DERIVADAS

$f'(x)$

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

RODRIGO ALCOCER

<u>TIPOS DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y SUS RESOLUCIONES</u>

1. **Problemas donde nos dan la función**.

En el primer tipo de problemas encontramos la función a optimizar dentro del enunciado, además del propio contexto del problema. Asimismo, nos dará la pista de si tenemos que encontrar un máximo o un mínimo.

<u>Ejemplo:</u> En una tienda de golosinas han estudiado que si venden el kilo de caramelos a x €, los beneficios al día serán $B(x) = -12{,}5x^2 + 150x - 250$. ¿A que precio obtiene un beneficio máximo?

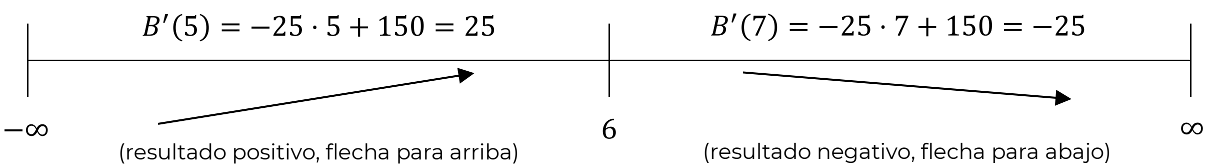
El primer paso, como ya tenemos la función, es derivar la función que nos dan:

$$B'(x) = -25x + 150$$

Una vez derivada la función, igualamos a 0 para poder encontrar los posibles valores de x:

$$-25x + 150 = 0$$
$$-25x = -150$$
$$x = \frac{-150}{-25} = 6$$

Ahora, tendremos que comprobar si este valor de x es un máximo o un mínimo. Para ello, vamos a situar este valor en una recta y vamos a evaluar la función derivada en puntos intermedios:



Si la flecha apunta hacia arriba, entonces el punto es un máximo. De lo contrario, es un mínimo. En este caso, la flecha apunta hacia el 6 hacia arriba, por lo que el 6 es un máximo.

Y respondiendo al problema, <u>el vendedor tendría que vender el kilo de caramelos a **6€** para un beneficio máximo.</u>

2. **Problemas donde hay que plantear la función**.

En el segundo tipo de problemas, el enunciado nos da un dato el cuál los tendremos que relacionar con las distintas variables del problema. Suelen ser problemas de figuras geométricas.

<u>Ejemplo:</u> ¿Cuáles son las dimensiones de un campo rectangular de 3.600 m^2 de superficie para poder cercarlo con una valla de longitud mínima?

El primer paso es analizar todos los datos que nos aporta el enunciado, realizar un dibujo para tener una forma visual del problema y relacionar datos:

Una vez hecho el dibujo, podemos ver deducir dos cosas:

$$\begin{cases} x \cdot y = 3600\, m^2 \text{ es la ecuación del área del rectángulo} \\ 2x + 2y \text{ es la ecuación del perímetro total del rectángulo} \end{cases}$$

Nuestro objetivo es llegar a una función de una única variable, por lo que vamos a utilizar la ecuación que contenga una parte numérica, en este caso la del área, para poder despejar una variable. Una vez hecho esto, convertiremos la ecuación sobrante en una función sustituyendo:

$$x \cdot y = 3.600 \Rightarrow y = \frac{3.600}{x}$$

$$f(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \left(\frac{3.600}{x}\right) = \frac{2x^2 + 7200}{x}$$

Una vez encontrada nuestra función, derivamos e igualamos a 0:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 7200}{x^2} = \frac{2x^2 - 7200}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 7200}{x^2} = 0$$

$$\frac{2x^2 - 7200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7200 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 60$$

Ahora, tendremos que comprobar si este valor de x es un máximo o un mínimo. Para ello, vamos a situar este valor en una recta y vamos a evaluar la función derivada en puntos intermedios:

