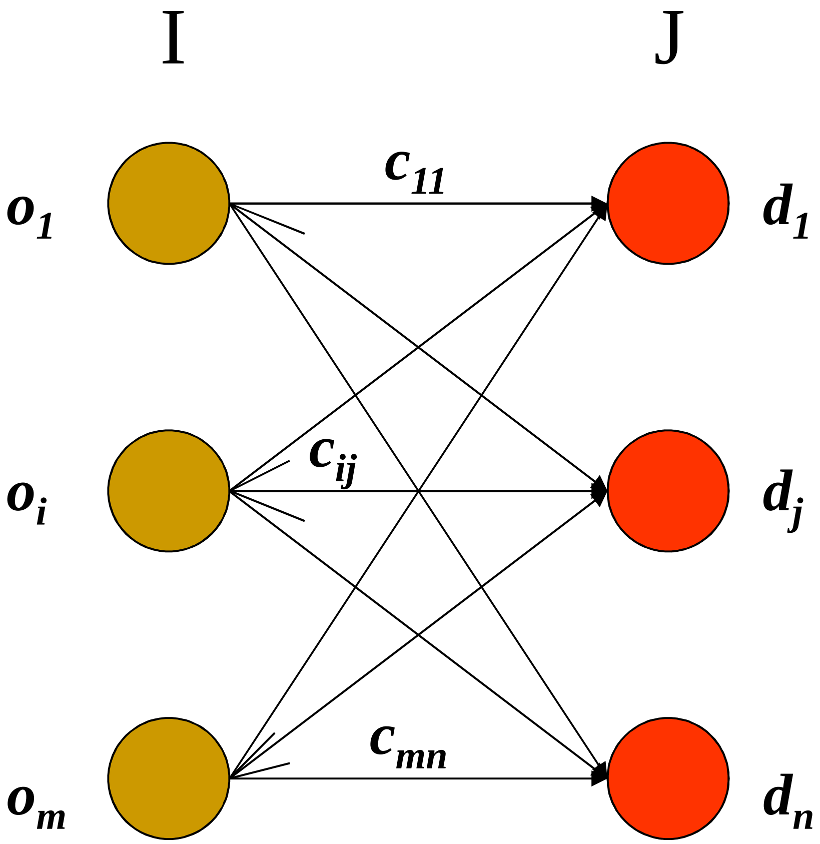
Problema de Transporte

Geraldo Robson Mateus

Definição

Seja um conjunto ***I={1,2,...,m}*** de centros de oferta com capacidade de fornecerem $o_i > 0, \quad i \in I$ unidades de um certo produto. Seja um conjunto ***J* = *{1,2,...,n}*** de centros de demanda que requerem $d_j > 0 \quad j \in J$ unidades do mesmo produto. O custo para transportar uma unidade de ***i*** para ***j*** é dado por c_{ij}. O problema consiste em determinar o fluxo dos centros de oferta para os de demanda com o mínimo custo de transporte.

Grafo associado e modelo geral



$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le o_i & , i \in I \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j & , j \in J \\ x_{ij} \ge 0 & , \forall (i, j) \end{cases}$$

$$Viabilidade: \sum_{j=1}^{n} d_j \le \sum_{i=1}^{m} o_i$$

Considerações

- Grafo bipartido completo;
- $c_{ij} \geq 0, \forall (i, j) \in A; \; o_i > 0, \forall i \in I; \; d_j > 0, \forall j \in J;$
- $\sum_{i \in I} o_i = \sum_{j \in J} d_j$

$$\sum_{i \in I} o_i > \sum_{j \in J} d_j$$

$$\sum_{i \in I} o_i < \sum_{j \in J} d_j$$

- Variações sazonais

Considerações

- Variáveis $x_{ij} \leq u_{ij}$ (limitadas)

- Se $\boldsymbol{o_i}$ e $\boldsymbol{d_i}$ são limitadas, o (PT) sempre tem solução viável limitada.

Exemplo,

$$x_{ij} = \left(o_i d_j\right) \Big/ \sum_{i \in I} o_i \quad , \forall \left(i, j\right) \in A$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \boldsymbol{min}\left\{o_i , d_j\right\} \quad , \forall \left(i, j\right) \in A$$

Modelo Clássico (Primal)

$$\boldsymbol{min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = o_i & , i \in I \qquad (2) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j & , j \in J \qquad (3) \\ x_{ij} \geq 0 & , \forall (i, j) \qquad (4) \end{cases}$$

$$Viabilidade: \sum_{j=1}^{n} d_j = \sum_{i=1}^{m} o_i$$

Problema dual

$$\boldsymbol{max} \sum_{i \in I} o_i u_i + \sum_{i \in I} d_j v_j \qquad (5)$$

$$\begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij} & , \forall (i, j) \qquad (6) \\ u_i , v_j \;\; livres & \qquad (7) \end{cases}$$

