Trabalho de cálculo II

Silva

Mateus Schroeder da

Área: Matemática
Universidade: UDESC/CCT
5 de dezembro de 2018

Professor:
Dr. Elizandra Bar de Figueiredo

1. Vamos encontrar um parabolóide que satisfaça a condição exigida. Sabendo que um parabolóide qualquer pode ser expresso por:

$$p : c_1 \cdot (x-a)^2 + c_2 \cdot (y-b)^2 + d = z$$

Onde $c_1, c_2, a, b \in \mathbb{R} \wedge c_1 \cdot c_2 > 0$
Com a equação do plano dada: $\pi : 13x - 8y - z = 24 \iff 13x - 8y - 24 = z$ podemos obter o vetor normal, $\overrightarrow{n} = (-13, +8, +1)$.

$$\begin{cases} -\ 13 = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(1{,}2) \\ \\ +\ \ 8 = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(1{,}2) \end{cases}$$

$$-13 = -\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) \implies 2c_1 - 2c_1 a = +13$$

$$+8 = -\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) \implies 4c_2 - 2c_2 b = -8$$

Substituindo com qualquer par de números reais tais que $c_1 \cdot c_2 > 0$, escolheremos $c_1 = 3$ e $c_2 = 7$ então:

$$2 \cdot 3 - 2 \cdot 3 \cdot a = 13 \implies a = \frac{-7}{6}$$

$$4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot b = -8 \implies b = \frac{18}{7}$$

E assim temos a equação:

$$3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + 7\left(y - \frac{18}{7}\right)^2 + d = z$$

E para encontrar d basta substituir as variáveis da equação no ponto que desejamos que pertença a esse parabolóide. Então segue:

$$3\left(1 + \frac{7}{6}\right)^2 + 7\left(2 - \frac{18}{7}\right)^2 + d = -27$$

$$\frac{169}{12} + \frac{16}{7} + d = -27 \implies d = \frac{-3643}{84}$$

Temos agora a equação que procurávamos, que é dada por:

$$3\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 + 7\left(y - \frac{18}{7}\right)^2 - \frac{3643}{84} = z$$

A figura está representada abaixo na figura 1:

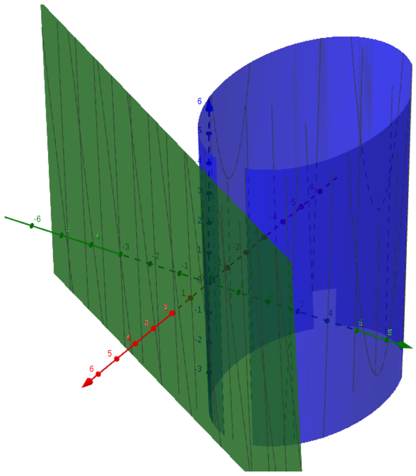

Figura 1: Plano e parabolóide

2. Vamos chamar o sólido por corneta. Ela é representada na figura 2:

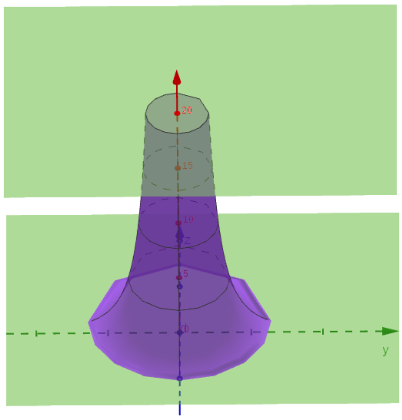

Figura 2: Corneta

Construiremos o sólido tem torno do eixo x. A figura é delimitada por dois planos, a saber $x = 1$ e $x = 20$.
Chamando
$d_1 = 1$,
$d_2 = 5 + d_1 = 6$,
$d_3 = 5 + d_2 = 11$,
$d_4 = 5 + d_3 = 16$,
$d_5 = 4 + d_3 = 20$

Seja $I_n = \{x \in \mathbb{N}; x \leq n\}$
Tomando os planos $p_n : x = d_n, n \in I_5$ temos eles representados abaixo na figura 3:

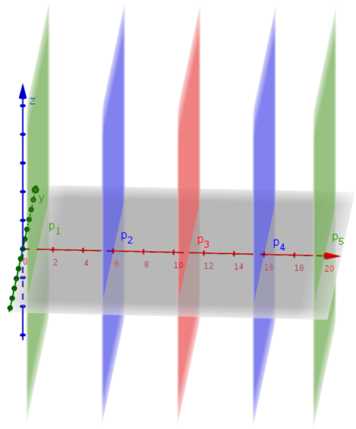

Figura 3: Planos definidos por d_n

Sejam então os raios aproximados das mensurações (os denominadores representam o diâmetro):

