Integração numérica: método de simpson

Mateus Schroeder da Silva

UDESC

06-2019

Derivação da fórmula de área

Vamos considerar a área sob uma parábola genérica $y = ax^2 + bx + c$
Suporemos que o intervalo de integração é $[-h, +h]$ e $\Delta x = h$.

$$\int_{-h}^{h} (ax^2 + bx + c)dx$$

$$\left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bc^2}{2} + cx\right]_{-h}^{h} = \left(\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + ch\right) - \left(-\frac{ah^3}{3} + \frac{bh^2}{2} + -ch\right)$$

$$= \frac{2a^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)$$

$$x_0(-h, y_0), x_1(0, y_1), x_2(h, y_2)$$

Substituindo os pontos na equação genérica temos:

$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = c$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

Temos então adicionando a 1ª e 3ª linhas:

$$2ah^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$$

Derivação da fórmula de área

Substituindo na fórmula da área:

$$A = \frac{2a^3}{3} + 2ch = \frac{h}{3}\left(2ah^2 + 6c\right)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6c)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 - 2y_1 + y_2 + 6y_1)$$

$$= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Derivação da fórmula de área

Se continuássemos analogamente teríamos:

$$= \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_4 + 4y_5 + y_6\right)$$

E a fórmula geral então:

$$\int_{-h}^{h} f(x) \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_3 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

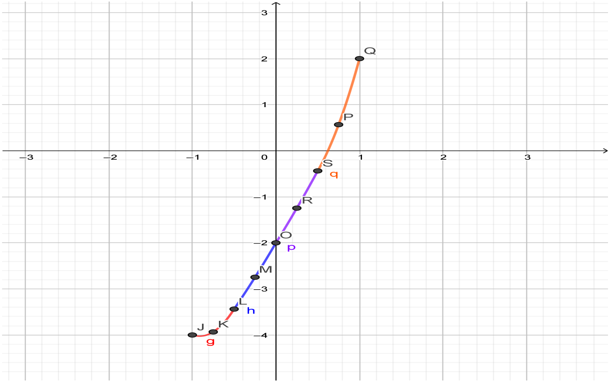

Figure: $x^4 + 3x - 2$

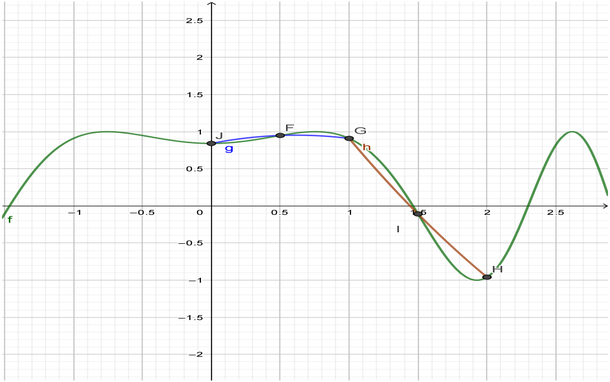

Figure: $sin(x^2 + 1)$

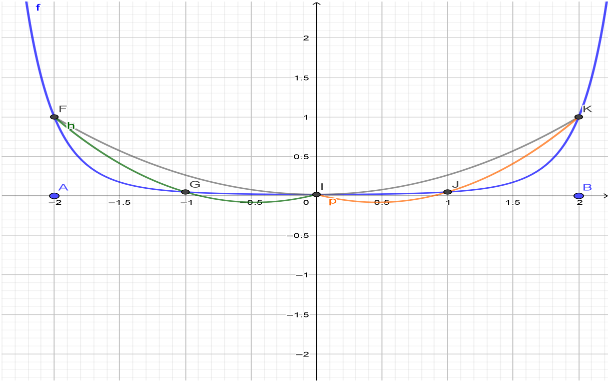

Figure: e^{x^2-4}