

PROBLEMAS DE GAUSS

x

TEORÍA +
EJERCICIOS

RODRIGO ALCOCER

SISTEMAS LINEALES DE 3 O MÁS INCÓGNITAS

Podemos encontrarnos también sistemas de 3 o más incógnitas. El número de ecuaciones en un sistema es el número de incógnitas. Para resolverlas podemos utilizar los métodos mencionados antes pero para ser más eficientes y rápidos, utilizaremos el método matricial de Gauss.

Para verlo, vamos a poner un ejemplo y resolverlo:
$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Lo primero, convertir este sistema en una matriz de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 7 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Una vez tenemos nuestra matriz, tenemos que lograr una escalera de ceros. Tenemos que lograr lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ \underline{0} & b & c & d \\ 0 & \underline{0} & c & d \end{array} \right)$$

Vamos a operar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

(nos interesa tener un 1 arriba-izq.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right)$$

Una vez hemos llegado a nuestra escalera de 0, transformamos nuestra matriz en un sistema de ecuaciones y resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -y - 4z = 7 \\ 3z = -6 \end{cases}$$

$$3z = -6 \Leftrightarrow z = -2$$

$$-y - 4z = 7 \Leftrightarrow -y - 4 \cdot (-2) = 7 \Leftrightarrow -y + 8 = 7 \Leftrightarrow -y = -1 \Leftrightarrow y = 1$$

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow x + 1 + (-2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Una vez resuelto el sistema, ya tendríamos los resultados de nuestro sistema. En nuestro caso $x = 1$, $y = 1$ y $z = -2$.

PROBLEMAS DE GAUSS CON SOLUCIONES NUMÉRICAS

LOS PROBLEMAS CON ESTE ICONO  SON EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

1. Una determinada compañía de teatro presenta una obra en una ciudad, dando sólo tres representaciones. Se sabe que el número de espectadores que asiste a la segunda representación se incrementó en un 12 % respecto a la primera, que a la tercera asistieron 336 espectadores menos que a la segunda y que el número de espectadores de la primera superó en 36 espectadores el de la tercera. Calcular el número de espectadores que asistieron a cada representación.

Solución: A la primera 2.500 personas, a la segunda 2.800, y a la tercera 2.464

2. Por un rotulador, un cuaderno y una carpeta se pagan 3,56 euros. Se sabe que el precio del cuaderno es la mitad del precio del rotulador y que, el precio de la carpeta es igual al precio del cuaderno más el 20% del precio del rotulador. Calcula los precios que marcaba cada una de las cosas, sabiendo que sobre esos precios se ha hecho el 10% de descuento.

Solución: El rotulador 1,80€, el cuaderno, 0,90€ y la carpeta 1,26€

3. En una residencia de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y nata. El presupuesto destinado para esta compra es de 540 euros y el precio de cada helado es de 4 euros el de vainilla, 5 euros el de chocolate y 6 euros el de nata. Conocidos los gustos de los estudiantes, se sabe que entre helados de chocolate y de nata se han de comprar el 20% más que de vainilla. ¿cuántos helados de cada sabor se compran a la semana?


Solución: 50 helados de vainilla, 20 de chocolate y 40 de nata

4. Disponemos de tres lingotes de distintas aleaciones de tres metales A, B y C. El primer lingote contiene 20 g del metal A, 20 g del B y 60 del C. El segundo contiene 10 g de A, 40 g de B y 50 g de C. El tercero contiene 20 g de A, 40 g de B y 40 g de C. Queremos elaborar, a partir de estos lingotes, uno nuevo que contenga 15 g de A, 35 g de B y 50 g de C. ¿Cuántos gramos hay que coger de cada uno de los tres lingotes?

Solución: 25 g del primer lingote, 50 g del segundo y 25 g del tercero

5. Una compañía fabricó tres tipos de muebles: sillas, mecedoras y sofás. Para la fabricación de cada uno de estos tipos necesitó la utilización de ciertas unidades de madera, plástico y aluminio tal y como se indica en la tabla siguiente. La compañía tenía en existencia 400 unidades de madera, 600 unidades de plástico y 1 500 unidades de aluminio. Si la compañía utilizó todas sus existencias, ¿cuántas sillas, mecedoras y sofás fabricó?

