Fluxo de Custo Mínimo

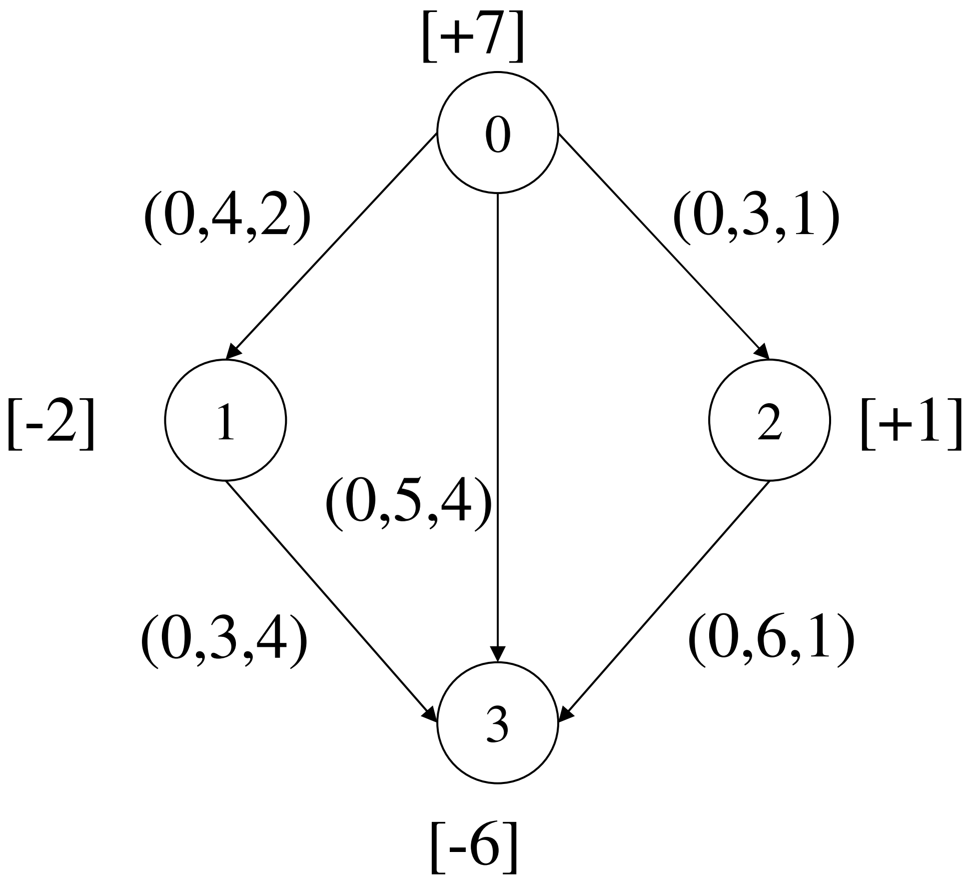
Geraldo Robson Mateus

Fluxo de Custo Mínimo

- Fundamental nos problemas de Fluxo em Redes
- Aplicações em diversas áreas
  - Comunicação
  - Manufatura
  - Transporte...
- Casos particulares
  - Caminho Mínimo
  - Fluxo Máximo
  - Transporte

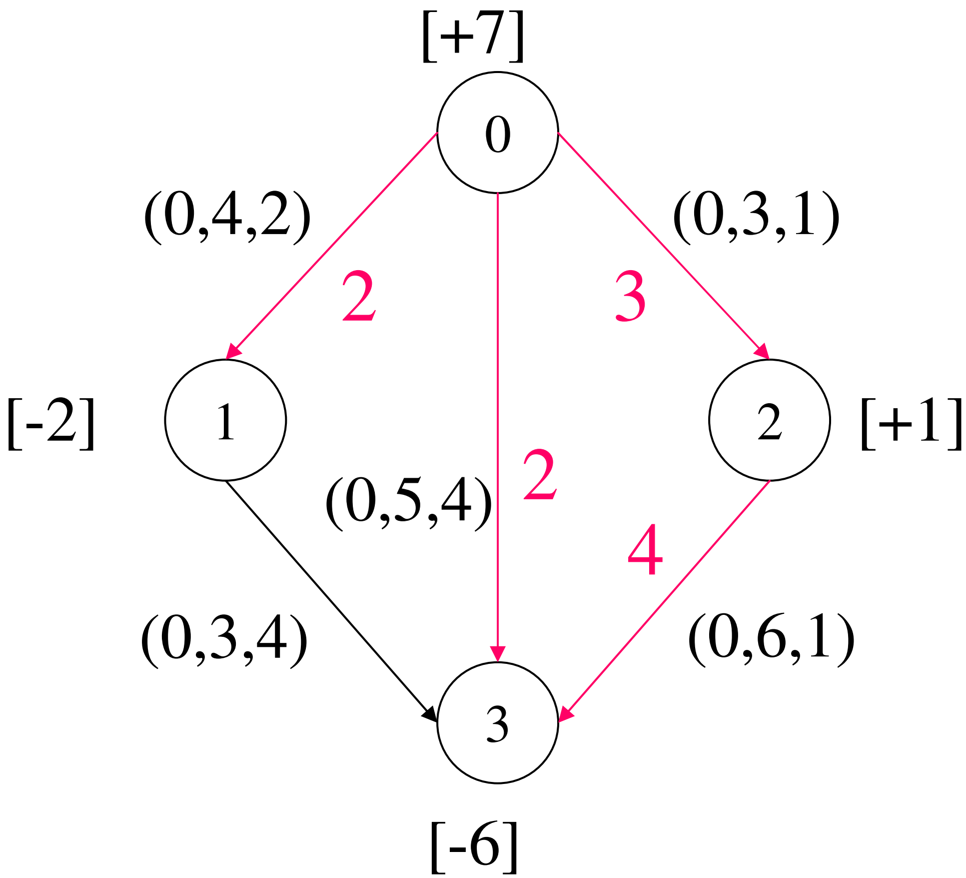
Fluxo de Custo Mínimo

- Grafo *G* direcionado (pode ser não direcionado)
- Conjunto de nós
  - Capacidade
    - Oferta (+)
    - Demanda (-)
    - Transbordo (zero)
- Conjunto de arcos
  - Limite inferior
  - Limite superior
  - Custos: nulo, unitário, quaisquer



