ECUACIONES

x

TEORÍA

RODRIGO ALCOCER

ÍNDICE

ECUACIONES POLINÓMICAS.......... 3
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO 3
ECUACIONES BICUADRADAS.......... 3
ECUACIONES DE GRADO MAYOR 4
ECUACIONES CON FRACCIONES ALGEBRÁICAS.......... 6
ECUACIONES IRRACIONALES O CON RADICALES.......... 7
ECUACIONES EXPONENCIALES 8
ECUACIONES LOGARÍTMICAS.......... 10

ECUACIONES POLINÓMICAS

Existen varios tipos de ecuaciones polinómicas: de primer grado, de segundo grado, bicuadradas o de grado mayor. En este PDF nos vamos a enfocar solo en las tres últimas.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Las ecuaciones de segundo grado tienen este aspecto, $ax^2 + bx + c = 0$, y se resuelven utilizando la fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para entender el concepto, vamos a poner un ejemplo: $3x^2 - 8x - 3 = 0$

El primer paso es identificar que es a, b y c. En este caso:

$$a = 3$$
$$b = -8$$
$$c = -3$$

(**MUY IMPORTANTE EL SIGNO)**

Ya solo queda sustituir valores en la fórmula y resolver:

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-3)}}{2 \cdot 3} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - (-36)}}{6} = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{8 \pm 10}{6} = < \begin{matrix} \frac{8+10}{6} = \frac{18}{6} = 3 \\ \frac{8-10}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

Por lo que nos queda que los posibles valores de x son 3 y $-\frac{1}{3}$.

ECUACIONES BICUADRADAS

Las ecuaciones bicuadradas tienen este aspecto, $ax^4 + bx^2 + c = 0$, y se resuelven haciendo un cambio de variable $x^2 = t$ para transformarlas en una ecuación de segundo grado y resolver con la fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para entender el concepto, vamos a poner un ejemplo: $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

El primer paso es realizar el cambio de variable $x^2 = t$:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 10t + 9 = 0$$

Una vez hecho el cambio de variable, identificamos que es a, b y c:

$$a = 1$$
$$b = -10$$
$$c = 9$$

(**MUY IMPORTANTE EL SIGNO)**

Sustituimos en la fórmula:

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = < \begin{matrix} \frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ \frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{matrix}$$

Ahora que tenemos los valores de t, tenemos que deshacer el cambio de variable que hicimos antes para poder sacar los valores de x. Para ello donde haya una t pondremos los valores que acabamos de obtener arriba. Quedaría así:

$$x^2 = 9 \qquad\qquad x^2 = 1$$
$$x = \pm\sqrt{9} \qquad\qquad x = \pm\sqrt{1}$$
$$x = \pm 3 \qquad\qquad x = \pm 1$$

Así que los valores de x para la ecuación $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ son 1, -1, 3 y -3.

<u>ECUACIONES DE GRADO MAYOR</u>

Se consideran ecuaciones de grado mayor cuando el coeficiente de mayor grado, el exponente de mayor número de la x, es mayor que 2. Eso sí, no hay que confundirlas con las bicuadradas, donde el coeficiente de mayor grado es el doble que el de menor.

Para resolver este tipo de ecuaciones hay que comprobar antes 3 cosas:

1. ¿Se puede extraer factor común?
2. ¿Es una identidad notable?
3. ¿Es algún tipo de ecuación que hayamos visto anteriormente (segundo grado o bicuadrada)?

En caso de que se diese alguno de estos casos, luego tendríamos que volver a comprobar todo esto otra vez.

Si no se diese, tendríamos que aplicar la regla de Ruffini para ir encontrando los valores de x.

Pongamos un ejemplo para verlo más claro todo esto: $x^5 - 13x^3 + 36x = 0$

Primero de todo, comprobar si se cumple alguno de los 3 primeros casos:

1. ¿Se puede extraer factor común?
   SÍ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{x \cdot \left(x^4 - 13x^2 + 36\right) = 0}$

Vemos que hemos podido sacar factor común. Ahora tenemos que ver, con la ecuación que acabamos de obtener, si se cumple otro caso:

1. ¿Se puede extraer factor común?
   NO
2. ¿Es una identidad notable?
   NO
3. ¿Es algún tipo de ecuación que hayamos visto anteriormente (segundo grado o bicuadrada)?
   SÍ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{\left(x^4 - 13x^2 + 36\right) = 0}$ **es una ecuación bicuadrada**

