Prova 2002/2

1) Responda justificando:
a) Programação Dinâmica é uma busca em largura pelo algoritmo de caminho mínimo.

(Não sei se está certo)
Não. A programação dinâmica é uma estratégia utilizada para otimização de processos de decisão multiestágios. Denominamos um processo de decisão multiestágios aquele que pode ser desdobrado segundo um certo número de etapas sequenciais (ou estágios). Essa estratégia pode ser utilizada para resolver um problema de CM através da busca em largura, mas não somente isso.

b) Os métodos para geração de solução inicial no PT sempre geram uma solução básica viável a menos que a solução inicial seja degenerada.

(Não sei se está certo)
Sim. Os métodos para a geração de solução inicial no PT cuidam para que nunca sejam formados ciclos (sempre se elimina uma linha ou uma coluna a cada iteração) gerando uma solução básica viável. A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam (possuem o mesmo valor naquela iteração). Para evitar a degeneração aplica-se a cada nó uma pequena perturbação ξ.

c) Uma das etapas do algoritmo para o PA é determinar o número máximo de células independentes, ou o número mínimo de traços para cobrir todos os custos nulos da matriz reduzida. Como aplicar o fluxo máximo para identificar esse número de atribuições possíveis?

(Não sei se está certo)
Pode-se acrescentar um nó artificial inicial ligando a todos os nós ofertantes com capacidades infinitas e um nó artificial final ligando a todos os nós de demanda também com capacidades infinitas. Aplica-se o algoritmo de fluxo máximo.

d) O algoritmo de Dijkstra pode também ser aplicado para determinar o caminho máximo entre dois nós de um grafo.

(Não sei se está certo)
Sim. Resolvendo-se o problema de CM primal utilizando Dijkstra a solução dual corresponde ao caminho máximo entre dois nós.

e) Dado um grafo G e as variáveis $xj(l_ij \leq x_ij \leq u_ij)$ correspondentes ao fluxo nos arcos de um corte mínimo $(P,\overline{P})$ quais os valores possíveis para essas variáveis?

(Não sei se está certo)
Se o arco (i,j) pertence ao corte mínimo $(P,\overline{P})$ então:

- $x_ij = l_ij$ se $i \in \overline{P}$ e $j \in P$
- $x_ij = u_ij$ se $i \in P$ e $j \in \overline{P}$

2) Responda entãoaos itens abaixo, relativo-s a um PT:
a) Ao escolher uma variável a entrar na base, o que ocorre se tivermos mais de uma a ser selecionada?

(Não sei se está certo)
Deve ser escolhida aquela que possui menor custo tendo o cuidado de manter uma solução básica viável (sem ciclos).

b) Ao escolher a variável a sair da base, o que ocorre se mais de uma se anular simultaneamente?

(Não sei se está certo)
Pode-se escolher a variável de maior custo entre as que se anularam

c) Como posso identificar infinitas soluções ótimas?

(Não sei se está certo)

Identifica-se através da existência de uma variável não-básica com custo relativo $(c_i j - u_i - v j)$ igual a ZERO no quadro de custos ótimos.

d) Como posso identificar que o problema é inviável, ou que a solução é ilimitada?

Se no quadro final existir uma variável não básica com custo relacional $(c_i j - u_i - v j)$ igual a zero.
o
e) Durante o processo iterativo do Simplex, para cada solução primal viável, temos uma única solução dual inviável.

(Não sei se está certo)
Não. Cada solução primal viável que encontramos, calcula-se as variáveis duais obtendo, assim, uma única solução dual inviável, desde que não se trate da solução ótima pois, nesse caso, a solução dual será viável.

Prova 2003/1

Responda justificando:
1) Como posso identificar infinitas soluções ótimas alternativas no PT, PA e CM?

Infinitas soluções ótima são identificadas quando, no quadro final, exista pelo menos uma variável não básica com custo relacional $(c_i j - u_i - v j)$ igual a ZERO. Isso mostra que ela pode variar indefinidamente tendo infinitas soluções.