Solución: 100 sillas, 100 mecedoras y 200 sofás

6.  La primera interpretación en EE.UU. de la octava sinfonía de Mahler tuvo lugar en Filadelfia en 1916 con la participación de una orquesta, dos coros con el mismo número de miembros, un tercer coro infantil y, además, ocho cantantes solistas invitados especialmente y que no pertenecían a ninguno de los coros. La décima parte del número total de intérpretes de los tres coros era menor en 15 unidades al de miembros de la orquesta. Los miembros de cada uno de los dos coros no infantiles superaban en 140 unidades a la suma de componentes del coro infantil y los de la orquesta. El número de miembros de la orquesta excedía en 21 unidades a la doceava parte del total de intérpretes. ¿Cuántos intérpretes tenía la orquesta y cada uno de los coros? ¿Cuántos intérpretes había en total?





Solución: La orquesta tenía 110 intérpretes, cada uno de los coros no infantiles 400 y el coro infantil 150 para un total de 1068 intérpretes


7. En una tienda, un cliente se ha gastado 150 euros en la compra de 12 artículos, entre discos, libros y carpetas. Cada disco le ha costado 20 euros, cada libro 15 euros, y cada carpeta 5 euros. Se sabe que entre discos y carpetas hay el triple que de libros. Determina cuántos artículos ha comprado de cada tipo.





Solución: 4 discos, 3 libros y 5 carpetas

8. Dos kilos de naranjas, más un kilo de plátanos, más dos kilos de mangos, valen 16,75 euros. Dos kilos de naranjas, más dos kilos de plátanos, más 3 de mangos, valen 25 euros. Tres kilos de naranjas, más un kilo de plátanos, más dos kilos de mangos, valen 17,75 euros. ¿Cuánto vale 1 kilo de naranjas? ¿Cuánto vale 1 kilo de plátanos? ¿Cuánto vale 1 kilo de mangos?

Solución: Naranjas 1 €/Kg, plátanos vale 1,75 €/Kg y mangos 6,5 €/Kg

9.  El cajero de un banco sólo dispone de billetes de 10, 20 y 50 euros. Hemos sacado 290 euros del banco y el cajero nos ha entregado exactamente 8 billetes. El número de billetes de 10 euros que nos ha dado es el doble del de 20 euros. Plantee y resuelva el sistema de ecuaciones lineales asociado a este problema para obtener el número de billetes de cada tipo que nos ha entregado el cajero
Solución: 5 billetes de 50€, 1 billete de 20€ y 2 billetes de 10€
10.  Un taller de carpintería ha vendido 15 muebles, entre sillas, sillones y butacas, por un total de 1600 euros. Se sabe que cobra 50 euros por cada silla, 150 euros por cada sillón y 200 euros por cada butaca, y que el número de butacas es la cuarta parte del número que suman los demás muebles. Calcula cuántos muebles de cada clase ha vendido ese taller.
Solución: 3 butacas, 4 sillones y 8 sillas
11.  Una tienda dispone de latas de conserva de tomate de tres fabricantes; A, B y C. El fabricante A envasa el tomate en latas de 250 g, el fabricante B lo envasa en latas de 500 g y el fabricante C en latas de 1 kg. Esas latas de tomate se venden a 1, 1,8 y 3,3 € respectivamente. Compramos en total 20 latas, que pesan un total de 10 kg y nos cuestan 35,6€. Queremos saber cuántas latas de cada fabricante hemos comprado.
Solución: 8 latas de A, 8 de B y 4 de C
12.  Los habitantes de una ciudad tienen los ojos de color azul, negro o de color marrón. El número de los que tienen ojos azules, aumentado en 5, es igual a la sexta parte del número de los que tienen los ojos negros o marrones. El número de los que tienen ojos negros, disminuido en 75, es igual a la mitad de los que tienen los ojos azules o marrones. Finalmente, el número de los que tienen ojos marrones, aumentado en 50, es igual al número de los que tienen ojos azules o negros. ¿Cuántos habitantes tiene la ciudad?
Solución: hay 870 habitantes en la ciudad
13. En un jardín hay veintidós árboles entre naranjos, limoneros y pomelos. El doble del número de limoneros más el triple del número de pomelos es igual al doble de número de naranjos. Además se sabe que el número de naranjos es el doble del de limoneros. ¿Cuántos árboles hay de cada tipo?
Solución: 12 naranjos, 6 limoneros y 4 pomelos

