CAPÍTULO III

PROBLEMA DE TRANSPORTE

Seja o conjunto $I = \{1, 2, ..., m\}$ de centros de oferta com capacidade de fornecerem $o_i > 0$, $i \in I$, unidades de um certo produto. Seja o conjunto $J = \{1, ..., n\}$ de centros de demanda que requerem $d_j > 0$, $j \in J$, unidades do mesmo produto. O custo para transportar uma unidade de i para j é dado por c_{ij}. O problema consiste em determinar o fluxo dos centros de oferta para os de demanda com o mínimo custo de transporte. O grafo associado é dado pela figura (1):

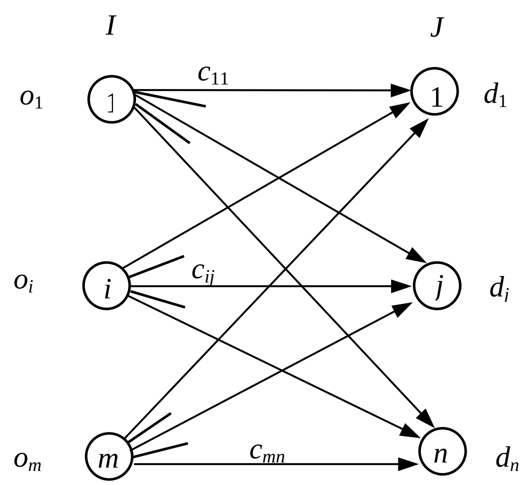


Figura 1.Grafo associado ao problema de transporte.

No capítulo anterior foi apresentado o modelo (M4) correspondente a esse problema de transporte. Substituindo os conjuntos O e D por I e J definidos acima, e, multiplicando por (-1) as restrições de demanda, $i \in D$, em (M4), resulta um modelo semelhante (PT) dado abaixo. O modelo linear pode ser escrito de duas formas:

$$\text{minimizar} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \qquad (1)$$

(PT)

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = o_i, i \in I \qquad (2)$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = d_j, j \in J \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad (4)$$

$$\text{minimizar } c_{11}x_{11}+\ldots+c_{1n}x_{1n}+c_{21}x_{21}+\ldots+c_{2n}x_{2n}+\ldots+c_{m1}x_{m1}+\ldots+c_{mn}x_{mn}$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}
x_{11}+ & \Lambda & +x_{1n} & & & & & = o_1 \\
 & & & x_{21}+ & \Lambda & +x_{2n} & & = o_2 \\
 & & & & & \Lambda & & \\
 & & & & & x_{m1}+ & \Lambda \quad +x_{mn} & = o_m
\end{array}\right\} \quad (2)$$

(PT)

$$\left.\begin{array}{llllllll}
x_{11}+ & & x_{21}+ & \Lambda & & +x_{m1} & & = d_1 \\
 & x_{21}+ & & x_{22}+ & \Lambda & & +x_{m2} & = d_2 \\
 & O & & O & & & O & M \\
 & x_{1n}+ & & +x_{2n} & \Lambda & & +x_{mn} & = d_n
\end{array}\right\} \quad (3)$$

$$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{mn} \geq 0 \qquad (4)$$

Para essa formulação supõe-se $\sum_{i \in I} o_i = \sum_{j \in J} d_j$. As restrições (2) são de oferta, o que sai de i para todo $j \in J$ é igual a o_i. As restrições (3) são de demanda, o que chega em j oriundo de cada $i \in I$ é igual a d_j. Esse problema pode também ser representado conforme quadro (1) abaixo onde ressalta-se os vetores:

$$x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{mn})^T$$
$$c = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{mn})^T$$
$$b = (o_1, o_2, \ldots, o_m, d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$$

e a matriz de coeficientes das restrições $A = (e^{11}, e^{12}, \ldots, e^{1n}, e^{21}, \ldots, e^{mn})$, composta pelos vetores $e^{ij} = e_i + e_{m+j}$, onde e_k é um vetor com todas as componentes nulas a menos da k-ésima que é unitária.

	1	2		n	n+1	n+2		2n								mn	
	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}		...			x_{m1}	x_{m2}	...	x_{mn}	
1	1	1	...	1													o_1
2					1	1	...	1									o_2
⋮																	⋮
m													1	1	...	1	o_m
1	1				1								1				d_1
2		1				1								1			d_2
⋮			O				O								O		⋮
n				1				1								1	d_n
	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}		...			c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	

Quadro 1. Quadro do problema de transporte.

EXEMPLO: Seja (PT) com três centros de oferta e capacidades 8, 3 e 3 e quatro centros que demandam 1, 7, 2 e 4 unidades. Os custos c_{ij} são dados pelo quadro abaixo. Em paralelo estão os vetores x, c, b e a matriz A.

	1	2	3	4	o
1	5	5	7	13	8
2	4	3	5	16	3
3	13	13	5	6	3
d	1	7	2	4	14

$x = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22,}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34})$

$c = (5\ 5\ 7\ 13\ 4\ 3\ 5\ 16\ 13\ 13\ 5\ 6)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 8 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$$

Este capítulo prossegue com mais cinco seções. Inicialmente são feitas algumas considerações sobre o (*PT*) e analisando algumas particularidades. Em seguida são estudadas as propriedades fundamentais da matriz de restrições *A* e o problema dual. Finalmente é apresentado o método simplex e algumas conclusões. Maiores informações consultar Bazaraa (1979), Chistofides (1975), Bradley (1977), Minoux e Gondran ( ), Maculan (1980).

1 .CONSIDERAÇÕES GERAIS

O modelo (*PT*) corresponde a um grafo bipartido completo. Se não existe a ligação de *i* para *j* então o fluxo X_{ij} será evitado fazendo C_{ij} um custo muito elevado. Assim, se ao resolver o problema o fluxo X_{ij} é não nulo então não existe solução viável.

