Trabalho de Álgebra linear: transformações lineares

SILVA

Mateus Schroeder da

Área: Matemática
Universidade: UDESC/CCT
21 de novembro de 2019

Professora:
Ma. Graciela Moro

1. a) Tomando dois vetores não colineares, $A = (1,1)$ e $D = (1,2)$ é possível determinar uma transformação linear T tal que $T(A) = A' = (3,1)$ e $T(B) = B' = (5,2)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ c + d = 1 \\ a + 2b = 5 \\ c + 2d = 2 \end{cases}$$

Então encontramos:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Segue então aplicando em cada ponto, A, B, C, D, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = A' \tag{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = B' \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = C' \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = D' \tag{7}$$

Assim podemos ver que F_1 é transformada em F_2. Ainda, a matriz representa uma transformação linear.

Demonstração.

$$T(x;y) = (x; 2x + y)$$

$$\begin{aligned} T(u+v) &= T(u_x + v_x; u_y + v_y) \\ &= \big(u_x + v_x; 2(u_x + v_x) + u_y + v_y\big) \\ &= (u_x; 2u_x + u_y) + (v_x; 2v_x + v_y) \\ &= T(u_x; u_y) + T(v_x; v_y) \\ &= T(u) + T(v) \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
T(\alpha u) &= T(\alpha x; \alpha y) \\
&= (\alpha x; 2\alpha x + \alpha y) \\
&= \alpha(x; 2x + y) \\
&= \alpha T(u)
\end{aligned} \tag{9}$$

□

b) $\mathfrak{É}$ $\mathfrak{fácil\ ver\ que,}$
$\boldsymbol{\mathfrak{É}}$ $\boldsymbol{\mathfrak{realmente\ muito\ fácil\ ver\ que,}}$
a transformação dada é a nula, isto é $T(x, y) = (0, 0)$. E ela é linear.

Demonstração. $T(u + v) = 0 = T(u) + T(v) = 0 + 0$
Ainda, $T(\alpha u) = 0 = \alpha T(u) = \alpha \cdot 0$ □

c) Ela não é linear, é possível observar isso pelo vetor nulo. Se fosse uma transformação linear, deveria existir (pelo menos) uma matriz de entradas a, b, c, d, como abaixo, que satisfizesse a equação, mas é impossível.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = A' \tag{10}$$

2. A transformação $T : H \to G$ é linear.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
T(u + v) &= T\big((u_x; u_y) + (v_x; v_y)\big) \\
&= T(u_x v_x; u_y + v_y) \\
&= \big(ln(u_x v_x); e^{u_y + v_y}\big) \\
&= (ln u_x + ln v_x; e^{u_y} \cdot e^{v_y}) \\
&= (ln u_x; e^{u_y}) + (ln v_x; e^{v_y}) \\
&= T(u_x; u_y) + T(v_x; v_y) \\
&= T(u) + T(v).
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
T(\alpha(x, y)) &= T(x^{\alpha}; \alpha y) \\
&= (ln x^{\alpha}; e^{\alpha y}) \\
&= (\alpha ln x; (e^{y})^{\alpha}) \\
&= \alpha(ln x; e^{y}) \\
&= \alpha T(x, y)
\end{aligned} \tag{12}$$

□

Ainda, a transformação T é bijetora (isomorfismo).

Demonstração. É injetora porque se tomarmos $u, v \in H$, com $u \neq v$ tem-se $T(u) = (lnu_x; e^{u_y})$ e $T(v) = (lnv_x; e^{v_y})$. Definindo $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, f(x) = lnx$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, g(x) = e^x$ temos que f, g são bijetoras e portanto $T(u) \neq T(v)$.

Para mostrar a sobrejetividade, seja $(x, y) \in G$ um ponto genérico. Nestas condições $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}_+^*$. Se existirem x_0, y_0 tais que $lnx_0 = x$ e $e^{y_0} = y$ então estará mostrada a sobrejetividade. Resolvendo para x_0 e y_0, temos que $x_0 = e^x$ e $y_0 = lny$. Logo, existem para quaisquer $(x, y) \in G$ um par $(x_0; y_0) \in H$ que satisfaz $T(x_0; y_0) = (x, y)$. □

3. Matriz das coordenadas:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & -5 & -5 & 0 & 5 & 5 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & 6 & 4 & 6 & -4 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = M \tag{13}$$

