Método Simplex Revisado

Prof. Fernando Augusto Silva Marins

Departamento de Produção

Faculdade de Engenharia – Campus de Guaratinguetá

UNESP

www.feg.unesp.br/~fmarins

fmarins@feg.unesp.br

Introdução

***Método Simplex Tradicional - MST*:**

Em cada iteração são modificados *todos* os elementos das tabelas usadas na aplicação do método.

Informações necessárias para a continuidade do Simplex:

- Coeficientes de custo relativo ($\overline{C}_j$);
- Coeficientes da *variável não básica que entra* nas restrições (coluna do pivot);
- Quais são as variáveis básicas atuais e seus valores ($\overline{b}_j$).

Observação: as demais colunas da tabela do simplex não contém informações relevantes para o pivoteamento: para modelos de PL de porte razoável a aplicação do MST pode ser ineficiente e custosa do ponto de vista computacional.

Método Simplex Revisado

Códigos comerciais com implementações do Simplex usam um refinamento conhecido como *Método Simplex Revisado - MSR*.

Características do *MSR:*

•Usa os mesmos princípios do MST;

•Não atualiza toda a tabela em cada iteração;

•As informações para concretizar cada iteração são obtidas diretamente a partir dos dados originais.

Vantagens do MSR sobre o MST

Quando o número de variáveis do modelo é bem maior que o número de restrições (n >> m) o total de operações em cada iteração é menor no MSR, pois trabalha-se com tabelas cuja dimensão é determinada pelo número de restrições (m);

Há um controle maior de erros de arredondamento no MSR;

Para modelos onde há muitos coeficientes nulos nas restrições, usando o MST estes coeficientes nulos desaparecem já nas operações iniciais de pivoteamento;

O MSR é útil para a abordagem facilitada de outros tópicos de Programação Linear.

Forma Matricial do Método Simplex

Considere o modelo de PL na forma padrão:

Min $Z = C'X$ s. a. : $\{AX = b\ (\geq 0)\ ,\ X \geq 0\}$

Considere as partições: $A = [B \mid N]$, $X^t = [X_B \mid X_N]$, $C = [C_B \mid C_N]$
onde,

B = colunas básicas, N = colunas não-básicas,

X_B = variáveis básicas (VB), X_N = variáveis não-básicas (VNB),

C_B = coeficientes de VB na Funcão Objetivo (F.O.),

C_N = coeficientes de variáveis não-básicas na F.O.

Forma Matricial do Método Simplex

Pode-se reescrever o modelo na forma padrão:

Min $Z = C_B X_B + C_N X_N$ s.a: $\begin{cases} B X_B + N X_N = b \quad (1), \\ X_B \geq 0 \quad (2), \quad X_N \geq 0 \quad (3) \end{cases}$

De (1) tem-se: $X_B = B^{-1} b - B^{-1} N X_N$, e substituindo na F. O. :

$$Z = C_B (B^{-1} b - B^{-1} N X_N) + C_N X_N = C_B B^{-1} b + (C_N - C_B B^{-1} N) X_N \quad (4)$$

Denote e calcule por:

$Z_0 = C_B B^{-1} b = \mathbf{C_B \bar{b}}$ = valor da F.O. da S.B.V. dada por $X_0^t = (X_B \quad 0)$;

$\bar{C}_N = C_N - C_B B^{-1} N$ = vetor dos coeficientes de custo relativo das VNB na solução X_0^t .