Observações

- Se ***x*,u**** e ***v**** são soluções ótimas então:
  1) Satisfaz (2), (3), (4) e (6) viabilidade primal / dual;
  2) $\left(c_{ij} - u_i - v_j\right).x_{ij} = 0$ complementaridade de folga

- Fazendo, $\left(2\right).u + \left(3\right).v + \left(1\right)$

$$\boldsymbol{min} \sum_i \sum_j \left(c_{ij} - u_i - v_j\right).x_{ij} + \sum_i u_i o_i + \sum_j v_j d_j$$

$$x_{ij}^{*}\ \textit{básica} \rightarrow \left(c_{ij} - u_i - v_j\right) = 0 \rightarrow f\left(x\right) = f\left(\text{var.não básicas}\right)$$

$$x_{ij}^{*}\ \textit{não básica} \rightarrow \begin{cases} \left(c_{ij} - u_i - v_j\right) \geq 0 \\ \left(c_{ij} - u_i - v_j\right) < 0 \rightarrow f\left(x\right) \text{ decresce} \end{cases}$$

Variável a entrar na base

Matriz

	x_{11}	x_{12}	…	x_{1n}	…	…	…	…	x_{m1}	x_{m2}	…	x_{mn}	
1	1	1	…	1									o_1
2													o_2
⋮					⋮	⋮	⋮	⋮					⋮
m									1	1	…	1	o_m
1	1				⋱				1				d_1
2		1				⋱				1			d_2
⋮			⋱				⋱				⋱		⋮
n				1				⋱				1	d_n
	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}	…	…	…	…	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}	

Matriz de coeficientes A

i. O posto da matriz $\boldsymbol{A}$ é igual a $\boldsymbol{(m+n-1)}$

- Matriz básica contém $\boldsymbol{(m+n-1)}$ vetores L.I.

  Máximo de $\boldsymbol{(m+n-1)}$ variáveis básicas positivas

- Acréscimo de um vetor coluna artificial.

  O posto de A é igual a $\boldsymbol{(m+n)}$. A variável básica artificial é sempre básica e degenerada.

ii. A matriz $\boldsymbol{A}$ é totalmente unimodular ou toda submatriz quadrada de $\boldsymbol{A}$ tem determinante igual a $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{0}$ ou $\boldsymbol{-1}$.

- Se as ofertas e demandas são valores inteiros então a solução ótima é inteira.

$$x_B = B^{-1}b \ \ , \ \ B^{-1} = \frac{B^{+}}{|B|}$$

Algoritmo SIMPLEX

- Variáveis duais

x_{ij} básicas $\longrightarrow$ $(m+n-1)$ equações $(c_{ij} = u_i + v_j)$

$(m+n)$ incógnitas.

- Solução ótima

Solução inicial

Processo iterativo até que $\left(c_{ij} - u_i - v_j\right) \geq 0 \, , \; \forall \left(i, j\right) \in A$

Algoritmo SIMPLEX

$k \leftarrow 0$;

<u>encontre</u> solução inicial (vetor de fluxos, x^0);

<u>calcule</u> os custos relativos $\left(c_{ij} - u^0{}_i - v^0{}_j\right)$;

<u>enquanto</u> $\left(c_{ij} - u^k{}_i - v^k{}_j\right) < 0$ p/algum $(i, j) \in A$ <u>faça</u>

<u>escolha</u> vetor ou variável a entrar na base;

<u>escolha</u> vetor ou variável a sair da base;

<u>execute</u> pivoteamento (nova solução, x^{k+1});

$k \leftarrow k+1$;

<u>calcule</u> os custos relativos $\left(c_{ij} - u^k{}_i - v^k{}_j\right)$;

<u>fimenquanto</u>;

<u>fimalgoritmo</u>.

Quadro de transporte

Definida uma base todos os demais vetores, podem ser escritos como uma combinação linear dos elementos da base. Assim um vetor não básico, $e^{ij} = e_i + e_{m+j}$, pode ser representado em função de um conjunto de vetores básicos.

	j		*k*	*p*	*o*
i	e^{ij}		e^{ik}		
l			e^{lk}	e^{lp}	
q	e^{qj}			e^{qp}	
d					

$$e^{ij} = e^{ik} - e^{pk} + e^{lp} - e^{qp} + e^{qj}$$

$$e^{ij} = \left(e_i + e_{m+k}\right) - \left(e_p + e_{m+k}\right) + \left(e_l + e_{m+p}\right) +$$
$$-\left(e_q + e_{m+p}\right) + \left(e_q + e_{m+j}\right)$$

$$e^{ij} = \left(e_i + e_{m+j}\right)$$

Propriedades

i. Uma base não contém ciclo;
ii. Uma base contém ao menos um elemento em cada linha e coluna;
iii. O grafo formado pelas células básicas é conexo;
iv. De (i) e (iii), uma base é uma árvore geradora do quadro, e toda árvore geradora é uma base.

Solução básica viável ⟷ Árvore geradora do quadro ⟷ Árvore geradora do grafo origem/destino