

Vjerojatnost i statistika
Jesenski ispitni rok
31.08.2015.

1. (4b) U bubnju se nalaze 4 crvene, 5 bijelih i 6 plavih kuglica. Na sreću odabiremo 3 kuglice. Označimo događaje

$$\begin{aligned}A &= \{\text{sve tri kuglice su različitih boja}\} \\B &= \{\text{prva kuglica je bijela}\} \\C &= \{\text{prve dvije kuglice su različitih boja}\}.\end{aligned}$$

Izračunajte vjerojatnosti $P(A)$, $P(A|B)$, $P(A|C)$.

2. (4b) Cilj se gađa iz 4 topa koji pogađaju cilj neovisno jedan od drugog s vjerojatnošću 0.4. Ako jedan top pogodi cilj, on ga uništava s vjerojatnošću 0.3, ako ga pogode dva topa, cilj je uništen s vjerojatnošću 0.6, ako ga tri topa pogode, onda s vjerojatnošću 0.8, a ako ga sva četiri topa pogode, cilj je uništen s vjerojatnošću 0.9. Topovi su izvršili gađanja i cilj je bio uništen. Izračunajte vjerojatnost da ga je pogodio samo jedan top.

3. (3b) Neka je X slučajna varijabla koja poprima vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ i neka vrijedi

$$P(X = 1) = 2P(X = 2) = 3P(X = 3) = 4P(X = 4).$$

Izračunajte očekivanje i disperziju slučajne varijable X .

4. (4b) Ako su X i Y nezavisne slučajne varijable takve da je $D(X) = 3$ i $D(Y) = 14$, koliko iznosi $D(2X - Y)$? Izvedite svojstva disperzije koja ste pritom koristili i objasnite u kojem koraku ste koristili nezavisnost slučajnih varijabli.
5. (4b) Dvije točke odabrane su na sreću unutar dužine duljine 2. Definirajmo slučajnu varijablu Z kao udaljenost među njima. Odredite očekivanje $E(Z)$ i izračunajte vjerojatnost $P(Z > 1)$.
6. (4b) Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće $f(x) = \frac{3}{2}x^2$, $|x| \leq 1$. Odredite funkciju gustoće slučajne varijable $Y = \Psi(X)$, gdje je

$$\psi(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [-1, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2}(1-x) & , x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

7. (5b) Biramo na sreću broj X iz intervala $[0, 1]$, a zatim na sreću broj Y iz intervala $[0, X]$. Odredite gustoću slučajne varijable $X + Y$.
8. (4b) Sto brojeva zaokruženo je na jednu decimalu i potom zbrojeno. Ako su greške zaokruživanja nezavisne slučajne varijable jednoliko distribuirane na $[-0.05, 0.05]$, izračunajte interval unutar kojeg se s vjerojatnošću 95% nalazi pogreška zbroja učinjena zbog zaokruživanja pribrojnika.
9. (4b) Koristeći kriterij najveće izglednosti, odredite procjene oba parametra normalne razdiobe $N(a, \sigma^2)$.
10. (4b) Uzastopnim ponavljanjem nekog pokusa dobivene su sljedeće vrijednosti (svrstane u intervale):

$[a, b]$	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
n_j	91	42	14	3

Provjerite ravnanju li se dobiveni rezultati po eksponencijalnoj razdiobi uz nivo značajnosti 10%.

Vis - jesenski rok - 31.08.15.

$$1. P(A) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{15 \cdot 14 \cdot 13} \cdot 3! = \frac{24}{91} = 0.2637 \text{ lb}$$

$$P(A|B) = \frac{4 \cdot 6}{14 \cdot 13} \cdot 2! = \frac{24}{91} = 0.2637 \text{ lb}$$

$$P(A|C) = \frac{\frac{24}{91}}{\frac{4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6}{15 \cdot 14} \cdot 2!} = \frac{1260}{3367} = 0.374 \text{ lb}$$

$$2. P(H_i) = \binom{4}{i} 0.4^i 0.6^{4-i}, i=0, \dots, 4 \text{ (už pogledam s i-topov)} \\ P(A|H_1) = 0.3, P(A|H_2) = 0.6, P(A|H_3) = 0.8, P(A|H_4) = 0.9 \text{ lb} \\ P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{4 \cdot 0.4 \cdot 0.6^3 \cdot 0.3}{\sum P(H_i)P(A|H_i)} = 0.2267 \text{ lb} \\ = 0.45696$$

$$3. X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ p & \frac{p}{2} & \frac{p}{3} & \frac{p}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \sum p_i = 1 \Rightarrow p = \frac{12}{25} \text{ lb}$$

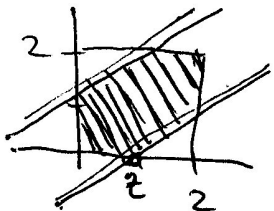
$$E(X) = \frac{48}{25} = 1.92 \text{ lb}, D(X) = 1.1136 \text{ lb}$$

$$4. D(2X-Y) = 4D(X) + D(Y) = 26 \text{ lb}$$

$$D(sX) = \dots = s^2 D(X) \text{ lb str. 101, tm. 3. 2.}$$

$$D(X+Y) = \dots \text{ (konisti se nez. } E(XY) = E(X)E(Y)) \dots = D(X) + D(Y) \text{ lb}$$

