# CAPÍTULO IV

## PROBLEMA DE ATRIBUIÇÃO

Seja um conjunto $J = \{1, ..., n\}$ de tarefas a serem executadas e um conjunto $I = \{1, ..., n\}$ de executores. O elemento $i \in I$ executa a tarefa $j \in J$ a um custo $c_{ij}$ . Determinar a atribuição de custo mínimo de cada elemento $i$ a uma tarefa $j$. O grafo associado é dado pela figura (1).

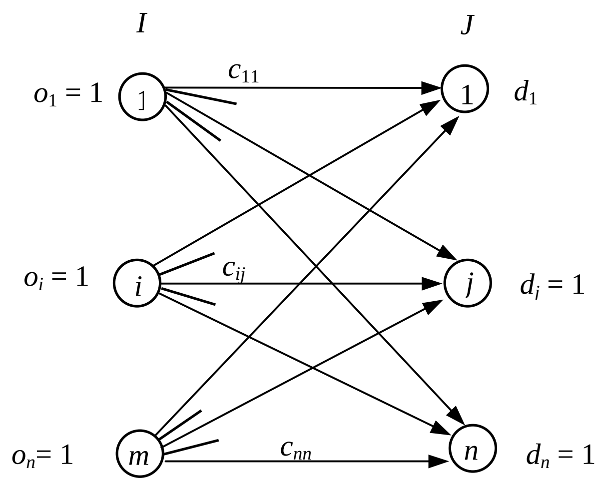


Figura 1. Grafo associado ao problema de atribuição.

O modelo linear para este problema foi apresentado anteriormente e é da forma:

$$\text{minimizar} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

(PA)

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, i \in I \tag{2}$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0 \tag{4}$$

Este problema é um caso particular do problema de transporte em que as ofertas e demandas são unitárias e $m = n$, ou $\sum_{i \in I} o_i = \sum_{j \in J} d_j$ . A matriz de restrições $A$ também tem posto igual a $(n + n - 1)$ ou mais especificamente implica na existência de $(n + n - 1)$ variáveis básicas. Esta matriz é também totalmente unimodular e portanto as soluções obtidas são inteiras, justificando a substituição de restrições da forma: $0 \leq x_{ij} \leq 1$ por $x_{ij} \geq 0$. E todas as variáveis assumirão valores 0 ou 1. Com isso, é possível aplicar o algoritmo primal para o problema de transporte, apresentado anteriormente. No entanto, pelo modelo (PA) apenas um conjunto de $n$ variáveis assumirão um valor unitário, as demais serão nulas. Assim, ao aplicar o algoritmo de transporte, uma solução básica será altamente degenerada, com ($n$ - 1) variáveis básicas nulas. Esta dificuldade é contornada explorando as particularidades do novo problema, desenvolvendo um algoritmo específico.

Trata-se de um algoritmo primal-dual, ou seja, dada uma solução dual viável e mantida a complementaridade de folga, encontrar a solução primal ótima.

# 1. O PROBLEMA DUAL

Seja o modelo (PA) e a cada restrição tipo (2) ou (3) associamos respectivamente uma variável $u_i$, $i \in I$ e $v_j$, $j \in J$. O problema dual de (PA) é dado por:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i \in I} u_i + \sum_{j \in J} v_j \tag{5}$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij}, \quad i \in I, j \in J \tag{6}$$

$$u_i, v_j \text{ livres}, \; i \in I, j \in J \tag{7}$$

O modelo (PA) apresenta solução ótima limitada e se $x^*$, $u^*$ e $v^*$ são respectivamente as soluções ótimas para o problema primal e dual então são atendidas a viabilidade primal e dual, além do teorema de folgas complementares:

$$x_{ij}(c_{ij} - u_i - v_j) = 0, \quad i \in I, j \in J$$

Uma solução dual viável para o problema acima é dada por:

$$\begin{aligned} \bar{u}_i &= \min_{j \in J} \{c_{ij}\}, \quad i \in I \\ \bar{v}_j &= \min_{i \in I} \{c_{ij} - \bar{u}_i\}, \quad j \in J \end{aligned} \tag{8}$$

Se existe uma solução primal $\bar{x}$ correspondente a solução dual $\bar{u}$ e $\bar{v}$, tal que a complementaridade de folga seja satisfeita, então estas soluções são ótimas.

Esta solução dual viável corresponde a fazer $\bar{u}_i$ igual ao menor custo na linha $i$. E, subtraindo $u_i$ de todos os custos $c_{ij}$ , $j \in J$, para cada linha $i \in I$, a variável $v_j$ é o mínimo custo resultante na coluna $j$. Portanto, dada a matriz de custos $c_{ij}$, uma solução dual viável é facilmente obtida e os custos reduzidos ($c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$) imediatamente calculados. Essa matriz de custos reduzidos é denominada **matriz reduzida**.

