Pesquisa Operacional - Provas

Atenção:

1. Compartilhe esse documento com o máximo de alunos possível da turma
2. Complemente as respostas para torná-las as melhores possíveis
3. Corrija informações erradas, postando um comentário justificando a correção

2 - No primal para o problema do transporte, a cada solução básica viável no primal temos uma única solução básica inviável no dual.
3 - Os métodos de geração de solução inicial no problema do transporte sempre geram uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada ou o problema ilimitado.
4 - Na solução de um PFM se um arco atinge seu limite superior ou inferior então esse arco pertence ao corte mínimo.
5 - Aplicando o algoritmo de aumento na PA é garantida a obtenção de uma solução ótima.
6 - Na PD e no CM, tanto faz aplicar a busca pelo custo mínimo horizontal ou profundidade a solução será a mesma.
7 - A única diferença do algoritmo de PFM para o PFM de CM está no processo de escolha dos nós para rotulação.
8 - Dada uma rede com possíveis custos negativos sem ciclos negativos, para encontrar o CM basta adicionar um valor positivo a todos os arcos e Djikstra.
9 - Uma solução básica para CM, PT e PA que atende a viabilidade do primal, do dual e a complementaridade de folga é uma solução ótima.
10 - Uma soluçã*o básica no PT e PA é uma AG do grafo, portanto, enumerando todas as AG e escolhendo a de menor custo, temos a solução ótima.

Prova 2010/2

Professor Geraldo Robson

Questão 1.

Responda com Sim ou Não e justifique sua resposta para as 6 afirmativas abaixo:

1. Seja x_j uma variável não básica e x_i uma variável básica. Se o valor de a_{ij}, relativo a intersecção entre a linha de x_i e a coluna de x_j, for != 0, então entrando com x_j na base e retirando x_i, temos

uma outra solução básica.

Doft/Rennó: *Sim, mas não é garantida a viabilidade. Isso quer dizer que você va obter uma solução básica, mas ela pode ser inviável, ou seja, pode estar fora do espaço de soluções por contrariar alguma restrição. Um indicativo de que isso tenha ocorrido será se uma ou mais variáveis básicas tiverem valores negativos.*

2. Se x* for solução ótima degenerada de um PPL então x* pode ser obtida numa combinação linear convexa de 2 ou mais pontos distintos do conjunto de soluções viáveis desde que não seja ponto extremo.

Nota (Rennó): *uma fonte de dúvida nessa questão está no fato de x* ser uma solução aumentada ou não. A minha resposta parte do pressuposto de que sim, x* é uma solução aumentada, enquanto a do Filipe assume que x* seja uma solução no espaço original do problema.*

Gurgel: *Acho que não. A solução degenerada é formada por varias soluções básicas que se encontram em fronteiras linearmente independentes. Dessa forma, encontrá-la por cobinação linear convexa é inviavel.*

Victor: *Não, mas acho que o erro está em "desde que não seja ponto extremo". Tem como uma solução ótima degenerada não ser um vértice? Não vejo como.*

Rennó: *Victor, uma solução ótima pode não estar em um vértice, seja ela degenerada ou não. Nesse caso, ela estará em um segmento de reta (ou em uma semi-reta, caso o espaço de soluções viáveis seja limitado mas infinito), dos quais todos os pontos darão o mesmo valor à função objetivo, ou seja, o valor da solução ótima.*

Dilson/Rennó: *A resposta é não. Como x* é degenerado, a sua forma não-aumentada coincide com pelo menos mais uma solução viável* (quem não entender isso pergunta ae). *Dessa forma, a combinação no espaço original resultará em uma solução básica, mas existem pelo menos duas soluções básicas naquele mesmo ponto, uma das quais é x*, e você não tem garantias de qual vai obter.*

Gurgel @Renot: *Qual espaço original?*

Renot @Guelman: *Por espaço original quero dizer o espaço de dimensões iguais ao número de variáveis de decisão, ou seja, o espaço antes de você aumentar o problema introduzindo variáveis de folga, excedentes e artificais.*

Filipe*: Acho que a resposta e sim. Se x* nao esta em um ponto extremo e e otima, o PPL tem mais de uma solucao. E como sabemos, todas essas solucoes são combinacoes convexas de*

duas solucoes otimas de ponto extremo. O fato de x ser degenerada nao muda isso, porque a degeneracao e possivel fora de pontos extremos (com duas restricoes que equivalham a um mesmo hiperplano).*
Filipe*: Supus que x* não eh aumentada.*

3. Se a origem faz parte do conjunto de soluções viáveis de um PPL e não temos restrições do tipo maior ou igual, então não é necessário usar de variáveis artificiais.

Victor: *Se a origem faz parte do conjunto de soluções viáveis, então pode ser usada como solução básica inicial viável, o que torna o uso de variáveis artificiais desnecessário.*
Rennó: *Acho que é o que o Victor disse mesmo. Além disso, se não houver restrições do tipo "=" e ">=", o uso de variáveis artificiais não é necessário; apenas variáveis de folga são suficientes.*

4. Se o conjunto de soluções viáveis de um PPL não foi limitado então existe uma única solução ótima básica ou será ilimitada.

Gurgel/Rennó: *Não. A solução ótima pode estar em um dos segmentos de reta que definem a região de soluções viáveis. Nesse caso, tem-se múltiplas soluções (um valor único, máximo, para o segmento inteiro ou a semi-reta inteira).*
Gurgel: *Pode até ser que tem um unico valor OTIMO, mas nao há como ter 1 unica solução. Do tipo em uma semi-reta possuir Z=19 para todos os pontos... Mas são várias soluções nesse caso.*

5. Nos algorítmos primal, dual e primal-dual, o objetivo é gerar soluções viáveis até atingir a otimalidade.

Hugo Amaral: *Não. No algoritmo dual o objetivo é gerar soluções inviáveis e tentar viabilizá-las até, possivelmente, encontrar a solução ótima.*

6. No processo iterativo do simplex o empate na escolha da variável a entrar na base pode gerar degeneração enquanto na saída pode gerar infinitas soluções ótimas.

