa $f(x) = Ce^{-2x}$, $x \geq 1$. Odredite fju gustoće od $Y = \frac{1}{1-X}$.

$f(x) = Ce^{-2x}$

$\hookrightarrow \int_1^{+\infty} Ce^{-2x}\,dx = 1 \Rightarrow C = 2e^2$



$y = \frac{1}{1-x}$

vertikalna asimptota → nultočka nazivnika

→ HORIZONTALNA: $y = 0$

$y \in \langle -\infty, 0 \rangle$

! NAĆI INVERZ ...... $x \leftrightarrow y$

$x = 1 - \frac{1}{y}$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{y^2}$$

PAZI!!!

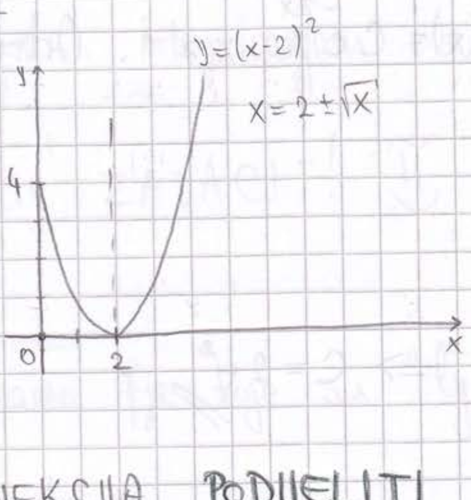
UVRSTITI, NE SMIJE BITI X-a!

$$g(y) = 2e^2 e^{-2\left(1-\frac{1}{y}\right)} \cdot \frac{1}{y^2}$$

da se tražila razdioba onda bi ovo INTEGRIRALI (ILI) po DEFINICIJI (postupak povući random y....)

2.MI-08-2.) Neka je X zadan sa $f(x) = e^{-x}$, $x>0$. Odredite f-ju gustoće od $Y=(x-2)^2$.

II NAČIN:



g_2

g_1+g_2

AKO NIJE INJEKCIJA **PODIJELITI NA INTERVALE** NA KOJIMA JEST INJEKCIJA!

1.) $x \in (0,2)$

$y \in (0,4)$

$x = 2-\sqrt{y}$

2.) $y \in (0,+\infty)$

$y \in (0,+\infty)$

$x = 2+\sqrt{y}$

SADA KORISTIMO FORMULU:

1.) $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|\frac{-1}{2\sqrt{y}}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

2.) $\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\Rightarrow g_1(y) = e^{-(2-\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$\Rightarrow g_2(y) = e^{-(2+\sqrt{y})} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$

⇝ KONAČNO:

$$g(y) = \begin{cases} g_1 + g_2, & \underline{\underline{y \in (0,4)}} \\ g_2, & y \in (4, +\infty) \end{cases}$$

PAZI! na tom intervalu vrijede obje jer $(0,4) \cap (0,+\infty\rangle = (0,4)$

↓

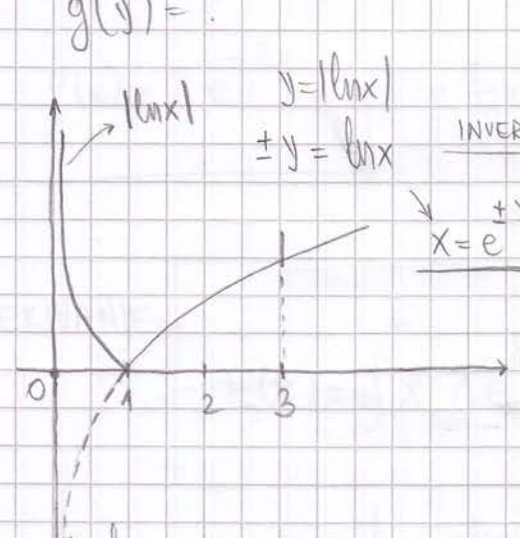
VIDI SE I NA GRAFU!

$$g(y) = \begin{cases} \text{izračunaj}, & y \in (0,4) \\ \ldots, & y \in (4, +\infty) \end{cases}$$

⇝ da su tražili razdiobu onda SAVJET BUREKA: ONIM PROŠLIM NAČINOM jer ovo može biti teško izintegrirati....

2.MI-11-3.) Odredite fju gustoće od $Y = |\ln X|$ ako je X zadan s fjom gustoće $f(x) = \frac{2}{9}x$, $x \in (0,3)$.

$g(y) = ?$



$y = |\ln x|$

$\pm y = \ln x \xrightarrow{\text{INVERZ}} \underline{x = e^{\pm y}}$

1.) $x \in (0,1)$

$y \in (0, +\infty)$

$x = e^{-y}$ → TO JE DIO GDJE SMO MINUS PREBACILI GORE ZBOG APSOLUTNE

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|-e^{-y}\right| = e^{-y}$

2.) $x \in (1,3)$

$y \in (0, \underline{\underline{\ln 3}})$

$x = e^{y}$

$\left|\frac{dx}{dy}\right| = \left|e^{y}\right| = e^{y}$

$\Rightarrow g_1(x) = \frac{2}{9} e^{-y} \cdot e^{-y}$ $\qquad g_2(x) = \frac{2}{9} e^{y} \cdot e^{y}$

$\rightsquigarrow$ konačno, $g(x) = \begin{cases} g_1 + g_2, & y \in (0, \underline{\ln 3}) \\ g_1, & y \in (\ln 3, +\infty) \end{cases}$ TU SE POKLAPA FUNKCIJA!

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{9} e^{-2y} + \frac{2}{9} e^{2y}, & y \in (0, \ln 3) \\ \frac{2}{9} e^{-2y}, & y \in (\ln 3, +\infty) \end{cases}$$

PRIMIJETI:

$\rightsquigarrow$ FUNKCIJA GUSTOĆE JE NEPREKINUTA! U 1 ?? HEH ..... VARAMO.

6. PRIMJERI NEPREKINUTIH RAZDIOBA

6.1. EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

⇝ neka je $Z \sim P(\lambda)$

⇝ ZANIMA NAS **VRIJEME DO POJAVE** SLJEDEĆE JEDINICE U SUSTAVU

⇝ eksponencijalna razdioba, direktno iz Poissona

→ tada je $Z_x \sim P(\lambda \cdot x)$ broj pojavljivanja u intervalu $[0, x]$

⇝ neka je X **VRIJEME** DO PRVE POJAVE PROMATRANOG DOGAĐAJA

— npr. vrijeme do kvara uređaja....

$$F(x) = P(X < x) = 1 - P(\overset{\text{nije stigla}}{Z_x = 0}) = 1 - \frac{(\lambda x)^0}{0!} e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x}$$

⇝ pišemo, $X \sim \overset{\text{pisani } E}{E}(\lambda)$ i kažemo da X ima **EKSPONENCIJALNU RAZDIOBU** s parametrom λ

$$\boxed{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0}$$

→ jer je to **VRIJEME** do pojave jedinice u sustavu

$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ → fja gustoće

⇝ OČEKIVANJE:

$$\boxed{E(x) = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}}$$

..... parcijalna integracija SKORO SVAKE GODINE

⇝ DISPERZIJA:

$$\boxed{D(x) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}}$$

⇝ KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA:

$$\boxed{\vartheta_x(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}}$$

→ kao kod LaPlace-a pridruženje

→ OVE SVE IZVODE OBAVEZNO ZNATI ZA ISPIT!

⇝ preko parcijalne ....

2.MI-08-3.) Očekivano ispravno vrijeme rada automobila je 3 godine.

a) Vjerojatnost da se pokvario tijekom prve godine?

→ od 0 do 1

$0 < x < 1$

$x \sim E\left(\frac{1}{3}\right)$ PAZI! $\rightarrow E(x) = 3 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{3}}$

$P(x < 1) = ?$

$P(x < 1) = F(1) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 1} = \dots =$

b) =||= tijekom treće godine?

→ između 2. i 3. god.

$P(2 < x < 3) = ?$

$P(2 < x < 3) = F(3) - F(2) = 1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 3} - \left(1 - e^{-\frac{1}{3} \cdot 2}\right) = \dots$

$\boxed{\text{TM}}$ „ODSUSTVO PAMĆENJA"

⇝ X ima EKSPONENCIJALNU razdiobu AKO I SAMO AKO vrijedi

$$P(X < x+t \mid X > t) = P(X < x)$$

Dokaz:

$(\Rightarrow)$

$$P(X < x+t \mid X > t) = \frac{P(t < X < x+t)}{P(X > t)} = \frac{F(x+t) - F(t)}{1 - F(t)} =$$

$$\left\{ F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0 \right\} = \frac{\cancel{1} - e^{-\lambda x - \lambda t} \cancel{-1} + e^{-\lambda t}}{\cancel{1} - (\cancel{1} - e^{-\lambda t})} = 1 - e^{-\lambda x} = F(x)$$

$$= P(X < x) \quad \text{Ⓣ}$$

$(\Leftarrow)$ PMF Ⓣ

2.MI-08-3.) * NASTAVAK *

$$\lambda = \frac{1}{3}$$

c) Vjerojatnost da se auto pokvari tijekom treće, ako prve dvije nije bio u kvaru?

$$P(2 < X < 3 \mid \underbrace{X > 2}_{\text{ako prve dvije nije bio u kvaru}}) \overset{\text{TM}}{=} P(X < 1) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} \quad \text{(isto kao pod a)}$$

↳ U PRAKSI GLEDANO OVO BAŠ NEMA SMISLA !

4.DZ-4.) Ako je poznato da 40% uređaja radi ispravno 1 godinu, izr. vjer. da će od 50 takvih uređaja barem 40 raditi ispravno pola godine?

$$P(X>1)=0.4 \qquad X \dots \text{vrijeme ispravnog rada}$$

$$1-F(1)=e^{-\lambda}=0.4 \quad / \ln$$

$$\vdots$$

$$\lambda=-\ln 0.4$$

⟶ da ispravno radi pola godine:

$$P(X>\tfrac{1}{2})=1-F(\tfrac{1}{2})=1-(1-e^{+\ln 0.4\cdot\frac{1}{2}})=0.632$$

⟶ barem 40 radi ispravno → BINOMNA RAZDIOBA

$$Y\sim B(50,\ 0.632)$$

$$P(Y\geq 40)=\sum_{k=40}^{50}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=\sum_{k=40}^{50}\binom{50}{k}0.632^k(1-0.632)^{50-k}=$$

$$=0.00834$$

⟹ ZA VELIKE n NE MOŽEMO POISSONA OVDJE KORISTITI!

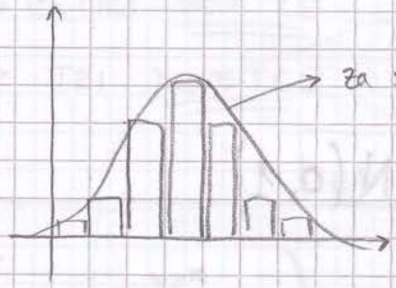
⟶ ako $n\to\infty$?

↳ GAUSSOVA RAZDIOBA ⟶

6.2. NORMALNA (GAUSSOVA) RAZDIOBA

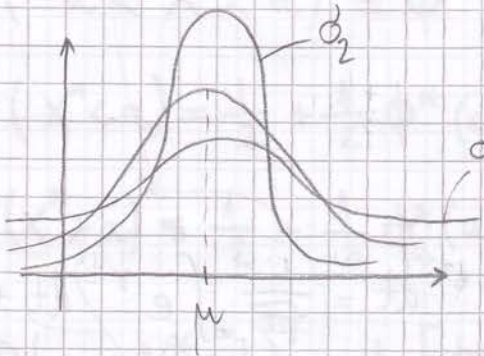
⇝ najvažnija (neprekinuta) razdioba

⇝ granični slučaj velikog broja ponavljanja pokusa



→ za što više bodova to je „glađe"

$\longrightarrow \quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$



μ ...... OČEKIVANJE

σ^2 ...... VARIJANCA (DISPERZIJA)

σ ...... STANDARDNA DEVIJACIJA

$\sigma_1 > \sigma_2 \rightarrow$ veća raspršenost za σ_1 → ZVONOLIKA KRIVULJA

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x \in \mathbb{R}}$$

→ MORAMO ZNATI, IZVOD KAKO JE GAUSS DOŠAO DO TOGA – U NEKOM PARALELNOM SVEMIRU

↓ FUNKCIJA GUSTOĆE

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \longrightarrow$ NE MOŽEMO RAČUNATI POVRŠINU ISPOD KRIVULJE JER NE MOŽEMO TAJ INT. ELEMENTARNO RJEŠITI

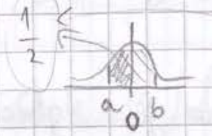
→ TABLICA NA KRAJU KNJIŽICE ! → DONIJETI NA ISPIT !!

ONI KOJI NE VJERUJU:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \overset{Dz}{\ldots} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} \right\} = \mu$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \overset{D.Z}{\ldots} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} = \left| u = x \quad du = x e^{-x^2} \right| \right\} = \sigma^2$$

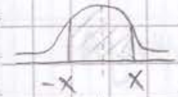
$X \sim N(\mu, \sigma^2)$



⟶ JEDINIČNA NORMALNA RAZDIOBA $X^* \sim N(0,1)$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt}_{\text{parna fja}}$$



↳ simetričan interval

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \longrightarrow \Phi^*(x) \longrightarrow \text{TABLICE!}$$

„BILO JEDNE GODINE OVAJ IZVOD"

$$\boxed{\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi^*(x)}$$

$\Phi(x)$ ... fja razdiobe normalne razdiobe $= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

$\Phi^*(x)$ ..... $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = P(-x < X < x) =$ U TABLICI npr.)

SASVIM RANDOM BROJKE

$$P(\underbrace{-0.31}_{\text{LIJEVI STUPAC}}\underbrace{4}_{\text{NAĆI POD ZNAMENKOM 4}} < X < 0.314) = \phi^*(0.314) = \overbrace{0.246478}^{\text{TABLICE}}$$

NE ZABORAVI NULA ISPRED !

D → DVIJE DEVETKE

Č → ČETIRI DEVETKE

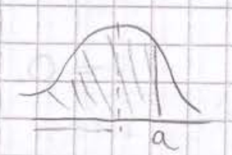
T → TRI DEVETKE

} TABLICA

ZA N(0,1) !!

ZA ZADATKE

$$\boxed{\begin{aligned} &P(-a < X^* < a) = \phi^*(a) \\ &P(X^* < a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi^*(a) \\ &P(X^* > a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*(a) \\ &P(a < X^* < b) = \frac{1}{2}\left[\phi^*(b) - \phi^*(a)\right] \end{aligned}}$$



DOBRO ZAPAMTI !!

→ neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

→ moramo je svesti na $N(0,1)$

!

$$\boxed{X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}}$$

doista $E(X^*) = 0$, $D(X^*) = 1$ } trivic!

(iz svojstva $E(x)$ i $D(x)$)

4.DZ-7.) Neka je X normalna slučajna varijabla s očekivanjem 8 i odstupanjem 4. Izračunajte vjerojatnost da je X između 2 i 14.

odstupanje !! PAZI ! $N(8, 16)$ σ^2 !!

$\mu = 8, \quad \sigma = 4, \quad P(2 \leq X \leq 14) = ?$

$$P(2 \leq X \leq 14) = P\left(\frac{2-8}{4} \leq \frac{X-8}{4} \leq \frac{14-8}{4}\right) =$$

$$= P\left(-\frac{3}{2} \leq X^* \leq \frac{3}{2}\right) = \Phi^*\left(\frac{3}{2}\right) = \text{TABLICA}$$

$$= 0.86639$$

! **NAPOMENA:**

$$\Phi^*\left(-\frac{1}{2}\right) = -\Phi^*\left(\frac{1}{2}\right)$$ → NIJE SAMA PO SEBI VJEROJATNOST, ISPRED IMAMO JOŠ $\frac{1}{2} \mp \ldots$

KAO NEPARNA FUNKCIJA !

2.MI-08-4.) b) Godišnja količina oborina je sluč. varijabla s očekivanjem $\mu = 370\ l/m^2$. Ako je vjerojatnost da ta količina bude između 10 i 730 l 0.9973, izračunaj vjerojatnost da godišnje bude više od 450 l/m^2.

$\mu = 370\ l/m^2$

$P(10 < X < 730) = 0.9973$

$P(X > 450) = ?$

$\sigma = ?$

$$P\left(\frac{10-370}{\sigma} < X^* < \frac{730-370}{\sigma}\right) = P\left(-\frac{360}{\sigma} < X^* < \frac{360}{\sigma}\right)$$

PRONAĆI U TABLICI

IZ TABLICE, OBRNUTO

$$\phi^*\left(\frac{360}{\sigma}\right) = 0.9973 \Longrightarrow 3 \Rightarrow \frac{360}{\sigma} = 3 \Rightarrow \boxed{\sigma = 120}$$

$$-P(X > 450) = P\left(X^* > \frac{450-370}{120}\right) = P\left(X^* > \frac{2}{3}\right) -$$

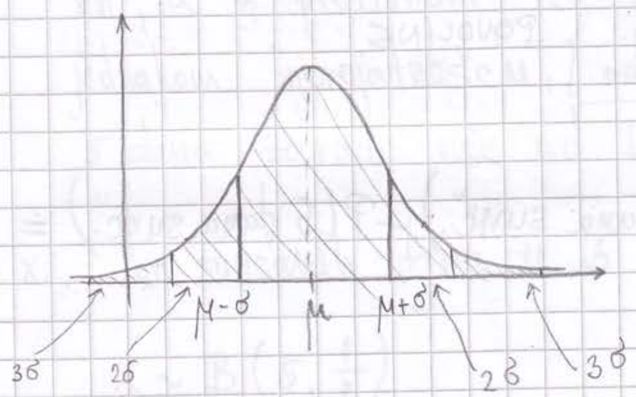
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{2}{3}\right) =$$

tablica! $\rightarrow 0.666$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0.4946 = 0.25$$

... PRAVILO 3σ ...

→ neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$



ZA SIM. INTERVAL

$$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = P(-1 < X^* < 1) = \phi^*(1) = 0.6827$$

→ za $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = \phi^*(2) = 0.9545$

→ konačno, za $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = \phi^*(3) = 0.9973 = 99{,}73\%$

... KARAKTERISTIČNA FUNKCIJA

→ Fourierova transformacija: $\vartheta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx$ za $N(0,1)$

→ deriviramo $\vartheta(t)$ po $\frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow \vartheta'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ix e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{itx} \, dx \overset{\text{parc. int.}}{=} \dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -te^{itx} e^{-\frac{1}{2}x^2} \, dx =$$

$$= -t \cdot \vartheta(t)$$

$$\Rightarrow \vartheta'(t) = -t \cdot \vartheta(t) \qquad \{ y' = x \cdot y \rightarrow \text{SEPARACIJA VARIJABLI} \dots \}$$

rješenje $\xRightarrow{}$ dif. jed.

$$\boxed{\vartheta_{X^*}(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}}$$

$\rightsquigarrow$ tada za $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\qquad X^* = \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow X = \mu + \sigma X^*$

$$\vartheta_X(t) = \vartheta_{\mu+\sigma X^*}(t) = e^{it\mu}\,\vartheta_{X^*}(\sigma t)$$

$$\boxed{\vartheta_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}$$

$\Rightarrow$ OČEKIVANJE: $\boxed{E(X) = -i \cdot \vartheta'(0) = \mu}$

$\Rightarrow$ DISPERZIJA: $\boxed{D(X) = \vartheta''(0) + \vartheta'(0)^2 = \sigma^2}$

$\boxed{\text{TM}}$ „SVOJSTVO STABILNOSTI NORMALNE RAZDIOBE"

Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ NEZAVISNE !

Tada

$$\boxed{\alpha X_1 + \beta X_2 \sim N(\alpha\mu_1 + \beta\mu_2,\ \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2)}$$

JAKO BITNO !

Dokaz: $\vartheta_{\alpha X_1+\beta X_2}(t) = \vartheta_{\alpha X_1}(t) \cdot \vartheta_{\beta X_2}(t) =$

$$= e^{it\alpha\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma_1^2\alpha^2 t^2} \cdot e^{it\beta\mu_2 - \frac{1}{2}\sigma_2^2\beta^2 t^2} =$$

$$= e^{\text{"zbroj"}} = \dots = \widetilde{\Pi}$$

4. DZ - 13.)

$$\left.\begin{aligned} X &\sim N(1,1) \\ Y &\sim N(4,4) \\ Z &\sim N(9,9) \end{aligned}\right\} \text{nezavisni}$$

$$P(X \leq 3Y - 2Z) = ?$$

$$P(X \leq 3Y - 2Z) = P(X - 3Y + 2Z \leq 0) = P(W \leq 0)$$

$$W \sim N(\underbrace{1 - 3\cdot 4 + 2\cdot 9}_{=7}, \underbrace{1 + 9\cdot 4 + 4\cdot 9}_{=73})$$

$(-3)^2$, 2^2

$$P\left(W^* \leq \frac{0-7}{\sqrt{73}}\right) = P(W^* \leq -0.819) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\phi^*(-0.819) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\phi^*(0.819)}_{0.587} = 0.206$$

TABLIC

2.MI - 4.)

Masa domaćih jabuka ima očekivanje 180 g sa devijacijom 20 g dok masa industrijskih ima očekivanje 220 g sa devijacijom 5 g. Jabučar Jan prodaje paket od 2 domaće i 2 industrijske jabuke. Izr. vjer. da je masa njegovog paketa između 820 g i 1000 g.

$$X \sim N(180, 20^2)$$
$$Y \sim N(220, 5^2)$$

$$P(820 \leq W < 1000) = ?$$

PAZI !!

$W = 2X + 2Y \longrightarrow$ NEE !!

$\rightsquigarrow$ kao da smo uzeli 1 domaću i 1 ind. i KLONIRALI ISTE TAKVE ! A TO JE KRIVO !

TRIK:

$W = X_1 + X_2 + Y_1 + Y_2 \longrightarrow$ RAZLIČITE JABUKE !

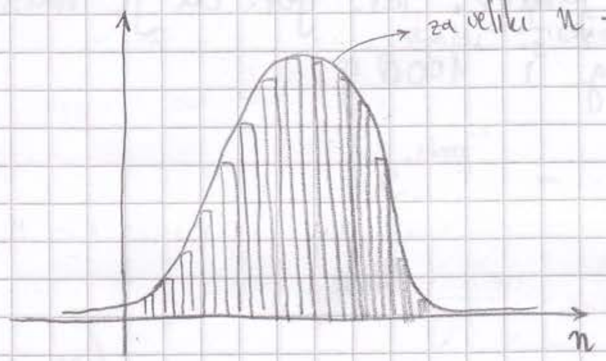
$$W \sim N(\underbrace{180+180+220+220}_{=800}, \underbrace{1^2 \cdot 20^2 + 1^2 \cdot 20^2 + 1^2 \cdot 25 + 1^2 \cdot 25}_{=850})$$

$$P(\underbrace{\frac{850-820}{\sqrt{850}}}_{0.686} < X^* < 6.86) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\phi^*(6.86)}_{1} - \underbrace{\phi^*(0.686)}_{0.50729}\right] =$$

NEMA U TABLICI

$= 0.246$

∘∘∘ APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE NORMALNOM ∘∘∘



TM

„MOIVRE - LAPLACE - PRVI CENTRALNI GRANIČNI TEOREM"

$$B(n,p) \approx N(np, np(1-p)) \quad (\text{za dovoljno velik } n)$$

PAMTI:

⟿ ponekad već za $n = 10$ dobra aproksimacija (u praksi $n > 20$ ...)

⟿ što je p bliže 50 % to je bolja aproksimacija !

Zad.) Dugogodišnjim praćenjem, vjerojatnost da je upisana cura je 23 %. Kolika je vjerg. da od 600 novoupisanih studenata bude barem 143 cura ?

$$\left.\begin{array}{l} p = 23\,\% \\ n = 600 \end{array}\right\} B(600, 0.23) \approx N(\overset{n \cdot p}{138}, \overbrace{138 \cdot 0.77}^{106.26})$$

$$P(X \geq 143) = ?$$

$$P(X \geq 143) = P\left(X^* \geq \frac{143-138}{\sqrt{106.26}}\right) = P(X^* \geq 0.485) =$$

(II)

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\underbrace{\phi^*(0.485)}_{0.3723}\right] = 0.314$$

⇝ za vježbu na ovaj način riješiti onaj zad. sa ljevorukim ljudima u populaciji

2.MI-(11-5.) U testu s 30 pitanja sva su pitanja na TOČAN-NETOČAN. Ako odgovaramo na sreću, izr. vjeroj. da smo na barem 16 odgovorili točno.

$$X \sim B(\underset{\uparrow\, n \text{ mali}}{30}, \tfrac{1}{2})$$

p točno 50% → da bude dobra aproks.

$$P(X \geq 16) = \sum_{k=16}^{30} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \{\text{KALKULATOR}\} =$$

$$= \sum_{k=16}^{30} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{30-k} =$$

$$= 0.4278$$

⇝ BEZ KALK. → NAMA NA TESTU!

⟹ preko aproksimacije: $X \sim B(30, \frac{1}{2}) \approx N(15, 7.5)$

$$P(X \geq 16) = P(X^* \geq 0.365) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*(0.365) = 0.3575$$

LOŠE!!

⟹ proširujemo interval:

za 0.5 uvijek!

$$P(X \geq 15.5) = P(X^* \geq 0.1826) = \cdots$$

$$= 0.4275$$

⇝ OD NAS SE ZA $n < 50$ OČEKUJE DA PROŠIRIMO INTERVAL!

4.DZ - 19.) Vjerojat. realizacije događaja A je 10 %. Koliko puta moramo ponoviti pokus da bi se događaj A realizirao barem 5 puta s vjerojatnosti 80 %?

$p = 10\% = 0.1$

80 %, barem 5 puta

$n = ?$

$X \sim B(n, 0.1)$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) - P(X=1) \ldots - P(X=4) = 0.8$

$\Rightarrow$ NE MOŽE SE IZLUČITI n IZ OVOGA !

b) $X \sim B(n, 0.1) \approx P(0.1n)$ → aproks. Poissonom

$P(X \geq 5) = 1 - P(X=0) \ldots - P(X=4) = 0.8$ → NE MOŽE, NIKAKO

c) APROKSIMACIJA NORMALNOM

$X \sim B(n, 0.1) \approx N(0.1n, 0.09n)$

$P(X \geq 5) = P\left(X^* \geq \frac{5-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi^*\left(\frac{5-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) = 0.8$

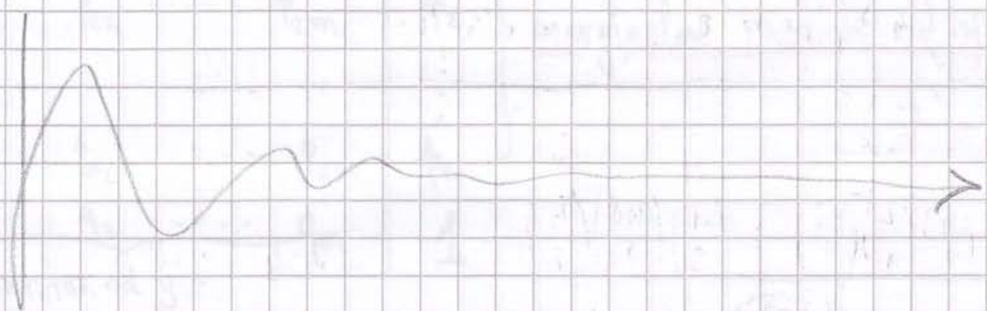
neparna

$\Rightarrow \phi^*\left(\frac{5-0.1n}{\sqrt{0.09n}}\right) = -0.6$ → SUPROTNO TRAŽENJE U TABLICI

$\frac{0.1n-5}{\sqrt{0.09n}} = 0.842 \quad |^2$

... kvadratna ... $n_1 = 72$, $n_2 = 35$?? $\boxed{n = 72}$

II CIKLUS



7. SLUČAJNI VEKTORI

7.1. DISKRETNI SLUČAJNI VEKTORI

⇝ to je 3.2. IZ PRVE KNJIGE!

⇝ SUTRA OBAVEZNO AUDITORNE → DVOSTRUKI INTEGRALI!

– razdioba SLUČAJNOG VEKTORA (X,Y) se definira s

$$\boxed{p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)}$$

X/Y	y_1	y_2	...	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	p_2
⋮	⋮				⋮
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	...	q_m	1

$p_1, \dots, p_n$ – marginalne razdiobe od X

$\underbrace{q_1 \; q_2 \; \dots \; q_m}_{\text{mar. raz. od } Y}$

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1 \qquad p_{ij} \geq 0$$

⇝ MARGINALNE RAZDIOBE = sume u nekom retku ili stupcu

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ q_1 & \dots & q_m \end{pmatrix}$$

... X i Y su NEZAVISNI ako i samo ako $p_{ij} = p_i \cdot q_j$ za $\forall i,j$.

1.MI-10-5.) Zadana je razdioba vektora.

$X \backslash Y$	0	1	
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{10}{24}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$
	$\frac{13}{24}$	$\frac{11}{24}$	1

marg. razdioba od X

marg. od Y

UVIJEK ISTO PITAJU:

a) marginalne razdiobe

$\longrightarrow$ napisano sa strane pored zadane razdiobe

b) ispitajte nezavisnost varijabli

$\Rightarrow$ NISU nezav. jer npr. $\frac{1}{4} \neq \frac{10}{24} \cdot \frac{13}{24}$

$p_{ij} \neq p_i \cdot q_j$

c) ILKO UUUUU II

$P(X \geq 0 \mid Y = 1) = ?$

$P(x \geq 0 \mid y = 1) = \cancel{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}$ **PAZI!** IAKO TO IZGLEDA SUPER LOGIČNO TO **NE** VRIJEDI!!

⇝ **Po FORMULI:**

$$\overset{P(A|B)}{P(x \geq 0 \mid y = 1)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{UVJETNA VJEROJATNOST}}}{=} \frac{\overset{P(A\cap B)}{P(x \geq 0, y = 1)}}{\underset{P(B)}{P(y = 1)}} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{1}{6}}{\frac{11}{24}} = \frac{7}{11}$$

d) Odredite razdiobu od vektora (z, w) ako je $z = x + y$, $w = x \cdot y$.

SKORO UVIJEK NA ISPITU, SVAKE GODINE

$z \mid w$	-1	0	1
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0
2	0	0	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

popunjavamo tako da gledamo kada će biti $w = x \cdot y = 1$
⇒ samo kada je $x = 1$ i $y = 1$
⇒ tada je $z = 2$
→ iz prve tablice za $x = 1$ i $y = 1$ je vjerojatnost $\frac{1}{6}$

⇝ SVE OSTALO 0!

$w = -1 \Rightarrow x = -1, y = 1 \Rightarrow z = 0$ → 1. tablica →

$z = -1 \Rightarrow x = -1, y = 0 \Rightarrow w = 0$

OKRENI

$z=0 \Rightarrow x=0,\ y=0 \longrightarrow w=0$

(za $x=-1,\ y=1$ SMO VEĆ POKRILI TAJ SLUČAJ !)

$z=1 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=0,\ y=1 \\ x=1,\ y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow w=0 \rightsquigarrow \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ u tablicu!

... MEĐUSOBNI ODNOS DVIJE VARIJABLE ...

⇝ 1. KNJIGA 103. – 105. str.

⇝ "KORELIRANOST" PODATAKA ...

def.

KOVARIJACIJSKI MOMENT od X i Y se definira kao

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\left[(X-m_X)(Y-m_Y)\right]$$

$$\boxed{\mathrm{cov}(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)}$$

KOEFICIJENT KORELACIJE:

$$\boxed{r(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\,D(Y)}}}$$

! **Uočimo:**

Ako su X i Y nezavisni tada je $\mathrm{cov}(X,Y)=0$, tj. $r(X,Y)=0$, tj. X i Y NISU KORELIRANI!

OBRAT NE VRIJEDI!!

TM "DISPERZIJA ZBROJA"

$$D\left(\sum_i X_i\right)=\sum_i D(X_i)+2\sum_{i,j}\mathrm{cov}(X_i,X_j)$$

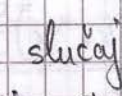
PODSJETNIK: $E\left(\sum X_i\right)=\sum E(X_i)$

DOKAZ: trivić ☺

! **Uoči:**

Ako su X_i nezavisni: $D\left(\sum_i X_i\right)=\sum_i D(X_i)$.

Zad.) Od 400 studenata koji su slušali SiS i ViS 220 su položili oba predmeta, 90 samo ViS, a 30 samo SiS. Neka je X je 1 ako je slučajno odabran student položio ViS, a Y je 1 ako je položio SiS. Odredite koeficijent korelacije SiS-a i ViS-a.

 → SiS-a

x / y	0	1	
0	$\frac{60}{400}$ ($400-(90+30+220)$)	$\frac{30}{400}$	$\frac{90}{400}$
1	$\frac{90}{400}$	$\frac{220}{400}$	$\frac{310}{400}$
	$\frac{150}{400}$	$\frac{250}{400}$	1

→ ZAVISNI SU !

$$E(x) = 0 \cdot \frac{90}{400} + 1 \cdot \frac{310}{400} = 0.775$$

$$E(y) = 0 \cdot \frac{150}{400} + 1 \cdot \frac{250}{400} = 0.625$$

$$D(x) = 0^2 \cdot \frac{90}{400} + 1^2 \cdot \frac{310}{400} - 0.775^2 = 0.174$$

$$D(y) = 0^2 \cdot \frac{150}{400} + 1^2 \cdot \frac{250}{400} - 0.625^2 = 0.234$$

$$r(x,y) = \frac{E(x \cdot y) - E(x)E(y)}{\sqrt{D(x)D(y)}}$$

!

$$E(x \cdot y) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \frac{60}{400}}_{=0} + \underbrace{0 \cdot 1 \cdot \frac{30}{400}}_{=0} + \underbrace{1 \cdot 0 \cdot \frac{90}{400}}_{=0} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{220}{400} = 0.55$$

$$\Rightarrow r(x,y) = \frac{0.55 - 0.775 \cdot 0.625}{\sqrt{0.174 \cdot 0.234}} = 0.325$$

... CENTRIRANJE I NORMIRANJE VARIJABLI ...

- ako znamo razdiobu od X lako znamo i od $X-a$ (minus)

$$E(X-a) = E(X) - a$$

$$D(X-a) = D(X)$$

⟶ s obzirom da se $D(X)$ NE MIJENJA, ne mijenja se ni $\mathrm{cov}(X,Y)$, a samim time ne mijenja se ni $r(X,Y)$

⟶ mi ćemo odabrati $a = m_X$, za takvu varijablu

$\dot{X} = X - m_X$ kažemo da je CENTRIRANA!

⟶ $\boxed{X^* = \frac{X - m_X}{\sigma_X}}$ kažemo da je **NORMIRANA** SLUČAJNA VARIJABLA

$E(X^*) = 0$, $D(X^*) = 1$

⟶ centriranje ne mijenja koeficijent relacije $r(X,Y)$, ali ni normiranje ne mijenja $r(X,Y)$!

