

**UPUTE I RJEŠENJA PONOVLJENOG ZAVRŠNOG ISPITA IZ
VJEROJATNOSTI I STATISTIKE**

04. 07. 2007.

1. (4 boda)

- (a) Definirajte konvergenciju po vjerojatnosti.
- (b) Definirajte konvergenciju gotovo sigurno.
- (c) Definirajte slabi zakon velikih brojeva.
- (d) Iskažite teorem o jakom zakonu velikih brojeva.

Rješenje: vidjeti predavanja.

2. (3 boda) Pomoću Čebiševljeve nejednakosti dokažite da je

$$P(-3\sigma < X - a < 3\sigma) > \frac{8}{9},$$

za svaku slučajnu varijablu X .

Rješenje: $P(|X - a| < 3\sigma) > 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2}$

3. (4 boda) Slučajna varijabla X ima funkciju gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x}{a}}, & \text{ako je } x > 0 \\ 0, & \text{ako je } x \leq 0 \end{cases},$$

pri čemu je $a > 0$. Metodom najveće izglednosti odredite procjenu parametra a , te ispitajte nepristranost tog procjenitelja.

Rješenje: $a = \frac{\bar{x}}{2}$, $E(X) = 2a$, $Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, $E(Y) = 2$.

4. (3 boda) Procjena disperzije varijable s poznatim očekivanjem a računa se po formuli

$$\hat{D}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2.$$
 Džepna računala programirana su na računanje disperzije ukoliko očekivanje

nije poznato pri čemu se koristi formula $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$. Dokažite da vrijedi

$$\hat{D}^2 = \hat{\sigma}^2 + (\bar{x} - a)^2.$$

Rješenje: vidjeti predavanja

5. (3 boda) Na temelju vrijednosti slučajnog uzorka volumena 17, za varijablu $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, dobivene su vrijednosti

$$\sum_{i=1}^{17} x_i = 680, \quad \sum_{i=1}^{17} x_i^2 = 34000.$$

Odredite dvostrani interval povjerenja za parametar σ^2 uz nivo pouzdanosti 0.9.

Rješenje: $P(258.594 \leq \sigma^2 \leq 854.057) = p$

6. (4 boda) U vremenu od 2880 sekundi, na jednom mjestu autoceste, sniman je protok vozila. Vrijeme promatranja podijeljeno je na 288 intervala po 10 sekundi. Rezultati su zapisani u sljedeću tablicu:

broj vozila	0	1	2	3	4	5
broj intervala	154	93	31	7	3	0

Provjerite hipotezu da se broj intervala ravna po Poissonovoj razdiobi uz nivo značajnosti 0.05.

Rješenje: $\chi^2 = 1.943$, hipotezu ne odbacujemo.

PITANJA IZ CJELOKUPNOG GRADIVA

7. **(3 boda)** U jednoj vrećici se nalaze dvije bijele i jedna crna kuglica, a u drugoj jedna bijela i pet crnih kuglica. Iz prve vrećice je prebačena jedna kuglica u drugu. Ako iz druge vrećice izvučemo bijelu kuglicu, kolika je vjerojatnost da je iz prve vrećice u drugu vrećicu prebačena crna kuglica?

Rješenje: $\frac{1}{5}$.

8. **(3 boda)** Za slučajnu varijablu $X \sim \mathcal{N}(16, 6)$ odredite simetrični interval oko $\mu = 16$ u kojem slučajna varijabla X poprima vrijednosti s vjerojatnošću 0.95.

Rješenje: $P(11.2 < X < 20.8) = 0.95$

9. **(4 boda)** Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable koje imaju eksponencijalnu razdiobu s parametrom $\lambda = 1$. Nađite funkciju gustoće slučajne varijable $Z = X + Y$.

Rješenje: $f(z) = ze^{-z}$, $z > 0$.

10. **(4 boda)** Rezultati dvije grupe studenata na nekom kolegiju dani su tablicom

	1	2	3	4	5
grupa A	7	16	28	14	11
grupa B	10	13	30	16	9

Uz koji se nivo značajnosti može prihvatiti hipoteza o jednakosti srednjih ocjena za ove dvije grupe studenata?

Rješenje: značajnost 70%.

Ispit se piše 150 minuta.

Dozvoljeno je korištenje kalkulatora i knjige iz trećeg ciklusa predavanja.