O Problema de Transporte

Dilson Lucas Pereira

DCC-UFMG

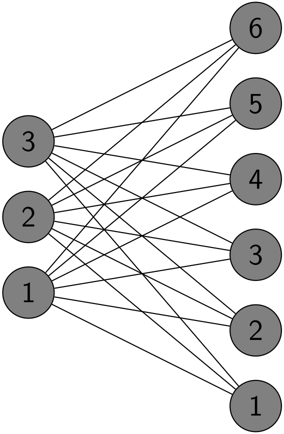
Maio 2011

Outline

O Problema de Transporte

Seja $O = \{1, \dots, m\}$ um conjunto de fontes de bens (origens) e $D = \{1, \dots, n\}$ um conjunto de consumidores (destinos). Assuma que cada fonte i possui disponibilidade o_i, enquanto cada consumidor j tem demanda d_i. Seja c_{ij} o custo de se transportar uma unidade de bens entre $i \in O$ e $j \in D$. O Problema de Transporte (PT) consiste em determinar quanto deve ser enviado de cada origem a cada destino de maneira a minimizar o custo total de transporte.

- O PT pode ser modelado em um bipartido $G = (O, D, E)$.



- Assume-se que E é um conjunto completo de arestas.
  - Caso não exista ligação entre $i \in O$ e $d \in D$, pode-se associar um custo muito elevado a aresta $(i,j) \in E$.
- Assume-se que $\sum_{i \in O} o_i = \sum_{j \in D} d_j$.
  - Caso $\sum_{i \in O} o_i > \sum_{j \in D} d_j$: Cria-se um nó destino artificial $n+1$ com demanda $d_{n+1} = \sum_{i \in O} o_i - \sum_{j \in D} d_j$.
  - Caso $\sum_{i \in O} o_i < \sum_{j \in D} d_j$: Cria-se um nó origem artificial $M+1$ com disponibilidade $o_{m+1} = \sum_{j \in D} d_j - \sum_{i \in O} o_i$.

- Assume-se que E é um conjunto completo de arestas.
  - Caso não exista ligação entre $i \in O$ e $d \in D$, pode-se associar um custo muito elevado a aresta $(i,j) \in E$.
- Assume-se que $\sum_{i \in O} o_i = \sum_{j \in D} d_j$.
  - Caso $\sum_{i \in O} o_i > \sum_{j \in D} d_j$: Cria-se um nó destino artificial $n+1$ com demanda $d_{n+1} = \sum_{i \in O} o_i - \sum_{j \in D} d_j$.
  - Caso $\sum_{i \in O} o_i < \sum_{j \in D} d_j$: Cria-se um nó origem artificial $M+1$ com disponibilidade $o_{m+1} = \sum_{j \in D} d_j - \sum_{i \in O} o_i$.

- Assume-se que E é um conjunto completo de arestas.
  - Caso não exista ligação entre $i \in O$ e $d \in D$, pode-se associar um custo muito elevado a aresta $(i, j) \in E$.
- Assume-se que $\sum_{i \in O} o_i = \sum_{j \in D} d_j$.
  - Caso $\sum_{i \in O} o_i > \sum_{j \in D} d_j$: Cria-se um nó destino artificial $n + 1$ com demanda $d_{n+1} = \sum_{i \in O} o_i - \sum_{j \in D} d_j$.
  - Caso $\sum_{i \in O} o_i < \sum_{j \in D} d_j$: Cria-se um nó origem artificial $M + 1$ com disponibilidade $o_{m+1} = \sum_{j \in D} d_j - \sum_{i \in O} o_i$.