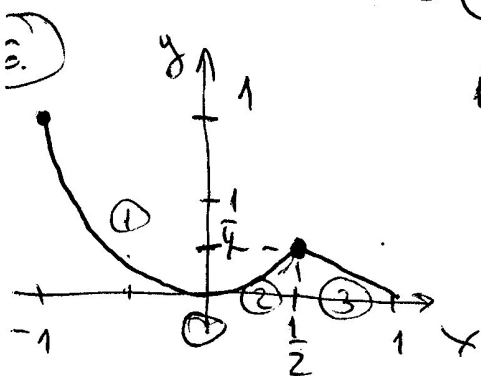
$$5. x, y \in [0, 2], z = |x-y|, z \in [0, 2]$$



$$F(z) = P(Z \leq z) = 1 - \frac{(2-z)^2}{4} = z - \frac{z^2}{4}, z \in [0, 2]$$

$$f(z) = F'(z) = 1 - \frac{z}{2}, z \in [0, 2]$$

$$E(z) = \int_0^2 z f(z) dz = \frac{2}{3} \text{ lb}, P(z > 1) = \frac{1}{4} \text{ lb}$$



$$1) x \in (-1, 0) \\ y \in (0, 1)$$

$$x = -\sqrt{y}$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ lb}$$

$$g_1(y) = \frac{3}{2} (-\sqrt{y})^2 \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$2) x \in [0, \frac{1}{2}]$$

$$y \in [0, \frac{1}{4}]$$

$$x = \sqrt{y}$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ lb}$$

$$g_2(y) = \frac{3}{2} (\sqrt{y})^2 \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$3) x \in (\frac{1}{2}, 1]$$

$$y \in [0, \frac{1}{4}]$$

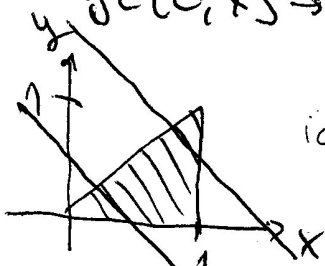
$$x = 1 - 2y$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = 2 \text{ lb}$$

$$g_3(y) = \frac{3}{2} (1-2y)^2 \cdot 2$$

$$\Rightarrow g(y) = \begin{cases} g_1 + g_2 + g_3, & y \in [0, \frac{1}{4}] \\ g_1, & y \in (\frac{1}{4}, 1) \end{cases} = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{y} + 3(1-2y)^2, & y \in (0, \frac{1}{4}) \\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & y \in (\frac{1}{4}, 1) \end{cases}$$

7.) $x \in [0, 1] \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{x} = 1$
 $y \in [0, x] \rightarrow f_{Y|X=x} = \frac{1}{x}$
 $f(x, y) = f_X \cdot f_{Y|X=x} = \frac{1}{x}, \quad \begin{matrix} x \in [0, 1] \\ y \in [0, x] \end{matrix}$



ideja
 $z = x + y, \quad z \in [0, 2]$
 $y = z - x, \quad |\frac{\partial y}{\partial z}| = 1$

$$g_1(z) = \int_{\frac{z}{2}}^z \frac{1}{x} dx = \ln z - \ln \frac{z}{2}, \quad z \in [0, 1]$$

$$g_2(z) = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x} dx = -\ln \frac{z}{2}, \quad z \in [1, 2]$$

8.) $X_k \sim U[-0.05, 0.05], \quad E(X_k) = 0, \quad D(X_k) = \dots = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{1}{1200}$
 $X = \sum_{k=1}^{100} X_k, \quad \text{C.G.T.}, \quad n=100, \quad p=0.95$

$$P(|X| < t) = P\left(\left|\frac{\sum X_k - 0}{\sigma \sqrt{n}}\right| < \frac{t}{\sqrt{\frac{1}{1200 \cdot 100}}}\right) = 0.95 = \Phi^*(1.96)$$

$$\Rightarrow t = 1.96 \cdot \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.5658$$

9.) str. lb, pr. lo. 11.

$$L(a, \sigma, x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2\right)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow a = \frac{\sum x_i}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - a)^2}{n}$$

10.

$[a, b]$	\bar{x}_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2 / np_i$
0-10	5	91	0.621	93.14	0.049
10-20	15	42	0.235	35.31	1.268
20-30	25	14	0.089	13.38	18.454
30-40	35	3	0.0338	5.074	0.115

$n=150$

$$\lambda = \frac{1}{x} = 0.08$$

$$P(a < X < b) = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

$$\chi^2 = 1.432 < \chi^2_{3-1-1, 0.9} = 2.706$$

Ne odbačujemo H_0 , podani se razlagajo po ekspl. razdelitvi!