Modelo A

Mates con Rodrolo

Prueba Parcial de Determinantes
Curso: 2024 - 2025
Materia: Matemáticas II

Instrucciones Generales y Calificación

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a todas las preguntas formuladas en esta prueba. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.
Calificación: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.
Tiempo: 75 minutos.

Pregunta 1 (Calificación máxima: 2 puntos)

Un museo ofrece entradas con tarifas distintas: adulto, niño y jubilado. La suma de las tarifas de adulto y jubilado es cinco veces la tarifa de niño. Además, se sabe que un grupo de 5 adultos, 3 niños y 3 jubilados, ha pagado 222 € ; y otro grupo de 3 adultos, 2 niños y 4 jubilados, 168 € . Resuelva el problema **utilizando la regla de Cramer**.

Pregunta 2 (Calificación máxima: 2 puntos)

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (0.5 puntos) Calcule $|A|$.

(b) (1.5 puntos) Calcule A^{-1} utilizando determinantes.

Pregunta 3 (Calificación máxima: 2 puntos)

Estudie el rango de la siguiente matriz en función del parámetro λ:

$$A = \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & 2\lambda \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+\lambda \\ \lambda+2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pregunta 4 (Calificación máxima: 2 puntos)

Dado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (k+1)x + 3y + kz = 1 \\ 3x + (k+1)y + 2z = k-1 \\ kx + 2y + kz = 2 \end{cases}$$

(a) (1.5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real k.

(b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $k = -3$.

Pregunta 5 (Calificación máxima: 2 puntos)

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 3z = 0 \\ y - t = 0 \\ x + y + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + t = 0 \end{cases}$$

Modelo A

Mates con Rodrolo

Prueba Parcial de Determinantes
Curso: 2024 - 2025
Materia: Matemáticas II

Criterios de Calificación

Todos los ejercicios serán calificados con múltiplos de **0.25 puntos**, siendo la máxima calificación posible por ejercicio de **2 puntos**.

Pregunta 1 (Calificación máxima: 2 puntos)

(a) Planteamiento correcto del problema: **0.75 puntos** (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada)

(b) Cálculo correcto del determinante: **0.5 puntos**.

(c) Justificación de la presencia de una solución única aplicando el teorema de Rouché – Fröbenius: **0.25 puntos**.

(d) Aplicación correcta utilizando la regla de Cramer: **0.5 puntos**.

Pregunta 2 (Calificación máxima: 2 puntos)

(a) Cálculo correcto del determinante: **0.5 puntos**.

(b) Cálculo correcto de la matriz de adjuntos: **1 punto**.

(c) Cálculo correcto de la matriz inversa: **0.5 puntos**.

Pregunta 3 (Calificación máxima: 2 puntos)

(a) Cálculo correcto del determinante: **0.5 puntos**.

(b) Hallar el valor de λ para el que el $|A| = 0$: **0.25 puntos**.

(c) Estudio y justificación correcta de los rangos dependiendo de λ: **1.25 puntos**.

Pregunta 4 (Calificación máxima: 2 puntos)

(a) Cálculo correcto del determinante: **0.25 puntos**.

(b) Justificación de un sistema compatible determinado en $k \neq \pm 2$: **0.25 puntos**.

(c) Justificación de un sistema compatible indeterminado en $k = -2$: **0.5 puntos**.

(d) Justificación de un sistema incompatible en $k = 2$: **0.5 puntos**.

(e) Resolución correcta del sistema en $k = -3$: **0.5 puntos**.

Pregunta 5 (Calificación máxima: 2 puntos)

(a) Hallar el menor que haga que $ran(A) = 3$: **0.25 puntos**.

(b) Justificación de que es un sistema compatible indeterminado aplicando el teorema de Rouché - Fröbenius: **0.5 puntos**.

(c) Correcta resolución del sistema: **1.25 puntos**.

Modelo A

Mates con Rodrolo

Prueba Parcial de Determinantes
Curso: 2024 - 2025
Materia: Matemáticas II

Soluciones

Para poder realizar una autoevaluación de la prueba válida, se recomienda seguir los criterios de calificación citados en las páginas anteriores y evaluar cada punto mencionado en los mismos con rigurosidad.