⟶ zato je ovaj postupak jako bitan!

DOKAZ: (BIO JEDNOM)

$$r(X^*, Y^*) = \frac{E(X^* \cdot Y^*) - \overset{0}{E(X^*)}\,\overset{0}{E(Y^*)}}{\underbrace{\sigma(X^*)}_{=1}\,\underbrace{\sigma(Y^*)}_{=1}} = E\left(\frac{X-m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y-m_Y}{\sigma_Y}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y} = r(X,Y)$$

JEDINA TEORIJA IZ OVOG CIKLUSA !

TM

Vrijedi $|r(x,y)| \leq 1$. Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$y = aX + b$ za neke a i b.

Dokaz:

→ znamo: $r(x^*, y^*) = r(x, y)$

$$D(x^* \pm y^*) = D(x^*) + D(y^*) \pm 2\operatorname{cov}(x^*, y^*) =$$

$$= 2\left[1 \pm r(x,y)\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow |r(x,y)| \leq 1$$

TO JE SVE OD TEORIJE

2.DZ-10.) Bacamo dvije kocke. X je minimum, a Y maksimum brojeva na kockama. Odredite koeficijent korelacije među ovim varijablama.

1,2 i 2,1

X\Y	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

ČIM IMATE NULL U TABLICI ZNATE DA SU ZAVISNI!

PROVJERITI ZA DZ NA KALK.

$E(X) = \cdots = 2.52778 \quad \rightarrow 1 \cdot \frac{1+5\cdot 2}{36} + 2 \cdot \frac{1+4\cdot 2}{36} + 3 \cdot \frac{1+3\cdot 2}{36} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{91}{36}$

$E(Y) = \cdots = 4.47222 \quad \rightarrow 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{4+1}{36} + \cdots + 6 \cdot \frac{5\cdot 2+1}{36}$

$D(X) = 1.97 \quad \rightarrow 1^2 \cdot \frac{11}{36} + 2^2 \cdot \frac{9}{36} + 3^2 \cdot \frac{7}{36} + \cdots + 6^2 \cdot \frac{1}{36} - 2.52778^2 = 1,97$

$D(Y) = 1.97$

$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$

$\Rightarrow r(X,Y) = 0.479$

$0.4798029\ldots$

$E(X\cdot Y) = \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{6}{36} + \frac{8}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{4}{36} + \frac{12}{36} + \frac{16}{36} + \frac{20}{36} + \frac{24}{36} + \frac{9}{36} + \frac{24}{36} + \frac{30}{36} + \frac{36}{36} + \frac{16}{36} + \cdots = \frac{441}{36}$

Zad.) Bacamo 2 kocke. Neka je X apsolutna vrijednost razlike brojeva na kockama, a Y je manji od 2 broja koji su pali, inače nula (ako su isti). Izračunajte koef. korelacije varijabli X i Y.

X|Y	0	1	2	3	4	5	
0	1,1 2,2 3,3 ... 6,6 ← $\frac{6}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$
1	0	1,2 ili 2,1 $\frac{2}{36}$	2,3 ili 3,2 $\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$ 5,6 6,5	$\frac{10}{36}$
2	0	1,3 3,1 $\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$ 4,6 6,4	0	$\frac{8}{36}$
3	0	1,4 4,1 $\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$ 5,2 2,5	$\frac{2}{36}$ 6,3 3,6	0	0	$\frac{6}{36}$
4	0	5,1 1,5 $\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$ 6,2 2,6	0	0	0	$\frac{4}{36}$
5	0	6,1 1,6 $\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

$$r(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{E(X\cdot Y) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

$$E(x) = E(y) = 0 \cdot \frac{6}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + \dots = 1.94$$

$$D(x) = D(y) = \left(0^2 \cdot \frac{6}{36} + 1^2 \cdot \frac{10}{36} + 2^2 \cdot \frac{8}{36} + \dots\right) - (\underbrace{1.94}_{E(x)})^2$$

$$E(XY) = \sum x_i y_j p_{ij} = 3.889$$

$$\Rightarrow r(x,y) = 0.061$$

7.2. NEPREKINUTI SLUČAJNI VEKTORI

def.

n-dimenzionalni slučajni vektor je uređena n-torka slučajnih varijabli:

$$X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

FUNKCIJA RAZDIOBE slučajnog vektora se definira s

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

⇝ mi ćemo (NAŽALOST) raditi samo 2D slučaj (X, Y)

$$\boxed{F(x,y) = P(X < x, Y < y)}$$

KLASIKA

def.

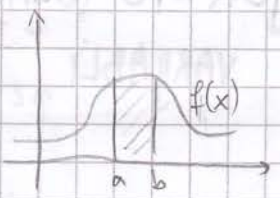
Za slučajni vektor kažemo da je **NEPREKINUT** ako postoji nenegativna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty\rangle$ takva da je

$$\boxed{F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy}$$

$\rightsquigarrow$ $f(x,y)$ nazivamo **FUNKCIJOM GUSTOĆE** i vrijedi

$$\boxed{f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}$$

* u 1D:



$$P = \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad P(a < X < b)$$

KAKO RAČUNAMO VJEROJATNOST U 2D ??

$$P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$\Rightarrow P(x_1 < X < x_2,\ y_1 < Y < y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\,dx\,dy \longrightarrow$$

PRAVOKUTNIK

$$\boxed{P[(X,Y) \in G] = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy}$$

$\longrightarrow$ OPĆENITO, AKO NIJE PRAVOKUTNIK!

Očito:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

→ ako je poznata razdioba od (X,Y) kako odrediti marginalnu razdiobu od X i od Y?

$$F_X(x) = P(X<x) = P(X<x, -\infty<Y<+\infty) \quad \rightarrow \text{margin. razd. od } X$$

$$= \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy}$$

UVIJEK PO SUPROTNOJ VARIJABLI

$$\Rightarrow \boxed{f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx}$$

MARGINALNE GUSTOĆE

„NEMA ZADATKA BEZ NJIH"

TM X i Y su nezavisni ako i samo ako

$$\boxed{f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)}$$

→ JAKO BITAN! SKORO U SVAKOM ZADATKU ĆEMO GA KORISTITI

Dokaz:

$\Rightarrow$

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y) \stackrel{\text{nez.}}{=} P(X<x)\cdot P(Y<y) =$$

$$= F_x(x)\cdot F_y(y) \quad \Big| \ \frac{\partial x}{\partial y} \ \{\text{da dobijemo gustoću}\}$$

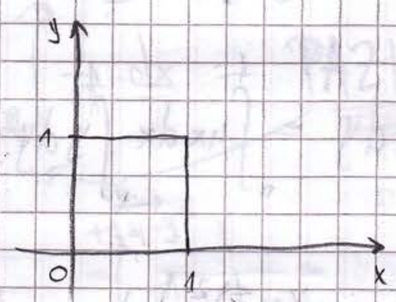
$\Leftarrow$

$$P(X\in A, Y\in B) = \iint_{AB} f(x,y)\,dx\,dy = \iint f_x(x)\cdot f_y(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_A f_x(x)\,dx \int_B f_y(y)\,dy = P(X\in A)\cdot P(Y\in B)$$

2MI-07-6.) Neka je slučajni vektor zadan sa $f(x,y) = Cxy$, $0<x<1$, $0<y<1$. (Pretpostavlja se nula inače.)

a) $C = ?$



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\int_0^1\int_0^1 Cxy\,dx\,dy = C\int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{4}C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}C = 1 \Rightarrow \boxed{C=4} \quad \text{(1 bod)}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 4xy$$

b) ispitaj nezavisnost i odredi marginalne gustoće

$$f_x(x) = \int_0^1 4xy\,dy = 4x\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = 2x$$ $\rightarrow$ NE MOŽEŠ IMAT y-ONE !!

$$f_y(y) = \int_0^1 4xy\,dx = 2y$$

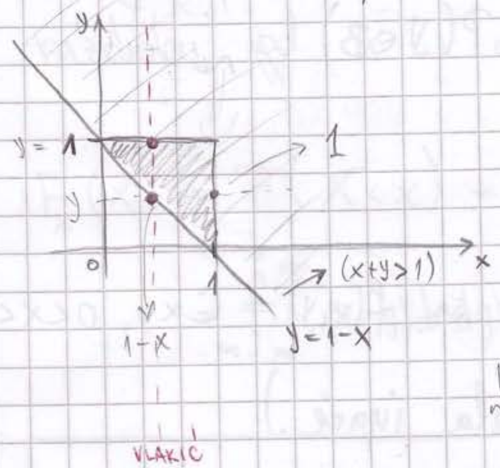
$\Rightarrow \quad f(x,y) = f(x) \cdot f(y) = 2x \cdot 2y = 4xy$

$\Rightarrow$ X i Y SU NEZAVISNI ! (2 boda)

c) $P(X+Y>1) = ?$

PAZI !!!

$P(X+Y>1) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \cancel{\frac{1}{2}}$ NE ! NIJE POVRŠINA !



GUSTOĆA NIJE KONSTANTNA I SVUGDJE ISTA, DA JE SAMO 4 ONDA BI BILA $\frac{1}{2}$!

INTUITIVNO: MORA BITI VEĆE OD $\frac{1}{2}$ JER GUSTOĆA RASTE S PORASTOM X i Y !

$$P(X+Y>1) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{1-x}^1 4xy\,dy = \int_0^1 4x\,dx \int_{1-x}^1 y\,dy =$$

$$= \int_0^1 4x\,dx\, \frac{y^2}{2}\Big|_{1-x}^1 = 2\int_0^1 x\left(\frac{1}{2} - \frac{(1-x)^2}{2}\right)dx =$$

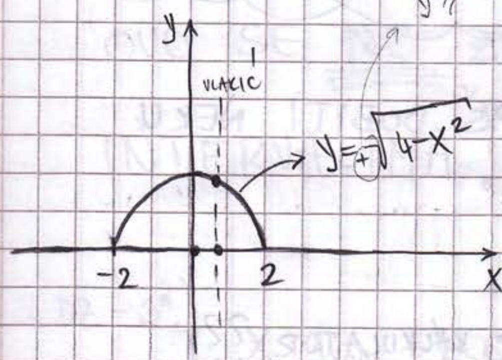
$$= \dots = \frac{5}{6}$$

2.MI − 08 − 5.) $f(x,y) = C$, $x^2+y^2 \le 4$, $y \ge 0$

a) $C = ?$

kružnica , $r=2$

$y \geq 0$



NE ! PAZI !!

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{\cancel{2}} c\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} c\,dy$$

$$= C \int_{-2}^{2} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy = C \int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| x = 2\sin t \right|$$

$\frac{r^2\pi}{2}$ → POVRŠINA → JEDNOSTRUKI INTEGRAL !

$$= 2\pi C = 1 \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2\pi}}$$

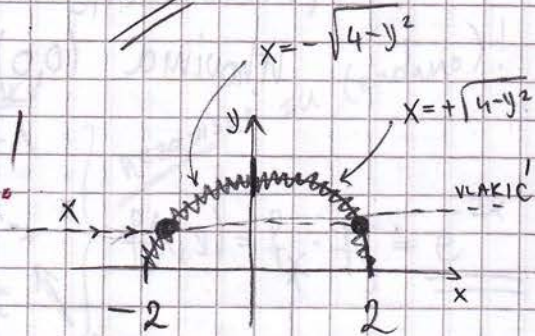
$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2\pi}$

b) marginalne gustoće ?

po y-onu gledamo

$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2\pi}\,dy = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}, \quad x \in \langle -2, 2 \rangle$$

$$f_Y(y) = \int_{\cancel{-2}}^{\cancel{2}} \frac{1}{2\pi}\,dx = \text{PAZI !! NE !!}$$



$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{+\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{2\pi}\,dx = \frac{1}{\pi}\sqrt{4-y^2}, \quad y \in \langle 0, 2 \rangle$$

⇒ OČITO SU ZAVISNI !

c) $E(y) = ?$

*PODSJETNIK:
→ očekivanje neprek. sluč. VARIJABLE:
$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx$$

$$E(y) = \int_0^2 y \cdot f_y(y)\, dy$$!!!

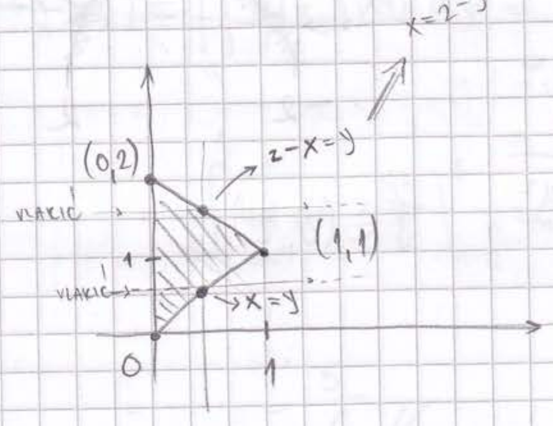
→ OČEKIVANJE JE BROJ, SJETI SE, MORAŠ DOBITI NEKU VRIJEDNOST !!

$$E(y) = \int_0^2 y \frac{1}{\pi} \sqrt{4-y^2}\, dy = \left| 4-y^2 = t \right|$$ → KALKULATOR ??

$$= \frac{8}{3\pi}$$ //

2.MI - 10 - 5.) Vektor (X,Y) ima jednoliku razdiobu na trokutu zadan vrhovima $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$. Odredi marginalne gustoće.

*PODSJETNIK: $X \sim U[a,b]$
$$f(x) = \frac{1}{b-a}$$



$$f(x,y) = \frac{1}{P}$$ → JEDNOLIKA RAZDIOBA !

$$f(x,y) = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1} = 1$$ //

$$f_X(x) = \int_x^{2-x} 1\, dy = 2-2x, \quad x \in (0,1)$$ NE ZABORAVI ! NE PRIZNA[JU] BEZ TOGA !

$$f_Y(y) = \int_0^y 1\, dx = y \quad \text{za } y \in [0,1]$$

$$f_y(y) = \int_0^{2-y} 1\,dx = 2-y \quad , \quad za \quad y \in [1,2]$$

PAZI!

OVO SE **NE ZBRAJA**! OSTAVLJA SE NA OVIM INTERVALIMA!

5. DZ - 3*.) X ima eksponencijalnu razdiobu s očekivanjem $\frac{1}{2}$.
Y ima jednoliku razdiobu na intervalu $[0,2]$.
Ako su X i Y nezavisni, izračunaj vjerojatnost da Y poprimi manju vrijednost od X.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim E(2) \\ Y \sim U[0,2] \end{array}\right\}\text{nez.} \qquad \text{jer } E(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

$$P(Y \leq X) = ?$$

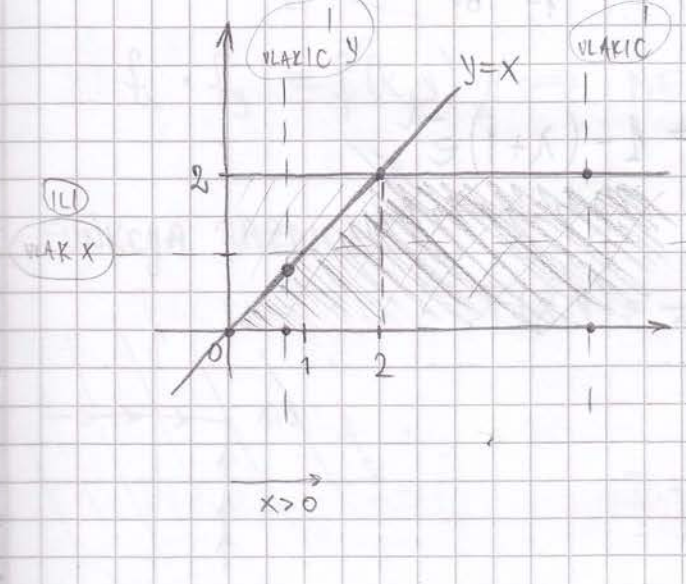
*PODSJETNIK:

$$f_x(x) = 2e^{-2x}, \; x>0 \;\leadsto f(x) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$f_y(y) = \frac{1}{2}, \; y \in \langle 0,2 \rangle \;\leadsto f(x) = \frac{1}{b-a}$$

nezavisni su (zadano)!

$$f(x,y) = f_x \cdot f_y = e^{-2x}$$



$$P(Y \leq X) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy =$$

$$P(Y \leq X) = \int_0^2 dx \int_0^x e^{-2x}\,dy + \int_2^\infty dx \int_0^2 e^{-2x}\,dy$$

$$P(Y \leq X) = \dots = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4}$$

ILI → VLAK X →

OKRENEMO PORETDAK:

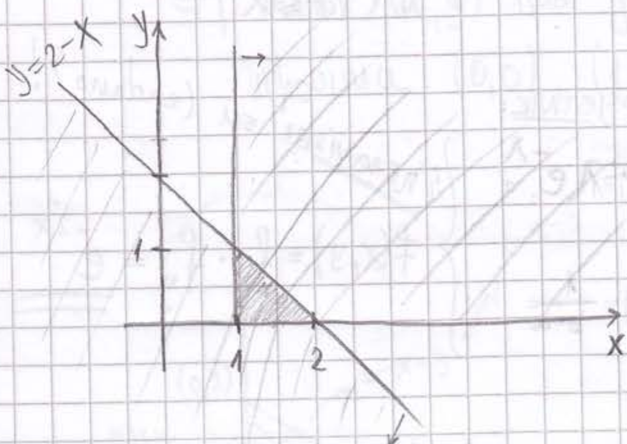
ILI $\int_0^2 dy \int_y^\infty e^{-2x}\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-4}$ //

5.DZ-9.) Neka su X i Y nezavisne sluč. varijable eksponencijalne razdiobe s istim parametrom. Izračunajte vjerojatnost da suma X i Y bude manja od 2 ako znamo da je X veći od 1.