$[capac_i]$

(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})



$[capac_i]$

(l_{ij}, u_{ij}, c_{ij})

Custo = 2*2 + 2*4 + 3*1 + 4*1 = 20

Definição

Determinar os fluxos de custo mínimo entre um conjunto de nós de oferta, demanda e transbordo.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{k\in E(i)} x_{ki} = b_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A$$

Comentários

i. Valores de $\mathbf{c_{ij}}$ e $\mathbf{b_i}$ inteiros

ii. Capacidades nos nós x capacidades nos arcos

iii. Limites inferiores/superiores nos nós e arcos

iv. Viabilidade : $\sum_{i\in N} \mathbf{b_i=0}$

v. Grafo não completo, tripartido, bipartido

vi. Problema Linear – Algoritmo Primal, Dual ou

Algoritmo Primal-Dual

Casos Particulares: PT, PA e Caminho Mínimo

Matriz A

- Matriz de incidência do grafo
- Posto da matriz igual a (m – 1).
- Uma submatriz (m x (m-1)) tem posto (m-1), forma uma base e uma árvore geradora no grafo
- Acrescentar variável artificial então posto é igual a m
- Uma base é uma AG e posto (m-1)
- Base é uma matriz triangular
- A é totalmente unimodular então tem integralidade

Definição

Problema Primal

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

$$\sum_{j\in S(i)} x_{ij} - \sum_{k\in E(i)} x_{ki} = b_i, \quad i \in N \qquad (2)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall (i, j) \in A \qquad (3)$$

Problema Dual

$$\max \sum_{i\in N} b_i w_i \qquad (4)$$

$$w_i - w_j \leq c_{ij} \qquad (5)$$

$$w_i \quad livre \quad \forall i \in N \qquad (6)$$

Definição

Se **x*** e **w*** são respectivamente soluções ótimas nos problemas primal e dual, então satisfazem:

- Viabilidade primal
- Viabilidade dual
- Complementaridade de folga
  - $\mathbf{(c_{ij}-w_i+w_j) * x_{ij} = 0}$
    - $\mathbf{(c_{ij}-w_i+w_j) > 0 \rightarrow x^*_{ij} = 0}$
    - $\mathbf{(c_{ij}-w_i+w_j) = 0 \rightarrow x^*_{ij} \geq 0}$

Definição

Fazendo (2) x **w** + (1) :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} (c_{ij}-w_i+w_j)x_{ij} + \sum_{i\in N} b_i w_i$$

Solução Primal

$Bx_B = b$ → Caminho das folhas para o nó raiz

Solução dual:

$B^T w = c_b$ → Caminho do nó raiz para nós folhas

Propriedades

i. Uma base não contém ciclo

ii. Uma base contém ao menos um arco incidente em cada nó do grafo

iii. Uma base é uma árvore geradora do grafo

Solução Básica Viável $\leftrightarrow$ Árvore Geradora do Grafo

$\mathbf{Bx_B=b}$ $\leftrightarrow$ Caminho do nós folhas para o nó raiz (Solução Primal)

$\mathbf{B^Tw=c_B}$ $\leftrightarrow$ Caminho do nó raiz para os nós folhas (Solução Dual)

Algoritmo

<u>Início Algoritmo</u>

$k \leftarrow 0$;

<u>encontre</u> solução inicial (fluxos $\mathbf{x^0}$);

<u>encontre</u> solução dual inicial ($\mathbf{w^0, w^0_n=0}$);

<u>calcule</u> os custos relativos ($\mathbf{c_{ij}-w^k_i+w^k_j}$);

<u>enquanto</u> ($\mathbf{c_{ij}-w^k_i+w^k_j}$) $\mathbf{< 0}$ para algum $(i,j) \in A$ <u>faça</u>

<u>escolha</u> variável ou vetor a entrar na base;

<u>escolha</u> variável ou vetor a sair da base;

<u>atualize</u> os fluxos (x^{k+1}) (pivoteamento);

$k \leftarrow k+1$;

<u>calcule</u> os custos relativos ($\mathbf{c_{ij}-w^k_i+w^k_j}$)

<u>fim enquanto</u>

<u>Fim algoritmo</u>

Solução

- Solução Inicial
  - Método das Duas Fases
  - Método do Big M

- Solução Ótima
  - Solução Inicial
  - Processo iterativo até que $(\mathbf{c_{ij}-w_i+w_j}) \geq \mathbf{0}, \forall(\mathbf{i,j}) \in \mathbf{A}$

Problemas com limites nos fluxos

- Solução Inicial
  - Fluxos são considerados em um dos limites
  - Atualização dos $\mathbf{b_i}$**'s**

- Condições de Otimalidade
  - $\mathbf{x_{ij} = u_{ij} \rightarrow c_{ij} - w_i + w_j \leq 0}$
  - $\mathbf{x_{ij} = l_{ij} \rightarrow c_{ij} - w_i + w_j \geq 0}$

- Pivoteamento
  - Considerar os limites no ciclo
  - Variável não básica pode crescer ou decrescer