

Questões conceituais

01 Defina:

1. poliedro, politopo
2. conjunto aberto, fechado, compacto
3. região de viabilidade de um Problema de Programação Linear (PPL)
4. solução viável de um PPL, solução ótima de um PPL
5. PPL inviável, PPL ilimitado, PPL com solução ótima
6. ínfimo e supremo de uma função $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
7. mínimo e máximo de uma função $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
8. vértice, ponto extremo e solução básica de um poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$
9. direção básica no Método Simplex
10. direção e raio extremo de um poliedro
11. solução básica degenerada
12. ciclagem
13. Operação de pivoteamento no Método Simplex
14. Teste da razão no Método Simplex
15. Condições de folgas complementares

02 Método Simplex

Considere que ao aplicar o Método Simplex, obteve-se em uma iteração do método o quadro abaixo e responda:

$$\min \quad z = x_1 + (a - 7)x_2 + (b + 2)x_3 \quad (1)$$

$$x_4 = 3 - x_1 - x_2 + x_3 \quad (2)$$

$$x_5 = 2 - 2x_1 + x_2 + 4x_3 \quad (3)$$

$$x_6 = (a - 1)(a - 4) + (c - 3)(c + 5)x_1 + 2x_2 - (d - 4)(d + 5)x_3 \quad (4)$$

1. Quais são as condições necessárias para que a solução ilustrada no quadro seja básica viável ?
2. Quais são as condições necessárias para que além disto, seja ótima ?
3. Quais são as condições que efetivamente garantem a existência de múltiplas soluções ótimas ?
4. É possível que esta solução seja degenerada ? Como ?
5. Assuma que $a = 5, b = -5$. Quais são as condições que, neste quadro simplex, permitam caracterizar que o PPL é ilimitado ? Assuma um valor nesta faixa e apresente um raio extremo do poliedro. Mostre que de fato, a direção apresentada é um raio extremo.
6. Para $a = 9$, a base associada a este quadro é dual viável ? Por quê ?
7. Fixe $a = 8, b = 0, c = 2, d = 2$. Introduza uma restrição $x_4 + x_5 + x_6 \leq 10$ no quadro e faça uma operação do Método Dual Simplex.
8. Mantenha os valores de a, b acima. Seria possível que a introdução da restrição acima levasse a um programa inviável ? Sob quais condições ? Neste caso, o que é possível concluir sobre o dual deste PPL ? Prove sua afirmativa.

02 Responda verdadeiro ou falso e justifique.

1. Toda solução para um PPL é um vértice do poliedro que define sua região de viabilidade
2. O Método Simplex pode não convergir, dependendo da regra de pivoteamento adotada
3. O Método Simplex possui complexidade polinomial.
4. O Método Simplex possui complexidade exponencial.

03 Um aluno formulou um problema de otimização P como $\min\{f(x) : x \in X\}$ onde X é um conjunto que define

a região de viabilidade. Este mesmo aluno formulou um outro programa $D \max\{h(y) : y \in Y\}$ e disse que P e D formam um par primal-dual. O que isto significa ?

04 Considere o seguinte problema de decidir se um poliedro $\{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$ é vazio ou não. Considere o seguinte problema de otimização: $\min\{c'x | Ax = b, x \geq 0\}$. Mostre que se há um algoritmo polinomial para resolver o primeiro há um algoritmo polinomial para resolver o segundo.

05 Seja A uma matriz $m \times n$ e b um vetor com m entradas. Mostre que exatamente uma das duas alternativas abaixo vale:

- Existe $x \geq 0$ tal que $Ax = b$
- Existe algum vetor p tal que $p'A \geq 0'$ e $p'b < 0$

06 Forneça um exemplo de um par primal dual onde ambos os programas possuem soluções ótimas múltiplas.

07 Resolva todos os exercícios de formular programas de programação linear do livro texto.