$X, Y \sim E(\lambda)$

$P(X+Y<2 \mid X>1) = ?$

$\Rightarrow f(x,y) \underset{\text{nezav.}}{=} f_X \cdot f_Y = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda y} = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad x>0,\ y>0$ //



y<2-x

!! PO DEFINICIJI:

$$P(X+Y<2 \mid X>1) = \frac{P(X+Y<2, X>1)}{P(X>1)} = \frac{\cancel{\lambda^2}\int_1^2 dx \int_0^{2-x} e^{-\lambda(x+y)}\,dy}{\cancel{\lambda^2}\int_1^\infty dx \int_0^\infty e^{-\lambda(x+y)}\,dy} = \dots$$

$$= 1-(\lambda+1)e^{-\lambda}$$ //

→ KAKO ODREDITI FUNKCIJU RAZDIOBE ... ?

2MI-07-5.) Neka je $f(x,y) = \dfrac{C}{x^2+y^2+x^2y^2+1}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

Odrediti C, marginalne razdiobe, $F(x,y)$.

$$C\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{x^2+y^2+x^2y^2+1} = C\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+1)(y^2+1)} = C\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} =$$

$$x^2(1+y^2)+y^2+1 = (1+y^2)(1+x^2)$$

$$= C \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{\infty} \cdot \operatorname{arctg} y \Big|_{-\infty}^{\infty} = C\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi = C\cdot\pi^2$$

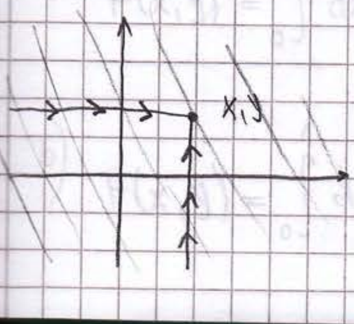
$$\Rightarrow \underline{\underline{C\cdot\pi^2 = 1}} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{\pi^2}}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(x^2+1)(y^2+1)} = \frac{1}{\pi^2(x^2+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{y^2+1} = \frac{1}{\pi(x^2+1)} \,//$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(y^2+1)} \,//$$

$$f_X \cdot f_Y = f(x,y) \,// \Rightarrow \text{NEZAVISNE!}$$

FUNKCIJA RAZDIOBE:

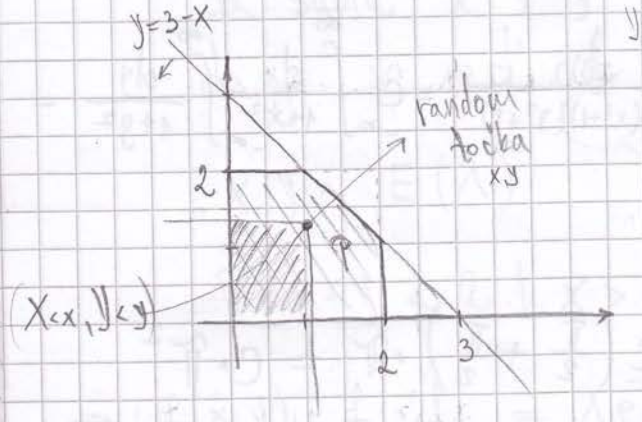


$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{x}\frac{dx}{1+x^2}\int_{-\infty}^{y}\frac{dy}{1+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}\right) \,//$$

ZI-09-10.) Biramo nasreću točku unutar $\Omega = \{x, y \in (0,2), x+y<3\}$. Neka je X x-koordinata sluč. odabrane točke, a Y y-koordinata. Odredi sve ... (marginalne gustoće, razdiobu...)

$$\Omega = \{x, y \in (0,2),\ x+y<3\} \qquad (x,y) = ?$$



$y < 3-x$

$$P = \frac{3\cdot 3}{2} - 2\cdot\frac{1\cdot 1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{P} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y)$$

$$= \frac{x\cdot y}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}xy$$

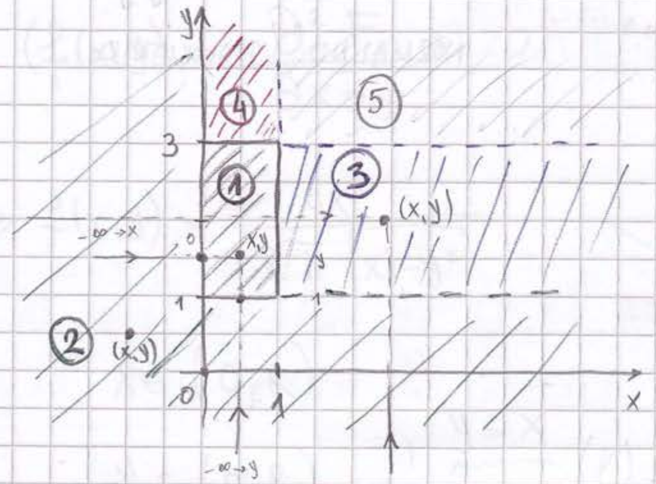
P dijelog

PROVJERA:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{2}{7}$$

MOGLI PREKO POVRŠINA JER SE RADI O JEDNOLIKOJ RAZDIOBI.

5. DZ - 1*.) Slučajni vektor ima gustoću $f(x,y) = c(5-x-y)$, $0<x<1$, $1<y<3$. Odredi funkciju razdiobe ovog slučajnog vektora.



$$c \int_0^1 dx \int_1^3 (5-x-y)\,dy = c \cdot 5 = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{5}}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{5}(5-x-y)$$

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y) = \int_{-\infty}^{x} dx \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{5}(5-x-y)\,dy$$

NE MOŽEMO POVRŠINE JER JE NEKA f gustoće ! NIJE JEDNOLIKA RAZDIOBA !

1) $F(x,y) = \frac{1}{5}\int_0^x dx \int_1^y (5-x-y)\,dy = \frac{1}{10}x(y-1)(9-x-y)$, $x \in (0,1)$, $y \in (1,3)$

UOČI!!

2) $F(x,y) = 0$, $x<0$, $y<1$

3) $F(x,y) = \int_0^1 dx \int_1^y \frac{1}{5}(5-x-y)\,dy = \frac{1}{10}(y-1)(8-y)$, $x>1$, $y \in (1,3)$

4) $F(x,y) = \int_0^x dx \int_1^3 \frac{1}{5}(5-x-y)\,dy = \frac{1}{5}x(6-x)$, $x \in (0,1)$, $y>3$

5) $F(x,y) = \int_0^1 dx \int_1^3 \frac{1}{5}(5-x-y)\,dy = 1$, $x>1$, $y>3$

"JOŠ NIKAD NIJE BILO NA ISPITU"

... OČEKIVANJE SLUČAJNOG VEKTORA :

$$E(xy) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy$$

GRANICE SE POSTAVLJAJU „NORMALNO" (PRAVOKUTNIK ....)

$\boxed{\text{TM}}$

„ SVOJSTVA OČEKIVANJA "

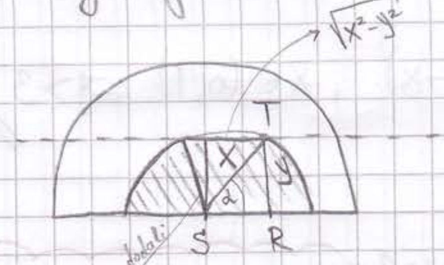
a) $E(sX + tY) = sE(X) + tE(Y)$

b) $E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$ samo ako su nezavisni !

DOKAZIĆ : $E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f_X(x) \cdot f_Y(y)\,dy = \int x f_X(x)\,dx \int y f_Y(y)\,dy =$

$= E(X) \cdot E(Y)$

5.DZ - 2.) Biramo točku T unutar kruga polumjera R. Neka je X udaljenost točke T do središta, a Y do polumjera. Odredite funkciju gustoće.



TROKUT + 2 KRUŽNA ISJEČKA

$f(x,y) = ?$

NIJE $f = \frac{1}{P}$!

NIJE JEDNOLIKA

$F(x,y) = P(X < x, Y < y)$

$$F(x,y) = \frac{\overbrace{\frac{1}{2}\cdot y \cdot 2\sqrt{x^2-y^2}}^{\text{TROKUT}} + \overbrace{2\cdot\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)\cdot x^2}^{P_{k1}}}{\frac{1}{2}R^2\pi}$$

$$^{*}P_{k1} = \frac{\alpha}{2\pi}\, r^2\pi$$

$$P_{k1} = \frac{1}{2}\alpha r^2$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

"BUREK: SUMNJAM DA ĆE OVO STAVITI NA ZI, ALI NA ROKU BI MOGLI" $\Downarrow$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{4x^2}{R^2\pi\sqrt{x^2-y^2}}$$

→ prvo po x-u derivirati pa onda po y

$x \in (0,R)$

$y \in (0,R)$, $\underline{y \leq x}$

7.3. UVJETNE RAZDIOBE

motivacija: - biramo $Y \in [0,2]$
- zatim biramo $X \in [Y,2]$
- razdioba od X ?

def. Neka je $f(x,y)$ **GUSTOĆA VEKTORA** (X,Y) te neka je poznata razdioba od Y. Tada se uvjetna gustoća od X uz uvjet $Y=y$ definira s

$$\boxed{f_{X|Y=y}(x) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$$

⟶ ČEŠĆE ĆEMO KORISTITI: $\boxed{f(x,y) = f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)\, dy}$

! Uoči:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X|Y=y}(x) \cdot f_Y(y)\, dy$$

⟶ marginalna gustoća od X

def. UVJETNO OČEKIVANJE varijable X koja ovisi o realizacijama od Y je

$$\boxed{E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx}$$

te vrijedi

$$\boxed{E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X|Y=y)\, f_Y(y)\, dy}$$

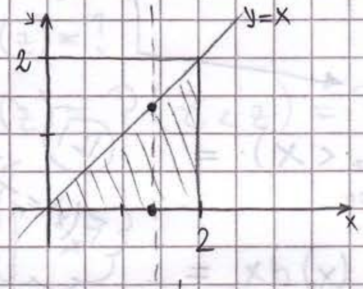
def. Vjerojatnost događaja A koji ovisi o realizacijama od X:

$$\boxed{P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A \mid X = x)\, f_X(x)\, dx}$$

2.MI-07-7.) Biramo $y \in [0,2]$ i zatim $x \in [y, 2]$. Odredi gustoću i očekivanje od X.

$$\left.\begin{aligned} &f_Y(y) = \frac{1}{2} \quad (\text{uniformna} - y \in [0,2]) \\ &f_{X|Y=y} = \frac{1}{2-y} \end{aligned}\right\} f(x,y) = f_Y(y) \cdot f_{X|Y=y}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2(2-y)} \qquad 0 \le y \le x \le 2$$



$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy = \int_0^x \frac{1}{2(2-y)}\, dy = \dots$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln(2-x)\right], \quad x \in [0,2]$$

$E(x) = ?$

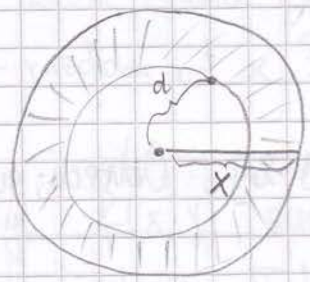
I. NAČIN: $E(x) = \int x \cdot f_X(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x(\ln 2 - \ln(2-x))\, dx = \dots = \frac{3}{2}$

II. NAČIN: (BRŽI i LJEPŠI ?) II ?

$$E(X \mid Y=y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X|Y=y}(x)\, dx = \int_y^2 x \cdot \frac{1}{2-y}\, dx = \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{2-y}\Big|_y^2 = \frac{y+2}{2}$$

$$\Rightarrow E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(X \mid Y=y)\, f_Y(y)\, dy = \int_0^2 \frac{1}{2}(y+2) \cdot \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2} + 2y\right)\Big|_0^2 = \dots = \frac{3}{2}$$

2.MI-11-6.) Radijus kruga je jednoliko distribuirana varjabla na $[1,2]$. Biramo točku T unutar tog kruga. Izračunaj vjerojatnost da je udaljenost $|TS| > \frac{1}{2}$.



$$f_X(x) = \frac{1}{2-1} = 1$$

$$P(A|X=x) = \frac{x^2\pi - \frac{1}{4}\pi}{x^2\pi} = 1 - \frac{1}{4x^2}$$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$P(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(A|X=x)\, f_X(x)\, dx = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)\cdot 1 \cdot dx = \dots = \frac{7}{8}$$

2.MI-09-6.) Biramo X_1 i X_2 iz $[0,1]$. Neka je sluč. var. $X = \max\{X_1, X_2\}$. Zatim biramo y iz $[0,X]$. Gustoće, očekivanje od y?

$$f_{X_1}(x) = 1 \qquad f_{X_2}(x) = 1$$

ako je $X_2 < X$ onda je i $X_1 < X$

$0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x \quad 1$

$$F_X(x) = P(X < x) = P(\max\{X_1, X_2\} < x) =$$
$$= P(X_1 < x, X_2 < x) = P(X_1 < x) \cdot P(X_2 < x) =$$

NEZAVISNE SU

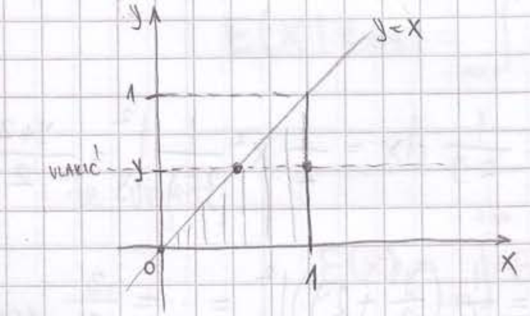
ILI $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$

$$= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(x)\, dx =$$
$$= \int_0^x dx \cdot \int_0^x dx = x \cdot x = x^2$$

$$\Rightarrow f_X(x) = F_X'(x) = 2x$$

uniformna na $[0,x]$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x} \qquad y \in [0,x]$$



$$\Rightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X=x}(y) = 2\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = 2$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx = \int_y^1 2\, dx = 2 - 2y, \; y \in [0,$$

$$\Rightarrow E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^1 y(2-2y)\, dy = \dots = \frac{1}{3}$$

8. FUNKCIJE SLUČAJNIH VEKTORA

motivacija: – ako znamo razdiobu od X i Y, kolika je razdioba od $Z=\psi(X,Y)$?

Zad.) Neka su X i Y nezavisne s eksponencijalnom razdiobom s parametrom 2. Nađi razdiobu od $Z = X+Y$.

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} = 2e^{-2x}, \quad x>0$$

$$f_Y(y) = 2e^{-2y}, \quad y>0$$

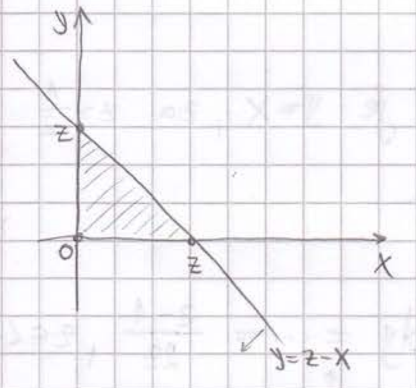
$$f(x,y) = f_X(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nezavisne}}}{\cdot} f_Y(y) = 4e^{-2x-2y}$$

$z \in \langle 0, \infty \rangle$

$G(z) = ?$

$y < z - x$ (z ↳ konst.)

$$G(z) = P(Z<z) = P(\underbrace{X+Y<z}_{G}) = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$$



$$G(z) = \int_0^z dx \int_0^{z-x} 4e^{-2x-2y}\,dy = \dots$$

$$G(z) = 1-(1+2z)e^{-2z}, \quad z>0$$

$$g(z) = G'(z) = 4ze^{-2z}, \quad z \in \langle 0,\infty\rangle$$

5.DZ – 15.) Slučajni vektor (X,Y) ima jednoliku razdiobu na $[0,1]\times[0,1]$. Odredi gustoću od varijable $Z=\frac{X}{X+Y}$.

