# Megoldások

## ▪ 1. feladat

Jelölje $x$ a kivágott négyzetek oldalát. Ekkor a doboz térfogata: $V(x) = x(1-2x)(2-2x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$, ahol $0 < x < \frac{1}{2}$. A $V$ függvény maximumát keressük.

$V'(x) = 12x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \approx 0.211$ vagy $x_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \approx 0.789$. A $V$ függvénynek $x_1$-ben lehet maximuma, $x_2$ a feladat szövege miatt nem jöhet szóba.
$V''(x) = 24x - 12$ és $V''(x_1) = -4\sqrt{3} < 0$, tehát itt valóban maximum van.

## ▪ 2. feladat

Jelölje $x$ az egyenes szakaszok hosszát és $r$ a félkörívek sugarát. Ekkor a futópálya hossza $400 = 2x + 2r\pi$. A focipálya területe $2rx$. Az egyenletből például $x$-et kifejezve, $x = 200 - r\pi$, így keressük a $T(r) = 2r(200 - r\pi)$ függvény maximumát. $T'(r) = 400 - 4\pi r = 0 \Leftrightarrow r = \frac{100}{\pi}$, itt lehet szélsőérték. $T''(r) = -4\pi < 0$, tehát ez valóban maximum. A focipálya területe akkor maximális, ha a félkörívek sugara $r = \frac{100}{\pi} \approx 31, 83$ m, az egyenes szakaszok hossza $x = 100$ m.

## ▪ 3. feladat

Az $f(x) = \left(100 - 30(x-1)^2\right) \cdot 50(x-1) \cdot \frac{1}{100} = -35 + 5x + 45x^2 - 15x^3$ függvény maximumát keressük. $f'(x) = 5 + 90x - 45x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pm\sqrt{10}}{3}$. A lehetséges szélsőértékhely $\frac{3+\sqrt{10}}{3} \approx 2.05$, mivel a negatív gyök nyilván nem jöhet szóba. Könnyen látható, hogy ebben a pontban a derivált előjelet vált (vagy a második derivált negatív), így itt valóban maximum van. Tehát a bérek 2.05-szörösére emelésével érhető el a legtöbb szavazat.

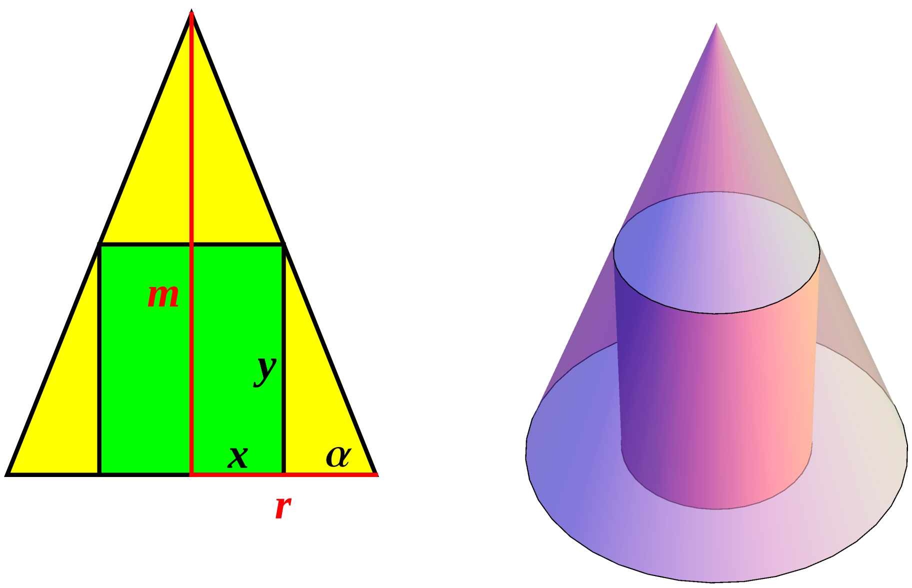
## ▪ 4. feladat

1. megoldás: Jelölje $a$ és $b$ a derékszögű háromszög befogóit. Ekkor $a^2 + b^2 = 100$ és a területe $\frac{ab}{2}$. Az egyenletből $b$-t kifejezve, keressük a $T(a) = \frac{1}{2} a \sqrt{100 - a^2}$ függvény maximumát, ahol $0 < a < 10$.
$T'(a) = -\frac{a^2}{2\sqrt{100-a^2}} + \frac{\sqrt{100-a^2}}{2} = \frac{50-a^2}{\sqrt{100-a^2}} = 0$, ahonnan $a = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ (mivel $a > 0$), itt lehet szélsőérték. Könnyen ellenőrizhető, hogy ebben a pontban a derivált előjelet vált (azaz $T'(a) > 0$, ha $a < 5\sqrt{2}$ és $T'(a) < 0$, ha $a > 5\sqrt{2}$), tehát a háromszög területe akkor maximális, ha $a = b = 5\sqrt{2} \approx 7, 1$ cm.

