Anexo 3 - FOLHA DO PROFESSOR

Sejam s e t ângulos, c o círculo unitário. Seja $P(1,0)$ um ponto.

(1) Escreva as coordenadas (x,y) do ponto de c (em função de s ou t) quando os ângulos são respectivamente s e t.
$T = (\cos t, \sin t)$ e $S = (\cos s, \sin s)$

(2) Calcule a distância entre os pontos encontrados anteriormente pela fórmula da distância entre pontos.

$$d\Big(T,S\Big) = \sqrt{(\cos t - \cos s)^2 + (\sin t - \sin s)^2} = \sqrt{2 - \cos t \cdot \cos s - \sin t \cdot \sin s}$$

(3) Quanto mede a corda que liga P à qualquer ponto da circunferência correspondente a um ângulo x? E em particular para $t - s$?

$$\begin{aligned} d\Big((1,0),(T-S)\Big) &= \sqrt{(\cos(t-s)-1)^2 + \sin^2(t-s)} \\ &= \sqrt{\cos^2(t-s) - 2\cdot\cos(t-s) + 1 + \sin^2(t-s)} \\ &= \sqrt{2(1-\cos(t-s)} \end{aligned}$$

(4) Essas cordas têm o mesmo tamanho? Por quê?
Sim, pois subtendem arcos de mesmo tamanho.

(5) Chegaste então em: $\cos(t-s) = \cos t \cdot \cos s + \sin t \cdot \sin s$

(6) Que fórmulas podemos obter fixando t em valores nos eixos (tente 0, $\pi/2$, $-\pi/2$)?

a) Se $t = 0 \to \cos(0-s) = \cos 0 \cdot \cos s + \sin 0 \cdot \sin s \implies \cos -s = \cos s$

b) Se $t = \frac{\pi}{2} \to \cos(\frac{\pi}{2} - s) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos s + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin s \implies \cos\left(\frac{\pi}{2} - s\right) = \sin s$

c) Se $t = \frac{-\pi}{2}$
$\to \cos(\frac{-\pi}{2} - s) = \cos\frac{-\pi}{2} \cdot \cos s + \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \cdot \sin s \implies \cos\left(\dfrac{-\pi}{2} - s\right) = -\sin s$

(7) O que podemos afirmar sobre as funções seno, cosseno a respeito de serem pares ou ímpares?

a) *cos* é par, pela equação (6)a

b) Se $x = -s$, temos
$\sin -s = \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2} + s) = \cos(\frac{-\pi}{2} - s) = -\sin s$

(8) Quanto é $\sin(t-s)$?

$$\sin(a-b) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + (a-b)\right) \tag{1}$$

$$= -\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cdot \cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cdot \sin b\right] \tag{2}$$

$$= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \tag{3}$$