- Para cada origem i e destino j, seja $x_{i,j} \in \mathbb{R}$ uma variável que determina a quantidade a ser transportada de i para j.
- O PT pode ser modelado como o seguinte Problema de Programação Linear:

$$\min \sum_{i \in O, j \in D} x_{ij} c_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_{j \in D} x_{ij} = o_i \qquad i \in O, \tag{2}$$

$$\sum_{i \in O} x_{ij} = d_i \qquad i \in D, \tag{3}$$

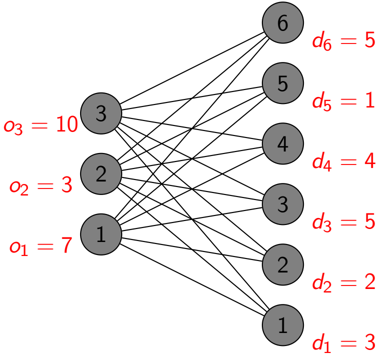
$$x_{ij} \in \mathbb{R}^+ \qquad i \in O, j \in D. \tag{4}$$

Tabela

- Em geral, utiliza-se uma tabela semelhante a abaixo para representar/resolver o problema.

Origem \ Destino	1	$\ldots$	n	Disponibilidade
1	c_{11}	$\ldots$	c_{1n}	o_1
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	$\ldots$	c_{mn}	o_m
Demanda	d_1	$\ldots$	d_n	total

Tabela - Exemplo



O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	5	7	2	9	8	2	7
1	8	2	9	0	3	2	3
1	5	3	7	1	9	4	10
Dem.	3	2	5	4	1	5	20

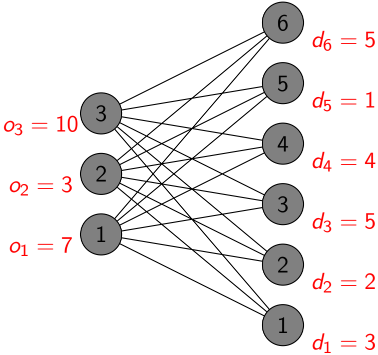
Solução Básica Viável

- Uma solução básica viável para a adaptação do método simplex que estudaremos adiante é uma solução tal que o número de alocações com valor maior que zero é $(m + n - 1)$.
- Se o número de alocações for menor que $(m + n - 1)$, a solução é básica viável degenerada.
- Três possíveis métodos para a obtenção de uma solução básica viável são:
  - Método do Canto Noroeste.
  - Método do Custo Mínimo.
  - Método de Vogel.

Método do Canto Noroeste (MCN) - Algoritmo

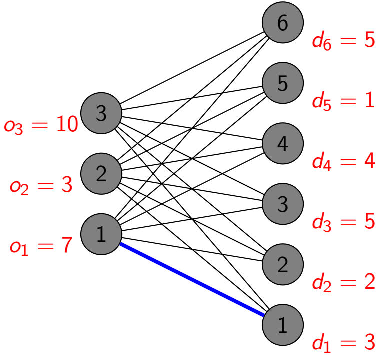
- $x_{ij} \leftarrow 0 \forall i \in O, j \in D$
- $i \leftarrow j \leftarrow 1$
- Enquanto $i \neq m \wedge j \neq n$
    - $q \leftarrow \min\{o_i, d_j\}$
    - $x_{ij} \leftarrow x_{ij} + q$
    - $o_i \leftarrow o_i - q$
    - $d_j \leftarrow d_i - q$
    - se $o_i = 0$, $i \leftarrow i + 1$; senão $j \leftarrow j + 1$

MCN - Exemplo



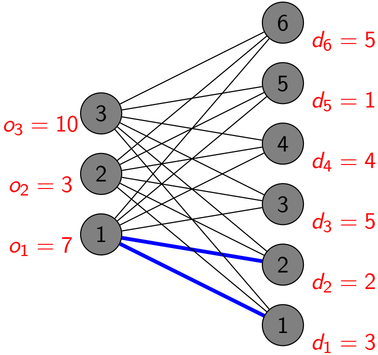
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	(5)	(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	7
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	3	2	5	4	1	5	20