Exemplo

Seja o modelo de PL :

Max Z = $3X_1 + 4X_3$ -1

$$\text{s. a:} \begin{cases} X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4 = 8 \\ 3X_1 + 4X_2 + X_3 + X_5 = 7 \\ X_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{cases}$$

Onde:

$$A = (a_1 \ \ a_2 \ \ a_3 \ \ a_4 \ \ a_5)\ ,\ a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ a_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = (3\ 0\ 4\ 0\ 0) = (c_1\ c_2\ c_3\ c_4\ c_5), \qquad X^t = (X_1\ X_2\ X_3\ X_4\ X_5),$$

$$b = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Tabelas do MST no Exemplo

	VB	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b
Tabela 1	x_4	1	2	*2*	1	0	8
inicial	x_5	3	4	1	0	1	7
	-z	3	0	4	0	0	1
	x_3	1/ 2	1	1	1 /2	0	4
Tabela 2	x_5	*5/2*	3	0	-1 /2	1	3
	-z	1	-4	0	-2	0	-15
Tabela 3	x_3^*	0	2/5	1	3/5	-1/5	17/5
ótima	x_1^*	1	6/5	0	-1/5	2/5	6/5
	$-z^*$	0	-26/5	0	-9/5	-2/5	-81/5

Método Simplex Revisado

Todos os coeficientes das Tabelas 2 e 3 podem ser obtidos a partir dos dados originais e da matriz B^{-1}.

- Para a Tabela 2:

$$B = \text{colunas básicas} = (a_3\ a_5) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Colunas atualizadas da matriz A:

$$\bar{a}_j = B^{-1} a_j \quad \text{para } j=1,5.$$

$$\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Método Simplex Revisado

Constantes atualizadas das restrições (ou seja os valores das variáveis básicas):

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Coeficientes de custo relativo atualizados: com λ sendo o *Vetor de Multiplicadores do Simplex* = $C_B B^{-1}$

$$\bar{C}_j = C_j - C_B \bar{a}_j \quad \text{ou} \quad \bar{C}_j = C_j - C_B B^{-1} a_j = C_j - \lambda a_j$$

$j = 1$ ➔ $$\bar{C}_1 = C_1 - C_B \bar{a}_1 = 3 - \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} = 1$$

$j = 2$ ➔ $$\bar{C}_2 = C_2 - C_B \bar{a}_2 = 0 - \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4$$

MSR - Problemas de Minimização

Considere uma Solução Básica Viável inicial (SBV) $\mathbf{X_B = B^{-1} b} = \bar{b}$

Passo1: *Montar a tabela com a SBV Inicial*

Solução inicial	$\mathbf{B^{-1}}$	$\bar{b} = \mathbf{B^{-1} b}$	Variável que entra	Coluna do pivot
X_B	*Inversa da matriz das colunas básicas*	*Valores da variáveis básicas*	*A ser preenchida no Passo 2*	*A ser preenchida no Passo 3*

Passo 2: *Teste de otimalidade/escolha da variável não-básica que entra*

•Calcular $\mathbf{\bar{C}_j = C_j - C_B \bar{a}_j}$ para toda VNB X_j

•Se todo $\bar{C}_j \geq 0 \Rightarrow$ Parar. Solução Ótima

•Senão escolha x_r com $\mathbf{\bar{C}_r < 0}$ para ser a VNB que entra

(*preencher a tabela*)

MSR - Problemas de Minimização

Passo 3: *calcular a coluna atualizada do pivot/escolha da VB que sai*

- Achar coluna atualizada do pivot $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{\mathbf{r}}$ (*preencher a tabela*)
- Determinar $\bar{\mathbf{b}}_{\mathbf{s}} = \mathbf{MIN}\left\{\dfrac{\bar{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}}{\bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{ir}}}\right\}$ $\mathbf{PARA}\ \bar{\mathbf{a}}_{\mathbf{ir}} > \mathbf{0} \Rightarrow x_S = \bar{b}_s$ sai, pivot $= \bar{a}_{sr}$

- Se $\nexists\, \bar{a}_{ir} > 0 \Rightarrow$ Parar. Solução Ilimitada

Passo 4: atualizar a SBV, a matriz B^{-1}, e o vetor $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ pelo pivoteamento. Voltar ao *Passo 2*.

