

# CAPÍTULO I

## CONCEITOS, REDES E MODELOS

### 1. CONCEITOS BÁSICOS

É introduzido um conjunto mínimo de conceitos básicos para o desenvolvimento do texto. As notações e nomenclaturas são bastante variadas, porém, adota-se as mais usuais e sempre que necessárias são citadas as demais.

Um sistema de comunicação, uma estrutura molecular, uma rede elétrica, um mapa rodoviário são alguns dos problemas que podem ser representados por um diagrama em que um conjunto de pontos, ou **NÓS**, ou **VÉRTICES**, estão interligados por um conjunto de **ARCOS** ou **RAMOS**. O diagrama completo compõe um **GRAFO**.

Um **GRAFO**, definido pelo par ordenado  $G = (N, A)$ , é composto por um conjunto finito  $N$  de **NÓS** ou **VÉRTICES**, e um conjunto  $A$  de **ARCOS**, **RAMOS** ou **ARESTAS**, ligando diferentes pares de vértices distintos. Na figura (1) é mostrada a representação geométrica de um grafo onde  $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e o respectivo conjunto de arcos  $A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 5), (2, 5), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}$ .

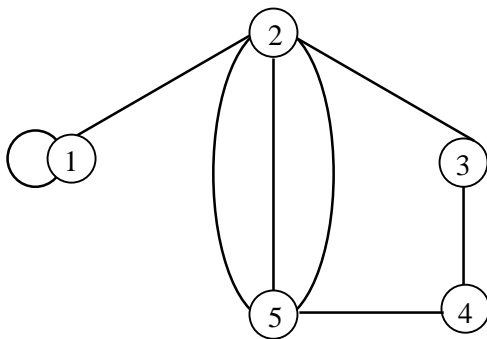


Figura 1. Grafo  $G = (N, A)$

Dois nós podem estar interligados por mais de um arco, **ARCOS MÚLTIPLOS**. Se o grafo da figura (1) é um mapa rodoviário ou um sistema de comunicação, então tem-se mais de uma estrada ou mais de um canal de comunicação do nó 2 para o nó 5. Estendendo a definição de grafo dada acima, e considerando pares de vértices não necessariamente distintos, então um **LAÇO** é um arco da forma  $(i, i)$  que liga um nó a ele mesmo. Veja o arco  $(1, 1)$  na figura (1). Muitas vezes os arcos são pares ordenados de nós, apresentando direções representadas por uma flecha. Neste caso resulta **ARCOS DIRECIONADOS** e o correspondente **GRAFO DIRECIONADO** ou **DIGRAFO**, onde  $(i, j)$  é um arco direcionado de  $i$  para  $j$ . Como exemplo

pode ser citado uma estrada de mão única ou um canal de comunicação unidirecional. Um arco não direcionado pode ser escrito em qualquer ordem.  $(i, j)$  e  $(j, i)$ , ou substituído por dois arcos direcionados com sentidos opostos. Trabalha-se neste texto principalmente com grafos direcionados.

Um nó  $j \in N$  é SUCESSOR de  $i \in N$  se existe o arco  $(i, j) \in A$ , e consequentemente,  $i$  é PREDECESSOR de  $j$ . A existência do arco  $(i, j) \in A$  torna estes NÓS ADJACENTES, uma vez que são EXTREMIDADES de um mesmo arco. De forma semelhante, define-se ARCOS ADJACENTES quando os dois tiverem uma extremidade em comum. Para um nó  $i \in N$ , os arcos que SAEM,  $S(i)$ , ou ENTRAM,  $E(i)$ , ou estão LIGADOS a  $i$ ,  $(E(i) \cup S(i))$ , compõem o conjunto de seus ARCOS INCIDENTES. A cardinalidade desse conjunto é o GRAU desse nó  $i \in N$ . Assim, em uma estrutura molecular em que os nós são os elementos químicos, o nó associado a um átomo de carbono tem grau quatro enquanto o hidrogênio tem grau unitário. Ainda mais, se o grafo é direcionado então é definido o GRAU DE ENTRADA do nó  $i \in N$  como o número de arcos que entram em  $i$ ,  $|E(i)|$ , e o GRAU DE SAÍDA do nó  $i \in N$  como o número de arcos que saem de  $i$ ,  $|S(i)|$ .

Além da representação geométrica, um ferramental importante é a representação matricial ou por listas, que permite uma maior habilidade para uso computacional.

A MATRIZ DE ADJACÊNCIAS é a forma mais encontrada apesar de não ser a mais econômica. Dado um grafo  $G = (N, A)$ ,  $|N| = n$ , a matriz de Adjacências  $B$  é de ordem  $(n \times n)$  e tal que:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se existe } (i, j) \in A; \\ 0, & \text{se não existe } (i, j) \in A. \end{cases}$$

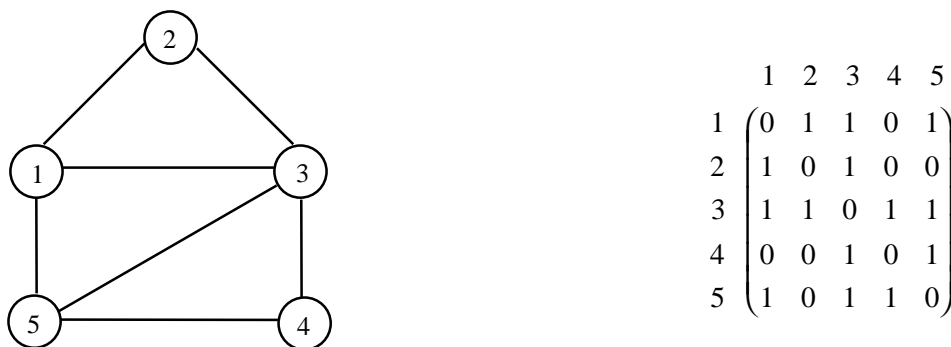


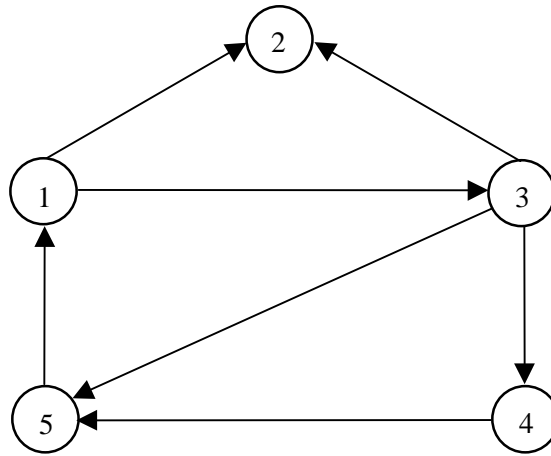
Figura 2. Grafo  $G$  e sua matriz de adjacências.

