

Grafos e Mediana

Rafaela G. da Motta Camicia¹ Amarildo de Vicente²

¹Unioeste – Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Rua Bahia nº 430 - 85.760-000 – Capanema – PR – Brasil
rafaelacamicia@gmail.com

²Colegiado do Curso de Matemática – Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
Caixa Postal 711 – 85.819-110 – Cascavel – PR – Brasil
amarildo@unioeste.br

Resumo. *A teoria dos grafos proporciona ferramentas simples, acessíveis e poderosas para a construção de modelos e resolução de problemas relacionados com arranjos de objetos discretos. Ela está relacionada com muitos ramos da matemática, incluindo teoria de grupos, teoria de matrizes, análise numérica, probabilidade, topologia e obviamente combinatória. A localização de medianas é um dos tipos de problemas importantes da teoria dos grafos. Neste problema, o objetivo é a alocação de facilities¹ em uma determinada rede, representada por um grafo.*

Palavras chaves. *Grafos, arestas, vértices, mediana.*

¹ A palavra *facility* vem do inglês e não possui tradução, mas alguns autores a traduzem por facilidade. Ela representa fábricas, depósitos, escolas, etc.

1. Introdução

A teoria dos grafos é muito conhecida e utilizada no ensino superior, conforme afirmam Silva e Nascimento (2007). Segundo Rabuske (1992), a teoria dos grafos proporciona ferramentas simples, acessíveis e poderosas para a construção de modelos e resolução de problemas relacionados com arranjos de objetos discretos. Pode-se dizer que a teoria dos grafos é um dos mais simples e mais elegantes assuntos da matemática moderna, possuindo uma variedade de aplicações. Baseada na simples idéia de pontos interligados por linhas, a teoria dos grafos combina estes ingredientes básicos em um rico sortimento de formas e dota estas propriedades com características flexíveis, fazendo assim, com que esta teoria seja uma ferramenta útil para estudar vários tipos de sistemas.

O grande impulso para o desenvolvimento da teoria dos grafos foi o problema de Euler, também chamado problema das sete pontes de Königsberg, constituído por ilhas ligadas às margens por seis pontes, além de uma sétima que interligava as duas ilhas (Figura 1). Baseava-se no fato que nenhum dos costumeiros freqüentadores do local era capaz de percorrer essas sete pontes sem passar mais de uma vez por alguma delas. Euler mostrou à Academia de S. Petesburgo, em 1735, a primeira demonstração da impossibilidade de resolução do referido problema, isto é, dada a disposição das pontes, era impossível percorrer todas elas passando uma única vez em cada ponte.

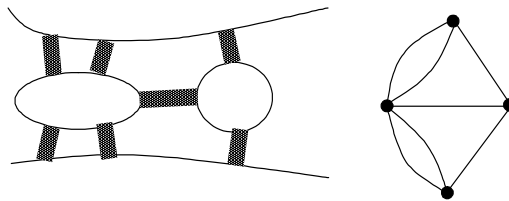


Figura 1. O problema das pontes de Königsberg

Boaventura (2003), afirma que o desenvolvimento da Teoria dos Grafos veio dar-se, sob o impulso das aplicações a problemas de otimização organizacional, dentro do conjunto de técnicas que forma hoje a pesquisa operacional, já na segunda metade do século XIX. Pode-se ainda dizer que esse desenvolvimento ocorreu devido ao aparecimento do computador, sem o qual a maioria das aplicações de grafos seria impossível.

2. Conceitos Preliminares

2.1 Definições

Denomina-se grafo o conjunto $G(V, E)$, onde V é um conjunto finito e não vazio e E um conjunto de pares ordenados, de elementos distintos de V .

Ou seja, um grafo G é definido como sendo um par ordenado (V, E) , no qual V é um conjunto e E é uma relação binária sobre V . Os elementos de V são denominados vértices (pontos, nós ou nodos) e os pares ordenados de E são denominados arestas (linhas ou arcos) do grafo G (Figura 2). Diz-se que uma aresta é incidente sobre os nós

que ela conecta. Dois vértices quaisquer que estejam conectados por uma aresta são chamados adjacentes. Também são chamadas de adjacentes duas arestas que se conectam a um mesmo vértice.

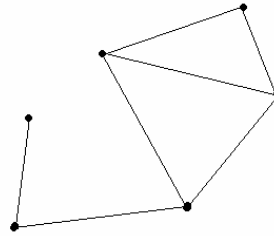


Figura 2. Grafo com 6 vértices e 7 arestas.