LAS SOLUCIONES COMIENZAN EN LA SIGUIENTE PÁGINA

Pregunta 1 (Calificación máxima: 2 puntos)

Primero de todo, planteamos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 5y = x + z \\ 5x + 3y + 3z = 222 \\ 3x + 2y + 4z = 168 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 5y + z = 0 \\ 5x + 3y + 3z = 222 \\ 3x + 2y + 4z = 168 \end{cases}$$

Ahora transformamos este sistema de ecuaciones en una matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 4 & 168 \end{array}\right)$$

Por el teorema de Rouché - Fröbenius justificamos que se trata de un sistema compatible determinado (SCD), teniendo solo una solución única:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 62 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 168 \end{vmatrix} = 930 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$$

$$ran(A) = ran(A^*) = \text{nº de incógnitas} = 3 \rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado (SCD)}$$

Y ahora, utilizando la regla de Cramer como nos pide el ejercicio, resolvemos el sistema:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 222 & 3 & 3 \\ 168 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1860 \rightarrow x = \frac{1860}{62} = 30$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 222 & 3 \\ 3 & 168 & 4 \end{vmatrix} = 558 \rightarrow y = \frac{558}{62} = 9$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 5 & 3 & 222 \\ 3 & 2 & 168 \end{vmatrix} = 930 \rightarrow z = \frac{930}{62} = 15$$

Solución: la tarifa de adulto será de 30 €, la tarifa de niño será de 9 € y la tarifa de jubilado será de 15 €.

Pregunta 2 (Calificación máxima: 2 puntos)

Apartado a

Primero de todo, vamos a hacer una fila o columna de tres ceros y un uno. En este caso, será la fila 2 (F_2) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 = C_3 - 3C_4]{C_1 = C_1 - 5C_4} \begin{pmatrix} -24 & 3 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & 5 & -3 & 3 \\ -11 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora sacamos un menor de orden 3 anulando la fila 2 (F_2) y la columna 4 (C_4) de esta matriz transformada:

$$\begin{pmatrix} -24 & 3 & -17 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -13 & 5 & -3 & 3 \\ -11 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -24 & 3 & -17 \\ -13 & 5 & -3 \\ -11 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Y calculamos el adjunto A_{24} porque es el que tiene un 1 en la fila 2 (F_2)

$$A_{24} = 1 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} -24 & 3 & -17 \\ -13 & 5 & -3 \\ -11 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -295$$

Solución: el determinante de la matriz A es -295.

Apartado b

Procedemos a calcular la matriz de adjuntos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9$	$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -6$	$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 29$	$A_{14} = (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -42$
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 5 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -32$	$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 77$	$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -28$	$A_{24} = (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -51$
$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -25$	$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -115$	$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 15$	$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 80$
$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 76$	$A_{42} = (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 149$	$A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -81$	$A_{44} = (-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -137$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 29 & -42 \\ -32 & 77 & -28 & -51 \\ -25 & -115 & 15 & 80 \\ 76 & 149 & -81 & -137 \end{pmatrix}$$

Y por último, calculamos la inversa siguiendo la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{Adj}(A))^T}{|A|}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{-295} & \frac{-32}{-295} & \frac{-25}{-295} & \frac{76}{-295} \\ \frac{-6}{-295} & \frac{77}{-295} & \frac{-115}{-295} & \frac{149}{-295} \\ \frac{29}{-295} & \frac{-28}{-295} & \frac{15}{-295} & \frac{-81}{-295} \\ \frac{-42}{-295} & \frac{-51}{-295} & \frac{80}{-295} & \frac{-137}{-295} \end{pmatrix}$$

Pregunta 3 (Calificación máxima: 2 puntos)

Cogemos un menor de orden 3, ya que el rango máximo de esta matriz va a ser 3, y calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 2\lambda \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+\lambda \end{vmatrix} = -9\lambda + 18$$

Calculamos los valores de λ para los que $|A| = 0$:

$$-9\lambda + 18 = 0 \to 9(-\lambda + 2) = 0 \to \lambda = 2$$

- Si $\lambda \neq 2$, entonces $|A| \neq 0$ y $ran(A) = 3$
- Si $\lambda = 2$, entonces $|A| = 0$ y $ran(A) < 3$
  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to ran(A) = 2$

Pregunta 4 (Calificación máxima: 2 puntos)