É uma matriz simétrica para um grafo não direcionado e representa univocamente o grafo dado.

A MATRIZ DE INCIDÊNCIAS de um grafo direcionado  $G = (N, A)$ ,  $|N| = n$ ,  $|A| = m$ , sem laços, é de ordem  $(n \times m)$  (cada nó gera uma linha e cada arco uma coluna) e definida como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se o arco } a_j \text{ sai de } i; \\ -1, & \text{se o arco } a_j \text{ entra em } i; \\ 0, & \text{se o arco } a_j \text{ não está ligado a } i. \end{cases}$$

Para grafos não direcionados basta substituir  $b_{ij} = -1$  por  $b_{ij} = 1$  no segundo assinalamento. Apesar de ocupar um espaço de memória maior, esta matriz é bastante utilizada para os problemas de fluxos em redes. Também representa univocamente o grafo dado.



	(1,2)	(1,3)	(3,2)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	(5,1)
1	1	1	0	0	0	0	-1
2	-1	0	-1	0	0	0	0
3	0	-1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	-1	0	1	0
5	0	0	0	0	-1	-1	1

Figura 3. Grafo  $G$  e sua matriz de incidências.

Uma outra forma de representação de um grafo  $G = (N, A)$  é dada pela ESTRUTURA DE ADJACÊNCIAS, que é um conjunto de  $n$  listas, uma para cada nó, onde a lista correspondente a  $i$  contém todos os nós  $j$  adjacentes a  $i$ . Tudo se passa como uma matriz de adjacências onde todos os elementos nulos ( $b_{ij} = 0$ ) são retirados. Veja figura (4).

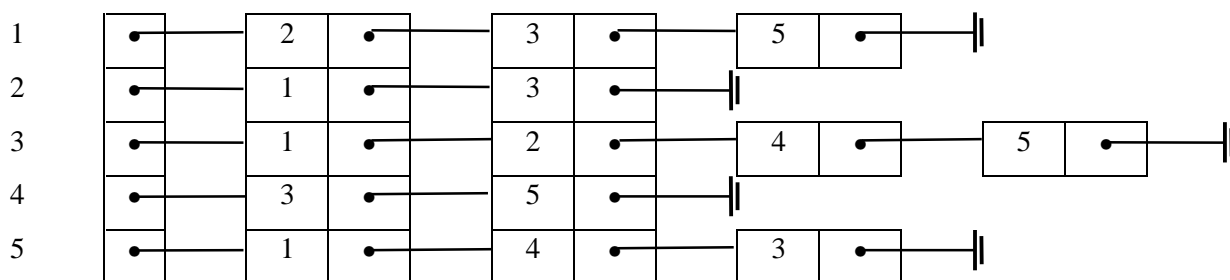
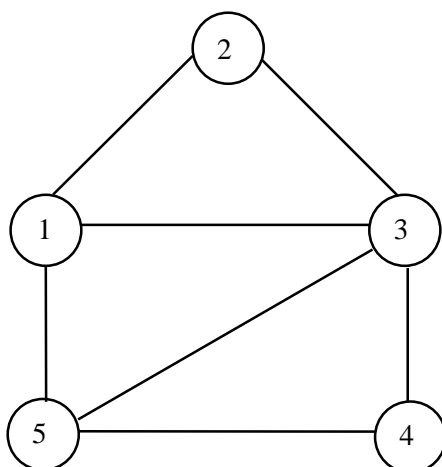


Figura 4. Grafo  $G$  e sua estrutura de adjacências.

Alguns grafos apresentam estruturas e representações geométricas particulares. Assim, são definidos inicialmente, três tipos de grafos: simples, completo e bipartido. O GRAFO é SIMPLES se não tem laços e não tem arcos múltiplos. É um GRAFO COMPLETO se existe um arco para cada par de nós, ou quaisquer dois nós são adjacentes (Figura 5 (a)). E é um GRAFO BIPARTIDO quando o conjunto  $N$  de nós puder ser particionado em dois subconjuntos  $N^1$  e  $N^2$  tais que todos os arcos têm uma extremidade em  $N^1$  e a outra em  $N^2$  (Figura 5 (b)). Como resultado das definições acima pode ser composto o GRAFO BIPARTIDO COMPLETO

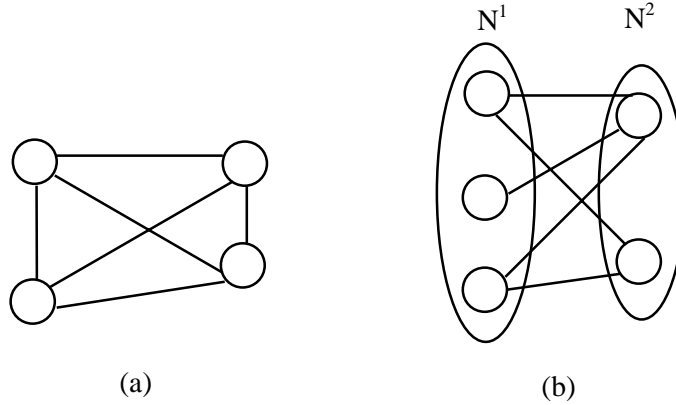


Figura 5. Grafo completo e Grafo bipartido

Um GRAFO PARCIAL DE  $G = (N, A)$  é um grafo  $G' = (N, A')$  onde  $A' \subset A$ . Os mesmos nós em  $N$  estão interligados por um subconjunto  $A'$  do conjunto de arcos iniciais  $A$ , com a retirada de algum(ns) arco(s). (Veja figura (6)).

Um SUBGRAFO DE  $G = (N, A)$  é um grafo  $G' = (N', A')$  onde  $N' \subset N$ ,  $A' \subset A$ , e  $A'$  contém todos os arcos  $(i, j) \in A$  tais que  $i \in N'$  e  $j \in N'$ , ou seja, com ambas as extremidades em  $N'$ . Portanto, em um subgrafo retira-se nós e os respectivos arcos adjacentes a eles. Com os dois últimos conceitos apresentados resulta a definição de SUBGRAFO PARCIAL (Figura (6)). Além dos nós e arcos adjacentes a esses nós retira-se também pelo menos mais um arco.

De uma maneira geral deseja-se caminhar pelo grafo, indo de um nó a outro ou passar por uma sequência de arcos. Para tal outros conceitos serão necessários. Uma CADEIA é uma sequência de arcos  $(a_1, a_2, \dots, a_p)$  tais que, cada arco  $a_i$ , com exceção do primeiro e do último, é ligado ao arco  $a_{i-1}$  por uma extremidade e a  $a_{i+1}$  pela outra. Se essa sequência de arcos liga um nó a si mesmo, CADEIA FECHADA, e passa no máximo uma vez pelo mesmo arco então resulta um CICLO.

