ZAVRŠNI ISPIT IZ VJEROJATNOSTI I STATISTIKE

30.06.2010.

1. (**3 boda**)

Vjerojatnost pojavljivanja pisma p na novčiću je nepoznata. Novčić je bačen 5 puta i pismo se pojavilo 2 puta. Nakon toga novčić je bačen 8 puta i pismo se pojavilo 3 puta. Koristeći kriterij najveće izglednosti, odredite procjenu za vjerojatnost p.

2. (**5 bodova**)

Iz populacije koja se podvrgava normalnoj razdiobi izvučen je sljedeći uzorak:

x_j	110	115	120	125	130	135
n_j	2	3	6	5	2	2

a) Izračunajte točkaste procjene za očekivanje i disperziju.

b) Izračunajte 95%-tni interval za očekivanje.

c) Za koji nivo pouzdanosti duljina jednostranog intervala povjerenja za disperziju nije veća od 83.255?

3. (**4 boda**)

a) Definirajte kvantil reda p (za $p \in \langle 0, 1\rangle$ i funkciju razdiobe F).

b) Izračunajte kvantil $u_{0.804}$ standardne normalne razdiobe koristeći isključivo tablicu 1. jedinične normalne razdiobe (za funkciju Φ^*).

4. (**4 boda**)

Izmjerena je težina 60 djece određene dobi i dobiveno je $\overline{x} = 34$ kg, $\widehat{s} = 4.8$ kg. Težina od 32 kg se smatra normalnom za djecu te dobi. Uz nivo značajnosti $\alpha = 0.01$ testirate hipotezu $H_0 ... a = 32$ prema alternativnoj hipotezi $H_1 ... a > 32$, pri čemu se pretpostavlja da je promatrana težina X slučajna varijabla normalne razdiobe $\mathcal{N}\left(a, \sigma^2\right)$, uz σ^2 nepoznat.

5. (**4 boda**)

Za veliku pošiljku proizvoda tvrdi se da sadrži 8% loših proizvoda. U uzorku od 500 proizvoda uzetom iz pošiljke je nađeno 65 loših. Možemo li na temelju toga tvrditi da u pošiljci ima više od 8% loših proizvoda uz nivo značajnosti $\alpha = 0.1$?

6. (**4 boda**)

Tri kocke bačene su istovremeno 100 puta i svaki put je zabilježen broj šestica:

broj šestica	0	1	2	3
n_j	61	29	8	2

Pomoću χ^2 testa provjerite uz nivo značajnosti 5% slažu li se dobiveni rezultati s hipotezom o ispravnosti svih kocki.

PITANJA IZ CJELOKUPNOG GRADIVA

7. (**2 boda**)

Chevalier de Méré je smatrao da je vjerojatnost da se kod četiri bacanja kocke pojavi barem jedna jedinica jednaka $\frac{4}{6}$. Također je smatrao da kod 24 bacanja dvije kocke vjerojatnost da se pojavi suma 2 (dvije jedinice) je jednaka $\frac{24}{36}$. Kolike su stvarne vjerojatnosti ovih događaja?

8. (**5 bodova**)

Neka je pri izvođenju nekog pokusa p vjerojatnost realizacije događaja A. Neka slučajna varijabla X mjeri u kojem pokusu se događaj A prvi put realizirao. Kažemo da X ima geometrijsku razdiobu.

a) Odredite $p_k = P(X = k), \ \ k = 1, 2, 3, \ldots$

b) Izvedite očekivanje $E(X)$.

c) Dokažite da za geometrijsku razdiobu vrijedi odsustvo pamćenja:

$$P(X = k + m \mid X > k) = P(X = m), \quad k, m \in \mathbb{N}.$$

9. (**5 bodova**)

Dana je gustoća slučajnog vektora (X, Y)

$$f(x, y) = Cy, \ \ (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2].$$

a) Odredite konstantu C.

b) Izračunajte marginalne gustoće slučajnih varijabli X i Y.

c) Izračunajte $P\{X < Y\}$.

d) Jesu li komponente X i Y nezavisne? Obrazložite!

10. (**4 boda**)

Iz intervala $[0, \alpha]$, gdje je $\alpha > 0$ nepoznat, odabrano je na sreću n brojeva: x_1, x_2,..,x_n. Da bismo procijenili sredinu tog intervala odaberimo statistiku

$$Z = \frac{1}{2} \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}.$$

a) Dokažite da statistika Z nije nepristrana.

b) S kojim faktorom treba pomnožiti Z kako bismo dobili nepristranu statistiku?