Rennó: *Não. Empate para a variável que entra não gera problemas, podendo-se escolher qualquer uma para continuar as iterações. O empate para variáveis de saída pode gerar degeneração e levar o simplex a um loop.*
Gurgel/ Doft: *Concordo com o trennó.*

Vellozo: *É isso mesmo. So se a variavel basica for nula que vai dar degeneracao.*
Marco: empate na entrada pode escolher arbitrariamente. A única diferença é que a solução pode ter mais ou menos passos. Já na saída, deve-se escolhe arbitráriamente, porém agora pode ser degenerada, ou seja, uma variável que vai entrar com valor 0(zero).

Questão 2:

Uma variável y é maior ou igual a x+5 ou é menor ou igual a x-5. Como formular esta condição?

Gurgel: *Tem que ver como formula uma condição que nao é continua... Todas as provas do ano passado o povo errou essa questão.*
Doft: *Acho que teria que separar em dois PPL, um levando cada condição, e dps comparar o caso ótimo dos dois....*
Gurgel @doft: *Talvez seja isso... mas na prova vc nao pode fazer tipo colocar essas duas condiçoes no mesmo simplex. Ele deu errado para isso nas ultimas provas. Pq cada simplex leva em conta um espaço continuo. Nao funciona em espaço descontinuo.*
Dilson: *Acho que não existe um modelo de PPL que inclua essa condição pois cada restrição em um PPL define uma região viável convexa, e essa condição não define uma região viável convexa.*
Gurgel@Dilson: *Pois é, por isso que essa questao é escrota. Eu acho que vc ta certo... E se vc tiver a resposta dessa questao é NAO TEM RESPOSTA. O que seria uma coisa bem mariza...*
Vellozo: *Eu acho que como ele só pediu pra escrever as restrições, então, dá pra escrever e elas seríam:*
y-x>=5
x-y>=5
*Mas como o *ilson falou, isso não define uma região viável convexa já que são duas retas paralelas e a região de interesse é "externa", ou seja, fica um buraco no meio.*
Gurgel@Vellozo: *Ele deu errado pra quem fez assim na prova. Foi quase isso trenó*
Vellozo@Clodovinho*: Eu sei, eu vi a prova, mas acho q tem q explicar o trem que o *ilson falou... isso tá certo!* (também acho (Rennó)).

Questão 3:

Seja um PPL de maximização,

com restrições do tipo menor ou igual, com duas variáveis estruturais e 3 de folga. O termo independente é b = (8,3,2). O quadro ótimo é dado abaixo, lado esquerdo. Ao acrescentar a restrição 2x_1 + x_2 <= 6 e cuja variável de folga é x_6, o quadro ótimo é dado abaixo, lado direito.

(lado esquerdo)

	X1	X2	X3	X4	X5	
X2	0	1	1/2	-1	0	1
X1	1	0	0	1	0	3
X5	0	0	-1/2	1	1	1
Z	0	0	-1/2	-1	0	f(x)-7

(lado direito)

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X2	0	1	0	0	0	1	0
X1	1	0	0	-2	0	0	A
X5	0	0	0	1	1	-1	2
X3	0	0	1	2	0	-2	B
Z	0	0	0	0	0	-1	f(x)+C

1. Determine os valores das constantes A,B e C.

Doft: *Tem como alguém verificar se a tabela do lado direito tá certa? eu fiz aqui mas deu:*

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	
X2	0	1	0	**-2**	0	1	0
X1	1	0	0	**1**	0	0	**3**
X5	0	0	0	**2**	1	-1	2

X3	0	0	1	2	0	-2	**2**
Z	0	0	0	0	0	-1	f(x)-**6**

A coluna do x4 deu uns números trocados...

Rennó: *Fiz aqui, bateu, Doft.*

2. Explicite as soluções primal e dual. Os problemas tem infinitas soluções ótimas? justifique.

Rennó:

Solução primal = {3, 0} (sol. primal básica = {3, 0, 2, 0, 2, 0})

Solução dual = {0, 0, 0, -1}

Os problemas têm infinitas soluções ótimas. Isso é visto pelo fato de uma variável não-básica (x4) ter coeficiente igual a 0 na linha Z (a última linha nessa tabela ae).

3. Qual a restrição mais significativa? Por quê?

Rennó:

A restrição mais significativa é a nova restrição (2x_1 + x_2 <= 6), pois a variável dual associada (-1) é a de maior valor absoluto.

4. Se b_4 (termo independente correspondente a restrição acrescentada) for decrescido de 2 unidades , o que ocorre com a região viável e com o valor ótimo da função objetivo? (aumenta, diminui, não altera), de quanto?

Rennó:

O valor da função objetivo passa de 6 para 4, decrescendo de 2 unidades. A região viável diminui (não sei dizer de quanto ela diminui; a diminuição pode ser vista pelo fato de a solução básica anterior não satisfazer mais a restrição relacionada a b4, ou seja, 2x_1 + x_2 <= 4).

6. Qual a variação possível no termo independente b_4 e do custo c_1 para manter a mesma solução básica?

Prova 2002/2 - Enunciado e Respostas

1) Responda justificando:

a) Programação Dinâmica é uma busca em largura pelo algoritmo de caminho mínimo.

R1: Não. O algoritmo pode ser usado para calcular o 'caminho mínimo' entre todas as possibilidades relatadas, mas não depende se a busca é horizontal ou em profundidade, porque o algoritmo gera o (CM) do grafo para qualquer uma das buscas.

R2: Sim. Na programação dinâmica, a solução obtida é a mesma, independente da estratégia de caminhamento adotada. O que pode variar é o número de iterações necessárias para que a solução seja atingida. O algoritmo de caminho mínimo também possui esta propriedade. Neste, a medida com que os nós são rotulados (a variável dual correspondente é atualizada), se o elemento a ser atualizado for sempre o mais antigo, será executada uma busca horizontal (explicando melhor, serão varridos primeiro os nós ligados a f e depois os nós a dois arcos de f e assim por diante). Caso a busca se aprofunde rapidamente no grafo, selecionando sempre o elemento mais atual, a estratégia adotada será a busca em profundidade.
A solução final é a mesma para as duas estratégias.

b) Os métodos para geração de solução inicial no PT sempre geram uma solução básica viável a menos que a solução inicial seja degenerada.

