Elméleti(bb) jellegű kérdések és feladatok

Minden vizsgán fog szerepelni olyan feladat, ami a zárthelyik feladataival szemben nem igazán a gyakorlatok, hanem kifejezetten az előadásokon elhangzott elméletre kérdez rá. Kisebb-nagyobb változtatásoktól eltekintve az ilyen kérdések alapvetően az alábbi listából lesznek kiválasztva.

---

1. Mit mond ki pontosan az algebra komplex számokkal kapcsolatos alaptétele? Van -e olyan z komplex szám, ami kielégíti a $z^5 + z + 3 = 0$ egyenletet? És olyan, amelyik kielégíti a $(\bar{z}z)^5 + (\bar{z}z) + 3 = 0$ egyenletet?

2. Mondjuk ki és bizonyítsuk a sorozatok határértékének egyértelműségéről tanult állítást!

3. Legyen b, c két sorozat és tekintsük az alábbi két kijelentést:

   - $\exists \lim_n (b_n + c_n) \in \mathbb{R}$,
   - $\exists \lim_n (b_n) \in \mathbb{R}$ és $\exists \lim_n (c_n) \in \mathbb{R}$.

   Következik -e az első a másodikból? És fordítva? Ha valamelyik következtetés helyes, bizonyítsuk; ha hamis, adjunk ellenpéldát.

4. Definiáljuk általában egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz infimumát és szupremumát. Legyen most $H \subset (0, 1)$ és tekintsük az alábbi állításokat:

   - $\exists \min(H)$,
   - $\exists \inf(H) \in H$,
   - ha $\exists \inf(H) \in H$ akkor $\exists \min(H)$,
   - $\exists \inf(H) \in [0, 1]$.

   Keressük meg a fentiek közül a hamisakat és adjunk rájuk ellenpéldát! (Az igazakról most elég bizonyítás nélkül kijelenteni, hogy igazak.)

5. Definiáljuk a torlódási pont fogalmát és (bizonyítás nélkül) mondjuk ki a torlódási pontok és részsorozatok kapcsolatáról tanult tételt!

6. Mi a függvényhatárértékkel kapcsolatban tanult "átviteli elv"? (Tételkimondás bizonyítás nélkül.) Az átviteli elv segítségével bizonyítsuk, hogy $\nexists \lim_{x \to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

7. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Matematikai jelekkel írjuk föl annak a kijelentésnek a pontos értelmét / definícióját, hogy $\lim_{x \to 3} (f(x)) = +\infty$.

8. Nem igazán látszik, hogyan lehetne az $xe^x = \frac{1}{x+1}$ egyenletet egzakt módon megoldani. Ennek ellenére azt mégis könnyen beláthatjuk, hogy a $(0, 1)$ intervallumban egyenletünknek *van* megoldása. A tanult tételekre való hivatkozásokkal, adjunk erre precíz indoklást!

9. Az f folytonos függvény értelmezési tartománya $[0, 1]$ és $[2, 3]$ zárt intervallumok uniója. Az alábbiak közül mely halmazok biztosan nem lehetnek az f értékkészlete? Válaszunkat precíz érveléssel, illetve a tanult tételekre való hivatkozásokkal indokoljuk!

   - a teljes valós számegyenes,
   - egyetlen valós szám,
   - az $[1, 3)$ félig nyílt intervallum,
   - az $[1, 3)$ és a $(3, 7]$ intervallumok uniója,

- az $[1,3]$ intervallum.

---

10. A határérték fogalmának segítségével definiáljuk egy f függvény x pontban vett deriváltját. Következik -e a deriválhatóság a folytonosságból? És fordítva? Ha valamelyik következtetés helyes, bizonyítsuk; ha hamis, adjunk ellenpéldát!

---

11. Igaz-e, hogy egy deriválható függvény deriváltja automatikusan folytonos? Válaszunk indoklásához számoljuk ki az $f(0) = 0$, $x \neq 0$: $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ képlettel definiált f függvény deriváltját!

---

12. Bizonyítsuk a szorzat-függvényre vonatkozó deriválási szabályt!

---

13. Tegyük föl, hogy f deriválható az I intervallumon, és tekintsük az alábbi kijelentéseket:

    - f monoton nő I -n,
    - $f'(x) \geq 0$ minden $x \in I$ -re,
    - f szigorúan monoton nő I -n,
    - $f'(x) > 0$ minden $x \in I$ -re.

    Mi a kapcsolat az első kettő, illetve második kettő kijelentés között? (Tételkimondás bizonyítás nélkül + ellenpélda.)

---

14. Definiáljuk a lokális szélsőérték-hely fogalmát. Legyen most $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy deriválható függvény. Melyikből következik melyik: i) $f'(x) = 0$, ii) f -nek x -nél lokális szélsőérték-helye van. (Tételkimondás illetve ellenpélda.)

---

15. Definiáljuk egy függvény konvexitásának fogalmát és mondjuk ki a konvexitás és a második derivált kapcsolatáról tanult tételt!

---

16. A következő számolások esetleg nem mind jók. Találjuk meg a hibásakat, magyarázzuk el, mi velük a baj és azt is mondjuk meg: mi lenne ezekben az esetekben a helyes eredmény!

    - $\lim_{x\to 0+} (\ln(\arctan(x)) - \ln(x)) = \ln\left(\lim_{x\to 0+} \frac{\arctan(x)}{x}\right) \overset{\text{LH}}{=} \ln\left(\lim_{x\to 0+} \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{1}\right) = \ln\left(\frac{\left(\frac{1}{1+0}\right)}{1}\right) = 0$
    - $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin(x)}{x+8} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos(x)}{1+0} = \nexists$
    - $\lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(x-1)}{x^2-x} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\sin(x-1)\cos(x-1)}{2x-1} \overset{\text{LH}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\cos^2(x-1)-2\sin^2(x-1)}{2} = \frac{2\cos^2(1-1)-2\sin^2(1-1)}{2} = 1$

---

17. Milyen olyan feltételt tanultunk, ami biztosíthatja egy Riemann-integrál létezését? Magyarázzuk el, hogy a *Dirichlet*-függvény (melynek értéke 1 minden racionális, és 0 minden irracionális pontban) miért nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon!

---

18. Bár az általunk tanult "elemi" függvények segítségével nem tudjuk zárt alakban megadni az $\int e^{x^2}\,\mathrm{dx}$ határozatlan integrál eredményét, miért lehetünk benne mégis biztosak, hogy egyátalán létezik olyan F melyre $F'(x) = e^{x^2}$ minden valós x helyen? Indoklásunkban hivatkozzunk a tanult tételekre!

---

19. Az integrálfüggvényről tanultak alapján határozzuk meg a $\int_1^{\frac{1}{x}} e^{t^2}\,\mathrm{dt}$ kifejezés x-szerinti deriváltját!

---

20. Bár egzakt módon nehéz lenne kiszámolni az $\int_{-5}^{7} \frac{1}{\sqrt[3]{e^{-3x}+1}}\,\mathrm{dx}$ integrál értékét, a határozott integrálról tanult összefüggések és becslések segítségével mutassuk meg, hogy értéke 0 és $\left(e^0 - e^{-5}\right) + 7 = 8 - e^{-5}$ között van.

---

21. Legyen f egy folytonos függvény a pozitív számokon. Adjuk meg az $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$ impropriusintegrál pontos értelmét, és számítsuk is ki ennek értékét az $f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ esetben!