Os grafos apresentados até então, possuem representações geométricas onde todos os nós estão interligados diretamente pelos arcos ou por seqüências de arcos. Nesse caso, quando todo par de nó é ligado por alguma cadeia, o grafo é dito ser CONEXO, caso contrário é DESCONEXO (Figura (7)). De uma maneira alternativa, diz-se que um grafo é CONEXO quando para todo subconjunto  $N' \subset N$  e  $N' \neq \emptyset$ , existe um arco unindo um nó de  $N'$  a um nó em  $(N - N')$ . (Boaventura [1977]).

Um grafo conexo  $G$  é chamado EULERIANO se contém um ciclo que passa por todos os arcos de  $G$ . Esse nome está vinculado ao fato de Euler ter sido o primeiro a analisar esse grafo especial, resolvendo o problema da ponte de Königsberg em 1736. Esse problema foi um marco inicial da teoria dos grafos e consiste em determinar no grafo da figura (8) um ciclo Euleriano. Euler mostrou a não existência desse ciclo e resumiu o resultado com o teorema abaixo (demonstração em Wilson [1979]).

**TEOREMA 1.** *Um grafo conexo  $G$  é Euleriano se e só se o grau de todo nó de  $G$  é par.*

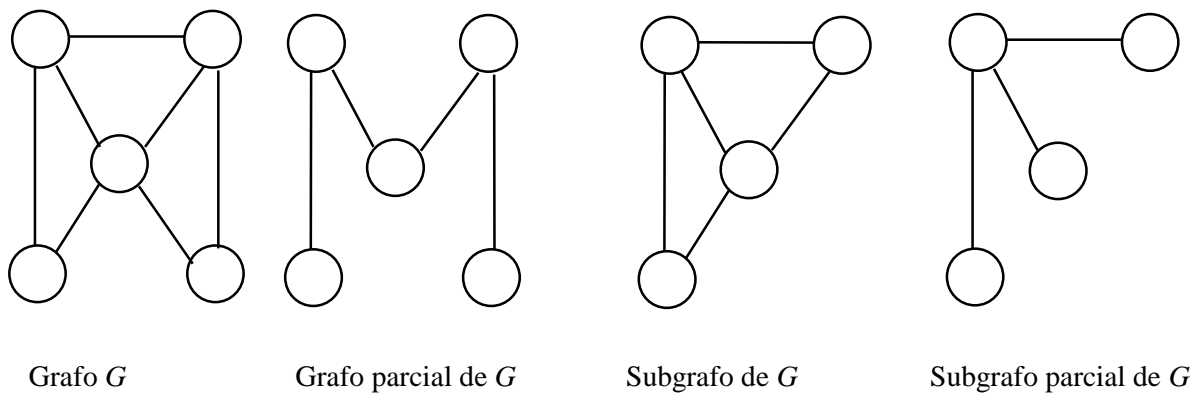


Figura 6. Grafo parcial e subgrafo.

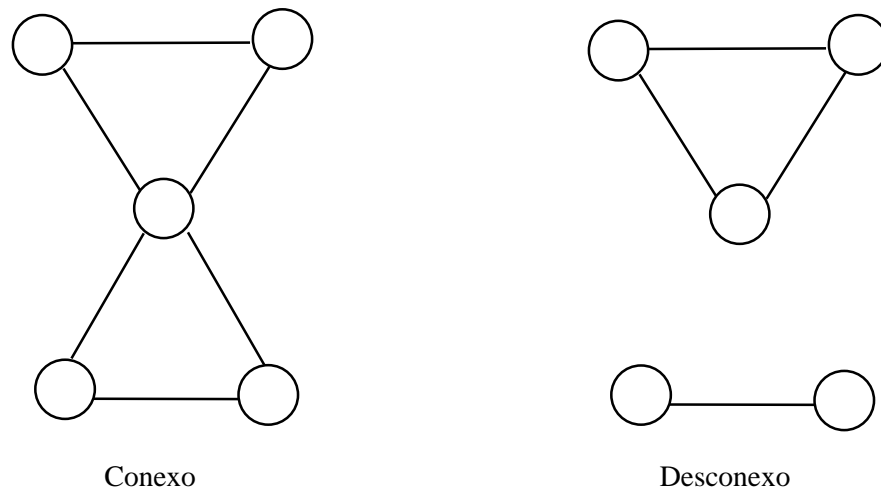


Figura 7. Grafo conexo e desconexo.

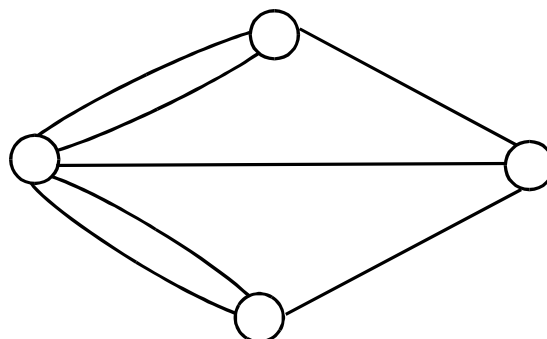


Figura 8. Grafo associado ao problema de Königsberg.

Esse tipo de grafo está de uma certa maneira vinculado ao problema clássico do Carteiro Chinês. Um carteiro deseja entregar as cartas pelas ruas da cidade percorrendo a menor distância total. Observe que se o grafo correspondente à estrutura da cidade é Euleriano então basta encontrar o ciclo Euleriano. Com isso percorrerá todos os arcos e passando uma única vez em cada um deles.

Um problema similar ao anterior foi proposto por Willian Hamilton no século XIX. Dado o grafo conexo  $G$  correspondente a um dodecaedro, encontrar um ciclo, denominado Hamiltoniano que passa exatamente uma vez por cada nó de  $G$ . Veja a figura (9). Por extensão, um grafo que contém tal ciclo é também chamado GRAFO HAMILTONIANO.