MCN - Exemplo



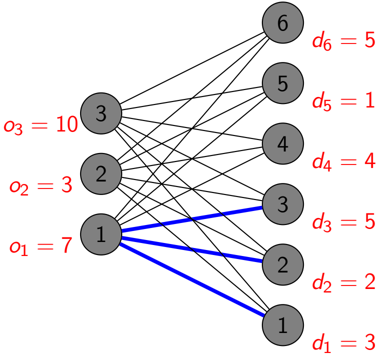
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	4
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	0	2	5	4	1	5	20

MCN - Exemplo



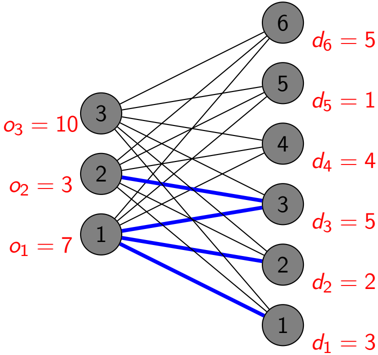
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	2
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	0	0	5	4	1	5	20

MCN - Exemplo



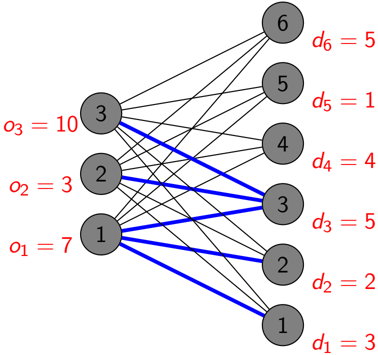
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	2(2)	(9)	(8)	(2)	0
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	0	0	3	4	1	5	20

MCN - Exemplo



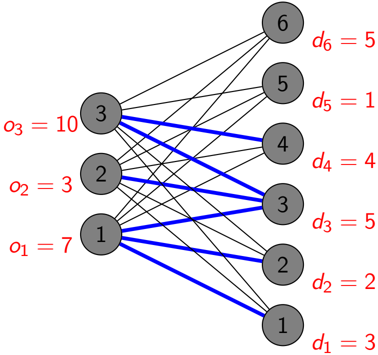
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	2(2)	(9)	(8)	(2)	0
2	(8)	(2)	3(9)	(0)	(3)	(2)	0
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	0	0	0	4	1	5	20

MCN - Exemplo



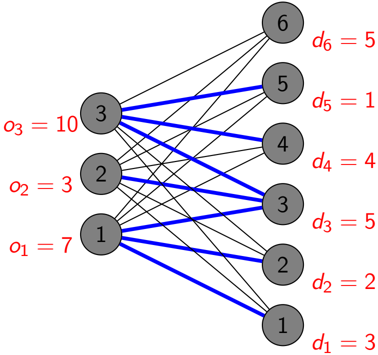
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	2(2)	(9)	(8)	(2)	0
2	(8)	(2)	3(9)	(0)	(3)	(2)	0
3	(5)	(3)	0(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	0	0	0	4	1	5	20

MCN - Exemplo



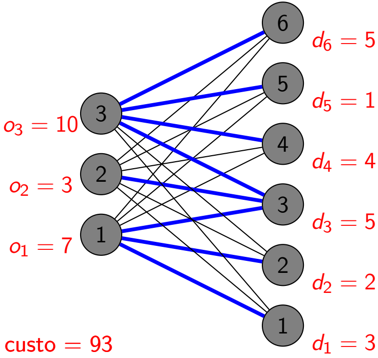
D / O	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	2(2)	(9)	(8)	(2)	0
2	(8)	(2)	3(9)	(0)	(3)	(2)	0
3	(5)	(3)	0(7)	4(1)	(9)	(4)	6
Dem.	0	0	0	0	1	5	20

MCN - Exemplo



O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	2(2)	(9)	(8)	(2)	0
2	(8)	(2)	3(9)	(0)	(3)	(2)	0
3	(5)	(3)	0(7)	4(1)	1(9)	(4)	5
Dem.	0	0	0	0	0	5	20

MCN - Exemplo



custo = 93

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	3(5)	2(7)	2(2)	(9)	(8)	(2)	0
2	(8)	(2)	3(9)	(0)	(3)	(2)	0
3	(5)	(3)	0(7)	4(1)	1(9)	5(4)	0
Dem.	0	0	0	0	0	0	