Também é suposto que $C_{ij} \geq 0$, $\forall\ (i, j) \in A$, $O_i > 0$, $\forall_i \in$ I $d_j > 0$, $\forall_j \in$ J. Em se tratando de custo de transporte então C_{ij} é não negativo. As ofertas positivas também é razoável uma vez que se $O_i = 0$ não existe o centro de oferta *i*. Se O_i é negativo então *i* torna-se um centro de demanda. O mesmo comentário é válido para os d_j .

Uma relaxação em (*PT*) é obtida transformando as restrições (2) e (3) em inequações da forma:

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq o_i \quad \text{e} \quad \sum_{i \in J} x_{ij} \geq d_j$$

Mas, ao resolvê-lo supõe-se que $\sum_{i \in I} o_i = \sum_{j \in J} d_j$. Portanto pode ocorrer um excesso de oferta ou de demanda:

(i) $\sum_{i \in I} o_i > \sum_{j \in J} d_j$. Acrescenta-se o (n+1) -ésimo centro fictício de demanda com capacidade $d_{n+1} = \sum_{i \in I} o_i - \sum_{j \in J} d_j$ e os custos $c_{i,\, n+1} = 0$, i = 1,..., m. Todos os custos são nulos uma vez que o objetivo é minimizar custos de transporte. Nesse caso, os custos $c_{i,\, n+1}$ poderiam ser interpretados como custos de estocagem do excesso de oferta.

(ii) $\sum_{i \in I} o_i < \sum_{j \in J} d_j$. Acrescenta-se o (m+1) -ésimo centro fictício de oferta com capacidade $o_{m+1} = \sum_{j \in J} d_j - \sum_{i \in I} o_i$ e os custos $c_{m+1,\, j} = 0$, j = 1,...,n. de forma semelhante, esses custos poderiam ser interpretados como uma multa pelo não cumprimento de um contrato de fornecimento. Observe que indiferente ao acréscimo do centro fictício o problema é inviável.

O (*PT*) não considera possíveis variações sazonais das capacidades de oferta, demanda e dos custos. As variáveis x_{ij} não são limitadas superiormente, a não ser pelas capacidades de oferta e demanda. No entanto, estabelecido o equilíbrio oferta e demanda e se os o_i e d_j são limitados, o (*PT*) sempre tem solução viável e toda solução viável é limitada. Uma delas é dada por:

$$X_{ij} = \frac{o_i d_j}{\sum_{i \in I} o_i}, \ \forall (i, j) \in A$$

$$0 \le X_{ij} \le \min \{o_i, d_j\}, \ \forall (i, j) \in A$$

Logo, o (*PT*) possui uma solução ótima.

2 . A MATRIZ DE COEFICIENTES A

A matriz de coeficientes A, associada as restrições em (*PT*), apresenta uma estrutura especial sendo composta por vetores unitários. Dessa característica pode ser verificada algumas propriedades de A que são extremamente importantes para uma melhor aplicação do método simplex. Entre elas estão o posto de A, unimodularidade, integralidade da solução, base, etc.

TEOREMA 1. *O posto da matriz A é igual a (m+n-1).*

A matriz A tem dimensão (m+n, m x n). Logo o posto (A) é menor ou igual a (m+n). Se somar as m primeiras linhas e as n últimas, verifica-se que são linearmente dependentes. Portanto o posto (A) é menor que (m+n). Para mostrar que posto (A) = m+n-1 é necessário encontrar uma submatriz quadrada de ordem (m+n-1, m+n-1) que seja singular, ou composta por vetores linearmente independentes. Essa submatriz existe e é dada pelas colunas n, 2n, 3n, ..., mn, 1, 2, 3, ..., n-1 e não considerando a última linha, (m+n), no quadro (1). Mais especificamente, são os vetores e^{1n}, e^{2n}, ...,e^{mn}, e^{11}, e^{12}, ..., $e^{1, n-1}$. O determinante dessa submatriz é igual a 1 e portanto posto (A) = (m+n-1). Na verdade pode-se retirar a última ou qualquer linha, restará (m+n-1) vetores linhas independentes. Alternativamente, a matriz A pode ser mantida com todas as linhas, porém, acrescenta-se um vetor coluna artificial, coluna (mn+1), ou uma variável artificial x_a a uma das restrições. Em geral, é acrescido o vetor e_{m+n} correspondente à variável artificial x_a na última restrição. Esta é a forme utilizada posteriormente. Com isso completa-se o posto(*A*) para ($m + n$) e o vetor artificial estará sempre na base.

Pelo teorema anterior, uma matriz básica contém ($m + n$ - 1) vetores independentes. Consequentemente, uma solução básica conterá no máximo ($m + n$ - 1) variáveis básicas com valores positivos, as demais iguais a zero, inclusive a variável artificial x_a que será sempre básica e sempre nula.

TEOREMA 2: *Toda submatriz quadrada de A tem determinante igual a 1, 0 ou -1, ou seja, a matriz A é totalmente unimodular.*

A demonstração é feita por indução lembrando que cada coluna de uma submatriz A^k pode conter:

(i) apenas uma componente igual a um e as outras nulas;

(ii) duas componentes iguais a um e as outras nulas;

(iii) todas as componentes nulas.

