Fractais

Bruno da Silva Esmeraldino   Mateus Schroeder da Silva

UDESC

05-2019

Contexto

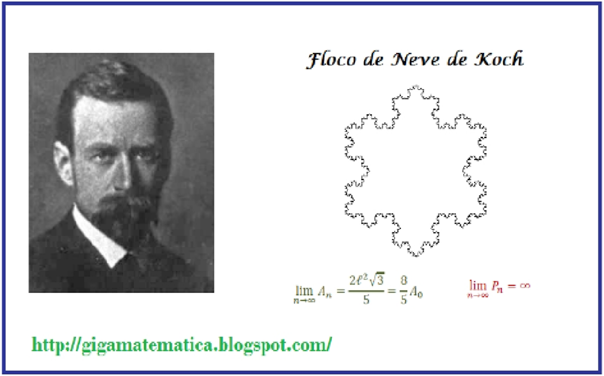
A primeira publicação negando o postulado deve-se ao matemático Lobachevski, em 1826 que, de acordo com Boyer (1974, p.396) é chamado de Copérnico da Geometria de Lobachevski, mostrando com isso que a geometria euclidiana não era a verdade absoluta que se supunha ser. Hoje podemos dizer que muitos problemas do cotidiano e do mundo científico não são resolvidos pela geometria euclidiana, mas sim por geometrias não euclidianas, que são aquelas que não satisfazem um ou mais dos postulados de Euclides. Dentro das geometrias não euclidianas, entre outras podemos citar, a Geometria Hiperbólica; a Geometria Elíptica; a Geometria Projetiva; a Topologia; a Geometriados Fractais. Quando nos deparamos com comportamentos na natureza que apresentam formas tão irregulares, como as nuvens, as montanhas, os batimentos do coração, as árvores, couve-flor, brócolis e entre outros, a geometria euclidiana por nós conhecida se torna inadequada, sendo necessário recorrer a Geometria dos Fractais.

Fractais

Fractais (do latim fractus, fração, quebrado) são figuras da geometria não-Euclidiana. A geometria fractal é o ramo da matemática que estuda as propriedades e comportamento dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas facilmente pela geometria clássica, e foram aplicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador. As raízes conceituais dos fractais remontam a tentativas de medir o tamanho de objetos para os quais as definições tradicionais baseadas na geometria euclidiana falham. Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo.

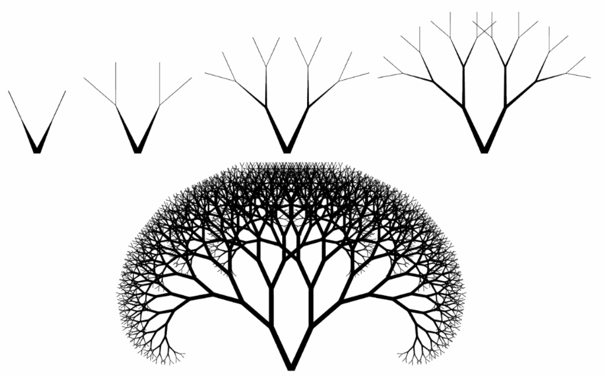
Características dos fractais

Os objetos geométricos fractais podem, infinitamente, ser divididos em partes, sendo que cada uma delas será semelhante à original. Normalmente são autossimilares e não dependem de escalas. Estes fractais podem ser gerados por um padrão repetido. Como exemplo de um fractal, podemos pegar o floco de neve de Koch.


Floco de Neve de Koch
$\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2\ell^2\sqrt{3}}{5} = \frac{8}{5}A_0$
$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$
http://gigamatematica.blogspot.com/

Geometria de fractais determinísticos

Neste caso, estamos falando de subconjuntos que são gerados por transformações geométricas simples que acontecem do objeto nele mesmo, ou seja, o objeto é formado por ele mesmo em formas reduzidas.



A história

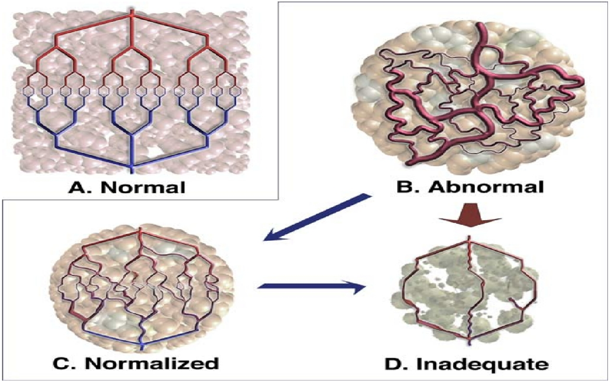
Alguns cientistas, em seus trabalhos, entre os anos de 1857 e 1913, desenvolveram o conhecimento de alguns objetos que até então eram catalogados como demônios, supondo que não teriam grandes valores científicos. Weiertrass, no ano de 1872, encontrou uma função contínua em todo o seu domínio, chamado atualmente de fractal. Koch, no entanto, não se viu satisfeito com essa definição abstrata demais, dando uma definição mais geométrica de uma função similar, que é o floco de neve de Koch. O desenho desse floco de neve é resultado da infinita adição de triângulos que fazem com que o perímetro cresça aproximando-se do infinito.