2) Como identificar que PT é inviável ou que a solução ilimitada?

(Errada) Se o problema for inviável nunca chegaremos a uma solução inicial. No processo de escolha da variável não teremos opção.
Quando a solução é ilimitada, o dual não terá solução.

3) A unimodularidade da matriz básica de um PT, ou de um PA, garante que a uma variável escolhida para entrar na base será sempre básica

A importância da unimodularidade está associada a integralidade da solução. Se as ofertas e as demandas são constantes inteiras, então todas as soluções básicas são inteiras. Consequentemente, existe uma solução básica ótima inteira.

4) O algoritmo de Dijkstra pode ser usado para calcular o caminho mínimo entre um nó inicial e um nó final do grafo, de um nó inicial a todos os demais, de todos nós para um nó especifico

Sim. O algoritmo de Dijkstra determina o CM do nó inicial a todos os demais. Logo, ele determina o CM do inicial ao final e pode determinar entre todos os nós para um nó específico fazendo esse nó específico ser o inicial.

5) Todos os algoritmos para os problemas de otimização em redes, CM, PT e PA, podem ser vistos como um processo iterativo em que busca-se a viabilidade do problema primal, viabilidade do problema dual e complementariedade de folga.

Sim. De alguma forma, todos os algoritmos estudados baseiam-se nos conceitos da Teoria da Dualidade. Eles buscam a melhor solução e, para tanto, utilizam a viabilidade do problema primal, a viabilidade do problema dual e a complementaridade de folga para alcançá-la. Quando se alcança a viabilidade do problema Primal e Dual sabe-se que chegou a uma solução ótima. É por isso que são usados nos problemas de otimização.

6) Seja um problema de transporte com os seus custos de transporte. Aplicando um algoritmo para árvore geradora mínima (Kruskal ou Prim) sobre esse grafo, supondo os custos de transporte como distâncias fixas, ou constantes independentes dos fluxos, a árvore mínima gerada é uma solução básica para o problema de transporte.

Com o algoritmo de AGM constrói-se uma rede de comunicação entre várias cidades com um custo mínimo, porém os custos devem ser constantes independente do fluxo. Logo, se em um PT, os custos forem fixos, uma solução básica será obtida determinando-se a AGM do grafo.

7) Os métodos para geração de solução inicial no PT sempre geram uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada.

Sim. Os métodos para a geração de solução inicial no PT cuidam para que nunca sejam formados ciclos (sempre se elimina uma linha ou uma coluna a cada iteração) gerando uma solução básica viável. A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam (possuem o mesmo valor naquela iteração). Para evitar a degeneração aplica-se a cada nó uma pequena perturbação ξ.

Prova 2004/1

1) Uma solução básica para o problema do transporte (PT) pode ser obtida aplicando um algoritmo para o problema de árvore geradora mínima (Kruskal ou Prim) sobre o grafo desse problema, supondo os custos de transporte como distâncias fixas, ou constantes independente dos fluxos.

Sim. Adicionando uma raiz que é ligada a todos os fornecedores e encontrando a AGM desse novo grafo e depois tirando essa raiz, os arcos que sobram formam uma solução básica pois a AGM não terá ciclos e ligará todos os nós.

2) A unimodularidade da matriz básica de um PT, ou de um problema de atribuição (PA), garante que uma variável escolhida para entrar na base será sempre inteira e básica.

Não. Garante que as soluções serão inteiras e a existência de uma solução básica inteira. Não garante que será básica.

3) O algoritmo de Dijkstra pode ser usado para calcular o caminho mínimo entre um nó inicial e um nó final do grafo, de um nó inicial a todos os demais, de todos nós para um nó especifico, depende apenas se a busca é horizontal ou em profundidade.