R1: Verdadeiro. Pelo fato de os métodos usados nunca formarem ciclos, ao passo que eliminam uma linha ou uma coluna a cada iteração, no atendimento das ofertas e demandas. Sabendo que a solução degenerada ocorre quando uma oferta e uma demanda se anulam simultaneamente, para contornar o problema basta aplicar uma perturbação sobre cada nó de oferta.

R2: Os métodos para geração de solução inicial no PT podem gerar uma solução inicial degenerada.
Mas, neste caso, é possível contornar o problema adicionando-se, ao iniciar o processo iterativo, uma pequena perturbação ξx_{ij}

c) Uma das etapas do algoritmo para o PA é determinar o número máximo de células independentes, ou o número mínimo de traços para cobrir todos os custos nulos da matriz reduzida. Como aplicar o fluxo máximo para identificar esse número de atribuições possíveis?

Pode-se acrescentar um nó inicial de capacidade infinita ligado aos nós de oferta e um nó final de capacidade também infinita. Aplica-se então o algoritmo de fluxo máximo.
(Resposta extraída das anotações importantes)

d) O algoritmo de Dijkstra pode também ser aplicado para determinar o caminho máximo entre dois nós de um grafo.

Fernando: Não, porque o algorítmo de Dijkstra utiliza uma estimativa de custo zero no vértice raiz da busca e vai incrementando o custo, sempre buscando o mínimo. A busca pelo máximo descaracterizaria o processo de relaxamento do algoritmo.

Daniel: Sim. O algoritmo de Dijkstra encontra o menor caminho entre quaisquer dois nó da rede, quando todos os arcos têm comprimentos não-negativos. Quando existem arcos com comprimentos negativos, o algoritmo de Dijkstra falha. Já o algoritmo de Ford encontra o caminho mais curto entre dois nós, mesmo que haja arcos com comprimentos negativos. A formulação matemática do problema do caminho máximo é igual à do problema de caminho mais curto, exceto que na função objetivo temos uma maximização ao invés de uma minimização. Os algoritmos (Dijkstra e Ford) obedecidas as condições para os quais foram desenvolvidos, podem ser utilizados para resolver o problema de caminho máximo. Observe que maximizar uma função objetivo é equivalente a minimizar o negativo desta função, portanto, o problema de caminho máximo entre dois nós do grafo pode ser transformado em um problema de caminho mínimo entre esses mesmos nós. (Arenales)

Vellozo: Usando Dijkstra não é possível resolver este problema. Como foi dito o problema de minimizar o caminho é igual a Maximizar o caminho com os pesos negativos, mas o algoritmo de Dijkstra não pode ser usado qndo existem pesos negativos nas arestas. O algoritmo de Ford poderia ser usado para resolvê-lo desde que não tenha ciclos negativos. Somente neste caso pode-se encontrar uma solução em tempo polinomial para este problema... para todos os outrtos casos ele é NP-Completo.

e) Dado um grafo G e as variáveis $x_{ij}(l_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}) P \, \overline{P}$

Sobre os arcos pertencentes a um corte mínimo, pode-se afirmar: $x_{ij} = u_{ij} \; \forall \, i \in P, j \in \overline{P}$
$x_{ij} = l_{ij} \; \forall \, i \in \overline{P}, j \in P$

2) Responda aos itens abaixo, relativos a um PT:

a) Ao escolher uma variável a entrar na base, o que ocorre se tivermos mais de uma a ser selecionada?

Daniel: Variável básica que entra: Visto que Cij - Ui - Vj representa a taxa na qual a função objetivo mudará à medida que a variável não básica for sendo incrementada, a variável que entra deve ter um valor Cij - Ui - Vj negativo para diminuir o custo total. Para escolher entre as candidatas, selecione aquela com o maior valor Cij - Ui - Vj negativo (em termos absolutos).
Variável básica que sai: Aumentando-se a variável que entra a partir de zero dispara uma reação em cadeia para compensar mudanças nas demais variáveis de modo a continuar satisfazendo as restrições de oferta e demanda. A primeira variável básica que chegar a zero se torna a variável básica que saí. (Hillier)

b) Ao escolher a variável a sair da base, o que ocorre se mais de uma se anular simultaneamente?

Daniel: Infinitas soluções ótimas são encontradas. (prova antiga)

Luiz: Uma vez escolhida a variável a entrar na base, devemos calcular o valor que ela poderá transportar com base em duas premissas:

1 - Os limites de fornecimento e os requisitos da demanda continuam satisfeitos.
2 - Os despachos por todas as rotas permanecem não negativos

Uma vez definido o valor devemos alternar entre subtrair e somar valores nos cantos do circuito fechado formado pelas variáveis básica. A variável que atingir zero deve sair da base. Caso mais de uma atinja zero escolhemos uma arbitrariamente. (A. Taha Hamdy, pág 94)

c) Como posso identificar infinitas soluções ótimas?

R: As infinitas soluções ótimas alternativas no PT e PA são identificadas pela ocorrência de algum custo relativo nulo associado à uma variável não básica ($c_{ij} - u_i - v_j = 0$

d) Como posso identificar que o problema é inviável, ou que a solução é ilimitada?

Daniel: Solução ilimitada pode ser identificada quando alguma oferta ou alguma demanda é ilimitada.
Para o PT ser viável, todas as ofertas e demandas devem ser não negativas. (Robson)

e) Durante o processo iterativo do Simplex, para cada solução primal viável, temos uma única solução dual inviável.

Daniel: Falso. Para cada solução primal viável que se encontra, obtem-se uma única solução dual inviável. A única exceção é o caso em que a solução viável do primal é ótima, caso em que a solução dual será viável (Robson).

Prova 2003/2 -Enunciado e Respostas

Responda justificando:

1) Como posso identificar soluções ótimas alternativas no PT, PA e CM?