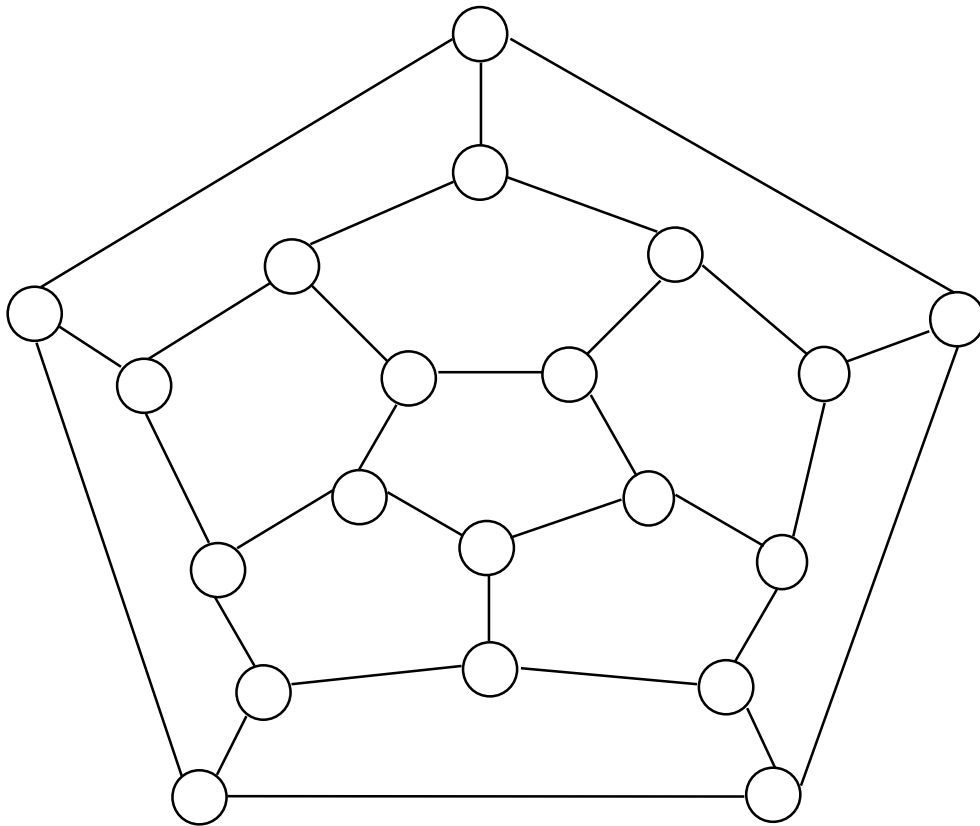


Figura 9. Grafo associado ao dodecaedro

Esse tipo de grafo também está de uma certa maneira vinculado a outro problema clássico, o Caixeiro Viajante. Esse caixeiro deseja visitar um conjunto de cidades (nós), partindo de uma cidade qualquer e retornando à mesma, passando no máximo uma vez por cada cidade e percorrendo a menor distância possível. Trata-se portanto de determinar o ciclo Hamiltoniano com a menor distância total. É um problema de difícil solução e não existe um

algoritmo satisfatório para resolvê-lo. Isto porque ainda não foram estabelecidas condições significativas de necessidade e suficiência para caracterizar um grafo Hamiltoniano. Esse é um dos problemas não resolvidos pela Teoria dos Grafos. Uma das condições para essa caracterização é dada pelo teorema abaixo. (Demonstração em Wilson [1979].)

**TEOREMA 2:** *Se  $G$  é um grafo simples com  $n \geq 3$  nós, e se para cada par de nós não adjacentes, a soma dos seus graus é maior ou igual a  $n$ , então  $G$  é Hamiltoniano.*

Os conceitos de cadeia e ciclo são não direcionados. Porém, se a cadeia é orientada ou se todos os arcos da seqüência possuem a mesma direção então resulta um CAMINHO. De forma semelhante, se essa seqüência de arcos liga um nó a si mesmo, caminho fechado, e passa no máximo uma vez pelo mesmo arco então é obtido um CIRCUITO.

Um grafo CONEXO em que todo par de nós é ligado por algum caminho é dito ser FORTEMENTE CONEXO (Figura (10)). De outra maneira, um grafo é FORTEMENTE CONEXO quando para todo subconjunto  $N' \subset N$  e  $N' \neq \emptyset$ , existe ao menos um nó  $j \in (N - N')$  que é sucessor de algum nó de  $N'$  (Boaventura [1977]).

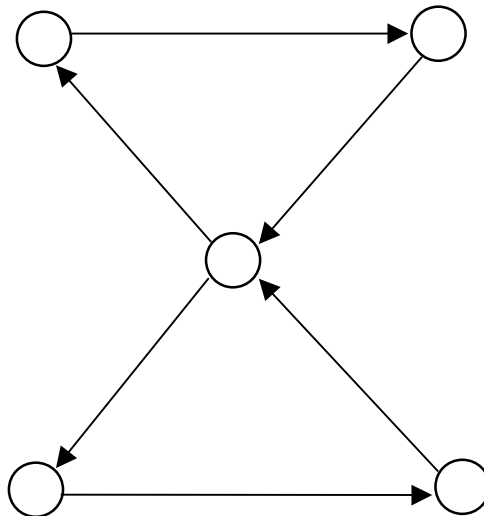


Figura 10. Grafo fortemente conexo.

Os grafos Eulerianos e Hamiltonianos também podem ser caracterizados para os digrafos ou grafos direcionados. Assim, um DIGRAFO conexo  $G$  é chamado EULERIANO se contém um circuito que passa por todos os arcos de  $G$ . E é um DIGRAFO HAMILTONIANO se contém um circuito passando exatamente uma vez por cada nó de  $G$ . Por se tratar de problemas ainda mais restritos que os anteriores, a identificação de condições necessárias e suficientes é também muito complexa. Uma primeira condição necessária é que o digrafo seja



fortemente conexo. Uma condição mais forte para um digrafo Euleriano é dada pelo teorema abaixo. (Wilson [1979]).

**TEOREMA 3.** *Um digrafo conexo  $G$  é Euleriano se e somente se o grau de entrada,  $|E(N)|$ , é igual ao grau de saída,  $|S(N)|$ , para cada nó de  $G$ .*

Os estudos para os Digrafos Hamiltonianos são ainda mais complexos. Uma extensão do teorema (2) é dada a seguir (Wilson [1979]).

**TEOREMA 4.** *Seja  $G$  um digrafo fortemente conexo com  $n$  nós; se os graus de entrada,  $|E(n)|$ , e de saída,  $|S(n)|$ , são maiores ou iguais a  $n/2$  para cada nó de  $G$ , então  $G$  é Hamiltoniano.*

O próximo conceito é um grafo especial e bastante utilizado. Uma ÁRVORE é um grafo conexo sem ciclos. Um conjunto de árvores é uma FLORESTA. Um exemplo de árvore muito conhecida é a genealógica. Outras formas de caracterizar esse grafo simples são dadas pelo seguinte teorema:

**TEOREMA 5.** *Seja  $G=(N, A)$  um grafo tal que  $|N| \geq 2$ ; As afirmativas abaixo são equivalentes para identificar  $G$  como uma árvore:*

- (a)  $G$  é conexo e sem ciclos;
- (b)  $G$  é conexo e tem  $(n - 1)$  arcos;
- (c)  $G$  é sem ciclos e tem  $(n - 1)$  arcos;
- (d)  $G$  é sem ciclos pela adição de um arco cria-se um único ciclo;
- (e) Todo par de nós é interligado por uma única cadeia.

A demonstração pode ser vista em Gonzaga [1974], Tucker [1980].