Falso. O algoritmo pode ser usado para calcular o CM entre todas as possibilidades relatadas, mas não depende se a busca é horizontal ou em profundidade, porque o algoritmo gera o caminho mínimo do grafo por qualquer uma das opções de busca.

4) Como posso identificar infinitas soluções ótimas alternativas no PT e PA?

Se no quadro final existir uma variável não básica com custo relacional $(c_ij - u_i - vj)$ igual a zero.

5) Dada uma solução viável para o PT é sempre possível obter uma solução básica viável, a não ser que o problema seja ilimitado.

Falso. Quando existe uma solução inicial é sempre possível obter uma solução básica viável. O problema é ilimitado quando o dual não tiver solução. (50%)

(Não sei se está certo)
Não. O problema do transporte é sempre viável. Estabelecendo o equilíbrio oferta e demanda e se o_i e d_j são limitadas, o problema do transporte tem sempre uma solução viável e toda solução viável é limitada.

6) Uma solução básica para os problemas de CM, PT, ou PA, que atende a viabilidade do problema primal, a viabilidade do problema dual, e a complementaridade de folga, é uma solução ótima.

Sim. Porque todos os problemas (CM,PT e PA) podem ser resolvidos pelo simplex, que atende a viabilidade do primal, a viabilidade do dual e complementaridade de folga.

7) Os métodos para geração de solução inicial no PT sempre geram uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada.

Sim. Os métodos usados nunca formam ciclos porque sempre eliminam uma linha ou uma coluna a cada iteração. A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam. Podemos tornar a solução degenerada uma solução básica aplicando uma perturbação ξ sobre cada nó.

8) Na solução de um problema de fluxo máximo se um arco atinge o seu limite superior então este arco pertence ao corte mínimo.

(Não sei se está certo)
Não. Pode existir um arco que atingiu seu limite superior, mas não pertece ao corte mínimo. As implicações verdadeiras a respeito do corte mínimo são:

- O arco (i,j) onde $i \in P$ e $j \in \overline{P}$ estão seu limite superior
- O arco (i,j) onde $i \in \overline{P}$ e $j \in P$ estão seu limite inferior

<u>Prova 2005/1</u>

Justificar as respostas:

1) Os algoritmos de Árvore Geradora Mínima (AGM) e Caminho Mínimo (CM) selecionam os arcos pela distância, portanto fornecem as mesmas soluções.

(Não sei se está certo)
Não. Uma AGM é um grafo parcial conexo sem ciclos, onde a soma dos pesos das arestas é mínima. Um CM contém uma sequencia de nós intermediários entre um nó inicial e um final, onde a soma das arestas que as ligam é mínima. Os algoritmos que resolvem esses problemas nem sempre fornecem a mesma solução como pode ser mostrado no contra exemplo abaixo:

Grafo-problema:
    1=> (2,2), (4,3), (3,4)
    2=> (4,2)
    3=> (4,4)
Resultado AGM:
    1=> (3,4), (2,2)
    2=> (4,2)

Resultado CM de 1 a 4:
    1=> (4,3)

2) Os métodos para obtenção de uma solução inicial para o Problema de Transporte (PT) consistem em identificar uma árvore geradora no grafo do PT. Portanto, se aplicar um algoritmo para determinar uma árvore geradora mínima (Kruskal ou Prim) sobre o grafo desse problema, supondo os custos de transporte como distâncias fixas, ou constantes independentes dos fluxos, uma solução básica viável inicial é encontrada para o PT.

(Não sei se está certo)
Na AGM constrói-se uma rede de comunicação entre várias cidades com um custo mínimo, porém os custos devem ser constante independente do fluxo. Logo, se num PT, os custos forem fixos, uma solução básica será obtida determinando-se a AGM do grafo.

3) Na Programação Dinâmica tanto faz aplicar a busca pelo custo mínimo, busca horizontal ou em profundidade, a solução ótima será a mesma.

