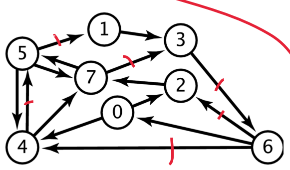
Grafos

Este capítulo define o objeto combinatório conhecido como *grafo*, ou *grafo dirigido*, ou ainda *grafo orientado*. Grafos são importantes modelos para uma grande variedade de problemas de engenharia, computação, matemática, economia, biologia, etc.

Sumário:



Definições básicas

Um *grafo* (= *graph*) é um par de conjuntos: um conjunto de coisas conhecidas como *vértices* e um conjunto de coisas conhecidas como *arcos*. Cada arco é um par ordenado de vértices. O primeiro vértice do par é a *ponta inicial* do arco e o segundo é a *ponta final*.

Os arcos dos grafos são *dirigidos*: cada arco “começa” na sua ponta inicial e “termina” na sua ponta final. Para enfatizar esse fato, usamos ocasionalmente a expressão *grafo dirigido* (= *directed graph*) no lugar de *grafo*, embora o adjetivo *dirigido* seja redundante. (Alguns livros usam o termo *digrafo*. Esse termo é uma tradução de *digraph*, que resultou da contração de *directed* e *graph*.)

A ponta final de todo arco é diferente da ponta inicial. Um arco com ponta inicial `v` e ponta final `w` será denotado por

`v-w` .

(Não confunda essa expressão com “`v` menos `w`”.) Dizemos que o arco `v-w` *sai* de `v` e *entra* em `w`. A presença de um arco `v-w` é independente da presença do arco `w-v`: o grafo pode ter os arcos `v-w` e `w-v`, pode ter apenas um deles, ou pode não ter nenhum deles.

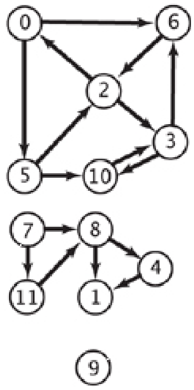
Dizemos que um vértice `w` é *vizinho de* um vértice `v` se `v-w` é um arco do grafo. Dizemos também, nessa circunstância, que `w` é *adjacente a* `v`. A relação de vizinhança não é simétrica: `w` pode ser vizinho de `v` sem que `v` seja vizinho de `w`.

O *tamanho* de um grafo com V vértices e A arcos é a soma $V + A$.

Exemplo A. Uma boa maneira de especificar um grafo é exibir o seu conjunto de arcos. Por exemplo, o conjunto de arcos

```
0-5 0-6 2-0 2-3 3-6 3-10 4-1 5-2 5-10
6-2 7-8 7-11 8-1 8-4 10-3 11-8
```

define um grafo sobre o conjunto de vértices `0..11`. [Este exemplo foi copiado do livro *Algorithms*, de Sedgewick e Wayne.]



Exemplo B. A estrutura da rede WWW pode ser representada por um grafo: os vértices são as páginas HTML e os arcos são os links que apontam de uma página para outra. "Navegar" na rede é pular de um vértice a outro seguindo os arcos.

Exemplo 1

1. ★ Faça uma figura bonita do grafo cujos arcos são indicados a seguir. Uma figura é tão mais bonita quanto mais simétrica e quanto menor o número de cruzamentos de linhas.

   ```
   a-b b-c c-d d-a a-e e-f f-b e-d f-c
   ```

Arcos antiparalelos e "arcos paralelos"

Dois arcos são *antiparalelos* se a ponta inicial de um é a ponta final do outro e vice-versa. Em outras palavras, dois arcos são antiparalelos se um é `v-w` e o outro é `w-v`.

Poderíamos tentar dizer que dois arcos são "paralelos" (ou "repetidos") se têm a mesma ponta inicial e a mesma ponta final. Mas esse conceito não faz sentido sob nossas definições, uma vez que arcos são meros pares de vértices e portanto dois arcos diferentes não podem ter a mesma ponta inicial e a mesma ponta final. Portanto, nossos grafos não têm "arcos paralelos".

