Programação Dinâmica

Determinística com horizonte finito

DEFINIÇÃO

Programação Dinâmica

- PD é uma técnica que se aplica à situações que exijam decisões seqüenciais.
- Resolve os problemas pela decomposição em subproblemas, estágio por estágio.
- Pode tratar com funções descontínuas, não diferenciáveis, não convexas, estocásticas ou determinísticas.

Lot-sizing Não Capacitado

Um fabricante de um certo produto tem de atender no final dos próximos 4 anos a demanda de (3,2,3,4) unidades. Sua capacidade de produção anual é de no máximo 5 unidades com um custo/unidades produzidas dado por (5/0,12/1,16/2,19/3,21/4,22/5). Não tem capacidade para estocar mais de 4 unidades e o custo de estocagem é de 2 por unidade. Não tem unidades disponíveis no início e espera-se não dispor no fim do contrato.

Quantas unidades produzir anualmente para atender o contrato e minimizar os custos?

Sistemas – Estados – Estágios 1/3

- **Sistema**: Conjunto de elementos,objeto de nosso estudo.
- **Estado**: Dizemos que conhecemos o estado de um sistema quando conhecemos as características que são importantes para nosso estudo.

Ex: quantidade de peças em estoque, distância percorrida, temperatura, etc...

Sistemas – Estados – Estágios 2/3

- Variáveis de estado: Conj. de variáveis que permitem conhecer o estado de um sistema.

  Suporemos que o estado de um sistema está dado por um vetor, “vetor estado do sistema”

$$\overline{x}^{t} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Sistemas – Estados – Estágios 3/3

- Estágio, estabelece a ordem dos acontecimentos.

$$k : \{0; 1; \ldots; N\}$$

Controle – Transição de estado

- Os problemas de PD são caracterizados pelo fato de permitir, para cada valor da variável de estado e do estágio, efetuar ações alternativas, controles ou decisões.

Vetor de controle : $\bar{u}^t = (u_1, u_2, ..., u_q)$

Esta decisão dependerá muitas vezes do estágio e inclusive do estado do sistema.

$$\bar{u}[\bar{x}(k), k]$$

Equação de transição de estados

- Quando um sistema encontra-se no estágio **k**, no estado **x(k),** aplicando um controle ou *input* **u(k)**, chegaremos no estagio **k+1**, no estado **x(k+1)**.
- Esta relação entre estados, é denominada “equação de transição de estados”.

$$\overline{x}(k+1) = f\left[\overline{x}(k); \overline{u}(k); k\right]$$

Restrições

$\overline{\mathrm{X}}(\mathrm{k})$: Conjunto dos estados possíveis para o estágio **k**.

$\overline{\mathrm{U}}(\mathrm{k})$: Conjunto dos controles admissíveis para o estado x(k) no estágio k.

Condição de contorno: $\overline{\mathrm{x}}(0) = \overline{\mathrm{x}}_0$

Políticas – Trajetórias

- Políticas: Seqüência de controles que levam o sistema de um estado x(0) no estágio inicial até um estado x(N) no estágio final.

$$\overline{\pi} = \left\{u(0), u(1), \ldots, u(N-1)\right\}$$

- Trajetória: Seqüência de estados.

$$\gamma = \gamma(\overline{\pi}) \Leftrightarrow \overline{\pi} = \overline{\pi}(\gamma)$$

Custo de transição

- Associado a cada transição podemos definir uma função de custo.

$$C = C\left[\overline{x}(k); \overline{u}(k); k\right]$$

- Função Objetivo: É uma função de avaliação da política ou trajetória escolhida.

$$J = J(\overline{\pi})$$

Custo da Política escolhida

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} C[\bar{x}(k); \bar{u}(k); k] + \text{Custo de Chegada}$$

Definição do Problema

Dado um sistema dinâmico com Equação de Transição:

$$\bar{x}(k+1) = f\left[\bar{x}(k); \bar{u}(k); k\right]$$

Sujeito a restrições:

$$\bar{x}(k) \in \overline{X}(k) \qquad\qquad \bar{u}(k) \in \overline{U}[\bar{x}(k), k]$$

e a condição de contorno: $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$

Encontrar uma política:

$$\bar{\pi} = \left\{u(0), u(1), \ldots, u(N-1)\right\}$$

que otimize a função objetivo

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} C[\bar{x}(k); \bar{u}(k); k] + \text{Custo de Chegada}$$

RESOLUÇÃO

Princípio de Bellman

- “Uma política ótima tem a propriedade de que qualquer que seja o estado inicial e a decisão inicial, as restantes decisões vão constituir uma política ótima com respeito ao estado resultante da primeira decisão”

Princípio de Bellman

- Qualquer política ótima é composta por sub-políticas ótimas. Caso contrário, teríamos um outra política de menor custo, uma contradição.

Equação de Recorrência

- *Função valor ótimo*: Função que nos dá o mínimo custo (minimização) para levar o sistema desde qualquer estado viável **x(k)** no estágio **k** até o estágio **N** pela aplicação de controles admissíveis.

