

VIS - 2. kratka provjera znanja, 28.05.2014.
grupa A (12 h)

1. **(3 boda)** Zadana je razdioba diskretnog slučajnog vektora (X, Y) :

$X \backslash Y$	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$

Napišite razdiobu slučajnog vektora (Z, Y) , gdje je $Z = |X - Y|$, te odredite $P(Y > \frac{1}{2} \mid Z = 0)$ i $P(X < 1)$.

2. **(4 boda)** Na sreću biramo radijus kružnice $r \in (0, \frac{1}{2}]$, te točku unutar kvadrata $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Odredite vjerojatnost da izabrana točka bude udaljena od kružnice sa središtem u ishodištu radijusa r za manje od $\frac{1}{4}$.
3. **(3 boda)** Broj poziva na centralu tijekom jednoga dana je Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda = \frac{1}{4}$. Odredite vjerojatnost da tijekom 400 dana broj poziva premaši 115.

VIS - 2. kratka provjera znanja, 28.05.2014.
grupa B (12 h)

1. **(3 boda)** Slučajno biramo dva broja, svaki iz skupa $\{-1, 0, 1\}$ (mogu biti jednaki). Slučajna varijabla X označava apsolutnu vrijednost razlike brojeva, a Y manji izabrani broj. Napišite razdiobu vektora (X, Y) , ispitajte nezavisnost varijabli X i Y , te odredite očekivanje $E(X)$.
2. **(4 boda)** Polumjer kruga je slučajna varijabla s jednolikom razdiobom na intervalu $[0, 1]$. Središte kruga bira se na sreću unutar kvadrata stranice 2. Kolika je vjerojatnost da krug neće sijeći stranicu kvadrata?
3. **(3 boda)** Suma 400 nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem 1 i nepoznatom disperzijom je s vjerojatnošću 0.35 veća od 405. Odredite nepoznatu disperziju.

VIS - 2. kratka provjera znanja, 28.05.2014.
grupa A (13 h)

1. **(3 boda)** Bacamo dvije kocke. Neka je $X = 1$ ako je zbroj dobivenih brojeva paran, a 0 inače, dok je Y najveći zajednički djelitelj brojeva koje smo dobili na kockama. Nađite zakon razdiobe slučajnog vektora (X, Y) . Jesu li X i Y nezavisni? Objasnite svoje tvrdnje!
2. **(4 boda)** Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na području

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}.$$

Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable $Z = X + Y$ i $P(Z < \frac{1}{2})$.

3. **(3 boda)** U pošiljci je stiglo 5000 paketića šećera, svaki očekivane mase 5 grama sa disperzijom 1.44. Kolika je vjerojatnost da je ukupna količina isporučenog šećera između 25.009 i 25.015 kilograma?

VIS - 2. kratka provjera znanja, 28.05.2014.
grupa B (13 h)

1. **(3 boda)** Bacamo dvije kocke. Neka je $X = 0$ ako je zbroj dobivenih brojeva paran, a 1 inače, dok je Y minimum brojeva koje smo dobili na kockama. Nađite zakon razdiobe slučajnog vektora (X, Y) . Jesu li X i Y nezavisni? Objasnite svoje tvrdnje!
2. **(4 boda)** Slučajni vektor (X, Y) ima jednoliku razdiobu na području

$$D = \{(x, y) : x, y \in [0, 1], x + y \leq 1\}.$$

Odredite funkciju razdiobe slučajne varijable $Z = X - Y$ i $P(Z < \frac{1}{2})$.

3. **(3 boda)** U pošiljci je stiglo 5000 paketića šećera, svaki očekivane mase 3 grama sa disperzijom 1.44. Kolika je vjerojatnost da je ukupna količina isporučenog šećera barem 15.009 kilograma?

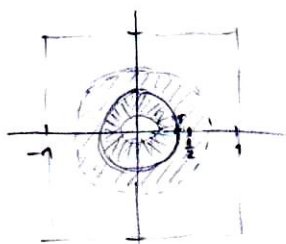
A ① $Z = X - Y$

$Z \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$

$$P(Y > \frac{1}{2} | Z=0) = \frac{P(Y > \frac{1}{2}, Z=0)}{P(Z=0)} = \frac{P(Y=1, Z=0)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$P(X < 1) = P(X=-1) + P(X=0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{11}{24}$$

② $r \in (0, \frac{1}{2}]$



R ... radijus krivine $f_R(r) = 2, r \in (0, \frac{1}{2}]$
 X ... udaljenost točka od krivine

$$\begin{aligned} P(X < \frac{1}{4}) &= \int_0^{\frac{1}{4}} P(X < \frac{1}{4} | R=r) f_R(r) dr = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} P(X < \frac{1}{4} | R=r) dr = \\ &= \int_0^{\frac{1}{4}} 1 + \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} = 2 \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{(r+\frac{1}{4})^2 \pi}{4} dr + 2 \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{(r+\frac{1}{4})^2 \pi - (r-\frac{1}{4})^2 \pi}{4} dr = \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{4}} (r+\frac{1}{4})^2 dr + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} r dr = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} (r+\frac{1}{4})^3 \Big|_0^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2} r^2 \Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{2})^3 - \frac{1}{3} (\frac{1}{4})^3 + \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{4})^2 \right] = \frac{25\pi}{384} \end{aligned}$$

