Caminhos e ciclos em grafos

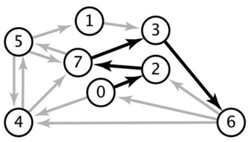
Os conceitos de caminho e ciclo são essenciais no estudo de grafos. É preciso fazer distinções um tanto sutis entre caminhos, caminhos simples, passeios, ciclos, e ciclos simples.

Sumário:

Caminhos

Um *passeio* (= *walk*) em um grafo é uma sequência de vértices dotada da seguinte propriedade: se `v` e `w` são vértices consecutivos na sequência então `v-w` é um arco do grafo. (Note que o inverso de um passeio não é, em geral, um passeio.) Um *arco do passeio* é qualquer arco `v-w` do grafo tal que `w` é o sucessor de `v` no passeio. Um passeio é *fechado* (= *closed*) se tem pelo menos dois arcos e seu primeiro vértice coincide com o último.

Um *caminho* (= *path*) em um grafo é um passeio sem arcos repetidos, ou seja, um passeio em que os arcos são todos diferentes entre si. Um caminho é *simples* se não tem vértices repetidos. Por exemplo, `0-2-7-3-6` é um caminho simples no grafo da figura.

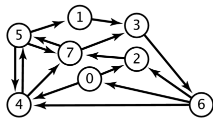


Todos os arcos de um caminho apontam na mesma direção — de um vértice para o seu sucessor. Há quem goste de enfatizar esse fato dizendo *caminho dirigido* em vez de *caminho*.

A *origem* de um caminho é o seu primeiro vértice. O *término* é o seu último vértice. Se um caminho tem origem `s` e término `t`, dizemos que *vai de* `s` *a* `t`.

O *comprimento* (= *length*) de um caminho é o número de arcos do caminho. Se um caminho tem n vértices, seu comprimento é pelo menos $n-1$; se o caminho é simples, seu comprimento é exatamente $n-1$.

Exemplo A. Considere, por exemplo, o grafo da figura e veja alguns caminhos nesse grafo:




```
0-2-7-3-6
7-3
7
2-7-5-4-7-3
5-1-3-6-4-5
5-7-5
```

Os três primeiros caminhos são simples e têm comprimentos 4, 1 e 0 respectivamente. Os três últimos não são simples e têm comprimentos 5, 5 e 2 respectivamente. Para completar o exemplo, veja cinco sequências de vértices que *não* são caminhos:

```
1 3 6 2 7 3 6 4
2 7 5 4 7 5 1
6 3 7 2 0
1 3 7
1 7 3
```

As duas primeiras não são caminhos porque têm arcos repetidos.

Exemplo B. Considere o grafo cujos vértices são páginas da teia WWW e cujos arcos representam links (referências) de uma página a outra. Um passeio nesse grafo corresponde a uma pessoa que navega no espaço WWW seguindo os links.

Exemplo C. Considere o grafo cujos vértices são aeroportos e cujos arcos são voos comerciais entre aeroportos. Um caminho simples nesse grafo pode representar um roteiro de viagem com conexões.

Exercícios 1

1. *Todos os caminhos.* Faça uma lista de todos os caminhos simples com exatamente 4 vértices no grafo definido pelos arcos `7-3 1-4 7-8 0-5 5-2 3-8 2-9 0-6 4-9 2-6 6-4`.
2. [Sedgewick 17.4] *Todos os caminhos.* Faça uma lista de todos os caminhos simples com exatamente 4 vértices no grafo não-dirigido definido pelas arestas `3-7 1-4 7-8 0-5 5-2 3-8 2-9 0-6 4-9 2-6 6-4`.
3. *Verifica passeio.* Escreva uma função booleana `GRAPHcheckWalk()` que verifique se uma dada sequência `seq[0..k]` de vértices de um grafo é um passeio. Faça duas versões da função: uma supõe que o grafo é dado por sua matriz de adjacências e outra supõe que o grafo é dado por suas listas de adjacência.
4. *Passeio implica caminho.* Suponha que um grafo tem um passeio de um vértice x um vértice y. Mostre que existe um caminho de x a y que usa um subconjunto dos arcos do passeio.
5. ★ *Caminho versus caminho simples.* Mostre que, para qualquer caminho P num grafo, alguma subsequência de P é um caminho simples com a mesma origem e o mesmo término de P. (Logo, existe um caminho de s a t se e somente se existe um caminho simples de s a t.)
6. *Verifica caminho simples.* Escreva uma função `GRAPHcheckSimplePath()` que verifique se uma sequência `seq[0..k]` de vértices de um grafo é um caminho simples. A função deve devolver `-1` se a sequência não é um caminho, `1` se a sequência é um caminho simples, e `0` se a sequência é um caminho não simples. Faça duas versões da função: uma supõe que o grafo é dado por sua matriz de adjacências e outra supõe que o grafo é dado por listas de adjacência.

