FTC - Lista de Exercícios 01

Cap. 1.2 - Prova de Teoremas

1) a) $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha &\equiv \neg(\alpha \wedge \beta) \vee \alpha \\
&\equiv \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \alpha \\
&\equiv (\neg\alpha \vee \alpha) \vee \neg\beta \\
&\equiv T \vee \neg\beta \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

c) $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta &\equiv F \rightarrow \beta \\
&\equiv \neg F \vee \beta \\
&\equiv T \vee \beta \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

e) $(\alpha \rightarrow \beta) \vee \alpha$

$$
\begin{aligned}
(\alpha \rightarrow \beta) \vee \alpha &\equiv (\neg\alpha \vee \beta) \vee \alpha \\
&\equiv (\alpha \vee \neg\alpha) \vee \beta \\
&\equiv T \vee \beta \\
&\equiv T
\end{aligned}
$$

2) a) $(\alpha \to \beta) \equiv (\neg\beta \to \neg\alpha)$

$$\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$$
$$\equiv \neg\alpha \vee \neg(\neg\beta)$$
$$\equiv \neg\beta \to \neg\alpha$$

b) $(\alpha \vee \beta) \to \gamma \equiv [(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)]$

Por tabela verdade:

α	β	γ	$\alpha \vee \beta$	$(\alpha \vee \beta) \to \gamma$	$\alpha \to \gamma$	$\beta \to \gamma$	$(\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)$
F	F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T	F
T	F	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T	T	T

Colunas iguais

8) Se n é um inteiro não divisível por 3, então $n^2 = 3k+1$ para algum inteiro k.

Prova: Vamos usar uma prova direta. Assuma que n é um inteiro não divisível por 3. Há duas possibilidades para n:

(A) $n = 3k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}$

(B) $n = 3k+2$ para algum $k \in \mathbb{Z}$

Vamos analisar cada possibilidade separadamente.

(A) $n = 3K+1$

Nesse caso $n^2 = (3K+1)^2 = 9K^2 + 6K + 1 = 3(3K^2 + 2K) + 1$

e $n^2 = 3K' + 1$ para $K' = 3K^2 + 2K$.

(B) $n = 3K+2$

Nesse caso $n^2 = (3K+2)^2 = 9K^2 + 12K + 4 = 3(3K^2 + 4K + 1) + 1$

e $n^2 = 3K' + 1$ para $K' = 3K^2 + 4K + 1$. $\blacksquare$

Cap. 1.3 - Conjuntos

1) $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 8\}$, $B = \{n \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq n \leq 5\}$

a) $A \cap B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\} \cap \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$

$= \{0,1,2,3,4,5\}$

b) $C = \{n \in A \cup B \mid n = 2K$ para algum $K \in \mathbb{Z}\} =$

$\{-4,-2,0,2,4,6,8\}$

c) $D = (A-B) \cup (B-A) = \{6,7,8\} \cup \{-5,-4,-3,-2,-1\}$

$= \{-5,-4,-3,-2,-1,6,7,8\}$

d) $[(A \cap C) - (A \cap D)] \times [(A \cap D) - (A \cap C)] =$

$[\{0,2,4,6,8\} - \{6,7,8\}] \times [\{6,7,8\} - \{0,2,4,6,8\}] =$

$\{0,2,4\} \times \{7\} = \{(0,7),(2,7),(4,7)\}$

2) Para que $A - B = B - A$ os conjuntos A e B devem ser iguais.

Para que $A \cup B = A \cap B$ os conjuntos A e B devem ser iguais.

Capítulo 1.4 - Relações

1) a) $\subset$ sobre conjuntos: não é reflexiva
não é simétrica
é transitiva.

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$: não é reflexiva
não é simétrica
não é transitiva.

c) $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 \mid x$ é divisível por $y\}$: é reflexiva
não é simétrica
é transitiva.

d) $\{((x_1,x_2),(y_1,y_2)) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N})^2 \mid x_1 \leq y_1$ e $x_2 \leq y_2\}$: é reflexiva
não é simétrica
é transitiva

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y$ é um inteiro$\}$: é reflexiva
é simétrica
é transitiva.