Exemplo completo de aplicação do Método Simplex Revisado

$$\text{Max } Z = 3X_1 + X_2 + 3X_3 \text{ s. a: } \begin{cases} 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 2 \\ X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 5 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 6 \\ X_i \geq 0, i = 1, 3. \end{cases}$$

Colocando este **modelo na forma padrão de minimização** e identificando os dados originais que serão usados nas iterações do Método Simplex Revisado:

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6		
	X_B	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	b	
S. B. V.	X_4	2	1	1	1	0	0	2	b_1
Inicial	X_5	1	2	3	0	1	0	5	b_2
	X_6	2	2	1	0	0	1	6	b_3
	$-Z$	-3	-1	-3	0	0	0	0	
		C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	$-Z_0$	

Exemplo - MSR

Expressões úteis:

λ = *Vetor de multiplicadores do simplex* = $\mathbf{C_B\, B^{-1}}$

$\overline{\mathbf{C}}_N = \mathbf{C}_N - \mathbf{C_B\, B^{-1}\, N} = \mathbf{C}_N - \lambda\, \mathbf{N}$

$\overline{\mathbf{a}}_j = \mathbf{B^{-1}\, a_j}$, $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{B^{-1}\, b}$

Passo 1:

$C_B = (0 \quad 0 \quad 0)$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad C_N = (-3 \quad -1 \quad -3)$

Tabela 1

S.B.V.	B^{-1}			$\overline{b}$	Variável que entra	Coluna Pivot
X_4	1	0	0	2		
X_5	0	1	0	5	Passo 2	Passo 3
X_6	0	0	1	6		

Exemplo

Passo 2 - Cálculos: $\lambda = \mathbf{C_B\, B^{-1}} = (0 \quad 0 \quad 0)\, I_3 = (0 \quad 0 \quad 0)$

$$\overline{C}_N = (\overline{C}_1 \;\; \overline{C}_2 \;\; \overline{C}_3) = C_N - \lambda N = (-3 \;\; -1 \;\; -3) - (0 \;\; 0 \;\; 0)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-3 \;\; -1 \;\; -3)$$

Candidatas a entrar: X_1, X_2 e X_3. Escolhendo X_1 para entrar (Preencher a Tabela 1).

Passo 3 - Coluna do pivot: $\overline{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \mathbf{I}_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Preencher Tabela 1)

Determinação do pivot: $\text{Min}\left\{ \overline{b}_i / a_{i1} \right\}$ para $a_{i1} > 0$

$$\text{Min}\left\{ \frac{2}{2}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2} \right\} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow \text{sai } X_4 \text{ e o pivot } = \overline{a}_{11} = 2$$

Exemplo

Tabela 1

S.B.V.	B^{-1}			$\bar{\mathbf{b}}$	Variável que entra	Coluna Pivot
X_4	1	0	0	2		2
X_5	0	1	0	5	X_1	1
X_6	0	0	1	6		2

A seguir efetuar o pivoteamento em B^{-1} e $\bar{\mathbf{b}}$ $\Rightarrow$ Tabela 2 com nova SBV com X_1 no lugar de X_4.

Exemplo

Aplicar os Passos 2 – 4 na Tabela 2

Tabela 2

S.B.V.	B^{-1}			$\bar{\mathbf{b}}$	variável entra	coluna pivot
X_1	1/2	0	0	1		
X_5	-1/2	1	0	4	Passo 2	Passo 3
X_6	-1	0	1	4		

Método Simplex Revisado

Passo 2 - 3

Cálculos: $\lambda = \mathbf{C_B\, B^{-1}} = (-3/2 \quad 0 \quad 0)$

$$\overline{\mathbf{C}}_N = (\overline{\mathbf{C}}_2 \ \ \overline{\mathbf{C}}_3 \ \ \overline{\mathbf{C}}_4) = (-1 \ \ -3 \ \ 0) - (-3/2 \ \ 0 \ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (1/2 \ \ -3/2 \ \ 3/2)$$

Candidata a entrar: X_3 (Preencher a Tabela 2).