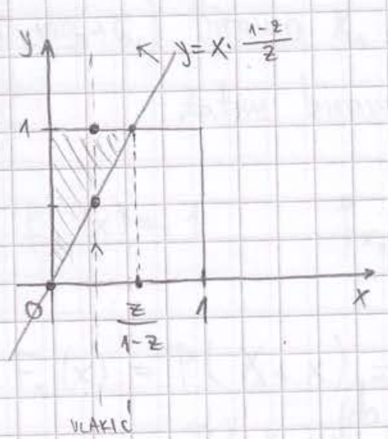
$$f(x,y)=\frac{1}{P}=\frac{1}{1}=1$$

$$z\in[0,1]$$

$$G(z)=P(Z<z)=P\left(\frac{X}{X+Y}<z\right)=$$

$$=P\left(Y>X\cdot\frac{1-z}{z}\right)$$

1. SLUČAJ: $z\in\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$

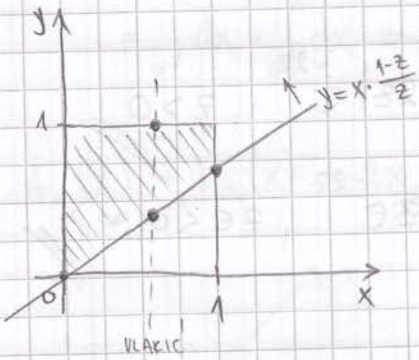


$$y=1=x\cdot\frac{1-z}{z}\Rightarrow x=\frac{z}{1-z}$$

$$\Rightarrow G(z)=\int_0^{\frac{z}{1-z}}dx\int_{x\cdot\frac{1-z}{z}}^{1}1\,dy=\dots=\frac{z}{2(1-z)},\ z\in\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$$

2. SLUČAJ: $z\in\langle\frac{1}{2},1\rangle$

ako je $z=\frac{1}{2}$ onda je $y=x$, za $z>\frac{1}{2}$ površina drugačija



$$\Rightarrow G(z)=\int_0^{1}dx\int_{x\cdot\frac{1-z}{z}}^{1}1\,dy=\dots=\frac{z-1}{2z},\ z\in\langle\frac{1}{2},$$

MOŽE KAO POVRŠINA

$$g(z) = G'(z)$$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-z)^2}, & z \in \langle 0, \frac{1}{2} \rangle \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2}, & z \in \langle \frac{1}{2}, 1 \rangle \end{cases}$$

*PODSJETNIK:

(1D) : $y=\Psi(x) \Rightarrow g(y)=f(x)\cdot\left|\frac{dx}{dy}\right| \quad x=\Psi^{-1}(y)$

(n-D)

⇝ znamo funkciju gustoće $f(x_1,\dots,x_n)$, kolika je $g(y_1,\dots,y_n)=?$

Vrijedi: $P\left((x_1,\dots,x_n)\in G\right)=P\left((y_1,\dots,y_n)\in G'\right)$

$$\underbrace{\int\cdots\int}_{\text{višestruki integral}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=\left|\begin{array}{l} x_1=\Psi_1(y_1,\dots,y_n)\\ \vdots \\ x_n=\Psi_n(y_1,\dots,y_n)\end{array}\right| =$$

(II)

JAKOBIJAN

$$=\int\cdots\int_{G'} f(x_1,\dots,x_n)\cdot|J|\,dy_1\dots dy_n=$$

$$=\int\cdots\int_{G'} g(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n=$$

STARE VAR.

$$J=\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}$$

NOVE VAR.

$$\Rightarrow \boxed{g(y_1,\dots,y_n)=f(x_1,\dots,x_n)\left|\frac{\partial(x_1,\dots,x_n)}{\partial(y_1,\dots,y_n)}\right|}$$

⇝ mi, **NAŽALOST**, radimo samo slučaj $n=2$ i to ovaj specifični slučaj specifičnog slučaja (II)

$$\boxed{\begin{array}{l}x=X\\ y=\Psi(x,z)\end{array}}$$

„BILO JEDNE GODINE IZVOD OVOG JAKOBIJANA ZA $n=2$"

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,z)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| =$$

UVRSTITI

$$\Rightarrow \boxed{g(x,z) = f(x,y) \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| , \quad y = \Psi(x,z)}$$

!

⇝ marginalna gustoća od z:

$$\boxed{g(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| dx}$$

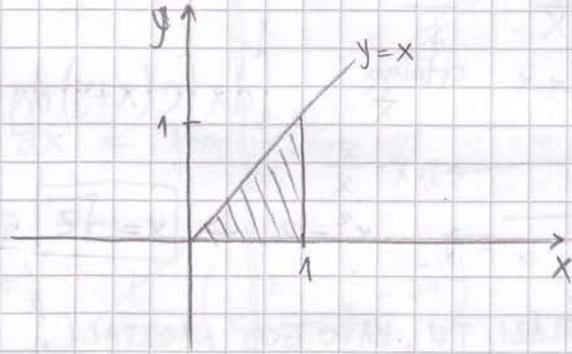
NAJVIŠE ĆEMO KORISTITI !

⇝ ZA GRANICE → BURIĆEV PRINCIP

2.MI - 11 - 7.) Neka je zadan slučajan vektor $f(x,y) = Cx$, na intervalu $0 \le y \le x \le 1$. Zadano je $z = x - y$, odredite gustoću $g(z)$.

$f(x,y) = Cx$

$0 \le y < x \le 1$



$$\int_0^1 dx \int_0^1 Cx\, dy = \frac{1}{3} C = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{C=3} \Rightarrow f(x,y) = 3x$$

1. KORAK: Koje vrijednosti z može poprimiti?

$z \in (0,1)$ (uvjet $y \le x$!)

2. KORAK: Što je y?

$y = x - z$

3. KORAK: Derivacija.

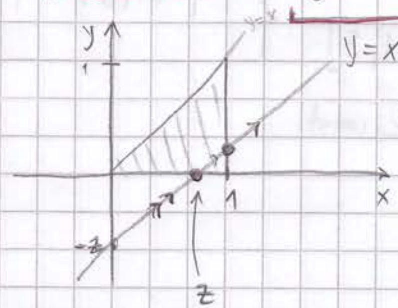
$$\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| = |-1| = 1$$

$$g(z) = \int_z^1 3x \cdot 1 \cdot dx$$

DA BI ODREDILI GRANICE TREBA NACRTATI $y = x - z$!!

$$g(z) = 3\frac{x^2}{2}\Big|_z^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}z^2$$

$z \in (0,1)$

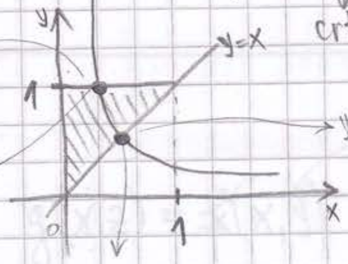


NE TREBA DIJELITI NA INTE.

ULAZI UVIJEK U z, IZLAZI U 1!

5.DZ-19.) Neka je zadan sluč. vektor s gustoćom $f(x,y)=C(x+y)$ pri čemu je $0 \le x < y \le 1$. Odredi gustoću od $z = x\cdot y$.

$y=\frac{z}{x}$ → const. → crtamo $\frac{1}{x}$



UVIJEK ULAZI TU

$y=1$

$\frac{z}{x}=1$

$\boxed{x=z}$

DONJA GRANICA !!

$y=x=\frac{z}{x}$

UVIJEK IZLAZI TU, KAKO GOD NACRTALI!

$$\int_0^1 dx \int_0^1 c(x+y)\,dy = \dots = \frac{1}{2}C = 1 \Rightarrow \boxed{C=2}$$

$$x^2 = z \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{z}}$$ GORNJA GRANICA !!

PAZI!! UVRSTI!!!

1.] $z \in (0,1)$

2.] $y = \frac{z}{x}$

3.] $\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| = \frac{1}{x}$

$$\Rightarrow g(z) = \int_z^{\sqrt{z}} 2\cdot\left(x+\frac{z}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

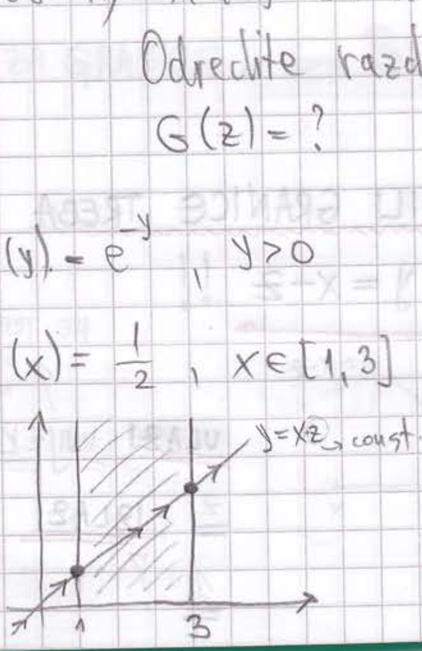
$$g(z) = \dots = 2-2z \quad z\in(0,1)$$

$$\Rightarrow G(z) = \int g(z)\,dz = 2z - z^2$$

2.MI-08-7.) X i Y su nezavisne sluč. varijable. $Y \sim E(1)$, $X \sim U[1,3]$. Odredite razdiobu od $z=\frac{y}{x}$ i vjerojatnost $P(\frac{y}{x}<1) =$

$G(z) = ?$

$$\left.\begin{aligned} f_y(y) &= e^{-y}, \quad y>0 \\ f_x(x) &= \frac{1}{2}, \quad x\in[1,3] \end{aligned}\right\} f(x,y) = f_x \cdot f_y = \frac{1}{2}e^{-y}$$



1.] $z \in (0, \infty)$

2.) $y = x \cdot z$

3.) $\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| = x$

$$\Rightarrow \quad g(z) = \int_1^3 \frac{1}{2} e^{-(xz)} \cdot x \cdot dx = \text{parcijalna int.} \ \dots =$$

$$= \frac{1}{2z^2}\left(e^{-z} - e^{-3z}\right) + \frac{1}{2z}\left(e^{-z} - 3e^{-3z}\right), \quad z \in (0, \infty)$$

$G(z) = ?$

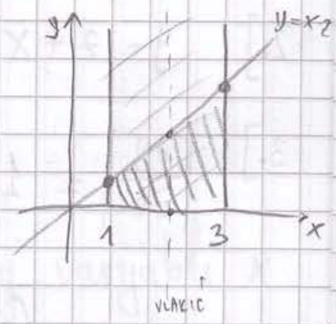
$$\int \frac{e^{-x}}{x^2} dx \quad ??$$

NE!

→ BOLJE PO DEFINICIJI !!

$$G(z) = P(Z < z) = P\left(\frac{y}{x} < z\right) = P(y < z \cdot x)$$

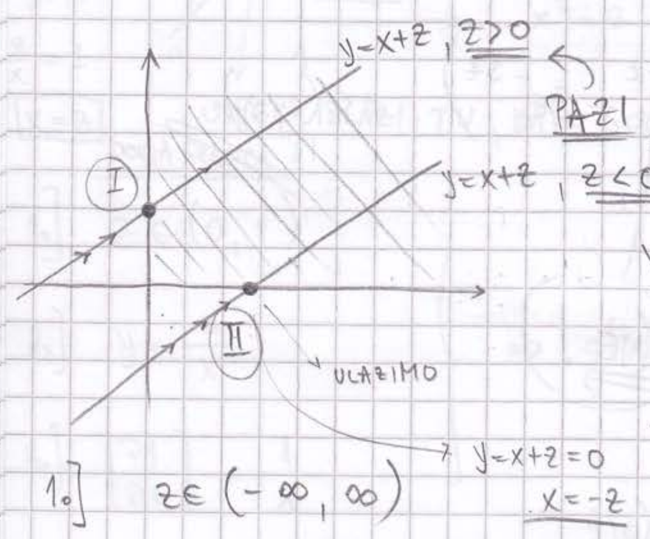
$$= \int_1^3 dx \int_0^{xz} \frac{1}{2} e^{-y} dy = 1 + \frac{1}{2z}\left(e^{-3z} - e^{-z}\right)$$



$$P\left(\frac{y}{x} < 1\right) = P(z < 1) = G(1)$$

2.MI-10-6.) Neka su X i Y nez. sluč. var. s eksp. razdiobom s očekivanjem 2. Odredite gustoću $Z = Y - X$.

$$\left.\begin{array}{l} X \sim E\left(\frac{1}{2}\right) \\ Y \sim E\left(\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} f(x,y) = f_X \cdot f_Y = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y}$$



PAZI !! eksp. razd. def. samo za $x, y > 0$

$\Rightarrow$ **2 SLUČAJA !!**

1.] $z \in (-\infty, \infty)$

2.] $y = z + x$

3.] $\left|\frac{\partial y}{\partial z}\right| = 1$

$$\Rightarrow g(z) = \int \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(z+x)} \cdot 1 \cdot dx$$

I $\quad g(z) = \int_0^\infty \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(z+x)} dx = \dots = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}z}, \quad z > 0$

II $\quad g(z) = \int_{-z}^\infty \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}(z+x)} dx = \dots = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}z}, \quad z < 0$

ZADACI: 7. 8. : OD 1 - 23. $\qquad$ 7., 8., 9. $\to$ SK

9. TEORIJA VJEROJATNOSTI

⇝ uvijek dolazi 1 zad. na ISPITU i na školskoj

MOTIVACIJA: indikatorska varijabla ... I_k → je li se nešto dogodilo ili nije

$$I_k \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

→ n puta ponavljamo pokus $\quad X_n = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum I_k$

↳ koliko puta se dogodio događaj u n bacanja $(X_n \to n \cdot p)$

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{?} p$$

9.1. NEJEDNAKOSTI I ZAKONI VELIKIH BROJEVA

def.

Niz X_n KONVERGIRA PO VJEROJATNOSTI k slučajnoj varijabli X ako $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$.

Pišemo: $X_n \xrightarrow{p} X$

„ZNALO JE DOĆI NA ISPITU"

2 TM a) „NEJEDNAKOST MARKOVA"

Ako X poprima nenegativne vrijednosti onda za $\forall \varepsilon > 0$ vrijedi da je $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}$.

b) „ČEBIŠEVLJEVA NEJEDNAKOST"

Za svaku slučajnu varijablu s konačnim očekivanjem vrijedi da je

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

U PRAKSI SE UVIJEK KORISTI

6.DZ-2.) „sličan i na ispitu i na šk"

Očekivana devijacija brzine vjetra na nekoj visini je 25 km/h, a brzina 4.5 km/h. Kolika se brzina vjetra može očekivati s vjerojatnosti ne manjom od 90% ?

$E(X) = 25$ km/h

$\sigma(X) = 4.5$ km/h

$$P(|X-25| \geq \varepsilon) \leq \frac{4.5^2}{\varepsilon^2}$$

koliko se neće razlikovati

$$\underbrace{1 - P(|X-25| \leq \varepsilon)}_{\text{RJEŠITI!}} \geq \underbrace{1 - \frac{4.5^2}{\varepsilon^2} = 0.9}$$

$\Rightarrow \underline{\varepsilon = 14.23}$

$\Rightarrow \quad |X - 25| \leq 14.23$

$$\boxed{10.77 \leq X \leq 39.23}$$

⇝ zanima nas: aritmetička sredina rezultata $(X_n)_{n \to N}$

$$(*) \quad \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \rightsquigarrow \text{konvergira?}$$

$\Rightarrow$ ZAKON VELIKIH BROJEVA objašnjava konvergenciju ovog tipa

- ovisi o tipu konvergencije:

1) konvergencija po vjerojatnosti (SLABI)
2) konvergencija gotovo sigurno (JAKI)

- cilj: naći uvjete na sluč. var. (X_n) tako da imamo konvergenciju $(*)$ po vjerojatnosti ili gotovo sigurno

... SLABI ZAKON VELIKIH BROJEVA

def. $X_n \xrightarrow{P} Y$ ako $\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P(|X_n - Y| \geq \varepsilon) = 0$

⇝ konvergencija po vjerojatnosti

def. Kažemo da niz $(X_n)_{n \in N}$ zadovoljava SLABI ZAKON VELIKIH BROJEVA ako

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} [X_k - E(X_k)] \xrightarrow{P} 0$$

TM

„Dovoljni uvjeti za slabi zakon velikih brojeva"

Ako varijable $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljavaju uvjet

$$\lim \frac{1}{n^2}\cdot D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0$$

tada $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava slabi zakon velikih brojeva.

⇝ tražimo da $D(X_n)$ postoji

⇝ Čebiševljeva nejednakost za dokaz, tražimo da $P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))\right| \geq \varepsilon\right) \to 0$

- specijalni slučajevi kada SZVB vrijedi:
  1) (X_n) nekoreliranih s ograničenom varijancom
  2) (X_n) nezavisnih s istom varijancom $D(X_n) = \sigma^2$
  3) (X_n) nezavisnih i jednako distribuiranih s konačnom varijancom

DOKAZ: - ako su nezavisne (X_n) tada je disperzija sume jednaka sumi disperzija
- budući da su jednako distribuirane sve imaju jednaku $D(X_n) = \sigma^2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} X_n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot \overbrace{\sum_{k=1}^{n} D(X_n)}^{n-\text{disperzija}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\text{konst.}}{\sigma^2}}{n} = 0$$

(Primjer: Promotrimo jednostavan slučaj:

$X_n = I_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q & p \end{pmatrix} \longrightarrow$ niz nezavisnih indikatorskih sluč. varijabli

$S_n = \sum_{k=1}^{n} I_k =$ broj uspjeha u n pokusa

$\frac{1}{n}\cdot S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k =$ prosječan broj uspjeha

- za veliki n: $\rightsquigarrow$ $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava specijalni slučaj 3)

$$m(I_n) = p \quad D(I_n) = p \cdot Q$$

$\rightsquigarrow$ vrijedi SZVB: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[I_k - \underbrace{E(I_k)}_{p}] \xrightarrow{P} 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k - p \xrightarrow{P} 0$$

$$\boxed{\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} p}$$

$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$ $\longrightarrow$ vjerojat. da je odstupanje od teoretske vjerojatnosti 0

$\rightsquigarrow$ možemo dobiti ocjene na odstupanja prosječnog broja uspjeha od vjerojatnosti uspjeha

$\longrightarrow$ koristimo Čebiševljevu nejednakost

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\cdot S_n\right)}{\varepsilon^2}$$

$$P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

$\longrightarrow$ zbog nezavisnosti: $D(\Sigma) = \Sigma D$

$$D\left(\frac{1}{n}\cdot S_n\right) = \frac{1}{n^2} D(S_n) = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} D(I_k) = \frac{1}{n^{\cancel{2}}}\cdot \cancel{n}\cdot p\cdot Q$$

$\hookrightarrow P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pQ}{n\cdot\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4\cdot n\cdot \varepsilon^2}$

$pQ = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ za $p \in \langle 0, 1\rangle$ $\rightsquigarrow$ max: $p = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow p\cdot(1-p) = \frac{1}{4}$ max

Primjer: obavili smo pokus 1000 puta i tražimo poklapanje do na 1. decimal

$n = 1000$, $\varepsilon = 0.1$

$$P\Big(\Big|\underbrace{\frac{S_n}{n} - S}_{}\Big| \geq 0.1\Big) \leq \frac{1}{4 \cdot 1000 \cdot 0.1^2} = 0{,}025$$

nepoznato

komplement: $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < 0.1\right) \geq 1 - 0{,}025 = 0.975$

↳ u barem 97,5 % slučajeva će relativni uspjeh odstupati od vjerojatnosti uspjeha za manje od 0.1

SZVB ⇒ vjerojatnost odstupanja $\to 0$

⇝ želimo jači rezultat : $\frac{S_n}{n} \to p$: JZVB

def. Kažemo da $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ konvergira GOTOVO SIGURNO slučajnoj varijabli Y ako:

$$\boxed{P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = Y\right) = 1}$$

te označavamo $X_n \xrightarrow{(g.s.)} Y$.