2. megoldás: Felhasználva a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenséget, $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}$, azaz $\frac{100}{2} \geq ab = 2T$. Innen látható, hogy a háromszög területe: $T \leq 25$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a^2 = b^2$, azaz $a = b = 5\sqrt{2}$.

## 5. feladat

A kúp magassága $m = 5$, alapkörének sugara $r = 2$. Jelölje $x$ a henger alapkörének sugarát, $y$ a henger magasságát és $\alpha$ a kúp alkotójának az alapkör síkjával bezárt szögét. Ekkor $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{m}{r} = \frac{y}{r-x}$. A henger térfogata, amelynek a maximumát keressük: $V(x) = x^2\,y = \frac{5}{2}\,x^2(2-x) = -\frac{5\,x^3}{2} + 5\,x^2$, ahol $0 < x < 2$. Ekkor $V'(x) = -\frac{15\,x^2}{2} + 10\,x = 0$, ahonnan $x = \frac{4}{3}$ (mivel $x > 0$). Ebben a pontban valóban maximum van, mert $V''(x) = -15\,x + 10$, így $V''\left(\frac{4}{3}\right) = -10 < 0$. A maximális térfogatú henger sugara $x = \frac{4}{3}$, magassága $y = \frac{5}{3}$.




## 6. feladat

A fizetendő adó $10^{13} \cdot y$ forint lenne, de ebből nem fizetnek be $10^{13} \cdot y \cdot y^3$ forintot. A befizetett adó a kettő különbsége, így keressük az $f(y) = 10^{13}\,y\left(1-y^3\right)$ függvény maximumát. $f'(y) = 10^{13}\left(1 - 4\,y^3\right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \approx 0.63$, itt lehet szélsőérték. Ebben a pontban a második derivált negatív, tehát itt valóban maximum van, az adókulcsot 63 %-ra kell állítani, hogy a lehető legtöb pénz folyjon be.

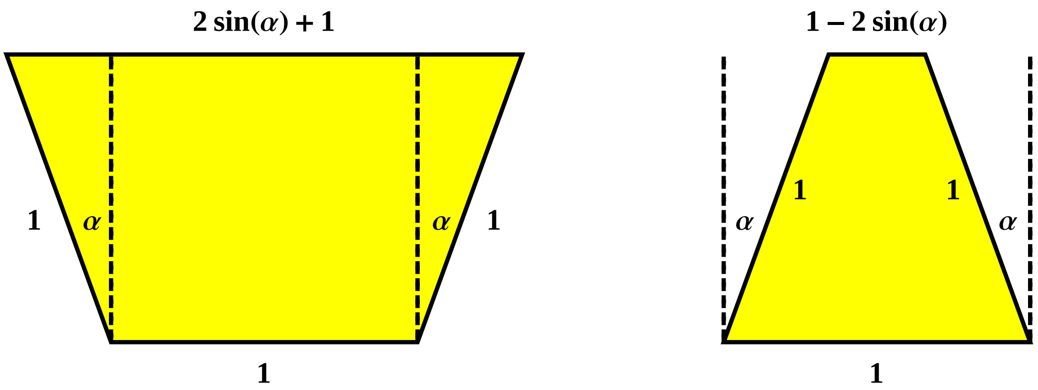
## 7. feladat

Jelölje $\alpha$ a trapéz szárainak a függőlegessel bezárt szögét. Ekkor a trapéz magassága $\cos\alpha$. Ha a szárak párhuzamosak, akkor a trapéz rombusz, így területe akkor maximális, ha négyzet (területe $1 \cdot \cos\alpha$, ami $\alpha = 0$-nál maximális.)

Ha a szárak nem párhuzamosak, akkor a szemközti oldal hossza $1 - 2\sin\alpha$, ha a szárak "befelé" hajlanak, és $1 + 2\sin\alpha$, ha a szárak "kifelé" hajlanak. Összefoglalva, tekinthetjük úgy, hogy a szemközti oldal hossza

$1 + 2\sin\alpha$, ahol $\alpha$ negatív is lehet, $\alpha = -\frac{\pi}{6}$-nál kapnánk szabályos háromszöget.

Keressük a $T(\alpha) = \frac{1+(1+2\sin\alpha)}{2}\cos\alpha = (1+\sin\alpha)\cos\alpha$ függvény maximumát a $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ intervallumon. $T(\alpha) = \cos\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, így a $T'(\alpha) = -\sin\alpha + \cos 2\alpha = 0$ egyenletet kell megoldanunk. Felhasználva, hogy $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$-ra a $-2\sin^2\alpha - \sin\alpha + 1 = 0$ másodfokú egyenlet adódik, ahonnan $\sin\alpha = -1$ vagy $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Az értelmezési tartománnyal összevetve azt kapjuk, hogy $\alpha = \frac{\pi}{6}$-nál lehet a függvénynek maximuma. A második derivált $T''(\alpha) = -\cos\alpha - 2\sin 2\alpha$ és $T''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$, tehát itt valóban maximum van. Ekkor a száraknak a hosszabbik alappal bezárt szöge $\frac{\pi}{3}$.