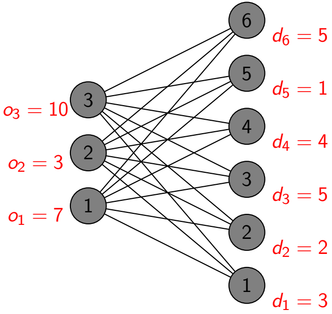
Método do Custo Mínimo (MCM)

- Embora o MCN seja computacionalmente rápido, os custos de transporte não são considerados, gerando-se soluções distantes da otimalidade.
- Inicialmente ordena-se o conjunto de arestas pelo custo, de maneira crescente, i.e., $E_{ord} = \{(i_1, j_1), (i_2, i_3), \ldots, (i_{m \times n}, j_{m \times n})\}$, tal que $c_{i_k, j_k} \leq c_{i_l, j_l}$, $1 \leq k < l \leq m \times n$.

MCM - Algoritmo

- Enquanto $k \leq m \times n$
  - $q \leftarrow \min\{o_{i_k}, d_{j_k}\}$
  - se $q \neq 0$
    - $x_{ij} \leftarrow x_{ij} + q$
    - $o_i \leftarrow o_i - q$
    - $d_j \leftarrow d_i - q$
  - $k \leftarrow k + 1$

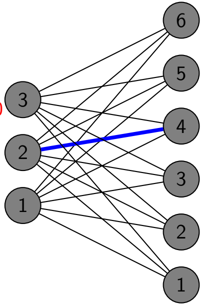
MCM - Exemplo



$$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)\\ (2,2),(2,6),(2,5),(3,2)\\ (3,6),(1,1),(3,1),(1,2)\\ (3,3),(1,5),(2,1),(1,4)\\ (2,3),(3,5)\}$$

D / O	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	(5)	(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	7
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	3	2	5	4	1	5	20

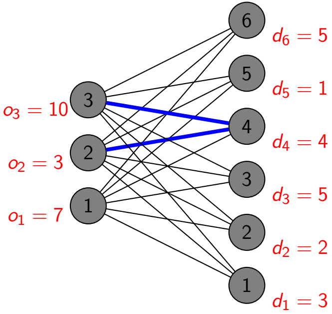
MCM - Exemplo



$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)$
$(2,2),(2,6),(2,5),(3,2)$
$(3,6),(1,1),(3,1),(1,2)$
$(3,3),(1,5),(2,1),(1,4)$
$(2,3),(3,5)\}$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	(5)	(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	7
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10
Dem.	3	2	5	1	1	5	20

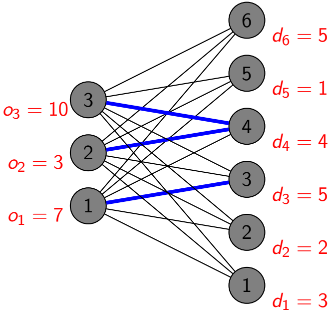
MCM - Exemplo



$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)$
$(2,2),(2,6),(2,5),(3,2)$
$(3,6),(1,1),(3,1),(1,2)$
$(3,3),(1,5),(2,1),(1,4)$
$(2,3),(3,5)\}$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	(5)	(7)	(2)	-	(8)	(2)	7
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	(5)	(3)	(7)	1(1)	(9)	(4)	9
Dem.	3	2	5	0	1	5	20

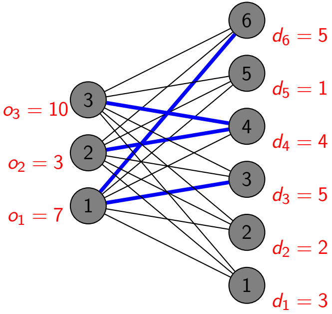
MCM - Exemplo



$$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)\\ (2,2),(2,6),(2,5),(3,2)\\ (3,6),(1,1),(3,1),(1,2)\\ (3,3),(1,5),(2,1),(1,4)\\ (2,3),(3,5)\}$$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	(5)	(7)	5 (2)	-	(8)	(2)	2
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	(5)	(3)	-	1(1)	(9)	(4)	9
Dem.	3	2	0	0	1	5	20