R: Podemos identificá-las quando no quadro final de suas soluções existir variável não básica com custo relacional ($c_{ij} - u_i - v_j$

2) Como identificar que o PT é inviável, ou que a solução é ilimitada?

R: Quando existe uma solução inicial é sempre possível obter uma solução básica viável.
O problema é ilimitado quando o dual não tiver solução. (50%)

Luiz: uma solução básica ocorre quando uma variável não básica com custo relacional ($c_{ij} - u_i - v_j$
Vellozo: O problema é ilimitado quando as ofertas e/ou as demandas forem ilimitadas.

3) A unimodularidade da matriz básica de um PT, ou de uma PA, garante que uma variável escolhida para entrar na base será sempre básica.

R: A importância da unimodularidade está associada a integralidade da solução. Se as ofertas e as demandas são constantes inteiras, então todas as soluções básicas são inteiras. Conseqüentemente, existe uma solução básica ótima inteira.

4) O algoritmo de Dijkstra pode ser usado para calcular o caminho mínimo entre um nó inicial e um nó final do grafo, de um nó inicial a todos os demais, de todos nós para um nó específico.

R1: O algoritmo de Dijkstra determina o caminho mínimo do nó inicial ao nó final e pode determinar entre todos os nós para um nó específico, bastando fazer com que esse nó específico seja o inicial.

R2: Para calcular o caminho mínimo de um nó inicial até um nó final aplica-se uma vez o algoritmo. Para calcular de um nó inicial para todos os demais, basta aplicá-lo (n-1) vezes sendo que cada nó final será um dos (n-1) restantes. Para calcular de todos os nós para um específico, aplica-se um algoritmo (n-1) vezes fixando o nó destino e variando o nó de origem dentre os (n-1) nós possíveis.

5) Todos os algoritmos para os problemas de otimização em redes, CM, PT, e PA, podem ser vistos como um processo iterativo em que busca-se a viabilidade do problema primal, viabilidade do problema dual e a complementaridade de folga.

R1: Verdadeiro pois os problemas de CM, PT e PA podem ser formulados a fim de serem resolvidos pelo método simplex.
Este método executa iterações até que as propriedades enumeradas (viabilidade do problema primal, viabilidade do problema dual e complementaridade de folga) sejam atendidas.
Quando estas propriedades forem atendidas, o algoritmo terá encontrado uma solução ótima.

R2: todos esses problemas podem ser resolvidos pelo simplex, que é um processo iterativo que busca a solução ótima visando atender aos critérios de viabilidade do primal, viabilidade do dual e complementariedade de folga. A solução inicial do algoritmo deve ser ser uma solução básica.

6) Seja um problema de transporte com os seus custos de transporte. Aplicando um algoritmo para árvore geradora mínima (Kruskal ou Prim) sobre esse grafo, supondo os custos de transporte com distâncias fixas, ou constantes independentes dos fluxos, a árvore mínima gerada é uma solução básica para o problema de transporte.

R1: Com o algoritmo da Árvore Geradora mínima é possível construir uma rede de comunicação entre os nós do grafo, de custo mínimo, porem com os custos independentes do fluxo. Logo, se num Problema de Transporte, os custos forem fixos, uma solução básica será obtida determinando-se a AGM do grafo.

R2: Toda árvore geradora é uma solução básica para o problema do transporte. Logo a árvore geradora mínima também o é.

7) Os métodos para geração de solução inicial no PT sempre geram

uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada.

Verdadeiro. O problema do transporte sempre tem solução viável independentemente do método aplicado.

Prova 2004/2 - Enunciado e Respostas

Responda sim ou não e justifique as afirmativas/ perguntas abaixo:

1) Uma solução básica para o problema de transporte (PT) pode ser obtida aplicando um algoritmo para o problema de árvore geradora mínima (Kruskal ou Prim) sobre o grafo desse problema, supondo os custos de transporte como distâncias fixas, ou constantes independetes dos fluxos.

R: Sim. Adicionando uma raiz que é ligada a todos os fornecedores e encontrando a (AGM) desse novo grafo e depois retirando essa raiz, os arcos que sobram formam uma solução básica pois a AGM não terá ciclos e ligará todos os nós.

2) A unimodularidade da matriz básica de um PT, ou de um problema de atribuição (PA), garante que uma variável escolhida para entrar na base será sempre inteira e básica.

R: Não. Garante que as soluções serão inteiras e a existência de uma solução básica inteira, não garante que será básica.

3) O algoritmo de Dijkstra pode ser usado para calcular o caminho mínimo (CM) entre um nó inicial e um nó final do grafo, de um nó inicial a todos os demais, de todos nós para um nó específico, depende apenas se a busca é horizonal ou em profundidade.

R: Falso. O algoritmo pode ser usado para calcular o (CM) entre todas as possibilidades relatadas, mas não depende se a busca é horizontal ou profundidade porque o algoritmo gera o (CM) do grafo por qualquer uma das buscas horizontal ou profundidade.

4) Como posso identificar infinitas soluções ótimas alternativas no PT e PA?

R: Se no quadro final existir uma variável não básica com custo relacional (

5) Dada uma solução viável para o PT é sempre possível obter uma solução básica viável, a não ser que o problema seja ilimitado.

R: Falso. Quando existe uma solução inicial é sempre possível obter uma solução básica viável.
O problema é ilimitado quando o dual não tiver solução. (50%)

6) Uma solução básica para os problemas de CM, PT ou PA, que atende a viabilidade do problema primal, a viabilidade do problema dual e a complementaridade de folga, é uma solução ótima.

R: Sim, porque todos os problemas (CM, PT e PA) podem ser resolvidos peolo simplex, que atende a viabilidade do primal, a viabilidade do dual e a complementariedade de folga.

7) Os métodos para geração de solução inicial no PT sempre geram uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada.

R: Sim. Os métodos usados nunca formam ciclos (porque sempre eliminam 1 linha ou 1 coluna à cada iteração).
A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam. Podemos tornar a solução degenerada em uma solução básica aplicando uma perturbação sobre cada nó.

8) Na solução de um problema de fluxo máximo se um arco atige o seu limite superior então esse arco pertence ao corte mínimo.