Apartado a

Transformamos el sistema de ecuaciones en una matriz

$$\begin{cases} (k+1)x+3y+kz=1 \\ 3x+(k+1)y+2z=k-1 \\ kx+2y+kz=2 \end{cases} \rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} k+1 & 3 & k & 1 \\ 3 & k+1 & 2 & k-1 \\ k & 2 & k & 2 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes y evaluamos para que valor de k el determinante es igual a 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} k-1 & 3 & k \\ 3 & k+1 & 2 \\ k & 2 & k \end{vmatrix} = k^2 - 4$$

$$\mathrm{k}^2 - 4 = 0 \rightarrow k^2 = 4 \rightarrow k = \pm 2$$

- Si $k \neq \pm 2$, entonces $|A| \neq 0$ y $ran(A) = ran(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3 \rightarrow$ $\rightarrow$ Sistema Compatible Determinado (SCD)

- Si $k = 2$, entonces $|A| \neq 0$ y $ran(A) < 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Por el teorema de Rouché - Fröbenius, justificamos que es un sistema compatible indeterminado (SCI) por lo siguiente:

$$ran(A) = ran(A^*) = 2 \neq \text{nº de incógnitas} = 3$$

- Si $k = -2$, entonces $|A| \neq 0$ y $ran(A) < 3$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

  Por el teorema de Rouché - Fröbenius, justificamos que es un sistema compatible indeterminado (SCI) por lo siguiente:

$$ran(A) = ran(A^*) = 2 \neq \text{nº de incógnitas} = 3$$

Apartado b

Vamos a resolver el sistema para $k=-3$ por la regla de Cramer:

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & -3\\ 3 & -2 & 2\\ -3 & 2 & -3\end{vmatrix}=5\rightarrow ran(A)=3$$

$$|A^*|=\begin{vmatrix}3 & -3 & 1\\ -2 & 2 & -4\\ 2 & -3 & 2\end{vmatrix}=-10\rightarrow ran(A^*)=3$$

Por el teorema de Rouché - Fröbenius, justificamos que se trata de un sistema compatible determinado (SCD), habiendo una solución única:

$$ran(A)=ran(A^*)=\text{nº de incógnitas}=3$$

Resolvemos usando la regla de Cramer por comodidad:

$$|A_x|=\begin{vmatrix}1 & 3 & -3\\ -4 & -2 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=-10\rightarrow x=\frac{-10}{5}=-2$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}-2 & 1 & -3\\ 3 & -4 & 2\\ -3 & 2 & -3\end{vmatrix}=5\rightarrow y=\frac{5}{5}=1$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 3 & -2 & -4\\ -3 & 2 & 2\end{vmatrix}=10\rightarrow z=\frac{10}{5}=2$$

Solución: $x=-2, y=1, z=2$.

Pregunta 5 (Calificación máxima: 2 puntos)

Transformamos el sistema en una matriz:

$$\begin{cases} x+3z=0 \\ y-t=0 \\ x+y+2t=0 \\ 2x+2y+3z+t=0 \end{cases} \rightarrow A=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de un menor de orden 3, ya que no se va a cumplir $ran(A^*)=4$ porque hay una columna de 0 en la matriz ampliada:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-3\neq 0 \rightarrow ran(A)=3$$

$$ran(A)=3<\text{n}^{\text{o}}\text{ de incógnitas}=4\rightarrow \text{SCI}$$

Ahora damos a t el valor λ ($t=\lambda$) y calculamos usando la regla de Cramer, descartando la última fila porque no la hemos usado para calcular el determinante y despejando t:

$$\begin{cases} x+3z=0 \\ y=t \\ x+y=-2t \end{cases} \rightarrow A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 1 & 1 & 0 & -2\lambda \end{array}\right)$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ \lambda & 1 & 0 \\ -2\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix}=3\lambda-(-6\lambda)=9\lambda\rightarrow x=\frac{9\lambda}{-3}=-3\lambda$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & -2\lambda & 0 \end{vmatrix}=3\lambda\rightarrow y=\frac{3\lambda}{3}=\lambda$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -2\lambda \end{vmatrix}=-2\lambda-\lambda=-3\lambda\rightarrow z=\frac{-3\lambda}{-3}=\lambda$$

Solución: $x=-3\lambda, y=\lambda, z=\lambda, t=\lambda$.