A importância da propriedade está associada a integralidade da solução. Se as ofertas o_i e as demandas d_j são constantes inteiras, então todas as soluções básicas são inteiras. Consequentemente, existe uma solução básica ótima inteira. Esse resultado pode ser verificado mostrando que toda submatriz básica de *A* pode ser transformada em uma matriz triangular superior com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. Isto é possível permutando linhas e colunas. Outra forma de mostrar a integralidade da solução é retirada do simplex

$$x_B = B^{-1}b$$

Em (PT), b é um vetor de componente inteiras (ofertas e demanda).

$$B^{-1} = \frac{B^{+}}{|B|}$$

B^{+} - matriz adjunta. É igual a transposta da matriz de cofatores.

$$B^{+} = \begin{bmatrix} |B_{11}| & |B_{21}| & \Lambda & |B_{N1}| \\ M & M & M & M \\ |B_{1N}| & \Lambda & \Lambda & |B_{MN}| \end{bmatrix}$$

$|B|$ = determinante da matriz básica.

Pela unimodularidade os determinantes $|B_{ij}|$ são iguais a 1, 0 ou -1. O determinante de B é igual a 1 ou -1 uma vez que B é básica e portanto não singular. Logo, B^{-1} é uma matriz de componentes inteiras. O mesmo ocorre para x_B.

Definida uma base todos os demais vetores podem ser escritos como uma combinação linear dos elementos da base. Assim, um vetor não básico $e^{ij} = e_i + e_{m+j}$ pode ser representado em função de um conjunto de vetores básicos. Ainda mais, essa representação é facilmente obtida adicionando e subtraindo vetores básicos:

$$e^{ij} = e^{ik} - e^{lk} + e^{lp} - e^{qp} + e^{qj}$$

$$e^{ij} = (e_i + e_{m+k}) - (e_l + e_{m+k}) + (e_l + e_{m+p}) - (e_q + e_{m+p}) + (e_q + e_{m+j})$$

$$e^{ij} = e_i + e_{m+j}$$

Descrevendo de outra forma, e^{ij} forma um **ciclo alternado** com um conjunto de vetores da base. Um conjunto de vetores linearmente dependentes, $e^{ik} - e^{lk} + e^{lp} - e^{qp} + e^{qj} = 0$, em que para cada vetor adicionado tem um outro sendo subtraído. Essa representação pode ser lançada no quadro, figura (2.a), onde cada célula (i, j) está associada a um vetor e^{ij}. Nesse quadro está clara a formação do ciclo alternado. Logo, utilizando os resultados anteriores, uma base do problema de transporte é formada por (m + n - 1) células ou vetores básicos e não deverá conter um ciclo alternado. Veja a figura (2.b) um exemplo de uma base para o problema do exemplo (1).

	j		k	p	o
i	e^{ij}		e^{ik}		8
l			e^{lk}	e^{lp}	3
q	e^{qj}			e^{qp}	3
d	1	7	2	4	14

(a)

	j		k	p	o
i	(1)	(4)		(3)	8
l		(3)			3
q			(2)	(1)	3
d	1	7	2	4	14

(•) fluxo x_{ij}
base = (e^{11}, e^{12}, e^{14}, e^{22}, e^{33}, e^{34})

(b)

Figura 2. Representação de um ciclo e uma base.

Pelos quadros da figura (2) do problema de transporte, pode-se resumir as seguintes propriedades:

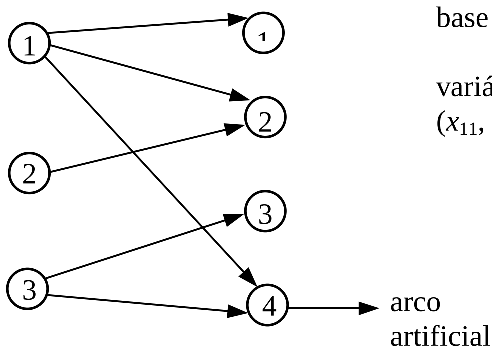
(i) Uma base não contém ciclo;

(ii) Uma base contém ao menos um elemento em cada linha e coluna. Caso contrário não seria possível expressar todos os vetores não básicos em função dos básicos.

(iii) Seja o grafo em que o conjunto de nós é dado pelas células básicas e o conjunto de arcos formado pelas ligações de duas células básicas na mesma linha ou na mesma coluna (figura (2.a)). Esse grafo correspondente a uma base do problema de transporte é conexo.

(iv) De (i) e (iii), um grafo conexo e sem ciclos é uma árvore. De (ii), essa árvore contém ao menos um elementos em cada linha e coluna, portanto, nesses termos, uma base é uma árvore geradora do quadro e toda árvore geradora é uma base.

Extrapolando um pouco mais, pode-se mostrar que uma solução básica viável, além de corresponder a uma árvore geradora do quadro, também corresponde a uma árvore geradora do quadro, também corresponde a uma árvore geradora do grafo origem-destino. Na figura (3) aparece a base para o problema de transporte da figura (2.b) e a correspondente árvore geradora do grafo origem-destino.



base (e^{11}, e^{12}, e^{14}, e^{22}, e^{33}, e^{34}, e_7)

variáveis básicas:
(x_{11}, x_{12}, x_{14}, x_{22}, x_{33}, x_{34}, x_a) = (1, 4, 3 , 3, 2, 1, 0)

Figura 3. Árvore geradora do grafo origem-destino.

Uma vez que uma solução básica é uma árvore, ao acrescentar uma célula não básica, ou vetor não básico, é formado um único ciclo. Portanto, existe uma única representação de um vetor não básico em função dos vetores básicos.