Um arco conectando o vértice v com o vértice w será denotado pelo par não ordenado (v, w) . Um grafo é dito orientado quando suas arestas possuem orientação ou direção, em um grafo não orientado, uma aresta ligando dois vértices v e w pode ser representada por (v, w) ou (w, v) .

Um grafo é dito dirigido quando suas arestas possuem orientação ou direção.

Um grafo é dito valorado quando atribui-se valores às suas arestas. A ordem de um grafo G é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices. Em um grafo não orientado, o grau de um vértice é o número de arcos que incidem sobre ele. No caso do grafo ser dirigido, fala-se em grau de entrada e grau de saída. O grau de entrada é o número de arestas que chegam a ele, e o grau de saída é o número de arestas que saem dele.

Um vértice que não possui aresta incidente é dito isolado ou vértice de grau zero, e um vértice de grau 1 é dito pendente.

Um laço é uma aresta ou arco do tipo $a = (v, v)$, ou seja, que relaciona um vértice a ele próprio.

Um grafo é regular de grau k , ou k -regular, quando todos os seus vértices têm o mesmo grau k .

Um grafo é dito conexo se for possível visitar qualquer vértice, partindo de um outro e passando por arestas, sendo que esta visita sucessiva é denominada caminho.

2.2 Representação de Grafos

2.2.1 Matriz de Adjacência

Trata-se de uma matriz A de ordem n , onde associa-se cada linha e coluna a um vértice. Os dados estruturais correspondem a valores nulos associados a ausência de ligações e valores não nulos, geralmente 1, quando o grafo for não valorado, nas posições (i, j) associados a presença de arcos, ou seja.

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se existe a aresta } (i, j) \\ 0, & \text{se a aresta } (i, j) \text{ não existe} \end{cases}$$

A matriz de adjacência de um grafo não orientado pode apresentar forma triangular (superior ou inferior) ou simétrica, já que não há distinção entre os dois sentidos possíveis para cada aresta.

2.2.2 Matriz de Custo

Quando se atribuem valores para as arestas de um grafo ele é chamado de grafo valorado. Estes valores podem estar representando distância, tempo de viagem, custo de viagem, etc. De um modo geral, estes valores são chamados custo, independentemente do que estejam representando. Para um grafo, define-se a matriz de custo $D = [d_{i,j}]$ do seguinte modo:

$$d_{i,j} = \begin{cases} \text{custo da aresta } (i, j), & \text{se esta aresta existir} \\ 0 & \text{se } i = j \\ \infty & \text{se não existir a aresta } (i, j) \end{cases}$$

2.2.3 Matriz de incidência

É uma matriz de dimensões $n \times m$, na qual cada linha corresponde a um vértice e cada coluna a uma ligação.

Dado um grafo $G(V, E)$, de n vértices e m arestas, a matriz de incidência de G é denotada por $B = [b_{i,j}]$ e é $n \times m$ como segue:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \text{ se for vértice inicial de } e_j \\ 0 & \text{em caso contrário ou se } e_j \text{ for um laço} \end{cases}$$

Se o grafo G for orientado, poderá ser definido como:

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se custo da aresta } v_i \text{ for vértice inicial de } e_j \\ -1 & \text{se } v_i \text{ for vértice final de } e_j \\ 0 & \text{em caso contrário ou se } e_j \text{ for um laço} \end{cases}$$

3. Distância

Aqui serão apresentados alguns conceitos de distância, que serão necessários para resolver problemas de mediana, os quais serão tratados na próxima seção.

Dados dois vértices v e w pertencentes ao grafo $G(V, E)$, denomina-se distância,

entre v e w , ao comprimento do menor caminho entre esses dois vértices. No caso da não existência desse caminho, considera-se a distância infinita.

Será usado $d(v, w)$ como notação de distância entre os vértices v e w .

Em um grafo conexo, distância é uma métrica, isto é, para todo vértice u, v e w de $G(V, E)$ tem-se que:

- i) $d(u, v) \geq 0$ com $d(u, v) = 0$ se e só se $u = v$;
- ii) $d(u, v) = d(v, u)$ ocorre apenas quando o grafo é não orientado;
- iii) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$.