(Não sei se está certo)
Sim. Para o caso em que não existem infinitas soluções ótimas, a solução ótima encontrada é a mesma. O que diferencia é o número de iterações utilizado para cada um.

4) Se um Problema de caminho Mínimo não apresenta circuito negativo, então o algoritmo sempre convergirá.

(Não sei se está certo)
Sim. A convergência do algoritmo é garantida desde que o grado não contenha circuitos negaticos, ou seja, a soma dos custos nos arcos pertencentes a um circuito é não-negativa. Se o circuito negativo existe, a função objetivo pode decrescer infinitamente à medida que o fluxo unitário circula por esse circuito. Caso contrário a função objetivo dual é limitada inferiormente. Como, a cada iteração, uma variável dual u_j' é decrescida, o processo iterativo é finito.

5) Seja uma rede com um conjunto de nós de oferta, um conjunto de nós de demanda e um conjunto de nós intermediários, e a cada arco da rede está associado um custo por unidade de fluxo. O objetivo é minimizar o custo total dos fluxos dos centros de oferta para os centros de demanda. Este problema é denominado Problema de Transbordo. Para resolver este problema basta calcular os caminhos mínimos, baseados nos custos unitários dos

arcos, entre cada nó de oferta e cada nó de demanda, e reduzir o problema a um Problema de Transporte (PT), onde os nós de oferta e demanda são os mesmo do problema original, e os custos por unidade de fluxo no PT correspondem aos custos dos caminhos mínimos calculados anteriormente.

(Não sei se está certo)
Sim. Etapa 1: Eliminar nós de armazenamento. Aplicando-se um algoritmo de CM para todos os p(???) $o_i \times d_j$, cria-se apenas dois conjuntos de nós (ofertas e demandas), ligados por arcos cujos custos são os custos do CM. Assim, o problema se reduz ao problema de transporte. Etapa 2: resolver o problema de transporte resultante.

6) Nos algoritmos para o Problema de Transporte, Problema de Atribuição e Problema de Caminho mínimo, dada uma solução primal e a correspondente solução dual, variando uma variável dual de p todas as demais variam de p.

(Não sei se está certo)
Sim. Desde que tenha que se assegurar que os custos relativos das variáveis primais não sejam alterados.
Seja a a variável dual alterada de p:

- Se $a = v_k$ então v_j varia de $p \; \forall \; j \neq k$ e u_i varia de $-p \; \forall \; i$
- Se $a = u_k$ então u_i varia de $p \; \forall \; i \neq k$ e v_j varia de $-p \; \forall \; j$

7) Como identificar infinitas soluções ótimas e solução ilimitada nos problemas de Transporte, Atribuição e Caminho mínimo?

(Não sei se está certo)
Todos os problemas podem ser reduzidos ao PT. Infinitas soluções ótimas são identificadas em um PT quando tem-se uma variável não básica com custo relativo igua a zero no quadro de custos ótimo. Solução ilimitada pode ser identificada quando a_i e d_j são ilimitados.

8) Ao aplicar um algoritmo de rotulação para resolver um Problema de Fluxo Máximo, dado que existem dois caminhos de aumento de fluxo com a mesma capacidade, a escolha de um ou outro caminho primeiro pode gerar um corte mínimo diferente.

(Não sei se está certo)
Não. Como o algoritmo retrocede até considerar todas as arestas, ao final tem-se um único corte mínimo independente das escolhas feitas durante o processo iterativo.

Prova de 2007/01 - Respostas

1) Sim. Isso porque a Arvore Geradora Mínima constroi uma rede de comunicação entre os nós (cidades) com um custo mínimo, porém os custos devem ser independentes do fluxo. Assim num P.T., se os custos forem fixos podemos achar uma solução básica determinando a A.G.M. do grafo. (adiciona uma raiz ligando-a a todos fornecedores, encontra a A.G.M. e depois tira a raiz, os arcos que sobram formam uma solução básica pois a AGM liga todos os nós e não tem ciclo.