3 . O PROBLEMA DUAL

Seja o modelo (PT) e a cada restrição tipo (2) e (3) associa-se respectivamente uma variável u_i, $i \in I$ e v_j, $j \in J$. Então o correspondente problema dual de (PT) pode ser assim formulado:

$$\text{maximizar} \sum_{i \in I} o_i u_i + \sum_{j \in J} d_j v_j \qquad (5)$$

(PD)

$$u_i + v_j \le c_{ij}, \qquad \forall (i, j) \in A \qquad (6)$$

$$u_i , v_j \quad \text{variáveis livres} \qquad (7)$$

Como o problema de transporte apresenta solução ótima limitada então (PD) também possui e os valores das funções se equivalem. Ainda mais, se x^*, u^* e v^* são respectivamente as soluções ótimas para o problema primal e dual então têm que atender a viabilidade primal e dual, além do teorema das folgas complementares. Em resumo:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum_{i \in J} x_{ij}^* = o_i, & i \in I \\ \sum_{i \in I} x_{ij}^* = d_j, & j \in J \\ x_{ij}^* \geq 0, & \forall (i,j) \in A \end{array}\right\} \text{viabilidade primal} \qquad \begin{array}{r} (8) \\ (9) \\ (10) \end{array}$$

$$c_{ij} - u_i^* - v_j^* \geq 0, \quad \forall (i,j) \in A \ \} \text{viabilidade dual} \qquad (11)$$

$$x_{ij}^*\left(c_{ij} - u_i^* - v_j^*\right) = 0, \quad \forall (i,j) \in A \ \} \text{Teorema das folgas complementares} \qquad (12)$$

De (12), se x^*_{ij} é uma variável básica, $x^*_{ij} > 0$, então $(c_{ij} - u_i^* - v_j^*) = 0$. Caso contrário, se $x_{ij}^* = 0$ resulta:

$c_{ij} - u_i^* - v_j^* \geq 0$ ou $c_{ij} - u_i^* - v_j^* < 0$

onde $(c_{ij} - u_i^* - v_j^*)$ é o custo relativo $\left(c_j - z_j\right)$ da variável x_{ij}^*. Tal como no simples padrão, os custos relativos são os coeficientes das variáveis na função objetivo. E a escolha do vetor ou variável a entrar na base é efetuada analisando esses custos, mantendo a função objetivo em função apenas das variáveis não básicas.

Seja o modelo (PT), multiplica-se (2) por u_i, (3) por v_j e soma-se a (1). Resulta:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i \in I} u_i \,(o_i - \sum_{j \in J} x_{ij)} + \sum_{j \in J} v_j \,(d_j - \sum_{i \in I} x_{ij}\,)$$

ou,

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (c_{ij} - \mathrm{u}_i - v_j\,)\, x_{ij} + \sum_{i \in I} u_i\, o_i + \sum_{j \in J} v_j\, d_j \qquad (13)$$

Para as variáveis básicas os custos (c_{ij} - u_i - v_j) são nulos, logo em (13) a função objetivo a ser minimizada está em função das variáveis não básicas.

A escolha da variável não básica a entrar na base recai sobre aquelas com custos relativos (c_{ij} u_i - v_j) negativos. Mantendo a orientação do simplex padrão, escolhe-se o custo mais negativo, o que poderá implicar em um maior decréscimo da função.

Como calcular as variáveis duais? Para cada variável básica tem-se (c_{ij} - u_i - v_j)=0. Como elas são (m+n-1) resulta um sistema com (m+n-1) equações com (m+n) incógnitas (m variáveis u_i e n variáveis v_j). Atribuindo um valor constante para uma das variáveis u_i ou v_j as demais são obtidas automaticamente uma vez que o sistema é triangular (Porquê ?). Portanto, dada uma solução básica calcula-se as variáveis duais. Isso possibilita o cálculo dos custos relativos associados as variáveis não básicas. Se todos são não negativos então a solução é ótima. Caso contrário, parte-se para o processo iterativo escolhendo a variável a entrar na base.

4 .O MÉTODO SIMPLEX

O algoritmo simplex para o problema de transporte é dado abaixo:

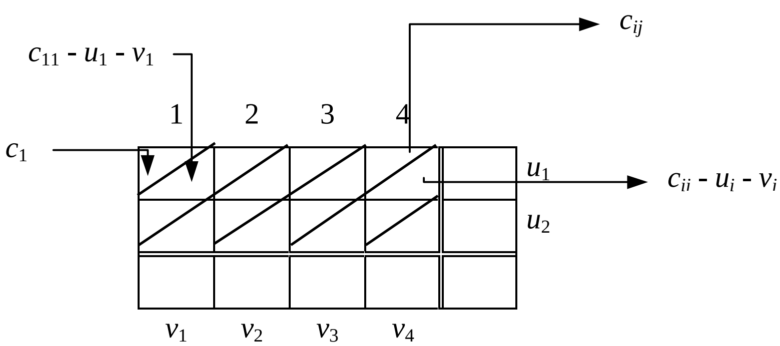
Algoritmo Simplex

K←0;
encontre solução inicial (vetor de fluxos x^o);
calcule os custos relativos (c_{ij} - $\mathrm{u}^{\mathrm{o}}_i$ - $v^o{}_j$);
enquanto (c_{ij} - $\mathrm{u}^{\mathrm{k}}_i$ - $v^k{}_j$) < 0 para algum (i, j) ∈ A faça
    escolha vetor ou variável a entrar na base;

escolha vetor ou variável a sair da base;
execute pivoteamento (nova solução básica x^{k+1});
k ← k+1;
calcule os custos relativos (c_{ij} - u^k_i - v^k_j);
fimenquanto;

fimalgoritmo.

Esse algoritmo é composto por duas etapas básicas: determinar uma solução inicial e como obter a solução final. As duas seções seguintes descrevem essas etapas. Mas para simplificar o desenvolvimento do algoritmo simplex para o problema de transporte utiliza-se dois quadros básicos, conforme figura:



Quadro de custos

	1	2	3	4	
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	o_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	o_2
	d_1	d_2	d_3	d_4	

Quadro de fluxos

Figura 5. Quadros para o problema de transporte.