Muitos outros trabalhos estiveram relacionados à essa ideia do fractal, mas somente nos anos 60, quando a computação surgiu, seu desenvolvimento se deu. Mandelbrot, o criador do termo fractal e responsável pela descoberta do conjunto de Mandelbrot, um dos fractais mais conhecidos, foi um dos pioneiros a fazer uso dessa técnica para desenvolver seus estudos. Esse foi o primeiro homem a descrever o mundo da forma como ele é. Antes do polonês Benoit Mandelbrot, quase toda a geometria que conhecíamos era aquela fundada pelo grego Euclides por volta de 300 a.C., a das linhas, pontos, esferas, cones... Enfim, tudo aquilo que as escolas ensinam. O problema é que essas formas euclidianas são artificiais. Funcionam para traduzir a harmonia da matemática, mas não estão na natureza. Não existem montanhas em forma de cone, nuvens triangulares, animais cúbicos.

Aplicações

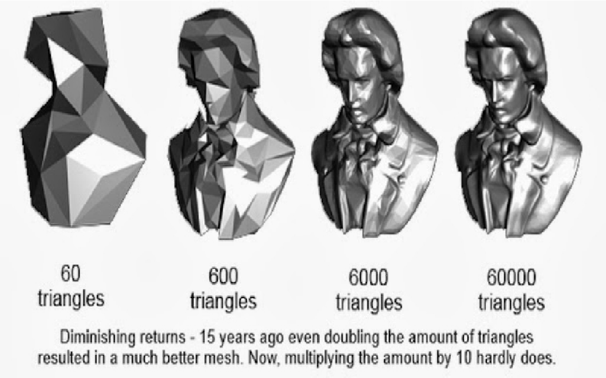
Medicina

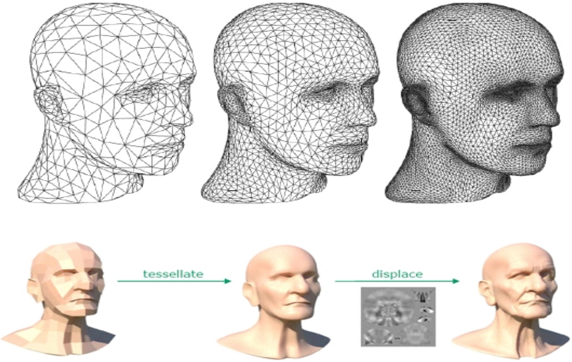
A estrutura do pulmão e as ramificações dos neurônios remetem a essas figuras. Entre outros benefícios, a compreensão do desenvolvimento dos fractais pode ajudar a prever a evolução de doenças como o câncer, facilitando diagnósticos precoces.


A. Normal
B. Abnormal
C. Normalized
D. Inadequate

Computação gráfica

Alguns tipos têm sido utilizados como base de animações digitais. Eles ajudam a criar texturas, simular vegetação ou construir paisagens complexas. Apollo 13 (1995) e Titanic (1997) são alguns filmes que aplicaram esse recurso.


60
triangles
600
triangles
6000
triangles
60000
triangles
Diminishing returns - 15 years ago even doubling the amount of triangles resulted in a much better mesh. Now, multiplying the amount by 10 hardly does.

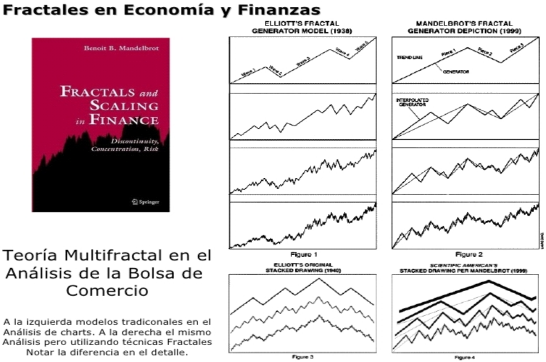

tessellate
displace

Geografia

Os dobramentos das camadas de rocha que formam o solo são criados por dobramentos ainda menores, como um fractal. Ao se definir, por computador, esses padrões, pode-se estudar a instabilidade dos solos e prevenir catástrofes como a da região serrana do Rio de Janeiro.

Economia

O conceito de fractal é usado no entendimento do comportamento da Bolsa de Valores. A variação do valor da ação em um dia de pregão é similar à variação de uma semana, um mês, um ano ou uma década. Com isso, é possível fazer estatísticas mais precisas.