14. Un determinado concesionario de coches tiene abiertas tres sucursales. El número total de coches vendidos a final de mes entre las tres es 177, pero los vendidos en la tercera sucursal son la cuarta parte de los vendidos en la primera. Además, la diferencia entre el número de coches vendidos en la primera y la segunda es inferior en dos unidades al doble de los vendidos en la tercera. ¿Cuántos coches ha vendido en ese mes cada una de las sucursales?
- Solución: la primera vendió 100 coches, la segunda 52 y la tercera 25*
15.  Una tienda de informática vende memorias USB de 32 GB, 64 GB y 128 GB, siendo sus precios 5 €, 15 € y 20 €, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 memorias USB que le han costado 160 €. Sabiendo que el número de pendrives de 128 GB que compró era la cuarta parte del resto. Calcula cuántas memorias USB ha comprado de cada tipo
- Solución: ha comprado 8 memorias USB de 32 GB, 4 de 64 GB y 3 de 128 GB*
16. Un barco transporta 400 vehículos entre coches, camiones y motos. Por cada 2 motos hay 5 camiones. Los coches representan las $\frac{9}{7}$ partes de los otros vehículos. ¿Cuántos vehículos de cada tipo transporta el barco?
- Solución: transporta 225 coches, 125 camiones y 50 motos*
17. Una pastelería utiliza tres ingredientes principales —harina, huevos y mantequilla— para preparar tres tipos de tartas. La tarta de manzana se elabora con 2 kg de harina, 1 huevo y 200 g de mantequilla. La tarta de chocolate requiere 1 kg de harina, 4 huevos y 100 g de mantequilla. La tarta de frutos rojos se prepara con 1 kg de harina, 2 huevos y 200 g de mantequilla.
- Los precios de venta al público de las tartas son: 7,50 € para la tarta de manzana, 6,50 € para la tarta de chocolate, y 7,00 € para la tarta de frutos rojos. Además, se sabe que la panadería obtiene un beneficio de 2 € por cada tarta vendida. Con esta información, calcula cuánto le cuesta a la panadería cada kilo de harina, cada huevo y cada kilo de mantequilla.
- Solución: cada kilo de harina cuesta 1 €, cada huevo 0,50 € y cada kilo de mantequilla 15 €*
18. Un cajero automático contiene 95 billetes de 10, 20 y 50 €. Se sabe que tiene almacenados 2 000 € y que el número de billetes de 10 € es el doble que el número de billetes de 20 €.
- Solución: 50 billetes de 10 €, 25 billetes de 20 € y 20 billetes de 50 €*