$f'(-61) = \frac{2 \cdot (-61)^2 - 7200}{(-61)^2} = 0{,}065$	$f'(30) = \frac{2 \cdot (30)^2 - 7200}{(30)^2} = -6$	$f'(61) = \frac{2 \cdot (61)^2 - 7200}{(61)^2} = 0{,}065$
$-\infty$ — -60	-60 — 60	60 — ∞
(resultado positivo, flecha para arriba)	(resultado negativo, flecha para abajo)	(resultado positivo, flecha para arriba)

Si la flecha apunta hacia arriba, entonces el punto es un máximo. De lo contrario, es un mínimo. En este caso buscamos que el perímetro total sea **mínimo**, así que 60 es el valor que buscamos porque es un mínimo.

Por último, tomaremos de nuevo la ecuación que nos ha quedado de despejar y para reemplazar la x por 60 y obtener el valor de y.

$$y = \frac{3600}{x} \Leftrightarrow y = \frac{3600}{60} = 60$$

Y respondiendo al problema, <u>las dimensiones del campo son de **60 m de ancho y 60 m de largo**</u>.

El problema nos decía que era rectangular pero las dimensiones son de una figura cuadrada. Lo que pasa es que un cuadrado es un caso particular de rectángulo, ya que cumple con la definición de rectángulo de ser un cuadrilátero (polígono de cuatro lados) cuyos ángulos son rectos (de 90°).

3. **Problemas condicionados**.

En el tercer tipo de problemas el enunciado nos presenta una situación y poco después una condición que afecta a la situación anterior. En estos casos tenemos que agrupar iguales.

<u>Ejemplo:</u> Un agricultor sabe que si vende hoy su cosecha podrá recoger 50.000 kg, que le pagarán al precio de 20 céntimos por kg. Por cada día que espere, la cosecha disminuirá en 800 kg, pero el precio aumentará en 3 céntimos por kg. ¿Cuántos días deberá esperar para obtener el mayor beneficio?

El primer paso es ver cuáles son los distintos tipos de datos y la variable. En este caso el problema nos habla de kilos y de céntimos y la variable es los días a esperar.

Una vez hayamos analizado el enunciado, empezamos a desarrollar la función. Lo primero que nos dice es que puede recoger 50.000 kilos pero que por cada día que pase, disminuyen 800 kilos. Luego por otro lado nos dicen que pagarán 20 céntimos el kilo pero por cada día que pase se suman 3 céntimos. Por lo que la función nos queda así:

$$f(x) = (50000 - 800x) \cdot (20 + 3x)$$

Por un lado tenemos los kilos cosechados y por el otro los céntimos a los que se paga el kilo. Si operamos un poquito, para que luego derivar nos sea más fácil quedaría tal que así:

$$f(x) = -2400x^2 + 134000x + 1000000$$

El segundo paso, como en los casos anteriores, es derivar e igualar a 0 para encontrar los valores de x. Y nos quedaría así:

$$f'(x) = -4800x + 134000$$
$$-4800x + 134000 = 0$$
$$x = \frac{-134000}{-4800} = \frac{335}{12} \approx 27,92$$

Ahora, estudiamos en la derivada si este valor de x es un máximo o un mínimo:

$f'(25) = -4800 \cdot 25 + 134000 = 14000$	$f'(29) = -4800 \cdot 29 + 134000 = -400$
$\nearrow$	$\searrow$

$-\infty$ (resultado positivo, flecha para arriba) $27,92$ (resultado negativo, flecha para abajo) ∞

En este problema buscamos los días a esperar para obtener un beneficio **máximo** y como la flecha apunta hacia arriba en el 27,92 podríamos decir que ese es el número de días a esperar para obtener un beneficio máximo. Como no podemos esperar días decimales, redondearemos diciendo 28 días.

Y respondiendo al problema, tendremos que esperar 28 días si queremos obtener un beneficio máximo.