Nos damos cuenta de que nuestra ecuación $x \cdot (x^4 - 13x^2 + 36) = 0$ está "*semifactorizada*". Tenemos que igualar a 0 cada factor para obtener los valores de x. Es decir, $x = 0$ (primer resultado) y $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

La bicuadrada la podemos resolver como hemos visto previamente pero voy a resolverla utilizando Ruffini para verlo también:

	1	0	-13	0	36
2		+2	+4	+(-18)	+(-36)
	1	2	-9	-18	$\boxed{0}$
-2		+(-2)	+0	+18	
	1	0	-9	$\boxed{0}$	
3		+3	+9		
	1	3	$\boxed{0}$		
-3		+(-3)			
	1	$\boxed{0}$			

Las raíces del término independiente, que son los números de la columna de la izquierda, son los resultados de x que estamos buscando. Por lo que los resultados de la ecuación $x^5 - 13x^3 + 36x = 0$ serían $x = 0,\ x = 2,\ x = -2, x = 3$ y $x = -3$.

ECUACIONES CON FRACCIONES ALGEBRÁICAS

Para resolver una ecuación con denominadores algebraicos, eliminamos sus denominadores multiplicando los dos miembros por el mínimo común múltiplo y resolvemos la ecuación polinómica obtenida. Tenemos que **comprobar las soluciones obtenidas obligatoriamente.**

Veamos este tipo de ecuaciones con un ejemplo: $\frac{2x-3}{x^2-5x}+\frac{x+4}{x}=\frac{3}{4}$

Lo primero de todo, encontrar el mínimo común múltiplo entre los miembros. En este caso es $4x(x-5)$ por lo que multiplicaremos todos los miembros por él para eliminar los denominadores:

$$4(2x-3)+4(x+4)(x-5)=3(x^2-5x)$$

Si operamos, queda tal que así: $x^2+19x-92=0$. Esto es una ecuación de segundo grado, por lo que vamos a operar con su fórmula:

$$x=\frac{-19\pm\sqrt{361+368}}{2}=\frac{-19\pm 27}{2}=<_{4}^{-23}$$

Ahora tenemos que comprobar esos resultados sustituyendo en la ecuación original, $\frac{2x-3}{x^2-5x}+\frac{x+4}{x}=\frac{3}{4}$:

$$\frac{2\cdot(-23)}{(-23)^2-5\cdot(-23)}+\frac{(-23)+4}{(-23)}=\frac{3}{4} \qquad \frac{2\cdot 4}{4^2-5\cdot 4}+\frac{4+4}{4}=\frac{3}{4}$$

En ambos casos se cumple la igualdad con ambos valores, por lo que $x=-23$ y $x=4$ son soluciones válidas.

ECUACIONES IRRACIONALES O CON RADICALES

Para resolver una ecuación irracional, tenemos que aislar el radical y elevar al cuadrado a ambos lados para deshacer la raíz. Este paso lo tenemos que repetir hasta deshacernos de todos los radicales. Como al elevar al cuadrado puede aparecer alguna raíz falsa, tenemos que **comprobar las soluciones obtenidas obligatoriamente.**

Veamos este tipo de ecuaciones con un ejemplo: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+7}=4$

Lo primero despejar las raíces y elevar al cuadrado. En este caso, al haber dos, despejaremos primero una y después la otra:

$$\sqrt{2x-3}=4-\sqrt{x+7}$$
$$2x-3=16+(x+7)-8\sqrt{x+7}$$

Ahora aislaremos la otra y elevaremos al cuadrado ambos miembros:

$$x-26=-8\sqrt{x+7}$$
$$x^2-52x+676=64(x+7)$$
$$x^2-116x+228=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado y **comprobamos las soluciones en la ecuación original:**

$$x=\frac{116\pm\sqrt{13456-4\cdot 1\cdot 228}}{2}=\frac{116\pm\sqrt{12544}}{2}=\frac{116\pm 112}{2}=<^{114}_{2}$$

$x=114\rightarrow\sqrt{2\cdot 114-3}+\sqrt{114+7}=15+11\neq 4\rightarrow x=114$ no es válida.

$x=2\rightarrow\sqrt{2\cdot 2-3}+\sqrt{2+7}=1+3=4\rightarrow x=2$ es válida.