! NAPOMENA:

$$K = \left\{\lim_{n\to\infty} X_n = Y\right\} = \left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = Y(\omega)\right\}$$

$$K \in \mathcal{F} \quad i \quad P(K) = 1$$

∘∘∘ JAKI ZAKON VELIKIH BROJEVA

def. Kažemo da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadovoljava JAKI ZAKON VELIKIH BROJEVA ako

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - E(X_k)\right] \xrightarrow{(g.s.)} 0$$

TM „ODNOS KONVERGENCIJE PO VJEROJATNOSTI I GOTOVO SIGURNO"

$$X_n \xrightarrow{(g.s.)} Y \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} Y$$

Posljedica: JZVB povlači SZVB

TM Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ niz nezavisnih jednako distributiranih slučajnih varijabli s očekivanjem m. Tada vrijedi JZVB, tj.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{g.s.} m$$

Primjer. $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nezavisne indikatorske jednako distributirane varijable

$$I_n \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix} \qquad E(I_n) = p = m$$

⟶ JZVB vrijedi:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_k \xrightarrow{g.s.} p$$

$\frac{S_n}{n}$ = prosječan broj uspjeha

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega : \frac{S_n(\omega)}{n} \to p\right\}\right) = 1$$ ⇝ skoro svugdje ima konv. $\frac{S_n}{n}$

⇝ zanimaju nas vjerojatnosti da svaki od X_n upada u A:

$\lim_{n\to\infty} P(X_n\in A)$ (limes nekih distrib.) $\underset{A=\langle-\infty, x\rangle}{\longleftrightarrow}$ $P(X_n \in \langle -\infty, x\rangle) = P(X_n < x) = F_{X_n}(x)$

... KONVERGENCIJA PO DISTRIBUCIJI I KARAKTERISTIČNE FUNKCIJE ...

def.

Kažemo da niz $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slučajnih varijabli **KONVERGIRA PO DISTRIBUCIJI** prema slučajnoj varijabli Y ako za pripadni niz funkcija distribucije vrijedi

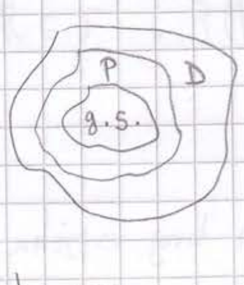
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x)}$$

za svaki x u kojem je F_Y neprekinuta.

⇝ označavamo: $X_n \xrightarrow{D} Y$

TM „ODNOS KONVER. PO DISTRIBUCIJI S OSTALIM KONVERGENCIJAMA:"

$$X_n \xrightarrow{P} Y \implies X_n \xrightarrow{D} Y$$



(IDEJA: Povezati konverg. po distribuciji s karakterističnim funkcijama

$\boxed{TM}$

$$X_n \xrightarrow{D} X \iff \vartheta_{X_n}(t) \longrightarrow \vartheta_X(t), \text{ za } \forall t$$

$$\underline{\vartheta_X(t) = E[e^{itx}]} \rightsquigarrow \text{karakteristična funkcija}$$

Primjer:

Aproksimacija binomne slučajne varijable Poissonovom:

$$X_{n,p_n} \sim B(n, p_n), \quad p_n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad n \cdot p_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda > 0$$

$$\Rightarrow X_{n,p_n} \xrightarrow{D} P(\lambda)$$

$\rightsquigarrow$ pokažimo da ovo vrijedi:

$$Y \sim P(\lambda)$$

$$X_{n,p_n} \xrightarrow{D} Y \iff \vartheta_{X_{n,p_n}}(t) \xrightarrow{n\to\infty} \vartheta_Y(t)$$

$$\vartheta_{X_{n,p_n}}(t) = (Q_n + p_n e^{it})^n = (1 - p_n + p_n e^{it})^n =$$

$$= [1 + p_n(e^{it} - 1)]^n =$$

$$= \left\{ [1 + p_n(e^{it} - 1)]^{\frac{1}{m}} \right\}^{\overset{\to \lambda}{n p_n}} \longrightarrow (e^{e^{it} - 1})^{\lambda} =$$

$$= e^{\lambda(e^{it} - 1)} = \vartheta_Y(t), \text{ za } \forall t$$

CENTRALNI GRANIČNI TEOREM (CGT)

TM

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako distribuiranih sluč. varijabli s očekivanjem m i disperzijom σ^2. Tada za normirani zbroj vrijedi

$$\boxed{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - n\cdot m}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)}$$

!

SPECIJALNI SLUČAJ: MOIVRE LAPLACEOV TEOREM:

$$\boxed{\frac{B(n,p) - n\cdot p}{\sqrt{npQ}} \xrightarrow{D} N(0,1)}$$

DOKAZ:

⇝ uzmemo $X_i = I_i$ indikatorske var. s parametrom p i nezavisne

$$\sum_{i=1}^{n} I_i \sim B(n,p) \qquad \mathbb{E}I_i = p = m \qquad D(I_i) = pQ = \sigma^2$$

$$\underset{\downarrow D \atop N(0,1)}{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i - nm}{\sigma\sqrt{n}}} \overset{D}{=} \underset{\downarrow D \atop N(0,1)}{\frac{B(n,p) - np}{\sqrt{npQ}}}$$

6.DZ. - 5.)

$X_1, \dots, X_{10}$ nezavisne sl. var. s jednolikom razdiobom na $[0,1]$.

Pomoću CGT izračunati: $P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i > 6\right) = ?$

$$E(X_1) = \frac{b-a}{2} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$D(X_1) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{12} \qquad \sigma = \frac{\sqrt{12}}{12}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} X_i - 10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{12}}{12} \cdot \sqrt{10}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

ODUZELI OBJE STRANE -5, A ZATIM PODIJELILI S $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}$ DA NAŠTIMAMO NA CGT

$$P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i > 6\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{10} x_i < 6\right) =$$

TREBA NAŠTIMATI D i L NA CGT

$$= 1 - P\left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i - 5}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}} < \frac{6-5}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}}\right) =$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{6-5}{\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{12}}}\right) =$$

TABLICA!

$$= 1 - \frac{1}{2}\left[1 + \phi^*(\sqrt{12})\right] =$$

$$= 0,1379$$

21-11-1.) b)

$$\left.\begin{matrix} y_1, \dots, y_{100} \\ [y_1], \dots, [y_{100}] \end{matrix}\right\} \quad [y_i] - y_i \sim \mathcal{U}(-0.5, 0.5)$$

nezavisne

⟿ pogreška zbroja:

$$\sum_{i=1}^{100} [y_i] - \sum_{i=1}^{100} y_i = \sum_{i=1}^{100} (\underbrace{[y_i] - y_i}_{X_i \text{ greške}})$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i \in \langle -t, t \rangle\right) \geq 0.95$$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| < t\right)$$

(X_i) nezavisne, jednaka distribucija $\sim \mathcal{U}(-0.5, 0.5)$

$$m = 0 \qquad \sigma^2 = \frac{1}{12} \implies \text{CGT}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100 \cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{100}} \approx N(0,1)$$

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{100} X_i\right| < t\right) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right| < \frac{t}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right) \approx \phi^*\left(\frac{t}{\frac{10}{\sqrt{12}}}\right) \geq 0.95$$

$$\phi^*(1{,}96) = 0.95$$

$$\frac{t}{\frac{10}{\sqrt{12}}} = 1.96$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 5.658}$$

10. STATISTIKA

10.1 TOČKASTE PROCJENE

Ω populacija $\longrightarrow$ obilježje X

$\downarrow$ $\longrightarrow$ distribucija $F \rightarrow$ nepoznata

uzeti uzorak $\longrightarrow$ $m, \sigma^2 \rightarrow$ nepoznato

X sluč. varijabla, populacija

$\rightsquigarrow F, f, m, \sigma^2$

$\rightsquigarrow F$ može ovisiti o nekim parametrima

$\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$

def. Za $X_1, \dots, X_n$ slučajne varijable kažemo da su nezavisne KOPIJE slučajnih varijabli X ako vrijedi:

1) $X_1, \dots, X_n$ nezavisne

2) $X_i \sim F$

$(X_1, \dots, X_n)$ UZORAK

$(x_1, \dots, x_n)$ REALIZACIJA

⇝ pretpostavimo da razdioba F ovisi samo o ϑ:

$$F(x) = F_\vartheta(x)$$
$$f(x) = f_\vartheta(x)$$

⇝ ϑ procjeniti pomoću $x_1, \dots, x_n$

$$\hat{u} = g(x_1, \dots, x_n) \quad \text{procjena za } \vartheta$$

$$\Theta = g(X_1, \dots, X_n) \quad \underline{\text{STATISTIKA}}$$

$g(x_1, \dots, x_n)$ ⟶ statistika

Θ ...... procjenitelj parametra ϑ

$\hat{u}$ ...... procjena parametra ϑ

Pitanja: 1) Koje statistike su dobre za m i σ^2?

2) Što su to dobre statistike?

⇝ statistika za procjenu očekivanja $a = E(X)$:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot (X_1 + \dots + X_n) \quad \text{SREDINA UZORKA}$$

↳ sluč. varijable, statistika

$$E[\overline{X}] = \frac{1}{n}\left[E(X_1) + \dots + E(X_n)\right] = \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \cdot a = a$$

$$D(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\left[D(X_1) + \dots + D(X_n)\right] = \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{n} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

DOBRE STATISTIKE:

1) Θ = NEPRISTRANA STATISTIKA (procjenitelj) za ϑ ako je

$$\boxed{E(\Theta) = \vartheta}$$

!

$\rightsquigarrow$ $\bar{X}$ nepristrani procjenitelj za očekivanje

2) Ako niz statistika $\Theta_n = \Theta_n(X_1, \ldots, X_n)$ konvergira po vjerojatnosti prema parametru ϑ tada Θ_n zovemo **VALJANOM STATISTIKOM**

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P(|\Theta_n - \vartheta| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0 \qquad n \to \infty$$

3) Θ_1 i Θ_2 dvije nepristrane statistike za ϑ

$\rightsquigarrow$ Θ_1 bolja od Θ_2 ako $D(\Theta_1) < D(\Theta_2)$

TM NEPRISTRANA STATISTIKA je VALJANA ako joj disperzija teži k 0.

DOKAZ:

$$E[\Theta_n] = \vartheta \quad D(\Theta_n) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty \quad \text{želimo: } \Theta_n \xrightarrow{P} \vartheta$$

$$0 \leq P(|\Theta_n - \vartheta| \geq \varepsilon) \underset{\text{Čebiš.}}{\leq} \frac{D(\Theta_n)}{\varepsilon^2} \longrightarrow 0 \quad \Rightarrow$$

$\rightarrow$ $\bar{X}$ valjana za a zbog:

$$D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \longrightarrow 0 \quad \checkmark$$

→ STATISTIKA ZA PROCJENU DISPERZIJE:

→ a poznat: $D^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2$

→ a nepoznat: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

→ D^2 i S^2 su nepristrani i valjani procjenitelji za σ^2

$E(D^2) = \sigma^2$

$D(D^2) = \frac{1}{n}(\mu_4 - \sigma^4) \longrightarrow 0$ ✓

$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \Rightarrow E(\theta) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$

$E\left[\frac{n}{n-1}\theta\right] = \sigma^2$

$E(S^2) = \sigma^2$

Primjer 10.3.

→ 6 rezultata: 3540, 3582, 3559, 3572, 3564, 3584 m

a) $a = 3560$ b) a nepoznat

a) $D^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - a)^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(X_i - 3560)^2 = 232{,}17\ m^2$

b) $S^2 = \frac{1}{6-1}\sum_{i=1}^{6}(X_i - \overline{X})^2 = \frac{1}{5}\left[(3540 - 3561.17)^2 + \dots + (\ )^2\right] = 276{,}97\ m$

$\longrightarrow$ podaci mogu biti podijeljeni unaprijed u razrede i dani u tablici:

VRIJEDNOSTI	x_1	x_2	......	x_r
FREKVENCIJE	n_1	n_2	......	n_r

$n = n_1 + \cdots + n_r$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} x_i n_i \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{r} n_i \cdot x_i^2 - n\cdot \overline{x}^2\right)$$

Primjer 10.4.

$\overline{x},\ s^2 = ?$

x_i	2560	2600	2620	2650	2700
n_i	2	3	10	4	1

* PODSJETNIK:

$E(x-c) = E(x) - c$

$D(x-c) = D(x)$

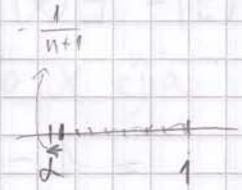
$c = 2620$

$$\overline{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{5}(x_i - 2620)\, n_i + 2620 \qquad \boxed{\overline{x} = 2621}$$

$$s^2 = \frac{1}{19}\left(\sum_{i=1}^{5} n_i\cdot(x_i - 2620)^2 - n\overline{x}^2\right)$$

$$\boxed{s^2 = 967{,}4}$$

21-12-4.) Iz intervala $[\alpha, 1]$ odabrano je na sreću n brojeva $X_1, \dots, X_n \in [\alpha, 1]$. Da bismo procjenili α odabrali smo statistiku $Y = \text{minimum}\{X_1, \dots, X_n\} - \frac{1}{n+1}$.



a) provjerite nepristranost statistike

$$\boxed{E(Y) = \alpha}$$

→ AKO JE OČEKIVANJE JEDNAKO PRAVOJ VRIJEDNOSTI !

$$Y = \underbrace{\min\{X_1, \dots, X_n\}}_{X} - \frac{1}{n+1}$$

TRIK

$$F_X(x) = P(X < x) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} < x) =$$

MINIMUM UVIJEK >
MAX UVIJEK <

$$= 1 - P(\min\{X_1, \dots, X_n\} > x) =$$

$$= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) =$$

$$= 1 - P(X_1 > x)^n =$$

$$P(X > a) = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

$$= 1 - \left(\int_x^1 \frac{1}{1-\alpha}\,dx\right)^n$$

JEDNOLIKA RAZDIOBA (pretp.) !

$$= 1 - \left(\frac{1-x}{1-\alpha}\right)^n$$

$$f(x) = F_X'(x) = -n\left(\frac{1-x}{1-\alpha}\right)^{n-1} \cdot \frac{-1}{1-\alpha} = \frac{n}{(1-\alpha)^n} \cdot (1-x)^{n-1}$$

$$E(X) = \int_\alpha^1 x \cdot \frac{n}{(1-\alpha)^n} \underbrace{(1-x)}_{\text{supstit.} = t}{}^{n-1}\,dx = \dots = \frac{n}{(1-\alpha)^n}\left[\frac{t^n}{n} - \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]\Bigg|_0^{1-\alpha} =$$

okreni →

$$= \cdots = 1 - \frac{n}{n+1}(1-\alpha)$$

$$E(y) = E(x) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1}(1-\alpha) - \frac{1}{n+1} =$$

$$= \underbrace{1 - \frac{n}{n+1}}_{\frac{1}{n+1}} + \frac{\alpha \cdot n}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot \alpha$$

$\Rightarrow$ Ova statistika NIJE NEPRISTRANA. $(E(y) \neq \alpha)$

b) S kojim faktorom treba pomnožiti da bude nepristrana?

$\rightarrow$ treba pomnožiti s $\frac{n+1}{n}$

NIKAD NIJE BILO „PROVJERITI DA JE VALJANA"

$\rightsquigarrow$ MOŽDA PROGURA OVE GODINE DA BUDE

$\boxed{TM}$ $\lim_{n \to \infty} D(x) = 0$

10.2. KRITERIJ NAJVEĆE IZGLEDNOSTI (KNI)

(MILF)

MAXIMUM INTENSITY LIVELIHOOD FUNCTION

def.

Neka je $x_1, \dots, x_n$ realizacija uzorka iz neke populacije X čija funkcija gustoće f ovisi o parametru ϑ.

FUNKCIJA IZGLEDNOSTI se definira kao

$$\boxed{L(\vartheta, x_1, \dots, x_n) = f(\vartheta, x_1) \cdot \dots \cdot f(\vartheta, x_n)}$$

$\Rightarrow$ za procjenu parametra ϑ se uzima vrijednost za koju L poprima **GLOBALNI MAKSIMUM** $\rightarrow$ derivaciju izjednačiti s nulom!

A ŠTO DRUGO KAD JE MILF U PITANJU

Z1-11-2.) Uzorak $x_1, \dots, x_n$ je izvučen iz populacije s funkcijom gustoće $f(x) = \lambda x^{\lambda - 1}$. Pomoću KNI odredite λ.

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \lambda \cdot x_1^{\lambda-1} \cdot \lambda \cdot x_2^{\lambda-1} \cdots \lambda \cdot x_n^{\lambda-1}$$

$$= \lambda^n (x_1 \cdot \dots \cdot x_n)^{\lambda - 1}$$

TRIK!