4. Medianas

Mediana ou centróide de um grafo $G(V, E)$ é um vértice para o qual a soma das distâncias aos demais vértices é mínima. Existem problemas que tem como solução uma única mediana (um único vértice), chamada de 1-mediana, que será abordada nesta seção. Porém, há casos em que existem mais de uma mediana como solução, chamados de 2 - mediana, 3 - mediana, ou p - mediana de um modo geral. Os casos em que $p > 1$ não serão abordados neste trabalho.

Definição da 1 - mediana: Um nó x_k de um grafo G , é chamado de 1 - mediana se o $\min\{\sum_{j=1}^n d_{i,j} \cdot h_j, i = 1, \dots, n\}$ ocorrer para $i = k$, onde h_j representa o peso de vértice j e $d_{i,j}$ é a menor distância do vértice i ao vértice j .

Uma mediana é a solução para o problema de localização de um serviço comercial de entregas no qual apenas um local seja atendido de cada vez. Trata-se de um caso extremo no que se refere ao roteamento do serviço, ou seja, à distribuição da programação de entregas pelas viagens a isso destinadas. Nos problemas de medianas não se incluem, habitualmente, conotações de urgência. O conceito de mediana é bastante útil em inúmeras situações práticas. Como exemplos podem-se citar: a localização de depósitos de mercadorias em uma rede de rodovias, onde se deseja abastecer diversos clientes com localizações fixas e conhecidas; a localização de cabines de telefones públicos; localização de uma escola entre vários bairros; localização de unidades operacionais dos correios, de forma que o deslocamento dos carteiros para atender a demanda de entregas em determinadas regiões seja o menor possível, entre outras.

Para este trabalho será apresentado um problema prático, relativo a uma entrega de mercadorias, que está descrito a seguir.

Problema 1 - No município de Planalto um restaurante ficou responsável para fazer a entrega do almoço aos funcionários de algumas empresas. A justificativa para tal atitude é que nessas empresas, muitos funcionários tem um curto espaço de tempo para o horário do almoço, pois fazem um horário diferenciado, tornando-se inviável que se desloquem das fábricas para fazer sua refeição. Sendo assim, o restaurante deve fazer a entrega dos almoços a cinco empresas, que estão distribuídas como na figura 3. O veículo que faz a entrega é pequeno, tendo o motorista que ir e voltar a cada entrega para reabastecer o caminhão.

O gerente do negócio, preocupado com os gastos, deseja descobrir qual é o melhor local para se instalar. Vamos admitir que a instalação do restaurante possa ser feita em qualquer um destes pontos ou muito próximos a eles, de forma que a soma das distâncias percorridas para fazer as entregas dos almoços seja a menor possível.

Solução: Para resolver o problema acima descrito deve-se primeiramente obter a matriz das distâncias mínimas do grafo em questão. Com a matriz já montada deve-se fazer a soma de todas as linhas, e verificar em qual delas ocorre a menor soma, se este valor mínimo ocorre na linha i então este será o ponto onde podemos instalar o negócio, com a melhor opção de forma a minimizar a soma dos caminhos.

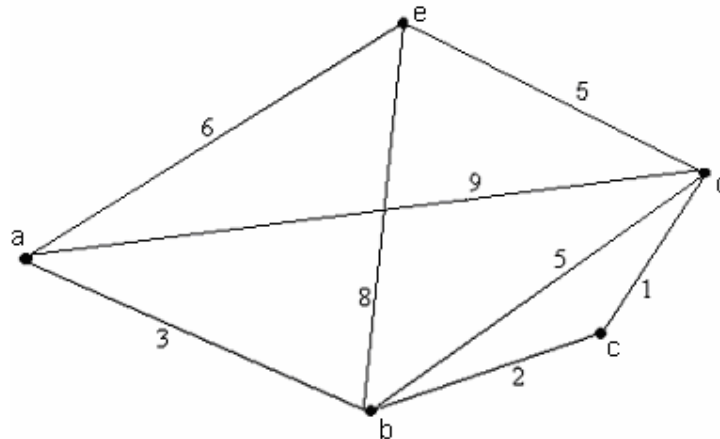


Figura 3. Problema de localização do Restaurante

Matriz das distâncias mínimas:

	a	b	c	d	e	Soma das Distâncias
a	0	3	5	6	6	20
b	3	0	2	3	8	16
$D = c$	5	2	0	1	6	14
d	6	3	1	0	5	15
e	6	8	6	5	0	25

De acordo com a matriz de custos o problema acima descrito tem como solução o ponto c , com a menor soma satisfazendo as expectativas do gerente, que instalando o restaurante no ponto c , terá a melhor opção, para fazer a economia que espera.