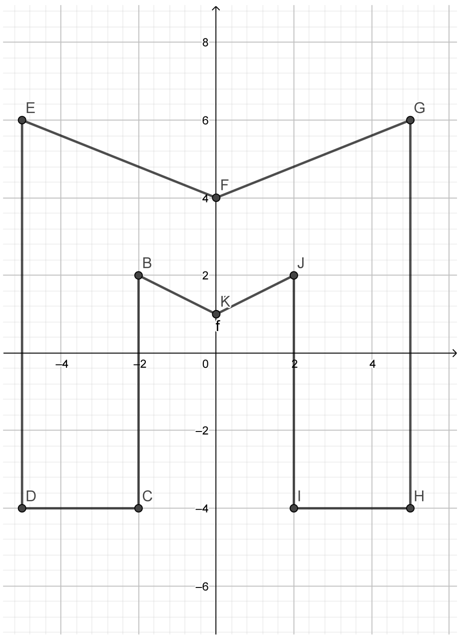


Figura 1: Letra inicial

a) Para a reflexão em torno do eixo y, usaremos

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 5 & 5 & 0 & -5 & -5 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & 6 & 4 & 6 & -4 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

b) Para a o cisalhamento na horizontal, usaremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot M = \begin{bmatrix} 1/2 & -1 & -4 & -7 & -2 & 2 & 8 & 3 & 0 & 3 & 1/2 \\ 1 & 2 & -4 & -4 & 6 & 4 & 6 & -4 & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

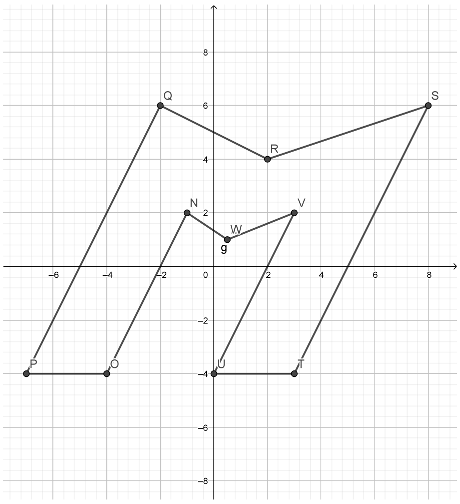
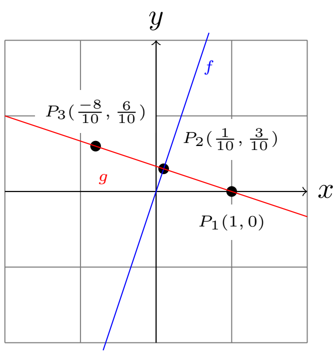


Figura 2: Cisalhamento na horizontal

c) Para a reflexão em torno da reta $y = 3x$ primeiramente escolheremos uma base conveniente e verificaremos qual a imagem dos vetores da base. Escolheremos a base $\beta = \{(1;3);(1;0)\}$, cujas imagens são:
$(1;3) \rightarrow (1,3)$
$(1;0) \rightarrow (x_0; y_0)$
Sejam
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 3x$ e
$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g(x) = -3^{-1}x + b = \dfrac{-1}{3}x + b$
assim f é a reta de reflexão e g é uma função auxiliar. A ideia é que a reflexão de um ponto digamos, P_1, em torno de uma reta estará situado sobre a reta definida pelos pontos P_1 e o pé da perpendicular (P_2) de P_1 em nossa reta, no caso f.



Ainda, P_3 é tal que P_2 seja o ponto médio de P_1 e P_3, logo $P_3 = (\frac{1}{10} - |1 - \frac{1}{10}|; y) = \left(\frac{-8}{10}; g(\frac{-8}{10})\right) = \left(\frac{-8}{10}; \frac{6}{10}\right)$. O coeficiente angular de g obtemos facilmente lembrando que no caso de funções que descrevem retas, elas são perpendiculares se, e somente se o produto dos coeficientes lineares for igual a -1. O coeficiente linear obtemos usando o coeficiente angular com o ponto P_1. Com isso obtemos $g(x) = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3}$. P_2 é a intersecção das duas retas, logo:

$$f(x) = g(x) \iff 3x = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3} \iff x = \frac{1}{10} \tag{16}$$

Ainda, $P_2 = (\frac{1}{10}, f(\frac{1}{10})) = (\frac{1}{10}; \frac{3}{10})$ Agora encontremos os coeficientes da matriz tranformação:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-8}{10} \\ \frac{6}{10} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Chegamos ao sistema:

$$\begin{cases} a + 3b = 1 \\ c + 3d = 3 \\ a = \frac{-8}{10} \\ c = \frac{6}{10} \end{cases}$$

Resolvendo chegamos na matriz:

$$\begin{bmatrix} \frac{-8}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} \iff T(x;y) = \left(\frac{-8}{10}x + \frac{3}{5}y; \frac{6}{10}x + \frac{4}{5}y\right) \tag{19}$$