4 .1. SOLUÇÃO INICIAL

Até então foi suposta a existência de uma solução inicial ou uma solução básica inicial. A obtenção dessa solução corresponde à fase inicial do Simples que será aqui descrita explorando as características do problema.

Entre os métodos para encontrar uma solução básica inicial para o problema de transporte estão o **Método do Canto Noroeste**, desenvolvido por Charnes e Cooper (1954), o **Método do Custo Mínimo** e o **Método de Vogel** (1958). A complexidade dos cálculos nesses métodos é crescente, porém nada se pode afirmar quanto à superioridade de um sobre o outro. No entanto, na prática, a qualidade das soluções tem se mostrado também crescente.

Seja o quadro de fluxos com todas as variáveis x_{ij} = 0. Iniciando pelo canto noroeste, célula (1, 1), procura-se o mínimo entre a oferta o_1 e d_1. Faz x_{ij} = min {o_1 , d_1}, atualiza o_1 e d_1. Se o_1 se anular então caminhar para célula inferior (2, 1). Caso contrário, caminhar para a célula da direita (1, 2). O processo prossegue até que todas as ofertas e demandas sejam anuladas ou alternadas.

Algoritmo Canto Noroeste

$i \leftarrow 1$; $j \leftarrow 1$;

<u>enquanto</u> $i \leq m$ e $j \leq n$ <u>faça</u>

$x_{ij} \leftarrow \min \{o_i, \; d_i\}$;

$o_i \leftarrow o_i - x_{ij}$;

$d_j \leftarrow d_j - x_{ij}$;

<u>se</u> $d_j = 0$ <u>então</u> $j \leftarrow j + 1$; {Atendida demanda d_j}

<u>senão</u> $i \leftarrow i + 1$; {Atendida oferta o_i}

<u>fimse;</u>

<u>fimenquanto;</u>

<u>fimalgoritmo</u>.

Cabe obervar que se em uma célula (i, j) a oferta e a demanda são iguais, então ao atualizá-las ambas serão anuladas. Nesse caso, o algoritmo acima caminha para direita, mas poderia caminhar para baixo. Na próxima célula a variável x_{ij} assumirá um valor nulo uma vez que a oferta está anulada e o processo prossegue. No entanto, a solução básica obtida será degenerada.

EXEMPLO 2. Seja o quadro de fluxos para o problema do exemplo (1). A solução inicial pelo método do canto noroeste é dadda abaixo.

	1	2	3	4	*o*	
1	1				~~8~~	7
2					3	
3					3	
d	~~1~~	7	2	4	14	
	0					

$\Rightarrow$

	1	2	3	4	*o*		
1	1	7	0		~~8~~	~~7~~	0
2			2		~~3~~	1	
3					3		
d	~~1~~	~~7~~	~~2~~	4	14		
	0	0	0				

$\Rightarrow$

	1	2	3	4	*o*		
1	1	7	0		~~8~~	~~7~~	0
2			2	1	~~3~~	~~1~~	0
3				3	~~3~~	0	
d	~~1~~	~~7~~	~~2~~	~~4~~	14		
	0	0	0	~~3~~			
				0			

O método do canto noroeste sempre determina uma solução básica viável. Ao eliminar uma linha ou coluna em cada passo o atendimento das ofertas e demandas fica garantido sem a formação de ciclos no quadro. Todavia, os custos de transporte não são considerados, o que torna o método rápido computacionalmente, mas, de uma maneira geral, as soluções estão distantes do ótimo.

O método do custo mínimo procura atender as ofertas e demandas tal qual o canto noroeste, porém orientado-se pelos custos de transporte em ordem crescente. A cada iteração elimina a linha ou coluna correspondente à oferta ou demanda que se anula. Se ambas se anulam simultaneamente elimina-se a coluna. Para custos mínimos iguais a escolha da célula é também arbitrária.

Algoritmo Custo Mínimo

ordene crescentemente os custos c_{ij}. Seja c^k, $k = 1, ..., mn$, os custos ordenados e os correspondentes conjuntos $I^k = \{i^k, k = 1, ..., mn\}$ e $J^k = \{j^k, k = 1, ..., mn\}$;

$k \leftarrow 1$;

enquanto $I \neq \emptyset$ ou $J \neq \emptyset$ então

se $i^k \in I$ e $j^k \in J$ então

$x_{ij} \leftarrow \min\{ o_{i^k}, d_{j^k} \}$;

$o_{i^k} \leftarrow o_{i^k} - x_{ij}$;

$d_{j^k} \leftarrow d_{j^k} - x_{ij}$;

se $d_{j^k} = 0$ então $J \leftarrow J - \{j^k\}$;

senão $I \leftarrow I - \{i^k\}$;

fimse;

fimse;