Fractales en Economía y Finanzas
Benoit B. Mandelbrot
FRACTALS and SCALING in FINANCE
Discontinuity, Concentration, Risk
Springer
ELLIOTT'S FRACTAL GENERATOR MODEL (1938)
Wave 1
Wave 2
Wave 3
Wave 4
Wave 5
MANDELBROT'S FRACTAL GENERATOR DEPICTION (1999)
TREND LINE
Piece 1
Piece 2
Piece 3
GENERATOR
INTERPOLATED GENERATOR
Figure 1
Figure 2
ELLIOTT'S ORIGINAL STACKED DRAWING (1940)
SCIENTIFIC AMERICAN'S STACKED DRAWING PER MANDELBROT (1999)
Figure 3
Figure 4
Teoría Multifractal en el Análisis de la Bolsa de Comercio
A la izquierda modelos tradiconales en el Análisis de charts. A la derecha el mismo Análisis pero utilizando técnicas Fractales Notar la diferencia en el detalle.

Arte

Arte fractal é a criada utilizando-se funções matemáticas chamadas fractais e transformando os resultados dos cálculos em imagens, animações, música ou outro tipo de mídia. Imagens fractais são os gráficos resultante dos cálculos, e animações são seqüências desses gráficos. Música fractal transforma os resultados do cálculo em sons. Geralmente, mas não exclusivamente, utilizam-se computadores para processá-los, devido à complexidade da matemática envolvida.

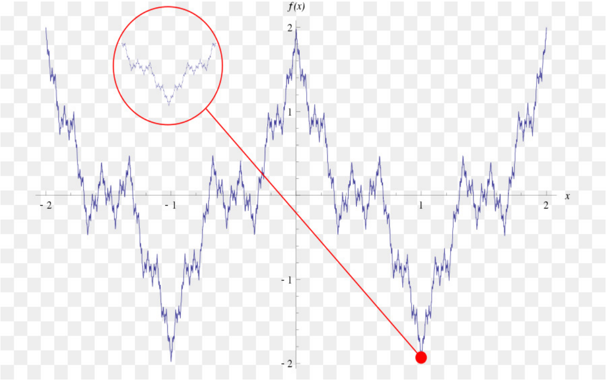
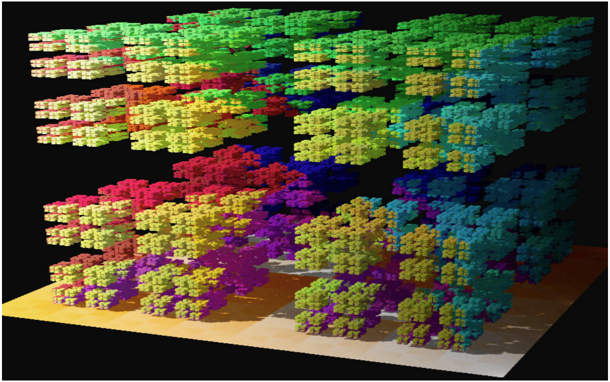


Figure: Função de Weiertrass

Exemplo de função patológica: contínua em todos os pontos da reta mas em nenhum ponto derivável. Weiertrass (1815-1897).

Figure: Conjunto de Cantor



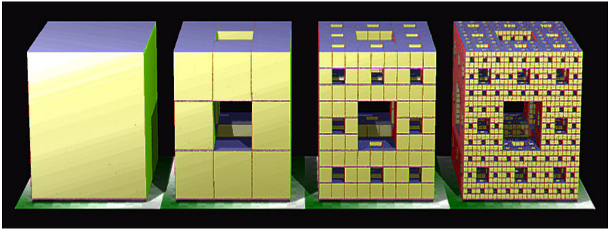


Figure: Esponja de Menger

Dimensões

De Hausdorff
Topológica

Figure: Romanesco Broccoli

Artistas importantes:
Desmond Paul Henry
Hamid Naderi Yeganeh
Bruno Degazio

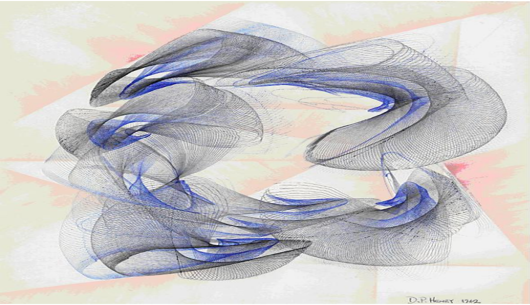


Figure: Gerado por máquina, Henry

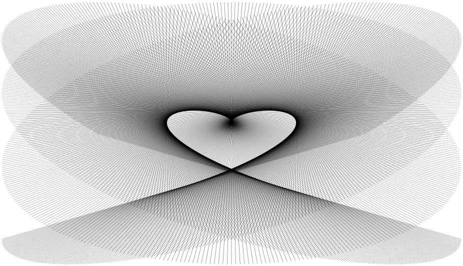


Figure: Heart, Hamid