ZBOG KOMPLIKACIJE SA DERIVACIJOM n UMNOŽAKA PRELAZIMO NA $\ln$!

$$\ln L = n \ln \lambda + (\lambda - 1) \ln(x_1 \cdots x_n) \quad \Big/ \frac{\partial}{\partial \lambda}$$

$$\frac{n}{\lambda} + \ln(x_1 \cdots x_n) = 0$$

$$\lambda = -\frac{n}{\ln(x_1 \cdots x_n)} = -\frac{n}{\ln \prod_{i=1}^{n} x_i}$$

mabsimum livelihood
MILF function
intensity

Z1-09-1.)

$$f(x)=\frac{\lambda}{2\sqrt{x}}e^{-\lambda\sqrt{x}}$$, pomoću KNI odredi λ.

$$L(\lambda, x_1,\dots,x_n)=\frac{\lambda}{2\sqrt{x_1}}e^{-\lambda\sqrt{x_1}}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda}{2\sqrt{x_n}}e^{-\lambda\sqrt{x_n}}=$$

$$=\frac{\lambda^n}{2^n\sqrt{x_1\cdots x_n}}e^{-\lambda(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\cdots+\sqrt{x_n})}$$

$\ln(e)=1$

$$\ln L=n\ln\lambda-\underbrace{\ln 2^n\sqrt{x_1\cdots x_n}}_{\text{konstanta}}-\lambda\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\quad\Big|\frac{\partial}{\partial\lambda}$$

$$\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}=0$$

$$\Rightarrow\boxed{\lambda=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}}$$

Z1-10-1.) Bacamo neispravan novčić. Bacili ga 5 puta i pismo se pojavilo 2 puta, zatim se u 8 puta pojavilo 3 puta. Pomoću <u>KNI</u> (<u>MILF</u>) odredite procjenu za pojavljivanja pisma.
vjerojatnost

⇝ bez KNI, zdrava logika → $\frac{5}{13}$ ☺

$$L(\lambda, x_1,\dots,x_n)=P(X=x_1)\cdots P(X=x_n)$$ → DISKRETAN SLUČAJ

$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
↑ BINOMNA

BINOMNA RAZDIOBA

$X_1\sim B(5,p)$, $X_2\sim B(8,p)$

$$L(p)=\binom{5}{2}p^2(1-p)^3\cdot\binom{8}{3}p^3(1-p)^5=\overbrace{\binom{5}{2}\binom{8}{3}}^{K}p^5(1-p)^8$$

$$\ln L = \ln \overset{\text{konstante}}{K} + 5\ln p + 8\ln(1-p) \; \Big/ \; \frac{d}{dp} \longrightarrow$$ OBIČNA DERIVAC. SAMO JEDNA VARJABLA !

$$\frac{5}{p} + \frac{-8}{1-p} = 0$$

$$p = \frac{5}{13}$$

HINT:

„NIKAD NIJE BILO S POISSONOVOM RAZDIOBOM, MOGLO BI DOĆI OVE GODINE !"

→ DISKRETNE VAR. : MNOŽIMO VJEROJATNOSTI

KONTINUIRANE VAR. : MNOŽIMO GUSTOĆE

→ KAD-TAD NA ISPITU ĆE DOĆI 10.6. (str. 13) (BILO NA ROKOVIMA...)

→ riješeni boldani zadaci u knjizi

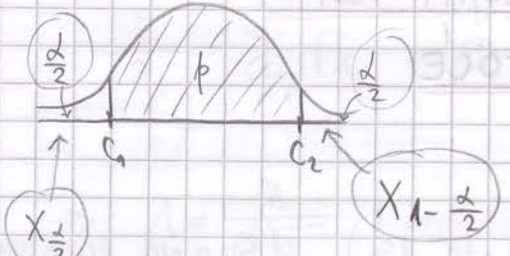
→ 6., 7., 8. zad ne treba, ostalo DA !

11. INTERVALNE PROCJENE

11.1. UVOD

def.

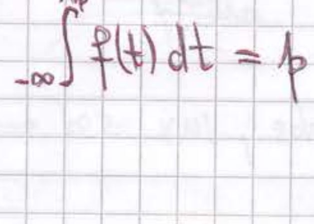
Interval $[c_1, c_2]$ za koji vrijedi $P(c_1 < X < c_2) = p$ naziva se interval POVJERENJA (POUZDANOSTI) reda p.



def. Veličina $\alpha = 1 - p$ se naziva NIVO ZNAČAJNOSTI (SIGNIFIKANTNO...

def. Realan broj X_p za koji vrijedi da je $F(X_p) = p$, tj.

$$\int_{-\infty}^{X_p} f(t)\,dt = p$$ se naziva **KVANTIL** reda p.



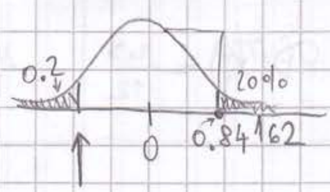
BROJ X_p = KVANTIL

Burek says:

21 - 11 - 3.) a) Definirajte kvantil. "JA MISLIM DA SVAKE GODINE TO DOĐE U ISPITU, TREĆA GODINA ZAREDOM ☺"

(PROŠLE NIJE, TAMAN OVE.... ☺)

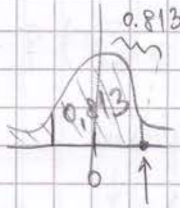
b) Koristeći tablicu 4, izračunajte kvantil normalne razdiobe za $p = 0.2$.



→ ZBOG SIMETRIJE GLEDAMO ZA 0.8 !

!! ⇒ -0.84162 //

c) Koristeći tablicu 1 izračunajte kvantil za $p = 0.813$.



!! $0.313 \cdot 2 = 0.626$ → NAĆI U TABLICI (UNUTRA) ⇒ 0.889 //

11.2. INTERVALNE PROCJENE ZA PARAMETRE NORMALNE RAZDIOBE

$N(a, \sigma^2)$	drugi parametar	
	poznat	nepoznat
za očekivanje	str. 27	str. 34
za disperziju	str. 30	str. 35

FORMULE IZ SLUŽBENOG PODSJETNIKA

→ za objašnjenje upiši PDF II

⟶ kratko objašnjenje formula za očekivanje:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$P(c_1' < \bar{x} < c_2') = p$$

$$P\left(c_1 < \frac{\bar{x} - a}{\sigma \sqrt{n}} < c_2\right) = p$$

c_1, c_2 ↓ kvantili normalne razdiobe

$$u_{\frac{\alpha}{2}} = -u_{1-\frac{\alpha}{2}} \qquad u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

21-09-2.) Iz neke populacije smo dobili sljedeći uzorak. (UVIJEK NA ISPITU DOBIJEMO TABLICU).

veličina → x_j	20	22	24	26	28	30	32
br. pojavljivanja → n_j	3	3	8	7	3	2	1

a) Odredite točkaste procjene za očekivanje i disperziju.

SLUŽBENI PODSJETNIK !

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{3\cdot 20 + 3\cdot 22 + \cdots + 1\cdot 32}{27} \qquad n = \sum n_j = 27$$

$$\bar{X} = 25$$

IMAMO SVE U KALKU, SAMO TABLICU UPIŠEMO !

$$S^2 = \frac{\sum x_i^2 - n\cdot\bar{X}^2}{n-1} = $$

$$= \frac{3\cdot 20^2 + 3\cdot 22^2 + \cdots + 1\cdot 32^2 - 27\cdot 25^2}{27-1} = 8.846 \rightarrow S^2$$

b) Odredi 95-postotni $\overset{\text{dvostrani}}{\text{interval}}$ za očekivanje i 95-postotni dvostrani interval za disperziju.

SIGMA NIJE BILA POZNATA (ZATO SMO JE RAČUNALI)

→ FORMULA:

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{X} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

TIPIČNA GREŠKA !

PAZI !

$$S = \sqrt{8.846}$$

KORJENOVATI !

GORE IMALI $S^2 = 8.846$

$t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}$ → studentova razdioba → tablica 3

$t_{26, 1-\frac{0.05}{2}} = 2.056$ $\alpha = 1 - p = 1 - 0.95 = 0.05$

→ što je kvantil manji, interval je uži i ja sam sigurniji!

UVRSTITI SVE, IZRAČUNATI:

$P(23.823 < a < 26.177) = 0.95$ → konačno rješenje

⇒ ZA DISPERZIJU, UZ NEPOZNATO OČEKIVANJE: (IAKO SMO GA IZRAČUNALI GORE, KORISTIMO U FORMULI)

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}\right) = 0.95$$

„HI"

$$\chi^2_{26, 1-\frac{0.05}{2}} = \chi^2_{26, 0.975} = 41.923$$

U TABLICI

$$\chi^2_{26, 0.025} = 13.844$$

$$\Rightarrow P(5.486 < \sigma^2 < 16.613) = 0.95$$

Z1-12-5.) Iz populacije sa $\sigma = 0.3$ dobili smo 16.2, 16.1, 16, 16.4, 16.5, 16.3, 16.2, 16.4, 16.2, 16.3.

Za koji nivo pouzdanosti će duljina intervala za očekivanje biti 0.312

$\bar{X} = 16.26$, $n = 10$, $\sigma = 0.3$ (POZNATA)

$p = ?$

$$\text{ŠIRINA} = 2 \cdot u_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.3123$$

$$\Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow \text{TABLICA 4.}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0.1$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 0.9}$$

11.3. INTERVALNE PROCJENE ZA VJEROJATNOST (PROPOZICIJU)

123. $\hat{p} = \frac{\text{BROJ POVOLJNIH}}{\text{UKUPAN BROJ}} = \frac{m}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \sim \frac{1}{n} B(n, p) \approx \frac{1}{n} N(np, npq)$

↳ točkasta procjena $\qquad N\left(p, \frac{pq}{n}\right)$

$$P(c_1' < \hat{p} < c_2') = p$$

$$P\left(c_1 < \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{(1-p)p}{n}}} < \underbrace{c_2}_{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}\right) = p$$

KNJIŽICA

FORMULE ⟹ $$\boxed{p_{1,2} = \hat{p} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

Z1-08-3.) Na izlaznoj anketi od 200 glasača njih 112 je glasalo za kandidata X.

a) Odredite 95-postotni interval za kandidata X.

$\alpha = 0.05$, $n = 200$, $\hat{p} = \frac{112}{200} = 0.56$ $\qquad u_{0.975} = 1.96$

$$p_{1,2} = 0.56 \pm \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{u_{0.975}} \sqrt{\frac{0.56(1-0.56)}{200}} = 0.56 \pm 0.069$$

$$\Rightarrow P(0,491 < p < 0.629) = 95\ \%$$

b) S kojom vjerojatnosti on može tvrditi da će sigurno biti izabran?

$$\underset{0.56}{\hat{p}} - \underset{?}{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n_{=200}}} > 0.5$$

$$\cdots \Rightarrow u_{1-\frac{\alpha}{2}} < 1.7094$$

NEMA U TABLICI

PRVI VEĆI ILI PRVI MANJI? MANJI (<) PAZITI NA RAČUN ZATO

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95$$

$$\alpha = 0.1$$

$$\Rightarrow \boxed{p = 90\,\%}$$ ovo se točno može izračunati TABLICOM 1. (zavisi kako je zadano.

c) Koliko velik uzorak mora ispitati da bi bio siguran u svoj izbor uz nivo značajnosti 5 %?

$n = ?$ $\alpha = 5\,\% \rightarrow 95\,\%$

$$\underset{0.56}{\hat{p}} - \overbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{1.96} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{\underset{?}{n}}} > 0.5$$

BROJ!

TOČKASTA PROCJENA, NE OVISI O n!

NA TEMELJU TOG UZORKA ŽELIMO ZAKLJUČITI NEŠTO DRUGO!

$$\cdots \Rightarrow n \geq 262.93$$

$$\boxed{n = 263}$$

"JOŠ NIKAD U 7 GODINA NIJE BILO FORMULE ZA PARAMETAR POISSONA, JEDINO NA DEKANSKOM.... MOGLO BI DOĆI OVE GODINE."

Zad.) Broj poziva koju zaprima neka centrala je Poissonova razdioba. U prosjeku je bilo 5.8 poziva po minuti tijekom jednog sata. Odredite 95-postotni interval za λ.

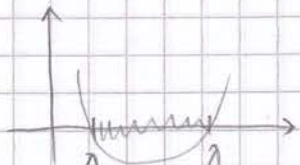
α najčešće 10%, 5% i 1%

$$P\Big(|\underbrace{\bar{x}}_{5.8}-\lambda| < \underbrace{u_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{1.96}\sqrt{\frac{\lambda}{\underbrace{n}_{60}}}\Big) = 0.95$$

60 → JEDAN SAT!

$$(5.8-\lambda)^2 < \frac{1.96^2}{60}\cdot\lambda$$

$$\lambda^2 - 11.664\lambda + 33.64 < 0$$



λ_1 λ_2

$\rightarrow \lambda_1 = 5.22$

$\lambda_2 = 6.44$

$$\boxed{P(5.22 < \lambda < 6.44) = 0.95}$$

12. TESTIRANJE HIPOTEZA

12.1. UVOD I OSNOVNI POJMOVI

Pr.) ⇝ printer → 50 str./min (proizvođač tvrdi specifikacijama)

⇝ isprobali 30 ispisa → 47 str./min (mi dobili)

H_0 ..... NULTA hipoteza

H_1 ..... ALTERNATIVNA HIPOTEZA

⇝ za naš primjer: H_0 ..... proizvođač govori istinu

H_1 ..... proizvođač LAŽE

def.

SNAGA TESTA se definira sa

$$S(\vartheta) = P(\text{prihvatiti } H_1)$$

⇝ Idealno bi bilo ako je $\vartheta \in H_0$ i $S(\vartheta) = 0$ (proizvođač rekao istinu), ako je $\vartheta \in H_1 \Rightarrow S(\vartheta) = 1$.

def.

POGREŠKA PRVE VRSTE se definira kao $\alpha = \sup S(\vartheta)$ ako je $\vartheta \in H_0$. Vjerojatnost da prihvatimo H_1, a istina je H_0 !

POGREŠKA DRUGE VRSTE se definira kao $\beta = \sup(1 - S(\vartheta))$ ako je $\vartheta \in H_1$. Vjerojatnost da prihvatimo H_0, a istina je H_1 !

⇝ Pogreška prve vrste je OZBILJNIJA POGREŠKA ! Slučaj da smo nevinog strpali u zatvor (nego krivca pustili iz zatvora !)

⇝ SVI SU NEVINI, DOK SE NE DOKAŽE SUPROTNO !

12.2. Testiranje parametarskih hipoteza

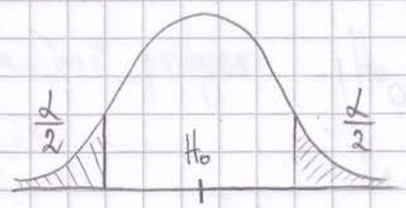
$H_0 \ldots\ldots \vartheta = \vartheta_0$

$H_1 \ldots\ldots \vartheta \neq \vartheta_0$ ILI $\vartheta > \vartheta_0$ ILI $\vartheta < \vartheta_0$ $\rightsquigarrow$ SKUŽITI U ZADATKU!

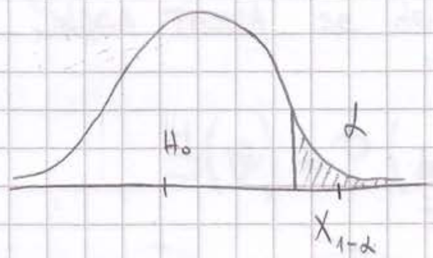
DVOSTRANI TEST

DESNI TEST

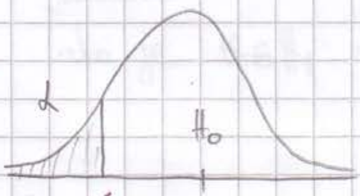
LIJEVI TEST



DVOSTRANI TEST



DESNI TEST



$X_\alpha = -X_{1-\alpha}$

LIJEVI TEST

$$\boxed{v = \frac{\bar{X} - a_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}} \longrightarrow \text{SLUŽBENE FORMULE}$$

21-09-4.) Rafinerija proizvodi benzin za koji se očekuje da ima oktanski broj 98. Uzeto je 12 uzoraka benzina i dobiveni brojevi 99,1 .... (zadano)
Možemo li na temelju ovih podataka tvrditi da rafinerija proizvodi benzin prosječnog oktanskog broja 98 uz nivo značajnosti 95 % ?

$H_0 \ldots\ldots a = 98$

$H_1 \ldots\ldots a \neq 98$ (1 bod) → BILO ŠTO RAZLIČITO OD 98 NAM NE ODGOVARA

→ službene formule (nepoznata disp.) : $t = \frac{\bar{X} - a_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ($a_0 = 98$) PAZI !

$\bar{X} = \frac{99{,}1 + \ldots}{12} = 97.6583$

$n = 12$

$s^2 = 0.6079$ (točkaste procjene) FORMULE !

$s = \sqrt{0.6079}$

$\Rightarrow t = -1.518$ // (1 bod)

→ moramo vidjeti gdje se t nalazi

-2.201 (raf. govori istinu) 2.201 raf. laže

KRITERIJ ZA ODBACIVANJE H_0:

$$|t| > t_{\underbrace{n-1}_{11},\, 1-\frac{\alpha}{2}} = \{\text{TABLICA STUDENTOVE RAZDIOBE}\} = 2.201 \quad (1\ \text{bod})$$

tablica 3. $\alpha = 5\%$

$1.518 \not> 2.201$ NIJE → Rafinerija GOVORI ISTINU !