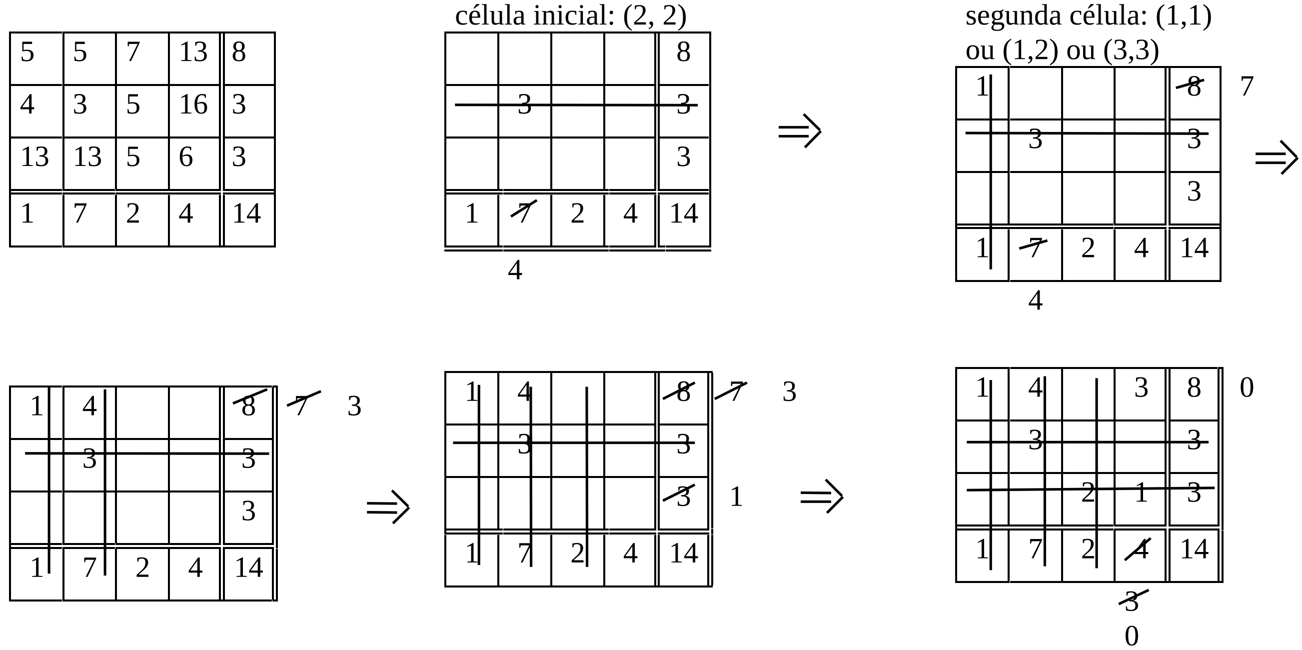
$k \leftarrow k + 1$;

fimenquanto;

fimalgoritmo.

Esse algoritmo também determina uma solução básica viável. E a eliminação de uma linha ou coluna a cada iteração garante a não formação de ciclo. No caso em que a oferta e a demanda se anulam simultaneamente também implica em uma solução básica degenerada.

EXEMPLO 3. Seja o quadro de custos e fluxos para o problema do exemplo (1). A solução inicial pelo método do custo mínimo é dada abaixo.



A complexidade computacional do método de custo mínimo é bem superior a do método do canto noroeste. No entanto, a solução inicial está de maneira geral, mais próxima da ótima. Com isso o número de iterações subsequentes para obtenção da solução ótima tende a ser menor.

O método de Vogel é de complexidade ainda maior porém tem apresentado, de uma maneira geral, resultados práticos melhores.

Para cada linha encontrada a diferença entre o menor e o segundo menor custo. O mesmo é feito para cada coluna. Escolhe a maior das diferenças. Suponha que ocorra na linha *i*. Seja c_{ij} o menor custo dessa linha. Então faça $x_{ij} = \min \{o_i , d_j \}$. Atualiza o_i e d_j . Se o_i se anular então elimina linha *i*, caso contrário, elimina a coluna *j*. Se o_i e d_j se anulam simultaneamente então a eliminação é arbitrária. O mesmo ocorre quando as máximas diferenças ou os mínimos custos são iguais.

Algoritmo de Vogel

enquanto $|I|>1$ e $|J|>1$ faça

difimax $\leftarrow$ 0;

k $\leftarrow$ 0; l $\leftarrow$ 0;

para todo $i \in I$ faça

encontre menor custo c_{ij} , $j \in J$ (c_{ir});

encontre segundo menor custo c_{ij} , $j \in (J-\{r\})$ (c_{is});

faça dif $\leftarrow c_{is} - c_{ir}$;

se dif > difimax então difimax $\leftarrow$ dif;

k $\leftarrow$ i ;

fimpara;

```
        para todo j∈ J  faça
                encontre o menor custo c_ij , i∈ I (c_rj );
                encontre segundo menor custo c_ij , i ∈ (I-r) (c_sj );
                faça dif ← c_sj  - c_rj ;
                se dif > difimax  então difimax ← dif;
                                        l ← j ; k ← 0;
                fimse;
        fimpara;
        se l > k então  encontre o menor custo c_il , i∈ I, na coluna l (c_rl );
                        faça x_rl ← min {o_r , d_l };
                        o_r ← o_r - x_rl ;
                        d_l ← d_l - x_rl ;
                        se  d_l = 0     então J ← J - {l};
                                        senão I ← I - {r};
                        fimse;
                senão   encontre o menor custo c_kj , j ∈ J, na linha k (c_kr );
                        faça  c_kr ← min {o_k , d_r };
                        o_k ← o_k - x_kr ;
                        d_r ← d_r - x_kr ;
                        se  d_r = 0     então J ← J - {r};
                                        senão I ← I - {k};
                        fimse;
        fimse;
fimenquanto;
```

EXEMPLO 4. Seja o quadro de custos e fluxos para o problema do exemplo (1). A solução inicial pelo método de Vogel é dada abaixo.