Se o custo reduzido ($c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j$) > 0 então $\bar{x}_{ij} = 0$. Se este custo é nulo então $\bar{x}_{ij} \geq 0$, ou $\bar{x}_{ij}$ pode assumir o valor unitário, $\bar{x}_{ij} = 1$. Portanto, entre os custos reduzidos nulos procura-se um conjunto de atribuições $\bar{x}_{ij} = 1$ para todo $i \in I$, $j \in J$, selecionando apenas uma célula em cada linha e em cada coluna da matriz reduzida. Se essas atribuições são em número de $n$ então esta solução é ótima, caso contrário é uma solução parcial.

# 2.SOLUÇÃO ÓTIMA

Seja a matriz de custos $c_{ij}$ dada abaixo. Para a solução dual viável obtida conforme (8) resulta a matriz reduzida com os custos $\bar{c}_{ij}$ .

$$
\begin{array}{c|c|c|c|l}
 & 1 & 2 & 3 & \\
\hline
1 & 4 & 3 & 1 & u_1 = 1 \\
\hline
2 & 3 & 2 & 5 & u_2 = 2 \\
\hline
3 & 9 & 8 & 1 & u_3 = 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 3 & 2 & 0 \\
\hline
2 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 8 & 7 & 0 \\
\hline
 & v_1 = 1 & v_2 = 0 & v_3 = 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 0 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 7 & 7 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

$(c_{ij})$ $\qquad$ $(c_{ij} - u_i)$ $\qquad$ $(\bar{c}_{ij})$

Entre os custos reduzidos $\bar{c}_{ij} = 0$ procurar um conjunto de atribuições $\bar{x}_{ij} = 1$ tal que não ocorra duas atribuições na mesma linha ou coluna. Nesse caso pode ser feito $x_{13} = x_{21} = 1$, ou $x_{13} = x_{22} = 1$, ou $x_{21} = x_{33} = 1$, ou $x_{22} = x_{33} = 1$. Estas células selecionadas são denominadas **independentes**. Com isso, o maior número de células independentes para a matriz acima é $2 < n = 3$, a solução é parcial e portanto não ótima.

A partir de uma solução parcial como determinar a solução ótima? O processo consiste em atualizar a solução dual $(\bar{u}, \bar{v})$, mantendo a complementaridade de folga, e procurar uma nova solução primal ou um conjunto de $n$ células independentes na matriz reduzida atualizada. Caso contrário, prossegue atualizando a solução dual.

Para atualizar a solução dual é necessário o conceito de traço sobre uma linha ou coluna da matriz reduzida. A operacionalização deste conceito será vista posteriormente.

As linhas e colunas da matriz de custo reduzido podem ser cobertas por um conjunto de traços de tal forma que pelo menos um traço passe sobre cada elemento nulo. Pode ser verificado que o número mínimo de traços para atender a essa condição é igual ao número máximo de células independentes.

**TEOREMA**. *Seja a matriz de custos reduzidos de (PA). O número máximo de células independentes é igual ao número mínimo de traços para cobrir todos os custos nulos da matriz.*

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1 & 2 & 2 & 0 \\
\hline
2 & 0 & 0 & 3 \\
\hline
3 & 7 & 7 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Para a matriz acima são necessários dois traços para cobrir todos os custos nulos. Este é também o maior número de células independentes para essa matriz.

Seja $m$ o número mínimo de traços para cobrir uma matriz. E, seja $S_e = \{i_1, i_2, ..., i_p\}$ o conjunto de linhas não cobertas, $S_c = \{j_1, j_2, ..., j_p\}$ o conjunto de colunas não cobertas, $\bar{S}_e = I - S_e$ e $\bar{S}_c = J - S_c$. Então $m = (n - p) + (n - q)$.

Seja $\bar{c}$ o menor custo reduzido não coberto:

$$\bar{c} = \underset{i \in S_l,\, j \in S_c}{\text{mínimo}} \{ \bar{c}_{ij} \} > 0$$

Uma nova solução dual é obtida fazendo:

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i + \bar{c}, \quad i \in S_l \qquad \bar{v}_j = \bar{v}_j, \quad j \in S_c$$

$$\bar{u}_i = \bar{u}_i, \quad i \in \bar{S}_l \qquad \bar{v}_j = \bar{v}_j - \bar{c}, \quad j \in \bar{S}_c$$

Com isso, os novos custos reduzidos são assim definidos:

$$\bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} - \bar{c}, \quad \forall (i, j) | i \in S_e \text{ e } j \in S_c$$

$$\bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ij}, \qquad \forall (i, j) | i \in \bar{S}_e \text{ e } j \in S_c \text{ ou } i \in S_l \text{ e } j \in \bar{S}_c$$

$$\bar{c}_{ij} = \bar{c}_{ij} + \bar{c}, \quad \forall (i, j) | i \in \bar{S}_l \text{ e } j \in \bar{S}_c$$

Os novos custos são obtidos subtraindo $\bar{c}$ de cada célula não coberta e somando $\bar{c}$ a cada célula duplamente coberta.

