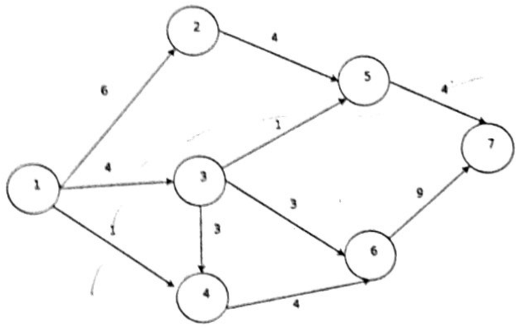
Segunda Prova de Pesquisa Operacional - DCC035

03 de Dezembro de 2009

Questão 01 [15 pontos] Considerando a rede apresentada abaixo, na qual as capacidades dos arcos encontram-se representadas juntamente aos arcos, pede-se:
a) [5 pontos] Utilizando a implementação de *layers* do algoritmo de caminhos aumentados (Dinic), determine o fluxo máximo entre o vértice de origem (1) e destino (7).
b) [5 pontos] Qual é o conjunto de vértices que define o corte de capacidade mínima, que separa 1 e 7 ? Justifique sua resposta.
c) [5 pontos] Formule o Problema de Fluxo Máximo na rede em questão como um Programa de Otimização Linear e responda por que o problema pode ser interpretado como um Problema de Fluxo de Custo Mínimo.



Questão 02 [10 pontos] Considere um projeto composto por várias atividades indicadas na Tabela abaixo. Sabendo que há uma relação de precedência entre as atividades, isto é, para que algumas sejam iniciadas é necessário que outras tenham sido finalizadas, determine por meio de um algoritmo baseado em Programação Dinâmica, o tempo de execução do projeto e o conjunto de atividades críticas (aquelas que, se tiverem seu tempo de execução modificado, modificarão o tempo de execução do projeto). Observação: formule a recursão de Programação Dinâmica que leva ao algoritmo, e use o algoritmo para responder à questão. Não basta apenas dizer qual é o tempo de execução do projeto.

Atividade	Precedência	Tempo
A	-	2
B	-	4
C	{A}	5
D	{A}	2
E	{B,C}	3
F	{B,C}	4
G	{D,E}	4
H	{F}	2

Questão 03 [15 pontos] Considerando que na Tabela abaixo são apresentados os custos de transporte entre 3 fábricas e 4 pontos de venda, as demandas e ofertas de um único produto, determine o custo mínimo de transporte, isto é, o custo mínimo de satisfazer as demandas dos pontos de venda por meio das ofertas das fábricas.

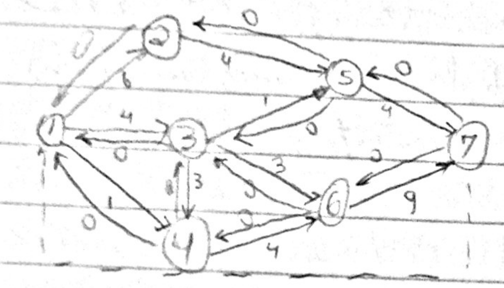
Fábricas	Oferta	Custo de transporte			
		PV1	PV2	PV3	PV4
F1	40	3	2	2	3
F2	80	4	4	5	5
F3	130	7	7	6	4
Demandas		90	60	50	50

Q1 15,0
Q3 15,0
Q2 0,0
30,0

Alysson Fernandes Lima Ferreira

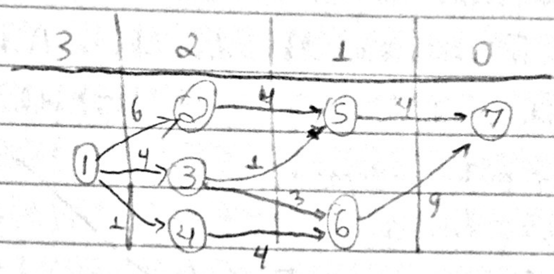
Questão 1 →

a) Rede residual associada:



$x_{n1} = 0$

Rede layered correspondente:



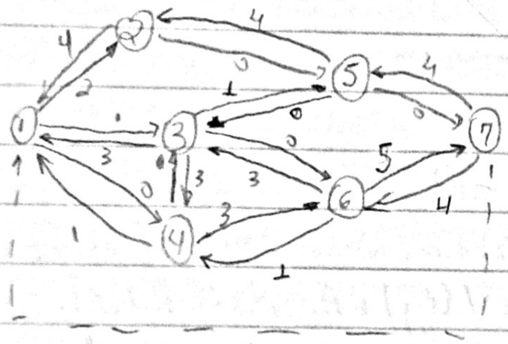
Caminhos de aumento na rede layered:

1) 1 — 2 — 5 — 7 ⇒ $\delta = 4$

1 — 3 — 6 — 7 ⇒ $\delta = 3$

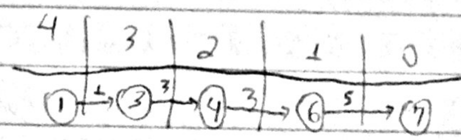
1 — 4 — 6 — 7 ⇒ $\delta = 1$

Atualizando a rede residual:



$x_{n1} = 8$

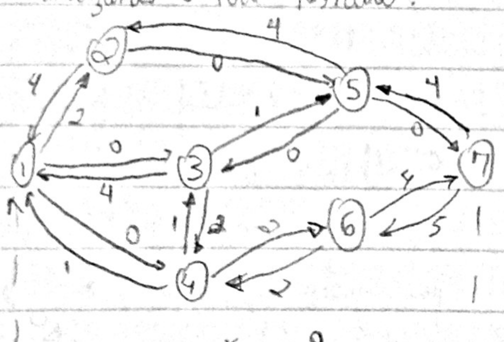
Rede layered associada:



Caminho de aumento nessa rede:

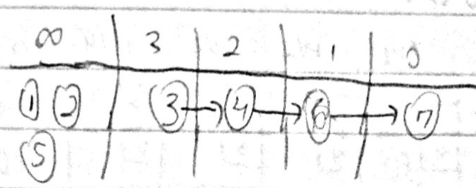
1) 1 — 3 — 4 — 6 — 7 ⇒ $\delta = 1$

Atualizando a rede residual:



$x_{n1} = 9$

Rede layered associada:



Portanto, o fluxo máximo nessa rede é 9.

b) Pelo teorema Max Flow - Min Cut, o fluxo máximo em uma rede

corresponde ao seu corte de capacidade mínima.
Assim, ~~como~~ pelo algoritmo de Dinic executado na letra a (de fluxo máximo 9), os conjuntos, w^* e $\bar{w}^*$ são $w^* = \{1, 2, 5\}$ e $\bar{w}^* = \{3, 4, 6, 7\}$, definidos pela rede layered associada a última rede residual. Obs: w^* e $\bar{w}^*$ definem o conjunto de vértices correspondentes ao corte de capacidade mínima.

c)
$$\max \sum_{j \in V} x_{sj}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in V/\{s,t\}} x_{ij} - \sum_{j \in V/\{s,t\}} x_{ji} = 0$$
$$\sum_{j \in V} x_{sj} = \sum_{j \in V} x_{jt}$$
$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

(obs: s → origem
t → destino).

O problema de fluxo máximo pode ser interpretado como um problema de fluxo mínimo pois a seguinte formulação pode ser obtida a partir da primeira:

$$\min \; -x_{ts}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in V} x_{ij} - \sum_{j \in V} x_{ji} = 0$$
$$0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

Nesse problema, o intuito é minimizar o fluxo $-x_{ts}$, que é o fluxo x_{ts} que passa pelo arco lógico (t, s) da rede, de custo -1.

Questão 3.

	PV1	PV2	PV3	PV4	a_i
F1	[3]	[2] 40	[2]	[3]	40
F2	[4] 80	[4]	[5]	[5]	80
F3	[7] 10	[7] 20	[6] 50	[4] 50	130
b_j	90	60	50	50	

Escolhemos um fluxo inicial viável para essa rede que representa um grafo bipartido.

esta solução básica inicial.