**TEOREMA 6.** *Um grafo  $G = (N, A)$  possui um grafo parcial que é uma árvore se e somente se  $G$  é conexo.*

Demonstração em Boaventura [1977].

Se  $G' = (N, A')$  é um grafo parcial de  $G = (N, A)$  e  $G'$  é uma árvore, então denomina-se  $G'$  de ÁRVORE GERADORA DE  $G$  (Veja figura (11)). Portanto, trata-se de uma árvore contendo todos os nós do grafo.

Pelo teorema (6) e pela definição acima, um grafo possui árvore geradora se e somente se for conexo.

Um problema clássico da teoria dos grafos é a determinação da árvore geradora mínima de um grafo  $G$ . Associando pesos, custos ou distâncias a cada arco do grafo, o objetivo

é encontrar uma árvore geradora tal que a soma dos pesos nos arcos seja mínima. Para esse problema Kruskal [1956] propôs um algoritmo guloso bastante eficiente e que determina a solução ótima para o problema. Devido a sua simplicidade, esse algoritmo é aplicado em vários contextos tais como na obtenção de limites inferiores para o problema do caixeiro viajante ou como heurísticas na resolução dos problemas da mochila, recobrimento, localização, etc.

Um nó  $i \in N$  é uma **RAIZ DO GRAFO** se existe um caminho de  $i$  para todos os demais nós do grafo. É um conceito em que a orientação dos arcos é importante. Como extensão pode-se definir uma **ARBORESCÊNCIA** que é uma árvore com raiz. Para os grafos não direcionados qualquer nó da árvore pode ser a raiz.

**TEOREMA 7.** *Seja  $G = (N, A)$  um grafo tal que  $|N| \geq 2$ . As afirmativas abaixo são equivalentes para identificar  $G$  como uma arborescência:*

- (a)  $G$  é uma árvore de raiz  $r$ ;
- (b) Existe um nó  $r$  em  $G$  ligado a cada um dos demais nós por um caminho único;
- (c)  $G$  é sem ciclos e tem exatamente um arco dirigido para cada nó  $i \in (N - r)$ ;
- (d) Particionando  $N$  em  $N1$  e  $N2$  com a raiz  $r \in N1$ , então existe um arco direcionado de um nó de  $N1$  para outro em  $N2$ .

A demonstração é bastante simples.

A figura (12) apresenta três arborescências. Em (12(a)(b)) o grafo é direcionado e em (12(c)) é não direcionado.

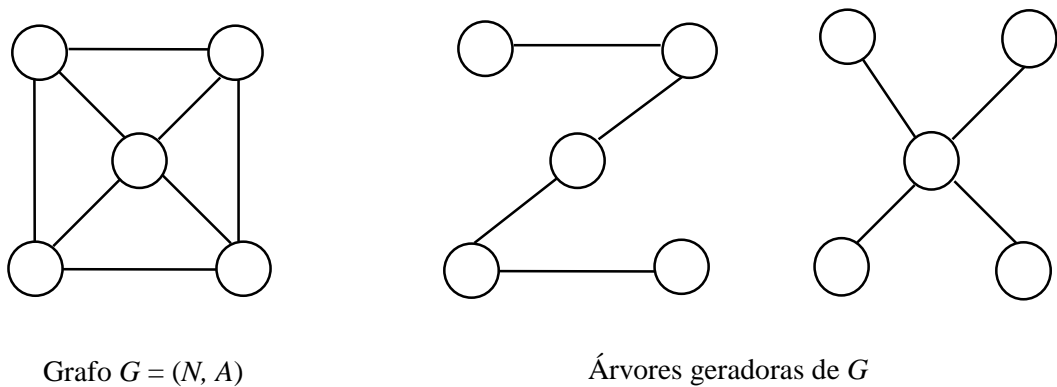


Figura 11. Grafo  $G$  e três árvores geradoras de  $G$ .

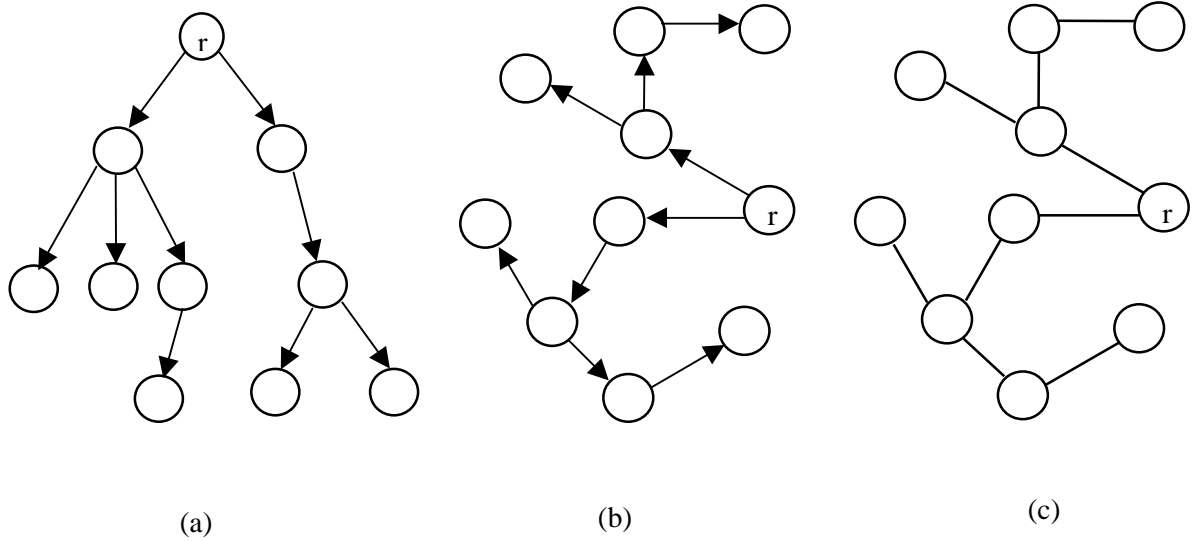


Figura 12. Arborescências.

Seja o grafo  $G = (N, A)$  onde  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ . Se a cada arco  $a_j$  associa-se uma ou mais constantes  $c(a_j)$  então  $G$  é denominado GRAFO COM PESOS ou VALORADO. Mais especificamente, se  $G$  é um grafo orientado então resulta uma REDE. Esse parâmetro pode ser um peso, um custo, uma distância, uma capacidade do arco, etc. Pode-se também associar a cada arco  $a_j$  uma função  $f(a_j)$  denominada FLUXO no arco  $a_j$  e tal que para qualquer  $i \in N$ .

$$\sum_{a_j \in S(i)} f(a_j) - \sum_{a_j \in E(i)} f(a_j) = b_i \quad (1)$$

onde  $b_i$  é uma constante que pode assumir valor positivo, nulo ou negativo. Os fluxos que saem do nó  $i$  menos os fluxos que entram em  $i$  é igual a  $b_i$ . Para o caso específico em que  $b_i = 0$  resulta a primeira lei de Kirschhoff ou lei de conservação nos nós. Será mostrado posteriormente que em (1) é sempre possível fazer  $b_i = 0$  para todo  $i \in N$ .