La solución de la ecuación es $x=2$ y es única.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas donde la incógnita se encuentra en el exponente. Dependiendo de cómo sea la ecuación, se resolverá de una forma o de otra. Hay 4 tipos de ecuaciones exponenciales y vamos a ver como se resuelve cada una:

a) El primer ejemplo es: $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$

Si observamos bien la ecuación, nos podemos dar cuenta que el 2° miembro lo podemos transformar en un exponente de base 3:

$$\frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$

Entonces la ecuación nos queda: $3^{1-x^2} = 3^{-3}$. Como tenemos la misma base a ambos lados, las podemos anular, quedándonos la siguiente ecuación:

$$1 - x^2 = -3$$

Ahora tan solo quedaría resolver y nos quedaría que las soluciones de la ecuación original, $3^{1-x^2} = \frac{1}{27}$, son $x = -2$ y $x = 2$.

b) El segundo ejemplo es: $5^{x^2-5x+6} = 1$

En este caso, el 1 del segundo miembro lo podemos transformar en potencia de base 5 ya que cualquier número elevado a 0 es igual a 1. Así que $1 = 5^0$ y la ecuación nos queda así: $5^{x^2-5x+6} = 5^0$.

Como tenemos la misma base en ambos miembros, anulamos y nos quedamos con los exponentes, quedándonos una ecuación de segundo grado para resolver: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = <^{2}_{3}$$

Las soluciones de la ecuación original, $5^{x^2-5x+6} = 1$, son $x = 2$ y $x = 3$.

c) El tercer ejemplo es: $3^{1-x^2} = 2$

En esta ecuación no podemos dejar ambos miembros en potencias de una misma base por lo que tomaremos logaritmos y aplicaremos sus reglas:

$$\ln\left(3^{1-x^2}\right) = \ln(2) \Leftrightarrow (1-x^2)\cdot\ln(3) = \ln(2)$$

Ahora tan solo nos queda despejar x y resolver. Al estar utilizando logaritmos, vamos a necesitar de la calculadora:

$$(1-x^2)\cdot\ln(3) = \ln(2)$$
$$1-x^2 = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$$
$$x^2 = 1-\frac{\ln(2)}{\ln(3)} \approx 0{,}37$$
$$x = \pm\sqrt{0{,}37} = \pm 0{,}61$$

Así que las soluciones de esta ecuación quedan $x = 0{,}61$ y $x = -0{,}61$.

d) Y el cuarto y último ejemplo es: $2^x + 2^{x+1} = 12$

En este caso vamos a aplicar las propiedades de los exponentes y un cambio de variable: $2^x = y$.

La ecuación la podemos transformar y dejarla de la siguiente forma:

$$2^x + 2^x\cdot 2^1 = 12 \xLeftrightarrow[\text{cambio de variable } 2^x=y]{} y + y\cdot 2 = 12 \Leftrightarrow 3y = 12 \Leftrightarrow y = 4$$

Ahora solo nos queda deshacer el cambio de variable:

$$2^x = y \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$$

Así que la solución de $2^x + 2^{x+1} = 12$ es $x = 2$.

ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Las ecuaciones logarítmicas son aquellas donde la incógnita está en una expresión afectada por un logaritmo. Se resuelven teniendo en cuenta las propiedades de los logaritmos y hay que **comprobar las soluciones obtenidas obligatoriamente** ya que no existen los logaritmos de números negativos. Esto **NO SIGNIFICA** que no pueda haber resultados negativos. Por eso tenemos que comprobarlo.

Para verlo, vamos a poner un ejemplo: $2\log_{10}(x) = \log_{10}(10-3x)$

Lo primero que haremos será tener en cuenta la propiedad de los exponentes en los logaritmos, $a \cdot \log_b(x) = \log_b(x^a)$, para operar el primer miembro de la ecuación:

$$2\log_{10}(x) = \log_{10}(x^2)$$

Y la ecuación nos queda $\log_{10}(x^2) = \log_{10}(10-3x)$. Como tenemos la misma base en los logaritmos de ambos lados, nos podemos olvidar de ellos y dejar la ecuación de la siguiente forma:

$$x^2 = 10 - 3x$$

Si movemos todo a un lado e igualamos a 0, nos queda una ecuación de segundo grado que tendremos que operar:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} = <^{2}_{-5}$$

Si realizamos la comprobación sustituyendo donde haya x por estos valores, nos daremos cuenta que $x = -5$ no cumple la igualdad porque no existe el $\log_{10}(-5)$.

Dicho esto, podemos decir que la solución de la ecuación logarítmica $2\log_{10}(x) = \log_{10}(10-3x)$ es $x = 2$.