Leques e graus de vértices

O *leque de saída* (= *fan-out*) de um vértice num grafo é o conjunto de todos os arcos que saem do vértice. O *leque de entrada* (= *fan-in*) de um vértice é o conjunto de todos os arcos que entram no vértice.

Dado um conjunto X de vértices de um grafo, o *leque de saída* de X é o conjunto dos arcos que saem de X, ou seja, saem de algum vértice em X e entram em algum vértice fora de X. O *leque de entrada* de X é o conjunto dos arcos que entram em X.

O *grau de saída* (= *outdegree*) de um vértice num grafo é o tamanho do seu leque de saída, ou seja, o número de arcos que saem do vértice. O *grau de entrada* (= *indegree*) é o tamanho do leque de entrada do vértice.

Uma *fonte* (= *source*) é um vértice que tem grau de entrada nulo. Um *sorvedouro* (= *sink*) é um vértice que tem grau de saída nulo.

Um vértice é *isolado* se seu grau de entrada e seu grau de saída são ambos nulos. É claro que um grafo sem vértices isolados é completamente definido por seu conjunto de arcos.

Número de arcos

É fácil verificar que a soma dos graus de saída de todos os vértices de um grafo é igual ao número de arcos do grafo. A soma dos graus *de entrada* de todos os vértices também é igual ao número de arcos. Segue daí que um grafo com V vértices tem no máximo

$$V\,(V-1)$$

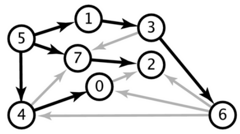
arcos. Esse número é apenas um pouco menor que V^2.

Um grafo é *completo* se todo par ordenado de vértices distintos é um arco. Um grafo completo com V vértices tem exatamente $V\,(V-1)$ arcos. Um *torneio* é qualquer grafo dotado da seguinte propriedade: para cada par `v w` de vértices distintos, `v-w` é um arco ou `w-v` é um arco, mas não ambos. Um torneio com V vértices tem exatamente $\frac{1}{2}V(V-1)$ arcos.

Um grafo é denso se tem muitos arcos em relação ao seu número de vértices e esparso se tem poucos arcos. Mais precisamente, um grafo é *denso* se o seu número de arcos é da mesma ordem que o quadrado do número de vértices, digamos $V^2/2$, ou $V^2/10$, ou $V^2/100$, ou algo assim. (Portanto, o tamanho de um grafo denso é proporcional a V^2.) Um grafo é *esparso* se seu número de arcos é da mesma ordem que V, digamos $10V$, ou $V/2$, ou algo assim. (Portanto, o tamanho de um grafo esparso é proporcional a V.) É claro que essas definições não se aplicam a grafos individuais, mas a famílias infinitas de grafos.

Subgrafos

Um subgrafo de um grafo G é um "pedaço" de G. O conjunto de vértices e o conjunto de arcos do "pedaço" de G devem ser coerentes. Assim, é melhor formular o conceito como uma *relação* entre dois grafos: Um grafo H é *subgrafo* de um grafo G se todo vértice de H é vértice de G e todo arco de H é arco de G. (Notação: $H \subseteq G$.)



Por exemplo, se G é o grafo definido por todos os arcos da figura e H é o grafo formado apenas pelos arcos escuros, então $H \subseteq G$. Outro exemplo: o grafo que tem vértices `1 3 5 7` e arcos `1-3 5-1 5-7` é um subgrafo de H (e também de G). Já os vértices `1 3 5` e os arcos `1-3 5-1 5-7` nem chegam a constituir um grafo.

Alguns tipos de subgrafos merecem destaque. Um subgrafo H de um grafo G é

- *gerador* (= *spanning*) se contém todos os vértices de G,
- *induzido* se todo arco de G com ambas as pontas em H também é arco de H,
- *próprio* se for diferente de G (notação: $H \subset G$).

Dado um conjunto X de vértices de um grafo G, o subgrafo de G induzido *por* X é o subgrafo formado por X e todos os arcos de G que têm ambas as pontas em X. Esse grafo pode ser denotado por $G[X]$.

Se a é um arco de um grafo G, denotaremos por $G-a$ o subgrafo que resulta da remoção do arco a de G.