Para um arco  $a_j$  define-se LIMITES DE FLUXO  $l_j$  e  $w_j$  de tal forma que um fluxo viável em  $a_j$  deva atender a seguinte condição:  $l_j \leq f(a_j) \leq w_j$ .

Com as definições acima, será descrito na próxima seção alguns problemas de FLUXOS EM REDES, apresentando seus modelos matemáticos para posteriormente desenvolver alguns algoritmos.

## 2. REDES E MODELOS

Os modelos de fluxos em redes são obtidos como casos particulares de um MODELO GERAL DE FLUXOS que engloba a condição (1) e os limites de fluxo:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{a_j \in A} g(f(a_j)) \\ (M1) \quad & \sum_{a_j \in S(i)} f(a_j) - \sum_{a_j \in E(i)} f(a_j) = b_i \\ & l_j \leq f(a_j) \leq w_j, \quad a_j \in A \end{aligned}$$

Pelo modelo deseja-se dimensionar os fluxos em cada arco  $a_j$ , distribuindo um certo produto de várias fontes de produção, nós  $i \in N$  tal que  $b_i > 0$ , para um conjunto de centros de demanda, nós  $i \in N$  tal que  $b_i < 0$ , minimizando o custo de distribuição e obedecendo as restrições de capacidades nos nós e arcos. Supõe-se que  $\sum_{i=1}^n b_i = 0$ , caso contrário, essa condição será obtida acrescentando nós fictícios, conforme será mostrado posteriormente.

Uma outra forma de apresentação desse modelo é obtida substituindo o fluxo no arco  $a_j = (i, k)$ , pela variável  $x_{ik} = f(a_j)$ . Esta variável de decisão torna o modelo (M1) mais próximo das representações em Pesquisa Operacional.

O modelo geral pode ser escrito de outra forma:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{(i,j) \in A} g_{ij}(x_{ij}) \\ (M2) \quad & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = b_i, \quad i \in N \\ & l_{ij} \leq x_{ij} \leq w_{ij}, \quad (i, j) \in A \end{aligned}$$

Para particularizar o modelo (M2) divide-se o conjunto de nós  $N$  em três subconjuntos:  $O$ ,  $T$  e  $D$  tal que  $N = O \cup T \cup D$ ,

$O$  - conjunto dos centros de OFERTA ou FONTES,  $b_i = o_i > 0$ ;

$T$  - conjunto dos centros de TRANSBORDO,  $b_i = 0$ ;

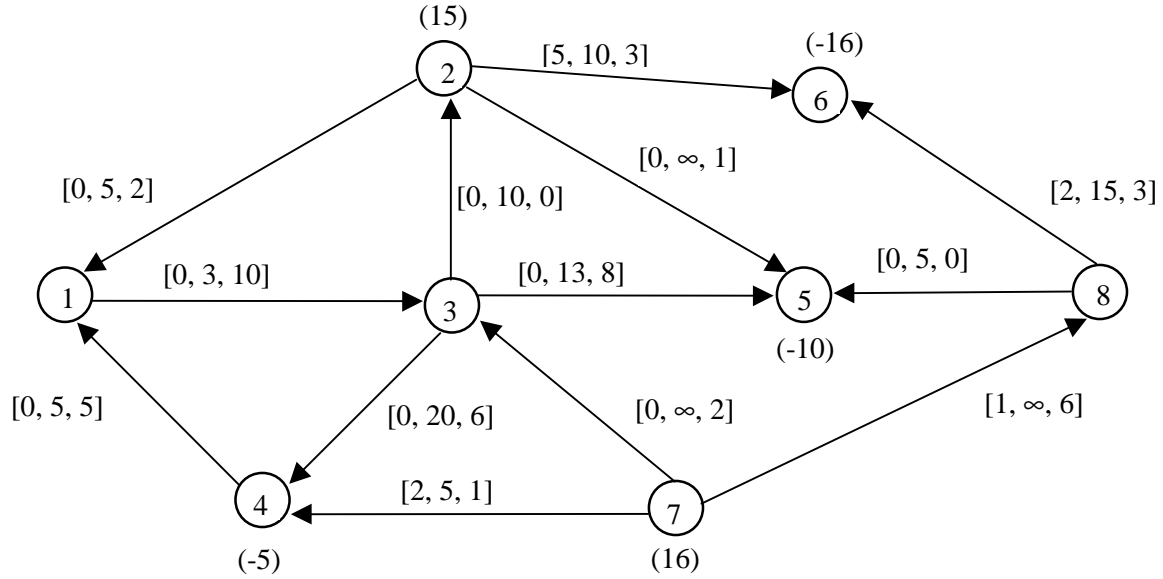
$D$  - conjunto dos centros de DEMANDA ou SUMIDOUROS,  $b_i = -d_i < 0$ .

Inicialmente serão tratados alguns modelos particulares com funções objetivo lineares, ou seja,  $g_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}x_{ij}$ ,  $\forall (i, j) \in A$ , onde  $c_{ij}$  é o custo unitário para o fluxo no arco  $(i, j)$ .

Um primeiro problema é determinar o fluxo de custo mínimo de um conjunto de nós de demanda, circulando por nós intermediários ou nós de transbordo. Esse é o PROBLEMA DE FLUXO DE CUSTO MÍNIMO ou PROBLEMA DE TRANSBORDO.

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}x_{ij} \\
 (M3) \quad & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = o_i, \quad i \in O \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = 0, \quad i \in T \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = -d_i, \quad i \in D \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq w_{ij}, \quad (i, j) \in A
 \end{aligned}$$

Seja o grafo da figura (13) em que os números entre parênteses e positivos correspondem as ofertas e os negativos as demandas. Entre colchetes estão os limites mínimos e máximos dos fluxos e os custos associados a cada arco.



$(o_i)$  - oferta do nó  $i$   
 $(-d_i)$  - demanda do nó  $j$   
 $[l_{ij}, w_{ij}, c_{ij}]$  - limites e custo no arco  $(i, j)$

Figura 13. Problema de Fluxo de Custo Mínimo.

O modelo (M3) correspondente ao grafo da figura (13), apresentado em forma de quadro, é dado pela figura (14).