R: Não, pois é possível que exista um arco que atingiu o limite superior ou inferior, mas que não pertença ao corte mínimo. Sobre o corte mínimo, é possível afirmar:

- O arco
- O arco

Prova 2005/1 - Enunciado e Respostas

Justificar as respostas:

1) Os algoritmos de Árvore Geradora Mínima (AGM) e Caminho Mínimo (CM) selecionam os arcos pela distância, portanto fornecem as mesmas soluções.

R: Não. A AGM é um grafo parcial convexo sem ciclos, onde a soma dos pesos dos acertos é mínima.
Um CM contém uma seqüência de nós intermediários entre um nó inicial e final, onde a soma das arestas que as ligam é mínima.
Os algoritmos que resolvem esses problem nem sempre fornecem a mesma solução, como pode ser mostrado no contra-exemplo abaixo.

2) Os métodos para obtenção de uma solução inicial para o Problema de Transporte (PT) consistem em identificar uma árvore geradora no grafo do PT. Portanto, se aplicar um algoritmo para determinar uma árvore geradora mínima (Kruskal ou Prim) sobre o grafo desse problema, supondo os custos de transporte como distâncias fixas, ou constantes independentes dos fluxos, uma solução básica viável inicial é encontrada para o PT.

R: Vide 2003/2 ex. 6

3) Na Programação Dinâmica tanto faz aplicar a busca pelo custo mínimo, busca horizontal ou em profundidade, a solução ótima será a mesma.

R: Sim. Na Programação Dinâmica, a solução obtida é a mesma, independente da estratégia de caminhamento adotada. O que pode variar é o número de iterações necessárias para que a solução seja atingida. O algoritmo de caminho mínimo também possui esta propriedade. Neste, à medida que os nós são rotulados (a variável dual correspondente é atualizada), se o elemento a ser atualizado for sempre o mais antigo, será executada uma busca horizontal (explicando melhor, serão varridos primeiro os nós ligados a

R2: Para o caso em que não existam infinitas soluções ótimas, a solução ótima encontrada é a mesma.

O que diferencia é o número de iterações utilizada por cada um.

4) Se um Problema de Caminho Mínimo não apresenta circuito negativo, então o algoritmo sempre convergirá.

R: Sim. A convergência do algoritmo é garantida desde que o grafo não contenha o circuitos negativos, ou seja, a soma dos custos nos arcos pertencentes a um circuito é não negativa. Se o circuito negativo existe, a função objetivo pode decrescer infinitamente à medida que o fluxo unitário circula por esse circuito. Caso contrário a função objetivo dual é limitada inferiormente como, a cada iteração, uma variável dual Uj é decrescida, o processo iterativo é infinito.

5) Seja uma rede com um conjunto de nós de oferta, um conjunto de nós de demanda e um conjunto de nós intermediários, e a cada arco da rede está associado um custo por unidade de fluxo. O objetivo é minimizar o custo total dos fluxos dos centros de oferta para os centros de demanda. Este problema é denominado Problema de Transbordo. Para resolver este problema basta calcular os caminhos mínimos, baseados nos custos unitários dos arcos, entre cada nó de oferta e cada nó de demanda, e reduzir o problema a um Problema de Transporte (PT), onde os nós de oferta e demanda são os mesmo do problema original, e os custos por unidade de fluxo no PT correspondem aos custos dos caminhos mínimos calculados anteriormente.

R1: Sim, pois ao calcular os caminhos mínimos entre os nós de oferta e demanda, pode-se eliminar os nós intermediários, substituindo-os pelo caminho calculado. Teremos então um PT correspondente.

R2:
Etapa 1 - eliminar nós de armazenamento. Aplicando-se um algoritmo de caminho mĩnimo para todos os pares Oi x Dj, cria-se apenas dois conjuntos de nós (ofertas e demandas), ligados por arcos cujos custos são os custos dos caminhos mĩnimos. Assim, o problema se reduz ao problema de transporte.

Etapa 2 - resolver o problema de transporte resultante.

6) Nos algoritmos para o Problema de Transporte, Problema de Atribuição e Problema de Caminho mínimo, dada uma solução primal e a correspondente solução dual, variando uma variável dual de p todas as demais variam de p.

R: Sim, desde que tenha que se assegurar que os custos relativos das variáveis primais não sejam alterados.

Seja a variável dual alterada de p

- se a = Vk, entao Oi varia de p (para todo j != K) e Ui varia de -p

7) Como identificar infinitas soluções ótimas e solução ilimitada nos problemas de Transporte, Atribuição e Caminho mínimo?

R: Todos os problemas podem ser reduzidos ao problema de transporte. Infinitas soluções ótimas sao identificadas em um PT quando tem-se uma variavel nao basica com custo relativo igual a zero no quadro de custos õtimo. Solucao ilimitada pode ser identificada quando Ai e Dj sao ilimitados.

8) Ao aplicar um algoritmo de rotulação para resolver um Problema de Fluxo Máximo, dado que existem dois caminhos de aumento de fluxo com a mesma capacidade, a escolha de um ou outro caminho primeiro pode gerar um corte mínimo diferente.

R: Não. Como o algoritmo retrocede até considerar todas as arestas, ao final tem-se um único corte mínimo independente das escolhas feitas durante o processo iterativo.

Prova de 2007/01 - Respostas

Não tem perguntas, só respostas

1) Sim. Isso porque a Arvore Geradora Mínima constroi uma rede de comunicação entre os nós (cidades) com um custo mínimo, porém os custos devem ser independentes do fluxo. Assim num P.T., se os custos forem fixos podemos achar uma solução básica determinando a A.G.M. do grafo. (adiciona uma raiz ligando-a a todos fornecedores, encontra a A.G.M. e depois tira a raiz, os arcos que sobram formam uma solução básica pois a AGM liga todos os nós e não tem ciclo).

2) Não. A importância da unimodularidade está associada a integridade da solução. Se as ofertas e demandas são constantes inteiras, todas as soluções básicas são inteiras e consequentemente existe uma solução ótima inteira. Dessa forma, a unimodularidade garante a integridade da solução mas não garante que a variável escolhida para entrar na base será básica.