19.  Una tienda vende una clase de calcetines a 12 €. el par. Al llegar las rebajas, durante el primer mes realiza un 30% de descuento sobre el precio inicial y en el segundo mes un 40% también sobre el precio inicial. Sabiendo que vende un total de 600 pares de calcetines por 5976 €. y que en las rebajas ha vendido la mitad de dicho total (de calcetines), ¿a cuántos pares de calcetines se les ha aplicado un descuento del 40%?
Solución: 120 pares
20.  Una empresa envasadora ha comprado un total de 1500 cajas de pescado en tres mercados diferentes, a un precio por caja de 30, 20 y 40 euros respectivamente. El coste total de la operación ha sido de 40.500 euros. Calcular cuánto ha pagado la empresa en cada mercado, sabiendo que en el primero de ellos ha comprado el 30% de las cajas.
Solución: primer mercado 13.500 €, segundo mercado 15.000 € y tercer mercado 12.000 €
21. Una inmobiliaria ha vendido un total de 65 plazas de garaje en tres urbanizaciones distintas. Las ganancias obtenidas por la venta de una plaza de garaje en la urbanización A son de 2.000 euros, 4.000 euros para una en la urbanización B y 6.000 para una en la urbanización C. Sabemos que se han vendido un 50% más de plazas en la urbanización A que en la urbanización C. Calcula el número de plazas de garaje vendidas en cada urbanización sabiendo que el beneficio obtenido por las ventas en la urbanización C es igual a la suma de los beneficios obtenidos por las ventas en las urbanizaciones A y B.
Solución: 30 plazas en A, 15 plazas en B y 20 plazas en C
22.  Los alumnos de 2º de Bachillerato de un centro escolar votan entre los tres posibles destinos para el viaje de fin de curso: Roma, Londres y París. El número total de votos es 120. El número de alumnos que quieren ir a Roma es el triple de la diferencia entre los que quieren ir a París y los que quieren ir a Londres. El número de alumnos que quieren ir a París es la mitad de la suma de los que quieren ir a Roma y a Londres. Calcula el número de alumnos que quiere ir a cada destino.
Solución: 40 alumnos votan Roma, 20 Londres y 60 París
23.  Para recaudar dinero para el viaje de fin de curso, unos estudiantes han vendido camisetas, bufandas y gorras a 10, 5 y 7 euros respectivamente. Han recaudado en total 2980 euros. El número total de prendas vendidas ha sido 380. El número de camisetas vendidas fue el doble del número de gorras vendidas. Calcula el número de camisetas, bufandas y gorras vendidas.
Solución: 180 camisetas, 110 bufandas y 90 gorras

24. En una clase se celebran elecciones para delegado. Se presentan dos candidatos: X e Y. El 5% del total de votos emitidos es nulo. Cuatro veces el número de votos obtenido por Y menos tres veces el número de votos obtenidos por X excede al número de votos nulos en una unidad. Si dividimos el número de votos obtenidos por X entre el número de los obtenidos por Y se obtiene de cociente 1 y de resto 7. ¿Cuántos votos obtuvo cada candidato?


Solución: el candidato X ha obtenido 32 votos y el candidato Y obtuvo 25 votos

25. Una determinada universidad tiene 1000 profesores entre catedráticos, titulares y asociados. Si 50 titulares pasaran a ser catedráticos, el número de titulares restantes sería doble que el número de catedráticos que resultarían del traspaso más el número de asociados. En cambio, si 100 titulares pasaran a ser catedráticos, entonces el número de titulares restantes sería igual que la suma del número de catedráticos resultantes del traspaso y el número de asociados. Halla el número inicial de profesores de cada categoría.

Solución: hay 50 catedráticos, 600 profesores titulares y 350 profesores asociados.

26.  Para poder llevar a cabo la última obra que le han encargado, una empresa de construcción necesita adquirir 400 kg de cemento, 150 kg de ladrillos y 120 kg de azulejos. Antes de hacer la compra del material consulta precios en dos suministradores, A y B. El suministrador A le ofrece un precio de venta total de 9.800 €. El suministrador B, que está en liquidación, le ofrece importantes descuentos. En concreto, baja el precio del cemento a la mitad del que le ofrece el suministrador A, el del ladrillo a una tercera parte y el del azulejo a una cuarta parte, lo que supone un ahorro de 6.400 € con respecto al precio total de venta ofrecido por el suministrador A. Se sabe, además, para el suministrador A, que el precio del kg de azulejo es el doble de la suma de los precios del cemento y los ladrillos. Calcula el precio (en €/kg) del cemento, el ladrillo y el azulejo en el suministrador A.

Solución: 8 €/kg de cemento, 12 €/kg de ladrillos y 40 €/kg de azulejos

27.  Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de las tarifas de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 €; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 €.
- a) Calcula el precio de cada tipo de entrada
 - b) El día que una familia formada por 2 adultos, 2 niños y 3 jubilados visita el museo, se ha aplicado un descuento especial de un 15% a cada tarifa. ¿Cuánto pagan en total?

Solución: a) 30€ la entrada de adulto, 9€ la de niño y 15€ la de jubilado; b) 104,55€