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON SOLUCIONES NUMÉRICAS

LOS PROBLEMAS CON ESTE ICONO 🏛 SON EJERCICIOS DE SELECTIVIDAD

1. La producción de fresas en un invernadero depende de la temperatura t, en °C, del mismo según muestra la función:
$$P(t) = -t^3 + 27t^2 + 120t + 60$$
siendo $P(t)$ los kilos de fresa producidos dependiendo de la temperatura. ¿A qué temperatura se conseguirá el máximo número de kilos de fresas en el invernadero?
Solución: 20°C

2. En una planta depuradora de aguas residuales la función que determina el coste de funcionamiento anual en función de la cantidad de agua depurada es:
$$C(x) = 35x^2 - 140x + 2600$$
donde $C(x)$ son los costes expresados en euros y x es el volumen de agua depurada en un año en miles de metros cúbicos. Calcula:
   a) La cantidad de agua depurada que hace mínimo el coste.
   b) El valor de dicho coste mínimo.
   c) El coste de la depuración de agua de una localidad de 2.000 habitantes, si cada uno genera al año 8 metros cúbicos de agua para depurar.

   Solución: a) 2.000 m^3, b) 2.460€, c) 9.320€

3. Un agricultor estima que si vende el kilogramo de cebollas a x céntimos, entonces su beneficio por kilogramo será:
$$B(x) = -x^2 + 100x - 2475$$
   a) ¿A cuánto tiene que vender el kilo para un beneficio máximo?
   b) Si dispone de 50.000 kg de cebollas, ¿cuál será el beneficio?

   Solución: a) 50 cents., b) 12.500€

4. Una agencia inmobiliaria maneja 40 apartamentos. Cuando el alquiler es de 270 euros mensuales, todos están ocupados, mientras que por cada 20 euros de aumento se produce, en término medio, una vacante. Cada apartamento ocupado requiere un promedio de 10 euros mensuales de conservación y servicios.
   a) ¿A cuánto se debe cobrar el alquiler?
   b) ¿Cuál es el beneficio obtenido?

   Solución: a) 540€, b) 14.045€

5. Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 céntimos de euro la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada céntimo que aumenta el precio, vende dos helados menos al día. El coste de producción por unidad es de 40 céntimos.
    a) ¿A qué precio tiene que vender cada helado para obtener el máximo beneficio?
    b) ¿Cuál es el beneficio obtenido?

    Solución: a) 95 cents., b) 60,50€

6. Una huerta tiene actualmente 24 cerezos que producen 600 cerezas cada uno. Se calcula, que por cada cerezo adicional plantado, la producción por árbol disminuye en 15 cerezas.
    a) ¿Cuál debe ser el número total de cerezos debe tener la huerta para que la producción sea máxima?
    b) ¿Cuál será esa producción?

    Solución: a) 32 cerezos, b) 15.360 cerezas

7. 🏛 En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función $P(x) = x(122 - x)$. Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, calcula:
    a) ¿Cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales?
    b) ¿De cuánto serían estas ganancias?

    Solución: a) 60 hogazas, b) 3.100€

8. 🏛 La confitería de una pequeña localidad elabora un dulce típico, una tarta de hojaldre y crema, para venderlo durante las fiestas del pueblo. En las fiestas del año anterior fijó el precio de venta en 15 € la unidad, vendiendo así 20 tartas en total. Este año quiere bajar el precio y calcula que por cada euro menos, venderá 4 tartas más. Por otro lado, la elaboración de cada tarta le supone un gasto de 6 euros.
    a) ¿A qué precio debe vender cada tarta para maximizar los beneficios obtenidos con este dulce durante las fiestas?
    b) ¿Qué beneficios se alcanzan?