$x_{ij}$		$x_{13}$	$x_{21}$	$x_{25}$	$x_{26}$	$x_{32}$	$x_{34}$	$x_{35}$	$x_{41}$	$x_{73}$	$x_{74}$	$x_{78}$	$x_{85}$	$x_{86}$	
$c_{ij}$		10	2	1	3	0	6	8	5	2	1	6	0	3	b
$O$	$i = 2$		1	1	1	-1									16
	$i = 7$									1	1	1			18
$T$	$i = 1$	1	-1						-1						0
	$i = 3$	-1				1	1	1		-1					0
	$i = 8$											-1	1	1	0
$D$	$i = 4$						-1		1	-1					-5
	$i = 5$			-1				-1					-1		-10
	$i = 6$				-1									-1	-16
$l_{ij}$					5						2	1		2	
$w_{ij}$		3	5	$\infty$	10	10	20	13	5	$\infty$	5	$\infty$	5	15	

Figura 14. Quadro do grafo da figura (13).

Restrinja o problema anterior a um grafo bipartido completo em que o conjunto  $N^1 \subset N$  é o conjunto dos centros de oferta  $O$ ,  $N^2 \subset N$  é o conjunto dos centros de demanda  $D$ ,  $T$  é um conjunto vazio. Suponha que os arcos direcionados de  $N^1$  para  $N^2$ , não existe arcos entrando em um nó  $i \in O = N^1$ , não existe arcos saindo de um nó  $i \in D = N^2$  e não considera limites nos arcos. O novo problema consiste em determinar o fluxo de custo mínimo de um conjunto de nós de oferta para um conjunto de nós de demanda. Neste caso, os custos a serem minimizados são os custos de transporte  $c_{ij}$  e resulta o PROBLEMA DE TRANSPORTE.

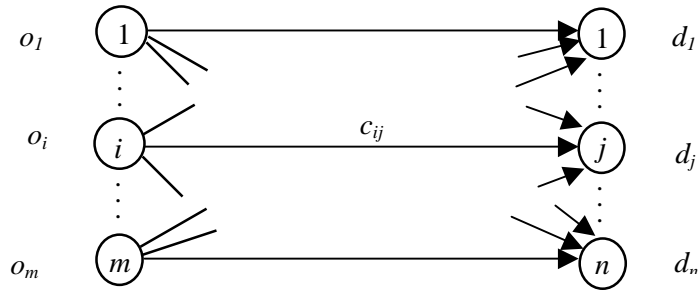
$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} = o_i, \quad i \in O$$

(M4)

$$- \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = -d_i, \quad i \in D$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \infty, \quad (i,j) \in A$$



Um caso particular de (M4) é obtido fazendo  $o_i = d_j = 1$  para todo  $i \in O$  e  $j \in D$  e  $|O| = |D|$ . Seja um conjunto  $D$  de tarefas a serem executadas e um conjunto  $O$  de executores. O elemento  $i \in O$  executa a tarefa  $j \in D$  a um custo  $c_{ij}$ . Este problema consiste em determinar a atribuição de custo mínimo de cada elemento  $i \in O$  a um outro elemento  $j \in D$ , e é conhecido como PROBLEMA DE ATRIBUIÇÃO:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} = 1, \quad i \in O \\
 (M5) \quad & - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = -1, \quad i \in D \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq \infty, \quad (i,j) \in A
 \end{aligned}$$

Se em (M5) o grafo bipartido não é completo então resulta o PROBLEMA DOS CASAMENTOS.

Retorne ao modelo (M3) e suponha  $O = \{f\}$ ,  $o_f = 1$  e  $D = \{s\}$ ,  $d_s = -1$ , todos os demais nós pertencem a  $T$ . Trata-se de um grafo com um único centro de oferta unitária ou nó fonte e um único centro de demanda unitária ou sumidouro. Seja  $c_{ij}$  um comprimento associado ao arco  $(i,j) \in A$ . Determinar o caminho mínimo de um nó inicial  $f$  ao nó final  $s$ , onde o comprimento do caminho é a soma dos comprimentos dos arcos ao longo desse caminho. Portanto um PROBLEMA DE CAMINHO MÍNIMO:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = 1, \quad i \in O = \{f\} \\
 (M6) \quad & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = 0, \quad i \in T \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = -1, \quad i \in D = \{s\} \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq \infty, \quad (i,j) \in A
 \end{aligned}$$

Como extensão do problema de caminho mínimo entre dois nós muitos outros podem ser desenvolvidos. Assim, determinar o caminho mínimo entre um nó e todos os demais da rede, ou caminho entre quaisquer dois nós. O caminho máximo ou crítico, conhecido por PERT ou CPM, é bastante utilizado para planejamento e execução de tarefas, o mesmo acontecendo com a Programação Dinâmica, etc.



O PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO é outro modelo clássico em Pesquisa Operacional. Determinar o fluxo máximo de um nó inicial  $f$ , fonte, a um nó final  $s$ , sumidouro, obedecendo os limites de capacidades nos arcos e sem custos associados. Denominando esse fluxo de  $f$  a  $s$  por  $t$  então  $O = \{f\}$ ,  $o_f = t$ ,  $D = \{s\}$ ,  $d_s = t$  e todos os demais nós pertencem a  $T$ . Portanto resulta:

$$\begin{aligned}
 & \min \quad -t \\
 (M7) \quad & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = t, \quad i \in O = \{f\} \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = 0, \quad i \in T \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = -t, \quad i \in D = \{s\} \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq w_{ij}, \quad (i,j) \in A
 \end{aligned}$$

O modelo (M2) pode ser reescrito de forma que todo  $b_i$ ,  $i \in N$ , seja nulo. Essa transformação é obtida acrescentando ao grafo correspondente a (M2) nós e arcos artificiais e definindo os respectivos limites  $l_{ij}$  e  $w_{ij}$  em cada arco artificial  $(i,j)$ . O mesmo pode ser feito para cada um dos modelos anteriores. Assim, o novo modelo geral de fluxo é dado por:

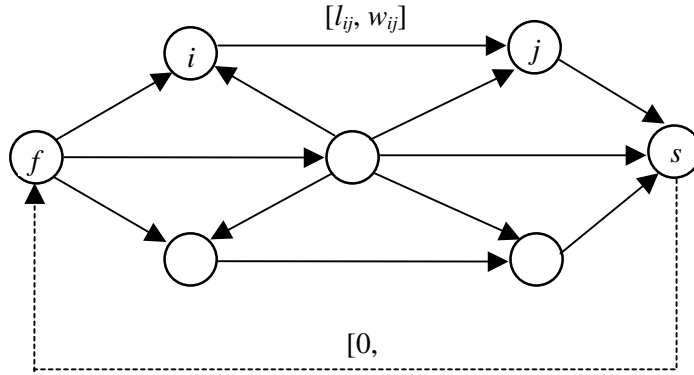
$$\begin{aligned}
 & \min \quad \sum_{(i,j) \in A} g_{ij}(x_{ij}) \\
 (M8) \quad & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = 0, \quad i \in N \\
 & l_{ij} \leq x_{ij} \leq w_{ij}, \quad (i,j) \in A
 \end{aligned}$$

