UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA - UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS - CCT
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

MATEUS SCHROEDER DA SILVA

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS: DOS NATURAIS AOS REAIS

JOINVILLE - SC

2023

MATEUS SCHROEDER DA SILVA

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS: DOS NATURAIS AOS REAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática pelo curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC.
Orientador: Doutor Marnei Luis Mandler

JOINVILLE - SC

2023

MATEUS SCHROEDER DA SILVA

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS: DOS NATURAIS AOS REAIS

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de licenciado em Matemática pelo curso de Licenciatura em Matemática do Centro de Ciências Tecnológicas - CCT, da Universidade do Estado de Santa Catarina - UDESC.
Orientador: Doutor Marnei Luis Mandler

BANCA EXAMINADORA

Doutor Marnei Luis Mandler
Nome da Instituição

Membros:

Nome do Membro da banca e Titulação
Nome da Instituição

Nome do Membro da banca e Titulação
Nome da Instituição

Joinville, 26 de setembro de 2022.

Elemento opcional utilizado pelo autor para registrar homenagens ou dedicatórias à determinada(s) pessoa(s).

AGRADECIMENTOS

Elemento opcional utilizado pelo autor para registrar agradecimento às pessoas que contribuíram para a elaboração do trabalho.

Elemento opcional utilizado pelo autor para apresentar uma citação relacionada com a matéria tratada no corpo do trabalho.

RESUMO

Elemento obrigatório que contém a apresentação concisa dos pontos relevantes do trabalho, fornecendo uma visão rápida e clara do conteúdo e das conclusões do mesmo. A apresentação e a redação do resumo devem seguir os requisitos estipulados pela NBR 6028 (ABNT, 2003). Deve descrever de forma clara e sintética a natureza do trabalho, o objetivo, o método, os resultados e as conclusões, visando fornecer elementos para o leitor decidir sobre a consulta do trabalho no todo.

Palavras-chave: Palavra 1. Palavra 2. Palavra 3. Palavra 4. Palavra 5.

ABSTRACT

Elemento obrigatório para todos os trabalhos de conclusão de curso. Opcional para os demais trabalhos acadêmicos, inclusive para artigo científico. Constitui a versão do resumo em português para um idioma de divulgação internacional. Deve aparecer em página distinta e seguindo a mesma formatação do resumo em português.

Keywords: Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3. Keyword 4. Keyword 5.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ENEM	Exame nacional do Ensino Médio
Fig.	Area of the i^{th} component
FLT	Fermat's Last Theorem
MEC	Ministério da Educação

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A introdução apresenta os objetivos do trabalho, bem como as razões de sua elaboração. Tem caráter didático de apresentação. Deve abordar:

a) o problema de pesquisa, proposto de forma clara e objetiva;

b) os objetivos, delimitando o que se pretende fazer;

c) a justificativa, destacando a importância do estudo;

d) apresentar as definições e conceitos necessários para a compreensão do estudo;

e) apresentar a forma como está estruturado o trabalho e o que contém cada uma de suas partes.

O desenvolvimento é a demonstração lógica de todo o trabalho, detalha a pesquisa ou o estudo realizado. Explica, discute e demonstra a pertinência das teorias utilizadas na exposição e resolução do problema.

O desenvolvimento pode ser subdivido em seções e subseções com nomenclaturas definidas pelo autor conforme conteúdo apresentado.

2. O CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS E OS AXIOMAS DE PEANO

Os números naturais foram usados por muito tempo como algo por si só e sem fundamentação por outras coisas que os justificassem. Não houve preocupação na sua formalização até recentemente, quando Hermann Grassmann mostrou na década de 1860 que vários fatos de aritmética básica podiam ser obtidas através de alguns "fatos básicos"(ou axiomas) da aritmética. Houveram algumas tentativas de formalização do conjunto, e no século XIX o italiano Giuseppe Peano formulou seus axiomas utilizando o trabalho de Grassmann e Richard Dedekind como base.

Peano em seu 'Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita' fundamentou a sua aritmética com 9 axiomas, que em notação moderna são:

Peano 1. $1 \in \mathbb{N}$

Peano 2. $a \in \mathbb{N} \rightarrow a = a$

Peano 3. $a, b, c \in \mathbb{N} \rightarrow a = b \iff b = a$

Peano 4. $a, b, c \in \mathbb{N} \rightarrow (a = b \wedge b = c \rightarrow a = c)$

Peano 5. $a = b \wedge b \in \mathbb{N} \rightarrow a \in \mathbb{N}$

Peano 6. $a \in \mathbb{N} \rightarrow sa \in \mathbb{N}$

Peano 7. $a, b \in \mathbb{N} \rightarrow (a = b \iff sa = sb)$

Peano 8. $a \in \mathbb{N} \rightarrow sa \neq 1$

Peano 9. $A \in \boldsymbol{SET} \wedge 1 \in A \wedge (x \in \mathbb{N} \wedge x \in A \rightarrow sx \in A)$

Esses axiomas relacionam conceitos primitivos. Conceitos primitivos podem ser entendidos como base para fazer proposições e outros conceitos. Peano escolheu 3 conceitos primitivos (nós faremos igualmente), que listaremos e forneceremos uma 'interpretação' inicial:

- 1: Algum elemento.

- Número natural: Algo que é número e que podemos chamar de 'natural'.
- sucessor: uma relação entre exatamente 2 elementos.

citação do jogo de xadrez das peças de geometria

Para este trabalho, apresentaremos 4 axiomas, mas para isso precisaremos de algumas definições sobre *funções*:

Definição 2.1. *Produto cartesiano O produto cartesiano de* X *por* Y *é o conjunto* $\{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$. *Denotamos por* $X \times Y$.