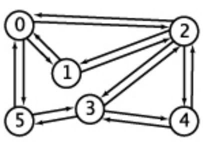
Um supergrafo é o contrário de um subgrafo: um grafo G é *supergrafo* de um grafo H se H for subgrafo de G.

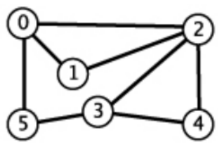
Grafos não-dirigidos

Um grafo é *não-dirigido* (= *undirected*) se cada um de seus arcos é [antiparalelo]() a algum outro arco: para cada arco `v-w`, o grafo também tem o arco `w-v`. Por exemplo, o conjunto de arcos abaixo define um grafo não-dirigido.

```
0-1 0-2 0-5 1-2 2-3 2-4 3-4 3-5
1-0 2-0 5-0 2-1 3-2 4-2 4-3 5-3
```

Num grafo não-dirigido, a relação de adjacência é simétrica: um vértice `w` é adjacente a um vértice `v` se e somente se `v` é adjacente a `w`. (O mesmo se aplica ao sinônimo "vizinho" de "adjacente".)





Convém tratar os pares de arcos antiparalelos de um grafo não-dirigido como uma nova entidade. Assim, diremos que cada par de arcos antiparalelos é uma *aresta* (= *edge*). Qualquer um dos dois arcos da aresta pode ser usado para representar a aresta. Podemos dizer, então, que

```
0-1 0-2 0-5 1-2 2-3 2-4 3-4 3-5
```

é o conjunto de arestas do grafo não-dirigido que aparece no exemplo acima. O número de arestas de um grafo não-dirigido é a metade do seu número de arcos: se E denota o número de arestas e A denota o número de arcos então $E = A/2$. Diremos que uma aresta `v-w` *liga* os vértices `v` e `w`. Diremos também que `v-w` *incide* em `v` e em `w`.

Num grafo não-dirigido, o *leque* de um vértice `v` é o conjunto de arestas que incidem em `v`. O *grau* de `v` é o número de arestas no leque de `v`. É claro que o grau de um vértice é igual ao seu grau de entrada e também ao seu grau de saída. É fácil verificar que a soma dos graus de todos os vértices de um grafo não-dirigido vale $2E$, sendo E o número de arestas.

Subgrafos. Um subgrafo de um grafo não-dirigido pode não ser não-dirigido (pois pode incluir apenas um dos arcos de alguma aresta). Se queremos um subgrafo não-dirigido, precisamos dizer isso explicitamente.

A propósito, é claro que todo subgrafo induzido de um grafo não-dirigido é necessariamente não-dirigido.

Exemplo 2

1. *Certo ou errado?* Num grafo não-dirigido, se `v-w` é um arco então `w-v` também é um arco. Num grafo (dirigido), se `v-w` é um arco então `w-v` não é um arco.

Perguntas e respostas

- PERGUNTA: Por que *digrafo* é escrito sem acento? Não deveria ser *dígrafo*, com acento?

  RESPOSTA: Nãããão! *Dígrafo* (com acento) é outra coisa muito diferente!

- PERGUNTA: Eu fico confuso com “adjacente”: se `v-w` é um arco, devo dizer “`w` é adjacente a `v`” ou “`v` é adjacente a `w`”?

  RESPOSTA: É a primeira alternativa. Mas eu também fico confuso. Teria sido melhor, quem sabe, dizer algo como “`v` *domina* `w`”.

- PERGUNTA: Por que este sítio não permite arcos paralelos?

  RESPOSTA: Arcos são meros pares de vértices. Assim, não é possível ter dois arcos com a mesma ponta inicial e a mesma ponta final. O livro de Sedgewick permite arcos paralelos de maneira apenas informal, tratando-os como “cópias” distintas de um mesmo arco.

- PERGUNTA: O livro de Sedgewick admite *laços* (= *loops*), ou seja, arcos com ponta final igual à ponta inicial. Por que este sítio proibe laços?

  RESPOSTA: Porque isso simplifica ligeiramente as coisas e não traz nenhum prejuízo.

---

www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/
Atualizado em 2017-04-10
Paulo Feofiloff
IME-USP