2) Não. A importância da unimodularidade está a associada a integralidade da solução. Se as ofertas e demandas são constantes inteiras, todas as soluções básicas são inteiras e consequentemente existe uma solução ótima inteira. Dessa forma, a unimodularidade garante a integralidade da solução, mas não garante que a variável escolhida para entrar na base será básica.

3) Não. O algoritmo de Dijkstra pode sim ser usado para calcular o caminho mínimo entre todas as possibilidades dadas (entre um nó inicial e um nó final, de um nó inicial a todos os demais e de todos os nós para um nó especifico), porém esse algoritmo não depende, de modo algum, da forma de busca usada já que o algoritmo gera o caminho mínimo do grafo se aplicada uma busca horizontal ou em profundidade, indiferentemente.

4) Infinitas soluções ótimas alternativas no PT e PA podem ser identificadas quando no quadro final existir uma variável não básica com custo relativo ($Cij - uij - vij$) igual a ZERO. Isso mostra que ela pode variar indefinidamente apresentando infinitas soluções alternativas.

5) Não. Dada uma solução viável para o PT é sempre possível obter uma solução básica viável independente da natureza do problema (já que tendo uma solução viável, é certo que ocorre o equilibrio entre oferta e demanda, único aspecto necessário). Não vai haver problema com solução ilimitada: se houver equilíbrio entre a oferta e demanda sempre haverá uma solução viável, caso contrário o problema é inviável.

6) Sim. De alguma forma todos os algoritmos para resolver os porblemas de CM, PT ou PA baseiam-se nos conceitos da Teoria da Dualidade. Eles buscam a melhor solução resolvendo tais problemas com o uso do Simplex que atende a viabilidade do primal, a viabilidade do dual e a complementaridade de folga para chegar enfim à solução ótima.

7) Sim. A não ser no caso de degeneração, nos métodos para a geração de solução inicial no PT uma solução básica viável sempre é gerada. Esses métodos cuidam para que nunca sejam formados ciclos (sempre se elimina uma linha ou uma coluna a cada iteração). A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam (possuem o mesmo valor naquela iteração. Com isso, para evitar a degeneração e consequentemente a ciclagem, ao inicar o processo iterativo adiciona-se a cada centro de ofeta uma pequena perturbação ξ. (50%)

8) ERROU.

Prova de 2008/01 - Respostas

1) Sim. Pode-se adicionar uma raiz (com custo zero) ligada aos nós ofertantes. Em seguida, encontra-se a árvore geradora mínima. Logo após, ao retirar a raiz artificial, obtem-se uma solução básica formada pelos arcos restantes, uma vez que ligará todos os nós e não haverá ciclos. (50%)

2) Não. A unimodularidade garante que há uma solução básica ótima inteira e as soluções que são inteiras. Não garante que a variável a entrar na base será básica.

3) Todos esses problemas podem ser reduzidos para o problema do transporte. Sabe-se que o problema do transporte nunca tem solução ilimitada.
O fluxo máximo tem solução ilimitada quando o_i e d_i são ilimitados.

4) Não O problema do transporte é sempre viável: o único caso que seria iniável seria se a oferta fosse menor que a demanda ou o contrário, mas para esses casos, acrescenta-se variáveis artificiais. Uma vez estabelecido o equilíbrio o entre oferta e demanda e se o e d são limitados, o PT sempre tem solução viável e é sempre limitada. (50%)

5) Sim. Os métodos para geração de solução inicial no PT nunca formam ciclos, uma vez que eliminam uma coluna ou linha em cada iteração. Quando um subconjunto próprio das linha tiver uma soma total das ofertas igual à soma das demandas de um subconjunto próprio das colunas ocorrerá solução degenerada. Para tornar a solução degenerada uma solução básica, basta aplicar uma perturbação sobre

cada ofertante.