Coluna Pivot: $\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Preencher Tabela 2)

Exemplo

Tabela 2

S.B.V.	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_1	1/2	0	0	1		1/2
X_5	-1/2	1	0	4	X_3	5/2
X_6	-1	0	1	4		0

Determinação do Pivot: $\text{Min}\left\{ \bar{b}_i \big/ a_{i3} \right\}$ para $a_{i3} > 0$

$$\text{Min}\left\{ \frac{1}{1/2}, \frac{4}{5/2} \right\} = \frac{8}{5} \Rightarrow \text{sai } X_5 \text{ e o pivot } = \bar{a}_{23} = 5/2$$

Exemplo

Efetuando o pivoteamento em B^{-1} e $\overline{\mathbf{b}}$ $\Rightarrow$ Tabela 3 com nova SBV com X_3 no lugar de X_5.

Tabela 3

S.B.V.	B^{-1}			$\overline{\mathbf{b}}$	variável entra	coluna pivot
X_1	3/5	-1/5	0	1/5		
X_3	-1/5	2/5	0	8/5	Passo 2	Passo 3
X_6	-1	0	1	4		

Método Simplex Revisado

Tabela 3

S.B.V.	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_1	3/5	-1/5	0	1/5		
X_3	-1/5	2/5	0	8/5	Passo 2	Passo 3
X_6	-1	0	1	4		

$$C_B = (-3 \quad -3 \quad 0) \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C_N = (-1 \quad 0 \quad 0)$$

Cálculos: $\lambda = \mathbf{C_B\, B^{-1}} = (-3 \quad -3 \quad 0) \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-6/5 \quad -3/5 \quad 0)$

Exemplo - MSR

$$\overline{C}_N = (\overline{C}_2\ \overline{C}_4\ \overline{C}_5) = (-1\ 0\ 0) - (-6/5\ \ -3/5\ \ 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (7/5\ \ 6/5\ \ 3/5)$$

$\overline{C}_N \geq 0 \Rightarrow$ a SBV da Tabela 3 é ótima:

$$X_1^* = 1/5, \quad X_3^* = 8/5, \quad X_6^* = 4, \quad X_2^* = X_4^* = X_5^* = 0$$

$$Z^* = C_B B^{-1} b = \lambda b = (-6/5 \quad -3/5 \quad 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = -27/5$$

$$W^* = -Z^* = 27/5$$

Método do *Big M* para inicialização do MSR

Nas restrições onde não há *Variáveis Naturais* (originais e de folga) do modelo que possam ser variáveis básicas são incorporadas novas *Variáveis* denominadas *Artificiais*.

Estas *Variáveis Artificiais* ($\geq$ 0) também são incorporadas à função objetivo recebendo, para modelos de Minimização (Maximização), coeficientes penalizantes dados por M (-M), *onde M é um número positivo suficientemente grande* com relação aos demais coeficientes envolvidos com o modelo original.

Desta maneira obtém-se uma *solução básica viável inicial* para o *modelo ampliado* que contém todas as variáveis artificiais.

Método do *Big M* para inicialização do MSR

Aplica-se o MSR anteriormente ao modelo ampliado, buscando a *substituição das Variáveis Artificiais (VA) básicas por Variáveis Naturais* (Decisão e de Folga) do modelo original.

As VA que se tornam não-básicas podem ser desconsideradas nas iterações subseqüentes do MSR.

A aplicação do MSR ao modelo ampliado pode levar a duas situações:

(A) *Existe VA como variável básica* na solução ótima do modelo ampliado $\Rightarrow$ neste caso a conclusão é que o *modelo original é inviável.*

(B) *Não existe VA como variável básica* na solução ótima do modelo ampliado $\Rightarrow$ neste caso *o modelo original é viável* e uma *solução ótima* com Variáveis Naturais do modelo original foi *obtida*.