4. a) Considerando os pontos B, E temos:
$T(E) = T(0;2) = (2;6)$
$T(B) = T(1;-1) = (2;-2)$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Chegamos ao sistema: $\begin{cases} 2b = 1 \\ 2d = 6 \\ a = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \iff T(x;y) = (3x + y; x + 3y) \tag{22}$$

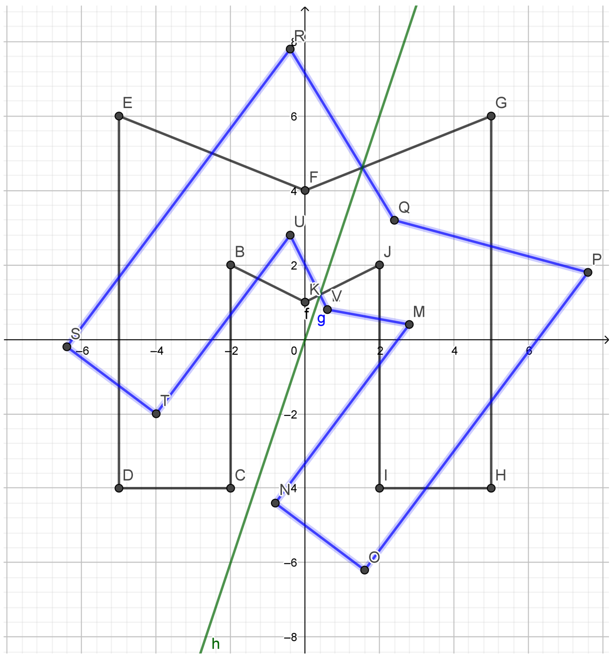


Figura 3: Reflexão em torno de $y = 3x$

b)

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = Z \rightsquigarrow detZ = (3-\lambda)^2 - 1 = (\lambda-2)(\lambda-4) \tag{23}$$

Logo os autovalores são $\{2, 4\}$, pois zeram o polinômio característico.

$$\begin{bmatrix} 3-2 & 1 \\ 1 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x+y = 0 \rightsquigarrow \beta_{\lambda=2} = \{(1;-1)\} \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies x-y = 0 \rightsquigarrow \beta_{\lambda=4} = \{(1;1)\} \tag{25}$$

Assim, os autovetores (que $T(u)$ ficam na mesma direção que u) são múltiplos de $(1;-1)$ ou múltiplos de $(1;1)$, e ficam ampliados ou reduzidos pelo módulo do autovalor correspondente (autovalor que nos permitiu encontrar a base). E o sentido varia de acordo com o sinal do autovalor.

c) Os vetores nas retas p, h são transformados em vetores que tem a mesma direção dos vetores iniciais. Por exemplo, $T(a) = a'$ e $T(b) = b'$. Peguei vetores de cada base mas poderia ter pego qualquer multiplo que estivessem sobre p ou h.

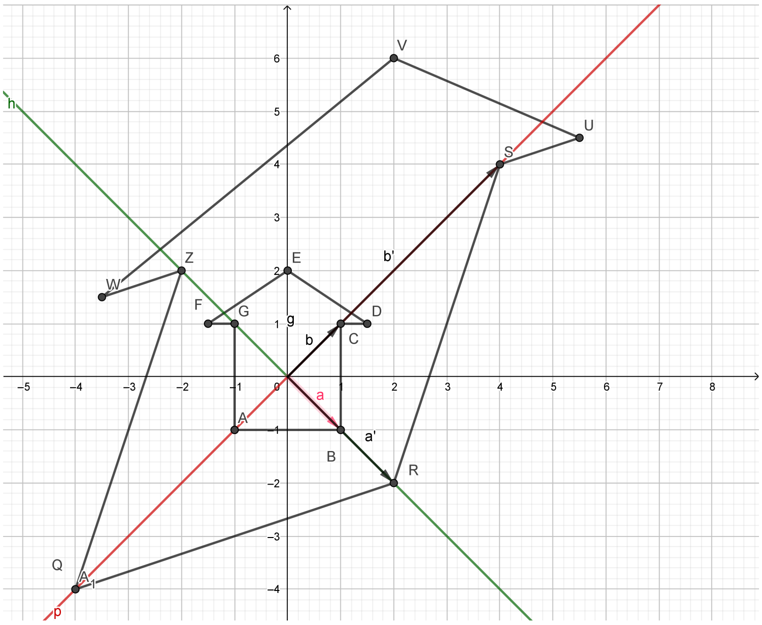


Figura 4: Representação da transformação e autovetores