3) Não. O algoritmo de Dijkstra pode sim ser usado para calcular o caminho mínimo entre todas as possibilidades ditas (entre um nó inicial e um nó final, de um nó inicial a todos os demais e de todos os nós para um nó específico), porém esse algoritmo não depende, de modo algum, da forma de busca usada já que o algoritmo gera o caminho mínimo do grafo se aplicada uma busca horizontal ou se aplicada uma busca em profundidade, indiferentemente.

4) Infinitas soluções ótimas alternativas no PT e PA podem ser identificadas quando no quadro final existir uma variável não básica com custo relativo (

5) Não. Dada uma solução viável para o PT é sempre possível obter uma solução básica viável independente da natureza do problema (já que tendo uma solução viável é certo que ocorre o equilíbrio entre oferta e demanda, único aspecto necessário).
Não vai haver problema com solução ilimitada: se houver equilíbrio entre a oferta e demanda sempre haverá uma solução viável, caso contrário o problema é inviável.

6) Sim. De alguma forma, todos os algoritmos para resolver os problemas de CM, PT ou PA baseiam-se nos conceitos da Teoria da Dualidade. Eles buscam a melhor solução resolvendo tais problemas com o uso do simplex, que atende a viabilidade do primal, a vaibilidade do dual e a complementaridade de folga para chegar, emfim, a solução ótima.

7) Sim. A não ser no caso de degeneração, nos métodos para a geração de solução inicial no PT uma solução básica viável sempre é gerada. Esses métodos cuidam para que nunca sejam formados ciclos (sempre se elimina uma linha ou uma coluna a cada iteração). A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam (possuem o mesmo valor naquela iteração). Com isso, para evitar a degeneração e consequentemente a ciclagem, ao iniciar o processo iterativo adiciona-se a cada centro de oferta uma pequena perturbação. (50%)

Prova de 2008/01 - Respostas

1) Sim. Pode-se adicionar uma raiz (com custo zero) ligada aos nós ofertantes. Em seguida, encontra-se a árvore geradora mínima. Logo após, ao retirar a raiz artificial, obtem-se uma solução básica formada pelos arcos restantes, uma vez que ligará todos os nós e não haverá ciclos. (50%)

2) Não. A unimodularidade garante que há uma solução básica ótima inteira e as soluções que são inteiras. Não garante que a variável a entrar na base será básica.

3) Todos esses problemas podem ser reduzidos para o problema do transporte. Sabe se que o problema do transporte nunca tem solução ilimitada.
O fluxo máximo tem solução ilimitada quando

4) Não O problema do transporte é sempre viável: o único caso que seria iniável seria se a oferta fosse menor que a demanda ou o contrário, mas para esses casos, acrescenta-se variáveis artificiais. Uma vez estabelecido o equilíbrio o entre oferta e demanda e se 50%)

5) Sim. Os métodos para geração de solução inicial no PT nunca formam ciclos, uma vez que eliminam

uma coluna ou linha em cada iteração. Quando um subconjunto próprio das linha tiver uma soma total das ofertas igual à soma das demandas de um subconjunto próprio das colunas ocorrerá solução degenerada. Para tornar a solução degenerada uma solução básica, basta aplicar uma perturbação sobre cada ofertante.

6) Não. Pode acontecer de um arco não pertencer ao corte mínimo, mas ter atingido seu limite superior. A regra para aplicar o corte mínimo é:
- os arcos (i,j) onde
- os arcos (i,j) onde

7) Sim. Quando não há infinitas soluções ótimas, a solução ótima encontrada será sempre a mesma o que muda é só o número de iterações utilizadas. A convergência do algoritmo de caminho mínimo é garantida desde que não haja circuitos negativos, ou seja, a soma dos custos nos arcos pertencentes a um circuito é negativa.

8) Sim. Uma vez que não ocorra alteração nos custos relativos das variáveis primais. Uma alteração na linha influencia uma alteração na coluna para compensar. Por exemplo: se adicionou +p em um lugar, alguém da linha deve variar -p e alguém da coluna também. Assim por diante.
Se a é alterada por p:
- Se
- Se

Prova de 2009/1 - Respostas

1) Os métodos para geração de solução inicial no PT podem gerar uma solução inicial degenerada, mas, neste caso, é possível contornar o problema adicionando-se, ao iniciar o processo iterativo, uma pequena perturbação E a cada centro de oferta. Além disso, se as variáveis

2) Não. É possível que exista algum arco que atinge seu limite superior, mas que não pertence ao corte mínimo.

3) Sim. Na Programação Dinâmica, a solução obtida é a mesma, independente da estratégia de caminhamento adotada. O que pode variar é o número de iterações necessárias para que a solução seja atingida. O algoritmo de caminho mínimo também possui esta propriedade. Neste, à medida que os nós são rotulados (a variável dual correspondente é atualizada), se o elemento a ser atualizado for sempre o mais antigo, será executada uma busca horizontal (explicando melhor, serão varridos primeiro os nós ligados a

4) Falso. O algoritmo de Dijkstra possui a condição de que todos os custos devem ser não negativos. Trata-se de adaptar a nova condição ao outro algoritmo, resolvendo um modelo dual de uma maneira mais orientada. Adicionar um valor positivo a todos os custos não resolve o problema.

5) Sim. Para estes problemas, as variáveis duais são utilizadas na obtenção dos custos relativos correspondentes às variáveis não básicas, que por sua vez são usadas no teste de otimalidade e na decisão de qual variável deve entrar na base. Como as variáveis duais são obtidas resolvendo-se o sistema de

6) Através da existência de uma variável não básica com custo relativo

7) Verdadeiro, pois todos esses problemas podem ser resolvidos pelo simplex, que atende a viabilidade primal, a viabilidade dual e a complementariedade de folga.