### ■ 8. feladat

Ha egy vödörbe $L$ liter víz fér, akkor $\frac{10\,000}{L}$ fordulóra lesz szükség, ami $\frac{10\,000}{L}\left(64 + L^2\right)$ ideig tart. Tehát keressük az $F(L) = 10\,000\left(\frac{64}{L} + L\right)$ függvény minimumát, ahol $L > 0$. $F'(L) = 10\,000\left(1 - \frac{64}{L^2}\right) = 0$, ahonnan $L = 8$ a lehetséges szélsőértékhely. Mivel $F''(L) = 10\,000 \cdot \frac{128}{L^3}$ és $F''(8) > 0$, ezért $F$-nek itt valóban minimuma van.

### ■ 9. feladat

Az $f(t) = 2t + 10\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ függvény minimumát keressük, ahol $t > 0$. $f'(t) = 2 - \frac{10}{t^2} = 0$, ahonnan $t = \sqrt{5} \approx 2.24$, itt lehet szélsőérték. Mivel $f''(t) = \frac{20}{t^3}$ és így $f''\left(\sqrt{5}\right) > 0$, ezért ebben a pontban valóban minimuma van a függvénynek.

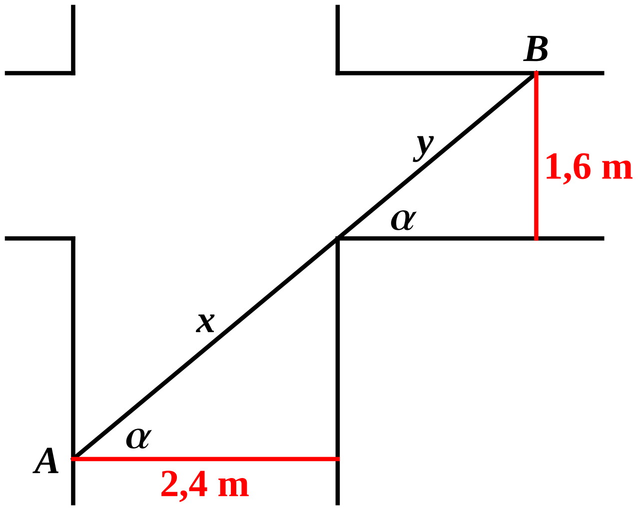
### ■ 10. feladat

Jelölje AB a létrát. Az ábra épp a maximális hosszúságú létrát szemlélteti fordulás közben. Az AB szakasz $x$ és $y$ része $\alpha$-val kifejezhető:

$\mathrm{AB} = f(\alpha) = \frac{2{,}4}{\cos\alpha} + \frac{1{,}6}{\sin\alpha}$. A szélsőérték meghatározásához deriváljuk $f(\alpha)$-t:

$f'(\alpha) = \frac{2{,}4\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{1{,}6\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{0{,}8}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\left(3\sin^3\alpha - 2\cos^3\alpha\right)$.

$f'(\alpha) = 0$, ha $3\sin^3\alpha = 2\cos^3\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 0.8736$, $\alpha \approx 41\,°$. AB = 3, 2 + 2, 4 = 5, 6 m.




## 11. feladat

A hajó 1 óra alatt $v$ kilométert tesz meg, ezalatt $A+B$ forint a kiadás. A kilométerenkénti költség: $f(v) = \frac{A+B}{v} = 0,03\,v^2 + \frac{480}{v}$. Szélsőérték ott lehet, ahol $f'(v) = 0,06\,v - \frac{480}{v^2} = 0$, azaz $v = 20$.
$f''(v) = 0,06 + \frac{960}{v^3}$, így $f''(20) > 0$, ezért itt valóban minimum van, a kilométerenkénti költség $v = 20$ km/h-s sebességnél a legkisebb.

## 12. feladat

Jelölje $r$ a félkör sugarát, ekkor a téglalap vízszintes oldala $2\,r$. A téglalap függőleges oldalát jelölje $x$. Az ablak kerülete $K = 2\,x + 2\,r + r\,\pi$, területe $T = \frac{1}{2}\,r^2\,\pi + 2\,r\,x$. Az első egyenletből $2\,x$-et kiefejezve, keressük a $T(r) = \frac{1}{2}\,r^2\,\pi + r(K - 2\,r - r\,\pi) = K\,r - \frac{1}{2}\,(4+\pi)\,r^2$ függvény maximumát. $T'(r) = K - (4+\pi)\,r = 0$, ahonnan $r = \frac{K}{4+\pi}$ a lehetséges maximumhely. Mivel $T''(r) = -(4+\pi) < 0$, ezért itt valóban maximum van, és ekkor $x = \frac{K}{4+\pi}$.