Ispit se piše 150 minuta. Dozvoljena je upotreba kalkulatora i statističkih formula i tablica.

Knjiga N. Elezović: "Statistika i procesi" nije dozvoljena.

Rješenja iz završnog ispita iz Vjerojatnosti i statistike

30.06.2010.

1. (**3 boda**) $f(p) = 560p^5(1-p)^8$,
$f'(p) = 0 \Rightarrow 5p^4(1-p)^8 - 8p^5(1-p)^7 = 0 \Rightarrow p = \frac{5}{13}$

2. (**5 bodova**)
a) (1b) $\bar{x} = 122$, $\hat{s}^2 = 51.053$
b) (2b) $t_{19,1-\frac{0.05}{2}} = 2.093$, $t_{19,1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 3.344$, $a \in [118.7, 125.3]$
c) (2b) kvantil $c = \chi^2_{n-1,\alpha}$
$\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{n-1,\alpha}} \leq 83.255 \Rightarrow \chi^2_{19,\alpha} \geq 11.651 \Rightarrow \alpha \geq 0.1$

3. (**4 boda**)
a) (2b) Kvantil reda p je $x_p \in \mathbb{R}$ za koji je $F(x_p) = p$.
b) (2b) $u_{0.804} = x$, $\Phi^*(x) = 2(F(x) - 0.5) = 0.608 \Rightarrow x = 0.856$

4. (**4 boda**)
H_0: $a = 32$, H_1: $a > 32$
$\hat{t} = \frac{\bar{x}-a_0}{\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = 3.227$
$t_{n-1,1-\alpha} \approx t_{60,0.99} = 2.39$
$\hat{t} > t_{n-1,1-\alpha} \Rightarrow H_0$ se odbacuje

5. (**4 boda**)
radi se o hipotezi o proporciji,
H_0 je $p = 0.08$, alternativa H_1 je $p = p_1 > 0.08$
$\hat{u} = 4.13$, $u_{0.9} = 1.28 \Rightarrow H_0$ se odbacuje

6. (**4 boda**)
$p_0 = (\frac{5}{6})^3$, $p_1 = 3(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2$, $p_2 = 3(\frac{5}{6})(\frac{1}{6})^2$, $p_3 = (\frac{1}{6})^3$
razred za $i = 2$ i $i = 3$ spojimo
$\chi^2_q = \sum_{j=1}^{3} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j} = 2.024$, $f = 2$, $\chi^2_{f,1-\alpha} = 5.991$
$\chi^2_q < \chi^2_{2,0.95} \Rightarrow$ hipoteza se prihvaća

7. (**2 boda**)
a) (1b) $p = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0.518$
b) (1b) $p = 1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0.492$

8. (**5 bodova**)
a) (1b) $p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$

b) (2b) $E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} npq^{n-1} = p\sum_{n=1}^{\infty}(g^n)' = \ldots = \frac{1}{p}$

c) (2b) $P(X = k+m|X > k) = \frac{P(X=k+m, X>k)}{P(X>k)} = \frac{P(X=k+m)}{P(X>k)} = \frac{p(1-p)^{k+m-1}}{(1-p)^k} = P(X = m)$

9. (**5 bodova**)

a) (1b) $\int_0^1 \int_0^2 Cydxdy = 1 \Rightarrow c = 1/2$

b) (2b) $f_X(x) = 1,\ f_Y(y) = \frac{y}{2}$

c) (1b) $P(X < Y) = \int_0^1 \int_x^2 \frac{y}{2} dxdy = \frac{11}{12}$

d) (1b) nezavisne su jer je $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

10. (**4 boda**)

a) (3b) $Z' = \max\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_\mathrm{n}\}$

$F_{Z'}(z) = (\frac{z}{\alpha})^n,\ z \in \langle 0, \alpha \rangle$

$E(Z') = \alpha\frac{n}{n+1}$

$E(Z) = \frac{1}{2}E(Z') = \frac{\alpha}{2}\frac{n}{n+1} \neq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow Z$ nije nepristrana

b) (1b) treba pomnožiti s $\frac{n+1}{n}$