Exemplo de aplicação do MSR com *Big M*

$$\text{Min } Z = -3\,X_1 + X_2 + X_3 \quad \text{s. a:} \quad \begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 \leq 11 & (1) \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 \geq 3 & (2) \\ 2X_1 - X_3 = -1 & (3) \\ X_i \geq 0, i = 1, 3. & (4) \end{cases}$$

Modelo original na forma padrão:

Sendo X_4 e X_5 as *variáveis de folga* para as restrições (1) e (2), respectivamente; Y_1 , e Y_2 as *variáveis artificiais* para as restrições (2) e (3), respectivamente.

$$\text{Min } Z = -3X_1 + X_2 + X_3 + MY_1 + MY_2$$

$$\text{Sujeito a:} \begin{cases} X_1 - 2X_2 + X_3 + X_4 = 11 & (1) \\ -4X_1 + X_2 + 2X_3 - X_5 + Y_1 = 3 & (2) \\ -2X_1 + X_3 + Y_2 = 1 & (3) \\ X_i \geq 0, i = 1, 5. \ Y_j \geq 0, j = 1, 2. & (4) \end{cases}$$

Aplicação do MSR com *Big M*
Identificação dos dados originais

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 \end{array} \\ C = & \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & M & M \end{pmatrix} \end{array}$$

$$b = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \end{array}$$

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 1

X_B	B^{-1}	$\overline{\mathbf{b}}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1 0 0	11		
Y_1	0 1 0	3	Passo 2	Passo 3
Y_2	0 0 1	1		

Dados referentes a solução básica viável da Tabela 1:

$$C_B = (0 \quad M \quad M),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ C_N = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cálculos: $\lambda = (O \quad M \quad M)\, I_3 = (0 \quad M \quad M)$

$$\overline{C}_N = \left(\overline{C}_1 \quad \overline{C}_2 \quad \overline{C}_3 \quad \overline{C}_5\right) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & M & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & -M & -M & M \end{pmatrix}$$

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 1

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	0	0	11		
Y_1	0	1	0	3	X_3	Passo 3
Y_2	0	0	1	1		

Variáveis X_2 e X_3 são candidatas a entrar. Escolhendo X_3 para entrar (*preencher a Tabela 1*).

Coluna do pivot: $\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \mathbf{I}_3 \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ (*preencher Tabela 1*)

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 1

X_B	B^{-1}			$\bar{\mathbf{b}}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	0	0	11		1
Y_1	0	1	0	3	X_3	2
Y_2	0	0	1	1		1

Determinação do pivot:

$$\text{Min} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}_i}{\bar{\mathbf{a}}_{i3}} \right\},\ \bar{\mathbf{a}}_{i3} > \mathbf{0} \implies \left\{ 11/1,\ 3/2,\ 1/1 \right\} = \frac{1}{1} \Rightarrow \text{Sai } Y_2 \text{ e o pivot } = \bar{a}_{33} = 1.$$

Nova SBV: Pivotear em $\bar{a}_{33}$, B^{-1} , $\bar{b}$ na Tabela 1 $\Rightarrow$ Tabela 2.

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 2

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	0	-1	10		
Y_1	0	1	-2	1	Passo 2	Passo 3
X_3	0	0	1	1		

Dados referentes a SBV da Tabela 2:

$$C_B = (0 \quad M \quad 1),\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C_N = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & M \end{pmatrix}$$

$$\text{Cálculos: } \lambda = (O \quad M \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad M \quad -M)$$

$$\overline{C}_N = \begin{pmatrix} \overline{C}_1 & \overline{C}_2 & \overline{C}_5 & \overline{C}_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & M & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -M & M & M \end{pmatrix}$$

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 2

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	0	-1	10		
Y_1	0	1	-2	1	X_2	
X_3	0	0	1	1		

Variáveis X_1 e X_2 são candidatas a entrar. Escolhendo X_2 para entrar (*preencher a Tabela 2*).