Afirmativas importantes:

- Os algoritmos de AGM e CM selecionam os arcos pela distância e, portanto, fornecem as mesmas soluções. Falso, porque uma AGM é um grafo conexo sem ciclos no qual a soma dos pesos das arestas é mínimo. Já o CM contém uma seqüência de nós intermediários entre um nó inicial e um nó final, onde a soma das arestas que ligam é mínimo. Os algoritmos que resolvem os dois problemas nem sempre geram a mesma solução.
- Aplicar um algoritmo de geração de AGM no PT, supondo os custos de transporte como distâncias fixas ou como constantes independentes dos fluxos, resulta em uma solução básica viável inicial para o PT. Está correto porque toda árvore geradora é uma solução básica para o PT, portanto a AGM também o é. A solução é básica porquê não haverá ciclos e todos os nós estarão ligados.
- Na Programação Dinâmica, tanto faz aplicar a busca pelo custo mínimo, busca horizontal ou busca em profundidade, a solução ótima será a mesma. Está correto porque o algoritmo sempre convergirá.
- Se um problema de CM não apresenta circuito negativo, então o algoritmo sempre convergirá. Está correto porquê a cada iteração uma variável dual
- Para resolver um problema de transbordo (rede com um conjunto de nós de oferta, um conjunto de nós de demanda e um conjunto de nós intermediários com um custo associado à cada arco), basta calcular os caminhos mínimos, baseados nos custos unitários dos arcos , entre cada nó de oferta e cada nó de demanda e reduzir o problema a um PT onde os custos por unidade de fluxo no PT correspondem aos caminhos mínimos calculados. Está correto pois ao calcular o camínho mínimo entre nós de oferta e demanda, pode-se substituir os nós intermediários por uma aresta de custo igual ao caminho mínimo calculado.
- Nos algoritmos de PT, PA e CM, dada uma solução primal e a correspondente dual, variando uma variável dual de p todas as demais varia de p. Está correto desde que se assegure que os custos relativos das variáveis primais não sejam alterados.
- Se existir alguma variável não básica com custo relativo nulo no quadro de custos ótimo para o PT (e também para o PA e CM, uma vez que podem ser reduzidos a um PT), então existem infinitas soluções ótimas. Solução ilimitada pode ser identificada quando alguma oferta ou alguma demanda é ilimitada.
- Ao aplicar um algoritmo de rotulação para resolver um problema de fluxo máximo, dado que existem dois caminhos de aumento de fluxo de mesma capacidade, a escolha de um ou outro caminho primeiro não gera um corte mínimo diferente. Isto porque o algoritmo retrocede até considerar todas as arestas, tendo um único corte mínimo ao final, independentemente das escolhas feitas durante o processo iterativo.
- A unimodularidade da matriz básica de um PT ou de um PA garante que uma variável escolhida para entrar na base será sempre inteira e básica. Isto é falso porque a propriedade de unimodularidade garante que todas as soluções básicas sejam inteiras e que existirá uma solução básica ótima inteira. **Não garante que a variável a entrar na base será básica**. <- WTF? Se ela entra na base ela passa a ser básica!
- O algoritmo de Dijkstra pode ser usado para calcular o caminho mínimo entre um nó inicial e um nó final do grafo, de um nó inicial a todos os demais nós e de todos os nós para um nó específico, dependendo apenas se a busca é horizontal ou em profundidade. Isto é falso porque, apesar de o algortmo de Dijkstra poder ser usado para calcular o caminho mínimo entre todas as possibilidades citadas, isso não depende do tipo de busca que é feito. Ele gera o CM independente da busca utilizada.
- Dada uma solução viável para o PT é sempre possível obter uma solução básica viável, a não ser que o problema seja ilimitado. Está errado porque o PT é sempre viável e, estabelecido o equilíbrio entre as ofertas e demandas e se todas as ofertas e demandas são limitadas, o PT

sempre tem solução viável básica e toda solução viável é limitadas.

- Uma solução básica que para os problemas de CM, PT ou PA, atenda à viabilidade primal, à viabilidade dual e à complementaridade de folga é uma solução ótima. Correto porque essas são as condições para que uma solução básica seja ótima. Todos esses problemas podem ser resolvidos pelo método Simplex, que atende a esses critérios.
- Os metodos para geração de uma solução inicial no PT sempre geram uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada. Está correto porque os métodos usados nunca formam ciclos, uma vez que eliminam uma linha ou coluna a cada iteração. A solução degenerada ocorre quando uma oferta e uma demanda se anulam simultaneamente. Podemos tornar a solução degenerada em solução básica aplicando uma perturbação sobre cada nó de oferta.
- Na solução de um problema de fluxo máximo, se um arco atinge seu limite superior então esse arco pertence ao corte mínimo. Falso, pois pode acontecer de um arco não pertencer ao corte mínimo, mas ter atingido seu limite superior. A regra para aplicar o corte mínimo é:
- - os arcos (i,j) onde
- - os arcos (i,j) onde
- As arestas que ligam
- Programação Dinâmica é uma busca em largura no algoritmo de CM. Verdadeiro porque a partir de um nó fonte testa-se todos os nós que a ele chegou-se de forma a encontrar o melhor caminho. O processo se repete expandindo em largura. Entretanto, Programação Dinâmica é uma estratégia utilizada para resolver problemas que apresetnam subestrutura ótima (a solução ótima do problema pode ser obtida combinando-se as soluções ótimas dos subproblemas) e subproblemas sobrepostos, não ficando restrito à resolução do problema de CM apenas pela busca em largura.
- Como aplicar o fluxo máximo para identificar o número de atribuições possíveis em um PA (número mínimo de traços necessários para cobrir todos os custos nulos da matriz reduzida)? Pode-se acrescentar um nó artificial inicial ligado a todos os nós de oferta com capacidade infinita e um nó artificial final recebendo arestas de todos os nós de demanda, também com capacidade infinita. Aplica-se o algoritmo de fluxo máximo sobre esse novo grafo.
- Ao escolher uma variável a entrar na base em um PT, seleciona-se a de menor custo, tendo o cuidado de manter uma solução básica viável (sem ciclo).
- Ao escolher uma variável a sair da base em um PT, escolhe-se a de maior custo entre as que se anularam.
- Durante o processo iterativo do Simplex, para cada solução primal viável temos uma única solução dual viável. Falso porque, para cada solução primal viável que se encontra, obtem-se uma única solução dual inviável. A única exceção é o caso em que a solução viável do primal é a ótima, case em que a solução dual será viável.