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \frac{13}{2} \approx 6.5, \\
r_2 &= \frac{7}{2} \approx 3.5, \\
r_3 &= \frac{6}{2} \approx 3, \\
r_4 &= \frac{4.7}{2} \approx 2.35, \\
r_5 &= \frac{4.5}{2} \approx 2.25
\end{aligned}
$$

Essas circunferências foram obtidas da seguinte forma:

$$c_n : x = d_n \wedge r_n^2 = y^2 + z^2 \implies x = d_n = \frac{d_n}{r_n^2} \cdot \left(y^2 + z^2\right)$$

Então fazemos a interseção da circunferência com o plano xy, que nos fornecerá os pontos $A_n, B_n, ..., E_n$ como mostra a figura 4:

Consequentemente, no plano xy os pontos são mostrados na figura 5:

Na tentativa de encontrar uma função derivável (porque a corneta "é derivável") que atinja aproximadamente os pontos encontrados, sugerimos primeiramente:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

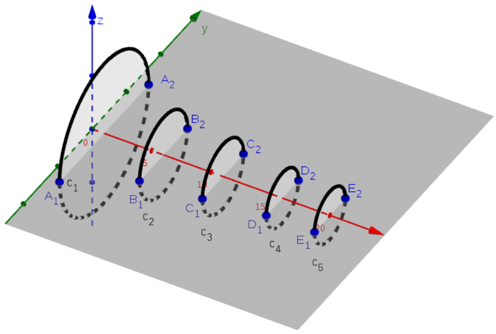

Figura 4: Interseção das circunferências com o plano xy

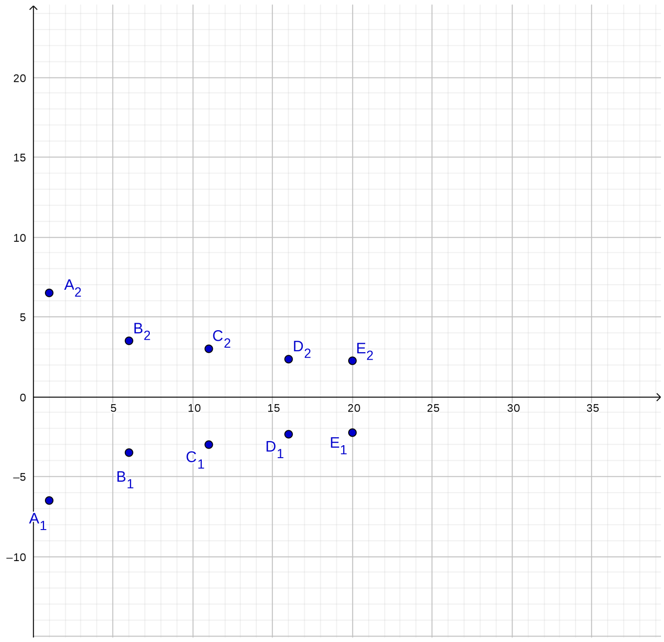

Figura 5: Interseção das circunferências com o plano xy

E posteriormente:

$$f(x) = \frac{a}{x^c} + b$$

Com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Utilizando os "sliders"do Geogebra, nos permite aproximar a corneta com

$$f(x) = \frac{6}{x^{0.4}} + 0.4$$

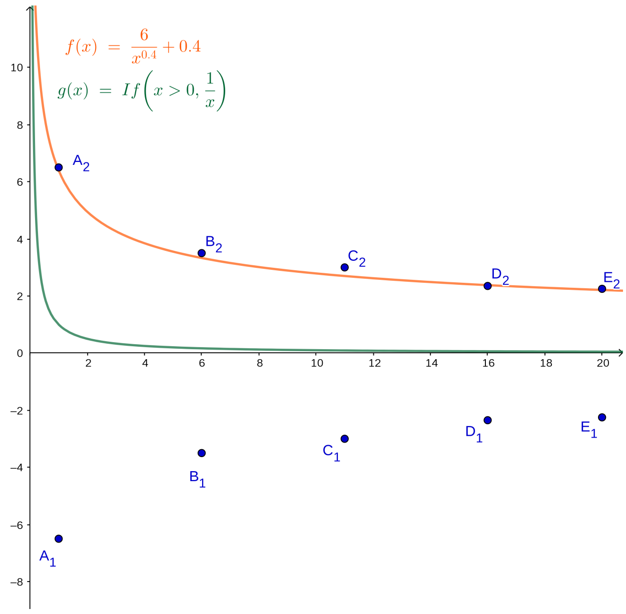

Figura 6: Aproximando os pontos com função

Por fim, basta limitar $f(x)$ no domínio e rotacionar usando o comando "surface", então obtemos:

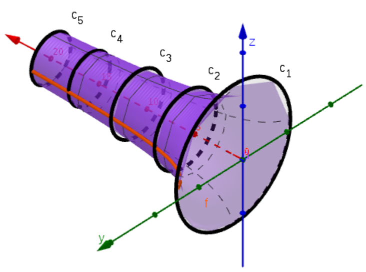

Figura 7: Sólido, função geradora, circunferências

Para obtermos o volume do sólido, temos:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \int_1^{20} \frac{6}{x^{0.4}} + 0.4 dx$$

$$\int \frac{6}{x^{0,4}} + 0,4dx = 0,4x + 10x^{0,6}$$

$$V = F(20) - F(1) = (0,4 \cdot 20 + 10 \cdot 20^{0,6}) - (0,4 + 10) \approx 57,94u.v.$$

3. a) Se Leonard consegue dar passos que atendem ao método de Zenão (ou Zeno), então talvez seja possível que ele consiga também dar uma quantidade infinita de passos. Mas se ele não consegue dar infinitos passos, então ele não consegue atravessar o corredor utilizando o método de Zenão. Mas suponhamos que os cinco primeiros passos ele utilize do método de Zenão, então no quinto passo ele estará $\approx 1,2m$ distante, e quem dá um passo de $19m$ dá um passo de 2 então ele atravessa.

   b) O corredor tem $d = 38.50m$ então,
   Primeiro passo: $19.25m$
   Segundo passo: $28.875m$

   c)

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{d}{2^1} = 19,25 \\
d_2 &= \frac{d}{2^1} + \frac{d}{2^2} \approx 28,87 \\
d_3 &= \frac{d}{2^1} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} \approx 33,68 \\
d_4 &= \frac{d}{2^1} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \frac{d}{2^4} \approx 36,09 \\
d_5 &= \frac{d}{2^1} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \frac{d}{2^4} + \frac{d}{2^5} \approx 37,29
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{d}{2^1} + \frac{d}{2^2} + \frac{d}{2^3} + \ldots + \frac{d}{2^n} \\
&= d \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} \\
&= 38,50 \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}
\end{aligned}$$

   d) Se as fórmulas que seguem representam o problema (com somas infinitas não se brinca, disseram), então sim.

$$38,50 - 38,50 \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < 38,50\epsilon \iff 1 - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < \epsilon$$

   Dado um ϵ qualquer, vamos escolher um novo e chamá-lo pelo mesmo símbolo, tal que é o maior 2^{-k} que seja menor que o ϵ anterior, com k natural. Vamos provar para todo ϵ dado existe n tal que vale:

$$1 < \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} + \epsilon$$

Demonstração. Tomando $n = k + 1$, por indução sobre k se $k = 1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{-i} + \frac{1}{2^k} = \sum_{i=1}^{1+1} 2^{-i} + \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} > 1$$

Nossa hipótese de indução é que existe um $k_0 = k$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{-i} + \frac{1}{2^k} > 1$$

Provemos que vale também para $k + 1$

$$\sum_{i=1}^{(k+1)+1} 2^{-i} + \frac{1}{2^{(k+1)}} =$$

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{(k+1)}} =$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{2 \cdot 1}{2^{k+1}} \right) + \frac{1}{2^{k+2}} > 1$$

□

e) Se ele fosse dando um passo após o outro, ele chega cada vez mais próximo, até o momento em que ele para de andar com o método de Zenão e dá um passo que chega no final do corredor ou o atravessa.

f)

$$38,50 - 38,50 \sum_{i=1}^{n} 2^{-i}$$

Desconsiderando a subtração, a primeira parcela da soma é a distância a percorrer e a segunda é o passo n que pode ser entendida como uma função na variável d. No exercício (d) mostramos que Leonard pode aproximar-se arbitrariamente do final do corredor tanto quanto se queira. Isso pode ser representado dizendo que o limite das somas parciais da série cujos termos são os tamanhos dos passos é convergente, e "converge para o fim do corredor". Note que também pode ser argumentado que a série é um múltiplo da série geométrica com base menor que 1.