→ prihvaćamo H_0 !

MORATE TO NAPISATI ! NEMA BODA BEZ !!

7.DZ-3.) Proizvođač tvrdi da je vrijeme rada uređaja 200 dana. Izabrali smo par uzoraka, 165, 170 ..., 203, 210.

Provjeri proizvođača uz nivo značajnosti 95 %.

$H_0 \ldots\ldots a = 200 \qquad \alpha = 5\,\%$

$H_1 \ldots\ldots a < 200$ ⟶ Hoćeš li zvati proizvođača i poskidat mu bogove ako je radio 210 dana ??

Pa ne.

$\bar{X} = \frac{165 + 170 + \cdots 210}{n} = 188.5$

zadano točno u zad.

$s^2 = 253.43$

$n = 8$

hipoteza ... uz nepoznatu σ^2:

$\hat{t} = \frac{\bar{X} - a_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = -2.04$

---

kriterij za odbacivanje H_0:

$\hat{t} < -t_{n-1,\,1-\alpha} = -t_{7,\,1-0.05} = -1.895$

↳ PAZI ! U TABLICI IMAŠ $1 - \frac{\alpha}{2}$ KVANTIL !

(GLEDATI) UZETI DUPLO VEĆI KVANTIL !! 0.1 U TABLICI

⇒ KOD JEDNOSTRANOG t-TESTA IZ TABLICE GLEDAMO $\alpha' = 2\alpha$!!

→ SAMO KOD STUDENTOVE !

NAJVEĆI TRIK U STATISTICI

π

$-2.04 < -1.895$ JEST !

⇒ Prihvaćamo H_1, odnosno odbacujemo H_0 ! Proizvođač laže.

„BEZ TOG ZAKLJUČKA NEMA BODA !!!"

7.DZ-6.) Pri proizvodnji u normalnim uvjetima stroj daje 2 % škarta. Na uzorku od 500 proizvoda primijećeno je 16 škartnih. Provjeri hipotezu o ispravnosti deklaracije uz nivo značajnosti 95 %.

$\alpha = 5\%$

$H_0 \ldots \quad p = 0.02$

$H_1 \ldots \quad p > 0.02$ → ako dobijemo manje od 2 % škarta to nam je super, nećemo se žaliti ! !!

HIPOTEZA O PROPORCIJI:

$$\hat{u} = \left(\frac{m}{n} - p_0\right)\sqrt{\frac{n}{p_0 q_0}}$$

$\boxed{q_0 = 1 - p_0}$

$n = 500$, $p_0 = 0.02$, $q_0 = 0.98$

$$p = \frac{16}{500} = 0.032 = 3.2\%$$

PAZI ! $p_0 = 0.02$ onaj koji ispitujemo !

$\hat{U} = 1.917$

$\alpha = 0.05 \Rightarrow \hat{u} > u_{1-\alpha}$ {„kriterij za odbacivanje H_0"}

$u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.64485$ (zadnja tablica u podsjetniku)

$1.917 > 1.64485$? DA !

AKO NISMO SIGURNI ŠTO ODBACUJEMO – PIŠE U PODSJETNIKU

⇒ Deklaracija NIJE ISPRAVNA, tj. odbacujemo H_0 !

21-11-5.) Svi studenti 2. godine Fera polažu jedan ispit. Na uzorku od 97, 67 ih je prošlo. Uz koji nivo značajnosti možemo tvrditi da vrijedi bolonjski prolaz od 75 % ?

$H_0 \ldots \; p = 0.75$ $\qquad \hat{p} = \frac{m}{n} = \frac{69}{97} = 0.711$

$H_1 \ldots \; p < 0.75$ → ako je više od 75 % onda je to O.K. ∧ vrijedi bolonjska prolaznost !!

testiranje proporcije:

$$\hat{u} = (\hat{p} - p_0)\sqrt{\frac{n}{p_0 q_0}}$$

$\hat{p} \to 0.711$, $p_0 \to 0.75$, $n \to 97$, $q_0 \to 0.25$

$$\hat{u} = -0.879$$

⇝ kriterij za odbacivanje lijevog testa:

PAZI! $\hat{u} < -u_{1-\alpha}$? → NAS ZANIMA KADA ĆE BITI BOLONJSKA PROLAZNOST (PRIHVATITI H_0) !

Dakle,

$$\hat{u} > -u_{1-\alpha}$$

$$-0.879 > -u_{1-\alpha}$$

$$0.879 < u_{1-\alpha}$$ → PRVI VEĆI BROJ (OBRNUTO U TABLICI TRAŽIMO)

$$\Rightarrow 1 - \alpha = 0.82$$

$$\boxed{\alpha = 18\ \%}$$

12.3. Usporedba dviju populacija

21-09-5.) 90 od 200 anketiranih muškaraca i 69 od 150 anketiranih žena se rekreativno bavi sportom. Uz nivo značajnosti od 5 % provjeriti da li se jednak postotak muških i ženskih bave sportom.

⇝ hipoteza o JEDNAKOSTI PROPORCIJA:

$H_0 \ldots\ldots p_1 = p_2$

$H_1 \ldots\ldots p_1 \neq p_2$

formule. $\hat{u} = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma^2}{n_1} + \dfrac{\sigma^2}{n_2}}}$

$n_1 = 200$

$n_2 = 150$

$\hat{p}_1 = \dfrac{90}{200} = 0.45$

$\hat{p}_2 = \dfrac{69}{150} = 0.46$

$\sigma^2 = p(1-p) = 0.248$

$p = \dfrac{\overset{69}{m_1} + \overset{90}{m_2}}{n_1 + n_2} = 0.454$

FORMULE
☺

$\Rightarrow \hat{u} = 0.186$

⇝ kriterij za odbacivanje:

$|\hat{u}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} = u_{0.975} = 1.96$

$0.186 > 1.96$? NE !

$\Rightarrow$ Prihvaćamo H_0, tj. nema razlike između muškaraca i žena u postotku bavljenja sportom.

ZI-08-5.) „VJEČNI SUKOB E vs R"

E-grupe su na MI imale prosjek 20,625 s devijacijom 8.07, od njih 254, a R-ovci od njih 299 prosjek je bio 19.697 s devijacijom 8.36.
Uz koji nivo značajnosti možemo tvrditi da NE postoji razlika između ta dva smjera? II

$E(254)$, $\bar{x} = 20.625$ $\quad \sigma_x = 8.07$

$E(299)$, $\bar{y} = 19.697$ $\quad \sigma_y = 8.36$

→ s.f. POZNATA DISPERZIJA:

$H_0 \ldots\ldots \mu = \nu \rightsquigarrow \bar{x} = \bar{y}$

DA JE BILO „NETKO BOLJI" (ZADANO) ONDA BI BILO <,>

$H_1 \ldots\ldots \mu \neq \nu$

$$\hat{u} = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_z} \qquad \sigma_z^2 = \frac{\sigma_x^2}{\underset{254}{n}} + \frac{\sigma_y^2}{\underset{299}{m}} = 0.49 \rightarrow \text{KORJENOVATI!}$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \sqrt{0.49}$$

$\Rightarrow \hat{u} = 1.32$

⇝ PRIHVAĆAMO H_0 ⟼ „da NE postoji razlika ⇒ ISTI SU ⇒ $\mu = \nu \Rightarrow H_0$!

$$|\hat{u}| < u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$1.32 < u_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.34$$

ZADNJA TABLICA, TRAŽIMO PRVI VEĆI BROJ OD 1.32

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.91$$

$$\boxed{\alpha = 18\%}$$

kriterij za ODBACIVANJE H_0:

$$|\hat{u}| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

KADA PRIHVAĆAMO H_0 (ZADANO) MIJENJAMO ZNAK !

21-11.-6.) U dvije trgovine istog lanca prodaje se čokolada Π. Prodaja u jednom tjednu bila je:

A	12	9	10	8	7	13	11
B	10	8	9	7	12	10	7

Može li se zaključiti uz nivo značajnosti 10% da se prosječna dnevna prodaja čokolade u ove dvije trgovine bitno NE razlikuje?

⟶ NEPOZNATE DISPERZIJE

$H_0 \ldots\ldots \mu = \nu$ $\qquad \bar{x} = \frac{12+9+\ldots+11}{7} = 10 \quad (A)$

$H_1 \ldots\ldots \mu \neq \nu$ $\qquad \bar{y} = 9 \quad (B)$

⟶ službene formule: $S_x^2 = \frac{28}{6}$, $S_y^2 = \frac{20}{6}$

$$S_z^2 = \frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2} = 4$$

PRI ČEMU JE $n = m = 7$

$$\hat{t} = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\underbrace{S_z}_{2}} \sqrt{\frac{nm}{n+m}} = 0.935 \qquad \Rightarrow S_z = \sqrt{4} = 2 \; !$$

$$|\hat{t}| > \underbrace{t_{m+n-2,\, 1-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$t_{12,\, 0.1} = 1.782$$

$0.935 > 1.782$? NE! $\Rightarrow$ NE ODBACUJEMO $\Rightarrow$ PRIHVAĆAMO H_0 !

okreni ⟶

→ Uz nivo značajnosti 10 % ne možemo tvrditi da postoji razlika u prodaji.

→ KADA BURIĆ POSTANE NOSITELJ NA VISU TRAŽIT ĆE TU REČENICU.

12. 4. TEST PRILAGODBE RAZDIOBAMA
(χ^2 - test)

→ službeni podsjetnik - SVE !

21-10.-6.) Bacamo 3 kocke 100 puta i bilježimo broj šestica. Dobili smo:

NIJEDNA 6 →	0	61
	1	29
	2	8
SVE 3 ŠESTICE →	3	2

→ TAKO ZADANO

Provjerite ispravnost kocaka uz nivo značajnosti 5 %.

TEORIJSKI KOLIKO SMO TREBALI DOBITI → USPOREĐIVATI

x_j	n_j	p_j	$n \cdot p_j$
0	61	$\left(\frac{5}{6}\right)^3$	57.87
1	29	$\binom{3}{1}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$	34.72
2	8 $\}$ $\boxed{10}$	$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	6.94 $\}$ 7.4
3	2	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	0.46
Σ	$n=100$	1	≈ 100

ZAPRAVO BINOMNA RAZDIOBA

$61 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$ ($n \cdot p_j$)

→ teorijski je trebalo toliko puta pasti 0 šestica (a palo je 61 → CLOSE ENOUGH!)
↓
empirijski

SLUŽBENI PODSJETNIK VELI:

„ razrede za koje je $n_j < 5$ spajamo s njima susjednim"

→ u konačnoj sumi

→ p_j-ove računamo BEZ SPAJANJA, NA KRAJU TEK SPAJAMO !

*DA SMO IMALI:

Prim 1.

10
8
2
1
1

PRVO TO → $2 < 5$ → ZATIM TO ⇒ $2+2 = 4 < 5$ → $4+8 = 12 > 5$ ✓

⇒ 10, 12 → 2 razreda

Prim 2.

7
10
2
8
1 → 9 → 11

⇒ 7, 10, 11

Prim 3.

5, 1 } 6
5, 2 } 7
⇒ 6, 7

5
1, 4, 1 } 6
⇒ 5, 6

UVIJEK ODOZDOLA, PAZI NA 2 (< 5), SVE RAZREDE < 5 MORAMO SPOJITI, S NJIMA SUSJEDNIMA!

....	$\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$
....	0.169
....	0.942
....	0.913
	$\chi^2 = 2.024$

$\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$ → službeni podsjetnik

suma

$\chi^2 = 2.024$ → mora biti što manji da bi prihvatili H_0

H_0 ...... kocka je ispravna (ravna se po binomnoj)

H_1 ..... suprotno

$\chi^2_{m-r-1,\,1-\alpha}$

m..... broj razreda nakon spajanja

r..... broj parametara razdiobe procjenjenih iz uzorka

→ bolje objašnjeno u narednim primjerima!

NIŠTA NISMO TREBALI PROCJENITI

$\chi^2_{3-0-1,\,1-0.05}$

→ tablica ⇒ $\chi^2_{2,\,0.95} = 5.991$

SL. FORMULE: „KRITERIJ ZA ODBACIVANJE HIPOTEZE":

↳ $\underbrace{\chi^2_{2,0.95}}_{5.991} < \underbrace{\chi^2}_{2.204}$? NE ⇒ PRIHVAĆAMO H_0 !

⇒ KOCKA JE ISPRAVNA UZ NIVO ZNAČAJNOSTI 5%.

21-07-6.) Tijekom godine bilježen je dnevni broj krivo spojenih poziva u nekoj centrali. Dobiveno je:

ZADANO U ZADATKU | SAMI IZRAČUNATI

x_j	n_j	p_j	$n p_j$	$\frac{(n_j - n\cdot p_j)^2}{n p_j}$
0	95	0.2556	93.31	0.031
1	140	0.3486	127.25	1.277
2	73	0.2379	86.777	2.187
3	31	0.1081	39.45	1.81
4	16	0.03687	13.45	0.483
5	7	0.01005	3.67	
6	2 } $\boxed{10}$	0.0023	0.83 } 4.691	6.008
7	0	0.00045	0.163	
8	1	0.000076	0.028	
Σ	$n = 365$	≈ 1	≈ 365	$\chi^2 = 11.796$

* PODSJETNIK: Poisson!

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\boxed{E(X) = \lambda = \bar{X}}$$

$\lambda = 1.364$

$0.2556 = \{X=0\} = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-1.364}$

$0.3486 = \{X=1\} = \frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda} = 1.364 e^{-1.364}$

$$\bar{X} = \frac{0\cdot 95 + 1\cdot 140 + \dots + 8\cdot 1}{365}$$

Provjerite ravnaju li se podaci po Poissonovoj razdiobi s nivoom značajnosti 2 %.

procijenili parametar λ, UGLAVNOM bude 1 param. $\Rightarrow r = 1$!

$$\chi^2_{m-r-1,\,1-\alpha} = \chi^2_{6-1-1,\,1-0.02} =$$

$$= \chi^2_{4,\,0.98} = 11.668$$

$\underset{11.796}{\chi^2} > \underset{11.668}{\chi^2_{4,\,0.98}}$? DA! $\Rightarrow$ ODBACUJEMO H_0!

$\Rightarrow$ Uz nivo znač. 2% ne možemo zaključiti da se ravna po Poissonu!

PAZI! TRIK

DA SU ZADALI $\lambda = 1.364$ ILI SL. ONDA BI $r = 0$ JER NISMO PROCJENJIVALI! BILO PAR PUTA NA ISPITU!

21-11-10.)

SAMI RAČUNAMO	ZADANO $[a,b]$	n_j	p_j	$n\cdot p_j$	$\frac{(n_j-n\cdot p_j)^2}{n\cdot p_j}$
12.5	0 - 25	87	0.613	91.99	0.271
37.5	25 - 50	46	0.237	35.576	3.054
62.5	50 - 75	14 (17)	0.092	13.76 (19.08)	0.227
87.5	75 - 100	3	0.035	5.32	
	Σ	$n=150$	≈ 1	≈ 150	$\chi^2 = 3.552$

SAMI RAČUNAMO

Provjerite ravnaju li se dobiveni podaci po eksponencijalnoj razdiobi uz nivo značajnosti $\alpha = 5\%$

MORAMO ZNATI !

*PODSJETNIK: EKSPONENCIJALNA:

$$\boxed{P(a<X<b) = P(b) - P(a) = 1 - e^{-b\cdot\lambda} - (1 - e^{-a\cdot\lambda}) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\overline{X}}}$$

$*E(X) = \frac{1}{\lambda}$

RAČUNAMO SREDINU SVAKOG INTERVALA (LIJEVO SKROZ) KAO $[a,b] \rightarrow$ sredina $= \frac{a+b}{2}$

$$\overline{X} = 87\cdot 12.5 + 46\cdot 37.5 + \dots + 3\cdot 87.5$$

$$\overline{X} = 26.33$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{26.33}$$

$$\lambda = 0.038$$

$r=1 \rightarrow$ procijenili parametar λ

$$\chi^2_{m-r-1,1-\alpha} = \chi^2_{3-1-1,1-0.05} = \chi^2_{1,0.95} = 3.841$$

$$\chi^2 = 3.552 < 3.841 = \chi^2_{1,0.95} \Rightarrow \text{Prihvaćamo } H_0 !$$

Dobiveni podaci se ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi.

12. ZZV-26.) U prvih 800 decimala broja π znamenke se pojavljuju:

ZADANO ↓

x_j	n_j	p_j	np_j	$\frac{(n_j - np_j)^2}{np_j}$
0	74	$\frac{1}{10}$	80	0.45
1	92	$\frac{1}{10}$	80	1.8
2	83	$\frac{1}{10}$	80	0.1125
3	79			
4	80			
5	73			
6	77			
7	75			
8	76			0.2
9	91	$\frac{1}{10}$	80	1.5152
Σ	$n=800$	1	800	$\chi^2 = 5.152$

Provjerite da li se znamenke ravnaju po jednolikoj razdiobi (pojava svake znamenke je jednako vjerojatna) uz nivo značajnosti 10%.

$r=0 \rightarrow$ NIŠTA NE PROCJENJUJEMO!

$\alpha = 0.1$

$$\chi^2_{m-r-1,\,1-\alpha} = \chi^2_{9,\,0.9} = 14.684$$

$m = 10$

$5.152 < 14.684$

$\Rightarrow$ Prihvaćamo H_0, odnosno pojava svake znamenke jednako je vjerojatna!

LIJEPI π ZADATAK ZA KRAJ DRUŽENJA SA ZPV-om