Com essa transformação o problema de fluxo máximo pode também ser reescrito tomando o modelo (M8) como base. Uma vez que o objetivo é maximizar o fluxo e não minimizar o custo, acrescenta-se o arco  $(s, f)$  tal que  $l_{sf} = 0$ ,  $w_{sf} = \infty$  e maximiza o fluxo  $x_{sf}$ . Assim o modelo (M8) se resume no modelo (M9), onde a função  $g_{ij}(x_{ij}) = 0$  para todo  $(i,j) \in A$  e  $g_{sf}(x_{sf}) = -x_{sf}$ . Portanto em cada arco  $(i,j)$  os parâmetros  $c_{ij}$  não são de interesse e sim os limites  $(l_{ij}, w_{ij})$ . Veja a figura associada ao modelo (M9).

$$\min -x_{sf}$$

$$(M9) \quad \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = 0, \quad i \in N$$

$$l_{ij} \leq x_{ij} \leq w_{ij}, \quad (i, j) \in A \cup \{(s, f)\}$$



Os modelos (M3), (M4), (M5), (M6), (M7) e (M9) minimizam uma função objetivo linear sujeito a um conjunto de restrições lineares. Tratam-se de problemas de Programação Linear resolvidos pelo Método Simplex. No entanto, ao observar a matriz de restrições, verifica-se que os elementos que a compõem são todos iguais a 1, 0 ou -1. Essa característica permite particularizar o Simplex explorando a estrutura de cada um dos modelos, obtendo algoritmos eficientes e capazes de solucionar problemas de dimensões bastante elevadas. Ainda mais, a operação de pivoteamento, básica no Simplex, se resume em adições e subtrações de constantes. Com isso, se os parâmetros do problema: ofertas, demandas e limites, são números inteiros, a solução ótima também é inteira. Todos esses fatos tornam o estudo desses algoritmos interessante.

Por se tratarem de problemas clássicos, os modelos anteriores são também utilizados na resolução de subproblemas gerados pela decomposição de um problema maior. Serão abordados dois desses problemas, também considerados clássicos pela literatura, e que são resolvidos por decomposição: o problema de multifluxo e o problema de localização de facilidades.

Até então em cada arco passa um fluxo de um único produto. Porém, em alguns casos, é necessário a diversificação do fluxo. Assim, o novo modelo apresentará um vetor de fluxo para cada produto e também vários conjuntos de equações de conservação e de limites nos arcos.

Seja o grafo  $G$  com  $p$  produtos diferentes. Seja  $w_k$  e  $l_k$  respectivamente os vetores de limites superiores e inferiores para o fluxo do produto  $k$  nos arcos da rede. Seja  $w$  e  $l$  respectivamente os vetores de limites superiores e inferiores para o fluxo total em cada arco da rede. Seja  $c_k$  o vetor contendo o custo em cada arco para o produto  $k$ . Finalmente, seja  $b_k$  o vetor de ofertas e demandas para o produto  $k$ . Chamando  $x_k$  o vetor de fluxos do produto  $k$  na rede e  $A$

a matriz de incidência do grafo. O problema linear de MULTIFLUXO DE CUSTO MÍNIMO, uma extensão do modelo (M3), é dado pela formulação abaixo:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{k=1}^p c_k x_k \\
 (M10) \quad & l \leq \sum_{k=1}^p x_k \leq w \\
 & Ax_k = b_k, \quad k = 1, \dots, p \\
 & l_k \leq x_k \leq w_k, \quad k = 1, \dots, p
 \end{aligned}$$

Esse problema apresenta uma estrutura de blocos diagonais e pode portanto ser decomposto. Cada subproblema resultante é um modelo de fluxo com um único produto, recaindo nos anteriores (Bazaraa [1979]).

O problema de localização de facilidades pode ser obtido como extensão do problema de transporte ou de transbordo.

Em um problema de transporte, seja  $D = \{1, \dots, n\}$  um conjunto de centros de demanda com capacidades  $d_j > 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , e que tem que ser abastecidos por um conjunto de facilidades ou fornecedores, cuja localização e dimensionamento devem ser determinados. E seja o conjunto  $O = \{1, \dots, m\}$  de possíveis locais para instalação dessas facilidades com capacidades de oferta  $o_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Seja  $c_{ij}$  o custo proveniente do fato da facilidade  $i$  abastecer o centro de demanda  $j$ . Além disso, seja  $F_i$  o custo fixo da instalação da facilidade  $i$ . O problema consiste em determinar um subconjunto  $S \subseteq O$  de facilidades de maneira a minimizar os custos. De (M4) o novo modelo pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in O} F_i y_i \\
 & \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} \leq o_i y_i, \quad i \in O \\
 (M11) \quad & - \sum_{(i,j) \in E(i)} x_{ij} = -d_i, \quad i \in D \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq \infty, \quad (i,j) \in A \\
 & y_i \in \{0,1\}, \quad i \in O
 \end{aligned}$$

onde  $y_i = \begin{cases} 1, & \text{se a facilidade } i \text{ for ativada ou aberta,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Trata-se de um modelo de programação linear inteira, variáveis 0 ou 1, resolvido por decomposição em subproblemas que são problemas de transporte. Dado um subconjunto  $S \subseteq O$  de facilidades resulta um problema de transporte com  $|S|$  centros de oferta.

A função objetivo em (M11) pode ser dividida em custos variáveis e fixos. A parcela variável pode ser acrescida dos custos operacionais das facilidades que são funções da dimensão ou dos fluxos em cada facilidade  $i \in O$ ,  $f_i(\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij})$ .

Se as funções  $f_i(\cdot)$  são lineares então resulta  $f_i(\sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij}) = t_i \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij}$ , onde  $t_i$  é uma constante para todo  $i \in O$ . Com isso pode-se fazer os custos  $C_{ij} = c_{ij} + t_i$ ,  $(i, j) \in S(i)$ , e reescrever o modelo (M11) com os  $c_{ij}$  substituídos pelos  $C_{ij}$ .

Se  $f_i(\cdot)$ ,  $i \in O$ , é uma função não linear, o modelo (M11) pode ser reescrito como tal a menos da função objetivo que será substituída por:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in O} f_i \left( \sum_{(i,j) \in S(i)} x_{ij} \right) + \sum_{i \in O} F_i y_i$$

Explorando o conceito de economia de escala as funções  $f_i(\cdot)$  são, em geral, côncavas (Mateus [1986]).

Os modelos de localização podem ainda ser expressos em dois níveis, ou seja, as facilidades se localizam como centros intermediários entre os centros de produção e de demanda. Nesse caso o problema é uma extensão do problema de transbordo em que os custos fixos e operacionais estão associados aos nós de transbordo (Monterosso e Bornstein [1978], Gomes e França [1981]).