Capítulo 1.5 - Funções

1) A relação $R \subseteq A \times B$ pode ter no máximo $|A|$ elementos para ser uma função, pois cada $a \in A$ pode pertencer a no máximo um par $(a,b) \in A \times B$.

3) a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n \div 2$ ($\div$ é divisão inteira).

f não é injetora, f é sobrejetora, f não é bijetora.

f não tem inversa.

b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = n(n+1)/2$

g é injetora, g não é sobrejetora, g não é bijetora.

g não tem inversa.

c) $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $h(n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n+1 & \text{se } n \text{ for par.} \end{cases}$

h é injetora, h é sobrejetora, h é bijetora

$h^{-1}(n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ n+1 & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$

(h é inversa dela mesma: $h^{-1} = h$)

Capítulo 1.6 - Conjuntos Enumeráveis

1) a) $\{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 10 = 0\}$ é enumerável. Tome a bijeção:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 \ldots \end{array}$$

b) $\{(n_1, n_2, n_3) \mid n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}\}$ é enumerável.

c) $\{n \in \mathbb{R} \mid 0 < n < 1\}$ não é enumerável.

Capítulo 1.7 - Definições Recursivas

1) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k$.

Definição recursiva $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-1) + n & , n \geq 2. \end{cases}$

2) $\begin{cases} |\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 \\ |\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(A) - \{a\}| & , \text{onde } a \in A. \end{cases}$

Capítulo 1.8 - Indução Matemática

2) $\forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Prova por indução.

Passo base: $\sum_{k=0}^{0} k^2 = 0 = 0(0+1)(2 \cdot 0+1)/6$

Passo indutivo: A hipótese de indução é de que $\sum_{k=0}^{j} k^2 = j(j+1)(2j+1)/6$ para um $j \geq 0$ arbitrário.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{(pela hip. ind.)}$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1) + 6(n^2+2n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + n^2 + 2n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6}$$

$$= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} \quad \blacksquare$$

c) $2^{2n}-1$ é divisível por 3 ($\forall n \geq 0, n \in \mathbb{N}$).

Passo base: $2^{2\cdot 0}-1 = 2^0 - 1 = 0$ é divisível por 3.

Passo indutivo: $2^{2(n+1)} - 1 = 2^{2n+2} - 1$

$$= 2^2 \cdot 2^{2n} - 1$$

$$= 4 \cdot 2^{2n} - 1 - 4 + 4$$

$$= 4(2^{2n} - 1) - 1 + 4$$

$$= 4 \cdot 3k + 3 \qquad \text{(Pela hip. ind. } 2^{2n}-1 = 3k\text{)}$$

$$= 3(4k+1) \text{ é divisível por 3} \quad \blacksquare$$

e) $7^n - 1$ é divisível por 6 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0$.

Passo base: $7^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ é divisível por 6.

Passo indutivo: $7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1$

$= 7 \cdot 7^n - 1 + 7 - 7$

$= 7(7^n - 1) - 1 + 7$

$= 7 \cdot 6K + 6$ (pela hip. ind. $7^n - 1 = 6K$).

$= 6(7K + 1)$ é divisível por 6 ☒

Capítulo 1.9 - Grafos.

1) Um grafo não dirigido possui um número par de vértices de grau ímpar.

Prova. Por contradição, assuma que um grafo possua um número ímpar de vértices de grau ímpar. Nesse caso a soma dos graus de todos os vértices do grafo é ímpar. Mas isto é um absurdo: a soma dos graus dos vértices de um grafo tem que ser par, uma vez que cada aresta contribui com o grau de dois vértices e, portanto, a soma dos graus de todos os vértices é exatamente o dobro do número de arestas no grafo.