Custos

5	5	7	13	8	0
4	3	5	16	3	1
13	13	5	6	3	0
1	7	2	4	14	
1	2	0	7		

5	5	7	13		0
4	3	5	16		1
1	2	2	3		

5	5	7			0
4	3	5			1
1	2	2			

Fluxos

				8	
				3	
			3	~~3~~	0
1	7	2	~~4~~	14	
			1		

			1	~~8~~	7
				3	
			3	~~3~~	0
1	7	2	~~4~~	14	
			~~1~~		
			0		

			1	~~8~~	7
	3			~~3~~	0
			3	~~3~~	0
1	~~7~~	2	~~4~~		
	4		0		

Custos

5	5	7		

	5	7		

		7		

Fluxos

1			1	~~8~~	~~7~~ 6
	3			~~3~~	0
			3	~~3~~	0
~~1~~	~~7~~	2	~~4~~		
0	4		0		

1	4		1	~~8~~	~~6~~ 2
	3			~~3~~	0
			3	~~3~~	0
~~1~~	~~7~~	2	~~4~~		
0	~~4~~		0		
	0				

1	4	2	1	~~8~~	0
	3			~~3~~	0
			3	~~3~~	0
~~1~~	~~7~~	~~2~~	~~4~~		
0	0	0	0		

4 .2.SOLUÇÃO ÓTIMA

Dada uma solução básica viável é necessário verificar sua otimalidade.

Pela seção (3), para calcular os custos relativos resolve-se inicialmente o sistema de $(m + n - 1)$ equações da forma $c_{ij} - u_i - v_j = 0$, para todo (i, j) correspondente à variável básica x_{ij}. Obtidos os valores de u_i, $i \in$ I, e v_j, $j \in$ J, calcula-se os custos relativos para as variáveis não básicas. Se todos são não negativos então a solução é ótima, caso contrário, escolhe a variável a entrar na base entre aquelas de custo relativo negativo. Uma orientação é escolher a variável com o menor custo. Resta mostrar como escolher a variável a sair e como executar o pivoteamento.

Seja o quadro de fluxos da figura (6). Uma solução básica viável é uma árvore geradora desse quadro, conforme definido anteriormente. Ainda mais, o acréscimo de um nó ou uma célula implica na formação de um único ciclo. A célula a ser acrescida corresponde à variável ou vetor a entrar na base. Esta variável entra com um valor de fluxo $p \geq 0$. Visando manter o equilíbrio e atender as ofertas e demandas esse fluxo deve percorrer o ciclo sendo adicionado e subtraído em cada coluna ou linha por onde passar. O maior valor de p está vinculados aos valores de fluxos nas células em que será subtraído. Aquela célula em que o fluxo se anula primeiro corresponde à variável ou vetor a sair da base. Ao retirá-la quebra-se o ciclo e uma nova solução básica viável é obtida. Cabe observar que ao escolher a variável a sair, atualiza-se os fluxos e consequentemente é executado implicitamente o pivoteamento. Dessa maneira, a operação básica de pivoteamento no Simplex se reduz a um pequeno conjunto de operações de adições e subtrações.

Com a nova solução básica viável, calcula-se novos custos relativos e sucessivamente até obter a solução ótima.

1	4		3	8
	3			3
		2	1	3
1	7	2	4	14

Solução básica viável = árvore geradora

1	$(4+p)$		$(3-p)$	8
	$(3-p)$	p		3
		$(2-p)$	$(1+p)$	3
1	7	2	4	14

ciclo: (1,2)-(1,4)-(3,4)-(3,3)-(2,3)-(2,2)-(1,2)

variável a entrar: $x_{23} = p = 2$
variável a sair: $x_{33} = 2 - p = 0$

Figura 6. Solução básica viável. Variável a entrar e a sair da base.

EXEMPLO 5. Seja o problema do exemplo (1) com a solução inicial dada pelo método de custo mínimo.

c_{ij}

$c_{ij} - u_i - v_j$

5 / •	5 / •	7 / -5	13 / •	8	$u_1 = 0$
4 / 1	3 / •	5 / -5	16 / 5	3	$u_2 = -2$
13 / 15	13 / 15	5 / •	6 / •	3	$u_3 = -7$
1	7	2	4		
$v_1 = 5$	$v_2 = 5$	$v_3 = 12$	$v_4 = 13$		

1	4		3	8
	3			3
		2	1	3
1	7	2	4	14

Para solução básica inicial as variáveis duais são obtidas resolvendo o seguinte sistema com (3+4-1) equações:

$c_{11} - u_1 - v_1 = 0 \rightarrow 5 - u_1 - v_1 = 0$ $\qquad v_1 = 5 - u_1$

$c_{12} - u_1 - v_2 = 0 \rightarrow 5 - u_1 - v_2 = 0$ $\qquad v_2 = 5 - u_1$

$c_{14} - u_1 - v_4 = 0 \rightarrow 13 - u_1 - v_4 = 0$ $\qquad v_4 = 13 - u_1$

$c_{22} - u_2 - v_2 = 0 \rightarrow 3 - u_2 - v_2 = 0$ $\qquad u_2 = 3 - v_2$

$c_{33} - u_3 - v_3 = 0 \rightarrow 5 - u_3 - v_3 = 0$ $\qquad v_3 = 5 - u_3$

$c_{34} - u_3 - v_4 = 0 \rightarrow 6 - u_3 - v_4 = 0$ $\qquad u_3 = 6 - v_4$

Fazendo $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 5$, $v_2 = 5$, $v_4 = 13$, $u_2 = -2$, $u_3 = -7$, $v_3 = 12$

Com essas variáveis os custos relativos correspondentes às variáveis não básicas aparecem no quadro acima. Representamos os custos nulos das variáveis básicas por um ponto, (**.**), para diferenciar de algum custo relativo nulo que possa ocorrer. Como os custos relativos associados às variáveis x_{13} e x_{23} são iguais e negativos, escolhe-se uma delas para entrar na base e prossegue o processo iterativo.

Escolhendo x_{23} e fazendo x_{23} = p resulta o ciclo da figura (6). O maior valor que p pode assumir é 2. Assim a nova solução básica viável é dada no quadro abaixo.