Legenda: a → vetor de ofertas
b → vetor de demandas

Agora iremos montar um quadro que contenha, além do quadro de transporte, os vetores com as variáveis duais.
O algoritmo de transporte para um grafo bipartido sempre trabalha obedecendo as complementaridade de folga.
Assim, $x_{ij}\,(c_{ij} - u_i - v_j) = 0 \quad \forall\,(i,j) \in A$

p/ as variáveis básicas:

	PV1	PV2	PV3	PV4	a_i	u_i
F1	$\boxed{3}$ 1	$\boxed{2}$ 40	$\boxed{2}$ 1	$\boxed{3}$ 4	40	-5
F2	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{4}$ 0	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{5}$ 4	80	-3
F3	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{7}$ 20	$\boxed{6}$ 50	$\boxed{4}$ 50	130	0
b_j	90	60	50	50		
v_j	7	7	6	4		

$u_1 + v_2 = 2$
$u_2 + v_1 = 4$
$u_3 + v_1 = 7$
$u_3 + v_2 = 7$
$u_3 + v_3 = 6$
$u_3 + v_4 = 4$
$\rightarrow \boxed{u_3 = 0}$

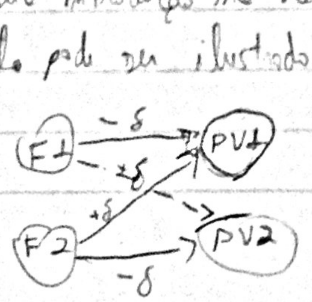
Duvidando!

Como $\nexists\, x_{ij}$ não-básica cujo custo reduzido $\bar{c}_{ij} < 0$, então esse fluxo é ótimo, e seu custo mínimo é $40 \cdot 2 + 80 \cdot 4 + 10 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 50 \cdot 6 + 50 \cdot 4$
$= 80 + 320 + 210 + 500 = \boxed{1110}$ //

Por sorte, o fluxo inicial viável adotado corresponde ao ótimo (de mín. custo).
Porém, poderíamos ter adotado outro vetor inicial seguindo, por exemplo, a regra da distribuição noroeste.
Seguindo-a, teríamos:

	PV1	PV2	PV3	PV4	a_i	u_i
F1	$\boxed{3}$ 40	$\boxed{2}$ -1	$\boxed{2}$ 0	$\boxed{3}$ 3	40	-4
F2	$\boxed{4}$ 50	$\boxed{4}$ 30	$\boxed{5}$ 2	$\boxed{5}$ 4	80	-3
F3	$\boxed{7}$ 0	$\boxed{7}$ 30	$\boxed{6}$ 50	$\boxed{4}$ 50	130	0
b_j	90	60	50	50		
v_j	7	7	6	4		

No caso, x_{12} deve entrar na base, pois $\bar{c}_{12} = -1 < 0$
Com sua introdução na base, geraríamos um ciclo na árvore geradora presente.
O ciclo pode ser ilustrado abaixo:



Aumentando o fluxo na variável não-básica x_{12} em δ, e aplicando o rebalanceamento de fluxo,

observamos que X_{22} é a variável básica mais restritiva com o crescimento de X_{12}, i, no caso, $\delta = 30$.
Aplicando o pivotiamento, temos:

	PV1	PV2	PV3	PV4	a_i	u_i
F1	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$ 30	$\boxed{2}$ (1)	$\boxed{3}$ (4)	40	-5
F2	$\boxed{4}$ 80	$\boxed{4}$ (7)	$\boxed{5}$ (3)	$\boxed{5}$ (5)	80	-4
F3	$\boxed{7}$ (-1)	$\boxed{7}$ 30	$\boxed{6}$ 50	$\boxed{4}$ 50	130	0
b_j	90	60	50	50		
v_j	8	7	6	4		

$u_1 + v_1 = 3$
$u_1 + v_2 = 2$
$u_2 + v_1 = 4$
$u_3 + v_2 = 7$
$u_3 + v_3 = 6$
$u_3 + v_4 = 4$

No caso, X_{31} deve entrar, pois $\overline{C}_{31} = -1 < 0$.
Assim, seguindo os passos anteriores, também chegaremos à solução ótima obtida em nossa primeira tentativa, cujo custo mínimo é 1110.

Questão 2 →
Variáveis de decisão necessárias:
- i : corresponde ao nº de atividades
- p: corresponde ao nº de atividades executadas

$f(i, p)$ → indica se é possível executar i tarefas em até t unidades de tempo, dado que até p tarefas foram executadas.

Assim o caso base é:
$f(4, 0) = 0$
$f(0, t) = 0$

A programação dinâmica possui um espaço de soluções que pode ser representado por uma matriz de espaço x estágios

t\i	1	2	3
0			
1			
2			
3			