③ X_i ... broj poziva u i -tom danu, $X_i \sim P(\frac{1}{4})$

$EX_i = \frac{1}{4}, DX_i = \frac{1}{4}, \rho_i = \frac{1}{2}$

$P(X_1 + X_2 + \dots + X_{400} > 115) = ?$

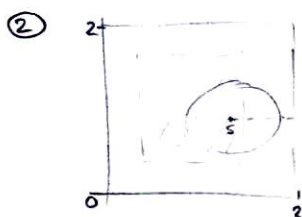
$\frac{Y - 400 \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ $P(Y > 115) = P(\frac{Y - 100}{10} > 1.5) = 1 - P(X^* \leq 1.5) = 1 - \Phi(1.5) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi(1.5) = 0.065$

B ① $U, V \in \{-1, 0, 1\}$
 $X = |U - V|$
 $Y = \min(U, V)$

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{2}{9}$	0	0

msu nezavisne

$EX = 0 \cdot \frac{3}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$



R ... radijus kruga, $f_R(r) = 1, r \in (0, 1]$

X ... udaljenost središta do najbliže stranice kvadrata

$$\begin{aligned} P(X > R) &= \int_0^1 P(X > R | R=r) f_R(r) dr = \int_0^1 P(X > r | R=r) dr = \int_0^1 \frac{(2-r)^2}{4} dr = \\ &= \int_0^1 (r-1)^2 dr = \frac{1}{3} (r-1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

③ $X_i, EX_i = 1, DX_i = 0.2$

$P(X_1 + \dots + X_{400} > 405) = 0.35$

$P(\frac{\sum_{i=1}^{400} X_i - 400}{\sqrt{80}} > \frac{5}{\sqrt{80}}) = 0.35$
 $Y \sim N(0,1)$

$P(Y > \frac{1}{\sqrt{80}}) = 0.35$

$1 - \Phi(\frac{1}{\sqrt{80}}) = 0.35$

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi^*(\frac{1}{\sqrt{80}}) = 0.35$

$\Phi^*(\frac{1}{\sqrt{80}}) = 0.3$

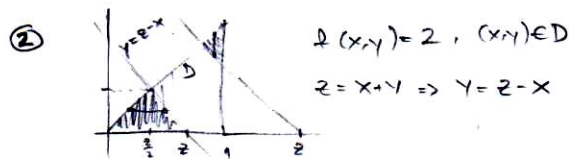
$\frac{1}{\sqrt{80}} = 0.326$

$0 = 0.65$

A ①

X \ Y	1	2	3	4	5	6
negativ 0	$\frac{16}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0
pozitiv 1	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

MSU nezavisne



$$F_z(z) = \int_0^{\frac{z}{2}} \int_{z-y}^z 2 dx dy = 2 \int_0^{\frac{z}{2}} (z-y) dy = 2 \left(zy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{\frac{z}{2}} = 2 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{4} \right) = \frac{z^2}{2}, z \in [0,1]$$

$$F_z(z) = 1 - \int_{\frac{z}{2}}^1 \int_{z-x}^x 2 dy dx = 1 - 2 \int_{\frac{z}{2}}^1 (zx - z) dx = 1 - 2 \left(\frac{zx^2}{2} - zx \right) \Big|_{x=\frac{z}{2}}^1 =$$

$$= 1 - 2 \left(1 - z - \frac{z^2}{4} + \frac{z^2}{2} \right) = -\frac{z^2}{2} + 2z - 1, z \in [1,2]$$

$$P(z < \frac{1}{2}) = F_z(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$$

③ $n=5000, \mu=5, \sigma^2=1.44, a=25009, b=25015$

$$\frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\sum (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{b-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

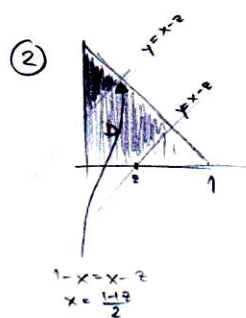
$z \sim N(0,1)$

$$P(a \leq \sum X_i \leq b) = P(0.106 \leq z \leq 0.177) = \frac{1}{2} (0.141 - 0.084) \approx 0.0285$$

B ①

X \ Y	1	2	3	4	5	6
negativ 0	$\frac{10}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
pozitiv 1	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0

nisu nezavisni



$$F_z(z) = 1 - \int_0^{\frac{1-z}{2}} \int_{z+y}^{1-y} 2 dx dy = 1 - 2 \int_0^{\frac{1-z}{2}} (1-z-y) dy = 1 - 2 \left((1-z)y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{\frac{1-z}{2}} =$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{(1-z)^2}{2} - \frac{(1-z)^2}{4} \right) = 1 - \frac{(1-z)^2}{2}, z \in [0,1]$$

$$F_z(z) = \int_0^{\frac{1+z}{2}} \int_{x-z}^{1-x} 2 dy dx = 2 \int_0^{\frac{1+z}{2}} (1-zx+x) dx = 2 \left((1-z)x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0}^{\frac{1+z}{2}} = \frac{(1+z)^2}{2}, z \in [-1,0]$$

$$P(z < \frac{1}{2}) = F_z(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{(1-\frac{1}{2})^2}{2} = \frac{7}{8}$$

③ $n=5000, \mu=3, \sigma=1.2, a=15009$

$$\sum X_i \geq a \Leftrightarrow \frac{\sum (X_i - \mu)}{\sigma\sqrt{n}} \geq \frac{a-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$z \sim N(0,1)$

$$P(z \geq 0.106) = 1 - P(z < 0.106) = \frac{1}{2} (1 - \Phi^*(0.106)) = \frac{1}{2} (1 - 0.0844) = 0.45775$$