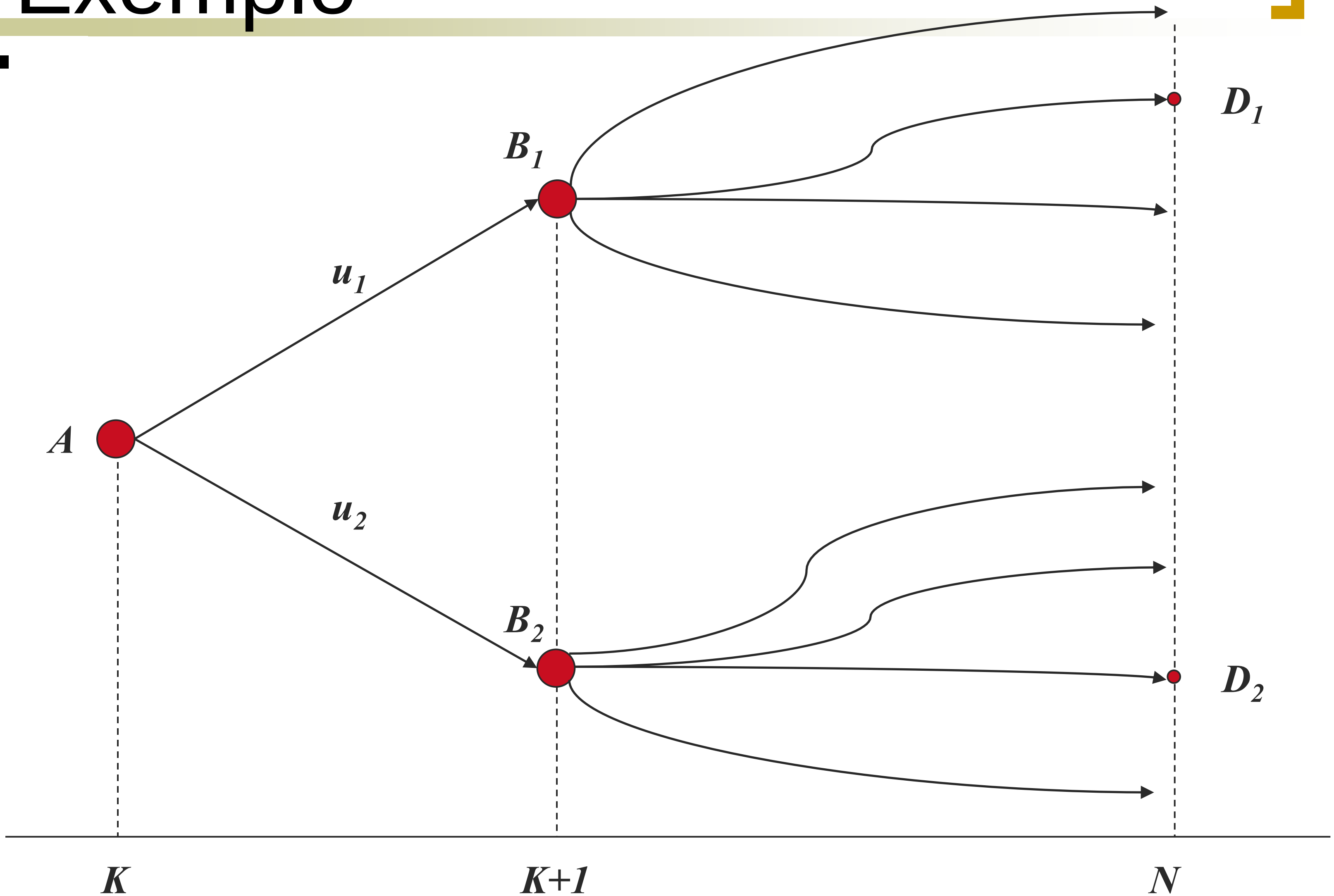
$$V(\bar{x}\,;k)$$

Equação de Recorrência

$$V(\bar{x};k) = \underset{\bar{u}(j)\in U}{Min}\left\{\sum_{j=k}^{N-1} C[\bar{x}(j);\bar{u}(j);j] + V[x(N);N]\right\}$$

Aplicando a equação de recorrência em um grafo acíclico uma política ótima é obtida em *O(mn)*.

Exemplo



$$V(\bar{x};k) = \mathrm{Min}\left\{\begin{array}{l} C[\bar{x};\bar{u}_1;k] + V[\bar{x}_1;k+1] \\ C[\bar{x};\bar{u}_2;k] + V[\bar{x}_2;k+1] \end{array}\right\}$$

Casos Particulares

- Custo do estado – Valor médio
- Demanda não atendida
- Taxa de desconto
- Horizonte ilimitado
- Problema probabilístico
- Número de variáveis de estado
- Número de variáveis de decisão

Comparação

- Problema com 12 períodos e 10 estados por período

	PD	Inspeção
Cálculos	920 somas de 2 parcelas	10 bi de 11 parcelas
Comparações	910	10 bi
Memória	123	22

Problema da Mochila

- Estados: $\beta = 0,1, ..., b$
- Estágios: 1, 2, ..., r, ..., n
- Equação de recorrência
- Subproblemas de mochila
- Complexidade: $O(nb)$