Integração numérica: Quadraturas gaussianas

Mateus Schroeder da Silva

UDESC

06-2019

Integração numérica: Quadraturas Gaussianas

The idea of Gaussian quadratures is to give ourselves the freedom to choose not only the weighting coefficients, but also the location of the abscissas at which the function is to be evaluated. They will no longer be equally spaced. Thus, we will have twice the number of degrees of freedom at our disposal; it will turn out that we can achieve Gaussian quadrature formulas whose order is, essentially, twice that of the Newton-Cotes formula with the same number of function evaluations. (PRESS et al, ANO)

Does this sound too good to be true? Well, in a sense it is. The catch is a familiar one, which cannot be overemphasized: High order is not the same as high accuracy. High order translates to high accuracy only when the integrand is very smooth, in the sense of being "well-approximated by a polynomial."

Dois pontos

Considerando a aproximação pelo método do trapézio

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(a) + c_2 f(b)$$

faremos uma extensão a fim de obter a quadratura gaussiana de dois pontos. Suponhamos que o argumento das funções não seja pré-determinado, temos

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

São 4 as incógnitas: c_1, c_2, x_1, x_2 que são encontradas supondo que o método integre uma função de terceiro grau $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ com erro zero. Então:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3\right) dx =$$

$$\left[a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4}\right]_a^b =$$

$$a_0(b-a) + a_1 \left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) + a_2 \left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) + a_3 \left(\frac{b^4 - a^4}{4}\right) =$$

$$c_1 \left(a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3\right) + c_2 \left(a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3\right)$$

$$a_0 \left(c_1 + c_2\right) + a_1 \left(c_1 x_1 + c_2 x_2\right) + a_2 \left(c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2\right) + a_3 \left(c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3\right)$$

Obtemos então o sistema não-linear

$$
\begin{aligned}
b - a &= c_1 + c_2 \\
\frac{b^2 - a^2}{2} &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\
\frac{b^3 - a^3}{3} &= c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 \\
\frac{b^4 - a^4}{4} &= c_1 x_1^3 + c_2 x_2^3
\end{aligned}
$$

Tal sistema tem somente uma solução, a saber:

$$c_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$c_2 = \frac{b-a}{2}$$

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b-a}{2}$$

$$x_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{b-a}{2}$$

Mas e aí?

Esse método aproxima bem em todos os casos?

Mas e aí?

Não.

Mas e aí?

O caso mostrado funciona bem quando a função que queremos integrar no intervalo limitado, fechado pode ser aproximada com satisfatoriedade por uma função polinomial. O caso é semelhate à quadratura Gauss-Legendre, que utiliza como os pesos, os "c_n" valores obtidos com os polinômios de Legendre.

Mas e aí?

Gauss-Jacobi

$$f(x) = (1 - x)^{\alpha}(1 + x)^{\beta} g(x), \alpha, \beta > -1$$

Utilizada para calcular funções com pontos singulares (locais estranhos em algumas funções, por exemplo pontos de descontinuidade ou de não-derivabilidade)

Mas e aí?

Chebishev-Gauss Usada para calcular funções da forma:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} g(x) dx$$

Referências

NUMERICAL RECIPES: The art of science computing. Press et al. Cambridge, 2007

<http://mathforcollege.com/nm/mws/gen/07int/mws_gen_int_txt_gaussq

Acesso em 12-06-2019.

CÁLCULO NUMÉRICO: Aspectos teóricos e computacionais. Ruggiero e Lopes. Pearson, 2ed, São Paulo.