Observação 2.1. O elemento (x, y) é chamado de par ordenado, e ocorre que $(a, b) = (c, d) \iff a = c \wedge b = d$. Fica subentendido na definição anterior que é o conjunto de todos os pares ordenados com $x \in X$ e $y \in Y$.

Definição 2.2. *Relação Uma relação é qualquer subconjunto do produto cartesiano.*

Axioma 1. *Existe um conjunto de exatamente todos os números naturais, que será denotado por* $\mathbb{N}$, *e existe uma função* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *que é a relação "sucessor".* [1]

Axioma 2. *Um é um número natural, isto é,* $1 \in \mathbb{N}$

Axioma 3. *Um não é sucessor de nenhum número, isto é,* $1 \notin Im(s)$ *ou ainda,* $\nexists k \in \mathbb{N} : sk = 1$

Axioma 4. s *é injetora, isto é,* $sa = sb \implies a = b$

Observação 2.2. Vale notar a contra positiva que estabelece, nesse caso: $a \neq b \implies sa \neq sb$

Axioma 5. *Se* $\mathbb{S}$ *é um subconjunto de* $\mathbb{N}$, *caso* $1 \in \mathbb{S}$ *e se para todo* k *em* $\mathbb{S}$ sk *também esteja em* $\mathbb{S}$, *então* $\mathbb{S} = \mathbb{N}$, *isso é o mesmo que colocar:* $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N} \wedge 1 \in S \wedge (k \in \mathbb{S} \implies sk \in \mathbb{S}) \implies \mathbb{S} = \mathbb{N}$

Observação 2.3. Denotaremos o sucessor de k por sk ao invés de $s(k)$ por questão de brevidade. Além disso, ao longo do trabalho, colocaremos poucos parênteses a fim de evitar sobrecarregar a notação desnecessariamente.

Este último axioma é chamado de axioma da indução finita.

Devemos notar que o axioma 2 garante $\mathbb{N} \neq \emptyset$. Além dele, como $1 \in \mathbb{N}$ e pelo axioma 1 temos que $s1 \in \mathbb{N}$. Analogamente, $ss1 \in \mathbb{N}$.

Lema 2.1. *Nenhum número natural é seu próprio sucessor* $k \in \mathbb{N} \implies k \neq sk$

[1] O leitor poderia perguntar, como podemos fazer um produto cartesiano de conjuntos que não conhecemos?

Demonstração: Faremos por indução. Seja $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $k \in \mathbb{S} \implies k \neq sk$.
O axioma 2 e 3 garantem que $1 \in \mathbb{S}$.
Supondo que $\exists k \in \mathbb{S} : k \neq sk$, queremos provar que $s(k) \neq s(sk)$, que vem do axioma 4. ■

Teorema 2.1. *Todo número natural, exceto o* 1 *é sucessor de algum outro número natural, que é único, isto é,* $\forall k(k \in \mathbb{N} \wedge k \neq 1 \implies \exists! r : sr = k)$

Demonstração: A prova é feita por indução. Seja $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{N} : x \neq 1 \implies (\exists! r \in \mathbb{N} : sr = k)\}$.
Claro que $1 \in \mathbb{S}$. Com um k em $\mathbb{S}$, queremos mostrar que $sk \in \mathbb{S}$.
É imediato que $sk \in \mathbb{S}$ pois, se $k \in \mathbb{S}$, para o sucessor sk existe um número k tal que $\underbrace{sk}_{\text{Da regra de } \mathbb{S}} = \underbrace{sk}_{\text{Axioma 5}}$.
A unicidade de r também é imediata, pois $sa = sb = k \implies a = b$ pelo axioma 4. ■

Observação 2.4. Diremos que o número que o número a é antecessor de $k = sa$.

Definição 2.3. *Soma A soma (x,y)* $\rightarrow x + y$ *em* $\mathbb{N}$ *é definida como:*

(i) $a + 1 = sa$

(ii) $a + sb = s(a + b)$

Listaremos algumas propriedades da adição e depois provaremos essas afirmações. Sejam $a, b \in \mathbb{N}$

- Fechamento: $a + b \in \mathbb{N}$
- Associativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Comutativa: $a + b = b + a$
- Inexistência de neutro: $\nexists e \in \mathbb{N} : \forall a, a + e = e + a = a$

Demonstração: Fechamento: This; ■

Definição 2.4. *Produto O produto de* x *por* y*, denotador por* $x \cdot y$*, é uma operação sobre* $\mathbb{N}$ $(x, y) \rightarrow \mathbb{N}$

(i) $m \cdot 1 = m$

(ii) $m \cdot sn = m + mn$

Observação 2.5. Com o intuito de omitir parênteses que seriam usados demais de outro modo, estebeleceremos a seguinte convenção:
$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$ e $a \cdot b + c = (a \cdot b) + c$

Lema 2.2. *Para qualquer número natural m, vale:* $1 \cdot m = m \cdot 1$

Demonstração: Para 1 temos:
$1 \cdot 1 = 1$ por def i
Sabemos que vale para algum $k \in \mathbb{N}$, isto é
$1 \cdot k = k \cdot 1$, é possível concluir que vale para sk?
$sk \cdot 1$
$1 + k$ a
$1 + 1 \cdot k$ ■

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É a parte final do texto. Deve retomar o problema inicial, revendo os objetivos e comentando se foram atingidos ou não, enunciando as principais contribuições. Sintetiza as principais idéias, bem como os resultados, avaliando pontos positivos e negativos. Geralmente inclui recomendações e/ou sugestões.

REFERÊNCIAS

APÊNDICE A - TÍTULO

Lalalalalala....

ANEXO A - TÍTULO

Lalalalalala...