Para o problema acima resulta:

$\bar{c}$ = min {2, 2, 7, 7} = 2

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 5 |
| 3 | 5 | 5 | 0 |

Novamente procura-se um conjunto de atribuições, $\bar{x}_{ij}$ = 1, tal que não ocorra duas atribuições na mesma linha ou coluna. Neste caso, a solução primal $x_{11}^* = 1$, $x_{22}^* = 1$, $x_{33}^* = 1$, entre outras é um conjunto de atribuições ótimas uma vez que garante a viabilidade primal e dual e o teorema de complementaridade das folgas.

Caso seja possível obter um conjunto de *n* células independentes, a solução encontrada é ótima. Caso contrário, determinar um novo número mínimo de traços para cobrir a nova matriz reduzida, nova solução dual, nova matriz reduzida e assim sucessivamente.

Em todo o processo iterativo apenas a etapa de determinar o menor número de traços, e quais são esses traços, não ficou bem caracterizada. A operacionalização dessa etapa pode ser elaborada considerando métodos diversos. Um deles é tratar o problema específico como um problema de fluxo máximo. Outro método consiste na determinação de árvores em grafo bipartido parcial $G' = (N, A')$ de $G = (N, A)$ em que $N = I \cup J$ e $A'$ é o subconjunto de arcos tais que os custos reduzidos $\bar{c}_{ij}$ são nulos.

<u>Algoritmo</u> <u>Atribuição</u>

{Seja a matriz de custos $C = (\bar{c}_{ij})$ e custos reduzidos $\overline{C} = (\bar{c}_{ij})$ }

<u>para</u> todo $i \in I$ <u>faça</u>

$u_i \leftarrow \min_{j \in J} \{c_{ij}\}$; <u>para</u> todo $j \in J$ <u>faça</u>

$\bar{c}_{ij} \leftarrow c_{ij} - u_i$;

<u>fimpara</u>;

<u>fimpara</u>;

<u>para</u> todo $j \in J$ <u>faça</u>

$v_j \leftarrow \min_{i \in I} \{\bar{c}_{ij}\}$; <u>para</u> todo $i \in I$ <u>faça</u>

$\bar{c}_{ij} \leftarrow \bar{c}_{ij} - v_j$;

fimpara;

fimpara;

{Seja $G' = (N, A') \mid (i, j) \in A'$ se $\bar{c}_{ij} = 0$, grafo bipartido}

{Escolha um casamento arbitrário em $G'$}

marque as células de custo nulo ($\bar{c}_{ij} = 0$) tal que não ocorram duas marcas na mesma linha ou coluna;

enquanto "alguma linha não marcada" faça

seleciona linhas $s$ não marcada; {Rotula $s$} $p_s \leftarrow 0$;

{Inicialização}

CR $\leftarrow \emptyset$; CRI $\leftarrow \emptyset$; LR $\leftarrow \{s\}$; LRI $\leftarrow \{s\}$;

para todo $k \in J$ faça

se $\bar{c}_{sk} = 0$ então $p_k \leftarrow s$; CR $\leftarrow$ CR $\cup \{k\}$; CRI $\leftarrow$ CRI $\cup \{k\}$;

fimse;

fimpara;

enquanto CRI $\neq \emptyset$ e LRI $\neq \emptyset$

LRI $\leftarrow \emptyset$;

para todo $k \in$ CRI faça

achou $\leftarrow 0$; $i \leftarrow 1$;

enquanto achou = 0 e $i \leq n$ faça

se $\bar{c}_{ik} = o^*$ então

$p_i \leftarrow k$;
LR $\leftarrow$ LR $\cup \{i\}$;
LRI $\leftarrow$ LRI $\cup \{i\}$;
achou $\leftarrow 1$;

fimse;

$i \leftarrow i + 1$;

fimenquanto;

fimpara;

CRI $\leftarrow \emptyset$;

se LRI $\neq \emptyset$ então

para todo $i \in$ LRI faça

para todo $k \in (J$ - CR$)$ faça

se $\bar{c}_{ik} = 0$ então

$p_k \leftarrow i$;
CR $\leftarrow$ CR $\cup \{k\}$;
CRI $\leftarrow$ CRI $\cup \{k\}$;

fimse;

fimpara;

fimpara;

fimse;

fimenquanto;

se LRI = ∅ então {Caminho de aumento - novo casamento}

alternar marcas

senão {Árvore Hungariana - atualizar solução dual e custos reduzidos}

$\bar{c} \leftarrow \min\{\bar{c}_{ij}\}, i \in LR, j \in CR$

$u_i \leftarrow u_i + \bar{c}, i \in LR;$

$v_j \leftarrow v_j - \bar{c}, j \in CR;$

$\bar{c}_{ij} \leftarrow \bar{c}_{ij} - \bar{c}, i \in LR, j \in (J - CR);$

$\bar{c}_{ij} \leftarrow \bar{c}_{ij} + \bar{c}, i \in (I - LR), j \in CR;$

fimse;

fimenquanto;

{Solução ótima corresponde a células marcadas}

fimalgoritmo.