SISTEMAS DE ECUACIONES

x

TEORÍA

RODRIGO ALCOCER

ÍNDICE

SISTEMAS LINEALES DE 2 INCÓGNITAS

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de igualdades, en este caso 2 ecuaciones porque disponemos de dos incógnitas, las cuales tienen una o varias soluciones comunes. Existen tres métodos para resolverlas: sustitución, reducción e igualación.

RESOLUCIÓN POR SUSTITUCIÓN

El método de sustitución consiste en despejar una variable en alguna de las dos ecuaciones para sustituirla después en la ecuación restante y resolver.

Para verlo, vamos a poner el siguiente ejemplo: $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x+y} + y = x \end{cases}$

En este caso, por comodidad, despejaremos y en la 1ª ecuación:

$$2x - y = 9 \Leftrightarrow y = 2x - 9$$

Ahora sustituimos en la 2ª ecuación:

$$\sqrt{x + 2x - 9} + 2x - 9 = x \Leftrightarrow \sqrt{3x - 9} = 9 - x$$

Tenemos una ecuación irracional, por lo que aislamos la raíz y elevamos al cuadrado ambos miembros:

$$\left(\sqrt{3x-9}\right)^2 = (9-x)^2 \Leftrightarrow 3x - 9 = x^2 - 18x + 81$$

Si operamos, llegaremos a la siguiente ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 21x + 90 = 0$$

Al resolverla nos queda $x = 6$ y $x = 15$. En este caso, como la ecuación de segundo grado ha salido de una ecuación irracional, **tenemos que comprobar los resultados.** Si lo hacemos, nos queda que $x = 6$ es la única solución válida.

En este punto, solo nos queda hallar la y, por lo que recuperamos la ecuación que hemos hecho al despejar en el primer paso:

$$y = 2x - 9\ 12 \cdot 6 - 9 = 12 - 9 = 3$$

Y nos queda que la solución de este sistema es $x = 6$ e $y = 3$.

RESOLUCIÓN POR REDUCCIÓN

El método de reducción consiste en lograr anular alguna de las dos incógnitas para, posteriormente, calcularla.

Para verlos, pongamos un ejemplo: $\begin{cases} 2 \cdot \log(x) - \log(y) = 5 \\ \log x\, y = 4 \end{cases}$

Lo primero que haremos será aplicar la siguiente propiedad de los logaritmos, $\log(A \cdot B) = \log A + \log B$, en la segunda ecuación, quedándonos así:

$$\begin{cases} 2\log(x) - \log(y) = 5 \\ \log(x) + \log(y) = 4 \end{cases}$$

En este caso, vamos a quitarnos $\log(y)$ sumando ambas filas:

$$\begin{array}{c} 2\log(x) - \log(y) = 5 \\ \underline{+\log(x) + \log(y) = 4} \\ 3\log(x) = 9 \end{array}$$

$$3\log(x) = 9 \Leftrightarrow \log(x) = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000$$

Y ahora, a resolver $\log(y)$:

$$\log(x) + \log(y) = 4 \ \Leftrightarrow 3 + \log(y) = 4 \Leftrightarrow \log(y) = 4 - 3 = 1 \Leftrightarrow y = 10^1 = 10$$

Así que las soluciones de este sistema son $x = 1000$ e $y = 10$.

RESOLUCIÓN POR IGUALACIÓN

El método de igualación consiste en igualar la misma variable en ambas ecuaciones para luego resolver la restante.

Para verlos, pongamos un ejemplo: $\begin{cases} 5x - 2y = 2 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

Lo primero, despejar la misma variable en ambas ecuaciones, en este caso la x, quedando de la siguiente forma:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2 + 2y}{5} \\ x = 2 - 2y \end{cases}$$

Ahora, desarrollaremos una ecuación con esas igualdades y operar:

$$\begin{array}{c} \dfrac{2 + 2y}{5} = 2 - 2y \\ 2 + 2y = 5(2 - 2y) \\ 2 + 2y = 10 - 10y \\ 12y = 8 \\ y = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 2 - 2y \\ 2 - 2 \cdot \dfrac{2}{3} = \\ = 2 - \dfrac{4}{3} = \\ = \dfrac{2}{3} \end{array}$$

Las soluciones del sistema son $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{2}{3}$.

SISTEMAS LINEALES DE 3 O MÁS INCÓGNITAS

Podemos encontrarnos también sistemas de 3 o más incógnitas. El número de ecuaciones en un sistema es el número de incógnitas. Para resolverlas podemos utilizar los métodos mencionados antes pero para ser más eficientes y rápidos, utilizaremos el método matricial de Gauss.

Para verlo, vamos a poner un ejemplo y resolverlo: $\begin{cases} 2x+y-2z=7 \\ x+y+z=0 \\ 3x+2y+2z=1 \end{cases}$

Lo primero, convertir este sistema en una matriz de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 2x+y-2z=7 \\ x+y+z=0 \\ 3x+2y+2z=1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Una vez tenemos nuestra matriz, tenemos que lograr una escalera de ceros. Tenemos que lograr lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & d \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \end{array}\right)$$

Vamos a operar:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \widetilde{F_2 \leftrightarrow F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

(nos interesa tener un 1 arriba-izq.)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \widetilde{F_2-2F_1} \\ F_3-3F_1 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \widetilde{F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right)$$

Una vez hemos llegado a nuestra escalera de 0, transformamos nuestra matriz en un sistema de ecuaciones y resolvemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ -y-4z=7 \\ 3z=-6 \end{cases}$$

$$3z=-6 \Leftrightarrow z=-2$$
$$-y-4z=7 \Leftrightarrow -y-4\cdot(-2)=6 \Leftrightarrow y=1$$
$$x+y+z=0 \Leftrightarrow x+1+(-2)=0 \Leftrightarrow x=1$$

Una vez resuelto el sistema, ya tendríamos los resultados de nuestro sistema. En nuestro caso $x=1,\ y=1$ y $z=-2$.