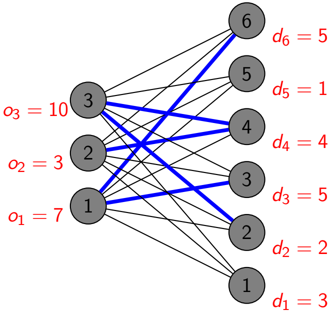
MCM - Exemplo



$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)$
$(2,2),(2,6),(2,5),(3,2)$
$(3,6),(1,1),(3,1),(1,2)$
$(3,3),(1,5),(2,1),(1,4)$
$(2,3),(3,5)\}$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	-	-	5 (2)	-	-	2(2)	0
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	(5)	(3)	-	1(1)	(9)	(4)	9
Dem.	3	2	0	0	1	3	20

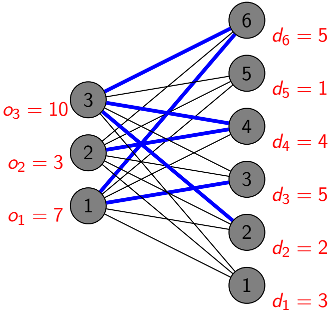
MCM - Exemplo



$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)$
$(2,2),(2,6),(2,5),(3,2)$
$(3,6),(1,1),(3,1),(1,2)$
$(3,3),(1,5),(2,1),(1,4)$
$(2,3),(3,5)\}$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	-	-	5 (2)	-	-	2(2)	0
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	(5)	2(3)	-	1(1)	(9)	(4)	7
Dem.	3	0	0	0	1	3	20

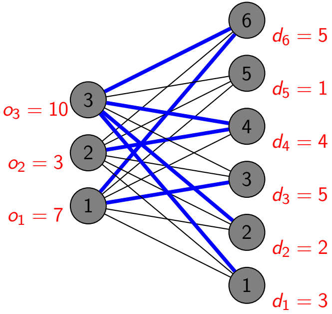
MCM - Exemplo



$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)$
$(2,2),(2,6),(2,5),(3,2)$
$(3,6),(1,1),(3,1),(1,2)$
$(3,3),(1,5),(2,1),(1,4)$
$(2,3),(3,5)\}$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	-	-	5 (2)	-	-	2(2)	0
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	(5)	2(3)	-	1(1)	(9)	3(4)	4
Dem.	3	0	0	0	1	0	20

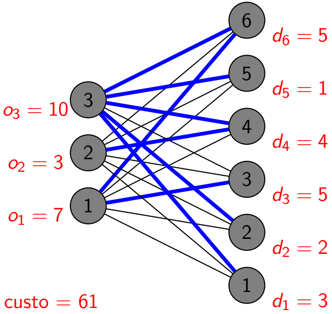
MCM - Exemplo



$$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)\\(2,2),(2,6),(2,5),(3,2)\\(3,6),(1,1),(3,1),(1,2)\\(3,3),(1,5),(2,1),(1,4)\\(2,3),(3,5)\}$$

D / O	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	-	-	5 (2)	-	-	2(2)	0
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	3(5)	2(3)	-	1(1)	(9)	4(4)	1
Dem.	0	0	0	0	1	0	20

MCM - Exemplo



$$E_{ord} = \{(2,4),(3,4),(1,3),(1,6)\\ (2,2),(2,6),(2,5),(3,2)\\ (3,6),(1,1),(3,1),(1,2)\\ (3,3),(1,5),(2,1),(1,4)\\ (2,3),(3,5)\}$$

O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.
1	-	-	5 (2)	-	-	2(2)	0
2	-	-	-	3(0)	-	-	0
3	3(5)	2(3)	-	1(1)	1(9)	4(4)	0
Dem.	0	0	0	0	0	0	20