Coluna do pivot: $\bar{\mathbf{a}}_2 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (*preencher Tabela 2*)

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 2

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	0	-1	10		-2
Y_1	0	1	-2	1	X_2	1
X_3	0	0	1	1		0

Determinação do pivot:

$$\text{Min} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}_i}{\bar{\mathbf{a}}_{i2}} \right\}, \ \bar{\mathbf{a}}_{i2} > 0 \quad \Rightarrow \text{Min} \left\{ 1/1 \right\} = \frac{1}{1} \Rightarrow \text{sai } Y_1 \text{ e o pivot } = \bar{a}_{22} = 1.$$

Nova SBV: Pivotear em $\bar{a}_{22}$, B^{-1}, $\bar{b}$ na Tabela 2 $\Rightarrow$ Tabela 3.

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 3

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	2	-5	12		
X_2	0	1	-2	1	Passo 2	Passo 3
X_3	0	0	1	1		

Dados referentes a solução básica viável da Tabela 3:

$$C_B = (0 \quad 1 \quad 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; C_N = (-3 \quad 0 \quad M \quad M)$$

$$\text{Cálculos: } \lambda = (0 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0 \quad 1 \quad -2)$$

$$\bar{C}_N = (\bar{C}_1 \quad \bar{C}_5 \quad \bar{C}_6 \quad \bar{C}_7) = (-3 \quad 0 \quad M \quad M) - (0 \quad 1 \quad -2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (-1 \quad -1 \quad M \quad M)$$

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 3

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	2	-5	12		
X_2	0	1	-2	1	X_1	
X_3	0	0	1	1		

Variável X_1 é candidata única a entrar. (*Preencher a Tabela 3*).

Coluna do pivot: $\bar{\mathbf{a}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (*preencher Tabela 3*)

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 3

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_4	1	2	-5	12		*3*
X_2	0	1	-2	1	X_1	0
X_3	0	0	1	1		-2

Determinação do pivot:

$$\text{Min} \left\{ \frac{\bar{\mathbf{b}}_i}{\bar{\mathbf{a}}_{i1}} \right\},\ \bar{\mathbf{a}}_{i1} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \text{Min} \left\{ 12/3 \right\} = 4 \Rightarrow \text{sai } X_4 \text{ e o pivot} = \bar{a}_{11} = 3.$$

Nova SBV: Pivotear em $\bar{a}_{11}$, B^{-1}, $\bar{b}$ na Tabela 3 $\Rightarrow$ Tabela 4.

Aplicação do MSR com *Big M*

Tabela 4

X_B	B^{-1}			$\bar{b}$	variável entra	coluna pivot
X_1	1/3	2/3	-5/3	4		
X_2	0	1	-2	1		
X_3	2/3	4/3	-7/3	9		

Dados referentes a SBV da Tabela 4:

$$C_B = (-3 \quad 1 \quad 1), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_N = (0 \quad 0 \quad M \quad M)$$

Cálculos: $\lambda = (-3 \quad 1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2/3 & 4/3 & -7/3 \end{pmatrix} = (-1/3 \quad 1/3 \quad 2/3)$

Aplicação do MSR com *Big M*

$$\overline{C}_N = \left(\overline{C}_4 \quad \overline{C}_5 \quad \overline{C}_6 \quad \overline{C}_7\right) = \left(0 \quad 0 \quad M \quad M\right) - \left(-1/3 \quad 1/3 \quad 2/3\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(1/3 \quad 1/3 \quad M \quad M\right)$$

Como <u>não há VNB candidatas a entrar</u>. $\Rightarrow$ A solução da <u>Tabela 4 </u>é ótima.

$$X_1^* = 4,\ X_2^* = 1,\ X_3^* = 9,\ X_4^* = X_5^* = 0.$$

$$Z^* = C_B\,\overline{b} = \left(-3 \quad 1 \quad 1\right)\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} = -2$$