Prova 2010/2 - Enunciado e Respostas (Nao eh a prova, mas eh bem parecida)

Responda sim ou nao e justifique

1 - O problema da AGM é um caso particular do k-árvore de custo mínimo que é um caso particular da AGM generalizada.

(conferir se a resposta esta correta)
Sim. O problema da AGM é um caso particular do k-árvore de custo mínimo no qual k é igual à quantidade de todos os vértices da árvore. O problema k-arvore é um caso particular da AGM generalizada onde cada grupo de vértices possui apenas um vértice e se escolhe k grupos que devem apresentar o menor custo das escolhas possiveis.

2 - No primal para o problema do transporte, a cada solução básica viável no primal temos uma única solução básica inviável no dual.

Sim. Cada solução primal viável que encontramos, calcula-se as variáveis duais obtendo, assim, uma única solução dual inviável, desde que não se trate da solução ótima pois, nesse caso, a solução dual será viável.

3 - Os métodos de geração de solução inicial no problema do transporte sempre geram uma solução básica viável, a menos que a solução inicial seja degenerada ou o problema ilimitado.

Sim. Os métodos para a geração de solução inicial no PT cuidam para que nunca sejam formados ciclos (sempre se elimina uma linha ou uma coluna a cada iteração) gerando uma solução básica viável. A solução degenerada ocorre no caso em que a oferta e a demanda se anulam (possuem o mesmo valor naquela iteração). Para evitar a degeneração aplica-se a cada nó uma pequena perturbação. O problema é ilimitado quando não há solução dual deste.

4 - Na solução de um PFM se um arco atinge seu limite superior ou inferior então esse arco pertence ao corte mínimo.

- R: Não, pois é possível que exista um arco que atingiu o limite superior ou inferior, mas que não pertença ao corte mínimo. Sobre o corte mínimo, é possível afirmar:
- O arco
- O arco

5 - Aplicando o algoritmo de aumento na PA é garantida a obtenção

de uma solução ótima.

Assumindo que o algoritmo de aumento é o Hungaro. Verdadeiro, pois o algoritmo do hungaro sempre soluciona o PA.

6 - Na PD e no CM, tanto faz aplicar a busca pelo custo mínimo horizontal ou profundidade a solução será a mesma.

Sim. Na Programação Dinâmica, a solução obtida é a mesma, independente da estratégia de caminhamento adotada. O que pode variar é o número de iterações necessárias para que a solução seja atingida. O algoritmo de caminho mínimo também possui esta propriedade. Neste, à medida que os nós são rotulados (a variável dual correspondente é atualizada), se o elemento a ser atualizado for sempre o mais antigo, será executada uma busca horizontal (explicando melhor, serão varridos primeiro os nós ligados a e depois os nós a dois arcos de e assim por diante). Caso a busca se aprofunde rapidamente no grafo, selecionando sempre o elemnto mais atual, a estratégia adotada será a busca em profundidade. A solução final é a mesma para as duas estratégias.

7 - A única diferença do algoritmo de PFM para o PFM de CM está no processo de escolha dos nós para rotulação.

[Se não tem tu, vai tu mesmo] Falso. Além dessa diferença o PFM aumenta o fluxo da origem para o destino e diminui o fluxo no sentido oposto. Já o PFM de CM por pegar o menor caminho de aumento só incrementa o custo da origem para o destino.

8 - Dada uma rede com possíveis custos negativos sem ciclos negativos, para encontrar o CM basta adicionar um valor positivo a todos os arcos e Djikstra.

Falso. O algoritmo de Dijkstra possui a condição de que todos os custos devem ser não negativos. Trata-se de adaptar a nova condição ao outro algoritmo, resolvendo um modelo dual de uma maneira mais orientada. Adicionar um valor positivo a todos os custos não resolve o problema.

9 - Uma solução básica para CM, PT e PA que atende a viabilidade do primal, do dual e a complementaridade de folga é uma solução ótima.

R1: Verdadeiro pois os problemas de CM, PT e PA podem ser formulados a fim de serem resolvidos pelo método simplex.
Este método executa iterações até que as propriedades enumeradas (viabilidade do problema primal, viabilidade do problema dual e complementaridade de folga) sejam atendidas.
Quando estas propriedades forem atendidas, o algoritmo terá encontrado uma solução ótima.

R2: Sim, porque todos os problemas (CM, PT e PA) podem ser resolvidos peolo simplex, que atende a viabilidade do primal, a viabilidade do dual e a complementariedade de folga.

10 - Uma solução básica no PT e PA é uma AG do grafo, portanto, enumerando todas as AG e escolhendo a de menor custo, temos a solução ótima.

Não. Pois nem sempre a solução ótima de um problema de PA será uma AG. Supondo o casamento de um nó para outro na solução, teremos como solução um grafo desconexo, logo não é uma AG.

ação viável e não básica no Problema de Transp

básica viável.

I sem limites *mínimo* e *máximo* para o fluxo em cada arco. Esse

formado *e resolvido por* um PT.

s são ditos *disjuntos* se eles não contém qualquer arco em comum.

minhos disjuntos de um nó inicial f a um nó final s em um grafo

o de arcos a serem retirados do grafo para torná-lo desconexo.

e programação dinâmica é aplicado indiferentemente se o objetivo

imização (selecionando pelo menor) ou de maximização

os, e os custos positivos ou negativos.

dentificar solução ilimitada nos problemas de Transporte, Caminho

o? PT CM FM

s para o Problema de Transporte e Problema de Caminho Mínimo,

e a correspondente solução dual, variando uma variável dual de

de p. Portanto, para uma solução primal tem-se infinitas soluções

árvore geradora mínima e de árvore de Steiner são casos particulares

rvore de custo mínimo.

sica no PT e PA é uma árvore geradora do grafo, portanto,

geradoras e escolhendo a de menor custo temos a solução ótima.