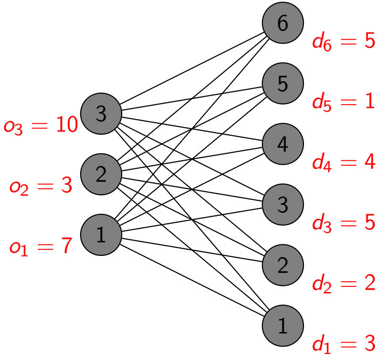
Método do Vogel (MV)

- O MCM apresenta complexidade computacional maior que o MCN, porém, em geral apresenta soluções de qualidade melhor.
- O MV possui complexidade ainda maior, no entando, apresenta soluções melhores no geral.
- Seja p_i^{row} a diferença entre o segundo menor e o menor custo da linha i.
- Seja p_i^{col} a diferença entre o segundo menor e o menor custo da coluna i.

MV - Algoritmo

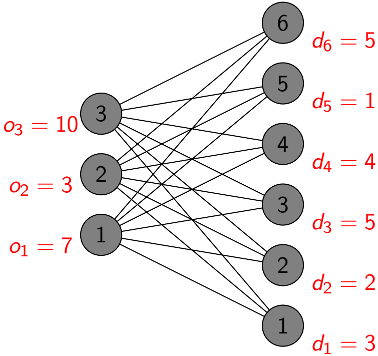
- Enquanto $O \neq \emptyset \wedge D \neq \emptyset$
  - $i' \leftarrow \arg\max_{i \in O} p_i^{row}$
  - $j' \leftarrow \arg\max_{j \in D} p_j^{col}$
  - Se $p_{i'}^{row} \geq p_{j'}^{col}$, $j' \leftarrow \arg\min_{j \in D} c_{i'j}$
  - Senão, $i' \leftarrow \arg\min_{i \in O} c_{ij'}$
  - $q \leftarrow \min\{o_{i'}, d_{j'}\}$
  - $x_{i'j'} \leftarrow x_{i'j'} + q$
  - $o_i' \leftarrow o_i' - q$
  - $d_j' \leftarrow d_i' - q$
  - Se $o_i' = 0$, $O = O \setminus \{i'\}$
  - Senão, $D = D \setminus \{j'\}$
  - Atualize $p_i^{row}, i \in O$, e $p_j^{col}, j \in D$

MV - Exemplo



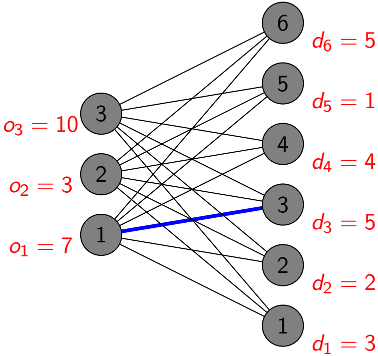
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	(5)	(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	7	0
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3	2
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10	2
Dem.	3	2	5	4	1	5	20	
p^{col}	3	1	5	1	5	0		

MV - Exemplo



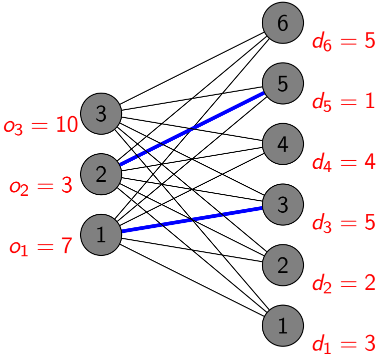
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	(5)	(7)	(2)	(9)	(8)	(2)	7	0
2	(8)	(2)	(9)	(0)	(3)	(2)	3	2
3	(5)	(3)	(7)	(1)	(9)	(4)	10	2
Dem.	3	2	5	4	1	5	20	
p^{col}	3	1	5	1	5	0		

