Exercício número 10, da lista. Mateus Schroeder da Silva

$$\int_{-1}^{3} 4 - \mathrm{x}^2 \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

a) Deverá ser dividido em 3 intervalos, $[-1, 0]$, $[0, 2]$, $[2, 3]$ pois do primeiro intervalo para o segundo ela muda o sinal da primeira derivada. E do segundo para o terceiro pois a função está acima do eixo x no segundo intervalo, e abaixo no terceiro. No primeiro intervalo o "melhor" retângulo inscrito tem altura $= f(x)$ tal que $f(x)$ é o extremo esquerdo. No terceiro também é no extremo esquerdo. No segundo é no extremo direito que se consegue o "melhor" retângulo inscrito.

c) Não calcula área, pois a integral só calcula área quando a função em questão tem $\forall x, f(x) \geq 0$.

b) Considerando a partição P dividida em segmentos congruentes temos:

$$m_1\Delta x + m_2\Delta x + \ldots + m_n\Delta x =$$
$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x =$$
$$f(1\Delta x + x_0) + f(2\Delta x + x_0) + f(3\Delta x + x_0) \ldots f(n\Delta x + x_0)$$

Como

$$x_0 = 0$$
$$f(1\Delta x) + f(2\Delta x) + f(3\Delta x) + \ldots f(n\Delta x) =$$
$$\left[4 - (1\Delta x)^2\right]\Delta x + \left[4 - (2\Delta x)^2\right]\Delta x + \left[4 - (3\Delta x)^2\right]\Delta x + \ldots + \left[4 - (n\Delta x)^2\right]\Delta x =$$
$$\Delta x[4n - \Delta x^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)] =$$
$$\Delta x\left[4n - \Delta x^2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right] \text{Como}$$
$$\Delta x = \frac{2}{n}$$
$$\frac{2}{n}\left[4n - \frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] =$$
$$8 - \frac{8\left(2n^3 + 3n^2 + n\right)}{6n} =$$
$$8 - (\frac{16n^3}{6n^3} + \frac{24n^2}{6n^3} + \frac{8}{6n^3})$$
$$\frac{32}{6} - \left[\frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right]$$

Como o limite da equação acima quando $\mathrm{n} \to \infty$ é $\dfrac{32}{6}$, este é o valor da integral.