6) Não. Pode acontecer de um arco não pertencer ao corte mínimo, mas ter atingido seu limite superior. A regra para aplicar o corte mínimo é:

- os arcos (i,j) onde $i \in P$ e $j \in \overline{P}$ estão no seu limite superior e
- os arcos (i,j) onde $i \in \overline{P}$ e $j \in P$ estão no seu limite inferior

7) Sim. Quando não há infinitas soluções ótimas, a solução ótima encontrada será sempre a mesma o que muda é só o número de iterações utilizadas. A convergência do algoritmo de caminho mínimo é garantida desde que não haja circuitos negativos, ou seja, a soma dos custos nos arcos pertencentes a um circuito é negativa.

8) Sim. Uma vez que não ocorra alteração nos custos relativos das variáveis primais. Uma alteração na linha influencia uma alteração na coluna para compensar. Por exemplo: se adicionou +p em um lugar, alguém da linha deve variar -p e alguém da coluna também. Assim por diante.
Se a é alterada por p:

- Se $a = v_k$, então oj varia de p para cada j que não seja k e u_i varia de -p para todo i.
- Se $a = u_x$, então u_i varia de p para todo i diferente de k e vj varia de -p para todo j.

Prova de 2009/01 - Respostas

1) Os métodos para geração de solução inicial no PT podem gerar uma solução inicial degenerada, mas, neste caso, é possível contornar o problema adicionando-se, ao iniciar o processo iterativo, uma pequena perturbação E a cada centro de oferta. Além disso, se as variáveis xij forem limitadas pelas capacidades de oferta e demanda (mesmo que ilimitados superiormente) e o equilibrio entre estes for estabelecido (mesmo que necessitando da inserção de centros fantasmas), o PT sempre tem solução viável e limitada. A afirmativa está correta em relação ao fato de que a solução inicial possa ser degenerada, mas está incorreta se for considerado que é possível obter uma solução básica viável mesmo nestra situação (a afirmativa sugere que não é possível).

2) Não. É possível que exista algum arco que atinge seu limite superior, mas que não pertence ao corte mínimo.

3) Sim. Na Programação Dinâmica, a solução obtida é a mesma, independente da estratégia de caminhamento adotada. O que pode variar é o número de iterações necessárias para que a solução seja atingida. O algoritmo de caminho mínimo também possui esta propriedade. Neste, à medida que os nós são rotulados (a variável dual correspondente é atualizada), se o elemento a ser atualizado for sempre o mais antigo, será executada uma busca horizontal (explicando melhor, serão varridos primeiro os nós ligados a f e depois os nós a dois arcos de f e assim por diante). Caso a busca se aprofunde rapidamente no grafo, selecionando sempre o elemnto mais atual, a estratégia adotada será a busca em profundidade. A solução final é a mesma para as duas estratégias.

4) Falso. O algoritmo de Dijkstra possui a condição de que todos os custos devem ser não negativos. Trata-se de adaptar a nova condição ao outro algoritmo, resolvendo um modelo dual de uma maneira mais orientada. Adicionar um valor positivo a todos os custos não resolve o problema.

5) Sim. Para estes problemas, as variáveis duais são utilizadas na obtenção dos custos relativos correspondentes às variáveis não básicas, que por sua vez são usadas no teste de otimalidade e na decisão de qual variável deve entrar na base. Como as variáveis duais são obtidas resolvendo-se o sistema de $(m+n-1)$ equações e $(m+n)$ incógnitas, a variação de p em uma das variáveis implica na variação de p nas demais (deve ser assegurado que os custos relativos das variáveis primais não

sejam alterados).

6) Através da existência de uma variável não básica com custo relativo $(c_{is} - u_i - v_s)$ igual a zerono quadro de custos ótimos.

7) Verdadeiro, pois todos esses problemas podem ser resolvidos pelo simplex, que atende a viabilidade primal, a viabilidade dual e a complementariedade de folga.