MV - Exemplo



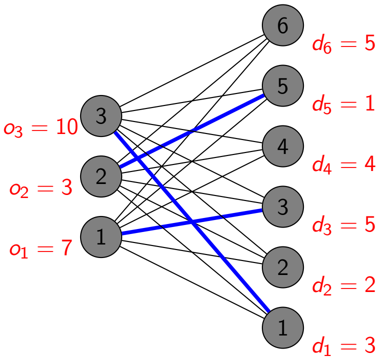
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	(5)	(7)	5(2)	(9)	(8)	(2)	2	3
2	(8)	(2)	-	(0)	(3)	(2)	3	2
3	(5)	(3)	-	(1)	(9)	(4)	10	2
Dem.	3	2	0	4	1	5	20	
p^{col}	3	1	-	1	5	0		

MV - Exemplo



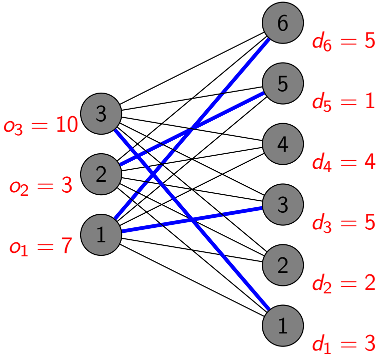
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	(5)	(7)	5(2)	(9)	(8)	(2)	2	3
2	(8)	(2)	-	(0)	1(3)	(2)	2	2
3	(5)	(3)	-	(1)	-	(4)	10	2
Dem.	3	2	0	4	0	5	20	
p^{col}	3	1	-	1	-	0		

MV - Exemplo



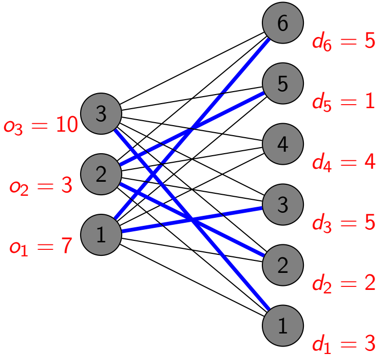
D / O	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	-	(7)	5(2)	(9)	(8)	(2)	2	5
2	-	(2)	-	(0)	1(3)	(2)	2	2
3	3 (5)	(3)	-	(1)	-	(4)	7	2
Dem.	0	2	0	4	0	5	20	
p^{col}	-	1	-	1	-	0		

MV - Exemplo



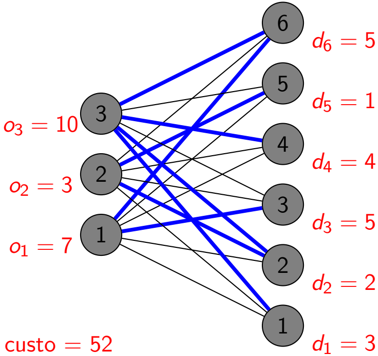
O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	-	-	5(2)	-	-	2 (2)	0	-
2	-	(2)	-	(0)	1(3)	(2)	2	2
3	3 (5)	(3)	-	(1)	-	(4)	7	2
Dem.	0	2	0	4	0	3	20	
p^{col}	-	1	-	1	-	0		

MV - Exemplo



O \ D	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	-	-	5(2)	-	-	2 (2)	0	-
2	-	2 (2)	-	-	1(3)	-	0	-
3	3 (5)	(3)	-	(1)	-	(4)	7	2
Dem.	0	0	0	4	0	3	20	
p^{col}	-	1	-	1	-	0		

MV - Exemplo



D / O	1	2	3	4	5	6	Disp.	p^{row}
1	-	-	5(2)	-	-	2 (2)	0	-
2	-	2 (2)	-	-	1(3)	-	0	-
3	3 (5)	0(3)	-	4(1)	-	3(4)	0	-
Dem.	0	0	0	0	0	0	20	
p^{col}	-	-	-	-	-	-		

Simplex

- Devido a propriedade da *Total Unimodularidade* da matriz de restrições do PT, caso as disponibilidades e demandas forem inteiras, toda solução básica viável será inteira.