5 / •	5 / •	7 / 0	13 / •	8	$u_1 = 0$
4 / 1	3 / •	5 / •	16 / 5	3	$u_2 = -2$
13 / 15	13 / 15	5 / 5	6 / •	3	$u_3 = -7$
1	7	2	4		
$v_1 = 5$	$v_2 = 5$	$v_3 = 7$	$v_4 = 13$		

1	6		1	8
	1	2		3
			3	3
1	7	2	4	

Para esta nova solução básica calcula-se as novas variáveis duais resolvendo um novo sistema com (m+n-1) equações (Veja solução no quadro acima) e os custos relativos correspondentes às variáveis não básicas. Pelo quadro todos os custos são não negativos e portanto a solução é ótima.

O custo relativo associado à variável x_{13} , c_{13} - u_1 - v_3 , é nulo tal como no Simplex padrão, o problema possui infinitas soluções ótimas. Como o problema de transporte é limitado resulta um segmento de reta de soluções ótimas.

Observe que nesse exemplo ao calcular as variáveis duais para cada solução foi feito $u_1 = 0$. Na verdade poderia inicializar com qualquer variável dual e igual a uma constante qualquer.

5 . CONCLUSÕES

Conforme apresentado anteriormente, ao resolver um problema de transporte é possível a ocorrência de uma solução básica viável degenerada. Ao aplicar o método Simplex para resolver um problema de programação linear a degeneração pode implicar em ciclagem. O mesmo ocorre para o problema de transporte. Porém, em ambos os casos, a possibilidade dessa ocorrência na prática é desprezível. No entanto existem métodos para contornar esses problemas. No primeiro caso pode ser codificado o método lexicográfico do Simplex. Para o problema de transporte as modificações são muito simples.

Para que a degeneração ocorra em um algoritmo de transporte é necessário que um subconjunto próprio das linhas tenha uma soma total das ofertas igual a soma das demandas de um subconjunto próprio das colunas. Com isso, para evitar a degeneração e consequentemente a ciclagem, ao iniciar o processo iterativo adiciona-se a cada centro de oferta uma pequena perturbação ξ (Orden (1951)). Veja exercício (6).

Um caso particular do problema de transporte é o problema de assinalamento em que m = n e $o_i = d_j = 1$, $i \in I, j \in J$.

Outros problemas também podem ser obtidos pelo acréscimo de restrições ao modelo (PT). Se são restrições de capacidades nos arcos, então resulta o problema de fluxo de custo mínimo. Porém, se são restrições gerais, trata-se de um problema de transporte com restrições adicionais, Klingman e Russell (1975).

exercícios

1 - Resolva os problemas de transporte abaixo:

a)

	1	2	3	4	*o*
1	10	20	30	10	100
2	5	15	20	25	130
3	35	5	25	45	200
d	110	120	130	70	430

b)

	1	2	3	4	*o*
1	4	3	6	5	20
2	7	10	5	6	30
3	8	9	12	7	50
d	15	35	20	30	100

Matriz de Custos

2 - Seja o problema (1.a). Suponha que o preço por unidade do produto no destino 4 seja R$ 1000,00. Quais devem ser os preços do produto nos diversos nós da rede a fim de que os transportadores dos arcos ótimos sejam exatamente remunerados? Verifique que aos preços calculados acima, não existe nenhum arco que possa dar lucro ao transportador, que nele operar. Para os arcos não pertencentes à solução básica ótima, verifique qual é o menor decréscimo de custo que muda a solução ótima corrente.

3 - Seja o problema (1.b).

a) Suponha que c_{24} é igual a 5. Sem resolver o problema, qual é a nova solução ótima?

b) Suponha que c_{12} é igual a 5. Quais condições de otimalidade são violadas? Qual a nova solução ótima?

4 - Mostrar se altera a solução ótima do problema de transporte quando uma constante λ (positiva ou negativa) for adicionada a cada custo em uma linha *i* ou em uma coluna *j* do quadro de transporte. E se altera o valor ótimo da função objetivo.

5 - Ao resolver um problema de transporte é necessário manter o equilíbrio entre o total de oferta e demanda. Isto é feito adicionando ao problema um centro de oferta ou demanda fictício. Em algumas aplicações necessita-se de um procedimento computacional que resolva um problema de transporte cada vez que for chamado. Ainda mais, dado um conjunto inicial de centros de oferta acrescenta-se um novo centro de oferta ou retira-se um deles. Como utilizar a solução final de um problema anterior como solução inicial de um novo problema em que é adicionado ou retirado um centro de oferta? Observe que o balanço entre o total de oferta e demanda deve ser sempre mantido.

6 - Mostre que definindo

$$o_i' = o_i + \xi, \quad i = 1, \ldots, m$$
$$d_j' = d_j, \quad j = 1, \ldots, n-1$$
$$d_n' = d_n + m\xi$$

então, para um certo ξ, a degeneração em um problema de transporte pode ser evitada.

7 - Mostre pela teoria da dualidade que $x = (0, 3, 0, 1, 0, 4)^T$ é uma solução ótima para o problema abaixo.

	1	2	3	*o*
1	2	5	1	3
2	1	3	4	5
d	1	3	4	

Matriz de custos

8 - Seja o quadro de transporte abaixo.

	1	2	3	4	*o*
1	9 / 4	8 / 14	12 /	13 /	18
2	10 /	10 /	12 / 24	14 /	24
3	8 / 2	9 /	11 / 4	12 /	6
4	10 /	10 /	11 / 7	12 / 5	12
d	6	14	35	5	60

c_{ij}

x_{ij}

a) É a solução dada básica? Se não, construa uma solução básica viável.
b) É esta solução ótima?
c) Qual a solução ótima dual?
d) Qual é o modelo original do problema de programação linear e seu dual?

9 - Mostre que os custos relativos (c_j - z_j) no algoritmo Simplex correspondem a (c_{ij} - u_i - v_j) para uma variável x_{ij} no problema de transporte.