7. *Caminhos inversos.* Mostre que em qualquer grafo não-dirigido o inverso de um caminho também é um caminho.

Ciclos

Ciclos são estruturas muito importantes. São os ciclos que tornam grafos interessantes mas também complexos e difíceis de manipular.

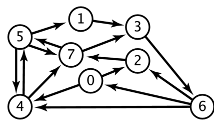
Um *ciclo* (= *cycle*) em um grafo é um caminho fechado. (Portanto, todo ciclo tem comprimento maior que 1 e não tem arcos repetidos.) Dizemos que um arco `v-w` *pertence* a um dado ciclo (ou que o ciclo *passa* pelo arco) se o vértice `w` é o sucessor de `v` no ciclo. Um ciclo é *simples* se não tem vértices repetidos exceto pelo último (que coincide com o primeiro).

É apropriado abusar um pouco do conceito de igualdade e tratar dois ciclos simples como *iguais* se eles têm o mesmo conjunto de arcos, ainda que tenham origens diferentes. Por exemplo, trataremos como iguais os ciclos `6-2-7-3-6`, `2-7-3-6-2`, `7-3-6-2-7` e `3-6-2-7-3`.

Todos os arcos de um ciclo apontam no mesmo sentido — de um vértice do ciclo para o seu sucessor. Há quem goste de enfatizar esse fato dizendo *ciclo dirigido* no lugar de *ciclo*.

Exemplo D. Seguem alguns exemplos de ciclos no grafo da figura:

```
5-7-5
4-7-5-4
6-2-7-3-6
5-4-7-3-6-2-7-5
```



O primeiro tem comprimento 2, o segundo tem comprimento 3, e o terceiro tem comprimento 4. Esses três ciclos são simples. Já o último ciclo não é simples. Para completar o exemplo, veja dois passeios que não são ciclos:

```
6
5-4-7-5-1-3-6-2-7-5
```

Exercícios 2

1. ★ Considere o grafo definido pelos arcos `0-1 1-2 2-0 2-3 3-1`. A sequência `0-1-2-3-1-2-0` é um ciclo?
2. *Verifica ciclo.* Escreva uma função booleana que verifique se uma sequência `seq[0..k]` de vértices de um grafo é um ciclo. Faça duas versões da função: uma supõe que o grafo é dado por sua matriz de adjacências e outra supõe que o grafo é dado por listas de adjacência.
3. Faça uma lista de todos os ciclos simples (diferentes entre si) no grafo definido pelos arcos `0-5 5-4 7-8 4-3 0-2 9-11 0-1 11-12 3-5 9-12 9-10 10-9 6-4 0-6`.
4. Faça uma lista de todos os diferentes ciclos simples no grafo definido pelo conjunto de arcos `0-4 1-0 2-1 2-3 3-0 3-4 4-1 4-2`. Faça uma lista de todos os ciclos simples no grafo definido pelo conjunto de arcos `0-2 1-0 2-1 2-3 3-0 3-1`.
5. Faça uma lista de todos os ciclos simples no grafo definido pelo conjunto de arcos `0-2 1-0 2-1 2-3 3-0 3-1`.

6. Faça uma lista de todos os ciclos simples no grafo não-dirigido definido pelo conjunto de arestas `0-1 1-2 2-3`.
7. *Ciclos versus ciclos simples.* Seja *a* um arco de um grafo. Mostre que *a* pertence a um ciclo se somente se *a* pertence a um ciclo simples.
8. *Ciclos em grafos sem sorvedouros.* Esboce um algoritmo para encontrar (e exibir) um ciclo simples num grafo sem sorvedouros.

---

www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/
Atualizado em 2017-04-08
Paulo Feofiloff
IME-USP