4.1 Mediana com demandas

Como citado na definição de 1 – mediana, pode haver casos ponderados por um fator de demanda. Para exemplificar, considere-se o problema prático a seguir.

Problema 2 – Considere-se o grafo da figura 4, que representa uma área urbanizada de uma cidade, onde se deseja instalar uma “facility”. Uma comissão estuda

o melhor local para instalar um depósito de mercadorias, a fim de abastecer diversos clientes, de forma que a distância percorrida para atendê-los seja a menor possível. Já que os meios de transporte são de pequeno porte, para cada entrega o veículo sai do depósito, descarrega e retorna para reabastecer. Os vértices a , b , c , d e e representam os clientes, ou seja pontos onde demandas de serviços são geradas diariamente e são indicadas através dos valores entre parênteses próximos aos vértices de onde são originados. O comprimento dos vários segmentos são indicados em km (quilômetros), representando a distância de uma localidade a outra. Onde deveria estar localizado este depósito de mercadorias, para minimizar a média da soma das distâncias?

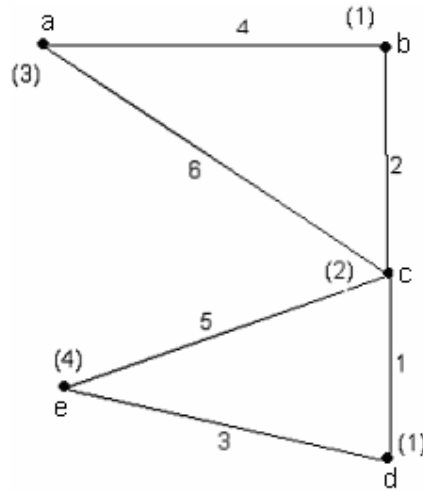


Figura 4. Representação de uma área urbanizada

Solução: Para resolver este problema, primeiramente é necessário construir a matriz dos caminhos mínimos entre todos os pares de vértices. Esta matriz está apresentada a seguir.

$$D = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 & 7 & 10 \\ 4 & 0 & 2 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 7 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 10 & 6 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Com a matriz já montada, devemos multiplicar cada coluna pelo peso do vértice j , e ainda fazer a soma de todas as linhas. O resultado destas operações pode ser observado na matriz $D^{(1)}$.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	Soma das distâncias
<i>a</i>	0	4	12	7	40	63
<i>b</i>	12	0	4	3	24	43
$D^{(1)} = c$	18	2	0	1	16	37
<i>d</i>	21	3	2	0	12	38
<i>e</i>	30	6	8	3	0	47

Verificando em qual linha ocorre a menor soma, obtém-se a solução do problema. Para este caso tem-se como solução o ponto *c*, com a menor soma, sendo a melhor opção para instalar o depósito.

5. Conclusões

O conceito de mediana é bastante útil pois tem inúmeras aplicações. De posse da matriz de distâncias mínimas o algoritmo para resolver um problema de mediana é bastante simples, requerendo uma quantidade reduzida de cálculos.

6. Referências

- ANDRADE, C. Q. **A Criação no Processo Decisório**. Editora LCT, 1980.
- BOAVENTURA NETTO, P. O. **Teoria e Modelos de Grafos**. São Paulo: Edgard Blucher Ltda. pp 1-7;34-48. 1979.
- GALVÃO, R.D., NOBRE, F.F., VASCONCELLOS, M. M. Modelos matemáticos de localização aplicados à organização espacial de unidades de saúde. In: **Rev. Saúde Pública** vol.33 n.4 São Paulo Aug. 1999. Disponível em http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0034-89101999000400014&lng=en&nrm=iso. Acesso 28 ago 2008.
- LOUÇA JUNIOR, C. et al. Aplicação de uma heurística GRASP paralela ao problema da p- mediana. In: **Anais do X ENCITA**. 2004. Disponível em <http://www.bibl.ita.br/xencita/Artigos/13.pdf>. Acesso 28 jul 2008.
- RABUSKE, M. A. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Florianópolis: UFSC, 1992.184 p.
- SOUZA, T. B. e VICENTE, A. Grafos e a localização do centro de emergência. In **Anais da XXI SAM**, UNIOESTE, 2007. Disponível em <http://cac.php.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxisam/PDFs/09.pdf>. Acesso 14 jun 2008.