    Solución: a) 60 hogazas, b) 3.100€

9. Un agricultor dispone de 3.000€ para cercar un terreno rectangular, usando el río adyacente como lado con el fin de que el recinto sólo necesite 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5€ por metro instalado, y para cada uno de los lados restantes es de 3€ por metro instalado. Calcula las dimensiones del terreno para que el área sea máxima de acuerdo con su presupuesto.
Solución: 300 m y 250 m

10. 🏛 Los estudiantes de un centro docente han organizado una rifa benéfica, con la que pretenden recaudar fondos para una ONG. Han decidido sortear un ordenador portátil, que les cuesta 600 euros. Quieren fijar el precio de la papeleta, de modo que la recaudación sea máxima. Saben que si el precio de cada una es 2 euros, venderían 5000 papeletas, pero que, por cada euro de incremento en dicho precio, venderán 500 papeletas menos.
    a) ¿A qué precio deben vender la papeleta?
    b) Si el único gasto que tienen es la compra del ordenador, ¿cuánto dinero podrán donar a la ONG?

    Solución: a) 6€, b) 17.400€

11. 🏛 Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto. ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?
Solución: 45€

12. 🏛 Una agencia organiza un viaje para el que ya se han inscrito 25 personas Ha contratado un avión por 3.000€ y además debe asumir unos gastos por persona de 450€. Cada viajero debe pagar 1.500€ La agencia propone la siguiente oferta: por cada nuevo viajero inscrito, rebajará en 6 euros el precio del viaje.
    a) ¿Cuál será el número óptimo de viajeros que maximice los beneficios?
    b) ¿A cuánto ascienden esos beneficios?

    Solución: a) 100 personas, b) 57.000€

13. Un vendedor de bolígrafos ha observado que si vende sus bolígrafos a 15 céntimos, es capaz de vender 1 000 unidades diarias, pero que por cada céntimo que aumente el precio, disminuye en 100 unidades la venta diaria de bolígrafos. Por otra parte a él le cuesta 7,5 céntimos fabricar un bolígrafo. Averiguar qué precio ha de poner para obtener el máximo beneficio.
Solución: 12,5 céntimos

14. Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudió que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 clientes. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de clientes previsto anteriormente se incrementaría en 150.
    a) ¿Cuál será el precio óptimo de tarifa que maximice los beneficios?
    b) ¿A cuánto ascienden el número de clientes y los beneficios?
Solución: a) 34€, b) 5.100 clientes y un beneficio de 173.400€

15. Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes. Las alambradas de las divisiones deben quedar paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que su área sea la mayor posible?
Solución: 40 m de largo y 20 m de ancho

16. 🏛 El coste de un marco para una ventana rectangular es de 50 euros por cada metro de lado vertical y de 25 euros por cada metro de lado horizontal. Se desea construir una ventana de superficie igual a 2 m^2.
    a) Calcula las dimensiones de la ventana para que coste sea el mínimo posible.
    b) Calcula el coste mínimo
Solución: a) 2 m de ancho y 1 m de alto, b) 200€

17. Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.
Solución (aprox.): 20,65 cm de ancho y 12,91 cm de alto

18. En una oficina de correos sólo admiten paquetes con forma de prisma rectangular, tales que la anchura sea igual a la altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del prisma para que el volumen sea máximo.
Solución: 24 cm de alto, 24 cm de ancho y 24 cm de largo.

19. 🏛 Durante el anterior periodo de rebajas, una tienda ofreció un artículo a 50 euros la unidad y las ventas fueron de 20 unidades. Un estudio revela que por cada euro que disminuya el precio en las próximas rebajas, conseguirá vender 4 unidades más. Por otro lado la tienda ha asumido un coste de 35 euros por cada unidad del producto.
    a) ¿Qué precio de venta por unidad debe fijar para maximizar los beneficios obtenidos durante el nuevo periodo de rebajas?
    b) ¿A cuánto ascienden los beneficios?
Solución: a) 45€/unidad, b) 400€

20. 🏛 Se quiere diseñar una lata de refresco de forma cilíndrica, con tapas inferior y superior. El material para las tapas tiene un coste de 5 euros cada cm^2 y el material para el resto del cilindro tiene un coste de 3 euros cada cm^2. El volumen de la lata es de 90π cm^3.
    a) ¿Qué dimensiones tiene que tener la lata para que el coste del material sea mínimo?
    b) ¿Cuánto es el coste de una lata?
Solución: a) 3 cm de radio y 10 cm de altura, b) 848,23€