Simplex - Algoritmo

- Encontre uma solução básica viável com base $B \subseteq E$.
- Compute o custo reduzido λ_{ij} para toda aresta $(i, j) \in E$.
- Enquanto $\exists (i, j) \in E : \lambda_{ij} < 0$
  - Determine a variável x_{ij} a entrar na base.
  - Realize o pivoteamento .
  - Compute o custo reduzido λ_{ij} para toda aresta $(i, j) \in E$.

Note que a base é composta inclusive por variáveis com valor 0.

Determinação do Custo Reduzido

- Dado uma aresta $e \notin B$, é possível construir um ciclo (único) $p = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots\}$ a partir de e na tabela do simplex (ou pela introdução de e no grafo associado).

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	-	7	2	-	8	2
2	-	2	-	-	3	-
3	5	3	-	1	-	4

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	-	7	2	-	8	2
2	-	2	-	-	3	-
3	5	3	-	1	-	4

Determinação do Custo Reduzido

- O custo reduzido é dado pela soma dos custos das arestas de índice ímpar no ciclo subtraída da soma das arestas de índice par.

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	-	7	2	-	8	2
2	-	2	-	-	3	-
3	5	3	-	1	-	4

$\lambda_{1,5} = 8 + 4 + 2 - 2 - 3 = 9$

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	-	7	2	-	8	2
2	-	2	-	-	3	-
3	5	3	-	1	-	4

$\lambda_{1,2} = 7 + 4 - 2 - 3 = 6$

Pivoteamento

- A variável que sai da base é aquela com menor valor dentre as de índice par no ciclo.
- O valor dessa variável é subtraído das variáveis de índice par e acrescido as variáveis de índice ímpar. A variável deixa a base.

Simplex - Exemplo

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	(5)	(7)	5(2)	(9)	(8)	2(2)
2	(8)	2(2)	(9)	(0)	1(3)	(2)
3	3(5)	0(3)	(7)	4(1)	(9)	3(4)

Simplex - Exemplo

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	2(5)	6(7)	5(2)	10(9)	5(8)	2(2)
2	4(8)	2(2)	6(9)	0(0)	1(3)	-1(2)
3	3(5)	0(3)	3(7)	4(1)	5(9)	3(4)

Simplex - Exemplo

- A variável $x_{2,6}$ apresenta custo reduzido negativo, o ciclo que a envolve é:

O \ D	1	2	3	4	5	6
1						
2		2(2)				-1(2)
3		0(3)				3(4)

- A variável a sair da base é $x_{2,2}$.

Simplex - Exemplo

- Após realizar o pivoteamento, tem-se a solução de custo 50:

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	(5)	(7)	5(2)	(9)	(8)	2(2)
2	(8)	0(2)	(9)	(0)	1(3)	2(2)
3	3(5)	2(3)	(7)	4(1)	(9)	1(4)

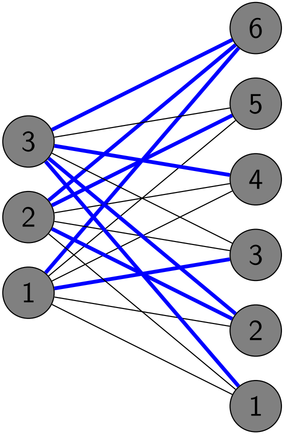
Simplex - Exemplo

- Os custos reduzidos são dados por:

O \ D	1	2	3	4	5	6
1	2(5)	6(7)	5(2)	10(9)	2(8)	2(2)
2	5(8)	0(2)	7(9)	1(0)	1(3)	2(2)
3	3(5)	2(3)	3(7)	4(1)	4(9)	1(4)

- Como todos são positivos a solução é ótima.

Simplex - Exemplo



Obrigado!

- Aula em: `www.dcc.ufmg.br/~dilson/transporte.pdf`
- Material Robson: `www.dcc.ufmg.br/~dilson/aulaspo.zip`
- Próxima aula: Dúvidas sobre o trabalho.